Tema 1

Semblança

1.1 Definició

Direm que dues figures planes són **semblants** si es compleixen les següents condicions:

1. El nombre de costats són iguals.
2. Tots els costats són proporcionals dos a dos.
3. Els angles són iguals.

Que dos costats c i c' siguin **proporcionals** implica que existeix una relació $c' = k \cdot c$ on $k \in \mathbb{R}$. Per tant, per a que es compleixi la segona condició de la definició de semblança serà necessari que aquest valor k sigui el mateix entre tots els costats.

Exemple: Donat un primer rectangle R_1 de base $b_1 = 5$ cm i altura $a_2 = 3$ cm i un segon rectangle R_2 de base $b_2 = 7,5$ cm i altura $a_2 = 4,5$ cm, es pot comprovar que són semblants a partir de les condicions anteriors. Clarament el nombre de costats i angles són iguals i per tant, només és necessari comprovar la segona condició:

$$b_2 = k_1 \cdot b_1 \quad \rightarrow \quad 7,5 = 1,5 \cdot 5$$

$$a_2 = k_2 \cdot a_1 \quad \rightarrow \quad 4,5 = 1,5 \cdot 3$$

Com aquest valor $k_1 = k_2 = 1,5$ és el mateix en ambdós casos, aleshores els costats són proporcionals i per tant els rectangles són semblants. $\square$

Aquest valor k és conegut com a **raó de semblança** r i s'interpreta com la relació d'escala que hi ha entre les dues figures. Per tant, donades dues figures qualesvols T_1 i T_2, sempre existeixen dues raons de semblança: la que relaciona T_1 amb T_2 i la que relaciona T_2 amb T_1.

Exemple: Seguint amb l'exemple vist anteriorment, s'ha trobat la raó $r_1 = 1,5 = \frac{3}{2}$ que defineix la relació per passar de R_2 a R_1. Ara bé, existeix una raó r_2 que permet passar de R_1 a R_2:

$$b_1 = r_2 \cdot b_2 \quad \rightarrow \quad 5 = 0,\hat{6} \cdot 7,5$$

$$a_1 = r_2 \cdot a_2 \quad \rightarrow \quad 3 = 0,\hat{6} \cdot 4,5$$

$\square$

Es pot demostrar que la relació que hi ha entre ambdues raons r_1 i r_2 satisfà $r_2 = \frac{1}{r_1}$. Fixa't que fins ara només s'ha esmentat la relació que hi ha entre els segments de les figures però ¿Existeix alguna relació entre les àrees i els volums? La resposta a la pregunta és sí.

Donades dues figures T_1 i T_2 on la raó de proporcionalitat entre segments és r i les àrees de les quals són A_1 i A_2, respectivament, aleshores es compleix:

$$\frac{A_2}{A_1} = r^2$$

Igualment, donades les mateixes figures T_1 i T_2 on la raó de proporcionalitat entre segments és r i els volums de les quals són V_1 i V_2, respectivament, aleshores es compleix:

$$\frac{V_2}{V_1} = r^3$$

Exemple: Donats un primer rectangle R_1 amb base $b_1 = 4$ cm i altura $a_1 = 5$ cm i un segon rectangle R_2 amb base $b_2 = 8$ cm i altura $a_2 = 10$ cm. Primerament, comprovem que els costats són proporcionals i per tant que els rectangles són semblants:

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{a_2}{a_1} \quad \rightarrow \quad r = \frac{8}{4} = \frac{10}{5} = 2$$

Com que la constant de proporcionalitat és la mateixa per a tots els costats, aleshores els rectangles són semblants. Comprovem ara que els perímetres dels rectangles també satisfan la constant de proporcionalitat:

$$p_1 = 4+4+5+5 = 18; \quad p_2 = 8+8+10+10 = 32 \quad \rightarrow \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{32}{18} = 2$$

Finalment, comprovem la relació mencionada anteriorment entre les àrees:

$$A_1 = b_1a_1 = 4\cdot 5 = 20; \quad A_2 = b_2a_2 = 8\cdot 10 = 80 \quad \rightarrow \quad \frac{A_2}{A_1} = \frac{80}{20} = 4 = 2^2 = r^2$$

□

1.2 Semblança de triangles

Per a que dos triangles siguin semblants s'han de complir les condicions que s'han mencionat anteriorment a la definició de semblança. Ara bé, com l'estudi es centra en els triangles, comprovar la primera condició és absurd. En referència a les altres condicions, novament, el fet que la figura d'estudi sigui el triangle simplifica bastant la feina. D'aquesta manera hi ha tres criteris independents per a poder afirmar que dos triangles són semblants:

1. Si els angles són iguals, aleshores els triangles són semblants. De fet, com la suma dels angles d'un triangle suma 180º és suficient si es comproven únicament dos dels angles.

2. Si els costats són proporcionals, aleshores els triangles són semblants.

3. Si un angle és igual i els costats adjacents a aquest angle són proporcionals, aleshores els triangles són semblants.

Exemple: Donat un primer triangle amb vèrtexs A, B i C on els angles venen definits per $\hat{A} = 78,8^o$, $\hat{B} = 65,2^o$, $\hat{C} = 36^o$ i els segments $\overline{AB} = 6$ cm, $\overline{AC} = 9,3$ cm i $\overline{BC} = 10$ cm. Donat un segon triangle amb vèrtexs A', B' i C' on els angles venen definits per $\hat{A}' = 78,8^o$, $\hat{B}' = 65,2^o$, $\hat{C}' = 36^o$ i els segments $\overline{A'B'} = 7,8$ cm, $\overline{A'C'} = 12,09$ cm i $\overline{B'C'} = 13$ cm.

1. Comprovar que són semblants utilitzant el primer criteri és trivial.

2. Comprovar que són semblants utilitzant el segon criteri implica buscar la constant de proporcionalitat entre els costats i veure que és la mateixa (com ja s'ha fet en els anteriors exemples).

3. Per comprovar que són semblants utilitzant el tercer criteri, s'escullen els angles $\hat{B}$ i $\hat{B}'$ i els seus costats adjacents $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{A'B'}$ i $\overline{B'C'}$. Comprovar que els angles són iguals és obvi i per tant, només s'haurà de comprovar que els costats són proporcionals:

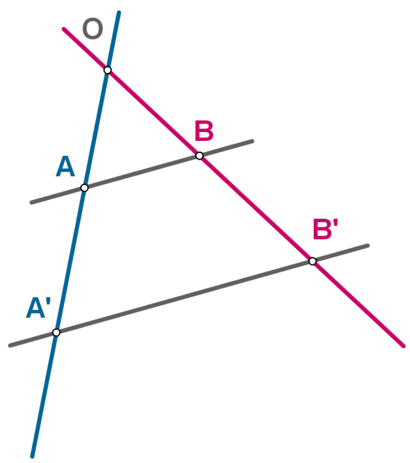
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{C'C'}} \quad \rightarrow \quad \frac{7,8}{6} = \frac{13}{10} = 1,3$$

   Com la raó de proporcionalitat és igual, aleshores els triangles són semblants.

$\square$

1.3 Teorema de Tales

Tales de Milet, matemàtic grec del segle VI a.C., va realitzar la següent construcció enginyosa de la qual en va enunciar el seu teorema:



Donades dues rectes r, s secants, és a dir, que es tallen en un punt O, i un conjunt de rectes paral·leles entre si que tallen les rectes r i s, aleshores:

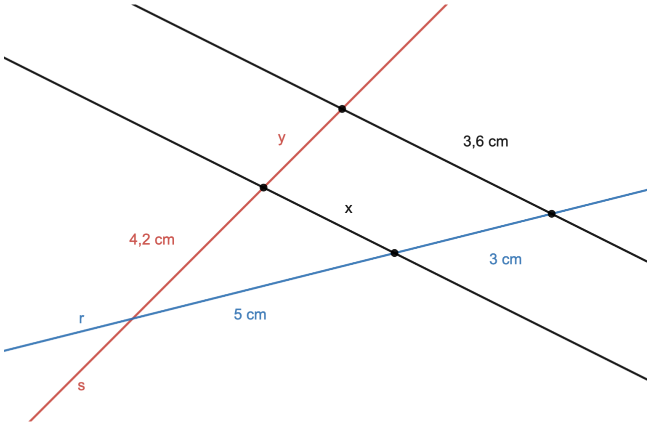
1. Els triangles formats entre el punt O i les rectes paral·leles són semblants entre sí.

2. Els segments determinats a la recta r són proporcionals als segments corresponents de la recta s.

És a dir, prenent com a construcció la mostrada anteriorment:

1. Els triangles formats per OAB i $OA'B'$ són semblants.
2. El segment $\overline{OA}$ és proporcional al segment $\overline{OB}$, el segment $\overline{OA'}$ és proporcional al segment $\overline{OB'}$ i el segment $\overline{AA'}$ és proporcional al segment $\overline{BB'}$.

Exemple: Resol els valors de x i y de la següent construcció de Tales.



El primer pas serà troba el valor de y utilitzant la segona afirmació del Teorema de Tales. Per tant, la següent relació és certa:

$$\frac{4,2}{5} = \frac{y}{3} \quad \rightarrow \quad y = \frac{4,2 \cdot 3}{5} = 2,52$$

Ara bé, per a trobar el valor x no es pot utilitzar novament la segona afirmació del Teorema de Tales ja que sobre aquests segments corresponents a les rectes paral·leles no n'afirma res. Per tant, en aquest situació, s'utilitza la primera afirmació del Teorema de Tales que conclou que aquests triangles són semblants i, en conseqüència, els costats són proporcionals:

$$\frac{x}{3,6} = \frac{5}{5+3} \quad \rightarrow \quad x = \frac{5 \cdot 3,6}{8} = 1,35$$

□

Finalment direm que dos triangles estan **en posició de Tales** si tenen un angle en comú i els costats oposats a aquest angle són paral·lels entre si.