

2024 年普通高等学校招生全国统一考试

数 学

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x \mid -5 < x^3 < 5\}$, $B = \{-3, -1, 0, 2, 3\}$, 则 $A \cap B =$
A. $\{-1, 0\}$ B. $\{2, 3\}$ C. $\{-3, -1, 0\}$ D. $\{-1, 0, 2\}$
2. 若 $\frac{z}{z-1} = 1 + i$, 则 $z =$
A. $-1 - i$ B. $-1 + i$ C. $1 - i$ D. $1 + i$
3. 已知向量 $\boldsymbol{a} = (0, 1)$, $\boldsymbol{b} = (2, x)$, 若 $\boldsymbol{b} \perp (\boldsymbol{b} - 4\boldsymbol{a})$, 则 $x =$
A. -2 B. -1 C. 1 D. 2
4. 已知 $\cos(\alpha + \beta) = m$, $\tan \alpha \tan \beta = 2$, 则 $\cos(\alpha - \beta) =$
A. $-3m$ B. $-\frac{m}{3}$ C. $\frac{m}{3}$ D. $3m$
5. 已知圆柱和圆锥的底面半径相等, 侧面积相等, 且它们的高均为 $\sqrt{3}$, 则圆锥的体积为
A. $2\sqrt{3}\pi$ B. $3\sqrt{3}\pi$ C. $6\sqrt{3}\pi$ D. $9\sqrt{3}\pi$
6. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2ax - a, & x < 0, \\ e^x + \ln(x+1), & x \geq 0 \end{cases}$ 在 \mathbb{R} 上单调递增, 则 a 的取值范围是
A. $(-\infty, 0]$ B. $[-1, 0]$ C. $[-1, 1]$ D. $[0, +\infty)$
7. 当 $x \in [0, 2\pi]$ 时, 曲线 $y = \sin x$ 与 $y = 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的交点个数为
A. 3 B. 4 C. 6 D. 8
8. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbb{R} , $f(x) > f(x-1) + f(x-2)$, 且当 $x < 3$ 时, $f(x) = x$, 则下列结论中一定正确的是
A. $f(10) > 100$ B. $f(20) > 1\,000$ C. $f(10) < 1\,000$ D. $f(20) < 10\,000$

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分)

设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\sin C = \sqrt{2} \cos B, a^2 + b^2 - c^2 = \sqrt{2}ab$.

(1) 求 B ;

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $3 + \sqrt{3}$, 求 c .

16. (15 分)

已知 $A(0, 3)$ 和 $P\left(3, \frac{3}{2}\right)$ 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 上两点.

(1) 求 C 的离心率;

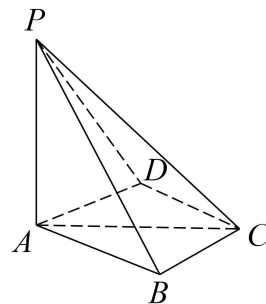
(2) 若过 P 的直线 l 交 C 于另一点 B , 且 $\triangle ABP$ 的面积为 9, 求 l 的方程.

17. (15 分)

如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $PA = AC = 2$, $BC = 1$, $AB = \sqrt{3}$.

(1) 若 $AD \perp PB$, 证明: $AD \parallel$ 平面 PBC ;

(2) 若 $AD \perp DC$, 且二面角 $A-CP-D$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{7}$, 求 AD .



18. (17 分)

已知函数 $f(x) = \ln \frac{x}{2-x} + ax + b(x-1)^3$.

(1) 若 $b = 0$, 且 $f'(x) \geq 0$, 求 a 的最小值;

(2) 证明: 曲线 $y = f(x)$ 是中心对称图形;

(3) 若 $f(x) > -2$ 当且仅当 $1 < x < 2$, 求 b 的取值范围.

19. (17 分)

设 m 为正整数, 数列 $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$ 是公差为 0 的等差数列, 若从中删去两项 a_i 和 a_j ($i < j$) 后剩余的 $4m$ 项可被平均分为 m 组, 且每组的 4 个数都能构成等差数列, 则称数列 $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$ 是 (i, j) -可分数列.

(1) 写出所有的 (i, j) , $1 \leq i < j \leq 6$, 使得数列 a_1, a_2, \dots, a_6 是 (i, j) -可分数列;

(2) 当 $m \geq 3$ 时, 证明: 数列 $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$ 是 $(2, 13)$ -可分数列;

(3) 从 $1, 2, \dots, 4m+2$ 中一次任取两个数 i 和 j ($i < j$), 记数列 $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$ 是 (i, j) -可分数列的概率为 P_m , 证明: $P_m > \frac{1}{8}$.