금 융 기 초 수 학 I

4) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 $[a,b]$ 에서 연속이고, (a,b) 에서 미분 가능할 때, (a,b) 에 속하는 모든 x 에 대하여 $f'(x)=g'(x)$ 이면, $[a,b]$ 내의 모든 x 에 대하여 $f(x)-g(x)=k$ 를 만족하는 상수 k 가 존재함을 평균값 정리를 통해 증명하여라.

$f(x)-g(x)=k$, 즉 $f(x)-g(x)$ 는 상수함수임을 보이면 된다. 그러면 구간 $[a,b]$ 안에서 임의의 $x_1<x_2$ 를 만족하는 x_1, x_2 에 대해 $h(x)=f(x)-g(x)$ 일 때 평균값 정리를 쓰면, $\frac{h(x_2)-h(x_1)}{x_2-x_1}=h'(c)$ 인 c 가 (x_1,x_2) 에 존재한다. 여기서 $h'(c)=f'(c)-g'(c)=0$ 이 된다. 뚜라서 $\frac{h(x_2)-h(x_1)}{x_2-x_1}=0$ 이고, $x_2-x_1\neq 0$ 이므로 양변에 나눠주면 $h(x_2)-h(x_1)=0$ 이 된다. 그러므로 $h(x_2)=h(x_1)$ 이므로 $h(x)=f(x)-g(x)$ 는 상수함수이다.

5-a) 다음에 주어진 함수에서 $x=a$ 에서의 Taylor 전개식을 구하라.

$$f(x)=e^x,\quad a=-1$$

$f(x)$ 가 n회 미분 가능하면,

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^4+\frac{f^{(4)}(a)}{4!}(x-a)^4+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$f(x)=f'(x)=f''(x)=f^{(3)}(x)=f^{(4)}(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=e^x$$
$$f(a)=f'(a)=f''(a)=f^{(3)}(a)=f^{(4)}(a)=\cdots=f^{(n)}(a)=e^a$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^a}{n!}(x-a)^n=e^a+\frac{e^a(x-a)}{1!}+\frac{e^a(x-a)^2}{2!}+\frac{e^a(x-a)^3}{3!}+\cdots+\frac{e^a(x-a)^n}{n!}+\cdots$$

$a=-1$ 를 대입하면,

$$f(x)=e^a+\frac{e^a(x+1)}{1!}+\frac{e^a(x+1)^2}{2!}+\frac{e^a(x+1)^3}{3!}+\cdots+\frac{e^a(x+1)^n}{n!}+\cdots$$

$$=e^a\left(1+\frac{(x+1)}{1!}+\frac{(x+1)^2}{2!}+\frac{(x+1)^3}{3!}+\cdots+\frac{(x+1)^n}{n!}+\cdots\right)$$

6-b) 다음에 함수의 Maclaurin 전개식을 구하라.

$$f(x)=\ln(x+1)$$

$f(x)$ 가 n회 미분 가능하면,

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^4+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$f(x)=\ln(1+x)$	$f(0)=\ln 0=0$
$f'(x)=(1+x)^{-1}$	$f'(0)=1$
$f''(x)=-(1+x)^{-2}$	$f''(0)=-1$
$f^{(3)}(x)=2(1+x)^{-3}$	$f^{(3)}(0)=2$
$f^{(4)}(x)=-6(1+x)^{-4}$	$f^{(4)}(0)=-6$
$\vdots$	$\vdots$
$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n}$	$f^{(n)}(0)=(-1)^{n+1}(n-1)!$

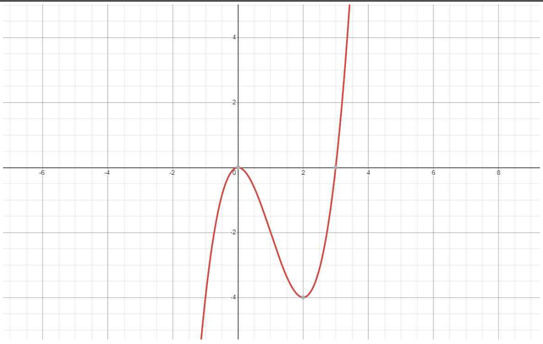
$$f(x)=f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{n!}x^n$$

$$f(x)=\ln 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$$

$$f(x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{6}x^6+\cdots$$

2-a) 다음 함수에서 위로 볼록 또는 아래로 볼록한 x 의 범위와 변곡점을 구하라.

$$f(x) = x^3 - 3x^2$$



$f(x) = x^3 - 3x^2$

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

$f'(x) = \begin{cases} f'(x) > 0, & -\infty < x < 0 \\ f'(x) < 0 & 0 < x < 2 \\ f'(x) > 0 & 2 < x < \infty \end{cases}$ 이므로 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값을 가지며, $x=2$ 에서 극솟값을 갖는다.

$f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$ 이므로 따라서 $f''(x) = 0$ 이 되는 변곡점은 $x=1$ 이다.

따라서 아래로 볼록인 구간은 $(1,\infty)$ 이고, 위로 볼록인 구간은 $(-\infty,1)$ 이다.

3-b) 다음 함수의 극값을 구하라.

$$f(x) = e^x + e^{-x}$$

극값은 $f'(x) = 0$ 이 되는 값이다.

$f'(x) = e^x - e^{-x} = e^x(1-e^{-2x})$

따라서 $e^x = 0$ 을 만족하거나 $1-e^{-2x}$ 를 만족하는 x 값을 찾는다.

$e^x = 0$ 인 경우 $-\infty < x < \infty$ 구간에서 $e^x > 0$ 이므로 만족하는 x 는 실수에서 존재하지 않는다.

$1-e^{-2x}$ 인 경우 $-\infty < x < \infty$ 구간에서 $x=0$ 이다.

$f'(x) = \begin{cases} f'(x) > 0, & -\infty < x < 0 \\ f'(x) < 0 & 0 < x < \infty \end{cases}$ 이므로 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극솟값을 갖는다.

4-b) 다음 함수의 극값을 구하라.

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}, \qquad x \geq 0$$

$f(0)=0$ 이고, $f'(x) = \dfrac{(x^2+1)-x(2x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} = \dfrac{(1+x)(1-x)}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = \begin{cases} f'(x) < 0, & -\infty < x < -1 \\ f'(x) > 0, & -1 < x < 1 \\ f'(x) < 0, & 1 < x < \infty \end{cases}$ 이므로, $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극솟값을 가지며, $x=1$ 에서 극댓값을 갖는다.

또한 $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = 0$ 으로 수렴한다.

따라서 최솟값은 $x=0$ 에서 $f(0)=0$ 이고, 최댓값은 $x=1$ 에서 $f(1) = \dfrac{1}{2}$ 이다.

1) 다음 함수의 부정적분을 구하라.

(a) $f(x) = x\sqrt{x}$

(b) $f(x) = \dfrac{x^3-2}{x+1}$

(c) $f(x) = x^2(x^3+1)^3$

(d) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}}$

(e) $f(x) = (\ln x)^2$

(f) $f(x) = xe^{3x}$

(a) $f(x) = x^2\sqrt{x}$

$$\int x^{\frac{5}{2}}dx = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + C = \frac{2}{7}x^3\sqrt{x} + C$$

(b) $f(x) = \dfrac{x^3-2}{x+1}$

$$\int \frac{x^3-2}{x+1}dx = \int \frac{x^3+1}{x+1} - \frac{3}{x+1}\,dx = \int x^2-x+1-\frac{3}{x+1}\,dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2+x-3\ln|x+1| + C$$

(c) $f(x) = x^2(x^3+1)^3$

$$\int x^2(x^3+1)^3dx = \frac{1}{3}\int t^3dt = \frac{1}{12}t^4 + C = \frac{1}{12}(x^3+1)^4 + C$$

$t = x^3+1, \quad dt = 3x^2dx$

(d) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}}$

$$\int \frac{x^2-1}{\sqrt{x}}dx = \int x^{\frac{3}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + C$$

(e) $f(x) = (\ln x)^2$

$$\int (\ln x)^2dx = \int 1\cdot(\ln x)^2dx = x(\ln x)^2 - 2\int \ln x\,dx = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C$$

$f(x) = (\ln x)^2, \qquad g'(x) = 1$

$f'(x) = \dfrac{2(\ln x)}{x}, \qquad g'(x) = x$

(f) $f(x) = xe^{3x}$

$$\int xe^{3x}dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C$$

$f(x) = x, \qquad g'(x) = e^{3x}$

$f'(x) = 1, \qquad g'(x) = \dfrac{1}{3}e^{3x}$

5) 어떤 상품 x 개를 생산할 때의 한계 원가는 $100x^{\frac{1}{3}}$ 이고, 8개를 생산하는 데 70,000원의 비용이 필요하다고 한다. 이 때 상품의 원가함수와 216개를 생산할 때의 원가를 구하라.

$f(x) = 100x^{\frac{1}{3}}$

$$F(x) = \int f(x)dx = \int 100x^{\frac{1}{3}}dx = \frac{300}{4}x^{\frac{4}{3}} + C = 75x^{\frac{4}{3}} + C$$

$F(8) = 75\times16 + C = 1200 + C = 70000 \quad \text{--->} \quad C = 68800$

$F(x) = 75x^{\frac{4}{3}} + 68800 \quad \text{--->} \quad F(216) = 75(216)^{\frac{4}{3}} + 68800 = 166{,}000$

1) 밑변의 한 변의 길이가 a 인 정사각형이고 높이가 h 인 각뿔의 부피를 V 라고 할 때 $V=\frac{1}{3}a^2h$ 임을 구분구적법으로 증명하여라.

$$V=\lim_{n\to\infty}\frac{h}{n}\left[\frac{1^2}{n^2}a^2+\frac{2^2}{n^2}a^2+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n^2}a^2\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{a^2h}{n^3}(1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2)=\lim_{n\to\infty}\frac{a^2h}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}k^2=\lim_{n\to\infty}\frac{a^2h}{n^3}\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6}=\frac{1}{3}a^2h$$

2-b) 다음으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구분구적법으로 구하라.

$$y=x^3,\quad x=2,\quad x\text{ 축}$$

$$S=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(0+\frac{2}{n}k)^3\left(\frac{2}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{16}{n^4}\sum_{k=1}^{n}k^3=\lim_{n\to\infty}\frac{16}{n^4}\frac{n^2(2n+1)^2}{4}=4$$

3-a) 다음에서 적분에 대한 평균값 정리를 만족시키는 C를 구하라.

$$\int_1^2 x^3dx$$

$$\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)$$

$$\int_1^2 x^3dx=C^3(2-1)$$

$$C^3=\left[\frac{1}{4}x^4\right]=\frac{1}{4}(16-1)=\frac{15}{4}\qquad C=\sqrt[3]{\frac{15}{4}}\qquad \because C\in(1,2)$$

1) 다음 정적분의 값을 구하라.

(a) $\int_1^4 x\sqrt{x}\,dx$

(e) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$$\int_1^4 x\sqrt{x}\,dx=\int_1^4 x^{\frac{3}{2}}dx=\left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]=\frac{2}{5}(32-1)=\frac{62}{5}$$

$$\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{1}{\sqrt{t}}dt=\frac{1}{2}\int_1^2 t^{-\frac{1}{2}}dt=\left[t^{\frac{1}{2}}\right]=\sqrt{2}-1$$

$1+x^2=t,\qquad 2xdx=dt$

7) 다음 정적분의 값을 구하라.

(c) $\int_1^e \ln x\,dx$

(f) $\int_0^2 x^2e^xdx$

(c) $\int_1^e \ln x\,dx$

$$[x\ln x-x]=(e\ln e-e)-(1\ln 1-1)=e-e-0+1=1$$

(f) $\int_0^2 x^2e^xdx$

$$[x^2e^x]-2\int_0^2 xe^xdx=4e^2-2\left[xe^x-\int_0^2 e^xdx\right]=4e^2-2(2e^2-e^2+1)=2e^2-2=2(e^2-1)$$

$f(x)=x^2,\quad g'(x)=e^x\qquad f(x)=x,\quad g'(x)=e^x$

$f'(x)=2x,\quad g'(x)=e^x\qquad f'(x)=1,\quad g'(x)=e^x$

7) 다음을 구하라.

$$\int_0^2 |\sqrt{x}-1|dx$$

$\int_0^2 \lvert\sqrt{x}-1\rvert dx = -\int_0^1 \sqrt{x}-1dx + \int_1^2 \sqrt{x}-1dx = \int_0^1 1-\sqrt{x}\,dx + \int_1^2 \sqrt{x}-1dx$ $= \left[x-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right] + \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-x\right] = (1-\frac{2}{3}) + (\frac{2}{3}2^{\frac{3}{2}}-2-\frac{2}{3}+1) = \frac{1}{3}+\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{5}{3} = \frac{4\sqrt{2}-4}{3}$

1) 임의의 삼각형 $\triangle ABC$에 대하여, 다음이 성립함을 보여라.

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=0$$

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}=0$

2) 벡터 $p=ka+4b$, $q=a-2b$, $r=5a+2b$ 에 대하여, 두 벡터 $p+q$ 와 $q-r$ 이 평행이 되는 k 의 값을 정하여라.

$p+q=(k+1)a+2b, \qquad q-r=-4a-4b$ $-2(p+q)=q-r, \qquad -2(k+1)a-4b=-4a-4b, \qquad k+1=2, \qquad k=1$

4) 크기가 3이고 $3j+2k$ 와 같은 방향의 벡터를 구하여라.

$\tan\theta=\frac{2}{3}, \qquad \cos\theta=\sqrt{\frac{9}{13}}, \qquad \sin\theta=\sqrt{\frac{4}{13}},$ $\overrightarrow{OP}=3\times\sqrt{\frac{9}{13}}\,i+3\times\sqrt{\frac{4}{13}}\,k$

6) 두 벡터 a,b 가 $\lvert a+b\rvert=10$, $\lvert a-b\rvert=8$ 을 만족할 때, 내적 $a\cdot b$ 를 구하여라.

$\lvert a+b\rvert^2=\lvert a\rvert^2+2(a\cdot b)+\lvert b\rvert^2=100$ $\lvert a-b\rvert^2=\lvert a\rvert^2-2(a\cdot b)+\lvert b\rvert^2=64 \qquad 4(a\cdot b)=36, \qquad a\cdot b=9$

8) 세 점 O, A, B에 대하여, 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$가 $\lvert\overrightarrow{OA}\rvert=6$, $\lvert\overrightarrow{OB}\rvert=8$, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=24$ 를 만족할 때 두 선분 OA, OB를 두 변으로 하는 평행사변형의 넓이를 구하여라.

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\lvert\overrightarrow{OA}\rvert\lvert\overrightarrow{OB}\rvert\cos\theta=48\cos\theta=24, \qquad \cos\theta=\frac{1}{2}, \qquad \theta=\frac{\pi}{3}, \qquad \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $S=$ 밑변 $\times$ 높이 $=8\times6\sin\theta=8\times3\sqrt{3}=24\sqrt{3}$

10) 두 벡터 $a=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}-2\\x\end{pmatrix}$ 에 대하여 a 와 $a+b$ 가 수직일 때, 내적 $a\cdot b$ 를 구하여라.

$a=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}, \qquad a+b=\begin{pmatrix}0\\4+x\end{pmatrix}, \qquad a\cdot(a+b)=16+4x=0, \qquad x=-4$ $a\cdot b=(2)(-2)+(4)(-4)=-4-16=-20$

12) 벡터 $a=2i-j-5k$, $b=3ri+6j+(4s-2)k$, $c=(t-1)i+2j+(t+1)k$ 에 대하여 a 와 b 는 평행이고, a 와 c 는 수직일 때, rst 를 구하여라.

$-6a=b$	$a=2i-j-5k$ $c=(t-1)i+2j+(t+1)k$
$-6a=-12i+6j+30k$ $b=3ri+6j+(4s-2)k$	$a\cdot c=2(t-1)-2-5(t+1)=-3t-9=0$
$r=-4, \qquad s=8$	$t=-3$
	$rst=(-4)(8)(-3)=96$

1-b) 다음 연립일차방정식을 풀어보아라.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_3 = 9 \end{cases}$$

$x_3 = 3,$

$2x_2 + 3 = 5, \qquad x_2 = 1,$

$x_1 + 1 + 3 = 8, \qquad x_1 = 4$

3) 다음 두 연립일차방정식은 오른편의 계수는 다르나 같은 계수행렬을 가진다.

$$(a) \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 = 5 \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} 2x_1 + x_2 = -1 \\ 4x_1 + 3x_2 = 1 \end{cases}$$

아래와 같이 주어지는 이들의 확대계수행렬에서 $(2,1)$ 성분을 소거하고 오른편에 대응하는 각 열에 대해 뒤에서부터 차례로 적용하여 두 연립일차방정식을 동시에 풀어보아라.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 5 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$ 이므로

$(a)\ \ x_2 = -1,\ x_1 = 2 \qquad (b)\ \ x_2 = 3,\ x_1 = -2$

5) 다음 행렬 중에서 어느 것이 행사다리꼴인가? 또 어느 것이 기약행사다리꼴인가 말하여라.

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (b) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (c) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad (d) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

행사다리꼴 조건
(a) 각 행에서 0이 아닌 처음 수는 1이다.
(b) k 행의 성분이 모두 0으로 구성되지 않았다면, k+1행에서 앞에 나오는 0의 개수는 k행 앞에 나오는 0의 개수보다 많다.
(c) 한 행의 성분이 모두 0이면, 그 행은 0 아닌 성분이 들어있는 행 아래에 있다.

기약행사다리꼴 조건
(a) 행사다리꼴 행렬이다.
(b) 각 행에서 처음으로 0이 아닌 수는 그 열에서는 유일하게 0이 아닌 수이다.

(a) 행사다리꼴 (b) 기약행사다리꼴 (c) 기약행사다리꼴 (d) 행사다리꼴

6-a) 다음의 확대계수행렬은 행사다리꼴이다. 각각의 경우에 대응하는 연립일차방정식이 해를 가지는지 조사하여라. 만약 연립일차방정식이 유일한 해를 가진다면, 그해를 구하라.

$$(a) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (b) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(a)의 경우 $0x_1 + 0x_2 = 1$ 을 만족하는 x_1 과 x_2 는 존재하지 않으므로 불능이다.

(b)의 경우 $x_2 = -1,\ x_1 = 4$ 의 해를 갖는다.

7-c) 다음 연립일차방정식에 대하여 그것과 동치인 연립일차방정식 중에서 계수행렬이 사다리꼴인 연립일차방정식을 얻기 위하여, Gauss 소거법을 이용하여라. 그 연립일차방정식이 불능인지, 유일한 해를 갖는지 또는 부정인지를 결정하고 해를 구하여라.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{array}\right)$ 을 만족하는 해는 $x_1 = 0,\ x_2 = 0$ 이다.

8-b) Gauss-Jordan 소거법을 이용하여, 다음 연립일차방정식을 풀어보아라.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 8 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 2 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 8 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 8 & 1 & 4 & 10 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 8 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 8 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 8 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 8 & 0 & 0 & -2-\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4}-\frac{5}{8}\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$ 으로 기약행사다리꼴이 완성된다.

따라서 $x_1 = \frac{3}{4} - \frac{5}{8}\alpha$, $x_2 = \frac{-1}{4} - \frac{1}{8}\alpha$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = 3$ 이고 α 는 실수이다.

9) 다음의 확대계수행렬을 갖는 연립일차방정식을 생각하여, 그 연립일차방정식이 유일한 해를 가질 a 의 값을 구하여라.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & a & 3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & a & 3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & -6 & a-2 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & a+2 & 4 \end{array}\right)$$ 이므로 $a+2 \neq 4$, 즉 $a \neq 2$ 를 만족하면 유일한 해를 갖는다.

11) C회사는 세 곳의 철광산에서 생산되는 철광석들을 혼합하여 판매하고 있다. 각 철광석의 원가는 kg 당 16만원, 14만원, 12만원이라 한다. 이 회사는 57억 6,000만원의 예산으로 40,000kg의 철강 제품을 만들려고 한다. 다만, 품질 관계로 1번 광석이 3번 광석의 두 배가 되도록 혼합하려고 할 때, 1, 2, 3번 광석을 각각 몇 kg 씩 혼합하여야 하는가?

$$\begin{cases} 16x_1 + 14x_2 + 12x_3 = 576000 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 40000 \\ x_1 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 16 & 14 & 12 & 576{,}000 \\ 1 & 1 & 1 & 40{,}000 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 7 & 6 & 288{,}000 \\ 1 & 1 & 1 & 40{,}000 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 7 & 6 & 288{,}000 \\ 8 & 8 & 8 & 320{,}000 \\ 8 & 0 & -16 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 7 & 6 & 288{,}000 \\ 0 & 1 & 2 & 32{,}000 \\ 0 & 7 & 22 & 288{,}000 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 7 & 6 & 288{,}000 \\ 0 & 7 & 14 & 224{,}000 \\ 0 & 7 & 22 & 288{,}000 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 7 & 6 & 288{,}000 \\ 0 & 7 & 22 & 288{,}000 \\ 0 & 0 & 8 & 64{,}000 \end{array}\right)$$ 이므로 $x_3 = 8{,}000\,kg$, $x_1 = 16{,}000\,kg$, $x_2 = 16{,}000\,kg$ 이다.