系统工程与电子技术
第 24 卷 第 7 期　Systems Engineering and Electronics　Vol. 24, No. 7 2002

文章编号: 1001-506X(2002)07-0034-03

一种三角模糊数互补判断矩阵的排序方法

姜艳萍, 樊治平
(东北大学工商管理学院, 辽宁 沈阳 110004)

摘　要: 互补判断矩阵是决策者给出两两方案比较的一种偏好信息形式, 有关此方面决策问题的研究近年来引起了重视。针对一类带有三角模糊数的互补判断矩阵的排序问题, 提出了一种新的排序方法。首先给出了关于三角模糊数互补判断矩阵的概念和三角模糊数的运算规则, 然后在此基础上, 通过计算三角模糊数期望值的方法来得到每个方案的排序值, 从而进行方案的排序。该方法具有简单、实用的特点。最后通过一个算例说明了提出的排序方法。

关键词: 互补判断矩阵; 三角模糊数; 期望值; 排序方法
中图分类号: C934　　文献标识码: A

A Ranking Method for Reciprocal Judgement Matrix With Triangular Fuzzy Numbers

JIANG Yan-ping, FAN Zhi-ping
(*School of Business Administration, Northeastern University, Shenyang 110004, China*)

Abstract: Reciprocal judgement matrix is a kind of preference information of pairwise comparison on alternatives given by decision makers. Decision making based on the reciprocal judgement matrix is an important topic. With regard to ranking problems on reciprocal judgement matrix with triangular fuzzy numbers, a new analysis method is presented in this paper. In the method, firstly, the concepts of the reciprocal judgement matrix with triangular fuzzy numbers and the operational rules on triangular fuzzy numbers are introduced, then the ranked value of each alternative is obtained by computing expected values of triangular fuzzy numbers. The method is simple and practical. Finally, a numberical example is given to illustrate the use of the proposed method.

Keywords: Reciprocal judgement matrix; Triangular fuzzy number; Expected value; Ranking method

1　引　言

在多属性决策或群决策问题中, 为了得到方案排序结果, 常常需要决策者给出的偏好信息的形式是两两元素比较的判断矩阵。从判断矩阵中元素构成的方式来看, 通常有两类: 一类是互反判断矩阵(或 AHP 判断矩阵)[1,2], 另一类是互补判断矩阵(或模糊判断矩阵)[3~6]。在实际决策问题中, 由于判断事物的模糊性和不确定性, 这两类判断矩阵中的元素有时无法用确定的数值来表示, 而是需要采用模糊数来表示。目前, 关于三角模糊数互反判断矩阵的研究已经取得了丰硕的成果[7~13], 而关于互补判断矩阵的研究还不多见。本文则是研究基于三角模糊数表示的互补判断矩阵的排序方法。

2　三角模糊数互补判断矩阵

考虑的决策问题是从一个有限方案(或目标、准则)集 $X=\{x_i \mid i\in I,\ I=1,2,\cdots,n,\ n\geqslant 2\}$ 中选择最好的方案或进行方案排序, 其中 x_i 表示第 i 个方案。在方案排序中, 所采用的决策信息是决策者针对方案集 X 提供的两两方案优劣比较的由三角模糊数表示的一类互补判断矩阵。下面给出关于三角模糊数及三角模糊数互补判断矩阵的描述。

定义 1　称 $\tilde{p}=(l,m,u)$ 为三角模糊数, 如果它的隶属函数为 $f_{\tilde{p}}(x): R\rightarrow[0,1]$, 即

$$f_{\tilde{p}}(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant l\\ \dfrac{x-l}{m-l} & l<x\leqslant m\\ \dfrac{x-u}{m-u} & m<x\leqslant u\\ 0 & x>u\end{cases}\tag{1}$$

式中　$x\in R$, $l<m<u$, l 和 u —— 下界和上界, 表示模糊的程度, 并且 $u-l$ 越大, 模糊程度越强。有如下 3 种特殊情况。

收稿日期: 2001-07-19　　修订日期: 2002-01-07
基金项目: 国家自然科学基金(70071004); 国家教育部高等学校优秀青年教师教学科研奖励计划项目(教人司[2002] 123); 辽宁省自然科学基金(002012)资助课题
作者简介: 姜艳萍(1968-), 女, 副教授, 博士后, 主要研究方向为决策分析, 运筹与管理等。

若 $l < m = u$，有

$$f_{\tilde{p}}(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant l\\ \dfrac{x-l}{m-l} & l< x\leqslant m=u\\ 0 & x>u\end{cases}\tag{2}$$

若 $l = m = u$，有

$$f_{\tilde{p}}(x)=\begin{cases}0 & x< l\\ 1 & x=l=m=u\\ 0 & x>u\end{cases}\tag{3}$$

若 $l = m < u$，有

$$f_{\tilde{p}}(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant l\\ \dfrac{x-u}{m-u} & l=m< x\leqslant u\\ 0 & x>u\end{cases}\tag{4}$$

考虑任意两个三角模糊数为 $\tilde{p}_1=(l_1, m_1, u_1)$ 和 $\tilde{p}_2=(l_2, m_2, u_2)$，根据扩展原理[14]，有相应的模糊数运算规则如下。

$$\tilde{p}_1\oplus\tilde{p}_2=(l_1+l_2, m_1+m_2, u_1+u_2)\tag{5}$$

$$\tilde{p}_1\otimes\tilde{p}_2\approx(l_1l_2, m_1m_2, u_1u_2)\tag{6}$$

$$\lambda\otimes\tilde{p}_1=(\lambda l_1, \lambda m_1, \lambda u_1),\ \lambda>0,\ \lambda\in R\tag{7}$$

$$(\tilde{p}_1)^{-1}\approx(1/u_1, 1/m_1, 1/l_1)\tag{8}$$

式中　符号 $\oplus$ 和 $\otimes$ —— 模糊数的加法和乘法运算。

定义 2　设判断矩阵 $\boldsymbol{P}=(\tilde{p}_{ij})_{n\times n}$，其中 $\tilde{p}_{ij}=(l_{ij}, m_{ij}, u_{ij})$，$\tilde{p}_{ji}=(l_{ji}, m_{ji}, u_{ji})$，若满足

（1）$l_{ii}=0.5$，$m_{ii}=0.5$，$u_{ii}=0.5$，$\forall i$；

（2）$l_{ij}+u_{ji}=1$，$m_{ij}+m_{ji}=1$，$u_{ij}+l_{ji}=1$，$i\neq j$，$\forall i, j$，

则称 $\boldsymbol{P}$ 是三角模糊数互补判断矩阵。矩阵中的元素 $\tilde{p}_{ij}$ 表示方案 x_i 优于方案 x_j 的程度。

3　排序方法

假设有 q 个决策者参与决策并针对方案集 X 给出三角模糊数互补判断矩阵（设各决策者在决策中处于平等地位），记第 k 个决策者给出的判断矩阵为 $\boldsymbol{P}^{(k)}=(\tilde{p}_{ij}^{(k)})_{n\times n}$，其中 $\tilde{p}_{ij}^{(k)}=(l_{ij}^{(k)}, m_{ij}^{(k)}, u_{ij}^{(k)})$。基于三角模糊数的运算规则，下面给出关于三角模糊数互补判断矩阵的一种排序方法，其计算步骤如下。

第 1 步　集结各决策者的偏好信息，其计算公式为

$$\begin{aligned}\tilde{p}_{ij}&=(1/q)\otimes(\tilde{p}_{ij}^{(1)}\oplus\tilde{p}_{ij}^{(2)}\oplus\cdots\oplus\tilde{p}_{ij}^{(q)})\\&=((\sum_{k=1}^{q}l_{ij}^{(k)})/q,\ (\sum_{k=1}^{q}m_{ij}^{(k)})/q,\ (\sum_{k=1}^{q}u_{ij}^{(k)})/q),\quad i,j\in I\end{aligned}\tag{9}$$

第 2 步　计算关于方案 x_i 的模糊综合评价值 $\tilde{u}_i$，其计算公式为

$$\tilde{u}_i=(\sum_{j=1}^{n}l_{ij}, \sum_{j=1}^{n}m_{ij}, \sum_{j=1}^{n}u_{ij})\otimes[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}l_{ij}, \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}m_{ij}, \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}u_{ij}]^{-1},\quad i\in I\tag{10}$$

第 3 步　计算模糊评价值 $\tilde{u}_i$ 的期望值。由于评价值 $\tilde{u}_i(i\in I)$ 为三角模糊数，难以直接比较其大小或进行排序，因此，本文将采用文献[15,16]给出的分析方法，首先计算三角模糊数的期望值，然后根据期望值的大小来比较模糊评价值的大小。记得到的方案模糊评价值为 $\tilde{u}_i=(l_i, m_i, u_i)$，其隶属函数的形式由式（1）~式（4）给出。其中，其左隶属函数 $f_{\tilde{u}_i}^{L}(x)=(x-l_i)/(m_i-l_i)$ 和右隶属函数 $f_{\tilde{u}_i}^{R}(x)=(x-u_i)/(m_i-u_i)$ 的逆函数分别为 $g_{\tilde{u}_i}^{L}(y)=l_i+(m_i-l_i)y$ 和 $g_{\tilde{u}_i}^{L}(y)=u_i+(m_i-u_i)y$，显然它们在[0,1]区间上连续，且分别严格递增和递减。则 $\tilde{u}_i$ 的左期望值和右期望值分别为

$$\begin{aligned}I_L(\tilde{u}_i)&=\int_0^1 g_{\tilde{u}_i}^{L}(y)\mathrm{d}y=\int_0^1[l_i+(m_i-l_i)y]\mathrm{d}y\\&=(l_i+m_i)/2,\quad i\in I\end{aligned}\tag{11}$$

$$\begin{aligned}I_R(\tilde{u}_i)&=\int_0^1 g_{\tilde{u}_i}^{R}(y)\mathrm{d}y=\int_0^1[u_i+(m_i-u_i)y]\mathrm{d}y\\&=(m_i+u_i)/2,\quad i\in I\end{aligned}\tag{12}$$

将左、右期望值进行集成可得出关于 $\tilde{u}_i$ 的期望值，即

$$I(\tilde{u}_i)=\eta I_L(\tilde{u}_i)+(1-\eta)I_R(\tilde{u}_i)\tag{13}$$

$$0\leqslant\eta\leqslant1,\quad i\in I$$

式中　η—— 乐观－悲观系数。如果 $\eta>0.5$，表明决策者是悲观的；如果 $\eta=0.5$，表明决策者是中性的；如果 $\eta<0.5$，则表明决策者是乐观的。通常可取 $\eta=0.5$[15]，这样，式(13)可变为

$$I(\tilde{u}_i)=(l_i+2m_i+u_i)/4,\quad i\in I\tag{14}$$

显然，期望值 $I(\tilde{u}_i)$ 越大，表明与其对应的模糊评价值 $\tilde{u}_i$ 越大。

第 4 步　计算排序权向量。为了计算和分析方便，对评价期望值进行规范化，并得到排序权向量，即

$$\boldsymbol{w}_i=I(\tilde{u}_i)/\sum_{i=1}^{n}I(\tilde{u}_i),\quad i\in I\tag{15}$$

式中　$\boldsymbol{w}_i$—— 方案 x_i 的排序权重值。

第 5 步　方案排序。根据 $\boldsymbol{w}_i$ 的大小，可以进行方案排序，$\boldsymbol{w}_i$ 越大，相应的方案越排在前面。

4　算　例

假设 3 个决策者针对决策方案集 $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ 提供的三角模糊数互补判断矩阵分别为

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}(0.5,0.5,0.5) & (0.4,0.6,0.6) & (0.1,0.7,0.7) & (0.3,0.4,0.4)\\(0.4,0.4,0.6) & (0.5,0.5,0.5) & (0.1,0.3,0.4) & (0.3,0.5,0.7)\\(0.3,0.3,0.9) & (0.6,0.7,0.9) & (0.5,0.5,0.5) & (0.1,0.4,0.6)\\(0.6,0.6,0.7) & (0.3,0.5,0.7) & (0.4,0.6,0.9) & (0.5,0.5,0.5)\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}(0.5,0.5,0.5) & (0.3,0.6,0.7) & (0.1,0.7,0.7) & (0.2,0.6,0.6)\\(0.3,0.4,0.7) & (0.5,0.5,0.5) & (0.1,0.2,0.4) & (0.3,0.5,0.6)\\(0.3,0.3,0.9) & (0.6,0.8,0.9) & (0.5,0.5,0.5) & (0.2,0.4,0.6)\\(0.4,0.4,0.8) & (0.4,0.5,0.7) & (0.4,0.6,0.8) & (0.5,0.5,0.5)\end{bmatrix}$$

$$
\boldsymbol{P}_3=\begin{bmatrix}(0.5,0.5,0.5) & (0.5,0.6,0.8) & (0.1,0.7,0.7) & (0.4,0.5,0.5)\\ (0.2,0.4,0.5) & (0.5,0.5,0.5) & (0.1,0.4,0.4) & (0.3,0.5,0.8)\\ (0.3,0.3,0.9) & (0.6,0.6,0.9) & (0.5,0.5,0.5) & (0.3,0.4,0.6)\\ (0.5,0.5,0.6) & (0.2,0.5,0.7) & (0.4,0.6,0.7) & (0.5,0.5,0.5)\end{bmatrix}
$$

首先, 根据式(9), 集结各决策者的偏好信息为

$$
\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}(0.5,0.5,0.5) & (0.4,0.6,0.7) & (0.1,0.7,0.7) & (0.3,0.5,0.5)\\ (0.3,0.4,0.6) & (0.5,0.5,0.5) & (0.1,0.3,0.4) & (0.3,0.5,0.7)\\ (0.3,0.3,0.9) & (0.6,0.7,0.9) & (0.5,0.5,0.5) & (0.2,0.4,0.6)\\ (0.5,0.5,0.7) & (0.3,0.5,0.7) & (0.4,0.6,0.8) & (0.5,0.5,0.5)\end{bmatrix}
$$

根据式(10), 计算每个方案的模糊综合评价值分别为: $\tilde{u}_1=(0.13, 0.29, 0.41)$, $\tilde{u}_2=(0.12, 0.21, 0.38)$, $\tilde{u}_3=(0.16, 0.24, 0.50)$, $\tilde{u}_4=(0.17, 0.26, 0.47)$。然后, 根据式(14)求得 $\tilde{u}_i(i=1,2,3,4)$ 的期望值分别为: $I(\tilde{u}_1)=0.28$, $I(\tilde{u}_2)=0.23$, $I(\tilde{u}_3)=0.29$, $I(\tilde{u}_4)=0.29$。再根据式(15), 得到排序权向量为: $\boldsymbol{w}=(0.258, 0.212, 0.263, 0.267)^T$, 因此, 相应的方案排序结果为: $x_4 \succ x_3 \succ x_1 \succ x_2$。

5 结束语

针对决策者给出的一类带有三角模糊数的互补判断矩阵, 本文提出了一种简单的方案排序方法。可以看出, 该方法具有较强的可操作性和实用性。互补判断矩阵的研究是值得进一步重视的, 相信会有更多的其它排序方法不断出现。

参考文献:

[1] Satty T L. The Analytic Hierarchy Process[M]. New York: McGraw—Hill, 1980.

[2] 王莲芬, 许树柏. 层次分析法引论[M]. 北京: 中国人民大学出版社, 1990.

[3] Orlorski S A. Decision Making with a Fuzzy Preference Relation[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1978, 1: 155—167.

[4] Kacprzyk J. Group Decision Making with a Fuzzy Linguistic Majority[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 18: 105—118.

[5] Tanino T. Fuzzy Preference Orderings in Group Decision Making[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1984, 12: 117—131.

[6] 姚敏, 黄燕君. 模糊决策方法研究[J]. 系统工程理论与实践, 1999, 19(11): 61—64

[7] 姚敏, 张森. 模糊一致矩阵及其在软科学中的应用[J]. 系统工程, 1997, 15(2): 54—57.

[8] Leung L C, Cao D. On Consistency and Ranking of Alternatives in Fuzzy AHP[J]. European Journal of Operational Research, 2000, 124: 102—113.

[9] Chien C J, Tsai H H. Using Fuzzy Numbers to Evaluate Perceived Service Quality[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2000, 116: 289—300.

[10] Chen C T. Extensions of the TOPSIS for Group Decision—Making under Fuzzy Environment[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2000, 114: 1—9.

[11] Kwiesielewicz M. A Note on the Fuzzy Extension of Satty's Priority Theory[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 95: 161—172.

[12] Xu R N, Zhai X Y. Fuzzy Logarithmic Least Squares Ranking Method in Analytic Hierarchy Process[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1996, 77: 175—190.

[13] Chang D Y. Applications of the Extent Analysis Method on Fuzzy AHP[J]. European Journal of Operational Research, 1996, 95: 649—655.

[14] Kaufman A, Gupta M M. Introduction to Fuzzy Arithmetic: Theory and Application[M]. New York: Van Nostrand Reinhold, 1985.

[15] Liou T S, Wang M J. Ranking Fuzzy Numbers with Integral Value[J]. Fuzzy Sets and System, 1992, 50: 247—255.

[16] Kaufman A, Gupta M M. Introduction to Fuzzy Arithmetic: Theory and Applications[M]. New York: Van Nostrand Reinhold, 1985, 141—149.

(上接第 33 页)

[11] Torra V. The Weighted OWA Operator[J]. International Journal of Intelligent Systems, 1997, 12: 153—166.

[12] Filey D, Yager R R. On the Issue of Obtaining OWA Operator Weights[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 94: 157—169.

[13] Xu Z S, Da Q L. The Uncertain OWA Operator[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2002, 17: 569—575.

[14] Xu Z S, Da Q L. The Ordered Weighted Geometric Averaging Operators[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2002, 17: 709—716.

[15] Yager R R, Kacprzyk J, Eds. The Ordered Weighted Averaging Operator: Theory and Applications[M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, MA, 1997.

[16] Saaty T L. The Analytic Hierarchy Process[M]. New York: McGraw—Hill, 1980.

[17] Van Laarhoven P J M, Pedrycz W. A Fuzzy Extension of Saaty's Priority Theory[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1983, 11: 229—241.

[18] Facchinetti G, Ricci R G, Muzziolis. Note on Ranking Fuzzy Triangular Number[J]. International Journal of Intelligent System, 1998, 13: 613—622.

[19] Herrera F, Herrera-Viedma E, Chiclana F. Multiperson Decision-Making Based on Multiplicative Preference Relations[J]. European Journal of Operational Research, 2001, 129: 372—385.

[20] 徐泽水. 模糊互补判断矩阵排序的一种算法[J]. 系统工程学报, 2001, 16(4).