4. 선도와 선물계약

▣ 선도가격

▶ 보유비용이 없는 기초자산에 대한 선도계약이 $t \le T$의 시점에 거래되었다면 선도가격은 $F(t,T) = \dfrac{S(t)}{B(t,T)}$ 이다.

▶ 증명

$F(t,T) > \dfrac{S(t)}{B(t,T)}$ 인 경우

[시간 t]

1. $\dfrac{S(t)}{B(t,T)}$ 만큼의 무이표채권을 매도하여 $S(t)$의 금액을 받는다.
2. $S(t)$의 금액을 지불하고 주식 한 주를 매입한다.
3. 이 주식을 시간 T에 $F(t,T)$로 팔기로 하는 선도계약을 맺는다. 이는 선도계약의 매도포지션이 된다.

[시간 T]

4. 선도계약을 이용해 $F(t,T)$의 금액을 받고 주식을 매도한다.
5. 팔았던 채권에 대해 단위당 각각 액면가 $1 씩을 지불한다.

결론 : $F(t,T) - \dfrac{S(t)}{B(t,T)} > 0$ 의 무위험수익이 발생한다.

==

$F(t,T) < \dfrac{S(t)}{B(t,T)}$ 인 경우

[시간 t]

1. 하나의 주식을 공매도하고 $S(t)$의 금액을 받는다.
2. $\dfrac{S(t)}{B(t,T)}$의 무이표채권을 구입한다.
3. 선도가격 $F(t,T)$의 선도계약이 매입포지션을 취한다.

[시간 T]

4. 소유하고 있는 채권에 대해 각각 단위당 $1의 액면가를 받아, $\dfrac{S(t)}{B(t,T)}$의 금액을 수령한다.
5. 선도계약을 이용해 $F(t,T)$로 주식을 구입한다.
6. 이 주식을 소유자에게 돌려줌으로써, 공매도를 청산한다.

결론 : $\dfrac{S(t)}{B(t,T)} - F(t,T) > 0$ 의 무위험수익이 발생한다.

▣ 선도가격 예제

$S(0)=17$, $F(0,1)=18$, $r=8\%$, 그리고 공매도 측에 이자율 $d=4\%$를 주는 30% 담보예금이 요구된다고 가정하자. 이 조건에서 재정기회는 발생하는가? 또 재정기회가 없게 하는 가장 높은 이자율을 구하여라.

$F(0,T) = 18 < \dfrac{S(0)}{B(0,T)} = \dfrac{17}{e^{-0.08}} = 18.42$ 이므로 재정기회 발생

[시점=0]

주식 1개를 17의 가격으로 공매도, 담보는 17*0.3, 채권구입은 17*0.7, 선도계약 매입 포지션,

[시점=1]

선도계약에 따른 주식 매입, 공매도 청산(18), 채권현금화

$17\times 0.7\times e^{0.08} + 17\times 0.3\times e^{0.04} - 18 = 18.199 - 18 = 0.20$ 만큼 이익!

$17\times 0.7\times e^{0.08} + 17\times 0.3\times e^{\frac{d}{100}} - 18 = 0$ 을 만족하는 $d = 0.1740$

▣ 선도가격 예제

2000년 4월 1일의 주식가격은 같은 해 1월 1일에 비해 10% 낮은 것으로 확인되었다. 또한 무위험이자율이 $r=6\%$로 일정하다고 가정한다. 이와 같은 상황에서 2000년 10월 1일을 만기로 하는 선도계약이 있을 때, 4월 1일의 선도가격은 1월 1일과 비교해 몇 % 더 낮은가?

$$F(1월1일,\ 10월1일) = \frac{S(1월1일)}{B(1월1일,\ 10월1일)} = \frac{S(1월1일)}{e^{-\frac{3}{4}\times 0.06}}$$

$$F(4월1일,\ 10월1일) = \frac{S(4월1일)}{B(4월1일,\ 10월1일)} = \frac{S(1월1일)\times 0.9}{e^{-\frac{2}{4}\times 0.06}}$$

$$\therefore \frac{F(4월1일,\ 10월1일) - F(1월1일,\ 10월1일)}{F(1월1일,\ 10월1일)} = 0.11$$

▣ 베이시스

$B(t,T) < 1$이기 때문에 항상 $F(t,T) = \dfrac{S(t)}{B(t,T)} > S(t)$ 의 관계를 갖는다. 이 때 차이 $F(t,T) - S(t)$ 를 베이시스(basis)라고 한다.

▣ 배당금이 있는 경우의 선도가격

▶ 시간 t에 배당금 div 를 지급하는 주식의 선도가격은, $0 < t < T$ 에서 $F(0,T) = [S(0) - B(0,t)div]\dfrac{1}{B(0,T)}$ 로 표현한다.

▶ 증명

$F(0,T) > [S(0) - B(0,t)div]\dfrac{1}{B(0,T)}$ 인 경우

[시간 0]

1. 인도시점 T 와 선도가격 $F(0,T)$ 를 갖는 선도계약 매도포지션
2. $\dfrac{S(0)}{B(0,T)}$ 만큼 무이표채권을 발행함으로써 $S(0)$의 금액을 받는다.
3. 차입한 $S(0)$로 하나의 주식을 구매한다.
4. 만기일이 T 인 채권에 대한 선도계약에서 $div\dfrac{B(0,t)}{B(0,T)}$ 만큼 매입포지션을 취한다. (이는 만기일 t, 선도가격 $\dfrac{B(0,T)}{B(0,t)}$ 를 갖는다.)

[시간 t]

5. 배당금 div 를 현금화하여 선도가격 $\dfrac{B(0,T)}{B(0,t)}$에 $div\dfrac{B(0,t)}{B(0,T)}$ 개의 채권을 구매하여, 채권 $B(t,T)$에 투자한다.

[시간 T]

6. 주식을 $F(0,T)$로 매도한다.
7. 채권소유자에게 $\dfrac{S(0)}{B(0,T)}$ 를 지불한다.
8. 시간 t에 구입한 채권들로부터 $div\dfrac{B(0,t)}{B(0,T)}$ 금액을 수령한다.

결론 : $F(0,T) - \dfrac{S(0)}{B(0,T)} + div\dfrac{B(0,t)}{B(0,T)} > 0$ 의 차익을 얻을 수 있다.

==

$F(0,T) < [S(0) - B(0,t)div]\dfrac{1}{B(0,T)}$ 인 경우

[시간 0]

1. 인도시점 T 와 선도가격 $F(0,T)$ 를 갖는 선도계약 매입포지션
2. 하나의 주식을 공매도하여 $S(0)$의 현금을 확보한다.
3. $\dfrac{S(0)}{B(0,T)}$ 만큼 무이표채권을 구입한다.
4. 만기일이 T 인 채권에 대한 선도계약에서 $div\dfrac{B(0,t)}{B(0,T)}$ 만큼 매도포지션을 취한다.

[시간 t]

5. 배당금 div 을 받고 선도가격 $\dfrac{B(0,T)}{B(0,t)}$에 $div\dfrac{B(0,t)}{B(0,T)}$ 개의 채권을 발행한다.

[시간 T]

6. 주식을 $F(0,T)$로 매입하여 공매도를 청산한다.
7. 시간 0에 매입한 선도계약에 대한 채권 $\dfrac{S(0)}{B(0,T)}$ 을 청산한다.
8. 시간 t에 발행한 채권들에 대한 $div\dfrac{B(0,t)}{B(0,T)}$ 금액을 지불한다.

결론 : $-F(0,T) + \dfrac{S(0)}{B(0,T)} - div\dfrac{B(0,t)}{B(0,T)} > 0$ 의 차익을 얻는다.

■ 배당금이 있는 경우의 선도가격 예제

2000년 1월 1일의 가격이 $120인 주식을 고려해보자. 이 주식은 2000년 7월 1일에 $1의 배당금을 지급하고 2000년 10월 1일에는 $2의 배당금을 지급한다. 이자율은 12%이다. 2000년 11월 1일을 만기로 하는 선도계약이 있고, 이 선도계약의 선도가격이 2000년 1월 1일에 $131라면 재정거래의 기회는 조재하는가? 그렇다면 재정전략을 구성하고 계산하여라.

$$F(0,T) > [S(0) - B(0,t)div]\frac{1}{B(0,T)}$$

$F(0,T) = 131$

$[S(0)-B(0,t)div]\frac{1}{B(0,T)} = [120 - (1\times e^{-0.12\frac{6}{12}} + 2\times e^{-0.12\frac{9}{12}})]\frac{1}{e^{-0.12\frac{10}{12}}} = 129.56$

따라서 재정기회가 발생한다.

■ 배당금이 있는 경우의 선도가격 예제

무위험이자율이 8%라고 가정하자. 그러나 개미투자자로서 당신은 돈을 오직 7%의 이자율로만 투자할 수 있고, 10%의 이자율로 차입할 수 있다. $F(0,1) = \$89$, $S(0) = \$83$에 시간 1/2에서 $2의 배당금 지급이 이루어진다면, 재정이익을 발생시킬 수 있는가?

선도계약 매도포지션

$89 - 83\times e^{0.10\times 1} + 2\times e^{0.07\times 0.5} \simeq -0.66$ 이므로 손해

선도계약 매도포지션

$-89 + 83\times e^{0.07\times 1} - 2\times e^{0.1\times 0.5} \simeq -2.08$ 이므로 손해

무위험이자율의 경우

$89 - 83\times e^{0.08\times 1} + 2\times e^{0.08\times 0.5} \simeq 1.16$

$-89 + 83\times e^{0.08\times 1} - 2\times e^{0.08\times 0.5} \simeq -1.16$

■ 연속 배당 수익률로 배당금을 지급하는 주식의 선도가격

▶ $F(0,T) = S(0)e^{-r_{div}T}\frac{1}{B(0,T)}$

▶ 증명

$F(0,T) > S(0)e^{-r_{div}T}\frac{1}{B(0,T)}$ 인 경우

1. 시간 0에 선도계약의 매도포지션을 취한다.
2. $e^{-r_{div}T}$의 주식을 구입하기 위해 $S(0)\times e^{-r_{div}T}$ 의 금액을 차입한다. 0과 T 사이에서는 연속적으로 지급받은 배당금을 이용해 주식에 재투자한다. 그러므로 시간 T에 주식 하나를 갖게 된다.
3. 주식을 $F(0,T)$ 로 팔고, 선도계약의 매도포지션을 청산한다.
4. $S(0)\frac{e^{-r_{div}T}}{B(0,T)}$로 이자를 포함한 대출금을 받는다.

결론 : $F(0,T) - S(0)e^{-r_{div}T}\frac{1}{B(0,T)} > 0$ 이므로 재정기회가 발생.

===

$F(0,T) < S(0)e^{-r_{div}T}\frac{1}{B(0,T)}$ 인 경우

1. 시간 0에 선도계약 매입포지션을 취한다.
2. $e^{-r_{div}T}$개의 주식을 공매도하여, $S(0)\times e^{-r_{div}T}$을 현금화 한 후 채권에 투자한다.
3. 시간 T에 $S(0)\frac{e^{-r_{div}T}}{B(0,T)}$ 으로 채권을 청ㅅ나하고, 선도계약을 통해 주식을 $F(0,T)$에 인도받아 공매도를 청산한다.

결론 : $-F(0,T) + S(0)e^{-r_{div}T}\frac{1}{B(0,T)} > 0$ 이므로 재정기회가 발생.

.■ 연속 배당 수익률로 배당금을 지급하는 주식의 선도가격 예제

독일 차를 수입하는 미국의 수입업자는 유로를 반년 후에 사들이는 선도계약을 맺고자 한다. 미국 달러와 유로의 이자율은 각각 $r_{달러} = 4\%$ 와 $r_{유료} = 3\%$ 이고, 환율은 1달러당 0.9834유로라고 주어진다. 이 경우 유로에 대한 선도가격을 달러(즉, 선도환율)로 나타내면 얼마인가?

1. 유로를 주식으로 비유하면, $r_{div} = 3\%$ 이다.
2. 달러 이자율은 채권이자율이라 할 수 있으므로 $B(0,T) = e^{-r_{달러}T}$
3. $F(0,T) = S(0)e^{-r_{div}T}\frac{1}{B(0,T)} = 0.9837\times e^{-0.03\times 0.5}\frac{1}{e^{-0.04\times 0.5}} \simeq 0.9883$

.■ 선도계약의 가치

▶ $0 \le t \le T$ 를 만족시키는 시점 t 에서의, 선도가격 $F(0,T)$ 를 갖는 선도계약의 매입포지션의 가치는 다음과 같이 주어진다.

▶ $V(t) = [F(t,T) - F(0,T)]B(t,T)$

▶ 증명

1. 시점 t 에서 선도계약의 매입포지션을 소유한 사람은 동시에 매도포지션 또한 취할 수 있다. 이 때 매도포지션을 취하기 위해 추가비용은 부담하지 않으며, $F(t,T)$ 라는 일반적인 선도가격을 사용하게 된다. 두 가지 결합된 포지션의 최종 이득은 다음과 같이 나타낼 수 있다.
2. $S(T) - F(0,T) - [S(T) - F(t,T)] = F(t,T) - F(0,T)$
3. 이것은 확정적, 즉 무위험이다. 시간 t 에서의 가치는 T시점에서의 가격에서 할인된 것을 할인 계수는 $B(t,T)$ 이다.
4. $0 \le t \le T$인 시점 t 에 인도가격 X 를 갖는 선도계약 매입포지션의 가치 $V_X(t)$ 는 $V_X(t) = [F(0,T) - X]B(0,T)$ 이 되고,
5. 무배당 주식은 $V_X(0) = [F(0,T) - X]B(0,T) = S(0) - XB(0,T)$ 이 된다.

■ 선도계약의 가치 사례

T=12월 31일에 금 한 덩어리를 300만원에 매매하기로 t=1월 1일에 계약했다. t=1월 1일의 시세는 200만원, 7월 1일의 시세는 300만원, 12월 31일의 시세는 500만원이다. 매입포지션의 이득은?

1. $F(1월 1일,\ 12월 31일) = \frac{S(1월 1일)}{B(1월 1일,\ 12월 31일)}$
2. $B(1월 1일,\ 12월 31일) = \frac{200}{300} = e^{-r},\ r = 0.4055$
3. $F(7월 1일,\ 12월 31일) = \frac{300}{e^{-0.5\times 0.4054}} = 367.4235$
4. 7월 1일 매도포지션을 양도받으면, 13월 31일에 300 대신 367.4235을 받고 금을 매도할 수 있다.
5. 12월 31일에 367.4235 - 300 = 67.4235을 더 받을 수 있으므로 7월 1일의 가치를 환산하면 $67.4235\times e^{-0.5\times 0.4054} = 55.0510$ 이다.

■ 선물계약

선물계약과 선도계약은 기초자산을 미래의 일정 시점에 특정한 가격으로 매수하거나 매도하겠다는 합의이다. 이 계약들은 매수자와 매도자에게 실물거래 가격을 고정시켜 인도일까지의 기초자산의 가격변화의 위험을 완화한다. 역사적으로 말이나 옥수수와 같은 계절성 농산물 상품에 대한 선도계약이 활성화되었다.

■ 선물계약

▶ 선도계약은 제로섬게임이므로 만기 T에 채무 불이행할 위험이 상존

▶ 선물계약은 선도계약과 마찬가지로 인도시점 T에 선물가격 $f(0,T)$ 로 기차자산을 거래하기로 약속한 것이나, 선물계약은 미지 정한 시간 $t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_N = T$에 일일정산을 한다. 일일정산이란 그 시점에 계약의 가치를 평가하여 정산하는 것이다.

▶ 결과적으로, 만기일의 채무 불이행 위험을 줄일 수 있다.

▶ 선물계약 매입포지션을 가진 사람은 시간 t_n 에 $f(t_n,T) - f(t_{n-1},T)$ 를 받는다.(음수이면 지불한다. $0 < t < T$일 때의 $f(t,T)$ 값은 0 시점에서는 미리 알 수 없다.)

▶ 매도포지션이면 위와 부호는 반대이다.

▶ 개시비용은 없다.

■ 선물계약과 선도계약의 차이

선물계약	선도계약
거래소에서 거래	사적으로 협상
표준화된 거래소에서 정한 계약 단위, 만기, 호가 단위, 명목 가치 등	개별적으로 특화
거래소 청산기구에 의하여 지불이 보증되므로 상대방위험이 없음	사적으로 협상하고 지불은 전적으로 상대방에게 의존하게 되므로 신용부도위험
거래가 활발(유동성 풍부)	양도 불가능
규제를 받음	규제를 받지 않음

■ 결재소

선물시장의 중요한 특성은 유동성이다. 이러한 특성은 표준화와 결재소의 존재로 가능하다. 시장에서는 오직 특정한 거래일, 표준화된 인도 조건, 표준화된 물리적 성질이 명시된 선물계약만이 거래된다. 결재소는 중재자로서의 역할을 하는데, 가자 크기가 다양한 선물계약의 매도포지션과 매입포지션 전체를 연결한다.

■ 일일정산
매일 또는 정해진 날 장 종료 후 진행한다. 선물시장의 종가를 기준으로 투자자별 보유한 포지션에 대한 가격 변동을 평가한다. 각 투자자의 손익을 평가하여 증거금을 정산 후 배분한다.

■ 선물계약의 조건
만기 시 선물가격은 $f(T,T)=S(T)$ 이다. 시간 t_n 일 때의 선물가격 $f(t_n,T)$ 는 그 시점에 선물계약을 시작하는 데에 비용이 들지 않도록 하는 값이다.

■ 가격결정
▶ 이자율이 변하지 않는다면 $f(0,T)=F(0,T)$ 이다.
▶ 일질정산은 시간 t 일 때 한 번, $f(0,T)>F(0,T)$ 라면
1. 시간 0에 선도 계약 매입포지션 1, 선물계약 매도포지션 $e^{-r(T-t)}$
2. 시간 t 에 정산 : $e^{-r(T-t)}[f(t,T)-f(0,T)]$ 지불
3. 이를 위해 무위험으로 $e^{-r(T-t)}[f(t,T)-f(0,T)]$ 차입
4. 선물계약의 매도포지션을 1이 되게 늘린다.
5. 시간 T 에 선도계약 매입포지션을 청산 : $S(0)-F(0,T)$ 수입
6. 무위험 차입 청산 : $f(t,T)-f(0,T)$ 지불
7. 선물 매도포지션 청산 : $f(T,T)-f(t,T)=S(T)-f(t,T)$ 확보
8. 정산 결과 : $f(0,T)-F(0,T)>0$ 으로 재정기회 발생
▶ 일질정산은 시간 t 일 때 한 번, $f(0,T)<F(0,T)$ 라면
1. 시간 0에 선도계약 매도포지션 1, 선물계약 매입포지션 $e^{-r(T-t)}$
2. 시간 t 에 정산 : $e^{-r(T-t)}[f(t,T)-f(0,T)]$ 수입
3. 이를 위해 무위험 채권 $e^{-r(T-t)}[f(t,T)-f(0,T)]$ 구입
4. 선물계약의 매입포지션을 1이 되게 늘린다.
5. 시간 T 에 선도계약 매도포지션을 청산 : $S(0)-F(0,T)$ 지불
6. 채권 청산 : $f(t,T)-f(0,T)$ 수입
7. 선물 매입포지션 청산 : $f(T,T)-f(t,T)=S(T)-f(t,T)$ 수입
8. 정산 결과 : $F(0,T)-f(0,T)>0$ 으로 재정기회 발생
▶ 위의 전략은 이자율이 예측불허하게 변하면 시행할 수 없다. 하지만 이자의 움직임을 미리 안다면 적절히 변형하여 시행할 수 있어 $f(t,T)=F(t,T)$ 가 유효하다. 이자율이 변하지 않는다면 시점 t 에 $f(t,T)=F(t,T)=S(t)e^{r(T-t)}$ 이다. 만약 선물가격이 이 식의 값과 다르다면 이는 미래 이자율 변동에 대한 시장의 시각 등이 반영된 것이다.

■ 증거금
선물포지션에 수반하는 의무수행을 확실하게하기 위한 장치이다. 증거금 계좌는 선물계약을 개시, 유지하는데 필요한 계좌이다. 초기증거금(=개시증거금)은 선물계약을 맺을 때 납부하는 보증금이다. 정산금액은 증거금 계좌에 더해지거나 차감된다. 유지증거금은 선물가격의 일정 수준 이상을 유지해야 한다. 증거금 납부요청은 증거금이 유지증거금보다 적으면 결재소에서 유지 요청을 하여 초기증거금 수준을 복구시킨다. 증거금 납부 요청에 응하지 못하는 선물포지션은 결재소가 즉시 청산한다.

■ 증거금 예제
▶ 초기증거금 : 선물가격의 10%
▶ 유지증거금 : 선물가격의 5%
▶ $f(t,T)$: t 일째 선물가격
▶ 증거금 1 : t 일 시작할 때 보증금
▶ 증거금 2 : t 일 끝날 때 보증금

날짜	$f(t,T)$	현금흐름	증거금1	지급	증거금2
0	140	개시	0	-14	14
1	138	-2	12	0	12
2	130	-8	4	-9	13
3	140	+10	23	+9	14
4	150	+10	24	+9	15
		청산	15	+15	0
			총계	+10	

■ 선물을 이용한 헤징
헤징(hedge)이란 환율, 금리 또는 다른 자산에 대한 투자 등을 통해 보유하고 있는 위험자산의 가격변동을 제거하는 것을 말한다. 주식가격변동의 영향을 줄이는 상대적으로 간단한 방법 중에 하나는 선도계약이다.
ex) 달러와 유로를 같이 사서 둘 중 하나는 반드시 오른다.

■ 헤징 예제
3개월 후에 주식을 팔고자 한다. 주식가격변동의 영향을 헤징 하고자, 같은 만기의 주식에 대한 선물계약 매도포지션을 하나 개시한다. $S(0)=100$, $r=8\%$, $T=3/12$ 이며, 한 달마다 일일정산을 실시하고, 그 금액은 투자(혹은 차입)되고, 무위험이자율로 이자를 발생한다.

날짜	$S(t)$	$f(t,3/12)$	지급	이자
0	100	102.02		
1	102	103.37	-1.35	-0.02
2	101	101.67	+1.68	+0.01
3	105	105.00	-3.32	0.00
		합계	-2.98	

$$102.02=S(0)\times e^{0.08\times\frac{3}{12}}=100\times e^{0.08\times\frac{3}{12}}$$

$$-0.02=-1.35\times e^{0.08\times\frac{2}{12}},\qquad +0.01=1.68\times e^{0.08\times\frac{1}{12}}$$

최종적으로 주식 매각, 선물 청산의 합계는 $105.00-2.98=102.01$ 로 헤징하지 않을 때보다 손실, 이자를 생각하지 않는다면 정확히 $f(0,3/12)$ 와 일치한다.

■ 헤징의 현실성
현실적으로 헤징의 계산은 간편한 계산을 위해 무시했던 개시증거금의 존재로 약간 더 복잡하다. 선물계약의 표준화 결과로 필요한 우리가 워하는 계약조건들을 맞추는데 어려움이 있을 수 있다. 선물의 행사날짜는 일반적으로 1년 내 명시된 4개의 명시된 달 중 특정 날짜가 된다. 예를 들어 3월, 6월, 9월, 12월의 셋째 주 금요일이다. 만약 4월 30일에 투자를 청산하기 원한다면 그 전에 청산하면 된다.

■ 헤징의 현실성 예제
2개월 후에 주식을 팔려고 한다. 주식가격변화의 영향을 헤징하고자 3개월 후 만기의 주식에 대한 선물계약 매도포지션 하나를 개시한다. $S(0)=100$, $r=8\%$, $T=3/12$ 이고, 일일정산은 한 달마다, 그 금액은 투자(혹은 차입)되고, 무위험이자율로 이자를 발생한다.

날짜	$S(t)$	$f(t,3/12)$	지급	이자
0	100	102.02		
1	102	103.37	-1.35	-0.01
2	101	101.67	+1.69	0.00
		합계	+0.34	-0.01

최종적으로 101.00으로 주식을 매각하고, 일일청산과 이자를 합해 101.33을 받는다. 이는 $f(0,2/12)$ 에 근사한다.

■ 베이시스(basis)
선물가격과 현물가격의 차이를 베이시스라고 한다. $b(t,T)=S(t)-f(t,T)$ 이고, 베이시스는 $t\to T$ 이면 0으로 수렴한다. 만약, 이자율이 변동하지 않고 상수라면 $b(t,T)=S(t)(1-e^{t(T-t)})$ 이고. 이 값은 $t<T$ 에 대하여 음수이다. 만약 기초자산이 배당 수익률 $r_{div}>r$ 로 배당금을 지급한다면, $b(t,T)=S(t)(1-e^{(r-r_{div})(T-t)})$ 이 된다.

■ 헤지전략
1. 어떤 자산을 $t<T$ 에 매각하려 한다.
2. 시점 t 에 지금보다 자산 가격이 떨어지면 손실 발생, 헤징이 필요
3. 시점 0 에 가격 $f(0,T)$ 로 선물계약 매도포지션을 취한다.
4. 시점 t 에 자산을 팔아 $S(t)$ 를 받고, 일일정산으로 $f(0,T)-f(t,T)$ 를 받는다. (즉, $S(t)+f(0,T)-f(t,T)=f(0,T)+b(t,T)$)
5. 시간 0 에 선물가격 $f(0,T)$ 은 알고 있으므로 이 헤지포지션에 수반되는 위험은 베이시스의 수준과 관련되어 있다.
6. 이 불확실성은 주로 불확실한 미래의 이자율과 관련 있다.

■ 최적 헤지 비율
1. 헤지의 목표가 리스크를 최소화 하는 것이라면, 어떤 최적 헤지 비율을 이용해야 하는가?
2. 즉, 기초 자산 1개 당 N개의 선물계약을 체결할 때 최적비율을 구하기 위해 위험을 계산한다.
3. 이 때 위험은 베이시스($b_N(t,T)=S(t)-Nf(t,T)$)의 분산인
$Var(b_N(t,T))=\sigma^2_{S(t)}+N^2\sigma^2_{f(t,T)}-2N\sigma_{S(t)}\sigma_{f(t,T)}\rho_{S(t)f(t,T)}$ 이다.
4. N에 대한 2차방정식이 되어 최솟값은
$N=\rho_{S(t)f(t,T)}\dfrac{\sigma_{S(t)}}{\sigma_{f(t,T)}}$ 일 때, 이 N 값이 최적 헤지 비율이다.

■ 이자율이 일정할 때 최적헤지비율은?

1. $f(t,T)=S(t)e^{r(T-t)}$ = 상수 X S(t) 이므로 $\rho_{S(t)f(t,T)}=1$ 이다.

2. $\sigma_{f(t,T)}=e^{r(T-t)}\sigma_{S(t)}$

3. $N=e^{-r(T-t)}$

■ 지수선물
1. 주식지수 : 주식의 시장자본화에 비례하는 가중치를 둔, 여러 주식가격의 가중평균이다.
2. 지수는 선택된 주식들이 충분히 크다면, 시장 포트폴리오의 값에 대체적으로 비례할 수 있다. 예를 들어 S&P500 지수는 뉴욕증권거래소에서 이루어지는 거래량의 약 80%에 해당하는 500개의 주식을 활용해서 계산한다.
3. 지수는 어떤 포트폴리오와 동일시할 수 있다. 그러나 비용 때문에 어떤 포트폴리오에 실제로 거래하는 것은 매우 어렵다.
4. 선물 시장의 관점에서 지수를 증권처럼 다룰 수 있다.
5. 지수 수치로 나타낸 선물 가격 $f(t,T)$ 는 이전과 같은 조건들을 만족하는 것으로 가정된다.
6. 일일정산은 $f(t_n,T)-f(t_{n-1},T)$ 에 고정된 금액으로 이루어진다.

■ CAPM 기반 헤징
1. 포트폴리오의 기대수익률 $\mu_V=R+\beta_V(\mu_M-R)$
2. $M(t)$ 를 시간 t 에서 시장포트폴리오의 값이라 하고, 계산상의 편의를 위해 지수는 시장포트폴리오의 값과 같다고 하자.
3. 선물가격은 $f(t,T)=M(t)e^{r(T-t)}$
4. r 은 $e^{rt}=1+R$ 이 되는 연속복리이자율이다.
5. 원래의 포트폴리오 V 에 인도 시점 T 인 지수에 대한 선물계약 매도포지션 N 개를 더한 포트폴리오 $\overline{V}$ 를 만든다.
6. $\overline{V}$ 의 초깃값은 V 의 초기값과 같다. 왜냐하면 선물계약 시작 시에는 어떠한 비용도 발생하지 않기 때문이다.
7. 시점 t 에 첫 번째 일일정산할 때 새로운 포트폴리오의 값은
$\overline{V}(t)=V(t)-N(f(t,T)-f(0,T))$ 이다.
8. 기간 $[0,t]$ 에서 새 포트폴리오의 수익률은

$$K_{\overline{V}} = \frac{\overline{V}(t) - \overline{V}(0)}{\overline{V}(0)} = \frac{V(t) - N(f(t,T) - f(0,T)) - V(0)}{V(0)}$$
$$= K_V - \frac{N(f(t,T) - f(0,T))}{V(0)}$$

9. 새 포트폴리오의 베타 계수 $\beta_{\overline{V}}$ 는 선물 포지션 N개를 적절히 선택하여 임의로 설정할 수 있다.
10. 임의로 주어진 숫자 α 에 대해 $N = (\beta_V - \alpha)\frac{V(0)e^{tr}}{f(0,T)}$ 라면, $\beta_{\overline{V}} = \alpha$ 다.

▣ CAPM 기반 헤징

$$\beta_{\overline{V}} = COV(K_{\overline{V}}, K_M)/\sigma_M^2$$
$$= COV(K_V - \frac{N(f(t,T) - f(0,T))}{V(0)}, K_m)/\sigma_M^2$$
$$= COV(K_V, K_M)/\sigma_M^2 - \frac{N}{V(0)} COV(f(t,T) - f(0,T), K_M)/\sigma_M^2$$
$$= \beta - N\frac{1}{V(0)} COV(f(t,T), K_M)/\sigma_M^2$$
$$= \beta - N\frac{e^{r(T-t)}}{V(0)} COV(M(t), K_M)/\sigma_M^2$$
$$= \beta - N\frac{e^{r(T-t)}}{V(0)} M(0) COV(\frac{M(t) - M(0)}{M(0)}, K_M)/\sigma_M^2$$
$$= \beta - N\frac{e^{r(T-t)}}{V(0)} M(0) COV(K_M, K_M)/\sigma_M^2$$

▣ CAPM 기반 헤징 예제

1. 지수가 $M(0) = 890$ 에서 $M(t) = 850$ 으로 떨어진다고 하자.
2. 이는 한 구간에서 $\frac{850 - 890}{850} = -4.49\%$ 만큼 하락하는 것과 같다.
3. 길이 t 인 기간에 대한 무위험이자율이 $R = 1\%$ 라고 가정하자. 즉, $1 + R = e^{tr} = 1.01$ 와 같다.
4. 인도 시점이 $3t$ 인 지수에 대한 선물가격은
   $f(0,3t) = M(0)(1+R)^3 = 890(1.01)^3 = 916.97$
   $f(t,3t) = M(t)(1+R)^3 = 850(1.01)^2 = 867.09$
5. $\beta_V = 1.5$ 이고, 초깃값이 $V(0) = 100$ 인 포트폴리오를 생각해보자. 이 포트폴리오는 다음과 같은 음의 기대수익률을 갖는다.
   $\mu_V = R + (\mu_M - R)\beta_V = 1 + (-4.49 - 1)1.5 = -7.24\%$
6. $\beta_{\overline{V}} = 0.0$ 인 새 포트폴리오를 구성하기 위해 기존의 포트폴리오에 $N = \beta_V \frac{(1+R)V(0)}{f(0,3t)} = 1.5\frac{1.01 \times 100}{916.67} = 0.1652$ 만큼의 선도계약을 보충한다.
7. 첫 번째 시간 구간 동안, 기존 포트폴리오의 실질적인 수익률이 기대수익률과 같다고 가정하면 $V(t) = 92.76$ 이 된다.
8. 일일정산 금액은
   $-N(f(t,3t) - f(0,3t)) = -0.1652(867.09 - 916.97) = 8.24$ 를 지급한다.
9. 이것은 새로운 포트폴리오가 시간 t 에 다음의 가치를 갖게 한다.
   $\overline{V}(t) = V(t) - N(f(t,3t) - f(0,3t)) = 92.76 + 8.24 = 101.00$
10. 이 가치는 무위험 수익률과 정확히 일치한다.

▣ CAPM 기반 헤징 예제 - 890에서 920으로 상승하는 경우 -

1. 이는 한 구간에서 $\frac{920 - 890}{890} = 3.37\%$ 만큼 상승하는 것과 같다.
2. 길이 t 인 기간에 대한 무위험이자율이 $R = 1\%$ 라고 가정하자. 즉, $1 + R = e^{tr} = 1.01$ 와 같다.
3. 인도 시점이 $3t$ 인 지수에 대한 선물가격은
   $f(0,3t) = M(0)(1+R)^3 = 890(1.01)^3 = 916.97$
   $f(t,3t) = M(t)(1+R)^3 = 920(1.01)^2 = 938.492$
4. $\beta_V = 1.5$ 이고, 초깃값이 $V(0) = 100$ 인 포트폴리오를 생각해보자. 이 포트폴리오는 다음과 같은 음의 기대수익률을 갖는다.
   $\mu_V = R + (\mu_M - R)\beta_V = 1 + (3.37 - 1)1.5 = 4.55\%$
5. $\beta_{\overline{V}} = 0.0$ 인 새 포트폴리오를 구성하기 위해 기존의 포트폴리오에
   $N = \beta_V \frac{(1+R)V(0)}{f(0,3t)} = 1.5\frac{1.01 \times 100}{916.67} = 0.1652$ 만큼의 선도계약을 보충한다.
6. 첫 번째 시간 구간 동안, 기존 포트폴리오의 실질적인 수익률이 기대수익률과 같다고 가정하면 $V(t) = 104.55$ 이 된다.
7. 일일정산 금액은 $-N(f(t,3t) - f(0,3t)) = -0.1652(938.492 - 916.97) = -3.55$ 를 지급한다.
8. 이것은 새로운 포트폴리오가 시간 t 에 다음의 가치를 갖게 한다.
   $\overline{V}(t) = V(t) - N(f(t,3t) - f(0,3t)) = 104.55 - 3.55 = 101.00$
9. 이 가치는 무위험 수익률과 정확히 일치한다.

5. 옵션 : 일반적 성질

1. 풋옵션 : 행사일(만기일)에 행사사격 X 에 기초자산을 팔 권리
2. 콜옵션 : 행사일(만기일)에 행사가격 X 에 기초자산을 살 권리
3. 유럽식 옵션은 만기일에만, 미국식 옵션은 만기일 사이 아무 때나
4. 옵션청산 : 현금으로 옵션을 청산한다.

▣ 옵션의 이익

1. 유럽식 콜옵션의 만기 시 지급액 $\begin{cases} S(T) - X, & S(T) - X > 0 \text{ 일 때} \\ 0, & \text{그 외의 경우} \end{cases}$
2. $S(T)$ 에 의존하는 확률변수
3. 조건부 청구권이라고도 부른다. $x^+ = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & \text{그 외의 경우} \end{cases}$

▣ 옵션의 이익

1. 유럽식 콜옵션의 지급액 : $(S(T) - X)^+$
2. 유럽식 풋옵션의 지급액 : $(X - S(T))^+$
3. 항상 0 이상, 양의 확률로 0보다 큰 값
4. 그러므로 옵션을 구매하기 위해서는 일정한 금액을 지불해야 한다. 그렇지 않으면 무재정 원리에 위반한다.
5. 유럽식 옵션가격 : C_E, P_E
6. 미국식 옵션가격 : C_A, P_A

▣ 옵션의 예제

2007년 12월 21일에 640펜스로 행사되는 옵션이 있다. 이 옵션은 PLC 주식에 대한 옵션으로 2007년 10월 20일에 22.5펜스로 거래되고 있다. 이 옵션을 구매하는데 5.23%의 연속 복리가 적용되는 대출금이 조달되었다고 가정하자.

$T =$ 2007년 12월 21일
$X =$ 640펜스
프리미엄 : 22.5펜스

\# 대출금 상환
- 만기일에 대출금을 갚기 위해서
- $22.5e^{0.0523 \times \frac{2}{12}} = 22.7$ 펜스가 필요

\# 주식 가격
- 행사 시점에 $640 + 22.7 = 662.7$ 보다 높아야 이득이 난다.

▣ 옵션의 예제

행사가격이 36달러이고, 만기는 3달 후, 유럽식 풋옵션, 12%의 연속 복리를 적용하고, 4.5달러의 가격으로 옵션을 구매하고, 3달 후 3달러의 이익을 가져오는 만기일의 주식의 가격은?

$S(T) = 36 - (4.5e^{0.12 \times \frac{3}{12}}) - 3 = 36 - 4.64 - 3 = 28.36$

▣ 옵션 소유자의 이득

1. 이득 : 옵션 지급액 - 프리미엄
2. 유럽식 콜옵션 : $(S(T) - X)^+ - C_E e^{rT}$
3. 유럽식 풋옵션 : $(X - S(T))^+ - C_E e^{rT}$
4. 손실 : 프리미엄 수준에 제한된다.

▣ 옵션 발행자의 이득

5. 이득 : 프리미엄 - 옵션 지급액
6. 유럽식 콜옵션 : $C_E e^{rT} - (S(T) - X)^+$
7. 유럽식 풋옵션 : $C_E e^{rT} - (X - S(T))^+$
8. 손실 : 콜옵션의 경우 무한히 커질 수 있다. 풋옵션의 경우 행사가격 이하로 제한된다.

▣ 옵션 예제

한 유럽식 콜옵션의 행사가격은 $90, 만기는 6개월 후다. 이 옵션은 9% 연속 복리이고, 대출금으로 $8에 구매할 수 있다. 만약 만기 때 주식 가격이 각각 1/3의 확률로 $87, $92, $97이 된다면, 이 유럽식 콜 옵션의 기대이익은?

\# 대출금 상환액
$C_E e^{rT} = 8 \times e^{0.09 \times \frac{6}{12}} = 8.37$
\# 가격이 $87일 때
$(87 - 90)^+ - 8.37 = -8.37$
\# 가격이 $92일 때
$(92 - 90)^+ - 8.37 = -6.37$
\# 가격이 $97일 때
$(77 - 90)^+ - 8.37 = -1.37$
\# 기대이익
$(0.33)(-8.37 - 6.37 - 1.37) = -5.37$

▣ 풋-콜 패리티
무배당주식에 대해 다음 식은 유럽식 콜옵션과 풋옵션의 가격 사이의 관계를 나타낸다. 이 옵션들의 행사가격은 X 이고, 만기일은 T 이다.

$$C_E - P_E = S(0) - Xe^{e^{-rT}}$$

▣ 풋-콜 패리티 증명

$C_E - P_E > S(0) - Xe^{e^{-rT}}$ 을 가정하자.

1. 시간 0 에 $S(0)$ 을 지불해 하나의 주식을 구매한다.
2. P_E 로 하나의 풋옵션을 구매한다.
3. C_E 를 받고 하나의 콜옵션을 판다.
4. 자금시장에서 이자율 r 로 총 $C_E - P_E - S(0)$ 을 투자한다. 만약 이 값이 음수라면 차입한다. 이 거래의 잔고는 0이다.
5. 시간 T 에는 $(C_E - P_E - S(0))e^{rT}$ 만큼의 금액을 수령해서 자금시장 포지션을 청산한다. 만약 값이 음수라면 청산하기 위해 금액을 지불한다.
6. $S(T) \le X$ 일 때는 풋옵션을 행사함으로써, $S(T) > X$ 일 때는 콜옵션의 매도포지션을 이행함으로써 주식을 X 가격에 판다.
7. 잔고는 $(C_E - P_E - S(0))e^{rT} + X$ 가 되고, 양수가 되어 무재정 원리에 위배된다.

==

$C_E - P_E < S(0) - Xe^{e^{-rT}}$ 을 가정하자.

1. 시간 0 에 $S(0)$ 을 받고 주식 한 주를 공매도 한다.
2. P_E 를 받고 하나의 풋옵션을 판다.
3. C_E 를 지불하고 하나의 콜옵션을 구입한다.
4. 자금시장에서 이자율 r 로, 총 $S(0) + C_E + P_E$ 의 금액을 투자한다. (만약 이것이 음수라면 차입한다.)
5. 만약 $S(T) > X$ 이면 콜옵션을 행사함으로써, 만약 $S(T) \le X$ 이면 풋옵션의 매도포지션을 청산함으로써 주식 하나를 X 가격으로 산다.
6. 잔고는 $(S(0) - C_E + P_E)e^{rT} - X$ 가 되고, 양수가 되어 무재정 원리에 위배된다.

▣ 풋-콜 패리티 연습문제
무배당주식이 한 주당 $15.60으로 거래된다고 가정하자. 행사가격이 $15이고 만기일이 3달 후인, 이 주식에 대한 유럽식 콜옵션은 $2.83에 거래된다. 이자율은 연속 복리 하에서 $r = 6.72\%$ 이다. 이 때 같은 행사가격과 만기일을 가지는 유럽식 풋옵션의 가격은 얼마인가?

$$2.83 - P_E = 15.60 - 15.00 \times e^{-\frac{3}{12} \times 0.0672}, \qquad P_E = 1.98$$

▣ 풋-콜 패리티 연습문제
행사가격이 $24이고, 6달 후가 만기인 유럽식 콜옵션과 풋옵션이 각각 $5.09, $7.78로 거래되고 있다. 기초자산의 가격은 $20.37이고 이자율은 $r = 7.48\%$ 이다. 재정기회를 찾아보아라.

$5.09 - 7.78 > 20.37 - 24 \times e^{-0.0748 \times \frac{6}{12}}$ 이므로 재정기회가 발생한다.

1. 20.37의 가격으로 주식 1개를 공매도 한다.
2. 7.78의 가격으로 풋옵션을 구매한다.
3. 5.09의 가격으로 콜옵션을 구매한다.
4. 자금시장에서 이자율 7.48% 로, 총 23.06의 금액을 빌린다.
5. 만기일의 주가가 행사가보다 높고 낮음을 판단해서, 풋옵션을 행사하거나, 콜옵션을 행하사여 24달러에 1주를 매입한다.
6. 빌린 대출금의 금액은 $23.06e^{\frac{1}{2} \times 0.0748} = 23.94$ 이다.
7. 최종 이익 : $24 - 23.96 = 0.06$ 의 재정이익이 발생한다.

▣ 배당금이 있는 풋-콜 패리티
풋-콜 패리티 공식을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$C_E - P_E = V_X(0)$$

여기서 $V_X(0)$ 은 선도계약 매입포지션의 가치이다. 만약 X 가 자산의 이론적인 선도가격인 $S(0)e^{rT}$ 와 같다면, 선도계약의 가치는 0 이므로 $V_X(0) = 0$ 이고, 즉 $C_E = P_E$ 가 된다.

만약 주식이 배당금을 시간 0에서 T 사이에 지급 한다고 가정한 경우 $V_X(0) = S(0) - div_0 - Xe^{-rT}$ 가 된다. 이에 div_0 는 배당금의 현재가치이고, $C_E - P_E = S(0) - div_0 - Xe^{-rT}$ 가 되고, 배당금이 연속으로 지급된다면, $V_X(0) = S(0)e^{-r_{div}T} - Xe^{-rT}$ 이므로, $C_E - P_E = S(0)e^{-r_{div}T} - Xe^{-rT}$ 가 된다.

▣ 배당금이 있는 풋-콜 패리티 연습문제
독일 차를 수입하는 미국의 수입업자는 유로를 반년 후에 사들이는 선도계약을 맺고자 한다. 미국 달러와 유로의 이자율은 각각 $r_{달러} = 4\%$ 와 $r_{유료} = 3\%$ 이고, 환율은 1달러당 0.9834유로라고 주어진다. 6달 후에 만기가 되는 유럽식 콜옵션과 풋옵션의 가격이 $C_E = P_E$ 로 같게 되는 행사가격을 구하라.

1. 유로를 주식으로 비유하면, $r_{div} = 3\%$ 이다.
2. 달러 이자율은 채권이자율이라 할 수 있으므로 $B(0,T) = e^{-r_{달러}T}$
3. $F(0,T) = S(0)e^{-r_{div}T}\dfrac{1}{B(0,T)} = 0.9837 \times e^{-0.03 \times 0.5}\dfrac{1}{e^{-0.04 \times 0.5}} \simeq 0.9883$

$C_E - P_E = S(0)e^{-r_{div}T} - Xe^{-rT} = 0$ 이므로 $S(0)e^{-r_{div}T} = Xe^{-rT}$ 이다.

따라서 $X = \dfrac{S(0)e^{-r_{div}T}}{e^{-rT}} = \dfrac{0.9837 \times e^{-0.03 \times 0.5}}{e^{-0.04 \times 0.5}} = 0.9833$

▣ 과제
시간 t 에 시장포트폴리오의 가치가 지수 $M(t)$ 로 표현된다고 하자. $M(0) = 2{,}000$ 이고, 1기간 당 $\mu_m = 5\%$ 이고, 무위험이자율은 3% 이다. 어느 회사의 주가는 $S(0) = 500$ 이고, $\beta_S = 1.2$ 이다.

\# 이 주식의 1기간 기대수익률은?

$$\begin{aligned}\mu_S &= R + \beta_S(\mu_M - R) \\ &= 3\% + 1.2(5\% - 3\%) \\ &= 3\% + 1.2 \times 2\% = 3\% + 2.4\% = 5.4\%\end{aligned}$$

\# 이 주식의 1개와 만기가 3인 지수선물을 몇 개 더하여 $\beta_{\tilde{V}} = 0$ 이 되는 포트폴리오를 구성하라.

$$N = (\beta_V - \alpha)\frac{V(0)e^{rt}}{f(0,T)} = (1.2 - 0.0)\frac{500(1.03)}{2{,}000(1.03)^3} = 0.2828$$

\# 시간 0에서 1까지의 주식의 수익률이 정확하게 기대수익률과 같았다고 하자. 이 때 $\tilde{V}(1)$ 의 가치는 몇인가?

$$\tilde{V}(1) = S(1) + N(f(0,T) - f(t,T))$$

$$S(1) = 500(1 + 0.054) = 500(1.054) = 527$$

$$\tilde{V}(1) = 527 + 0.2828(M(0)(1+R)^3 - M(t)(1+R)^2)$$

\# 시간 1에 $S(1) = 520$, $M(1) = 2{,}100$ 이라면 $\tilde{V}(1)$ 의 가치는 몇인가?

$$N = (\beta_V - \alpha)\frac{V(0)e^{rt}}{f(0,T)} = (1.2 - 0.0)\frac{500(1.03)}{2{,}000(1.03)^3} = 0.2828$$

$$\tilde{V}(1) = S(1) + N(f(0,T) - f(t,T))$$

$$S(1) = 520$$

$$\tilde{V}(1) = 527 + 0.2828(2{,}000(1.03)^3 - 2{,}100(1.03)^2) = 515$$

이 가치는 무위험 수익률 3%($500 \times 1.03 = 515$)와 일치한다.