6장 정상 자기회귀-이동평균과정

AR(p) 모형, MA(q) 모형, ARMA(p,q) 모형

6.1 자기회귀과정(AR 과정)

- AR(p) 모형

$$Z_t - \mu = \phi_1(Z_{t-1} - \mu) + \cdots + \phi_p\left(Z_{t-p} - \mu\right) + \varepsilon_t$$

$$Z_t = \delta + \phi_1 Z_{t-1} + \cdots + \phi_p Z_{t-p} + \varepsilon_t, \qquad \delta = (1 - \phi_1 - \cdots - \phi_p)\mu$$

- 다중회귀모형과 유사

- 정상성을 만족시키기 위한 조건 존재

- 참고: 후진작용소

  - 후진작용소 B

$$BZ_t = Z_{t-1}, \qquad B^2 Z_t = Z_{t-2}, \qquad \cdots, \qquad B^n Z_t = Z_{t-n}$$

  - 후진작용소에 의한 AR(p) 모형의 표현

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \cdots + \phi_p Z_{t-p} + \varepsilon_t$$

$$Z_t - \phi_1 Z_{t-1} - \cdots - \phi_p Z_{t-p} = \varepsilon_t$$

$$\left(1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p\right) Z_t = \varepsilon_t$$

$$\phi(B) Z_t = \varepsilon_t$$

$\phi(B)$: AR operator

6.1.1 AR(1) 과정

- 모형

$$Z_t = \delta + \phi Z_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\phi(B) Z_t = \varepsilon_t, \qquad \phi(B) = 1 - \phi B$$

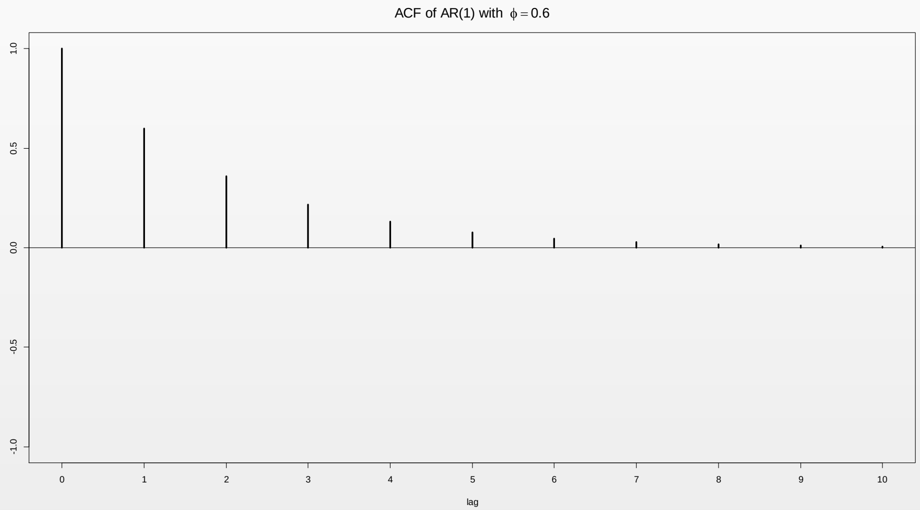
- 정상성 조건: $|\phi| < 1$ $\Leftrightarrow$ $\phi(B) = 0$의 근의 절대값 > 1

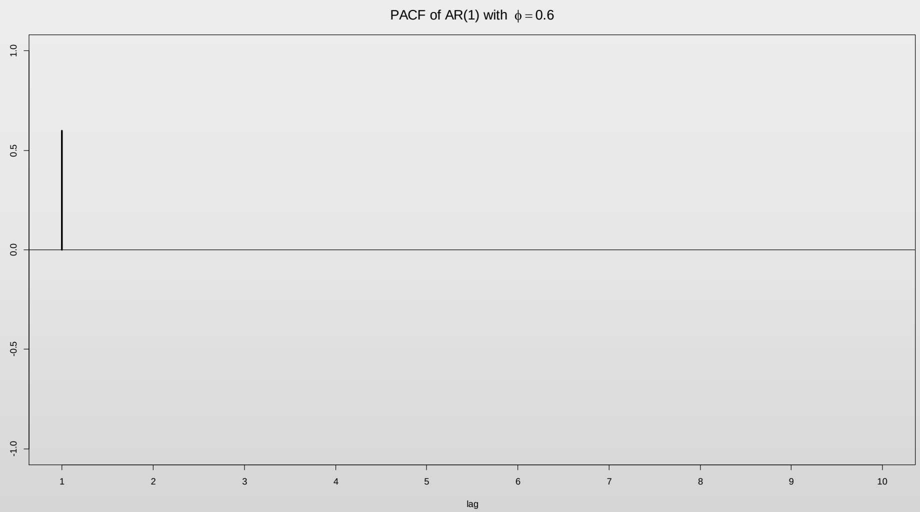
- ACF와 PACF

$$\rho_k = \phi^k, \quad k \geq 1$$

$$\phi_{kk} = \begin{cases} \rho_1 = \phi, & k = 1 \\ 0, & k \geq 2 \end{cases}$$

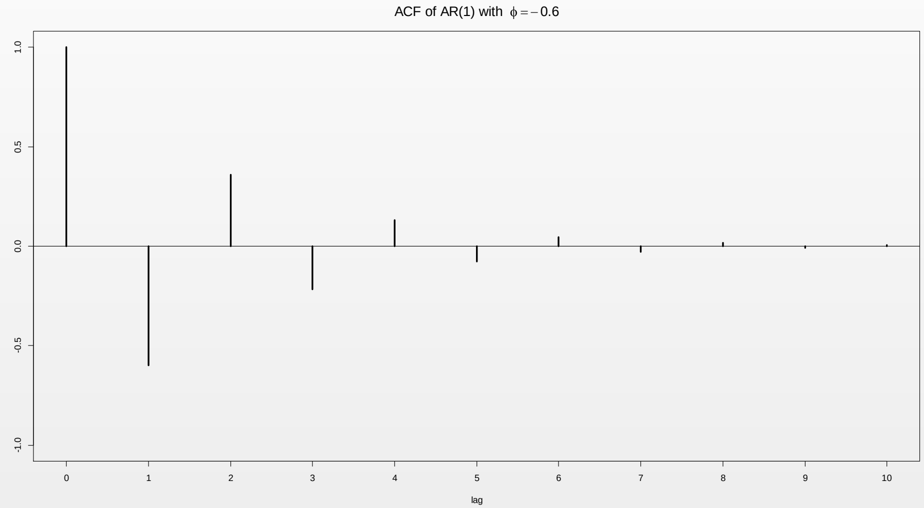
- AR(1)의 이론적인 ACF와 PACF: ϕ=0.6

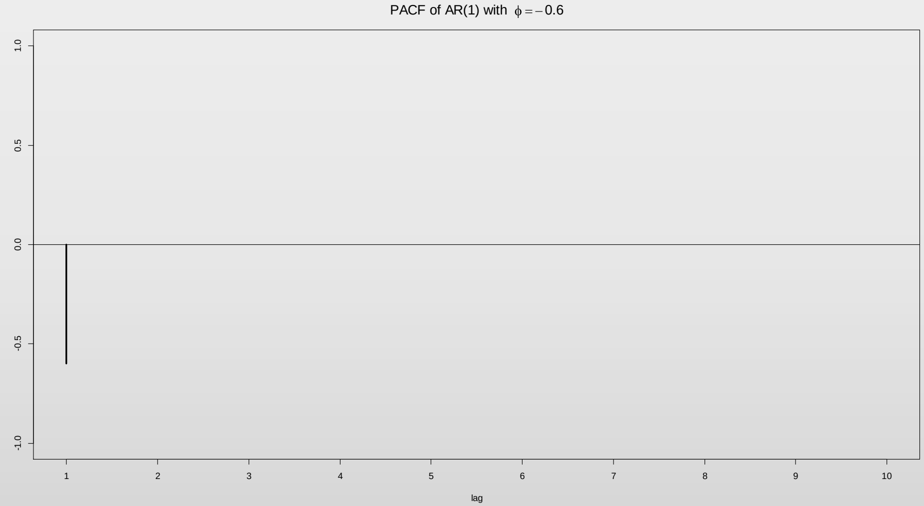




ACF는 지수적으로 감소
PACF는 1시차 이후 절단

- AR(1)의 이론적인 ACF와 PACF: ϕ=-0.6





ϕ가 음수인 경우
ACF는 음수와 양수의 값을 번갈아 가지며 지수적으로 감소

6.1.2 AR(2) 과정

- 모형

$$Z_t = \delta + \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \varepsilon_t$$

$$\phi(B) Z_t = \varepsilon_t, \qquad \phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2$$

- 정상성 조건

$$\begin{aligned} \phi_1 + \phi_2 &< 1 \\ \phi_2 - \phi_1 &< 1 \\ -1 < \phi_2 &< 1 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \phi(B) = 0\text{의 근의 절대값} > 1$$

- AR(2) 모형의 이론적 ACF와 PACF

ACF: $$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2}, \quad k \ge 1$$

$$\rho_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2}, \quad \rho_2 = \frac{\phi_1^2 + \phi_2 - \phi_2^2}{1-\phi_2}$$

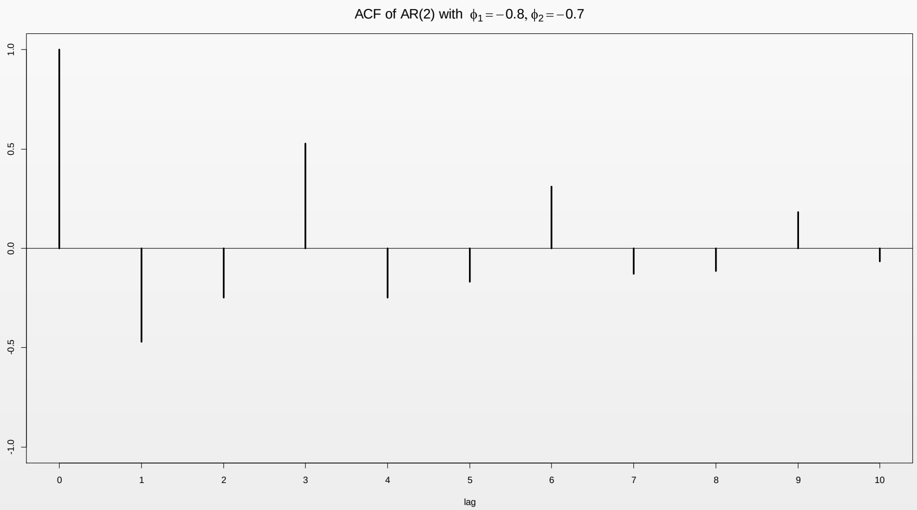
PACF: $$\phi_{11} = \rho_1$$

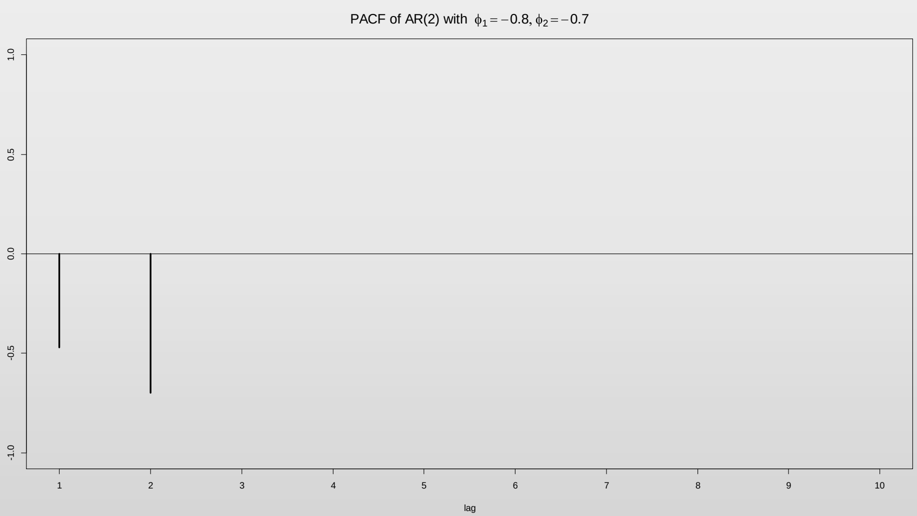
$$\phi_{22} = \phi_2$$

$$\phi_{kk} = 0, \quad k \ge 3$$

정확한 수식보다는 시차 k에 따른 두 함수의 형태가 중요

- AR(2)의 이론적 ACF, PACF: ϕ_1=-0.8, ϕ_2=-0.7

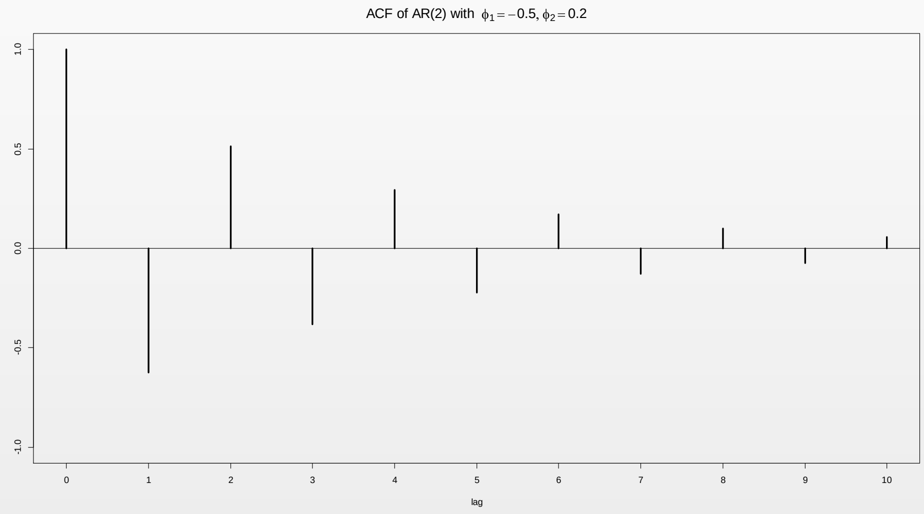


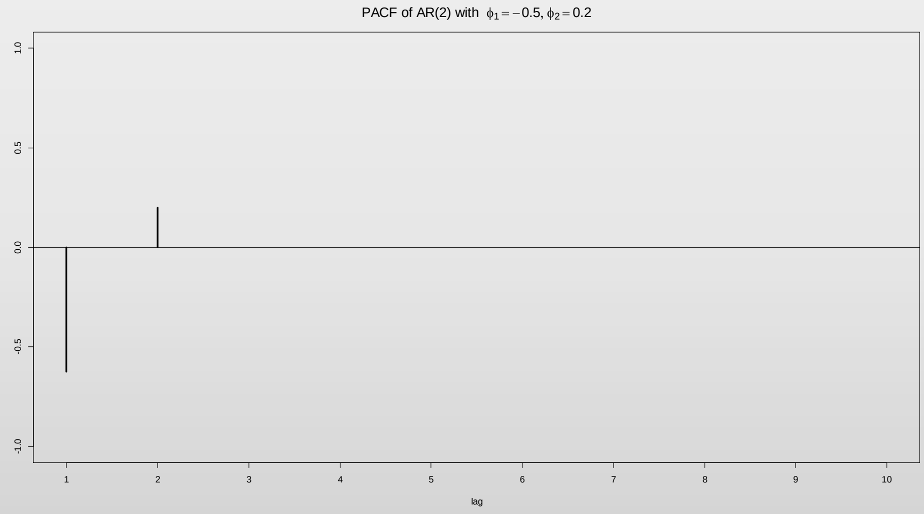


ACF는 점차 소멸하는
sine 함수 형태

PACF는 2시차 이후 절단

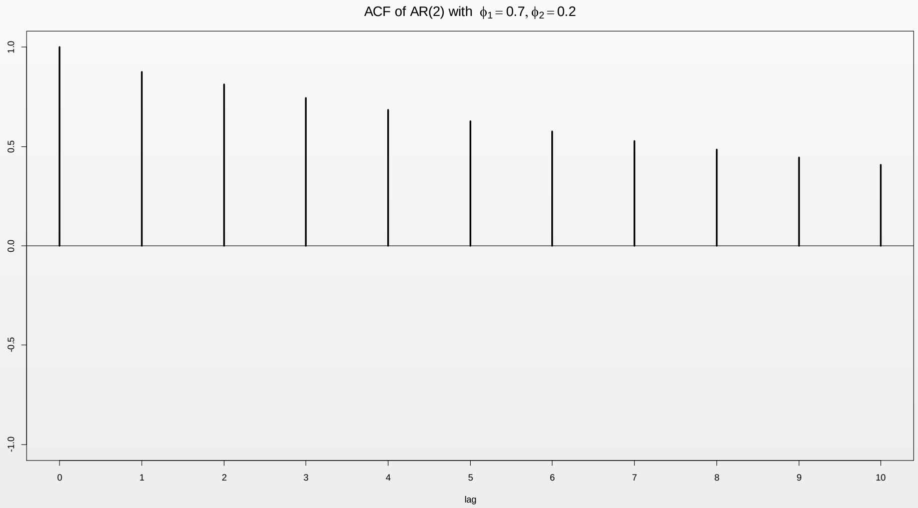
- AR(2)의 이론적 ACF, PACF: ϕ_1=-0.5, ϕ_2=0.2

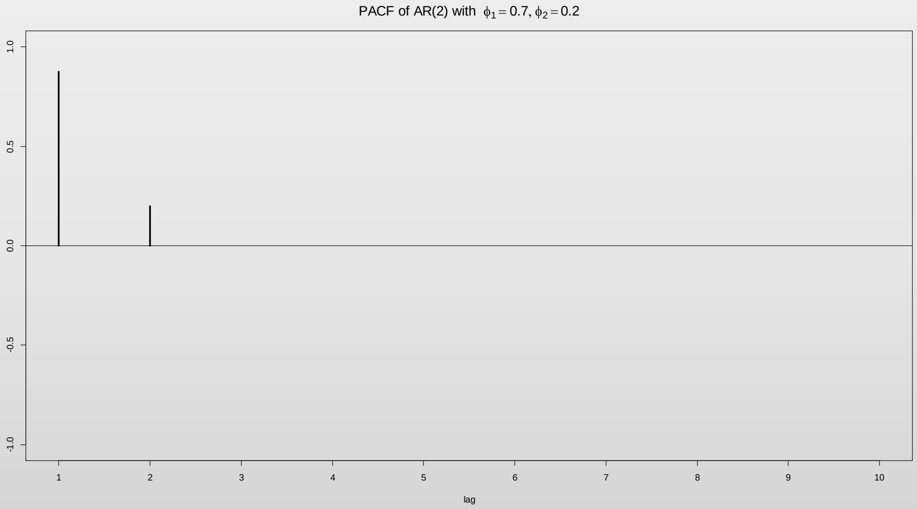




ACF는 지수형태로 감소

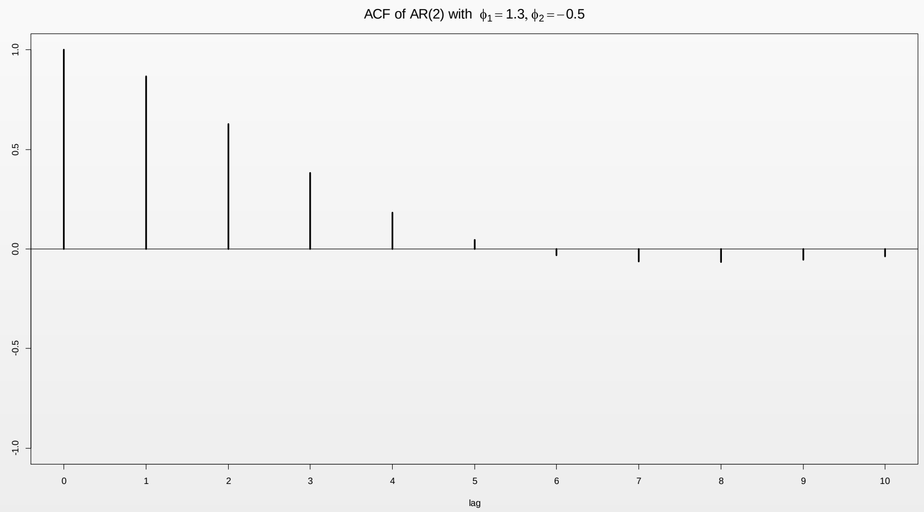
- AR(2)의 이론적 ACF, PACF: ϕ_1=0.7, ϕ_2=0.2

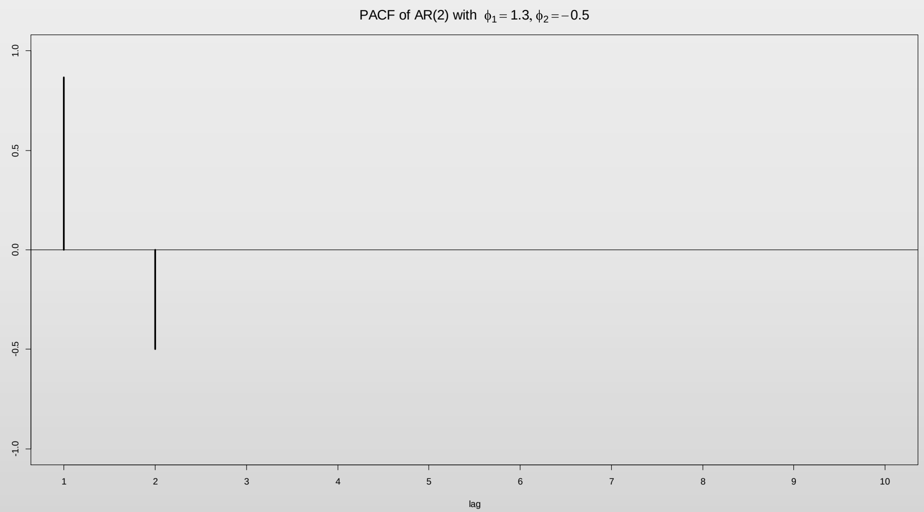




ACF는 지수적 형태의 감소
- 감소 속도가 비교적 완만
- $\phi_1+\phi_2$=0.9로 정상성 조건의 한계값인 1에 근접

- AR(2)의 이론적 ACF, PACF: ϕ_1=1.3, ϕ_2=-0.5





ACF는 점차 소멸하는
sine 함수의 형태

6.1.3 AR(p) 과정

- 모형

$$\phi(B)Z_t = \varepsilon_t \qquad \phi(B) = 1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p$$

- 정상성 조건

특성방정식 $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p = 0$

근의 절대값이 1보다 클 때 AR(p) 과정은 정상성 만족

- 특성방정식에 의한 정상성 판단

모형 1: $Z_t = Z_{t-1} + \varepsilon_t$ 　　　　모형 2: $Z_t = Z_{t-1} - \frac{1}{4}Z_{t-2} + \varepsilon_t$

$$1.\ Z_t = 1 \times Z_{t-1} + \varepsilon_t \quad \Rightarrow \quad Z_t - Z_{t-1} = \varepsilon_t$$

$$\Rightarrow (1-B)Z_t = \varepsilon_t$$

$$\Rightarrow 1 - \mathrm{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 1$$

비정상

$$2.\ Z_t = Z_{t-1} - \frac{1}{4}Z_{t-2} + \varepsilon_t$$

$$\Rightarrow \left(1 - B + \frac{1}{4}B^2\right)Z_t = \varepsilon_t$$

$$\Rightarrow \left(1 - B + \frac{1}{4}B^2\right) = \frac{1}{4}(B-2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow B = 2$$

정상

- AR(p) 모형의 이론적인 ACF, PACF
  - ACF: 지수함수의 형태 혹은 sine 함수와 같은 형태를 가지며 0으로 빠르게 감소
  - PACF: 시차 p까지는 0이 아닌 값을 가지나 시차 p 이후에는 0이 됨 (절단 현상)

6.2 이동평균과정(MA 과정)

- MA(q) 모형

$$Z_t - \mu = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q} = \theta(B)\varepsilon_t$$

$$\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \cdots + \theta_q B^q$$ θ(B): MA operator

- 현재 시점의 백색잡음과 과거 q시차까지의 백색잡음의 선형결합

- 유한개의 백색잡음의 합이므로 항상 정상성을 만족

6.2.1 MA(1) 과정

- 모형

$$Z_t - \mu = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1} = (1 + \theta B)\varepsilon_t$$

- ACF와 PACF

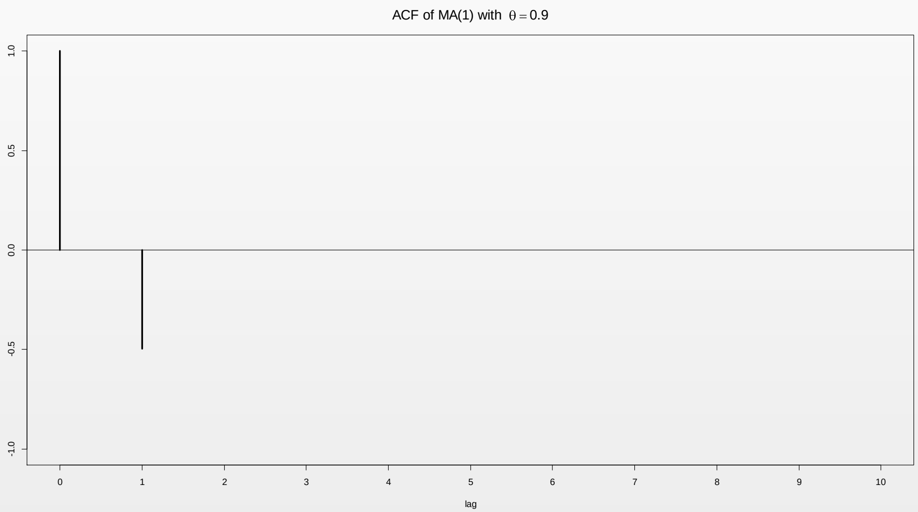
$$\rho_k = \begin{cases} \dfrac{\theta}{1+\theta^2}, & k = 1 \\ 0, & k \ge 2 \end{cases}$$

1시차 후 절단

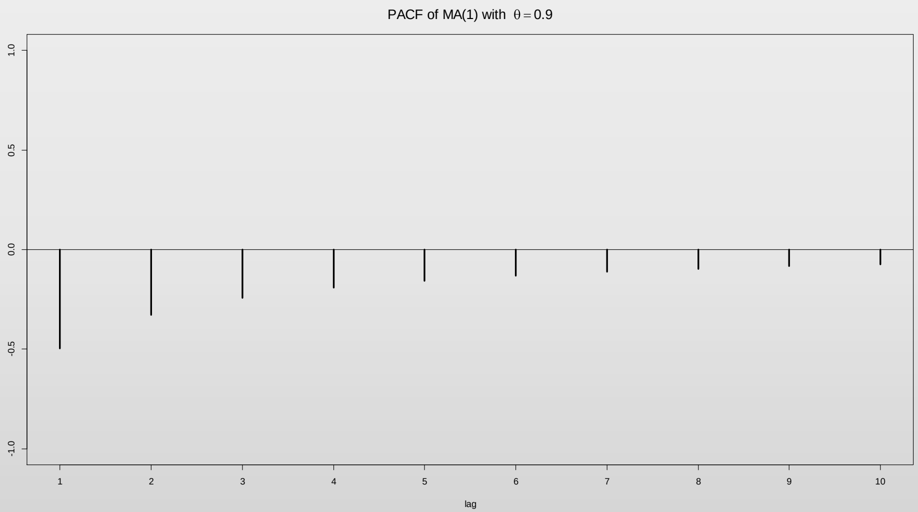
$$\phi_{kk} = \frac{\theta^k(1-\theta^2)}{1-\theta^{2(k+1)}}, \qquad k \ge 1$$

지수적 감소

- MA(1) 모형의 이론적인 ACF, PACF (θ=0.9)

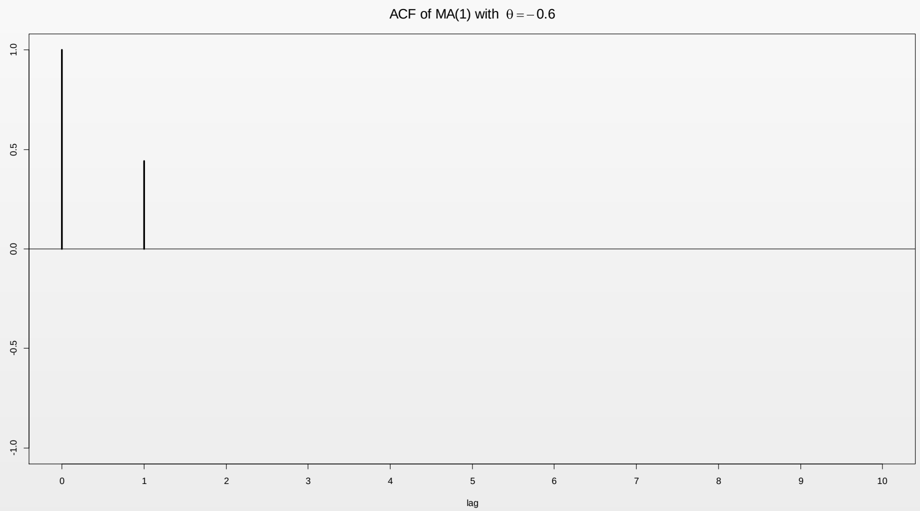


ACF: 1시차 후 절단

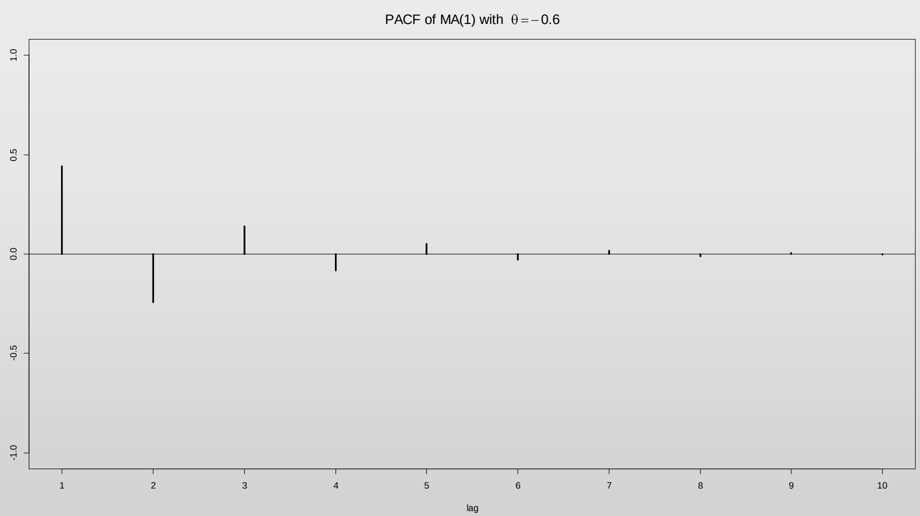


PACF: 지수적 감소

- MA(1) 모형의 이론적인 ACF, PACF(θ=-0.6)



ACF: 1시차 후 절단



PACF: 지수적 감소

- 가역성 조건(Invertibility condition)

  - 가역 가능한 MA 과정: 무한 차수의 정상 AR 과정으로 표현되는 MA 과정

  - 가역성 조건이 필요한 이유: 가역성 조건을 만족하는 MA(q) 과정만이 ACF와 모형 사이에 일대일 대응관계가 성립

  - 예: 다음 두 MA(1) 모형은 동일한 ACF를 갖는다

$$Z_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}, \qquad Z_t = \varepsilon_t + \frac{1}{\theta}\varepsilon_{t-1}$$

따라서 ACF로 모형 인식이 불가능

- 가역성 조건

- MA(q) 모형의 경우 2^q개의 모형이 동일한 ACF를 가질 수 있음

- 그 중 하나의 모형만이 가역 가능한 모형이며, 그 모형은 특성 방정식 근의 절대값이 1보다 크다는 조건을 만족함

$$\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \cdots + \theta_q B^q = 0$$

- 이 조건을 가역성 조건이라고 함

- MA 과정은 반드시 가역성 조건을 만족해야 함

- MA(1) 모형의 가역성 조건

  - MA(1) 모형의 특성 방정식

$$\theta(B) = 1 + \theta B = 0$$

$$\left|\frac{1}{\theta}\right| > 1 \quad \Rightarrow \quad |\theta| < 1$$

  - 즉, MA(1) 모형의 가역성 조건은 $|\theta|<1$

  - AR(1) 모형의 정상성 조건과 비교

6.2.2 MA(2) 과정

- 모형:

$$Z_t - \mu = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} = \theta(B)\varepsilon_t$$

$$\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2$$

- 가역성 조건: $\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2$의 근의 절대값이 1 보다 클 조건

$$\theta_2 + \theta_1 > -1$$
$$\theta_2 - \theta_1 > -1$$
$$-1 < \theta_2 < 1$$

AR(2) 모형의 정상성 조건과 비교

- ACF와 PACF

$$\rho_k = \begin{cases} \dfrac{\theta_1 + \theta_1\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}, & k = 1 \\ \dfrac{\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}, & k = 2 \\ 0 \qquad\qquad\quad , & k \geq 3 \end{cases}$$

2 시차 이후 절단

ϕ_{kk} : 복잡한 수식. 형태는 지수적 감소 혹은 감소하는 sine 함수 형태

- AR 과정과 MA 과정의 관계

  - AR(1) 과정의 ACF: 지수적 감소
  - MA(1) 과정의 PACF: 지수적 감소

  - AR(1) 과정의 PACF: 1시차 후 절단
  - MA(1) 과정의 ACF: 1시차 후 절단

  - AR(2) 과정의 ACF & MA(2) 과정의 PACF: 지수적 감소 혹은 소멸하는 sine 함수
  - AR(2) 과정의 PACF & MA(2) 과정의 ACF: 2 시차 후 절단

6.2.3 MA(q) 과정

- 모형:

$$Z_t - \mu = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q} = \theta(B)\varepsilon_t$$

$$\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \cdots + \theta_q B^q$$

- 가역성 조건: 특성 방정식 $\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \cdots + \theta_q B^q$의 근의 절대값이 1 보다 커야 함

- ACF: q 시차 후 절단

- PACF: 지수적 감소 혹은 소멸하는 sine 함수

6.4 자기회귀-이동평균과정(ARMA 과정)

- ARMA(p,q) 모형: AR(p) 모형과 MA(q) 모형의 혼합

- 필요성: 주어진 시계열 자료를 AR(p) 혹은 MA(q) 모형만으로 설명하고자 하는 경우 p나 q의 값이 너무 커지는 상황이 발생할 수 있음

- 모형의 모수 개수가 증가하면 일반적으로 추정의 효율성이 떨어짐

- 모수 절약의 원칙: 모형의 적합 정도 혹은 설명력이 비슷하다면 모수의 개수가 적은 모형을 선택하는 것이 바람직함

- ARMA(p,q) 모형

  - 모형: $Z_t = \delta + \phi_1 Z_{t-1} + \cdots + \phi_p Z_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$

    $\phi(B)(Z_t - \mu) = \theta(B)\varepsilon_t$

  - 정상성 조건: AR(p) 모형의 정상성 조건과 동일

  - 가역성 조건: MA(q) 모형의 가역성 조건과 동일

• ARMA(1,1)

- 모형:

$$Z_t = \delta + \phi Z_{t-1} + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$$

- 정상성 조건: $|\phi| < 1$
- 가역성 조건: $|\theta| < 1$

- ACF: AR(1) 부분의 영향으로 지수적 감소
- PACF: MA(1) 부분의 영향으로 지수적 감소

- ARMA(p,q) 모형의 ACF와 PACF
  - 시차 k가 증가함에 따라 ACF와 PACF는 모두 감소하는 형태를 취함
  - ACF는 시차 k>q-p부터 AR(p)의 ACF 형태와 유사. 그 이전 시차에서는 일반화된 형태 없이 변화
  - PACF는 시차 k>p-q부터 MA(q)의 PACF 형태와 유사. 그 이전 시차에서는 일반화된 형태 없이 변화
  - 교재 225쪽 표 6-1 참조