#12 세 함수 f,g,h가 전단사함수라고 할 때, 다음 관계 증명

$$(f\circ g\circ h)^{-1} = h^{-1}\circ g^{-1}\circ f^{-1}$$

① $F\circ G = I$ 이면 $G=F^{-1}$

&② $G\circ F = I$

증명) 세 함수 f,g,h가 전단사함수이므로 모두 일대일 대응이다.

=> 따라서 f,g,h 모두 역함수

$(h\circ g\circ f)^{-1}\circ(h\circ g\circ f) = I$

양변에 $f^{-1}\circ g^{-1}\circ h^{-1}$를 합성

$(h\circ g\circ f)^{-1}\circ\underbrace{(h\circ g\circ f)\circ(f^{-1}\circ g^{-1}\circ h^{-1})}_{I} = f^{-1}\circ g^{-1}\circ h^{-1}$

∴ $(h\circ g\circ f)^{-1}\circ I = f^{-1}\circ g^{-1}\circ h^{-1}$

=> $(h\circ g\circ f^{-1}) = f^{-1}\circ g^{-1}\circ h^{-1}$

① $(f\circ g\circ h)\circ(h^{-1}\circ g^{-1}\circ f^{-1})$

$= f\circ g\circ(h\circ h^{-1})\circ g^{-1}\circ f^{-1}$

$= f\circ(g\circ g^{-1})\circ f^{-1} = f\circ f^{-1} = I$

② $(h^{-1}\circ g^{-1}\circ f^{-1})\circ(f\circ g\circ h)$

$= h^{-1}\circ g^{-1}\circ(f^{-1}\circ f)\circ g\circ h$

$= h^{-1}\circ(g^{-1}\circ g)\circ h$

$= h^{-1}\circ h = I$.