

2024 年普通高等学校招生全国统一考试

数 学

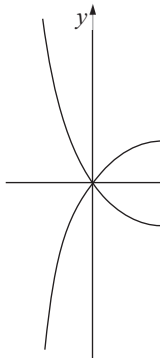
注意事项：

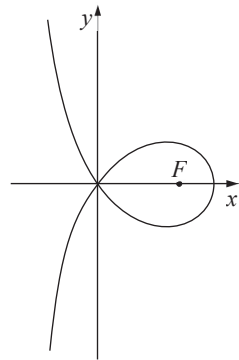
1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x \mid -5 < x^3 < 5\}$, $B = \{-3, -1, 0, 2, 3\}$, 则 $A \cap B =$
A. $\{-1, 0\}$ B. $\{2, 3\}$ C. $\{-3, -1, 0\}$ D. $\{-1, 0, 2\}$
2. 若 $\frac{z}{z-1} = 1 + i$, 则 $z =$
A. $-1 - i$ B. $-1 + i$ C. $1 - i$ D. $1 + i$
3. 已知向量 $\boldsymbol{a} = (0, 1)$, $\boldsymbol{b} = (2, x)$, 若 $\boldsymbol{b} \perp (\boldsymbol{b} - 4\boldsymbol{a})$, 则 $x =$
A. -2 B. -1 C. 1 D. 2
4. 已知 $\cos(\alpha + \beta) = m$, $\tan \alpha \tan \beta = 2$, 则 $\cos(\alpha - \beta) =$
A. $-3m$ B. $-\frac{m}{3}$ C. $\frac{m}{3}$ D. $3m$
5. 已知圆柱和圆锥的底面半径相等，侧面积相等，且它们的高均为 $\sqrt{3}$, 则圆锥的体积为
A. $2\sqrt{3}\pi$ B. $3\sqrt{3}\pi$ C. $6\sqrt{3}\pi$ D. $9\sqrt{3}\pi$
6. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2ax - a, & x < 0, \\ e^x + \ln(x+1), & x \geq 0 \end{cases}$ 在 \mathbb{R} 上单调递增，则 a 的取值范围是
A. $(-\infty, 0]$ B. $[-1, 0]$ C. $[-1, 1]$ D. $[0, +\infty)$
7. 当 $x \in [0, 2\pi]$ 时，曲线 $y = \sin x$ 与 $y = 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的交点个数为
A. 3 B. 4 C. 6 D. 8
8. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbb{R} , $f(x) > f(x-1) + f(x-2)$, 且当 $x < 3$ 时, $f(x) = x$, 则下列结论中一定正确的是
A. $f(10) > 100$ B. $f(20) > 1\,000$ C. $f(10) < 1\,000$ D. $f(20) < 10\,000$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 为了解推动出口后的亩收入(单位:万元)情况,从该种植区抽取样本,得到推动出口后亩收入的样本均值 $\bar{x} = 2.1$, 样本方差 $s^2 = 0.01$, 已知该种植区以往的亩收入 X 服从正态分布 $N(1.8, 0.1^2)$, 假设推动出口后的亩收入 Y 服从正态分布 $N(\bar{x}, s^2)$, 则(若随机变量 Z 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(Z < \mu + \sigma) \approx 0.8413$)
- A. $P(X > 2) > 0.2$ B. $P(X > 2) < 0.5$
C. $P(Y > 2) > 0.5$ D. $P(Y > 2) < 0.8$
10. 设函数 $f(x) = (x-1)^2(x-4)$, 则
- A. $x = 3$ 是 $f(x)$ 的极小值点
B. 当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) < f(x^2)$
C. 当 $1 < x < 2$ 时, $-4 < f(2x-1) < 0$
D. 当 $-1 < x < 0$ 时, $f(2-x) > f(x)$
11. 造型“ ∞ ”可以做成美丽的丝带,将其看作图中曲线 C 的一部分. 已知 C 过坐标原点 O , 且 C 上的点满足横坐标大于 -2 , 到点 $F(2, 0)$ 的距离与到定直线 $x = a$ ($a < 0$) 的距离之积为 4, 则
- A. $a = -2$
B. 点 $(2\sqrt{2}, 0)$ 在 C 上
C. C 在第一象限的点的纵坐标的最大值为 1
D. 当点 (x_0, y_0) 在 C 上时, $y_0 \leq \frac{4}{x_0 + 2}$
- 



三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 设双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_2 作平行于 y 轴的直线交 C 于 A, B 两点, 若 $|F_1A| = 13, |AB| = 10$, 则 C 的离心率为 _____.
13. 若曲线 $y = e^x + x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线也是曲线 $y = \ln(x + 1) + a$ 的切线, 则 $a =$ _____.
14. 甲乙两人各有四张卡片, 每张卡片上标有一个数字, 甲的卡片上分别标有数字 1, 3, 5, 7, 乙的卡片上分别标有数字 2, 4, 6, 8. 两人进行四轮比赛, 在每轮比赛中, 两人各自从自己持有的卡片中随机选一张, 并比较所选卡片上的数字大小, 数字大的人得 1 分, 数字小的人得 0 分, 然后各自弃置此轮所选的卡片 (弃置的卡片在此后的轮次中不能使用), 则四轮比赛后, 甲的总得分不小于 2 的概率为 _____.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分)

设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\sin C = \sqrt{2} \cos B, a^2 + b^2 - c^2 = \sqrt{2}ab$.

(1) 求 B ;

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $3 + \sqrt{3}$, 求 c .

16. (15 分)

已知 $A(0, 3)$ 和 $P\left(3, \frac{3}{2}\right)$ 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 上两点.

(1) 求 C 的离心率;

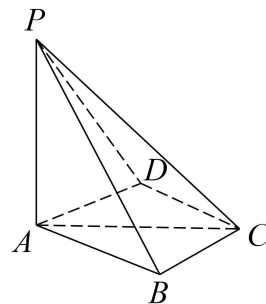
(2) 若过 P 的直线 l 交 C 于另一点 B , 且 $\triangle ABP$ 的面积为 9, 求 l 的方程.

17. (15 分)

如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $PA = AC = 2$, $BC = 1$, $AB = \sqrt{3}$.

(1) 若 $AD \perp AB$, 证明: $AD \parallel$ 平面 PBC ;

(2) 若 $AD \perp DC$, 且二面角 $A-CP-D$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{7}$, 求 AD .



18. (17 分)

已知函数 $f(x) = \ln \frac{x}{2-x} + ax + b(x-1)^3$.

(1) 若 $b = 0$, 且 $f'(x) \geq 0$, 求 a 的最小值;

(2) 证明: 曲线 $y = f(x)$ 是中心对称图形;

(3) 若 $f(x) > -2$ 当且仅当 $1 < x < 2$, 求 b 的取值范围.

19. (17 分)

设 m 为正整数, 数列 $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$ 是公差为 0 的等差数列, 若从中删去两项 a_i 和 a_j ($i < j$) 后剩余的 $4m$ 项可被平均分为 m 组, 且每组的 4 个数都能构成等差数列, 则称数列 $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$ 是 (i, j) -可分数列.

(1) 写出所有的 (i, j) , $1 \leq i < j \leq 6$, 使得数列 a_1, a_2, \dots, a_6 是 (i, j) -可分数列;

(2) 当 $m \geq 3$ 时, 证明: 数列 $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$ 是 $(2, 13)$ -可分数列;

(3) 从 $1, 2, \dots, 4m+2$ 中一次任取两个数 i 和 j ($i < j$), 记数列 $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$ 是 (i, j) -可分数列的概率为 P_m , 证明: $P_m > \frac{1}{8}$.