Projet CoBRA

Noah Tournier

27/10/2023

1 Géométrie et physique du dirigeable

Liste des paramètres physique et géoométrique :
(a,b,c) dimensions du dirigeable (en m)
a = 1.182m ; b = 0.592m ; c = 0.811m
ρ_{He} : Masse volumique de l'hélium dans le dirigeable (en kg.m^{-3})
$\rho_{He} = 0.1785$ kg.m^{-3}
m_d : Masse totale du dirigeable (en kg)
S_{tot} : Surface totale du dirigeable (en m)
m_{He} : Masse d'hélium (en kg)
$m_S = \dfrac{m_d}{S_{tot}}$: Masse surfacique du dirigeable (en kg.m^{-2})

On cherche à calculer la matrice d'inertie du dirigeable que l'on modélise de cette manière :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{c} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ si } x \geq 0 \\ \frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ si } x \leq 0 \\ z^2 + y^2 = b^2 \end{array}\right.}$$

où a,b et c sont les dimensions du dirigeable

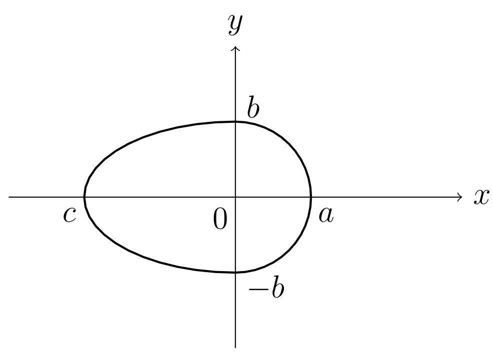


FIGURE 1 – Modélisation du dirigeable de profil

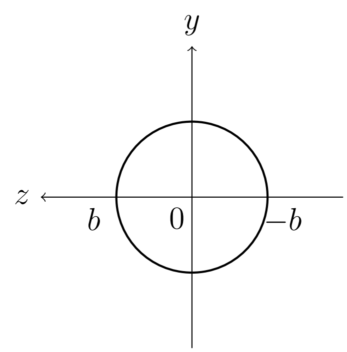
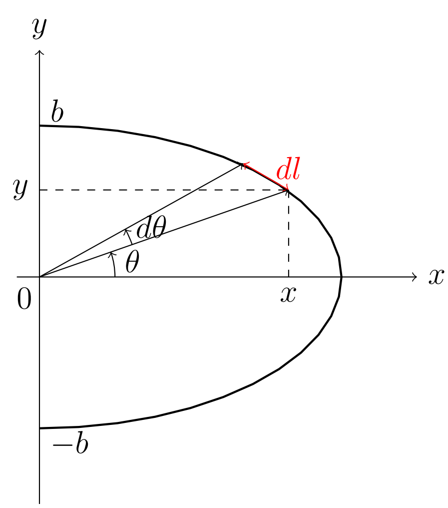


FIGURE 2 – Modélisation du dirigeable de face

Calcul de du dirigeable :

On connait la masse m_d du dirigeable. Calculons donc la surface totale du dirigeable. Comme expliqué précédemment, le dirigeable est composé de deux demi-ellipses.
Retrouvons la surface par le calcul :
Nous allons intégrer en faisant varier l'angle θ entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Il suffit donc de trouver un lien entre dl et dθ.



On sait que : $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$

Or $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{c^2}}$

$\Rightarrow dy = \frac{bx}{c^2\sqrt{1 - \frac{x^2}{c^2}}}dx$

Donc : $dl = \sqrt{1 + \frac{b^2x^2}{c^4(1 - \frac{x^2}{c^2})}}dx$

Cherchons alors le lien entre x et θ.

On sait que $\tan(\theta) = \frac{y}{x} = \frac{b\sqrt{1 - \frac{x^2}{c^2}}}{x}$

$\Rightarrow x = \frac{b}{\sqrt{\tan^2(\theta) + \frac{b^2}{c^2}}}$

$\Rightarrow dx = \frac{b\tan(\theta)}{\cos^2(\theta)(\frac{b^2}{c^2} + \tan^2(\theta))^{\frac{3}{2}}}$

Pour passer à une surface il suffit alors de multiplier dl par $2\pi y$, pour avoir la surface du ruban de largeur dl.

Ainsi, la surface d'une demi-ellipse de révolution de longueur c et de rayon b est :

$$S_c = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi b\sqrt{1 - \frac{b^2}{c^2(\frac{b^2}{c^2} + \tan^2(\theta))} + \frac{b^4}{c^4}\frac{1}{\frac{b^2}{c^2} + \tan^2(\theta)}}\frac{b\tan(\theta)}{\cos^2(\theta)(\frac{b^2}{c^2} + \tan^2(\theta))^{\frac{3}{2}}}d\theta$$

De même pour la demi-ellipse de longueur a :

$$S_a = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi b\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2(\frac{b^2}{a^2} + \tan^2(\theta))} + \frac{b^4}{a^4}\frac{1}{\frac{b^2}{a^2} + \tan^2(\theta)}}\frac{b\tan(\theta)}{\cos^2(\theta)(\frac{b^2}{a^2} + \tan^2(\theta))^{\frac{3}{2}}}d\theta$$

Numériquement :

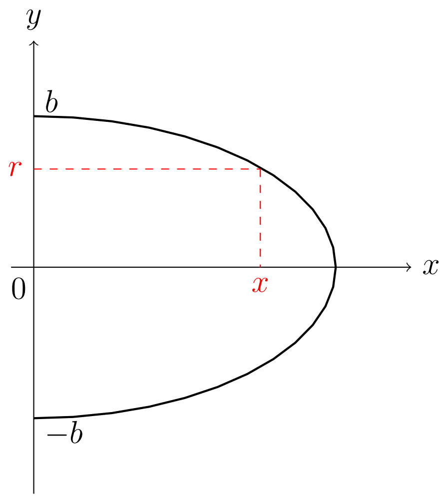
$\boxed{S_c = 2.76m^2}$

$\boxed{S_a = 3.76m^2}$

Donc : $S_{tot} = S_a + S_c = \boxed{6.52m^2}$.

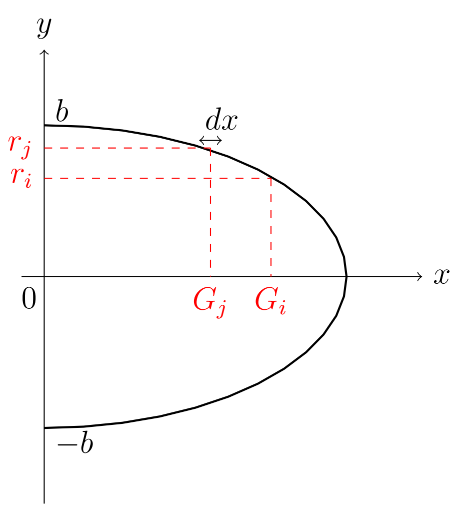
La modélisation CATIA du dirigeable sans l'enveloppe donne une surface de : $S_{mod} = 6.4m^2$. Cette faible différence entre la valeur numérique et la valeur de la modélisation est due à l'enveloppe d'une épaisseur de 100 microns.

2 Calcul de la matrice d'inertie d'une demi-ellipse



r est le rayon d'un cylindre de largeur dx : $\boxed{r = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{c^2}}}$ car $\frac{x^2}{c^2} + \frac{r^2}{b^2} = 1$

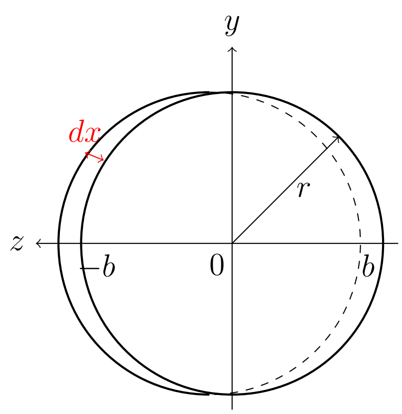
Pour calculer la matrice d'inertie du dirigeable, on calcule d'abord les matrices d'inerties de tous les cylindres infiniments fins entre 0 et c.
On utilise ensuite la formule de Huyghens pour les déplacer au point O.



Matrice d'inertie d'un cylindre de rayon R et de hauteur H :

$$I_{G_i} = \mathrm{m}\begin{pmatrix} \frac{R^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{4}+\frac{H^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R^2}{4}+\frac{H^2}{12} \end{pmatrix} \text{ ici on prend H} \to 0$$

Masse de chaque disque :



Epaisseur : dx
Volume :
$V_d = \pi r^2 \mathrm{d}x$
$\Rightarrow \boxed{m_d = \rho_{He}\pi r^2 \mathrm{d}x}$

On déplace alors les matrices d'inerties de chaque cylindre en O avec la formule de Huyghens :
On sait que :

$$\begin{cases} (x_0, y_0) = (0,0) \\ (x_{G_i}, y_{G_i}) = (0,0) \end{cases}$$

Donc :

$$I_O = m_{He}\begin{pmatrix} \frac{r^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r^2}{4} \end{pmatrix} + m_{He}x\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \end{pmatrix}$$

Soit :

$$\boxed{I_O^{(x)} = \frac{m_{He}r^2}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix} + m_{He}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & x^2 & 0\\ 0 & 0 & x^2\end{pmatrix}}$$

Il suffit alors d'intégrer pour $x \in [0; c]$:

$$\boxed{I_{O_c} = \int_0^c I_O^{(x)}\mathrm{d}x}$$

D'où :

$$I_{O_c} = \int_0^c \frac{\rho_{He}\pi r^2}{2}\frac{r^2}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix} + \frac{\rho_{He}\pi r^2}{2}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & x^2 & 0\\ 0 & 0 & x^2\end{pmatrix}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^c \frac{\rho_{He}\pi b^4}{4}(1-\frac{x^2}{c^2})^2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix} + \frac{\rho_{He}\pi b^2}{2}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & x^2(1-\frac{x^2}{c^2})^2) & 0\\ 0 & 0 & x^2(1-\frac{x^2}{c^2})^2)\end{pmatrix}\mathrm{d}x$$

$= I_1 + I_2$

Où on a :

$$\boxed{I_1 = \frac{\rho_{He}\pi b^4}{4}\begin{pmatrix}\int_0^c(1-\frac{x^2}{c^2})^2\mathrm{d}x & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\int_0^c(1-\frac{x^2}{c^2})^2\mathrm{d}x & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\int_0^c(1-\frac{x^2}{c^2})^2\mathrm{d}x\end{pmatrix}}$$

Et :

$$\boxed{I_2 = \frac{\rho_{He}\pi b^2}{2}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \int_0^c x^2(1-\frac{x^2}{c^2})^2)\mathrm{d}x & 0\\ 0 & 0 & \int_0^c x^2(1-\frac{x^2}{c^2})^2)\mathrm{d}x\end{pmatrix}}$$

Calculons : $\int_0^c (1-\frac{x^2}{c^2})^2\mathrm{d}x$

$$\int_0^c (1-\frac{x^2}{c^2})^2\mathrm{d}x = \int_0^c [1-2\frac{x^2}{c^2}+\frac{x^4}{c^4}]\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \int_0^c (1-\frac{x^2}{c^2})^2\mathrm{d}x = [x-\frac{2c^3}{3c^2}+\frac{c^5}{5c^4}]_0^c$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^c (1-\frac{x^2}{c^2})^2\mathrm{d}x = \frac{8c}{15}}$$

Calculons ensuite : $\int_0^c x^2(1-\frac{x^2}{c^2})^2)\mathrm{d}x$

$$\int_0^c x^2(1-\frac{x^2}{c^2})^2)\mathrm{d}x = \int_0^c x^2 - \frac{x^4}{c^2}$$

$$\Rightarrow \int_0^c x^2(1-\frac{x^2}{c^2})^2)\mathrm{d}x = [\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5c^2}]_0^c$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^c x^2(1-\frac{x^2}{c^2})^2)\mathrm{d}x = \frac{2c^3}{15}}$$

Donc :

$$I_{O_c} = \frac{\rho_{He}\pi b^4}{4}\begin{pmatrix} \frac{8c}{15} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8c}{30} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8c}{30} \end{pmatrix} + \frac{\rho_{He}\pi b^2}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2c^3}{15} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2c^3}{15} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow I_{O_c} = \frac{\rho_{He}\pi b^2}{2}\begin{pmatrix} \frac{8cb^2}{30} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8cb^2}{60} + \frac{2c^3}{15} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8cb^2}{60} + \frac{2c^3}{15} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_{O_c} = \frac{\rho_{He}\pi b^2 c}{15}\begin{pmatrix} 2b^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2+c^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^2+c^2 \end{pmatrix}}$$

De la même manière pour l'autre demi-ellipse on obtient :

$$\boxed{I_{O_a} = \frac{\rho_{He}\pi b^2 a}{15}\begin{pmatrix} 2b^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2+a^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^2+a^2 \end{pmatrix}}$$

Donc la matrice d'inertie du dirigeable en O est :

$$I_O = I_{O_c} + I_{O_a}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_O = \frac{\rho_{He}\pi b^2}{15}\begin{pmatrix} 2b^2(c+a) & 0 & 0 \\ 0 & b^2(c+a)+a^3+c^3 & 0 \\ 0 & 0 & b^2(c+a)+a^3+b^3 \end{pmatrix}}$$

Il suffit alors de déplacer cette matrice d'inertie au centre de gravité G. On sait que le volume total de l'hélium contenu dans le dirigeable est égal à :

$V_{dirigeable} = \frac{4}{6}\pi ab^2 + \frac{4}{6}\pi cb^2$

$\Rightarrow \boxed{V_{dirigeable} = \frac{2}{3}\pi b^2(a+c)}$

Ainsi $\boxed{m_{He} = V_{dirigeable}\rho_{He}}$

D'après la formule de Huyghens :

$$\boxed{I_G = I_O + m_{He}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{3}{8}(c-a))^2 & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{3}{8}(c-a))^2 \end{pmatrix}}$$

<u>AN</u> :
$I_{Gxx} = 0.0183$ kg.m^2
$I_{Gyy} = I_{Gzz} = 0.0428$ kg.m^2