Capítol 1

Els nombres racionals $\mathbb{Q}$

1.1 Definició

Definim el conjunt dels **nombres racionals** $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}$ on a, b $\in \mathbb{Z}$ i $b \neq 0\}$, és a dir, són aquells nombres que s'expressen en format de fracció de manera que tant el numerador com el denominador són nombres enters $\mathbb{Z}$.

Exemple: $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$, $3 \in \mathbb{Q}$, $\frac{2}{6} \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $\pi \notin \mathbb{Q}$.

Un nombre racional té infinites representacions en forma de fracció però una única representació en format decimal. Veiem el següent exemple:

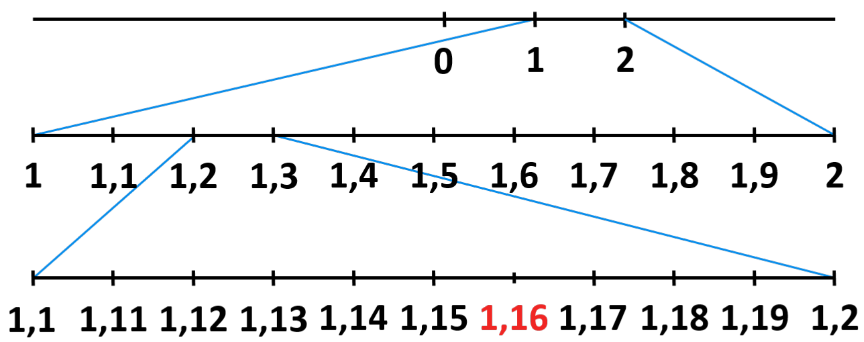
$$\frac{1}{2} = 0,5 = \frac{2}{4} = \frac{15}{30}$$

Direm que dues fraccions $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ són **equivalents** si i només si $ad = cb$.

Exemple: Comprovem si les fraccions $\frac{2}{3}$ i $\frac{4}{6}$ són equivalents. Com que $2 \cdot 6 = 12 = 3 \cdot 4$, aleshores, ambdues fraccions són equivalents.

Entre totes aquestes infinites fraccions n'existeix una que s'anomena la **fracció irreductible** i es troba en el moment que no existeix cap divisor comú entre el numerador i el denominador.

1.2 Representació de $\mathbb{Q}$ a la recta real $\mathbb{R}$



Els nombres reacionals són densos en $\mathbb{R}$ el que vol dir que entre dos nombres racionals sempre n'hi ha un altre. És fàcil comprovar-ho ja que entre dos nombres $a, b \in \mathbb{Q}$ es pot trobar el nombre $c = (a+b)/2$. Per tant, veiem que hi ha infinits nombres racionals.

1.3 Representació com a conjunt

Donats els següents conjunts: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$, $\mathbb{Z} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$, $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$, existeix la següent relació d'inclusió:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

1.4 Representació gràfica

El concepte de fracció és senzill entendre'l de manera gràfica. Donat un espai i una partició **en parts iguals**, aleshores la fracció $\frac{a}{b}$ representa el conjunt de parts seleccionades a sobre el conjunt total b.

1.5 Operacions amb fraccions

1.5.1 Suma i resta

Per a sumar (o restar) dues fraccions $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ sempre es pot realitzar l'operació:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

Exemple

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{12} = \frac{1 \cdot 12 + 2 \cdot 3}{12 \cdot 3} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

Fixa't que realtitzar la suma o la resta de fraccions és una operació delicada ja que per a poder fer-ho serà necessari que els denominadors de les dues fraccions sigui el mateix. Per tant, en moltes ocasions serà necessàri realitzar el mínim comú múltiple dels dos.

Exemple

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{12} = \frac{1 \cdot 4 + 2 \cdot 1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

On $3 = 3$, $12 = 2^2 \cdot 3$, i per tant, mcm(3,12) $= 2^2 \cdot 3 = 12$.

1.5.2 Multiplicació i divisió

Per a multiplicar dues fraccions $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ es realitza l'operació:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Per a dividir dues fraccions $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ es realitza l'operació:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

Exemple

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{12} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$$\frac{1}{3} : \frac{2}{12} = \frac{12}{6} = 2$$

1.5.3 Operacions combinades

Les operacions comentades anteriorment es poden combinar i, per resoldre-les correctament, és necessari seguir la **prioritat de les operacions**. Aquestes prioritats són les següents:

1. Parèntesis o claudators
2. Arrels i potències
3. Multiplicació i divisió
4. Sumes i restes

En el cas que hi hagi dues operacions amb la mateixa prioritat, sempre la farem d'esquerra a dretas.

Exemple

$$(\frac{1}{2} + \frac{2}{12}) : \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{-2}{5} = (\frac{6}{12} + \frac{2}{12}) : \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{-2}{5} = (\frac{8}{12}) : \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{-2}{5} = \frac{2}{3} : \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{-2}{5} =$$
$$= \frac{4}{9} - \frac{1}{4} \cdot \frac{-2}{5} = \frac{4}{9} - \frac{-2}{20} = \frac{4}{9} + \frac{1}{10} = \frac{40}{90} + \frac{9}{90} = \frac{49}{90}$$

Recorda que la següent relació referent a fraccions amb signe: $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} \neq \frac{-a}{-b}$. Finalment, recorda la **llei dels signes** que anuncia:

$$\begin{array}{ll} (+) \cdot (+) = (+) & (+) : (+) = (+) \\ (+) \cdot (-) = (-) & (+) : (-) = (-) \\ (-) \cdot (+) = (-) & (-) : (+) = (-) \\ (-) \cdot (-) = (+) & (-) : (-) = (+) \end{array}$$

1.5.4 Castells de fraccions

El concepte castell de fraccions el podem entendre com fraccions de fraccions. La forma de resoldre'ls no és única però un bon consell és començar per aquella fracció que està més lluny de la fracció principal i anar resolent i simplificant poc a poc fins a arribar a una única fracció on el numerador sigui un nombre racional i el denominador també un nombre racional.

Exemple

$$\frac{\frac{3}{4} + 1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{4}{4}}{\frac{2}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{7}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{7}{4} : \frac{1}{2} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$$

Exercicis

$\boxed{1}$ Comprova si les següents fraccions són equivalents.

a) $\frac{4}{3}$ i $\frac{6}{4}$

b) $\frac{12}{28}$ i $\frac{60}{140}$

c) $\frac{38}{13}$ i $\frac{341}{117}$

$\boxed{2}$ Demostra gràficament que dues fraccions no es poden sumar si no tenen el mateix denominador.

$\boxed{3}$ Resol les següents operacions combinades. Dona el resultat amb la fracció irreductible.

a) $\frac{75}{9} - \frac{2}{3} - \frac{1}{12}$

b) $\frac{31}{7} + \frac{15}{14} - 5 - \frac{11}{28}$

c) $\frac{2}{5} \cdot (\frac{2}{3} + 1)$

d) $(1 - \frac{1}{3}) : (1 - \frac{1}{5})$

e) $\frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}$

f) $\frac{1}{3+\frac{1}{5}} - \frac{2+\frac{1}{4}}{9} + \frac{\frac{4}{7}}{4+\frac{1}{2}}$

g) $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}$

$\boxed{4}$ Un pastor té 5 pans i un altre en té 3. A l'hora de dinar arriba un cacçador que no té menjar, pel que reparteixen els pans entre els tres. El caçador, quan marxa, els dona 8 monedes. Com les haurien de repartir?