第 16卷第 1期 模 糊 系 统 与 数 学 Vol. 16, No. 1
2002年 3月 Fuzzy Systems and Mathematics Mar., 2002

文章编号: 1001-7402(2002) 01-0047-04

三角模糊数互补判断矩阵的一种排序方法*

徐泽水

(解放军理工大学 理学院,江苏 南京 210016)

摘 要: 给出三角模糊数互补判断矩阵的概念及三角模糊数相互比较的可能度公式,提出一种基于可能度的三角模糊数互补判断矩阵排序方法,通过算例说明该方法的可行性和有效性。

关键词: 三角模糊数互补判断矩阵;可能度;排序
中图分类号: O223; C934 文献标识码: A

1 引言

由于客观事物的不确定性及人类思维的模糊性,近年来,有关模糊决策理论的研究已引起人们的高度重视,并取得了丰硕成果[1-5]。在决策过程中,决策者(专家)往往需对决策方案进行两两比较,并构造判断矩阵,其中,互补判断矩阵[6-18]是一类常见的判断矩阵形式。由于判断的不确定性,当人们在构造互补判断矩阵时,其所得到的判断值有时不是确定的数值点,而是以三角模糊数等模糊形式给出。目前有关这类问题的研究尚未见报道。为此,本文首先给出了三角模糊数互补判断矩阵的概念,以及三角模糊数相互比较的可能度公式,然后提出了一种基于可能度的三角模糊数互补判断矩阵排序方法。通过算例说明了方法的可行性和有效性。

2 主要结果

定义 2.1[19] 若 $a=(a_l, a_m, a_u)$,其中,$0<a_l \leqslant a_m \leqslant a_u$,称 a 为一个三角模糊数,其特征函数(隶属函数)可表示为

$$\mu_a(x)=\begin{cases}\dfrac{x-a_l}{a_m-a_l}, & a_l \leqslant x \leqslant a_m \\ \dfrac{x-a_u}{a_m-a_u}, & a_m \leqslant x \leqslant a_u \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

为方便起见,记 $N=\{1,2,\cdots,n\}$,并给出下列有关三角模糊数的两种运算:

设 $a=(a_l, a_m, a_u)$, $b=(b_l, b_m, b_u)$,则

(1) $a+b=(a_l, a_m, a_u)+(b_l, b_m, b_u)=(a_l+b_l, a_m+b_m, a_u+b_u)$;

(2) $\dfrac{1}{a}=\left(\dfrac{1}{a_u}, \dfrac{1}{a_m}, \dfrac{1}{a_l}\right)$。

定义 2.2[12] 设判断矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$,若 $a_{ij}+a_{ji}=1$, $a_{ij}>0$, $i,j\in N$,则称 A 是互补判断矩阵。

* 收稿日期: 2001-03-19
基金项目: 国防科技预研基金资助项目(00J6.4.2.JB3804);解放军理工大学理学院青年科研基金资助项目
作者简介: 徐泽水(1968-),男,解放军理工大学理学院副教授,东南大学博士研究生,研究方向:运筹学及决策分析等。

定义 2.3 设判断矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，其中，$a_{ij}=(a_{lij},a_{mij},a_{uij})$，$a_{ji}=(a_{lji},a_{mji},a_{uji})$，若

$$a_{lij}+a_{uji}=a_{mij}+a_{mji}=a_{uij}+a_{lji}=1,\quad a_{uij}\geqslant a_{mij}\geqslant a_{lij}>0,\ i,j\in N$$

则称矩阵 A 是三角模糊数互补判断矩阵。

定义 2.4 设 $a=(a_l,a_m,a_u)$，$b=(b_l,b_m,b_u)$，则称

$$p(a\geqslant b)=\lambda\max\left\{1-\max\left(\frac{b_m-a_l}{a_m-a_l+b_m-b_l},0\right),0\right\}+(1-\lambda)\max\left\{1-\max\left(\frac{b_u-a_m}{a_u-a_m+b_u-b_m},0\right),0\right\}\quad(1)$$

为 $a\geqslant b$ 的可能度，其中 $\lambda\in[0,1]$(下同)。类似地，称

$$p(b\geqslant a)=\lambda\max\left\{1-\max\left(\frac{a_m-b_l}{a_m-a_l+b_m-b_l},0\right),0\right\}+(1-\lambda)\max\left\{1-\max\left(\frac{a_u-b_m}{a_u-a_m+b_u-b_m},0\right),0\right\}\quad(2)$$

为 $b\geqslant a$ 的可能度。

易证下列三种定义(定义 2.5 定义 2.6 定义 2.7)是定义 2.4的等价形式。

定义 2.5 设 $a=(a_l,a_m,a_u)$，$b=(b_l,b_m,b_u)$，则称

$$p(a\geqslant b)=\lambda\min\left\{1-\max\left(\frac{a_m-b_l}{a_m-a_l+b_m-b_l},0\right),1\right\}+(1-\lambda)\min\left\{\max\left(\frac{a_u-b_m}{a_u-a_m+b_u-b_m},0\right),0\right\}\quad(3)$$

为 $a\geqslant b$ 的可能度。类似地，称

$$p(b\geqslant a)=\lambda\min\left\{1-\max\left(\frac{b_m-a_l}{a_m-a_l+b_m-b_l},0\right),1\right\}+(1-\lambda)\min\left\{\max\left(\frac{b_u-a_m}{a_u-a_m+b_u-b_m},0\right),0\right\}\quad(4)$$

为 $b\geqslant a$ 的可能度。

定义 2.6 设 $a=(a_l,a_m,a_u)$，$b=(b_l,b_m,b_u)$，则称

$$p(a\geqslant b)=\lambda\frac{\max\{0,a_m-a_l+b_m-b_l-\max(b_m-a_l,0)\}}{a_m-a_l+b_m-b_l}+(1-\lambda)\frac{\max\{0,a_u-a_m+b_u-b_m-\max(b_u-a_m,0)\}}{a_u-a_m+b_u-b_m}\quad(5)$$

为 $a\geqslant b$ 的可能度。类似地，称

$$p(b\geqslant a)=\lambda\frac{\max\{0,a_m-a_l+b_m-b_l-\max(a_m-b_l,0)\}}{a_m-a_l+b_m-b_l}+(1-\lambda)\frac{\max\{0,a_u-a_m+b_u-b_m-\max(a_u-b_m,0)\}}{a_u-a_m+b_u-b_m}\quad(6)$$

为 $b\geqslant a$ 的可能度。

定义 2.7 设 $a=(a_l,a_m,a_u)$，$b=(b_l,b_m,b_u)$，则称

$$p(a\geqslant b)=\lambda\frac{\min\{a_m-a_l+b_m-b_l,\max(a_m-b_l,0)\}}{a_m-a_l+b_m-b_l}+(1-\lambda)\frac{\max\{a_u-a_m+b_u-b_m,\max(a_u-b_m,0)\}}{a_u-a_m+b_u-b_m}\quad(7)$$

为 $a\geqslant b$ 的可能度。类似地，称

$$p(b\geqslant a)=\lambda\frac{\min\{a_m-a_l+b_m-b_l,\max(b_m-a_l,0)\}}{a_m-a_l+b_m-b_l}+(1-\lambda)\frac{\max\{a_u-a_m+b_u-b_m,\max(b_u-a_m,0)\}}{a_u-a_m+b_u-b_m}\quad(8)$$

为 $b\geqslant a$ 的可能度。

注 λ 值的选择取决于决策者的风险态度。当 $\lambda>0.5$时，称决策者是追求风险的；当 $\lambda=0.5$时，称决策者是风险中立的；当 $\lambda<0.5$时，称决策者是厌恶风险的。特别地，当 $\lambda=1$时，称 $p(a\geqslant b)$ 为 $a\geqslant b$ 的悲观可能度；当 $\lambda=0$时，称 $p(a\geqslant b)$为 $a\geqslant b$的乐观可能度。

对于上述四种定义，易证下列结论均成立。

定理 2.1 设 $a=(a_l,a_m,a_u)$，$b=(b_l,b_m,b_u)$，则

(1) $0\leqslant p(a\geqslant b)\leqslant 1$，$0\leqslant p(b\geqslant a)\leqslant 1$

(2) 若 $b_u\leqslant a_l$，则 $p(a\geqslant b)=1$ 类似地，若 $a_u\leqslant b_l$，则 $p(b\geqslant a)=1$

(3) 若 $a_u\leqslant b_l$，则 $p(a\geqslant b)=0$ 类似地，若 $b_u\leqslant a_l$，则 $p(b\geqslant a)=0$

(4) $p(a\geqslant b)+p(b\geqslant a)=1$，特别地，$p(a\geqslant a)=\frac{1}{2}$。

基于可能度概念，我们在下一节将给出三角模糊数互补判断矩阵的一种排序方法

3 三角模糊数互补判断矩阵排序方法

具体步骤如下:

(1) 设对某决策问题,有 n个备选决策方案 $x_1,x_2,\cdots,x_n$. 设专家对 n个备选决策方案进行两两比较,给出三角模糊数互补判断矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, 其中 $a_{ij}=(a_{lij},a_{mij},a_{uij})$, $i,j\in N$.

(2) 计算三角模糊数互补判断矩阵 A的行和并归一化,求出其三角模糊数权重向量 $w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^T$, 其中

$$w_i=\frac{\sum_{j=1}^{n}a_{ij}}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}}=\frac{\sum_{j=1}^{n}(a_{lij},a_{mij},a_{uij})}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{lij},a_{mij},a_{uij})}=\frac{\left(\sum_{j=1}^{n}a_{lij},\sum_{j=1}^{n}a_{mij},\sum_{j=1}^{n}a_{uij}\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{lij},\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{mij},\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{uij}\right)}$$

$$=\left(\frac{\sum_{j=1}^{n}a_{lij}}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{uij}},\frac{\sum_{j=1}^{n}a_{mij}}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{mij}},\frac{\sum_{j=1}^{n}a_{uij}}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{lij}}\right),\quad i\in N \tag{9}$$

(3) 把三角模糊数 $w_i(i\in N)$进行两两比较,利用上节中任一可能度公式求得相应的可能度 $p(w_i\geqslant w_j)$,简记为 p_{ij}, $i,j\in N$,并建立可能度矩阵 $P=(p_{ij})_{n\times n}$. 该矩阵包含了所有方案相互比较的可能度信息。这样,对三角模糊数进行排序就转化为求解可能度矩阵的排序向量。由定理 2.1可知矩阵 P是一个模糊互补判断矩阵。文献[12]、[13]、[16]、[17]已对模糊互补判断矩阵的排序理论进行了深入研究。我们不妨利用文献[16]中给出的一个简洁的排序公式

$$\omega_i=\frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n}p_{ij}+1-\frac{n}{2}\right),\quad i\in N \tag{10}$$

进行求解,得到可能度矩阵 P的排序向量 $\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^T$. 利用该向量对区间数 $w_i(i\in N)$进行排序,并得到相应的方案排序。

(4) 结束。

4 算例分析

设对某决策问题,有四个备选决策方案 x_1,x_2,x_3,x_4. 设专家对决策方案进行两两比较,并构造如下三角模糊互补判断矩阵:

$$A=\begin{bmatrix}(0.5,0.5,0.5) & (0.3,0.5,0.6) & (0.6,0.7,0.9) & (0.5,0.6,0.8)\\(0.4,0.5,0.7) & (0.5,0.5,0.5) & (0.4,0.6,0.8) & (0.5,0.7,0.9)\\(0.1,0.3,0.4) & (0.2,0.4,0.6) & (0.5,0.5,0.5) & (0.2,0.4,0.7)\\(0.2,0.4,0.5) & (0.1,0.6,0.8) & (0.3,0.6,0.8) & (0.5,0.5,0.5)\end{bmatrix}$$

利用(9)式求出矩阵 A的三角模糊数权重向量为

$$w=(w_1,w_2,w_3,w_n)^T$$
$$=((0.181,0.277,0.483),(0.171,0.277,0.500),(0.095,0.193,0.379),(0.105,0.253,0.448))^T$$

对区间数 $w_i(i=1,2,3,4)$进行两两比较,利用第二节中任一可能度公式计算相应的可能度(不妨取 $\lambda=0.5$),并建立可能度矩阵

$$P=\begin{bmatrix}0.5000 & 0.5025 & 0.8390 & 0.6392\\0.4975 & 0.5000 & 0.8214 & 0.6341\\0.1610 & 0.1786 & 0.5000 & 0.3442\\0.3608 & 0.3659 & 0.6558 & 0.5000\end{bmatrix}$$

利用公式(10),求出 P 的排序向量

$$k = (0.3702, 0.3633, 0.0459, 0.2206)^T$$

把 k_i $(i = 1, 2, 3, 4)$按从大到小的顺序排列,即得到 w_i $(i = 1, 2, 3, 4)$的排序为

$$w_1 \succ w_2 \succ w_4 \succ w_3$$

因此,相应的方案排序是 $x_1 \succ x_2 \succ x_4 \succ x_3$.

参考文献:

[1] Zadeh L A. Fuzzy Sets[J]. Information and control, 1965, 8: 338~353.
[2] Zimmermann H J. Fuzzy sets, decision making and expert systems[M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1987.
[3] Chen S M. A new approach to handling fuzzy decision making problems[J]. IEEE Trans. System, Man, Cybernetics, 1988, 18: 1012~1016.
[4] Chen S J, Hwang C L. Fuzzy multiple attribute decision making[M]. Berlin: Springer, 1992.
[5] 汪培庄,李洪兴.模糊系统理论与模糊计算机[M].北京:科学出版社,1996.
[6] Orlovsky S A. Decision-making with a fuzzy preference relation[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1978, 1: 155~167.
[7] Kacprzyk J. Group decision making with a fuzzy linguistic majority[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 18: 105~118.
[8] Herrera F, Herrera-Viedma E, Verdegay J L. A rational consensus model in group decision making using linguistic assessments[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1997, 88: 31~49.
[9] 徐泽水. FUZZY环境中群组AHP决策新方法研究[J].曲阜师范大学学报,1997,23(增刊):1~2.
[10] 徐泽水.一种改进的模糊一致性判断矩阵的构造方法[J].应用数学与计算数学学报,1997,11(2):62~67.
[11] 林钧昌,徐泽水.模糊AHP中一种新标度法[J].运筹与管理,1998,7(2):37~40.
[12] 徐泽水. AHP中两类标度的关系研究[J].系统工程理论与实践,1999,19(7):98~101.
[13] 徐泽水.广义模糊一致性矩阵及其排序方法[J].解放军理工大学学报,2000,6: 97~99.
[14] 徐泽水,达庆利.三种基于互反判断矩阵的互补判断矩阵排序法[J].东南大学学报,2001,31(5):106~109.
[15] 徐泽水,达庆利.衡量判断矩阵相容性的一个通用指标[J].东南大学学报,2001,31(6):94~97.
[16] 徐泽水.模糊互补判断矩阵排序的一种算法[J].系统工程学报,2001,16(4):311~314.
[17] 徐泽水.模糊互补判断矩阵排序的最小方差法[J].系统工程理论与实践,2001,21(10):93~96.
[18] Xu Z S. Two approaches to improving the consistency of complementary judgement matrix[J]. Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. B, 2002, 17(2).
[19] Van Laarhoven P J M, Pedrycz W. A fuzzy extension of Saaty's priority theory[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1983, 11: 229~241.

A Method for Priorities of Triangular Fuzzy Number Complementary Judgement Matrices

XU Ze-shui
(Institute of Sciences, PLA University of Science and Technology, Nanjing 210016, China)

Abstract This paper defines a concept of triangular fuzzy number and gives a possibility degree formula for the comparison between two triangular fuzzy numbers. A possibility-based method for priorities of triangular fuzzy number complementary judgement matrices is provided. Finally, a numerical example is given to show the feasibility and effectiveness of the developed method.

Key words Triangular Fuzzy Number Complementary Judgement Matrix; Possibility; Priority