고 등 미 적 분 학 I

1-a) 미분의 정의를 써서 주어진 점 x_0 에서 함수 $f(x)$ 의 미분계수를 구하라.

$$f(x) = \frac{3x-4}{2x+3}, \quad x_0 = 1$$

$$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{3(1+h)-4}{2(1+h)+3} - \frac{3\times 1-4}{2\times 1+3}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{3h-1}{2h+5}+\frac{1}{5}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{15h-5+2h+5}{5(2h+5)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{17h}{5h(2h+5)} = \lim_{h\to 0}\frac{17}{10h+25} = \frac{17}{25}$$

1-b) 미분의 정의를 써서 주어진 점 x_0 에서 함수 $f(x)$ 의 미분계수를 구하라.

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad x_0 = 4$$

$$f'(4) = \lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{4+h}-\sqrt{4}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{4+h}-\sqrt{4})(\sqrt{4+h}+\sqrt{4})}{h(\sqrt{4+h}+\sqrt{4})} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{4+h}+\sqrt{4})} = \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

3) 함수 f 가 $f(x)\begin{cases} x^3\sin(\frac{1}{x}), & x\neq 0 \\ 0, & x=0\end{cases}$ 으로 정의되어 있을 때 다음을 증명하라.

(a) $f(x)$가 $x=0$ 에서 연속이다.
(b) $f(x)$가 $x=0$ 에서 미분 가능하다.
(c) $f'(x)$가 $x=0$ 에서 연속이다.

(a) $f(x)$가 $x=0$ 에서 연속이다.

$f(0) = 0$

$$\lim_{x\to 0+}f(x) = \lim_{x\to 0+}x^3\sin(\frac{1}{x}) = 0, \qquad (\because -1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1)$$

$$\lim_{x\to 0-}f(x) = \lim_{x\to 0-}x^3\sin(\frac{1}{x}) = 0, \qquad (\because -1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1)$$

$\lim_{x\to 0+}f(x) = \lim_{x\to 0-}f(x) = f(0)$ 이므로 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

(b) $f(x)$가 $x=0$ 에서 미분 가능하다.

$$\lim_{x\to 0+}f'(x) = \lim_{x\to 0+}(x^3\sin\frac{1}{x})' = \lim_{x\to 0+}\left(3x^2\sin\frac{1}{x} + (-x^2)x^3\cos\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0+}\left(3x^2\sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x}\right) = 0, \qquad (\because -1 \le \sin\frac{1}{x}, \cos\frac{1}{x} \le 1)$$

$$\lim_{x\to 0-}f'(x) = \lim_{x\to 0-}(x^3\sin\frac{1}{x})' = \lim_{x\to 0-}\left(3x^2\sin\frac{1}{x} + (-x^2)x^3\cos\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0-}\left(3x^2\sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x}\right) = 0, \qquad (\because -1 \le \sin\frac{1}{x}, \cos\frac{1}{x} \le 1)$$

$\lim_{x\to 0+}f'(x) = \lim_{x\to 0-}f'(x)$ 이므로 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분 가능하다.

(c) $f'(x)$가 $x=0$ 에서 연속이다.

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2\sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0\end{cases}$$

$\lim_{x\to 0-}f'(x) = \lim_{x\to 0-}f'(x) = f'(0) = 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

5) $\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1$ 을 이용하여 $f(x) = e^x$ 일 때 $f'(x) = e^x$ 임을 증명하라.

$$f'(e) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = e^x$$

7) 함수 $f(x) = x|x|$ 에 대하여 다음에 답하라.

$$f'(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$$

(a) 점 $x=0$ 에서 $f(x)$ 의 우도함수를 구하라.
(b) 점 $x=0$ 에서 $f(x)$ 의 좌도함수를 구하라.
(c) $f(x)$가 점 $x=0$ 에서 미분 가능한가?
(d) 그래프를 그려 (a), (b), (c)에 대한 답을 확증하라.

(a) 점 $x=0$ 에서 $f(x)$ 의 우도함수를 구하라.

$\lim\limits_{x\to 0+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0+}(x^2)' = \lim\limits_{x\to 0+}(2x) = 0$

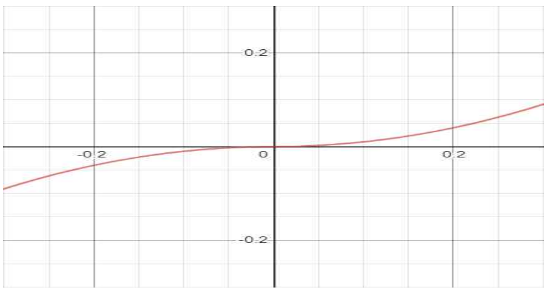
(b) 점 $x=0$ 에서 $f(x)$ 의 좌도함수를 구하라.

$\lim\limits_{x\to 0-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0-}(-x^2)' = \lim\limits_{x\to 0-}(-2x) = 0$

(c) $f(x)$가 점 $x=0$ 에서 미분 가능한가?

$\lim\limits_{x\to 0+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0-} f'(x) = 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분 가능하다.

(d) 그래프를 그려 (a), (b), (c)에 대한 답을 확증하라.



12) 함수 $y = f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ 에 대해서 미분의 정의를 써서 $\dfrac{dy}{dx}$ 를 구하라.

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x+h+\dfrac{1}{x+h}-x-\dfrac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h+\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\left(1-\frac{\dfrac{h}{x(x+h)}}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(1-\frac{1}{x^2+hx}\right) = 1-\frac{1}{x^2}$$

16) 다음을 계산하라.

(a) 점 $x=1$ 에서 $\dfrac{d}{dx}[x^3\ln(x^2-2x+5)]$ 의 값

(b) 점 $x=0$ 에서 $\dfrac{d}{dx}\left[\sin^2(3x+\dfrac{\pi}{6})\right]$ 의 값

(a) 점 $x=1$ 에서 $\dfrac{d}{dx}[x^3\ln(x^2-2x+5)]$ 의 값

$\dfrac{d}{dx}[x^3\ln(x^2-2x+5)] = (3x^2)\ln(x^2-2x+5) + x^3(\dfrac{2x-2}{x^2-2x+5})$, $x=1$ 대입 -> $3\ln 4$

(b) 점 $x=0$ 에서 $\dfrac{d}{dx}\left[\sin^2(3x+\dfrac{\pi}{6})\right]$ 의 값

$\dfrac{d}{dx}\left[\sin^2(3x+\dfrac{\pi}{6})\right] = 6\sin(3x+\dfrac{\pi}{6})\cos(3x+\dfrac{\pi}{6}) = 3\sin(6x+\dfrac{\pi}{3})$, $x=0$ 대입 -> $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

21) 식 $xy-\ln y=1$ 로부터 다음을 계산하라.

(a) $\dfrac{dy}{dx}$　　　　(b) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

(a) $\dfrac{dy}{dx}$

$$y+x\left(\frac{dy}{dx}\right)-\frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)=0$$

$$\left(x-\frac{1}{y}\right)\frac{dy}{dx}=-y$$

$$\left(\frac{xy-1}{y}\right)\frac{dy}{dx}=-y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{1-xy}$$

(b) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

$$y+x\left(\frac{dy}{dx}\right)-\frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)=0$$

$$\frac{dy}{dx}+\frac{dy}{dx}+x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}-\frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

$$\left(2+\frac{1}{y^2}\right)\frac{dy}{dx}+\left(x-\frac{1}{y}\right)\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

$$\left(2+\frac{1}{y^2}\right)\left(\frac{y^2}{1-xy}\right)+\left(x-\frac{1}{y}\right)\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

$$\left(\frac{2y^2+1}{1-xy}\right)=\left(\frac{1-xy}{y}\right)\frac{d^2y}{dx^2}\qquad\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2y^3+y}{(1-xy)^2}$$

23) $x=\sec t$ 이고, $y=\tan t$ 일 때 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 일 때 다음을 계산하라.

(a) $\dfrac{dy}{dx}$　　　　(b) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$　　　　(c) $\dfrac{d^3y}{dx^3}$

$$\frac{dy}{dt}=\sec^2 t,\qquad \frac{dx}{dt}=(\sec t)(\tan t)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\times\frac{dt}{dx}=\sec^2 t\times\frac{1}{(\sec t)(\tan t)}=\frac{\sec t}{\tan t}=\frac{1}{\sin t}=\csc t,\qquad t=\frac{\pi}{4}\text{ 대입 -> }\sqrt{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\times\frac{dt}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-(\csc t)(\cot t)\times\frac{1}{(\sec t)(\tan t)}=-\frac{1}{\sin t}\times\frac{\cos t}{\sin t}\times\frac{\cos t}{1}\times\frac{\cos t}{\sin t}=-\cot^3 t,\qquad t=\frac{\pi}{4}\text{ 대입 -> }-(1)^3=-1$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\times\frac{dt}{dx}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=-3(\cot^2 t)(-\csc^2 t)\times\frac{1}{(\sec t)(\tan t)}=3\times\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}\times\frac{1}{\sin^2 t}\times\frac{\cos t}{1}\times\frac{\cos t}{\sin t}=\frac{3\cos^4 t}{\sin^5 t},\qquad t=\frac{\pi}{4}\text{ 대입 -> }\frac{3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5}=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$$

34) 다음 극한값을 구하라.

(c) $\displaystyle\lim_{x\to1}(x^2-1)\tan\frac{\pi x}{2}$

(m) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\ln\left(\frac{x+3}{x-3}\right)$

$$\lim_{x\to1}(x^2-1)\tan\frac{\pi x}{2}=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{\left(\tan\frac{\pi x}{2}\right)^{-1}}\text{ 은 }\frac{0}{0}\text{ 꼴 이므로 로피탈의 정리를 이용하면 }\lim_{x\to1}\frac{2x}{\left(\tan\frac{\pi x}{2}\right)^{-2}\left(\sec^2\frac{\pi x}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\lim_{x\to1}\frac{-4x\sin^2\frac{\pi x}{2}}{\pi}=-\frac{4}{\pi}$$

$$\lim_{x\to\infty}x\ln\frac{x+3}{x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\frac{x+3}{x-3}}{\frac{1}{x}}\text{ 은 }\frac{0}{0}\text{ 꼴 이므로 로피탈의 정리를 이용하면 }\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x-3}{x+3}\times\frac{-6}{(x-3)^2}}{-x^{-2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^3-18x^2}{(x+3)(x-3)^2}=6$$

34) $\tan x = 1 - x$ 의 근이 $(0,1)$ 에 존재함을 보여라.

$f(x) = \tan x + x - 1$ 이고, 구간 $[0,1]$ 에서 연속이다.

$f(0) = tna0 + 0 - 1 = -1,\qquad f(0) < 0$
$f(1) = tna1 + 1 - 1 = \tan 1,\qquad f(1) > 0$

구간 $(0,1)$에서 $f(c) = 0$을 만족하는 c 가 적어도 하나는 존재한다.

34) 지면으로부터 한 물체가 공중으로 수직적으로 던졌을 때 t 초 후 지상으로부터 물체가 위치한 높이는 $x = -16t^2 + 96t$ 피트(feet)라고 할 때, 다음 물음에 답하라.
(a) $t = 2$ 일 때, 그 물체는 지상으로부터 얼마의 높이에 위치해 있는가?
(b) 그 물체는 지상으로부터 얼마만큼의 높이까지 올라갈 수 있을까?
(c) 이 물체의 최초 속도는 얼마이며 최고 속도는 얼마인가?

(a) $t = 2$ 일 때, 그 물체는 지상으로부터 얼마의 높이에 위치해 있는가?
$x = f(t) = -16t^2 + 96t$
$f(2) = -16 \times 2^2 + 96 \times 2 = 128\,feet$

(b) 그 물체는 지상으로부터 얼마만큼의 높이까지 올라갈 수 있을까?
$x = f(t) = -16(t^2 - 6t + 9 - 9) = -16(t-3)^2 + 144$
$f(3) = 144\,feet$

(c) 이 물체의 최초 속도는 얼마이며 최고 속도는 얼마인가?
$f'(t) = -16t + 96$
최초속도 : $f'(0) = 96\,feet/s$
최고속도 : $f'(0) = 96\,feet/s$

3) 다음 등식이 성립함을 증명하여라.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n^2}{n^2+k^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\right) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$$

$x = \tan\theta,\ dx = \sec^2\theta\, d\theta$
$1 + x^2 = 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sec^2\theta}\sec^2\theta\, d\theta = \int_1^{\frac{\pi}{4}} 1\, d\theta = [\theta] = \frac{\pi}{4}$$

7) 다음 극한을 계산하라.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n+k}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)}\right) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = [\ln(1+x)] = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

7) 다음을 증명하라.

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\sin nx}{n^2+x^2}dx=0$$

$-1 \le \sin nx \le 1$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\frac{-1}{n^2+x^2}=\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\frac{-\frac{1}{n^2}}{1+\left(\frac{x}{n}\right)^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-1}{n}tan^{-1}\left(\frac{x}{n}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\tan^{-1}\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)\left(\frac{-1}{n}\right)=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\frac{1}{n^2+x^2}=\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\frac{1}{n^2}}{1+\left(\frac{x}{n}\right)^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}tan^{-1}\left(\frac{x}{n}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\tan^{-1}\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)\left(\frac{1}{n}\right)=0$$

샌드위치 정리에 의해여 $\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\sin nx}{n^2+x^2}dx=0$ 이 성립한다.

7) 함수 $f(x)$ 가 폐구간 $[a,b]$ 에서 연속이면 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ 가 $[a,b]$ 에서 연속임을 보여라.

$F(x)$ 가 $[a,b]$ 에서 연속임을 보이자. 그러면 임의의 $c'\in(a,b)$ 에 대해 $\lim_{x\to c'}F(x)=\lim_{x\to c'}\int_a^x f(x)dx$

$\lim_{x\to c'}f(c)(x-a)$ 인 $c\in(a,b)$, $\quad f(c)(c'-a)=\int_a^{c'}f(x)dx=F(c')$

따라서 $F(x)$ 는 $[a,b]$ 에서 연속이다.

21) 적분 $\int\frac{x}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx$ 을 계산하라.

$$\int\frac{x}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx=\int\frac{x}{\sqrt{(x+1)^2+4}}=\int\frac{2\tan\theta-1}{2\sec\theta}2\sec^2\theta\,d\theta=\int 2\tan\theta\sec\theta-\sec\theta\,d\theta$$

$x+1=2\tan\theta,\ dx=2\sec^2\theta\,d\theta$

$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right),\quad -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2},\quad \tan\theta=\frac{x+1}{2},\quad \sec\theta=\sqrt{\tan^2\theta+1}=\sqrt{\frac{(x+1)^2}{4}+1}$

$2\sec\theta-\ln|\sec\theta+\tan\theta|+C$

$\therefore\ \sqrt{x^2+2x+5}-\ln|\sqrt{x^2+2x+5}+\frac{x+1}{2}|+C$

22) 적분 $\int_0^\pi x\cos 3x\,dx$, $\quad\int x^3e^{-2x}dx$ 을 계산하라.

$$\int_0^\pi x\cos 3x\,dx=\left[\frac{1}{3}x\sin 3x\right]-\frac{1}{3}\int_0^\pi\sin 3x\,dx=\left[\frac{1}{9}\cos 3x\right]=\frac{1}{9}(\cos 3x-\cos 0)=-\frac{2}{9}$$

$f(x)=x,\qquad g'(x)=\cos 3x$

$f'(x)=1,\qquad g(x)=\frac{1}{3}\sin 3x$

$$\int x^3e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}x^3e^{-2x}+\frac{3}{2}\int x^2e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}x^3e^{-2x}+\frac{3}{2}\left[-\frac{1}{2}x^2e^{-2x}+\int xe^{-2x}dx\right]=-\frac{1}{2}x^3e^{-2x}-\frac{3}{4}x^2e^{-2x}+\frac{3}{2}\int xe^{-2x}dx$$

$f(x)=x^3,\qquad g'(x)=e^{-2x}\qquad f(x)=x^2,\qquad g'(x)=e^{-2x}\qquad f(x)=x,\qquad g'(x)=e^{-2x}$

$f'(x)=3x^2,\qquad g(x)=-\frac{1}{2}e^{-2x}\qquad f'(x)=2x,\qquad g(x)=-\frac{1}{2}e^{-2x}\qquad f'(x)=1,\qquad g(x)=-\frac{1}{2}e^{-2x}$

$$=-\frac{1}{2}x^3e^{-2x}-\frac{3}{4}x^2e^{-2x}-\frac{3}{4}xe^{-2x}+\frac{3}{4}\int e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}x^3e^{-2x}-\frac{3}{4}x^2e^{-2x}-\frac{3}{4}xe^{-2x}-\frac{3}{8}e^{-2x}+C$$

31) 사이클로이드 곡선 $x=a(\theta-\sin\theta)$, $y=a(1-\cos\theta)$, $a>0$, $0 \le \theta \le 2\pi$ 의 길이를 구하라.

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}\,d\theta=a\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos\theta)}\,d\theta=a\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta=2a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\frac{\theta}{2}d\theta$$
$$=2a\left[-2\cos\frac{\theta}{2}\right]=2a(-2\cos\pi+2\cos 0)=2a(2+2)=8a$$

38) 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 에 의해서 둘러싸인 영역의 넓이가 πab 임을 증명하여라.

$$y^2=b^2-\frac{b^2x^2}{a^2},\qquad y=\sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2},\qquad S=4\times\int_0^a\sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2}\,dx$$

$$x=asin\theta,\qquad dx=acos\theta\,d\theta$$

$$S=4\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}ab\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\,d\theta=4ab\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta=4ab\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta=\left[\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]=4ab\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\sin\pi-0-0\right)=4ab\times\frac{\pi}{4}=\pi ab$$

39) 원반형 방법을 써서, 곡선 $y=\sin x$, $0 \le x \le \pi$ 를 x 축에 관해서 회전시켰을 때 생기는 회전체의 체적을 구하라.

$$V=\int_0^{\pi}\pi(\sin x)^2dx=\pi\int_0^{\pi}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\,dx=\pi\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 4x\right]=\pi\left(\left(\frac{\pi}{2}-0\right)-(0-0)\right)=\frac{\pi^2}{2}$$

42) 반경이 $a>0$ 인 구슬 안에 반경이 b, $0<b<a$ 인 구슬크기의 구멍을 가진 물체가 있다. 이 물체의 부피를 원기둥 공식을 써서 구하라.

$$x^2+y^2=b^2,\qquad y^2=b^2-x^2,\qquad y=\sqrt{b^2-x^2}$$
$$x^2+y^2=a^2,\qquad y^2=a^2-x^2,\qquad y=\sqrt{a^2-x^2}$$

$$2\times\int_0^b$$

8-a) 정의를 이용하여, 다음을 증명하라.

$$\lim_{(x,y)\to(4,-1)}(3x-2y)=14$$

10-a) 다음에서 극한의 여부를 판별하고 극한이 존재하는 경우에는 그 값을 구하라.

$$(a)\ \lim_{(x,y)\to(1,2)}\frac{3-x+y}{4+x-2y}\qquad (c)\ \lim_{(x,y)\to(0,1)}e^{\frac{-1}{x^2(y-1)^2}}$$

$$(a)\ \lim_{(x,y)\to(1,2)}\frac{3-x+y}{4+x-2y}=\frac{3-1+2}{4+1-4}=4$$

$$(c)\ \lim_{(x,y)\to(0,1)}e^{\frac{-1}{x^2(y-1)^2}}=$$

13) 극한의 의한 정의를 써서 $f(x,y) = xy+6x$ 가 점 $(x_0,y_0)=(1,2)$ 에서 연속임을 증명하라.

(1) $f(x,y) = xy+6x$ 가 $(x_0,y_0)=(1,2)$ 의 적당한 근방에서 정의되어 있다.

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 14$ 가 실수로 존재한다.

(3) 함수값 $f(x_0,y_0) = 14$ 가 실수로 존재한다.

(4) 극한값 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 가 함수값 $f(x_0,y_0)$ 와 같다.

22) 함수 $f(x,y) = (x-y)\sin(3x+2y)$ 에 대해서, 점 $(x_0,y_0)=(0,\frac{\pi}{3})$ 에서 다음을 구하라.

$(a)\ f_x \qquad (b)\ f_y \qquad (c)\ f_{xx} \qquad (d)\ f_{yy} \qquad (e)\ f_{yx}$

$(a)\ f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} = \sin(3x+2y) + (x-y)(3)\cos(3x+2y)$ $\qquad f_x = \sin(\frac{2\pi}{3})+(-\frac{\pi}{3})(3)\cos(\frac{2\pi}{3}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\pi}{2}$

$(b)\ f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y} =-\sin(3x+2y) + (x-y)(2)\cos(3x+2y)$ $\qquad f_y = -\sin(\frac{2\pi}{3})+(-\frac{\pi}{3})(2)\cos(\frac{2\pi}{3}) = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$(c)\ f_{xx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 3\cos(3x+2y) + (3)\cos(3x+2y) + (x-y)(-9)\sin(3x+2y)$ $\qquad f_{xx} = 3\cos(\frac{2\pi}{3})+3\cos(\frac{2\pi}{3}) + (\frac{-\pi}{3})(-9)\sin(\frac{2\pi}{3}) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\pi-3$

$(c)\ f_{yy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2\cos(3x+2y) - 2\cos(3x+2y) + (x-y)(-4)\sin(3x+2y)$ $\qquad f_{yy} =-2\cos(\frac{2\pi}{3})-2\cos(\frac{2\pi}{3})+(\frac{-\pi}{3})(-4)\sin(\frac{2\pi}{3}) = 2+\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$

$(c)\ f_{yx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3\cos(3x+2y) + 2\cos(3x+2y) + (x-y)(-3)\sin(3x+2y)$ $\qquad f_y =-3\cos(\frac{2\pi}{3})+2\cos(\frac{2\pi}{3})+(\frac{-\pi}{3})(-3)\sin(\frac{2\pi}{3}) = \dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}\pi}{2}$

23) 함수 $z = xy\tan(\frac{y}{x})$ 에 대해서, 등식 $x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+y\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 2z$ 가 성립함을 보여라.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\tan(\frac{y}{x}) + xy(-x^{-2}y)\sec^2(\frac{y}{x})$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\tan(\frac{y}{x}) + xy(\frac{1}{x})\sec^2(\frac{y}{x})$$

$$x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+y\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = xy\tan(\frac{y}{x})-y^2\sec^2(\frac{y}{x}) + xy\tan(\frac{y}{x}) + y^2\sec^2(\frac{y}{x}) = 2xy\tan(\frac{y}{x}) = 2z$$

31-a) 다음 함수에 대해 전미분을 구하라.

$$F(x,y) = x^3y - 4xy^2 + 8y^3$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = (3x^2y-4y^2)dx + (x^3-8xy+24y^2)dy$$

33-a) 다음 식이 완전미분인지 아닌지를 판별하고, 완전미분인 경우에는 어떤 함수의 전미분인지를 밝혀라.

$$(2xy^2+3y\cos 3x)dx+(2x^2y+\sin 3x)dy$$

$P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ 가 함수 $f(x,y)$ 의 전미분일 필요충분조건은 $\dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 이다. 이러한 경우에 $P\,dx + Q\,dy$ 를 가리켜서 $f(x,y)$ 의 완전미분이라 부른다.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 4xy+3\cos 3x$$

$$F(x,y) = x^2y^2 + y\sin 3x$$

40) $x = 3r^2 + 2s$, $y = 4r - 2s^3$, $z = 2r^2 - 3s^2$ 이고, $f(x,y,z) = z\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 일 때, 편도함수 $\dfrac{\partial f}{\partial r}$ 와 $\dfrac{\partial f}{\partial s}$ 를 구하라.

43) $F(x,y) = x^4y^2\sin^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 일 때, $x\dfrac{f}{\partial x} + y\dfrac{f}{\partial y} = 6F$ 임을 증명하여라.

$$\frac{f}{\partial x} = 4x^3y^2\sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{x^2y^3}{\sqrt{1-\dfrac{y^2}{x^2}}} \qquad \frac{f}{\partial y} = 2x^4y\sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{x^3y^2}{\sqrt{1-\dfrac{y^2}{x^2}}}$$

$$x\frac{f}{\partial x} + y\frac{f}{\partial y} = 4x^4y^2\sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{x^3y^3}{\sqrt{1-\dfrac{y^2}{x^2}}} + 2x^4y^2\sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{x^3y^3}{\sqrt{1-\dfrac{y^2}{x^2}}} = 6x^4y^2\sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = 6F$$

51) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ 일 때, 다음을 구하라.

$(a)\ \dfrac{dy}{dx}$ $\qquad$ $(c)\ \dfrac{d^2y}{dx^2}$

$$3x^2 + 3y^2\left(\frac{dy}{dx}\right) - 3y - 3x\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$\left(3y^2 - 3x\right)\left(\frac{dy}{dx}\right) = 3y - 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y - 3x^2}{3y^2 - 3x}$$