

Большаков Артём гр_4 лаб.4 Проблема собственных значений

Вариант 17

Условие задания:

Написать программу, которая вычисляет все собственные значения матрицы с помощью QR-алгоритма с предварительным приведением к форме Хессенберга методом отражений. Применить программу к данным ниже матрицам и занести в отчет результаты работы (количество итераций, время работы, список собственных значений).

[Ссылка на github с реализацией](#)

[Ссылка на реализацию основного алгоритма](#)

[Ссылка на файл с заданием](#)

Краткое описание

Сначала происходит приведение исходной матрицы к форме Хессенберга методом отражений

Далее происходит последовательные процессы ортогонализации методом вращений (т.к. оно эффективнее чем отражения для формы Хессенберга), пока все элементы под диагональю либо будут очень маленькими ($\leq \varepsilon$) либо частью блока 2×2 (что соответствует комплексно-сопряженным собственным значениям).

Далее извлекаются собственные значения.

Пример работы программы

(входные данные находятся в папке ./examples, выходные данные – выводятся в консоль)

1)

$$\begin{pmatrix} -0.4 & 2.8 & 9.6 \\ -3.2 & 2.6 & 8.5 \\ -1.8 & 0. & 1.4 \end{pmatrix}$$

```
First task:  
A1.txt:  
iterations: 13  
time(ms): 0.018  
eigenvalues:  
1.553714 + 4.933086i      ( abs = 5.171979 )  
1.553714 - 4.933086i      ( abs = 5.171979 )  
0.492572                   ( abs = 0.492572 )
```

было выполнено 13 итераций

было выполнено за 0.018 миллисекунд

список собственных значений для полученные в Wolfram Mathematica (для сравнения результатов)

```
In[1]:= Eigenvalues[{{-0.4` 2.8` 9.6`}, {-3.2` 2.6` 8.5`}, {-1.8` 0.` 1.4`}}]
```

```
Out[1]= {1.55371 + 4.93309 i, 1.55371 - 4.93309 i, 0.492572 + 0. i}
```

```
In[2]:= Abs[Eigenvalues[{{-0.4` 2.8` 9.6`}, {-3.2` 2.6` 8.5`}, {-1.8` 0.` 1.4`}}]]
```

```
Out[2]= {5.17198, 5.17198, 0.492572}
```

2.
$$\begin{pmatrix} -9.4 & 9.4 & 4.5 & 8.6 & 6.5 & 7.5 & -8. \\ 5.8 & 7.7 & 9.6 & -5.3 & 10. & 2.4 & 8.8 \\ -2.9 & -1.2 & -5.7 & -4.8 & 0.8 & -0.6 & 3. \\ -8.7 & -7.7 & -1.2 & 1.9 & -5.4 & 6.3 & -8.9 \\ -5.2 & 1.8 & -7.4 & 5.6 & 2.8 & -5.9 & -6.9 \\ 8.4 & 3.3 & -8.6 & 8.5 & 3.4 & 9.9 & -2.3 \\ -1.6 & 0.7 & 2.3 & 2.7 & 9.4 & 1.7 & 1.4 \end{pmatrix}$$

```
first task:  
A2.txt:  
iterations: 438  
time(ms): 0.111000  
eigenvalues:  
16.486139 ( abs = 16.486139 )  
-9.266783 + 7.475729i ( abs = 11.906292 )  
-9.266783 - 7.475729i ( abs = 11.906292 )  
4.822462 + 10.018534i ( abs = 11.118776 )  
4.822462 - 10.018534i ( abs = 11.118776 )  
7.510567 ( abs = 7.510567 )  
-6.508063 ( abs = 6.508063 )
```

было выполнено 438 итераций

было выполнено за 0.111 миллисекунд

список собственных значений для полученные в Wolfram Mathematica (для сравнения результатов)

In[3]:= Eigenvalues

$$\left(\begin{array}{ccccccc} -9.4 & 9.4 & 4.5 & 8.6 & 6.5 & 7.5 & -8 \\ 5.8 & 7.7 & 9.6 & -5.3 & 10 & 2.4 & 8.8 \\ -2.9 & -1.2 & -5.7 & -4.8 & 0.8 & -0.6 & 3 \\ -8.7 & -7.7 & -1.2 & 1.9 & -5.4 & 6.3 & -8.9 \\ -5.2 & 1.8 & -7.4 & 5.6 & 2.8 & -5.9 & -6.9 \\ 8.4 & 3.3 & -8.6 & 8.5 & 3.4 & 9.9 & -2.3 \\ -1.6 & 0.7 & 2.3 & 2.7 & 9.4 & 1.7 & 1.4 \end{array} \right)$$

Out[3]= {16.4861 + 0. i, -9.26678 + 7.47573 i,
-9.26678 - 7.47573 i, 4.82246 + 10.0185 i,
4.82246 - 10.0185 i, 7.51057 + 0. i, -6.50806 + 0. i}

In[4]:= Abs[Eigenvalues]

$$\left(\begin{array}{ccccccc} 16.4861 & 11.9063 & 11.9063 & 11.1188 & 11.1188 & 7.51057 & 6.50806 \end{array} \right)$$

Out[4]= {16.4861, 11.9063, 11.9063, 11.1188, 11.1188, 7.51057, 6.50806}

7.2	3.7	-0.1	-5.	9.	-8.7	-6.3	6.1	-0.5	-2.	-8.2	4.	-9.5	0.1	-4.2	
3.	7.9	8.5	-6.	6.9	-6.1	2.5	-6.1	-6.	5.9	-6.9	-5.1	-3.1	-9.	3.	
8.5	2.8	2.2	9.5	-4.4	-2.6	4.3	2.7	1.7	-9.7	1.4	4.4	-5.5	-5.7	6.6	
-8.9	-0.6	3.7	2.9	3.4	3.1	6.3	5.3	-9.9	3.6	5.3	-4.3	-6.	-4.6	5.9	
3.6	-0.7	-0.7	2.4	4.6	-6.9	-5.6	-8.5	-8.2	-7.1	0.7	3.7	-5.	2.8	8.2	
-3.7	5.8	-3.8	-4.9	-1.3	-1.8	1.4	-2.7	3.	-7.5	-2.1	5.4	8.	7.1	4.4	
9.3	4.4	1.9	-6.1	-8.7	-6.6	-8.1	6.6	-6.8	-3.1	9.2	-0.3	-4.	-2.	-8.3	
-5.7	-7.5	-8.5	-2.6	5.4	-8.9	3.2	-5.9	3.2	5.4	-0.1	-9.8	-6.1	2.3	9.4	
1.6	-8.	-6.2	-6.8	7.6	9.5	6.7	9.	-8.4	-7.2	1.4	3.9	-8.7	1.5	4.2	
-3.4	3.4	1.5	0.5	6.8	-2.2	-2.4	4.2	-7.9	9.	0.1	7.6	-8.6	3.6	7.1	
9.8	-6.8	7.9	-6.6	-9.8	7.8	3.7	7.5	5.2	0.5	6.3	1.	-9.3	1.8	6.6	
-1.1	9.	1.9	3.1	1.2	4.4	6.3	-6.	-6.4	-5.8	-1.2	1.7	1.3	-2.9	0.1	
-3.2	-0.7	-0.2	0.9	9.2	0.3	8.1	-7.5	6.9	3.3	3.5	7.5	2.5	7.9	0.8	
4.	-8.9	5.2	-0.3	3.6	7.8	-5.2	7.4	0.1	-5.3	-8.8	-7.6	-0.7	1.3	-3.5	
3.	-6.9	1.7	-9.1	-3.2	-9.2	9.7	8.8	9.6	-5.9	4.6	8.7	-3.8	2.8	-1.4	-5.6

A3.txt:

iterations: 1839

time(ms): 0.753000

eigenvalues:

```
21.987816 + 3.112587i ( abs = 22.207032 )
21.987816 - 3.112587i ( abs = 22.207032 )
-21.123301 ( abs = 21.123301 )
14.569329 + 14.779820i ( abs = 20.753516 )
14.569329 - 14.779820i ( abs = 20.753516 )
-7.593635 + 18.157755i ( abs = 19.681651 )
-7.593635 - 18.157755i ( abs = 19.681651 )
-18.375028 ( abs = 18.375028 )
-1.620593 + 16.568090i ( abs = 16.647160 )
-1.620593 - 16.568090i ( abs = 16.647160 )
-7.748457 + 5.799807i ( abs = 9.678654 )
-7.748457 - 5.799807i ( abs = 9.678654 )
8.416574 + 3.294121i ( abs = 9.038250 )
8.416574 - 3.294121i ( abs = 9.038250 )
-0.723739 ( abs = 0.723739 )
```

было выполнено 1839 итераций

было выполнено за 0.75 миллисекунд

список собственных значений для полученные в Wolfram Mathematica (для сравнения результатов)

```
In[6]:= Eigenvalues[{{7.2` 3.7` -0.1` -5.` 9.` -8.7` -6.3` 6.1` -0.5` -2.` -8.2` 4.` -9.5` 0.1` -4.2`,
3.` 7.9` 8.5` -6.` 6.9` -6.1` 2.5` -6.1` -6.` 5.9` -6.9` -5.1` -3.1` -9.` 3.`,
8.5` 2.8` 2.2` 9.5` -4.4` -2.6` 4.3` 2.7` 1.7` -9.7` 1.4` 4.4` -5.5` -5.7` 6.6`,
-8.9` -0.6` 3.7` 2.9` 3.4` 3.1` 6.3` 5.3` -9.9` 3.6` 5.3` -4.3` -6.` -4.6` 5.9`,
3.6` -0.7` -0.7` 2.4` 4.6` -6.9` -5.6` -8.5` -8.2` -7.1` 0.7` 3.7` -5.` 2.8` 8.2`,
-3.7` 5.8` -3.8` -4.9` -1.3` -1.8` 1.4` -2.7` 3.` -7.5` -2.1` 5.4` 8.` 7.1` 4.4`,
9.3` 4.4` 1.9` -6.1` -8.7` -6.6` -8.1` 6.6` -6.8` -3.1` 9.2` -0.3` -4.` -2.` -8.3`,
-5.7` -7.5` -8.5` -2.6` 5.4` -8.9` 3.2` -5.9` 3.2` 5.4` -0.1` -9.8` -6.1` 2.3` 9.4`,
1.6` -8.` -6.2` -6.8` 7.6` 9.5` 6.7` 9.` -8.4` -7.2` 1.4` 3.9` -8.7` 1.5` 4.2`,
-3.4` 3.4` 1.5` 0.5` 6.8` -2.2` -2.4` 4.2` -7.9` 9.` 0.1` 7.6` -8.6` 3.6` 7.1`,
9.8` -6.8` 7.9` -6.6` -9.8` 7.8` 3.7` 7.5` 5.2` 0.5` 6.3` 1.` -9.3` 1.8` 6.6`,
-1.1` 9.` 1.9` 3.1` 1.2` 4.4` 6.3` -6.` -6.4` -5.8` -1.2` 1.7` 1.3` -2.9` 0.1`,
-3.2` -0.7` -0.2` 0.9` 9.2` 0.3` 8.1` -7.5` 6.9` 3.3` 3.5` 7.5` 2.5` 7.9` 0.8`,
4.` -8.9` 5.2` -0.3` 3.6` 7.8` -5.2` 7.4` 0.1` -5.3` -8.8` -7.6` -0.7` 1.3` -3.5`,
-6.9` 1.7` -9.1` -3.2` -9.2` 9.7` 8.8` 9.6` -5.9` 4.6` 8.7` -3.8` 2.8` -1.4` -5.6`}]
```

```
Dout[6]= {21.9878 + 3.11259 i, 21.9878 - 3.11259 i, -21.1233 + 0. i, 14.5693 + 14.7798 i, 14.5693 - 14.7798 i,
-7.59364 + 18.1578 i, -7.59364 - 18.1578 i, -18.375 + 0. i, -1.62059 + 16.5681 i, -1.62059 - 16.5681 i,
-7.74846 + 5.79981 i, -7.74846 - 5.79981 i, 8.41657 + 3.29412 i, 8.41657 - 3.29412 i, -0.723739 + 0. i}
```

```
In[7]:= Abs[Eigenvalues[{{7.2` 3.7` -0.1` -5.` 9.` -8.7` -6.3` 6.1` -0.5` -2.` -8.2` 4.` -9.5` 0.1` -4.2`,
3.` 7.9` 8.5` -6.` 6.9` -6.1` 2.5` -6.1` -6.` 5.9` -6.9` -5.1` -3.1` -9.` 3.`,
8.5` 2.8` 2.2` 9.5` -4.4` -2.6` 4.3` 2.7` 1.7` -9.7` 1.4` 4.4` -5.5` -5.7` 6.6`,
-8.9` -0.6` 3.7` 2.9` 3.4` 3.1` 6.3` 5.3` -9.9` 3.6` 5.3` -4.3` -6.` -4.6` 5.9`,
3.6` -0.7` -0.7` 2.4` 4.6` -6.9` -5.6` -8.5` -8.2` -7.1` 0.7` 3.7` -5.` 2.8` 8.2`,
-3.7` 5.8` -3.8` -4.9` -1.3` -1.8` 1.4` -2.7` 3.` -7.5` -2.1` 5.4` 8.` 7.1` 4.4`,
9.3` 4.4` 1.9` -6.1` -8.7` -6.6` -8.1` 6.6` -6.8` -3.1` 9.2` -0.3` -4.` -2.` -8.3`,
-5.7` -7.5` -8.5` -2.6` 5.4` -8.9` 3.2` -5.9` 3.2` 5.4` -0.1` -9.8` -6.1` 2.3` 9.4`,
1.6` -8.` -6.2` -6.8` 7.6` 9.5` 6.7` 9.` -8.4` -7.2` 1.4` 3.9` -8.7` 1.5` 4.2`,
-3.4` 3.4` 1.5` 0.5` 6.8` -2.2` -2.4` 4.2` -7.9` 9.` 0.1` 7.6` -8.6` 3.6` 7.1`,
9.8` -6.8` 7.9` -6.6` -9.8` 7.8` 3.7` 7.5` 5.2` 0.5` 6.3` 1.` -9.3` 1.8` 6.6`,
-1.1` 9.` 1.9` 3.1` 1.2` 4.4` 6.3` -6.` -6.4` -5.8` -1.2` 1.7` 1.3` -2.9` 0.1`,
-3.2` -0.7` -0.2` 0.9` 9.2` 0.3` 8.1` -7.5` 6.9` 3.3` 3.5` 7.5` 2.5` 7.9` 0.8`,
4.` -8.9` 5.2` -0.3` 3.6` 7.8` -5.2` 7.4` 0.1` -5.3` -8.8` -7.6` -0.7` 1.3` -3.5`,
-6.9` 1.7` -9.1` -3.2` -9.2` 9.7` 8.8` 9.6` -5.9` 4.6` 8.7` -3.8` 2.8` -1.4` -5.6`}]]]
```

```
Dout[7]= {22.207, 22.207, 21.1233, 20.7535, 20.7535, 19.6817, 19.6817, 18.375, 16.6472, 16.6472, 9.67865, 9.67865, 9.03825, 9.03825, 0.723739}
```

И как и ожидалось, мы получили список собственных значений в порядке убывания модулей собственных значений.