

Capítol 1

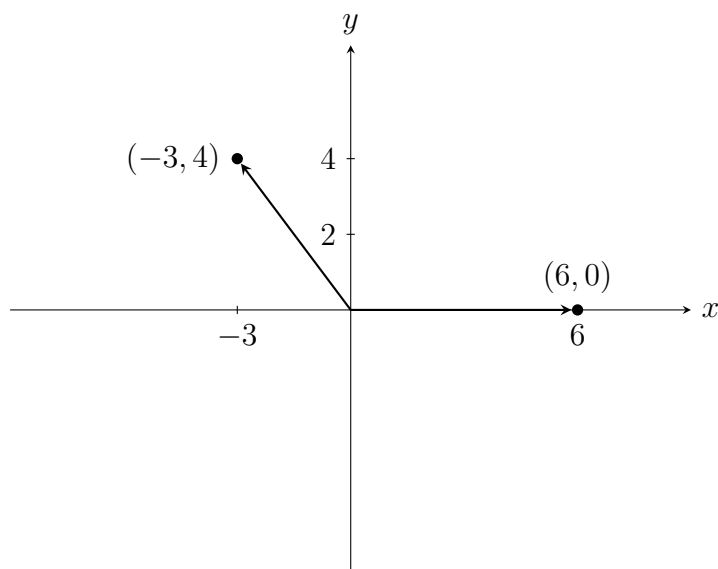
Estructures

1.1 Força

Es defineix **força** com tota acció capaç de produir o modificar l'estat de repòs o de moviment d'un cos o de produir-hi deformacions. La unitat de la força, en el sistema internacional (SI) és el Newton (N) i l'aparell utilitzat per mesurar les forces és el dinamòmetre.

Les forces es representen gràficament i matemàticament mitjançant **vectors**. Els vectors són eines matemàtiques que s'utilitzen per calcular i entendre magnituds que varien en l'espai, per tant, tenen direcció i sentit.

Exemple: A continuació es presenten dos vectors: $\vec{v} = (-3, 4)$ i $\vec{u} = (6, 0)$.



Els vectors tenen tres característiques essencials: **mòdul, direcció i sentit**.

- **Mòdul:** representa la longitud del vector i fa referència a la intensitat de la magnitud. Es denota amb la següent simbologia $|\cdot|$ i es calcula com l'arrel de la suma de quadrats.
- **Direcció:** En general s'utilitzen els eixos de coordenades X i Y per orientar el vector de manera geomètrica.

- Sentit: Ve indicat per la punta de la fletxa.

Exemple: Seguint amb l'exemple anterior, donats els dos vectors $\vec{v} = (-3, 4)$ i $\vec{u} = (6, 0)$, calculem el mòdul, direcció i sentit dels vectors \vec{v} i \vec{u} .

Comencem amb el vector \vec{u} . El mòdul de \vec{u} , és a dir, $|\vec{u}| = \sqrt{6^2 + 0^2} = 6$. La direcció és en l'eix de les X y el sentit positiu (ja que apunta cap a la dreta).

Seguim amb el vector \vec{v} . El mòdul de \vec{v} , és a dir, $|\vec{v}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$. En aquest cas com no està sobre cap dels eixos l'hem de **descomposar**. Per això, busquem les **projeccions** dels vectors sobre l'eix de les X i sobre l'eix de les Y. La descomposició del vector \vec{v} sobre l'eix de les X el denotarem com \vec{v}_x . Aquest vector té mòdul $|\vec{v}_x| = 3$, direcció l'eix de les X i com a sentit negatiu (ja que apunta cap a l'esquerra). La descomposició del vector \vec{v} sobre l'eix de les Y el denotarem com \vec{v}_y . Aquest vector té mòdul $|\vec{v}_y| = 4$, direcció l'eix de les Y i com a sentit positiu. \square

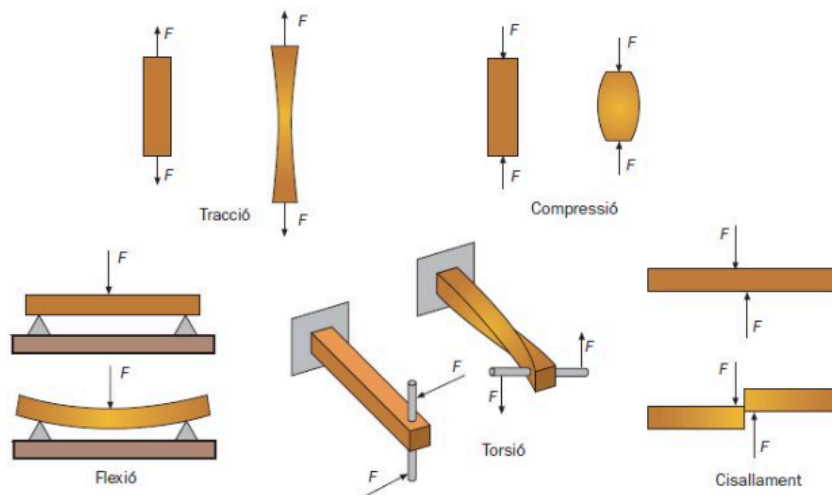
1.2 Esforços

Quan apliquem un conjunt de forces sobre un objecte, diem que aquest està sotmès a un **esforç**. Els esforços deformen el material de tal manera que es poden arribar a trencar. La idea principal de les estructures és que suportin aquests esforços sense deformar-se, per tal de protegir i aguantar el que sustenten. Segons la manera d'aplicar-los sobre el material, es distingeixen cinc tipus d'esforç:

- Tracció: Quan el material és estirat per dues forces que s'apliquen perpendiculars a la secció.
- Compensió: Quan el material és aixafat per dues forces que s'apliquen perpendiculars a la secció. En el cas de materials que tinguin una secció molt petita, sota aquest esforç és habitual que es produeixi el vinclament.
- Flexió: Quan el material és doblegat per una força que s'aplica perpendicular a l'eix principal de l'element. Els esforços de flexió es poden considerar com una combinació d'un esforç de tracció i un de compensió. També existeix una línia longitudinal que no està sotmesa a cap esforç que s'anomena línia neutre.
- Torsió: Quan el material és retorçat utilitzant un parell de forces.
- Cisallament: Quan el material és tallat per una força que s'aplica perpendicular a l'eix principal de l'element.

1.3 Propietats mecàniques

La **resistència mecànica** és la capacitat que té un material per suportar esforços sense deformar-se o trencar-se. La resistència d'un objecte dependrà, entre d'altres, de les dimensions de l'objecte, la seva forma, el material amb el qual s'ha fabricat i el tipus d'esforç al qual està sotmès.



Les propietats mecàniques descriuen el comportament dels materials davant d'esforços que intenten estirar-los, aixafar-los, retorçar-los, doblegar-los, tallar-los, trencar-los amb un cop sec, etc. Les principals propietats mecàniques són: duresa, tenacitat, plasticitat i elasticitat.

1.3.1 Duresa

La **duresa** és la resistència o oposició que presenta un material a ser ratllat o penetrat per un altre material. Una assaig habitual per mesurar la duresa és l'assaig de Brinell.

L'**assaig de Brinell** consisteix en realitzar una càrrega utilitzant un penetrador en forma d'esfera sobre el material a assajar (proveta). Tenint en compte el diàmetre del penetrador i el diàmetre de la marca realitzada sobre la proveta, s'obté el grau de duresa de Brinell a partir de l'expressió:

$$HBW = \frac{1}{g} \cdot \frac{2F}{\pi \cdot D_1(D_1 - \sqrt{D_1^2 - D_2^2})}$$

On g representa la gravetat, F la càrrega aplicada en Newtons, D_1 el diàmetre de l'esfera penetradora en mil·límetres i D_2 el diàmetre de la marca deixada a la proveta en mil·límetres.

Tot plegat s'indica de la següent manera: XX HBW (D/C/t), on XX indica el grau de duresa de Brinell, D el diàmetre del penetrador en mil·límetres, C indica el valor F/g i t indica el temps que ha durat l'aplicació de la càrrega en segons.

1.3.2 Tenacitat

La **tenacitat** és la capacitat de resistència a esforços que es produeixen de manera sobtada (xoc). Aquesta és la propietat oposada a la fragilitat.

L'**assaig Charpy** consisteix en un pèndul que es deixa caure des d'una altura inicial i que incideix sobre una proveta, la qual conté una entalla en forma de V. El valor de resiliència K s'obté a partir de la següent expressió matemàtica:

$$K = \frac{E_c}{S} \quad [J/mm^2] \quad (1.1)$$

On E_c és l'energia consumida en el trencament de la proveta en Joules i S és la secció de trencament de la proveta.

1.3.3 Plasticitat

La **plasticitat** és la capacitat que té un material per adquirir deformacions permanents sense trencar-se.

És una propietat fonamental quan es vol donar forma a un material. Prenen especial importància dos tipus de plasticitat:

- Malleabilitat: capacitat dun material per ser deformat de forma permanent en forma de làmines. Per exemple l'alumini.
- Ductilitat: capacitat dun material per ser deformat de forma permanent en forma de fils. Per exemple els conductors elèctrics.

1.3.4 Elasticitat

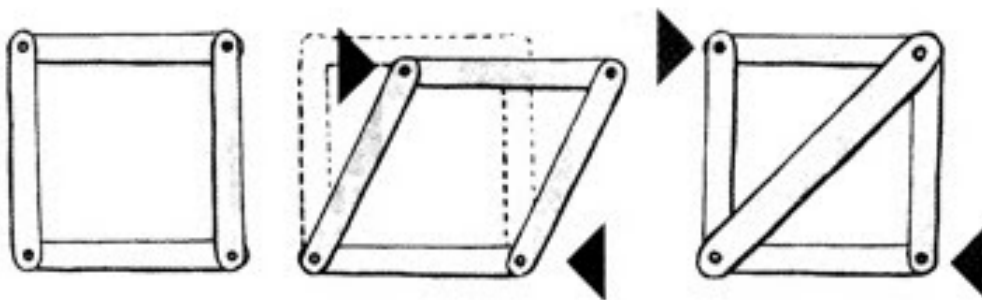
L'elasticitat és la capacitat que té un material de recuperar la seva forma original després d'haver estat deformat per un esforç. Cada material té un **límit elàstic** a partir del qual la deformació passa a ser permanent i el material es trenca.

1.4 Estructures i les seves característiques

Una **estructura** és un grup d'elements units amb l'objectiu de suportar forces. Aquestes forces poden ser **estàtiques**, com el mateix pes de l'estructura, o **dinàmiques**, com el vent, o els vehicles en moviment. Les bones estructures han de complir unes certes condicions tals com la rigidesa, estabilitat, resistència i lleugeresa.

1.4.1 Rigidesa

Una estructura és rígida si quan se li aplica una força externa no es deforma (dins d'uns límits). Per aconseguir-ho, sovint s'utilitza el mètode de **triangulació**. Aquest mètode implica construir l'estructura en forma de triangle o amb les seves parts (per separat) en forma de triangle.



Per tal de comprovar matemàticament la rigidesa d'una estructura utilitzem **la llei de les barres**. Per tant, una estructura de barres es rígida quan compleix la següent equació:

$$B \geq 2n - 3$$

On B és el nombre de barres i n és el nombre d'unions.

Exemple: Comprovem que l'estructura quadrada anterior no és rígida.

$$4 \geq 2 \cdot 4 - 3 \rightarrow 4 \geq 5$$

Com la igualtat no es compleix, aleshores l'estructura no és rígida. \square

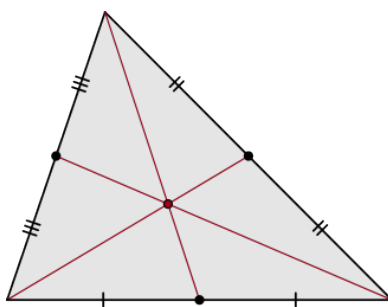
1.4.2 Estabilitat

Una estructura és estable si aquesta no bolca quan està sotmesa a forces externes. Una opció per aconseguir una estructura estable és mitjançant una base ampla o col·locant tirants. Per altre banda, per estudiar l'estabilitat d'una estructura serà necessari conèixer el seu **centre de gravetat**. En general, com més baix sigui el centre de gravetat més estable serà una estructura.

Els centres de gravetat es poden calcular amb certa facilitat utilitzant matemàtiques. Per això, diferenciarem dos tipus d'objectes: homogenis i heterogenis.

- **Homogenis:** La distribució de massa és uniforme en tota la superfície o volum. Per tant, el centre de gravetat es trobarà en el centre geomètric del cos. En el cas de polígons regulars, el centre de gravetat es troba dibuixant les mediatrïus i, allà on coincideixin totes, hi trobarem el baricentre (que coincidirà amb el centre de gravetat).

Exemple



- **Heterogenis:** La distribució de massa no és uniforme en tota la superfície o volum. En aquest cas, el centre de gravetat és la mitjana geomètrica dels centres de gravetat de totes les parts que formen l'objecte. Per això, caldrà calcular els centres de gravetat de cada figura per separat i després aplicar la següent fórmula matemàtica:

$$x_{CG} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N x_{CG(i)} \cdot m_i$$

$$y_{CG} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N y_{CG(i)} \cdot m_i$$

On M és la massa total del cos, m_i és la massa de la regió a calcular el centre de gravetat i x_{CG} , y_{CG} són les respectives posicions horitzontals i verticals dels centres de masses de cada part.

1.4.3 Resistència

Una estructura és resistent si cada element per separat que forma l'estructura és capaç de suportar l'esforç al qual es veu sotmès (sense trencar-se). La grandària, la forma i el material de cada element és el que farà que suportin o no els diferents esforços.

1.4.4 Lleugeresa

Una estructura és lleugera si aconsegueix reduir el seu pes al màxim però manté les seves característiques com estructura. A més a més, així s'aconsegueix estalviar en material, tenir menys esforços fixos (menys pes implica menys esforços de compressió) i serà més barata.

1.5 Tipus d'estructures

Podem diferenciar dos grans grups d'estructures: naturals i artificials. Dins d'aquests grans grups, també podem fer una tria segons siguin les seves característiques.

1.5.1 Estructures naturals

Dins de les estructures naturals en podem trobar en diferents àmbits i amb diferents finalitats:

- **Animals:** esquelets d'animals, nius, preses de castors, corals, ruscs d'abelles, caus de ratolins, ous d'aus, closca de tortugues, caragols, crancs, etc.
- **Vegetals:** troncs, branques, arbustos, fulles, pinyes, bolets, etc.
- **Minerals:** coves, muntanyes, roques, etc.

1.5.2 Estructures artificials

Dins de les estructures artificials en podem trobar en diferents àmbits i amb diferents finalitats:

- **Estructura d'armadura o tramades:** Està formada per un conjunt d'elements resistents, units entre si en formes rectangulars, que constitueixen l'esquelet de diversos tipus d'objectes o construccions. Les més usuals són les estructures metàl·liques i les de formigó. Per exemple: estructures d'edificis, ponts metàl·lics, grues de construcció, bastides, torres alta tensió, carretons de supermercat, etc.
- **Estructures tramades triangulades:** Estan formades per barres unides entre si en forma de triangle (normalment de metall o fusta). Per exemple les grues de la construcció. Tenen una importància molt gran, ja que són exageradament rígides (únicament per un tema de geometria). A més, són lleugeres, resistents i molt versàtils.

- **Estructura laminar o carcassa:** Està formada per làmines o plafons units entre si que solen envoltar l'objecte, com per exemple, la carrosseria d'un vehicle, el fuselatge d'un avió, un contenidor d'escombraries, llaunes de conserva, televisors, etc. Es construeixen amb materials com el metall, plàstic o materials compostos. Són resistents i lleugeres.
- **Estructures penjants:** S'empren cables dels quals pengen part de l'estructura. Els cables es diuen tirants i solen tendir a estirar-se (per tant, pateixen a tracció). Els tirants porten en els seus extrems uns tensors per tibar el cable o destensar-lo a l'hora de col·locar-lo.
- **Estructures massives:** Són estructures que es construeixen acumulant material, sense deixar amb prou feines buit entre ell. Un exemple antic són les piràmides i un exemple més actual serien les presses de les centrals hidroelèctriques. Aquestes estructures són massisses i estables, però molt pesants.
- **Estructures de volta:** Són estructures que tenen arcs, voltes i cúpules com a elements de subjecció i suport. Els arcs permeten augmentar els buits en l'estructura i les voltes són arcs un a continuació de l'altre. Aquesta tipus es va usar molt en la construcció d'esglésies, catedrals i ponts i suporten forts esforços de compressió.
- **Estructures pneumàtiques:** Són inflables, lleugeres i es poden transportar amb facilitat, però requereixen d'un manteniment rigorós. L'aire interior es comprimeix i manté tibant l'embolcall.

1.6 Bigues

Una **biga** és un element d'una estructura dissenyada per a suportar forces en vertical. Per a suportar aquestes forces, la biga ha d'estar en equilibri, és a dir, que no es deformi ni es trenqui a causa de les forces. Això implica que la biga no es pot traslladar (relacionat amb **forces**) ni girar (relacionat amb **moments**). Per tant, les condicions matemàtiques i físiques d'estabilitat són:

- Sumatori de forces en l'eix X ha de ser zero.
- Sumatori de forces en l'eix Y ha de ser zero.
- Sumatori dels moments creats per totes les forces ha de ser zero.

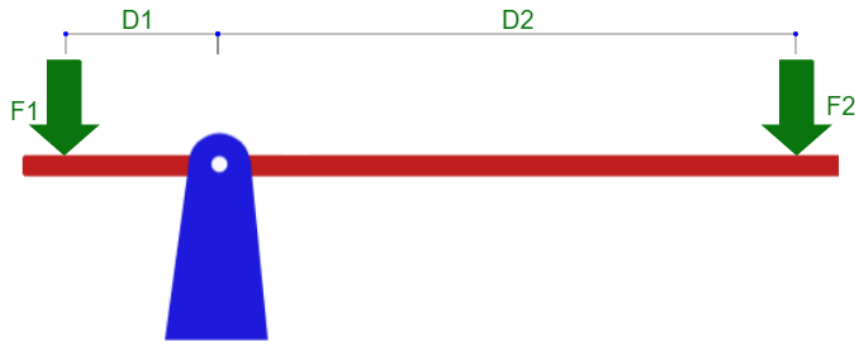
Aquestes condicions descrites anteriorment es coneixen amb el nom d'**estàtica**.

El **moment d'una força** respecte a un punt es el valor de la força per la distància al punt (distància perpendicular per força). Matemàticament s'expressa com:

$$M = F \cdot d$$

Un exemple clar on s'apliquen els moments és en la deducció de la **lleï de la palanca**. Veiem-ho.

Exemple: Si observem el dibuix que es presenta a continuació veiem dues forces F_1 i F_2 que actuen cap a baix i un punt de suport (anomenat fulcre) el qual exerceix una força de reacció



que anomenarem R_y . Com totes les forces F_1 , F_2 i R_y són en l'eix de les Y, les condicions d'estàtica afirmen que:

$$\sum_i F_X = 0$$

$$\sum_i F_Y = 0 \quad \rightarrow \quad R_y = F_1 + F_2$$

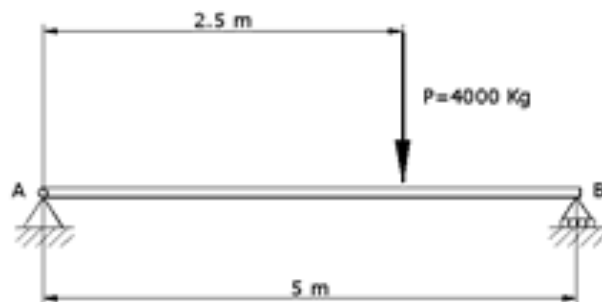
Per altre banda, s'han d'estudiar els moments respecte el fulcre. El moment creat per la força 1 és $M_1 = F_1 \cdot d_1$ i el moment creat per la força 2 és $M_2 = F_2 \cdot d_2$.

D'altre banda, el **criteri de signes dels moments** anuncia que el moment creat per una força que gira en sentit horari és negatiu i el moment creat per una força que gira en sentit antihorari és positiu. Per tant, el moment creat per la força 1 és positiu i el moment creat per la força 2 és negatiu. D'aquesta manera,

$$\sum_i M_i = 0 \quad \rightarrow \quad M_1 + M_2 = 0 \quad \rightarrow \quad F_1 d_1 - F_2 d_2 = 0 \quad \rightarrow \quad F_1 d_1 = F_2 d_2$$

On l'última expressió se la coneix com la llei de la palanca. □

Exemple: Tenim una biga la qual té dos suports simples en els extrems (punts A i B) i se li aplica un pes de 4000 Kg. El nostre objectiu és conèixer quines són les forces de reacció R_A , R_B que exerceixen els suports degut a la força externa aplicada pel pes F_{ext} . Per això, utilitzem les condicions d'estàtica esmentades anteriorment.



Com totes les forces R_A , R_B i F_{ext} són en l'eix de les Y, les condicions d'estàtica afirmen que:

$$\sum_i F_X = 0$$

$$\sum_i F_Y = 0 \quad \rightarrow \quad R_A + R_B = F_{ext}$$

Per altre banda, s'han d'estudiar els moments qualsevol dels punts. Si escollim el punt A, aleshores el moment de $M_{ext} = F_{ext} \cdot 2,5$ i $M_B = R_B \cdot 5$. Per tant, utilitzant el criteri del signes vist anteriorment, s'obté:

$$\sum_i M_i = 0 \quad \rightarrow \quad -M_{ext} + M_B = 0 \quad \rightarrow \quad -F_{ext} \cdot 2,5 + R_B \cdot 5 = 0$$

Si aïllem R_B , obtenim:

$$-F_{ext} \cdot 2,5 + R_B \cdot 5 = 0 \quad \rightarrow \quad R_B = \frac{F_{ext} \cdot 2,5}{5} = \frac{4000 \cdot 9,8 \cdot 2,5}{5} = 19600 \text{ N}$$

Per tant, utilitzant les condicions vistes anteriorment:

$$R_A + R_B = F_{ext} \quad \rightarrow \quad R_A = F_{ext} - R_B = 4000 \cdot 9,8 - 19600 = 19600 \text{ N}$$

□