1. 교재 8장 연습문제 1을 다음과 같이 푸시오.

1.1 U_N, D_N 이란 무엇인가? 정의를 서술하라.

· $K_N(t)$는 $D_N < R_N < U_N$ 에 대하여 다음을 만족하는 서로 독립이고 분포가 같은(iid) 확률변수이다.

· $K_N(t) = \begin{cases} U_N, & \text{만약 주식이 시간 } n\text{에 상승한다면} \\ D_N & \text{만약 주식이 시간 } n\text{에 하락한다면} \end{cases}$

· 또한, 주식가격이 오르거나 떨어질 확률은 각 단계에서 동일하게 $\frac{1}{2}$ 라고 가정될 것이다.

· $P(K_N(t) = U_N) = P(K_N(t) = D_N) = \frac{1}{2}$

1.2 로그수익률 $K_N(t)$ 란 무엇인가? 정의를 서술하라.

· $K_N(t) = \ln\frac{S_N(t+h)}{S_N(t)}$

· 수익률 V_0 를 투자하여 V_1 이 될 때, $V_1 = e^r V_0$ 가 되는 r 로 두는 것과 같다.

· $t < u$ 시점 간 로그수익률은 $K_N(u,t) = \ln\frac{S_N(u)}{S_N(t)}$ 로 정의한다.

1.3 확률변수 $K_N(t)$ 의 기댓값과 분산에 대한 가정을 서술하라.

· 확률변수 $K_N(0,t)$ 의 기댓값과 분산은 다음을 따른다고 가정한다.

· $E(K_N(0,t)) = \mu t$

· $Var(K_N(0,t)) = \sigma^2 t$

· 여기서 μ 와 σ 는 N 과 무관하다.

1.4 다음 식을 증명하라.

$$\mu = \frac{1}{h}E(k_N(h))$$
$$\sigma^2 = \frac{1}{h}Var(k_N(h))$$

· 모든 $t = nh$ 에 대해, $K_N(0,t) = \ln\frac{S_N(t)}{S_N(0)} = \ln\frac{S_N(h)}{S_N(0)}\frac{S_N(2h)}{S_N(h)}\cdots\frac{S_N(nh)}{S_N((n-1)h)} = K_N(h) + K_N(2h) + \cdots + K_N(nh)$ 이고,

· 각 항이 서로 독립이고 분포가 동일한 (iid) 확률변수이므로,

· $E(K_N(0,t)) = nE(K_N(h)) = \mu t = \mu nh$, $\quad \therefore \mu = \frac{1}{h}E(K_N(h))$

· $Var(K_N(0,t)) = n\,Var(K_N(h)) = \sigma^2 t = \sigma^2 nh$, $\quad \therefore \sigma^2 = \frac{1}{h}E(K_N(h))$

1.5 다음 식을 증명하라.

$$1 + U_N = e^{uh + \sigma\sqrt{h}}$$
$$1 + D_N = e^{uh - \sigma\sqrt{h}}$$

- $\mu h = E(K_N(h)) = p \times \ln(1+U_N) + (1-p) \times \ln(1+D_N)$
- $\sigma^2 h = Var(K_N(h)) = (\ln(1+U_N) - \ln(1+D_N))^2 p(1-p)$

- $p = \dfrac{1}{2}$ 이라고 하면,

- $\mu h = \dfrac{1}{2} \times \ln(1+U_N) + \dfrac{1}{2} \times \ln(1+D_N)$
- $\sigma^2 h = (\ln(1+U_N) - \ln(1+D_N))^2 \dfrac{1}{4}$

- $2\mu h = \ln(1+U_N) + \ln(1+D_N)$
- $4\sigma^2 h = (\ln(1+U_N) - \ln(1+D_N))^2$

- $X = \ln(1+U_N)$, $Y = \ln(1+D_N)$ 이라고 하면,

- $2\mu h = X + Y$
- $4\sigma^2 h = (X - Y)^2$

- $Y = 2\mu h - X$
- $4\sigma^2 h = (X - (2\mu h - X))^2 = (X - 2\mu h + X))^2 = (2X - 2\mu h)^2 = 4(X - \mu h)^2$

- $\sigma^2 h = (X - \mu h)^2$

- $\sigma\sqrt{h} = X - \mu h$

- $X = \mu h + \sigma\sqrt{h}$ => $\ln(1+U_N) = \mu h + \sigma\sqrt{h}$ => $1 + U_N = e^{\mu h + \sigma\sqrt{h}}$

- $Y = \mu h - \sigma\sqrt{h}$ => $\ln(1+D_N) = \mu h - \sigma\sqrt{h}$ => $1 + D_N = e^{\mu h - \sigma\sqrt{h}}$

2 다음 식을 증명하라.

$$S_N(t) = S(0)e^{ut + \sigma W_N(t)}$$

- $S_N(h) = \begin{cases} S(0)e^{\mu h + \sigma\sqrt{h}} & \text{확률 } \dfrac{1}{2} \\ S(0)e^{\mu h - \sigma\sqrt{h}} & \text{확률 } \dfrac{1}{2} \end{cases}$

$= S(0)e^{\mu h + Y_1 \sigma\sqrt{h}}$, $\quad Y_1 = \begin{cases} +1 & \text{확률 } \dfrac{1}{2} \\ -1 & \text{확률 } \dfrac{1}{2} \end{cases}$

여기서, $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 는 iid 확률변수

$$Y_n = \begin{cases} +1 & \text{확률 } \dfrac{1}{2} \\ -1 & \text{확률 } \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

- $t = nh$ 까지 확장하면, $S_N(t) = S(0)e^{\mu h + \sigma W_N(t)}$

- 단, $W_N(t) = \sqrt{h}\,(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n)$