

Большаков Артём гр_4 лаб.4 Проблема собственных значений

Вариант 17

Условие задания:

Написать программу, которая вычисляет все собственные значения матрицы с помощью QR-алгоритма с предварительным приведением к форме Хессенберга методом отражений. Применить программу к данным ниже матрицам и занести в отчет результаты работы (количество итераций, время работы, список собственных значений).

[Ссылка на github с реализацией](#)

[Ссылка на реализацию основного алгоритма](#)

[Ссылка на файл с заданием](#)

Краткое описание

Сначала происходит приведение исходной матрицы к форме Хессенберга методом отражений

Далее происходит последовательные процессы ортогонализации методом вращений (т.к. оно эффективнее чем отражения для формы Хессенберга), пока все элементы под диагональю либо будут очень маленькими ($\leq \epsilon$) либо частью блока 2×2 (что соответствует комплексно-сопряженным собственным значениям).

Далее извлекаются собственные значения.

Пример работы программы

(входные данные находятся в папке ./examples, выходные данные – выводятся в консоль)

1)

$$\begin{pmatrix} -0.4 & 2.8 & 9.6 \\ -3.2 & 2.6 & 8.5 \\ -1.8 & 0. & 1.4 \end{pmatrix}$$

```
first task:
A1.txt:
iterations: 13
time(ms): 0.018
eigenvalues:
1.553714 + 4.933086i      ( abs = 5.171979 )
1.553714 - 4.933086i      ( abs = 5.171979 )
0.492572                 ( abs = 0.492572 )
```

было выполнено 13 итераций

было выполнено за 0.018 миллисекунд

список собственных значений для полученные в Wolfram Mathematica (для сравнения результатов)

```
In[1]:= Eigenvalues[ $\begin{pmatrix} -0.4 & 2.8 & 9.6 \\ -3.2 & 2.6 & 8.5 \\ -1.8 & 0. & 1.4 \end{pmatrix}$ ]
```

```
Out[1]= {1.55371 + 4.93309 i, 1.55371 - 4.93309 i, 0.492572 + 0. i}
```

```
In[2]:= Abs[Eigenvalues[ $\begin{pmatrix} -0.4 & 2.8 & 9.6 \\ -3.2 & 2.6 & 8.5 \\ -1.8 & 0. & 1.4 \end{pmatrix}$ ]]]
```

```
Out[2]= {5.17198, 5.17198, 0.492572}
```

2. $\begin{pmatrix} -9.4 & 9.4 & 4.5 & 8.6 & 6.5 & 7.5 & -8. \\ 5.8 & 7.7 & 9.6 & -5.3 & 10. & 2.4 & 8.8 \\ -2.9 & -1.2 & -5.7 & -4.8 & 0.8 & -0.6 & 3. \\ -8.7 & -7.7 & -1.2 & 1.9 & -5.4 & 6.3 & -8.9 \\ -5.2 & 1.8 & -7.4 & 5.6 & 2.8 & -5.9 & -6.9 \\ 8.4 & 3.3 & -8.6 & 8.5 & 3.4 & 9.9 & -2.3 \\ -1.6 & 0.7 & 2.3 & 2.7 & 9.4 & 1.7 & 1.4 \end{pmatrix}$

```
first task:
A2.txt:
iterations: 438
time(ms): 0.111000
eigenvalues:
16.486139 ( abs = 16.486139 )
-9.266783 + 7.475729i ( abs = 11.906292 )
-9.266783 - 7.475729i ( abs = 11.906292 )
4.822462 + 10.018534i ( abs = 11.118776 )
4.822462 - 10.018534i ( abs = 11.118776 )
7.510567 ( abs = 7.510567 )
-6.508063 ( abs = 6.508063 )
```

было выполнено 438 итераций

было выполнено за 0.111 миллисекунд

список собственных значений для полученные в Wolfram Mathematica (для сравнения результатов)

In[3]:= Eigenvalues $\left[\begin{pmatrix} -9.4 & 9.4 & 4.5 & 8.6 & 6.5 & 7.5 & -8. \\ 5.8 & 7.7 & 9.6 & -5.3 & 10. & 2.4 & 8.8 \\ -2.9 & -1.2 & -5.7 & -4.8 & 0.8 & -0.6 & 3. \\ -8.7 & -7.7 & -1.2 & 1.9 & -5.4 & 6.3 & -8.9 \\ -5.2 & 1.8 & -7.4 & 5.6 & 2.8 & -5.9 & -6.9 \\ 8.4 & 3.3 & -8.6 & 8.5 & 3.4 & 9.9 & -2.3 \\ -1.6 & 0.7 & 2.3 & 2.7 & 9.4 & 1.7 & 1.4 \end{pmatrix} \right]$

Out[3]= {16.4861 + 0. i, -9.26678 + 7.47573 i,
-9.26678 - 7.47573 i, 4.82246 + 10.0185 i,
4.82246 - 10.0185 i, 7.51057 + 0. i, -6.50806 + 0. i}

In[4]:= Abs[Eigenvalues $\left[\begin{pmatrix} -9.4 & 9.4 & 4.5 & 8.6 & 6.5 & 7.5 & -8. \\ 5.8 & 7.7 & 9.6 & -5.3 & 10. & 2.4 & 8.8 \\ -2.9 & -1.2 & -5.7 & -4.8 & 0.8 & -0.6 & 3. \\ -8.7 & -7.7 & -1.2 & 1.9 & -5.4 & 6.3 & -8.9 \\ -5.2 & 1.8 & -7.4 & 5.6 & 2.8 & -5.9 & -6.9 \\ 8.4 & 3.3 & -8.6 & 8.5 & 3.4 & 9.9 & -2.3 \\ -1.6 & 0.7 & 2.3 & 2.7 & 9.4 & 1.7 & 1.4 \end{pmatrix} \right] \right]$

Out[4]= {16.4861, 11.9063, 11.9063, 11.1188, 11.1188, 7.51057, 6.50806} (

3. $\left(\begin{array}{cccccccccccccccc} 7.2 & 3.7 & -0.1 & -5. & 9. & -8.7 & -6.3 & 6.1 & -0.5 & -2. & -8.2 & 4. & -9.5 & 0.1 & -4.2 \\ 3. & 7.9 & 8.5 & -6. & 6.9 & -6.1 & 2.5 & -6.1 & -6. & 5.9 & -6.9 & -5.1 & -3.1 & -9. & 3. \\ 8.5 & 2.8 & 2.2 & 9.5 & -4.4 & -2.6 & 4.3 & 2.7 & 1.7 & -9.7 & 1.4 & 4.4 & -5.5 & -5.7 & 6.6 \\ -8.9 & -0.6 & 3.7 & 2.9 & 3.4 & 3.1 & 6.3 & 5.3 & -9.9 & 3.6 & 5.3 & -4.3 & -6. & -4.6 & 5.9 \\ 3.6 & -0.7 & -0.7 & 2.4 & 4.6 & -6.9 & -5.6 & -8.5 & -8.2 & -7.1 & 0.7 & 3.7 & -5. & 2.8 & 8.2 \\ -3.7 & 5.8 & -3.8 & -4.9 & -1.3 & -1.8 & 1.4 & -2.7 & 3. & -7.5 & -2.1 & 5.4 & 8. & 7.1 & 4.4 \\ 9.3 & 4.4 & 1.9 & -6.1 & -8.7 & -6.6 & -8.1 & 6.6 & -6.8 & -3.1 & 9.2 & -0.3 & -4. & -2. & -8.3 \\ -5.7 & -7.5 & -8.5 & -2.6 & 5.4 & -8.9 & 3.2 & -5.9 & 3.2 & 5.4 & -0.1 & -9.8 & -6.1 & 2.3 & 9.4 \\ 1.6 & -8. & -6.2 & -6.8 & 7.6 & 9.5 & 6.7 & 9. & -8.4 & -7.2 & 1.4 & 3.9 & -8.7 & 1.5 & 4.2 \\ -3.4 & 3.4 & 1.5 & 0.5 & 6.8 & -2.2 & -2.4 & 4.2 & -7.9 & 9. & 0.1 & 7.6 & -8.6 & 3.6 & 7.1 \\ 9.8 & -6.8 & 7.9 & -6.6 & -9.8 & 7.8 & 3.7 & 7.5 & 5.2 & 0.5 & 6.3 & 1. & -9.3 & 1.8 & 6.6 \\ -1.1 & 9. & 1.9 & 3.1 & 1.2 & 4.4 & 6.3 & -6. & -6.4 & -5.8 & -1.2 & 1.7 & 1.3 & -2.9 & 0.1 \\ -3.2 & -0.7 & -0.2 & 0.9 & 9.2 & 0.3 & 8.1 & -7.5 & 6.9 & 3.3 & 3.5 & 7.5 & 2.5 & 7.9 & 0.8 \\ 4. & -8.9 & 5.2 & -0.3 & 3.6 & 7.8 & -5.2 & 7.4 & 0.1 & -5.3 & -8.8 & -7.6 & -0.7 & 1.3 & -3.5 \\ -6.9 & 1.7 & -9.1 & -3.2 & -9.2 & 9.7 & 8.8 & 9.6 & -5.9 & 4.6 & 8.7 & -3.8 & 2.8 & -1.4 & -5.6 \end{array} \right)$

```

A3.txt:
iterations: 1839
time(ms): 0.753000
eigenvalues:
21.987816 + 3.112587i ( abs = 22.207032 )
21.987816 - 3.112587i ( abs = 22.207032 )
-21.123301 ( abs = 21.123301 )
14.569329 + 14.779820i ( abs = 20.753516 )
14.569329 - 14.779820i ( abs = 20.753516 )
-7.593635 + 18.157755i ( abs = 19.681651 )
-7.593635 - 18.157755i ( abs = 19.681651 )
-18.375028 ( abs = 18.375028 )
-1.620593 + 16.568090i ( abs = 16.647160 )
-1.620593 - 16.568090i ( abs = 16.647160 )
-7.748457 + 5.799807i ( abs = 9.678654 )
-7.748457 - 5.799807i ( abs = 9.678654 )
8.416574 + 3.294121i ( abs = 9.038250 )
8.416574 - 3.294121i ( abs = 9.038250 )
-0.723739 ( abs = 0.723739 )

```

было выполнено 1839 итераций

было выполнено за 0.75 миллисекунд

список собственных значений для полученные в Wolfram Mathematica (для сравнения результатов)

```

In[6]:= Eigenvalues[
{
7.2` 3.7` -0.1` -5.` 9.` -8.7` -6.3` 6.1` -0.5` -2.` -8.2` 4.` -9.5` 0.1` -4.2`
3.` 7.9` 8.5` -6.` 6.9` -6.1` 2.5` -6.1` -6.` 5.9` -6.9` -5.1` -3.1` -9.` 3.`
8.5` 2.8` 2.2` 9.5` -4.4` -2.6` 4.3` 2.7` 1.7` -9.7` 1.4` 4.4` -5.5` -5.7` 6.6`
-8.9` -0.6` 3.7` 2.9` 3.4` 3.1` 6.3` 5.3` -9.9` 3.6` 5.3` -4.3` -6.` -4.6` 5.9`
3.6` -0.7` -0.7` 2.4` 4.6` -6.9` -5.6` -8.5` -8.2` -7.1` 0.7` 3.7` -5.` 2.8` 8.2`
-3.7` 5.8` -3.8` -4.9` -1.3` -1.8` 1.4` -2.7` 3.` -7.5` -2.1` 5.4` 8.` 7.1` 4.4`
9.3` 4.4` 1.9` -6.1` -8.7` -6.6` -8.1` 6.6` -6.8` -3.1` 9.2` -0.3` -4.` -2.` -8.3`
-5.7` -7.5` -8.5` -2.6` 5.4` -8.9` 3.2` -5.9` 3.2` 5.4` -0.1` -9.8` -6.1` 2.3` 9.4`
1.6` -8.` -6.2` -6.8` 7.6` 9.5` 6.7` 9.` -8.4` -7.2` 1.4` 3.9` -8.7` 1.5` 4.2`
-3.4` 3.4` 1.5` 0.5` 6.8` -2.2` -2.4` 4.2` -7.9` 9.` 0.1` 7.6` -8.6` 3.6` 7.1`
9.8` -6.8` 7.9` -6.6` -9.8` 7.8` 3.7` 7.5` 5.2` 0.5` 6.3` 1.` -9.3` 1.8` 6.6`
-1.1` 9.` 1.9` 3.1` 1.2` 4.4` 6.3` -6.` -6.4` -5.8` -1.2` 1.7` 1.3` -2.9` 0.1`
-3.2` -0.7` -0.2` 0.9` 9.2` 0.3` 8.1` -7.5` 6.9` 3.3` 3.5` 7.5` 2.5` 7.9` 0.8`
4.` -8.9` 5.2` -0.3` 3.6` 7.8` -5.2` 7.4` 0.1` -5.3` -8.8` -7.6` -0.7` 1.3` -3.5`
-6.9` 1.7` -9.1` -3.2` -9.2` 9.7` 8.8` 9.6` -5.9` 4.6` 8.7` -3.8` 2.8` -1.4` -5.6`
}
]

```

```

Out[6]:= {21.9878 + 3.11259 i, 21.9878 - 3.11259 i, -21.1233 + 0. i, 14.5693 + 14.7798 i, 14.5693 - 14.7798 i,
-7.59364 + 18.1578 i, -7.59364 - 18.1578 i, -18.375 + 0. i, -1.62059 + 16.5681 i, -1.62059 - 16.5681 i,
-7.74846 + 5.79981 i, -7.74846 - 5.79981 i, 8.41657 + 3.29412 i, 8.41657 - 3.29412 i, -0.723739 + 0. i}

```

```

In[7]:= Abs[Eigenvalues[
{
7.2` 3.7` -0.1` -5.` 9.` -8.7` -6.3` 6.1` -0.5` -2.` -8.2` 4.` -9.5` 0.1` -4.2`
3.` 7.9` 8.5` -6.` 6.9` -6.1` 2.5` -6.1` -6.` 5.9` -6.9` -5.1` -3.1` -9.` 3.`
8.5` 2.8` 2.2` 9.5` -4.4` -2.6` 4.3` 2.7` 1.7` -9.7` 1.4` 4.4` -5.5` -5.7` 6.6`
-8.9` -0.6` 3.7` 2.9` 3.4` 3.1` 6.3` 5.3` -9.9` 3.6` 5.3` -4.3` -6.` -4.6` 5.9`
3.6` -0.7` -0.7` 2.4` 4.6` -6.9` -5.6` -8.5` -8.2` -7.1` 0.7` 3.7` -5.` 2.8` 8.2`
-3.7` 5.8` -3.8` -4.9` -1.3` -1.8` 1.4` -2.7` 3.` -7.5` -2.1` 5.4` 8.` 7.1` 4.4`
9.3` 4.4` 1.9` -6.1` -8.7` -6.6` -8.1` 6.6` -6.8` -3.1` 9.2` -0.3` -4.` -2.` -8.3`
-5.7` -7.5` -8.5` -2.6` 5.4` -8.9` 3.2` -5.9` 3.2` 5.4` -0.1` -9.8` -6.1` 2.3` 9.4`
1.6` -8.` -6.2` -6.8` 7.6` 9.5` 6.7` 9.` -8.4` -7.2` 1.4` 3.9` -8.7` 1.5` 4.2`
-3.4` 3.4` 1.5` 0.5` 6.8` -2.2` -2.4` 4.2` -7.9` 9.` 0.1` 7.6` -8.6` 3.6` 7.1`
9.8` -6.8` 7.9` -6.6` -9.8` 7.8` 3.7` 7.5` 5.2` 0.5` 6.3` 1.` -9.3` 1.8` 6.6`
-1.1` 9.` 1.9` 3.1` 1.2` 4.4` 6.3` -6.` -6.4` -5.8` -1.2` 1.7` 1.3` -2.9` 0.1`
-3.2` -0.7` -0.2` 0.9` 9.2` 0.3` 8.1` -7.5` 6.9` 3.3` 3.5` 7.5` 2.5` 7.9` 0.8`
4.` -8.9` 5.2` -0.3` 3.6` 7.8` -5.2` 7.4` 0.1` -5.3` -8.8` -7.6` -0.7` 1.3` -3.5`
-6.9` 1.7` -9.1` -3.2` -9.2` 9.7` 8.8` 9.6` -5.9` 4.6` 8.7` -3.8` 2.8` -1.4` -5.6`
}
]]

```

```

Out[7]:= {22.207, 22.207, 21.1233, 20.7535, 20.7535, 19.6817, 19.6817, 18.375, 16.6472, 16.6472, 9.67865, 9.67865, 9.03825, 9.03825, 0.723739}

```

И как и ожидалось, мы получили список собственных значений в порядке убывания модулей собственных значений.