10장 계절형 ARIMA 모형

ARIMA(p,d,q)(P,D,Q)$_s$

계절요인이 있는 시계열 자료의 분석

- 결정적 계절형 요인: 계절 추세 회귀모형

- 확률적 계절형 요인: 계절형 ARIMA 모형

1. 순수 계절형 ARMA(P,Q)$_s$ 모형

- 계절 요인만이 있는 모형

$$\Phi(B^s)\, Z_t = \delta + \Theta(B^s)\, \varepsilon_t$$

$$\Phi(B^s) = 1 - \Phi_1 B^s - \cdots - \Phi_P B^{Ps}$$

$$\Theta(B^s) = 1 + \Theta_1 B^s + \cdots + \Theta_Q B^{Qs}$$

$$\delta = \mu(1 - \Phi_1 - \cdots - \Phi_P)$$

$$\mu = \mathrm{mean}(Z_t)$$

  - 월별 자료의 경우: $s = 12$

1) 계절형 AR(1)$_{12}$ 모형: ARIMA(0,0,0)(1,0,0)$_{12}$

- 모형 : $Z_t = \delta + \Phi_1 Z_{t-12} + \varepsilon_t$

- 정상성 조건: $|\Phi_1| < 1$

- ACF와 PACF : 그림 10-1
  - ACF: 계절주기 12의 배수에 해당하는 시차 12,24,36,48, … 에 따라 지수적으로 감소
  - PACF: 시차 12에서만 값을 갖고 그 이외의 시차에서는 0

2) 계절형 MA(1)$_{12}$ 모형: ARIMA(0,0,0)(0,0,1)$_{12}$

- 모형: $Z_t = \mu + \varepsilon_t + \Theta_1 \varepsilon_{t-12}$

- 가역성 조건: $|\Theta_1| < 1$

- ACF와 PACF: 그림 10-2
  - ACF: 시차 12에서만 값을 갖고 그 이외의 시차에서는 0
  - PACF: 계절 주기 12의 배수에 해당하는 시차인 12, 24, 36, 48, . . . 에 따라 지수적으로 감소

3) 계절형 ARMA$(1,1)_{12}$ 모형:ARIMA$(0,0,0)(1,0,1)_{12}$

- 모형: $Z_t = \delta + \Phi_1 Z_{t-12} + \varepsilon_t + \Theta_1 \varepsilon_{t-12}$
- 정상성 및 가역성 조건: $|\Phi_1| < 1,\ |\Theta_1| < 1$
- ACF와 PACF: 12시차 이후부터 계절주기 12의 배수에 해당되는 시차에 따라 지수적으로 감소

2. 계절형 ARIMA$(P,D,Q)_s$ 모형

- 강한 계절요소로 인하여 시계열의 평균이 일정하지 않고 변하는 경우

- 비정상 시계열: ACF가 계절주기 s의 배수에 해당하는 차수에서 매우 천천히 감소

- 계절차분으로 정상성 회복

1차 계절차분: $(1-B^s)\,Z_t = Z_t - Z_{t-s}$

D차 계절차분: $(1-B^s)^D\,Z_t$

- ARIMA$(P,D,Q)_s$ 모형:

$$\Phi(B^s)(1-B^s)^D Z_t = \delta + \Theta(B^s)\,\varepsilon_t$$

$$\Phi(B^s) = 1 - \Phi_1 B^s - \cdots - \Phi_P B^{Ps}$$

$$\Theta(B^s) = 1 + \Theta_1 B^s + \cdots + \Theta_Q B^{Qs}$$

$$\delta = \mu(1 - \Phi_1 - \cdots - \Phi_P)$$

$$\mu = \text{mean of } (1-B^s)^D Z_t$$

3. 승법계절 ARIMA 모형: ARIMA(p,d,q)(P,D,Q)$_s$

- 비계절형 ARIMA 요소, 계절형 ARIMA 요소를 모두 갖고 있는 시계열 모형

- ARIMA(p,d,q)(P,D,Q)$_s$ 모형:

$$\phi(B)\Phi(B^s)(1-B^s)^D(1-B)^d Z_t = \delta + \theta(B)\Theta(B^s)\,\varepsilon_t$$

- 예: ARIMA(1,1,1)(1,1,1)$_{12}$ 모형(절편 없음)

$$(1-\phi_1 B)(1-\Phi_1 B^{12})(1-B)(1-B^{12})Z_t = (1+\theta_1 B)(1+\Theta_1 B^{12})\varepsilon_t$$

- ACF와 PACF의 정확한 형태: 매우 복잡

그림 10-4, 10-5 참조

1) 계절형 ARIMA(p,d,q)(P,D,Q)$_s$의 모형 인식 1

- 차분 차수의 결정

- 일반 차분 실시: ACF가 시차 1, 2, . . . , s/2에서 매우 천천히 감소하는 경우. 차수는 d.

- 계절차분 실시 : ACF가 시차 s, 2s, 3s, . . . 에서 매우 천천히 감소하는 경우. 차수는 D.

- 일반적인 경우: $D \le 1$, $d+D \le 2$

- 연관된 R 함수

    `ndiffs(x)`: 일반 차분 차수 추정

    `nsdiffs(x, m=계절주기)`: 계절차분 차수 추정

2) 계절형 ARIMA(p,d,q)(P,D,Q)$_s$의 모형 인식 2

- AR 차수(p와 P), MA 차수(q와 Q)의 결정

- 비계절형 차수 p와 q : ACF와 PACF에서 시차 1, 2, 3, . . . , s/2을 대상으로 인식
  - ACF와 PACF를 이용한 일반적인 모형 인식 방법 사용

- 계절형 차수 P와 Q : ACF와 PACF에서 시차 s, 2s, 3s, . . . 을 대상으로 인식
  - 비계절형 차수 p와 q의 인식방법과 유사
  - 일반적인 경우: (P=1, Q=0) 또는 (P=0, Q=1)
  - 정확한 모수 예측을 위해서는 적어도 5년치 자료가 필요.

3) 계절형 ARIMA(p,d,q)(P,D,Q)$_s$의 모형 인식 3

- 절편의 포함 여부 결정

- 차분이 없는 경우(d+D=0): 많은 경우에 절편이 모형에 포함 됨. 절편 포함 여부에 대한 적절한 검정 필요.

- 1번의 차분이 이루어진 경우(d+D=1) : 유의성 검정을 통한 포함 여부 확인 필요

- 2번의 차분이 이루진 경우(d+D=2) : 절편이 모형에 포함되지 않음