Tema 1

Els nombres racionals $\mathbb{Q}$

1.1 Definició

Definim el conjunt dels **nombres racionals** $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}$ on a, b $\in \mathbb{Z}$ i $b \neq 0\}$, és a dir, són aquells nombres que s'expressen en format de fracció de manera que tant el numerador com el denominador són nombres enters $\mathbb{Z}$.

Exemple: $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$, $3 \in \mathbb{Q}$, $\frac{2}{6} \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $\pi \notin \mathbb{Q}$.

Un nombre racional té infinites representacions en forma de fracció però una única representació en format decimal.

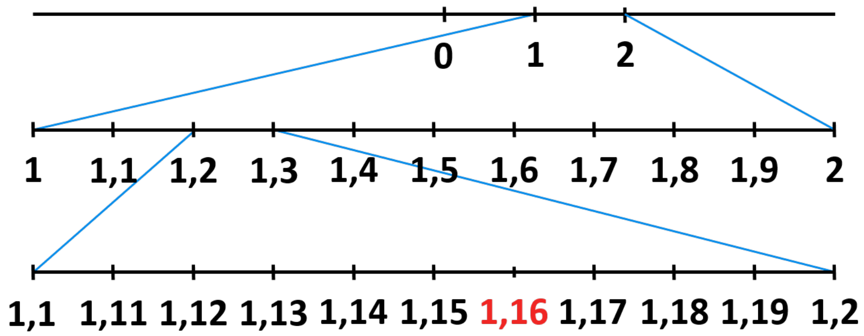
Exemple: $0,5 = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{15}{30}$

Direm que dues fraccions $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ són **equivalents** si i només si $ad = cb$.

Exemple: Comprovem si les fraccions $\frac{2}{3}$ i $\frac{4}{6}$ són equivalents. Com que $2 \cdot 6 = 12 = 3 \cdot 4$, aleshores, ambdues fraccions són equivalents.

Entre totes aquestes infinites fraccions n'existeix una que s'anomena la **fracció irreductible** i es troba en el moment que no existeix cap divisor comú entre el numerador i el denominador.

1.2 Representació de $\mathbb{Q}$ a la recta real $\mathbb{R}$



Els nombres reacionals són densos en $\mathbb{R}$ el que vol dir que entre dos nombres racionals sempre n'hi ha un altre. És fàcil comprovar-ho ja que entre dos nombres $a, b \in \mathbb{Q}$ es pot trobar el nombre $c = (a+b)/2$. Per tant, veiem que hi ha infinits nombres racionals.

1.3 Representació com a conjunt

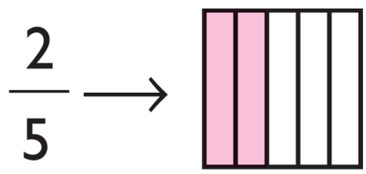
Donats els següents conjunts: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$, $\mathbb{Z} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$, $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$, existeix la següent relació d'inclusió:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

1.4 Representació gràfica

El concepte de fracció és senzill entendre'l de manera gràfica. Donat un espai i una partició **en parts iguals**, aleshores la fracció $\frac{a}{b}$ representa el conjunt de parts seleccionades a sobre el conjunt total b.

Exemple:



1.5 Operacions amb fraccions

1.5.1 Suma i resta

Per a sumar (o restar) dues fraccions $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ sempre es pot realitzar l'operació:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

Exemple:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{12} = \frac{1 \cdot 12 + 2 \cdot 3}{12 \cdot 3} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

Fixa't que realitzar la suma o la resta de fraccions és una operació delicada ja que per a poder fer-ho serà necessari que els denominadors de les dues fraccions sigui el mateix. Per tant, en moltes ocasions serà necessari realitzar el **mínim comú múltiple** dels denominadors.

Exemple:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{12} = \frac{1 \cdot 4 + 2 \cdot 1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

On la factorització com a producte de nombres primers ve donada per $3 = 3$, $12 = 2^2 \cdot 3$, i per tant, $\mathrm{mcm}(3,\, 12) = 2^2 \cdot 3 = 12$.

1.5.2 Multiplicació i divisió

Per a multiplicar dues fraccions $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ es realitza l'operació:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

Per a dividir dues fraccions $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ es realitza l'operació:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$$

Exemple:

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{12}=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$$

$$\frac{1}{3}:\frac{2}{12}=\frac{12}{6}=2$$

1.5.3 Operacions combinades

Les operacions amb fraccions suma, resta, multiplicació i divisió es poden combinar entre si. Per resoldre-les correctament, és necessari seguir la **prioritat de les operacions**.

1. Parèntesis o claudators
2. Arrels i potències
3. Multiplicació i divisió
4. Sumes i restes

En el cas que hi hagi dues operacions amb la mateixa prioritat, les operarem d'esquerra a dreta.

Exemple:

$$(\frac{1}{2}+\frac{2}{12}):\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{-2}{5}=(\frac{6}{12}+\frac{2}{12}):\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{-2}{5}=(\frac{8}{12}):\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{-2}{5}=\frac{2}{3}:\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{-2}{5}=$$

$$=\frac{4}{9}-\frac{1}{4}\cdot\frac{-2}{5}=\frac{4}{9}-\frac{-2}{20}=\frac{4}{9}+\frac{1}{10}=\frac{40}{90}+\frac{9}{90}=\frac{49}{90}$$

Per acabar, recorda la següent relació entre fraccions amb signe:

$$-\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}\neq\frac{-a}{-b}$$

I la **Llei dels signes**:

$$\begin{array}{ll}
(+)\cdot(+)=(+) & (+):(+)=(+)\\
(+)\cdot(-)=(-) & (+):(-)=(-)\\
(-)\cdot(+)=(-) & (-):(+)=(-)\\
(-)\cdot(-)=(+) & (-):(-)=(+)
\end{array}$$

1.5.4 Castells de fraccions

El concepte castell de fraccions es pot entendre com fraccions que contenen altres fraccions en el seu numerador o denominador. La forma de resoldre'ls no és única però una bona praxis és començar per aquella fracció que està més lluny de la fracció principal i anar resolent i simplificant poc a poc fins a arribar a una única fracció on el numerador sigui un nombre racional i el denominador també un nombre racional.

Exemple:

$$\frac{\frac{3}{4}+1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{4}+\frac{4}{4}}{\frac{2}{2}-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{7}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{7}{4} : \frac{1}{2} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$$

Exemple:

$$\frac{1}{\frac{1}{1+\frac{1}{3}}+2} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{3}{3}+\frac{1}{3}}+2} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{4}{3}}+2} = \frac{1}{\frac{3}{4}+2} = \frac{1}{\frac{3}{4}+\frac{8}{4}} = \frac{1}{\frac{11}{4}} = \frac{4}{11}$$

Exercicis

$\boxed{1}$ Comprova si les següents fraccions són equivalents.

a) $\frac{4}{3}$ i $\frac{6}{4}$

b) $\frac{12}{28}$ i $\frac{60}{140}$

c) $\frac{38}{13}$ i $\frac{341}{117}$

$\boxed{2}$ Demostra gràficament que dues fraccions no es poden sumar si no tenen el mateix denominador.

$\boxed{3}$ Resol les següents operacions combinades. Dona el resultat amb la fracció irreductible.

a) $\frac{75}{9} - \frac{2}{3} - \frac{1}{12}$

b) $\frac{31}{7} + \frac{15}{14} - 5 - \frac{11}{28}$

c) $\frac{2}{5} \cdot (\frac{2}{3} + 1)$

d) $(1 - \frac{1}{3}) : (1 - \frac{1}{5})$

e) $\frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}$

f) $\frac{1}{3+\frac{1}{5}} - \frac{2+\frac{1}{4}}{9} + \frac{\frac{4}{7}}{4+\frac{1}{2}}$

g) $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}$

$\boxed{4}$ Un pastor té 5 pans i un altre en té 3. A l'hora de dinar arriba un caçador que no té menjar, pel que reparteixen els pans entre els tres. El caçador, quan marxa, els dona 8 monedes. Com les haurien de repartir?