16. $a = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$

(a) $\{a_n\}$이 감소수열이다

(∵) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$ $(x>1)$ 일 때,

$$f'(x) = \frac{(\sqrt{x})'(x+1) - (x+1)'\sqrt{x}}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1) - \sqrt{x}}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{1-x}{2(x+1)^2\sqrt{x}} < 0 \quad \text{if } x>1$$

$\therefore f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$ $(x>1)$ 가 감소함수이므로

$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ $(n=1,2,\dots)$ 은 감소수열이다

(b) 모든 $n=1,2\dots$ 에 대해서

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1} > 0$$

이므로, 0이 $\{a_n\}$의 하계이고 $\{a_n\}$은 아래로 유계하다

(c) $n=1,2,\dots$ 에 대해서

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1} \le \frac{n}{n+1} < 1$$

이므로 $\{a_n\}$은 1을 상계로 갖기 때문에 유계하다.

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{0}{1} = 0$

이다.