—이공계·경상계를 위한—

고 등 미 적 분 학

(제 1장 수의 체계)

양 춘 우 지음

머리말

이 책에서는 이공계와 경상계 분야에서 쓰이는 미적분학의 주요 개념과 정리들을 수집하여 수록하였다. 정리에 대한 증명은 대부분 생략하였으며 주요 개념들에 대한 이해를 돕기 위한 그림과 예제들을 필요에 따라서 포함시켰다. 본문에 포함된 내용은 1변수 함수 뿐만 아니라 다변수 함수의 미분과 적분에 관한 대부분의 내용을 담고 있기 때문에 이해를 위해서는 어느 정도의 노력이 필요하다는 점을 미리 말씀드립니다.

이 책의 1장, 2장, 7장과 11장은 고등학교에서 수학을 충분히 공부한 분들은 비교적 쉽게 이해할 수 있는 부분으로서 경우에 따라서는 생략해도 무방할 것이다. 제 3장, 4장, 5장은 1변수 함수의 미분과 적분에 관한 내용으로서 미적분학에 대해서 어느 정도의 지식을 가지고 있다면 그리 어렵지 않을 것으로 보이지만, 엄밀한 증명을 요하는 부분들은 별도의 노력을 요하며 이 책에 수록된 문제들을 풀어봄으로써 증명하는 요령을 터득할 수 있다고 본다.

나머지 장들은 주로 이공계 학생들에게 많이 활용되는 내용들을 담고 있으며, 이 부분을 이해하기 위해서는 본문의 내용을 공부한 다음에는 반드시 연습문제들을 선별해서 풀어볼 것을 권유한다. 이 책을 완전히 이해한다면 경상계와 이공계에서 필요로 하는 미적분학에 대한 지식은 충분하다고 스스로 자신감을 가져도 될 것으로 여겨진다.

이 책을 강의 교재로 쓰시고자 하는 분들께서 강의용 PDF-파일이 필요한 경우에는 출판사나 저자인 본인(e-메일: chyang83@gmail.com; chyang@hs.ac.kr)에게 연락하여 주시기 바랍니다.

끝으로 이 책을 출판하도록 수고해 주신 청목출판사의 사장님과 심재국 마케팅 부장님 그리고 편집부 여러분들께 진심으로 감사를 드립니다.

2017년 1월

저자 양 춘 우 배상

차례

제 1 장 수의 체계 **1**

1.1 집합 1

1.2 실수 4

1.3 지수와 로그 9

1.4 해석학적인 개념들 11

1.5 복소수 15

1.6 수학적 귀납법 21

연습문제 23

제 1 장

수의 체계

수학은 알페벳으로 표현하는 '수(number)'라고 하는 고유언어를 지니고 있다. 이 언어는 연속되는 기호들과 연산 그리고 '논리(logic)'라고 하는 엄정한 사고체계의 구조를 갖추고 있다. 이러한 개념들은 기하, 대수 미적분학과 같은 초등수학과정에서 배우게 되는데 여기서 간단히 요약하여 설명하려고 한다.

1.1 집합

수학에서 집합(集合, set)은 어떤 조건이 주어졌을 때 그 조건이 가리키는 대상이 분명한 것들의 모임을 말한다.

집합을 다루는 이론을 집합론이라고 한다. 19세기 말에 개발된 집합론은 수학의 다른 이론들에 비해 역사가 짧은 편이나 현대 수학의 거의 모든 이론은 집합론을 토대로 이루어져 있다. 현대의 수학자들은 소박한 집합론이 갖고 있던 역설들을 해결하기 위해 개발된 공리적 집합론[1]을 사용한다.

공리적 집합론에서는 집합을 무정의 용어로 두거나 단순히 집합을 구별하는 단항 조건 기호를 사용하기도 한다. 이 경우에 집합 자체의 정의를 시도하기 보다는 전체 집합론이 가지고 있는 공리들이 집합의 성질을 설명한다. 예를 들어 확장 공리는 원소가 같은 두 집합은 같아야 한다는 뜻을 지닌다.

[1]공리적 집합론은 술어논리를 이용하여 기술한 체계를 가지고 집합의 성질을 규명하는 수학의 한 분야이다.

정의 1.1 *집합은 서로 구별되는 대상들을 순서와 무관하게 모은 것이다. 이때 집합에 속하는 각 대상들을 집합의 원소라고 한다. 세상에 존재하는 거의 모든 것들은 집합의 원소가 될 수 있으며, 여기에는 숫자나 대수, 사람, 글자, 집합, 국가와 같은 개념들을 포함한다. 집합은 일반적으로 알파벳의 대문자로 표기하고 원소는 소문자로 표기한다.*

집합을 이루는 대상 하나 하나를 그 집합의 원소라고 한다. 또 어떤 것이 집합의 원소일 때 "그것은 그 집합에 속한다"라고 말한다. 집합과 달리 집합의 원소는 주로 알파벳 소문자로 표현한다.

어떠한 원소(element)가 집합에 속해 있는지를 표기할 때에는 원소의 약자 E를 기호화하여 $\in$와 $\notin$ 기호를 사용한다. 예를 들어, 집합 A가 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 라고 할 때 3이 집합 A에 속한다는 것을 '$3 \in A$'로 표기한다. 마찬가지로, 5가 집합 A에 속하지 않는다는 것을 '$5 \notin A$'와 같이 표기한다.

집합이 가진 원소의 수를 집합의 기수(cardinal number) 혹은 크기라고 한다. 즉, 집합 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 기수는 5이다. 이와 같이 기수가 유한한 집합을 유한 집합(finite set)이라 한다. 기수가 0인 집합도 있으며, 이러한 집합을 공집합(empty set, null set)이라 부르고 '$\emptyset$'이라는 기호로 나타낸다. 예를 들어, '평면 위에서 변이 4개인 삼각형의 집합'이나 '2차 부등식 $x^2+3x+5<0$의 해의 집합'은 모두 공집합이다. 공집합은 원소의 갯수가 유한하므로 유한집합에 포함된다. 집합 중에는 자연수의 집합을 비롯해 무한히 많은 원소를 가진 것도 있으며, 이러한 집합을 무한 집합(infinite set)이라 한다.

집합 A의 모든 원소가 다른 집합 B의 원소가 될 때 "A는B에 포함된다" 또는 "B는 A를 포함한다"라고 한다. 따라서 A가 집합이면 A는 A의 부분집합이다. 또한 자신과 동일하지 않은 자신의 모든 부분집합을 진부분집합(proper subset)이라고 한다. 공집합은 모든 집합의 부분집합이며, 모든 집합은 그 자신의 부분집합이다.

집합간의 포함관계는 $A \subset B$ 같이 포함(contain)의 약자 C를 기호화하여 표기한다.

예를 들어, 두 집합 A와 B가 있을 때, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$이면 A는 B에 포함되며 B는 A를 포함한다. A의 진부분집합은 $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$,

$\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$의 7개다.

두 집합 A, B가 가지고 있는 모든 원소가 서로 같다면 "두 집합은 같다"고 말한다. 좀 더 엄밀히 말하면, A가 B의 부분집합이고 B가 A의 부분집합이면 두 집합은 같은 집합이다. 즉,

$$A = B \quad \Longleftrightarrow \quad A \subset B \quad \text{그리고} \quad B \subset A\text{이다.}$$

집합의 표현방법

집합을 서술하기 위해 일반적으로 사용되는 방법에는 원소나열법과 조건제시법이 있다.

원소나열법

이 방식은 집합에 들어있는 원소들을 직접 나열하는 방식이다. 예를 들어 다음과 같다:

$$\{1,2,3\}, \qquad \{\text{흰색, 검은색}\}.$$

또한, 원소의 수가 많고 원소들 간에 규칙이 있을 때에는 다음과 같이 중간을 생략하고 $\ldots$로 나타낼 수 있다:

$$\begin{aligned} &\{1,2,3,\ldots,100\} &:&\ \text{1부터 100까지의 자연수가 있는 집합,} \\ &\{2,4,6,\ldots,40\} &:&\ \text{2부터 40까지의 짝수가 있는 집합.} \end{aligned}$$

이와 같은 표기를 사용할 때에는 규칙성을 알 수 있어야 한다. 예를 들어 $1,4,5,7,\ldots,-4$와 같은 집합에서는 중간에 생략된 숫자들이 무엇인지 추측할 수 없기 때문에 이러한 표현은 삼가해야 한다.

조건제시법

이 방법은 원소들을 구체적으로 설명하는 대신에 원소들의 논리적 관계를 기술한다. 조건제시법은 반드시 $\{$(집합의 모든 원소의 형태)|(원소의 조건)$\}$과 같이 표기하며, 이 때 기호 '|'는 '바(bar)'라고 읽는다. 종종 '|(bar)'대신에

': (colon)'을 사용하기도 한다. 예를 들어 다음과 같다:

$$\{x \mid x\text{는}1 \le x \le 10\text{인 자연수}\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\},$$
$$\{x+y \mid x\text{는 1 또는 2}, y\text{는 3 또는 4}\} = \{4,5,6\},$$
$$\{(x,y) \mid x \in \{1,2\},\ y \in \{1,2\}\} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}.$$

집합의 연산

U는 전체집합이고 A, $B \subset U$일 때, 다음과 같이 정의한다:

(1) 교집합: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 이고 } x \in B\}$,

(2) 합집합: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 또 } x \in B\}$,

(3) 차집합: $A \backslash B (= A - B) = \{x \mid x \in A \text{ 이고 } x \notin B\}$,

(4) 여집합: $A^c = U \backslash A = \{x \mid x \in U \text{ 이고 } x \notin A\}$

1.2 실수

수는 인류의 역사와 더불어 많아진다. 자연수는 물건의 갯수를 세기 위해 먼 옛날 처음으로 만든 수다. 여기서 음수를 포함하여 정수의 개념이 생겨나고 정수의 나눗셈에서 유리수의 개념이 생겨났으며, 사칙연산을 자유롭게 할 수 있는 체계가 생겨났다. 나눗셈 같은 계산을 할 때 분수(유리수)로 표현할 수 없는 수를 무리수라고 명명하게 되었다. 무리수는 자유롭게 계산할 수 있는 수가 아니다. 대수 방정식의 해법을 찾는 과정에서 허수를 포함하여 복소수가 등장하게 되었다. 이로써 수는 양(quantity)만을 기술하기 위한 개념이 아니게 되었다.

- 자연수 $\rightarrow$ 정수 $\rightarrow$ 유리수 $\rightarrow$ 실수 $\rightarrow$ 복소수
- 복소수: 실수, 허수
- 복소수: 대수적인 수, 초월수
- 실수: 유리수, 무리수
- 정수: 양의 정수, 0, 음의 정수
- 자연수 = 양의 정수

수의 확장

일반적으로 수는 실수 또는 복소수 전체의 집합의 원소를 가리키는 것으로 여겨진다. 한편 이와는 다른 체계가 있어서 그 일부 또한 '수'로 불린다. 물건의 갯수 개념인 자연수를 확장하여 기수[2], 물건의 순서를 의미하는 자연수를 확장해서 순서수[3]가 정의된다. 또한, 유리수에서 실수로 확장되는 것과 병행하여 소수 p에 대하여 p진수가 존재하며, 복소수를 넘 어서서 추가로 허수의 단위가 추가되면서 사원수, 팔원수, 16원수, 이원수, 분할복소수[4] 등이 있다. 또한 실수에 더하여 무한소 또는 무한대를 포함한 확장된 실수 체계도 있다.

수를 나타내는 집합기호

다음의 집합들은 수학에서 매우 자주 사용되며 특별한 기호를 배정해 나타낸다.

- $\mathbb{N}$: 자연수 전체집합
- $\mathbb{Z}$: 정수 전체집합
- $\mathbb{Q}$: 유리수 전체집합
- $\mathbb{Q}^c$: 무리수 전체집합
- $\mathbb{R}$: 실수 전체집합
- $\mathbb{C}$: 복소수 전체집합

기수법

같은 수라 하더라도 다른 숫자로나 다른 방법으로 표시 할 수 있다. 그 뿐만 아니라, 어떤 종류의 기수법은 그 방법에 따라서는 표시하는 방법이 한 가지 이상 존재하는 경우가 있다. 예를 들어 10진수의 소수 표기에서는 $1 = 0.999\ldots$ (소숫점 밑으로 모든 자리수가 9임)와 같이 두 가지 방법의 표기가 있다.

[2]수학에서, 기수(基數, 영어: cardinal number)는 집합의 크기를 나타내는 수이다. 유한 집합의 크기는 자연수로 나타내어지는데, 이를 무한 집합에 대하여 일반화한 개념이다.

[3]집합론에서, 순서수(順序數, 영어: ordinal)는 정렬 전순서 집합들의 "길이"를 측정하는 수의 일종이다. 자연수를 확장하며, 자연수들의 정렬 전순서 집합과 같은 무한 정렬 전순서 집합들의 크기를 측정하는 무한 순서수들이 존재한다.

[4]분할복소수(split-complex number)는 $\eta = a + bj,\ (a, b \in \mathbb{R})$의 형태로 나타나는 수이다. j는 $j^2 = 1$이고 $j \neq \pm 1$인 허수이다.

실수의 십진수 표현

모든 실수[5]는 $17/10 = 1.7$, $9/100 = 0.9$, $1/6 = 0.16666\ldots$처럼 십진수 형태로 표현할 수 있다. 유리수의 경우, 유한 십진소수로 표현되거나 아니면 $\frac{1}{7} = 0.142857142857142857142\ldots$와 같이 반복되는 순환 소수로 표현된다. 그러나 무리수의 경우에는 $\sqrt{2} = 1,41423\ldots$이나 $\pi = 3.14159\ldots$처럼 순환되지 않은 무한 소수로 표현되어야 한다. 우리는 $1.375 = 1.3750000\ldots$나 $1.37499999\ldots$처럼 모든 수를 무한 십진수로 표현할 수 있다. 순환 소수를 나타내기 위해서는

$$\frac{1}{7} = 0.\dot{1}\dot{4}\dot{2}\dot{8}\dot{5}\dot{7}, \quad \frac{19}{6} = 3.1\dot{6}$$

과 같이 주기적으로 순환되는 수들 위에 점($\cdot$)을 찍는다. 오직 0과 1만을 활용해서 수를 표현하는 2진법과 같이 다른 집법을 써서 수를 표현할 수도 있다.

실수의 기하학적인 표현

그림 1.1에 나타난 바와 같이 실수(real number)를 `실수축(real axis)`이라 불리는 직선위의 점으로 표현하는 것은 이미 다 알고 있으리라 생각한다. 각 실수에 대해서 실직선 위에서 오직 한 점이 대응하며, 그림 1.1에 나타난 바와 같이 실수 집합과 실직선 위의 점들 사이에는 1대1 대응 관계가 존재한다. 이러한 이유로 인해서 우리는 실수와 실직선 위의 점을 서로 혼용하여 활용한다.

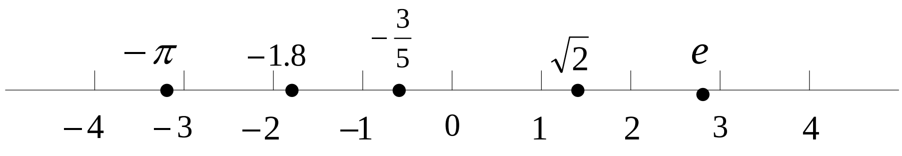

그림 1.1: 실수의 기하학적인 표현

[5]실수에 대한 엄밀한 정의는 게오르크 칸토어에 의해 이루어졌다. 유리수로부터 실수를 이론적으로 확장하여 그 성질을 규정짓게 된 것은 카를 바이어슈트라스, 게오르크 칸토어, 리하르트 데데킨트와 같은 수학자들의 공이 지대하였다.

수의 연산

수에 관한 중요한 사항으로, 더하거나 빼거나, 곱하거나 나누는 등의 여러가지 연산을 수행할 수 있다는 점을 들 수 있다. 이런 연산에 대해서는 수학의 한 분야인 추상 대수학에서 군, 환, 체 등의 여러 가지 형태로 일반화되어 논의되고 있다.

공리 1.1 (실수의 연산법칙) *$a, b, c \in \mathbb{R}$일 때, 다음 법칙들이 성립한다.*

1. $a+b \in \mathbb{R}$이고 $ab \in \mathbb{R}$이다. (닫힘법칙)
2. $a+b=b+a$ (덧셈의 교환법칙)
3. $a+(b+c)=(a+b)+c$ (덧셈의 결합법칙)
4. $a+0=0+a=a$ (덧셈의 항등원)
5. $a+(-a)=(-a)+a=0$ (덧셈에 대한 a의 역원)
6. $ab=ba$ (곱셈의 교환법칙)
7. $a(bc)=(ab)c$ (곱셈의 결합법칙)
8. $a1=1a=a$ (곱셈의 항등원)
9. $a \neq 0$일 때, $a\frac{1}{a}=\frac{1}{a}a=1$ (곱셈에 대한 $a \neq 0$의 역원)

위와 같은 성질을 만족하는 실수집합 $\mathbb{R}$을 가리켜서 `실수 체(real field)`라 부른다.

(뺄셈과 나눗셈의 정의)

1. a와 b가 실수일 때, $a-b=a+(-b)$로 정의한다.
2. $a \neq 0$일 때, $\frac{1}{a}=a^{-1}$로 표기하고 $\frac{b}{a}=b/a=ba^{-1}=b\left(\frac{1}{a}\right)$로 정의한다.

부등식(inequalities)

만약 $a, b \in \mathbb{R}$이고 $a-b \leq 0$이면, “a는 b보다 작거나 같다”라고 말하거나 “b는 a보다 크거나 같다”라고 말하고 ‘$a \leq b$’ 또는 ‘$b \geq a$’로 표기한다. 그리고 ‘$a \leq b$’ 또는 ‘$b \geq a$’이고 $a \neq b$이면, ‘$a < b$’ 또는 ‘$b > a$’로 표기하고 “a가 b보다 작다” 또는 “b가 a보다 크다”라고 말한다.

다음은 부등식에 관한 성질들이다.

정리 1.1 (부등식의 성질들) *a, b, c가 실수들일 때, 다음이 성립한다.*

1. *세 가지 관계 $a < b$. $a = b$, $a > b$ 중에서 반드시 한 가지 경우만 성립한다.*
2. *$a < b$이고 $b < c$이면 $a < c$이다. (전이(추이)법칙-transitive law)*
3. *$a > 0$이고 $b > 0$이면 $a + b > 0$이고 $ab > 0$이다.*
4. *$a < b$이면 $a + c < b + c$이다.*
5. *$a < b$이고 $c > 0$이면 $ac < bc$이다.*
6. *$a < b$이고 $c < 0$이면 $ac > bc$이다.*

예제 1.1 *다음이 성립한다.*

1. *$3 < 5$ 또는 $5 > 3$이고; $-2 < -1$ 또는 $-1 > -2$이다.*
2. *$x \leq 3$은 x가 3보다 작거나 3과 같은 실수임을 뜻한다.*

절대값(Absolute value)

실수 a에 대해서, a의 `절대값(absolute value)` $|a|$를 다음과 같이 정의한다:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{if} \quad a \geq 0, \\ -a & \text{if} \quad a < 0. \end{cases}$$

정리 1.2 (절대값의 성질) *모든 $a, b, c, \ldots, m \in \mathbb{R}$에 대해서, 다음 관계가 성립한다.*

1. *$|ab| = |a||b|$ 또는 $|abc \ldots m| = |a||b||c| \ldots |m|$이다.*
2. *$|a + b| \leq |a| + |b|$ 또는 $|a + b + c + \cdots + m| \leq |a| + |b| + |c| + \cdots + |m|$이다.*
3. *$|a - b| \geq |a| - |b|$이다.*

예제 1.2

1. *$|-5| = |5| = 5$, $\left|-\frac{3}{4}\right| = \left|\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}$이고 $|0| = 0$이다.*
2. *실직선 위에서 두 실수 a와 b사이의 거리는 $|a - b| = |b - a|$이다.*

1.3 지수와 로그

지수와 로그는 일종의 함수의 개념들이며 이들은 서로 역관계다.

<u>지수와 근(exponents and roots)</u>

a가 실수이고 n이 자연수일 때, a를 n번 곱한 수를 a^n으로 표기한다. 즉

$$\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}^{n\text{-번}} = a^n$$

로 표현한다. 그리고

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = (a^n)^{-1}$$

으로 정의한다. 그리고 $a \neq 0$일 때 $a^0 = 1$로 정의하며 0^0은 수로 정의하지 않는다. 이 때 a를 기저(base)라 하고 n을 가리켜서 지수(exponent)라 부른다. 그러면 다음 법칙들이 정립한다.

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $(a \in \mathbb{R};\ m, n \in \mathbb{N})$
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $(a \in \mathbb{R}\backslash\{0\};\ m, n \in \mathbb{Z})$
3. $(a^m)^n = a^{mn}$, $(a \in \mathbb{R};\ m, n \in \mathbb{Z})$
4. $\left(\frac{b}{a}\right)^m = \frac{b^m}{a^m}$, $(a \in \mathbb{R};\ m \in \mathbb{Z})$

만약 p가 자연수이고 $a^p = N \in \mathbb{R}$이면, a를 가리켜서 '수 N의 p-승근(p-th root)'이라 부르고 $a = \sqrt[p]{N}$으로 표현한다. 경우에 따라서는 N의 p-승근이 2개까지 존재할 수 있다. 예를 들면, $3^2 = (-3)^2 = 9$이므로 9의 2승근은 3과 -3 두 개가 존재한다.

2승근 $\sqrt{N} = \sqrt[2]{2}$의 경우에는 언제나 음이 아닌 수(0보다 크거나 같은 수)로 정의한다. 즉,

$$\sqrt{N} = x \quad \Longleftrightarrow \quad x \geq 0\text{이고} \quad x^2 = N\text{이다.}$$

따라서 $\sqrt{N}$이 정의되려면 $N \geq 0$인 조건을 만족해야 한다. 예를 들면, $\sqrt{9} = 3$이고 $\sqrt{-9}$는 실수로 정의될 수 없다.

만약 p와 q가 모두 양의 정수이면 $a^{p/q} = (a^p)^{1/q} = \sqrt[q]{a^p}$으로 정의한다.

로그(logarithm)[6]

$a^p = N$일 때, p를 가리켜서 '기저 a에 대한 N의 로그(logarithm)'라 부르고 $p = \log_a N$으로 표현한다. 만약 $a > 0$ 이고 $N > 0$이며 $a \neq 1$이면, $p = \log_a N$는 유일한 실수값으로 존재한다.

정리 1.3 (로그의 성질) *$0 < a \neq 1$이고 $M, N > 0$이며 r이 임의의 실수일 때, 다음이 성립한다.*

1. $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$
2. $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$
3. $\log_a M^r = r \log_a M$

실생활에서 우리가 로그를 사용할 때는 대개 2개의 기저를 활용한다. 하나는 10을 기저로 하는 상용로그 $\log_{10} x$이고, 또 다른 하나는 오일러의 수(Euler's number)라고 부르는 $e = 2.71828\ldots$를 기저로 하는 자연로그(natural logarithm) $\ln x = \log_e x$이다. 고등수학에서는 상용로그 $\log_{10} x$보다는 자연로그 $\ln x$를 선호하는 데, 그 이유는 로그를 이용해서 어떤 함수을 미분하거나 적분할 때에 상용로그보다 자연로그가 더 편리하기 때문이다. 예를 들면

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}, \qquad \frac{d}{dx} \log_{10} x = \frac{1}{x \ln 10}$$

이고

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$$

이다.

[6] 이른 17세기에 곱하기 및 나누기의 계산을 간편하게 해내기 위해 존 네이피어가 발명한 것으로 알려져 있다. 복잡한 단위의 계산을 간편하게 계산 할 수 있다는 장점 때문에, 로그표 및 계산자 등의 발명품과 함께 세계적으로, 여러 분야의 학자들에게 널리 퍼졌다. 지수에 대비된다는 의미에서 대수(對數)로 부르기도 한다.

1.4 해석학적인 개념들

해석학(解析學, analysis)은 미적분학을 엄밀하게 형식화하는 것을 목적으로 시작된 수학의 한 분야로서 수열이나 함수의 극한 및 무한급수, 미분, 적분, 측도 및 해석함수 등의 개념을 다룬다. 위의 개념들은 주로 실수체나 복소수체 및 그 위의 함수에 대해 적용되지만, 보다 일반적으로는 어떤 수학적 공간 혹은 대상이든 '가까움'(위상 공간 참고)이나 조금 더 구체적으로는 '거리'(거리 공간 참고)의 개념이 주어지기만 하면 적용될 수 있다. 해석학은 정수론, 기하학, 대수학과 함께 수학의 주요한 분야들 중 하나이다.

점집합과 구간

실직선 $\mathbb{R}$위에 위치한 점들(실수들)의 집합을 가리켜서 **1차원적인 점집합**이라 부른다. 그리고 $a, b \in \mathbb{R}$이고 $a \leq b$일 때, a와 b를 끝점으로 갖는 구간들을 다음과 같이 정의한다.

1. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ (**폐구간**)
2. $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (**개구간**)
3. $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ (**반폐구간**)
4. $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ (**반개구간**)

변하는 실수나 점을 나타내는 나타내는 기호 x를 가리켜서 **변수(variable)**라 부르고 고정된 수를 나타내는 a, b 등을 가리켜서 **상수(constant)**라 일컫는다.

대수적인 공식들을 만들기 위해서 문자가 도입된 시기는 대략 1600년대이다. 그 후 철학자이자 수학자인 데카르트(Rene Descartes)[7]가 영문자들 중에서 앞부분에 위치한 a, b, c는 상수를 나타내는 기호로 쓰고 맨 끝부분에 위치한 문자 x, y, z를 변수를 나타내는 문자로 쓰기 시작했다. 이것이 상수를 나타내는 문자는 주로 $a, b, c, \ldots$ 등을 사용하고 변수를 나타내는 문자를 $x, y, z, \ldots$ 등을 사용하는 오늘날의 관습이 되었다.

[7] 르네 데카르트(René Descartes,1596년~1650년)는 프랑스의 물리학자, 근대 철학의 아버지, 해석기하학의 창시자로 불린다.

예제 1.3 $|x| < 3$인 *모든* x*들의 집합, 즉* $-3 < x < 3$*인 실수* x*들의 집합은 개구간* $(-3, 3)$*이다.*

가산집합

자연수 집합 $\mathbb{N}$과 1대1로 대응하는 집합을 가리켜서 **가부변집합**(denumerable set)이라 부른다.

예제 1.4 *짝수인 양의 정수들의 집합* $\mathbb{N}_e = \{2, 4, 6, \ldots\}$*은 자연수 집합과 1대1로 대응하므로 가부변집합이다.*

집합 A가 A의 어떤 진부분집합 B와 1대1로 대응하면 A를 가리켜서 **무한집합**(infinite set)이라 한다. 무한집합이 아닌 집합을 가리켜서 **유한집합**(finite set)이라 한다.

예제 1.5 *다음 명제들이 성립한다.*

1. *자연수 집합* $\mathbb{N}$*은 짝수인 양의 정수들의 집합* $\mathbb{N}_e$*와 1대1로 대응하므로 무한집합이다.*
2. *공집합* $\emptyset$*은 진부분집합을 갖지 않으므로 유한집합니다.*
3. $A \subset B$*이고* A*가 무한집합이면* B*도 무한집합이다.*
4. $A \subset B$*이고* B*가 유한집합이면* A*도 유한집합이다.*
5. A *또는* B*가 무한집합일 필요충분조건은* $A \cup B$*가 무한집합이다.*
6. A*와* B*가 유한집합일 필요충분조건은* $A \cup B$*가 유한집합이다.*

가부변합이나 유한집합을 가리켜서 **가산집합**(countable set)이라고 한다. 유리수 집합 $\mathbb{Q}$는 무한 가산집합인 반면에 무리수집합 $\mathbb{Q}^c$와 실수집합 $\mathbb{R}$은 비가산 무한집합(uncountable infinite set)이다.

집합에 속한 원소들의 갯수를 가리켜서 그 집합의 **기수**(cardinal nimber)라 한다. 특히, 무한 가산집합의 기수를 $\aleph_0$(히브리어로 aleph-null)로 나타낸다. 그리고 실수집합 $\mathbb{R}$과 1대1로 대응되는 집합의 기수를 $\aleph$(aleph)로 표기하고 '**연속체의 기수**(cardinality of the contimuum)'라고 일컫는다.

근방과 집적점(쌓인점)

$a \in \mathbb{R}$이고 $\delta > 0$일 때, 개구간 $N_\delta(a) = (a-\delta, a+\delta)$를 가리켜서 '$a$의 δ-**근방**(neighborhood)'이라 한다. 그리고 a의 근방에서 a를 제거한 집합 $N_\delta^o(a) = N_\delta(a)\backslash\{a\}$를 가리켜서 '$a$를 제거한 a의 근방(a delated δ-neighborhood)'이라 일컫는다.

극한점(極限點, limit point)은 어떤 부분집합의 점들이 무한히 가까이 다가가는 점이다. 부분 집합 대신 점렬에 대한 유사한 개념으로 집적점(集積點, cluster/accumulation point)이 있다. "실수 l이 집합 $A \subset \mathbb{R}$의 **집적점**이라 함"은 "l의 빠진 임의의 δ-근방 $N_\delta^o(l)$이 A의 점을 포함한다는 것, 즉 $N_\delta^o(l) \cap \neq \emptyset$임"을 의미한다. "수 l이 A의 집적점이다"는 것을 다른 말로 표현하자면 "아무리 작은 임의의 $\delta > 0$을 택하더라도 $0 < |x-l| < \delta$인 $x \in A$가 존재한다"는 것을 의미한다. 이와 같은 x는 δ의 값을 점점 작게 선택해도 항상 존재해야 하므로, 실제로 l의 임의의 근방 $N_\delta(l)$은 A의 점들을 무한히 많이 포함해야 한다. 이는 곧 $\lim_{n\to\infty} x_n = l$인 수열 $\{x_n\} \subset A - \{l\}$이 존재한다는 것을 말한다.

따라서 유한집합은 집적점을 가질 수 없고 무한집합이라고 하더라도 집적점을 갖지 않을 수 있다. 우리는 실수들의 집합 A의 집적점들의 전체집합 A'을 가리켜서 A의 **도집합**(derived set)이라 일컫는다. 그리고 자신의 모든 집적점들을 다 포함하는 집합을 가리켜서 **폐(닫힌)집합**(closed set)이라 부른다.

예제 1.6 *1. $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$이면, $A' = \{0\}$이다. 그런데 $0 \notin A$이므로 A는 닫힌집합이 아니다.*

2. 자연수집합 $\mathbb{N}$과 정수집합 $\mathbb{Z}$는 집적점을 갖지 않는다. 즉, $\mathbb{N}‘ = \mathbb{Z}' = \emptyset$이다.

3. 유리수 집합은 모든 실수를 집적점으로 갖는다. 즉, $\mathbb{Q}‘' = \mathbb{R}$이다. 그리고 $\mathbb{Q}‘' = \mathbb{R} \not\subseteq \mathbb{Q}$이므로 $\mathbb{Q}$은 닫힌집합이 아니다.

유계한 집합

$A \subset \mathbb{R}$이라 하자. 만약 모든 $x \in A$에 대해서 $x \le u$인 관계를 만족하는 실수 u가 존재한다면, "A는 **위로 유계**(bounded above)하다"고 말하고 u를 가리켜서 'A의 **상계**(upper bound)'라 한다. 또한, '모든 $x \in A$에 대해서 $l \le x$인

관계를 만족하는 실수 l이 존재한다'면, 'A는 **아래로 유계**(bounded below) 하다'고 말하고 l을 가리켜서 'A의 **하계**(lower bound)'라 한다. A가 위로유계하고 아래로 유계하면, 즉 모든 $x \in A$에 대해서 $l \leq x \leq u$인 관계를 만족하는 실수 l, u가 존재하면 "A는 **유계하다**(bounded)''고 말한다.

만약 M이 A의 상계이고 모든 $\epsilon > 0$에 대해서 $M - \epsilon$이 A의 상계가 아니면, M을 가리켜서 A의 **최소상계**(least upper bound: lub) 또는 **상한**(supremum)이라 부르고

$$M = \sup(A) = \mathrm{lub}(A)$$

로 표현한다.

또한, m이 A의 하계이고 모든 $\epsilon > 0$에 대해서 $m + \epsilon$이 A의 하계가 아니면, m을 가리켜서 A의 **최대하계**(greatest lower bound: glb) 또는 **하한**(infimum)이라 부르고

$$m = \inf(A) = \mathrm{glb}(A)$$

로 표현한다.

A의 위로 유계하지 않으면 $\sup(A) = \infty$로 표현하고, A가 아래로 유계하지 않는 경우에는 $\inf(A) = -\infty$로 표현한다.

예제 1.7 *다음이 성립한다.*

1. $A = [0, 1)$*이면,* $\sup(A) = 0$*이고* $\inf(A) = 1$*이다.*
2. $\sup(\mathbb{N}) = \infty$*이고* $\inf(\mathbb{N}) = 1$*이다.*
3. $\sup(\mathbb{Z}) = \infty$*이고* $\inf(\mathbb{Z}) = -\infty$*이다.*

대수적인 수와 초월수

실수를 유리수와 무리수로 구분한다는 것을 우리는 잘 알고 있다. 그런데 실수를 다르게 구분하는 개념들이 있다. 그것은 곧 실수를 **대수적인 수**(代數的數, algebraic number)와 **초월수**(超越數, transcendental number)로 구분하는 것이다. 실수 x가 대수적인 수라고 하는 것은

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0 = 0, \quad (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{Z}) \tag{1.1}$$

와 같은 정수계수를 갖는 다항 방정식의 근이라는 뜻이고, 대수적인 수가 아닌 실수를 가리켜서 **초월수** (`transcendental number`)라 일컫는다.

예제 1.8 *다음이 성립한다.*

1. *$\frac{2}{3}$과 $\sqrt{2}$는 각각 대수방정식 $3x - 2 = 0$과 $x^2 - 2 = 0$의 근이므로 대수적인 수이다.*
2. *원주율 π와 오일러의 수 $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$는 모두 초월수이다.*
3. *$e\pi$나 $e+\pi$와 같은 수들이 초월수인지 대수적인 수인지는 아직 밝혀지지 않고 있다.*
4. *대수적인 수들의 집합은 무한 가산집합이고 초월수는 비가산집합이다.*

1.5 복소수

역사적으로 음수의 제곱근이 최초로 나타난 것은, 서기 1세기 그리스의 수학자이자 발명가인 알렉산드리아의 헤론이 피라미드의 절단에 대한 부피를 계산할 때이다. 좀 더 명확히 나타난 때는 타르탈리아[8]나 카르다노[9]와 같은 16세기 이탈리아 수학자들이 3차와 4차 다항방정식의 근에 대한 공식을 발견할 때이다. 그 당시의 수학자들은 이 공식들에서 실수해만을 구하려고 하였지만 그 과정에서 음수의 제곱근이 다루어지는 과정이 필요함을 곧 알 수 있었다. 그 당시에는 음수에 대한 이해도 부족했으므로 복소수는 수로서 인정되지 못했다.

17세기에 수학자 데카르트가 처음으로 '허수(imaginary number)'라는 용어를 사용하였다. 18세기에 드무아브르(De Moivre)[10]와 오일러(Euler)[11] 의

[8] 타르탈리아(Niccolo Tartaglia, 1499년 1557년 12월 13일)는 이탈리아의 수학자다.

[9] 카르다노 (Girolamo Cardano, 1501년 9월 24일 - 1576년 9월 21일) 이탈리아 밀라노에서 태어나, 로마에서 죽었다. 수학자로 널리 알려져 있으나 본업은 의사였다. 점성술사, 도박사, 철학자이기도 했다.

[10] 아브라함 드무아브르(프랑스어: Abraham de Moivre, 1667∼1754)는 프랑스 태생의 수학자이다. 삼각법의 드무아브르의 공식과 통계학의 정규 분포 및 중심 극한 정리를 발견하였다.

[11] 오일러(Leonhard Euler, 1707년 4월 15일∼1783년 9월 18일)는 스위스 바젤에서 태어난 수학자, 물리학자, 천문학자이다.

복소수에 대한 업적이 있었다. 유명한 드무아브르의 공식에 드무아부르의 업적이 다음과 같이 나타나 있다:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

그리고 복소해석학에서 오일러의 공식을 볼 수 있다:

$$cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}.$$

복소수의 존재성에 대해서는 1799년 베셀(Bessel)[12] 이 복소수를 기하적인 표현으로 나타냄으로써 비로소 완전히 받아들여졌다. 이것은 수 년후에 가우스(Gauss)[13]가 발견하여 널리 알려져서 복소수가 매우 중요한 수의 확장으로 받아 들여졌다. 그러나 복소수의 기하학적 표현에 대한 생각은 1685년 존 월리스가 쓴 수학저서 ≪De Algebra tractatus≫에도 나타났다.

복소수의 정의

복소수(複素數, complex number)는 다음 꼴로 나타낼 수 있는 수이다.

$$a + bi$$

이 때 a, b는 실수이고 i는 허수단위[14]로서 '$i^2 = -1$'인 관계를 만족한다. 실수 a를 그 복소수의 실수부, 실수 b를 복소수의 허수부라고 부른다. 모든 실수는 복소수에 포함된다. 왜냐하면 모든 실수는 허수부가 0인 복소수로 표시할 수 있기 때문이다. 즉 실수 a는 복소수 $a+0i$와 같다. 예를 들어, $\sqrt{13}$은 실수부가 $\sqrt{13}$이고 허수부가 0인 복소수이다.

[12] 베셀 (Friedrich Wilhelm Bessel, 1784년 7월 22일   1846년 3월 17일) 은 독일의 천문학자이자 수학자로, 민덴 (Minden) 에서 출생하였다.

[13] 가우스(Johann Carl Friedrich Gauss, 1777년 4월 30일~1855년 2월 23일)는 독일의 수학자이자 과학자이다. 정수론•통계학•해석학•미분기하학•측지학•전자기학•천문학•광학 등의 많은 분야들에 크게 기여하였다. 특히, 정수론이 수학에서 중요한 자리를 차지할 수 있도록 큰 공헌을 한 것이 높이 평가되고 있다. 가우스는 수학의 왕자라는 별명으로, 오늘날의 세대들에게 친숙한 이름이기도 하다.

[14] 전자공학 등의 분야에서는 전류의 기호로 i를 사용하기 때문에 혼동을 피하기 위해 허수단위를 j로 표기하는 경우도 있다.

복소수에서도 실수에서 성립하는 사칙 연산을 정의할 수 있고 기존의 성질을 대부분 만족한다. 예를 들어, 복소수체계 $\mathbb{C}$도 실수체계 $\mathbb{R}$과 마찬가지로 사칙연산에 대해 닫혀 있다.

복소수의 연산

복소수의 집합을 볼드체 $\mathbb{C}$로 표기한다. 임의의 실수 a를 $a = a + 0i$로 나타낼 수 있으며, 이러한 의미에서 실수의 집합 $\mathbb{R}$을 $\mathbb{C}$의 부분집합으로 볼 수도 있다.

그리고 '두 복소수가 서로 같다'는 것은 '두 복소수의 실수부가 서로 같고 허수부도 서로 같음'을 말한다. 즉,

$$a + bi = c + di \quad \Leftrightarrow \quad a = c \ \& \ b = d \text{ 이다.}$$

대수학의 결합법칙, 교환법칙, 분배법칙 등과 $i^2 = -1$이라는 조건을 이용하여 복소수의 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈을 다음과 같이 정의할 수 있다.

1. 덧셈: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$,
2. 뺄셈: $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$,
3. 곱셈: $(a + bi)(c + di) = ac + (bc)i + (ad)i + (bd)i^2 = (ac - bd) + (bc + ad)i$,
4. 나눗셈: $(a + bi)/(c + di) = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right) + \left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right) i$.

복소수체와 복소수 평면

위에서 정의한 대로 복소수는 0으로 나누는 경우를 제외하면 사칙연산을 자유롭게 행할 수 있으며, 대수학에서는 이런 집합을 **체**[15]라고 한다. 따라서 복소수의 집합 $\mathbb{C}$는 체를 이루는 데, 이를 강조하여 $\mathbb{C}$를 **복소수체**(`complex field`)라고 부른다. 복소수체는 덧셈에 대한 항등원 0과 곱셈에 대한 항등원 1을 갖는다.

또한 복소수체에는 $a + bi$의 덧셈에 대한 역원 $-a–bi$와 곱셈에 대한 역원 $\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i$도 존재[16] 한다. 마찬가지로 실수의 집합 $\mathbb{R}$도 체를 이루며, 이를

[15] 체(體, field)는 사칙연산이 자유로이 시행될 수 있고, 산술의 잘 알려진 규칙들을 만족하는 대수 구조이다.

[16] 곱셈에 대한 역원은 $a + bi \neq 0$인 경우에만 존재한다.

실수체(real field)라고 한다. $\mathbb{R}$은 $\mathbb{C}$의 부분집합이므로 실수체는 복소수체의 부분체이다.

복소수는 데카르트 좌표계가 주어진 2차원 평면 상의 점으로 볼 수 있다. 따라서 복소수의 집합 $\mathbb{C}$를 기하학적인 평면으로 볼 수 있으며, 이를 강조하여 $\mathbb{C}$를 복소평면이라고 부르기도 한다.

절대값과 거리

복소수의 $z = a + bi$의 **절댓값**(absolute value) $|z|$는 $\sqrt{a^2 + b^2}$로 정의한다. 이는 피타고라스 정리에 따라 복소평면의 원점으로부터 그 복소수 까지의 거리로 볼 수 있다. 절댓값은 임의의 복소수 z와 w에 대해 다음과 같은 중요한 성질들을 만족한다:

(1) $|z| = 0$일 필요충분조건은 $z = 0$이다.

(2) 모든 $z, w \in \mathbb{C}$에 대해서 $|z + w| \leq |z| + |w|$이다. (삼각 부등식 관계)

(3) 모든 $z, w \in \mathbb{C}$에 대해서 $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$이다.

복소수 z와 w사이의 거리 $d(z, w)$는 $|z–w|$로 정의한다. 이렇게 하면 복소평면은 거리 공간이 되며 이를 이용하며 극한과 연속성 등을 정의할 수 있다.

켤레복소수

복소수 $z = a + bi$의 **켤레복소수**(conjugate complex number)는 $a–bi$로 정의하며, $\bar{z}$ 혹은 z^*로 표시한다. 그림에서 볼 수 있듯이 $\bar{z}$는 z를 실수축에 대해 반사시킨 상이다. 다음의 성질들이 성립한다는 것은 간단히 확인할 수 있다.

(1) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$

(2) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

(3) $\overline{(z/w)} = \bar{z}/\bar{w}$

(4) $\bar{\bar{z}} = z\bar{z} = z$는 z가 실수라는 조건과 동치이다.

(5) $|z| = |\bar{z}|$

(6) $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

(7) $z^{-1} = \bar{z} \cdot |z|^{-2}$ (단, $z \neq 0$일 경우에 한함).

켤레복소수 연산은 사칙연산을 비롯해 여러 중요한 함수와 교환될 수 있다. 예를 들어, 곱셈을 한 뒤에 켤레복소수를 취하나 각각에 켤레복소수를 취한 뒤에 곱셈을 하나 마찬가지이다. 그러나 복소수를 그 켤레복소수로 보내는 함수 $f(z) = \bar{z}$는 복소해석 함수가 아니라는 점을 주의해야 한다.

대수학의 기본 정리에 따르면 일반적으로 계수가 복소수인 다항식 또한 그 근은 모두 복소수이다. 예를 들어 $\sqrt{i}$는 여전히 복소수이다. 왜냐하면 $\sqrt{i}$는 $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$ 와 $-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$라는 두 개의 근을 가지므로 여전히 복소수로 표시할 수 있다. 이런 점에서 복소수는 제곱근을 씌우는 방식으로는 더 이상 확장되지 않는 가장 큰 범위의 수라고 할 수 있다.

하지만 복소수에 포함되지 않는 다른 수가 존재하지 않는다는 의미는 아니다. 수라는 것은 인간의 자유로운 상상력을 기반으로 얼마든지 만들 수 있기 때문이다. 예를 들어 $\sqrt{x} = -1$을 만족하는 x는 복소수가 아니며 이러한 수를 새로 정의할 수 있다.

복소수의 극형식 표현

평면에 복소수 $z = a + bi$를 나타내는 간단한 방법은 직교좌표계라 불리우는 xy-평면에서 $z = a + bi$를 순서쌍 (a, b)애 대응시키는 것이다. 즉, z의 실수부 a는 x-축 성분으로 대응시키고 허수부 b는 y-축 성분으로 대응시키게 되면 복소수 체 $\mathbb{C}$는 2차원 실평면 $\mathbb{R}^2$와 1대1로 대응된다.

평면상의 복소수 $z = x + yi$를 표현하는 또 다른 방법은 원점 $O(0, 0)$으로 부터 점 $P(x, y)$까지의 거리 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$와 z의 편각(arguement)이라 불리우는 방향벡터 $\overrightarrow{OP}$가 양의 x축과 이루는 사잇각 θ를 이용해서

$$z = x + yi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

로 표현하는 방식이다. 여기서

$$r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} \text{ 이고 } \quad \theta = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) & \text{if } \ x > 0, \\ \pi + \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) & \text{if } \ x < 0, \ y \geq 0, \\ -\pi + \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) & \text{if } \ x < 0, \ y < 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{if } \ x = 0, \ \ y > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{if } \ x = 0, \ \ y < 0. \end{cases}$$

이다(그림 1.2를 참조하기 바람).

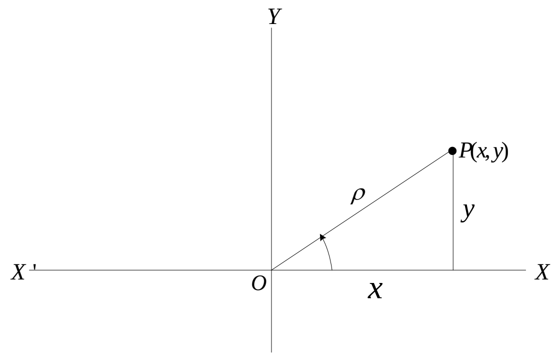

그림 1.2: 복소수의 극형식 표현

복소수의 확장

편각 θ는 래디언(radian) 각도를 의미한다. 복소수 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$를 오일러의 공식을 활용해서 표현하면

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

이다. 이 공식을 활용하면 복소수의 곱셈과 나눗셈을 다음과 같이 쉽게 할 수 있다.

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \ z_2 = r_2 e^{i\theta_2} \implies \begin{aligned} & z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}, \\ & \tfrac{z_1}{z_2} = \tfrac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}, \quad (\text{단} \quad z_2 \neq 0). \end{aligned}$$

또한 $z = re^{i\theta}$이고 n이 정수이면

$$z^n = \left(re^{\imath\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta} \text{ 이다.}$$

1.6 수학적 귀납법

수학적 귀납법(數學的歸納法, mathematical induction)은 수학에서 어떤 주장이 모든 자연수에 대해 성립함을 증명하기 위해 사용되는 방법이다. 무한개의 명제를 함께 증명하기 위해, 먼저 '첫 번째 명제가 참임을 증명'하고 그 다음에는 '명제들 중에서 어떤 하나가 참이면 언제나 그 다음 명제도 참임을 증명' 하는 방법으로 이루어진다.

수학적 귀납법은 이름과는 달리 귀납적 논증이 아닌 연역적 논증에 속한다.

정리 1.4 (수학적 귀납법) *자연수 집합 $\mathbb{N}$의 부분집합을 S라 할 때, 두 조건을 만족하면 $S = \mathbb{N}$이다.*

(1) $1 \in S$*이다.*

(2) $k \in S$*이면* $k+1 \in S$*이다.*

이는 다음 가정들이 참이라는 전제하에서 자연수의 **정렬성**[17](`well-ordering principle`)과 동치이다.

(가정1) 1은 자연수이며, 1이 아닌 모든 자연수는 $n+1$, $(n \in \mathbb{N})$의 꼴로 나타낼 수 있다.

(가정2 임의의 $n \in \mathbb{N}$에 대해 $n < n+1$이 성립한다.

참고 **(다른 시작점)** 첫 자연수가 아닌 수를 귀납의 시작점으로 둘 수도 있다. 만약 어떤 성질 $P(k)$가 자연수 $k = m$에 대해서 참이고, 또한 $n \geq m$인 자연수 $k = n$에 대해서 참일 때 $k = n+1$에 대해서도 참이라면, 성질 $P(k)$는 모든 자연수 $k \geq m$에 대해서 성립한다.

위의 가정하에서 자연수의 정렬성을 이용하여 수학적 귀납법 원리를 증명할 수 있다.

공리 1.2 (정렬의 원리, Well-ordering Principle) *자연수 집합의 공집합이 아닌 모든 부분집합은 최소원소를 포함한다. 수학적인 기호를 써서 표현하면 다음과 같다.*

$$\forall S \quad s.t.\ S \subseteq \mathbb{N}\ \& S \neq \emptyset, \quad \exists a \in S\ s.t.\ a \leq x \quad for\ all \quad x \in S.$$

[17]자연수의 정렬성(Well-ordering Principle)은 공집합이 아닌 모든 자연수 집합의 부분집합은 하나의 최소 정수를 포함한다는 정리이다.

$\boxed{\text{증명}}$ 귀류법으로 증명하겠다. 먼저 $S \neq \mathbb{N}$이라고 가정하자. 그러면 S는 자연수 $\mathbb{N}$의 진부분집합이므로 $\mathbb{N} \backslash S \neq \emptyset$이다. 따라서 자연수의 정렬성에 의해 $\mathbb{N} \backslash S$의 최소원소 m이 존재한다. 이 때 $1 \in S$이므로 $m \neq 1$이다. 따라서, 가정1에 의하여, $(m-1)+1 = m$인 자연수 $m-1$이 존재한다. 또한, 가정2에 따라서, $m-1 < m$이므로 $m-1 \in S$이다, 그런데 조건2에 의해서 $m \in S$이다. 이는 $m \notin S$라는 것에 모순이 된다. 따라서 원하는 결론을 얻는다. ■

또한, 페아노 공리계[18]에 의해서 자명하게 여겨지기도 한다.

공리 1.3 (페아노 공리) *A가 다음 두 가지 성질을 만족하는 자연수 집합 $\mathbb{N}$의 부분집합이라 하자.*

(1) $1 \in A$이다,

(2) $n \in A$일 때 $n+1 \in A$이다.

그러면 $A = \mathbb{N}$이다.

다음의 선택공리(axiom of choice)는 수학에서 정렬의 원리와 함께 중요하게 이용되는 공리다.

정리 1.5 (선택공리) *$\mathcal{A}$가 공집합이 아닌 집합들로 구성된 $\emptyset$아닌 집합족이면, 각 집합 $A \in \mathcal{A}$에 대해서, $f(A) \in A$인 함수 $f : \mathcal{A} \to \bigcup \mathcal{A} = \cup\{A : A \in \mathcal{A}\}$가 존재한다.*

예제 1.9 $\mathcal{A} = \{\{a,b\}, \{c,d,e\}, \{1,2,3\}, \{3,4\}\}$ *일 때, 함수* $f : \mathcal{A} \to \cup\mathcal{A}$*를*

$$f = \{(\{a,b\}, a), (\{c,d,e\}, d)\ (\{1,2,3\}, 3), (\{3,4\}, 4)\}$$

로 정의할 수 있다.

[18]수리논리학에서. 페아노 공리계(Peano's axioms)는 자연수 체계를 묘사하는 5개의 공리들이다. 수론의 일관성 및 완전성 연구에 사용된다.

————≪1장 연습문제≫————

수의 연산

1. 다음 방정식을 풀어라.

   (a) $4[(x-2)+3(2x-1)+2(2x+1)=12(x+2)-2$ (b) $\frac{1}{8-x}-\frac{1}{x-2}=\frac{1}{4}$

   (c) $\sqrt{x^2+8x+7}-\sqrt{2x+2}=x+1.$ (d) $\frac{1-x}{\sqrt{x^2-2x+5}}=\frac{3}{5}$

2. 다음 식을 간단히 하라.
$$\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x-3}$$

3. 다음 수를 십진 소수로 전개하라.

   (a) $\frac{3}{7}$ (b) $\sqrt{5}$

4. 분수가 17이고 분자가 $1, 2, 3, \ldots$인 분수를 10진 소수로 전개했을 때 반복되는 부분의 자릿수가 16임을 보여라. 이러한 전개에서 자릿수들의 순서에 어떤 관계가 있는가?

5. $\frac{0}{0}$과 $\frac{1}{0}$이 수가 될 수 없는 이유를 설명하라.

유리수와 무리수

6. 모든 유리수는 순환소수로 전개된다는 것을 증명하라.

7. $\frac{3}{7}$과 $\sqrt{5}$를 십진 소수로 전개해 보고 어떤 특징이 있는지 설명하라.

8. $\sqrt{3}$과 $\sqrt[3]{2}$가 모두 무리수임을 증명하라.

9. $\sqrt[3]{5}-\sqrt[4]{3}$과 $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$가 모두 무리수임을 밝혀라.

10. 다음 방정식의 근들을 구하라.

    (a) $2x^3-5x^2-9x+18=0$

    (b) $3x^3+4x^2-35x+8=0$

    (c) $x^4-21x^2+4=0$

11. a, b, c가 모두 유리수이고 m이 완전사각수가 아닌 양의 정수일 때, $a+b\sqrt{m}=c+d\sqrt{m}$일 필요충분조건이 $a=c$이고 $b=d$인 것임을 증명하라.

12. 다음 등식이 성립함을 증명하라.

$$\frac{1+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}-2\sqrt{15}+14\sqrt{3}-7}{11}$$

부등식

13. 다음 부등식을 만족하는 x값들의 집합을 구하라.

(a) $\frac{1}{x}+\frac{3}{2x}\geq 5$, (b) $x(x+2)\leq 24$, (c) $|x+2|<|x+5|$, (d) $\frac{x}{x+2}>\frac{x+3}{3x+1}$

14. 다음 부등식이 성립함을 증명하라.

(a) $|x+y|\leq |x|+|y|$ (b) $|x-y|\geq |x|-|y|$

15. 모든 실수 x, y, z에 대해서 다음 부등식이 성립함을 증명하라.

$$x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$$

16. $a^2+b^2=1$이고 $c^2+d^2=1$이면, $ac+bd\leq 1$임을 증명하라.

17. $x>0$이고 $x\neq 1$이면, 임의의 자연수 n에 대해서 다음 부등식이 성립함을 증명하라.

$$x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}>x^n+\frac{1}{x^n}$$

18. 세 수 a_1, a_2, a_3가 모두 양수일 때, $\frac{1}{3}(a_1+a_2+a_3)\geq\sqrt[3]{a_1a_2a_3}$가 성립함을 증명하라.

19. 모든 자연수 n에 대해서 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}<1$$

로그

20. 다음을 계산하라.

(a) $4^{\log_2^8}$ (b) $\frac{3}{4}\log_{1/8}\left(\frac{1}{128}\right)$ (c) $\sqrt{\frac{(0.00004)(25,000)}{(0.02)^5(0.125)}}$ (d) $3^{-2\log_3 5}$

21. 임의의 양의 실수 $a\neq 1$, $M>0$, $N>0$에 대해서 다음 등식이 성립함을 보여라.

(a) $\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$ (b) $\log_a M^r = r\log_a M$

22. 임의의 양수 $a, b \neq 1$에 대해서 $b^{\log_b a} = a$임을 증명하라.

23. 만약 $M > 0$, $N > 0$이고 $0 < a \neq 1$이면, 다음 등식이 성립함을 증명하라.

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

기수

24. 두 구간 $[0,\ 1]$과 $[-5,\ -3]$사이에 1대1 대응관계가 존재함을 보여라.

25. 유리수 집합 $\mathbb{Q}$가 가부번 집합임을 증명하라.

26. 실수 집합 $\mathbb{R}$과 무리수 집합 $\mathbb{Q}^c$가 모두 비가산 집합임을 보여라.

27. A와 B가 가산집합이면 교집합 $A \cap B$가 가산 집합임을 보여라.

28. $A_1, A_2, A_3, \ldots$가 가산 집합들이면 합집합 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$이 가산 집합임을 보여라.

극한과 경계

29. 집합 $\{1,\ 1.1,\ 0.9,\ 1.01,\ 0.99,\ 1.001,\ 0.999, \ldots\}$에 대해서 다음에 답하여라.

    (a) 이 집합은 유계한가?

    (b) 이 집합의 상한과 하한은 존재하는가? 존재하는 경우에 그 값을 구하라.

    (c) 이 집합은 극한점들을 갖는가? 극한점을 갖는다면 모두 구하여라.

    (d) 이 집합은 폐(닫힌)집합인가?

30. 집합 $\{-0.9,\ 0.9,\ -0.99,\ 0.99,\ -0.999,\ 0.999, \ldots\}$에 대해서 문제 29에 답하라.

31. 3개의 극한점들을 갖는 집합의 예와 극한점을 전혀 갖지 않는 집합의 예를 하나씩만 들어라.

32. 다음에 답하여라.

    (a) 구간 $(0,\ 1)$에 속하는 모든 점이 $(0,\ 1)$의 극한점임을 증명하라.

    (b) 구간$(0,\ 1)$의 극한점들 중에서 $(0,\ 1)$에 속하지 않는 점이 있는가? 있다면 그러한 점들을 모두 구하라.

33. 분모가 2^n, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$인 $(0,\ 1)$에 속하는 모든 유리수들의 집합을 S라 할 때, 다음에 답하여라.

    (a) S가 극한점들을 갖는가?

(b) S가 닫힌집합인가?

대수적인 수와 초월수

34. $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$이 대수적인 수임을 증명하라.

35. 대수적인 수들의 전체집합이 가부번 집합임을 증명하라.

36. 다음 수들이 모두 대수적인 수임을 증명하라.

(a) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ (b) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$

37. 구간 $(0, 1)$에 속한 초월수들의 집합이 비가산임을 증명하라.

38. 모든 유리수가 대수적인 수이지만 모든 초월수가 반드시 대수적인 수일 필요는 없다는 것을 증명하라.

복소수

39. 다음을 계산하여 $a+bi$ 형식으로 표현하라.

(a) $(-1+\sqrt{3}i)^{-10}$ (b) $(1-i)^{1/4}$

40. 다음을 계산하여 $a+bi$ 형식으로 표현하라.

(a) $2(5-3i)-3(-2-i)+5(i-3)$ (b) $\frac{5}{3-4i}+\frac{10}{4+3i}$ (c) $(3-2i)^3$
(d) $\frac{(1+i)(2+3i)(4-2i)}{(1+2i)^2(1-i)}$ (e) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{10}$ (f) $\left|\frac{2-4i}{5+7i}\right|^2$

41. 복소수 z_1, z_2에 대해서 다음 등식이 성립함을 보여라.

(a) $\left|\frac{z_2}{z_1}\right|=\frac{|z_2|}{|z_1|},\ (z_1\neq 0)$ (b) $\left|z_1^2\right|=|z_1|^2$

42. 복소수 $z_1,\ z_2$에 대해서 다음 부등식이 성립함을 보여라.

(a) $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$ (b) $|z_1-z_2|\ge|z_1|-|z_2|$

43. 다음 복소수를 극형식으로 표현하라.

(a) $3\sqrt{3}+3i$ (b) $-2-2i$ (c) $1-\sqrt{3}i$ (d) 5 (e) $-5i$

44. 다음 값을 계산하라.

(a) $[2(\cos 25^\circ+i\sin 25^\circ)]\,[5(\cos 110^\circ+i\sin 110^\circ)]$

(b) $\frac{12\,\mathrm{cis}\,16^\circ}{(3\,\mathrm{cis}\,44^\circ)(2\,\mathrm{cis}\,62^\circ)}$, (단, $\mathrm{cis}\,\theta = \cos\theta + i\sin\theta$임)

45. 다음 복소수의 근들을 모두 구하여라.

(a) $(4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i)^{1/3}$ (b) $(-1)^{1/5}$ (c) $(\sqrt{3}-i)^{1/3}$ (d) $i^{1/4}$

46. $z_1 = r_1\,\mathrm{cis}\,\theta_1$이고 $z_2 = r_2\,\mathrm{cis}\,\theta_2$일 때, 다음이 성립함을 증명하라.

(a) $z_1z_2 = r_1r_2\,\mathrm{cis}\,(\theta_1+\theta_2)$ (b) $z_1/z_2 = (r_1/r_2)\,\mathrm{cis}\,(\theta_1-\theta_2)$

수학적인 귀납법

□ 다음을 수학적 귀납법을 써서 증명하라.

47. 모든 자연수 n에 대해서 $x^n - y^n$은 $x-y$를 인자로 갖는다.

48. 자연수 n에 대해서 $1^2+2^2+3^3+\cdots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$이다.

49. $1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$

50. $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$

51. $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

52. $a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1} = \frac{a(r^n-2)}{r-1}$, $(r\neq 1)$

53. $1^3+2^3+3^3+\cdots n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

54. $1(5)+2(5)^2+3(5)^3+\cdots n(5)^{n-1} = \frac{5+(4n-1)5^n}{16}$

55. $n=1,2,3,\ldots$에 대해서 $x^{2n-1}+y^{2n-1}$이 $x+y$로 인수분해됨을 보여라.

56. r이 유리수일 때, 다음 등식이 성립함을 증명하라.

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^r = (\cos r\theta + i\sin r\theta).$$

57. 다음 등식이 성립한다.

(a) $\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x}$, $(x\neq 0\ \pm 2\pi,\ \pm4\pi,\ldots)$.

(b) $\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx = \frac{\cos\frac{1}{2}x-\cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x}$, $(x\neq 0\ \pm 2\pi,\ \pm4\pi,\ldots)$.

기타 문제들

58. 다음 각 정수를 괄호( )안에 표현된 진수로 표현하라.

(a) 87 (2진수) (b) 64 (3진수) (c) 1736 (9진수)

59. 어떤 수 x가 5진수로 144로 표현되면, x는 2진수와 8진수로 각각 어떻게 표현되는가?

60. 0과 1사이에 있는 모든 유리수 p/q는

$$\frac{p}{q} = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_n}{2^n} + \cdots, \quad (a_i \in \{0, 1\})$$

의 형식으로 전개될 수 있음을 증명하라. 이 때, 표현 $0.a_1a_2\ldots a_n\ldots$을 가리켜서 유리수 p/q의 `2진수 형식(binary form)`이라 한다. (힌트: 주어진 수식의 양변을 2로 연속적으로 곱하고 나머지를 생각하라.)

61. 분수 $\frac{2}{3}$을 2진수, 3진수, 8진수, 10진수 형식으로 표현하라.

62. 어떤 수 a에 대한 2진수 형식이 11.01001일 때, a의 10진수 형식을 구하라.

63. $3+4$의 n-진수 형식이 12일 때, 정수 n의 값은 얼마인가?

64. 12진수 형식에서 t와 e는 각각 10과 11을 가리키는 수라고 하자. 이 기호들을 써서 10진수 5110을 12진수 형식으로 표현하라.

65. 10진수형식이 $1.636363\ldots$인 유리수 p/q를 구하라.

66. 유리수 전체집합 $\mathbb{Q}$가 `체(field)`임을 증명하라.

67. 실수의 연산법칙을 써서 다음을 증명하라.

(a) $(-3)0 = 0$ (b) $(-2)(3) = -6$