

文章编号:1003-207(2001)-0116-06

计算层次分析法中排序权值的新方法

金菊良¹, 魏一鸣², 付强³, 丁晶³

(1. 合肥工业大学土木建筑工程学院, 安徽 合肥 230009;

2. 中国科学院科技政策与管理科学研究所, 北京 100080;

3. 四川大学水电学院, 四川 成都 610065)

摘 要:直接从判断矩阵的定义出发,提出了基于加速遗传算法的层次分析法(AGA-AHP),利用该法可同时确定层次各要素的相对重要性的排序权值和进行判断矩阵的一致性检验。理论分析和实例分析的初步结果说明:AGA-AHP法直观、可行且有效,计算简便、精度高;AGA-AHP在系统工程中具有重要的理论意义和广泛的应用价值。

关键词:层次分析法;判断矩阵;遗传算法;系统工程

中图分类号:C931 **文献标识码:**A

在自然科学、工程技术、社会经济、科学管理等复杂系统中存在许多难以完全定量描述的要素,评价、优化这些系统的目标准则一般有多个。层次分析法(the Analytic Hierarchy Process,简称 AHP)是当今处理这类多目标决策问题十分有效而简便的方法,它将人们在决策过程中的思维过程数学化,将人的以主观判断为主的定性分析进行定量化,将各种决策方案之间的差异数值化,从而为选择最优方案提供易于被人接受的决策依据。AHP法不仅简化了复杂系统的分析和计算工作,而且有助于决策者保持思维过程的一致性,特别适用于那些难以全部量化处理的复杂的社会经济问题和大规模工程技术问题,因而得到了极为广泛的应用^[1-3]。

AHP法在实用中存在的主要问题是判断矩阵的权值计算和一致性检验问题,这也是目前 AHP理论研究的热点和难点。为此,本文中把这一问题等价于一非线性优化问题,从而提出了基于加速遗传算法(Accelerating Genetic Algorithm,简称 AGA)^[3]的层次分析新方法(简称 AGA-AHP),并进行了初步的理论分析和实例分析。

1 层次分析法的新计算方法—AGA-AHP

作为一种通用的计算方法,AGA-AHP包括如下5个基本步骤:

步1:对所处理的多目标决策系统建立层次结构模型。不失一般性,这里的层次结构模型由从上到下的目标层A、准则层B和方案层C组成。A层为总目标,只有一个要素,表示系统的总目标。C层为要选用的实现系统总目标的 m 个决策方案 C_1, C_2, \dots, C_m 。B层为评价这些方案实现总目标程度的 n 个准则 B_1, B_2, \dots, B_n 。这里,各层次中的目标、准则或决策方案统称为系统要素。

收稿日期:2001-07-16

基金项目:国家自然科学基金资助项目和长江水利委员会联合资助项目(50099620);国家自然科学基金资助项目(49871018)

作者简介:金菊良(1966-),男(汉族),江苏吴江市人,合肥工业大学土建学院,教授,博士,研究方向:水资源系统工程。

步 2:对 B 层、C 层的要素,分别以各自的上一级层次的要素为准则进行两两比较,通常采用 1~9 级及其倒数的评定标度来描述人们对各要素相对的重要性^[2,3],得到 B 层的判断矩阵为 $B = \{b_{ij} | i, j = 1 \sim n\}_{n \times n}$,元素 b_{ij} 表示从判断准则 A 角度考虑要素 B_i 对要素 B_j 的相对重要性。对应于 B 层要素 B_k 作为准则的 C 层的判断矩阵为 $C^k = \{c_{ij}^k | i, j = 1 \sim m\}_{m \times m}, k = 1 \sim n$ 。

步 3:层次各要素的单排序及其一致性检验,就是要确定同一层次各要素对于上一层次某要素的相对重要性的排序权值,并检验各判断矩阵的一致性。这一步是层次分析法的关键。设 B 层各要素的单排序权值为 $w_k, k = 1 \sim n$,且满足 $w_k > 0$ 和 $\sum_{k=1}^n w_k = 1$ 。根据判断矩阵 B 的定义,理论上

$$b_{ij} = w_i / w_j \quad (i, j = 1 \sim n) \quad (1)$$

这时矩阵 B 具有如下性质:① $b_{ii} = w_i / w_i = 1$;② $b_{ji} = w_j / w_i = 1 / b_{ij}$;③ $b_{ij} b_{jk} = (w_i / w_j)(w_j / w_k) = w_i / w_k = b_{ik}$ 。其中:称性质①为判断矩阵的单位性;称性质②为判断矩阵的倒数性;称性质③为判断矩阵的一致性条件,它表示相互关系可以定量传递,例如,若要素 i 比要素 j 重要 2 倍,要素 j 比要素 k 重要 3 倍,则要素 i 比要素 k 重要 6 倍。性质③是性质①和性质②的充分条件:因为 $b_{ii} b_{ii} = b_{ii}$,所以 $b_{ii} = 1$,这就是性质①;又因为 $b_{ji} b_{ij} = b_{ji}$,所以 $b_{ji} = 1 / b_{ij}$,这就是性质②。

现在的问题就是已知判断矩阵 $B = \{b_{ij}\}_{n \times n}$,来推求各要素的单排序权值 $\{w_k | k = 1 \sim n\}$ 。若判断矩阵 B 满足式(1),决策者能精确度量 w_i / w_j ,即 $b_{ij} = w_i / w_j$,则判断矩阵 B 具有完全的一致性,于是有

基金项目:国家自然科学基金和长江水利委员会联合资助项目(50099620);国家自然科学基金资助项目(49871018)

作者简介:金菊良,1966 年 11 月生,男(汉族),江苏吴江市人,教授,博士,研究方向:水资源系统工程。

$$\sum_{k=1}^n (b_{ik} w_k) = \sum_{k=1}^n (w_i / w_k) w_k = n w_i \quad (i = 1 \sim n) \quad (2)$$

从而

$$\sum_{i=1}^n \left| \sum_{k=1}^n (b_{ik} w_k) - n w_i \right| = 0 \quad (3)$$

式中,||为取绝对值。由于实际系统的复杂性、人们认识上的多样性以及主观上的片面性和不稳定性等,系统要素的重要性度量没有统一和确切的标尺,决策者不可能精确度量 w_i / w_j ,只能对它们进行估计判断。判断矩阵 B 的一致性程度主要取决于判断者对系统各要素的把握程度,对各要素优劣认识得越清楚,一致性程度就越高。正是由于人们对系统各要素的优劣不是很清楚,才需要采用 AHP 法去作出评价,以便更清楚地认识各要素的作用,因此,在实际应用中判断矩阵 B 的一致性条件不满足是客观存在的,是无法完全消除的,AHP 法只要求判断矩阵 B 具有满意的一致性,以适应现实中各种复杂系统。

显然,式(3)左端的值越小则判断矩阵 B 的一致性程度就越高,当式(3)成立时判断矩阵 B 具有完全的一致性。基于此,B 层各要素的单排序及其一致性检验问题可以等价如下优化问题:

$$\min \text{CIF}(n) = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{k=1}^n (b_{ik} w_k) - n w_i \right| / n \quad (4)$$

$$\text{s.t.} \quad w_k > 0, k = 1 \sim n$$

$$\sum_{k=1}^n w_k = 1$$

式中, $CIF(n)$ 称之为一致性指标函数(Consistent Index Function), 单排序权值 $w_k (k=1 \sim n)$ 为优化变量, 其余符号同前。这是一个常规方法较难处理的复杂非线性优化问题, 而用模拟生物优胜劣汰规则与群体内部染色体信息交换机制的加速遗传算法(AGA), 来求解该问题则十分简便而有效。AGA 的具体算法可参见文献^[4]。当 $CIF(n)$ 值小于某一标准值时, 可以认为判断矩阵 B 具有满意的一致性, 据此计算的各要素的单排序权值 w_k 是可以接受的; 否则就需要反复调整判断矩阵 B , 直到具有满意的一致性为止。

同理, 由 C 层各判断矩阵 $\{c_{ij}^k\}_{m \times m}$, 可确定 C 层各要素 i 对应于 B 层 k 要素作为准则的单排序权值 $w_i^k, i=1 \sim m$, 以及相应的一致性指标函数 $CIF^k(m), k=1 \sim n$ 。当 $CIF^k(m)$ 值小于某一标准值时, 可以认为判断矩阵 $\{c_{ij}^k\}_{m \times m}$ 具有满意的一致性, 据此计算的各要素的单排序权值 w_i^k 是可以接受的; 否则就需要反复调整各判断矩阵 $\{c_{ij}^k\}_{m \times m}$, 直到具有满意的一致性为止。

步 4: 层次总排序及其一致性检验, 就是要确定同一层次各要素对于最高层(A 层次)相对重要性的排序权值并检验各判断矩阵的一致性。这一过程是从最高层次到最低层次逐层(从 A 层到 B 层到 C 层)进行的。这里: A 层只有一个要素; B 层各要素的单排序权值 $w_k (k=1 \sim n)$ 和一致性指标函数 $CIF(n)$ 同时也是 B 层次总排序权值和总排序一致性指标函数; C 层各要素 i 的总排序权值为 $w_i^A = \sum_{k=1}^n w_k w_i^k (i=1 \sim m)$, 总排序一致性指标函数为 $CIF^A(m) = \sum_{k=1}^n w_k CIF^k(m)$ 。当 $CIF^A(m)$ 值小于某一标准值时, 可以认为层次总排序结果具有满意的一致性, 据此计算的各要素的总排序权值 w_i^A 是可以接受的; 否则就需要反复调整判断矩阵, 直到具有满意的一致性为止。

步 5: 根据 C 层总排序权值 $w_i^A (i=1 \sim m)$ 的计算结果, 确定各决策方案的优选排序, 从而为决策者选择最优方案提供科学的决策依据。

2 AGA-AHP 的初步分析

判断矩阵排序权值的合理计算是成功应用层次分析法的关键, 目前常用的方法主要有^[1-3,5,6,7]: a) 行和正规化法; b) 列和求逆法; c) 和积法; d) 特征值法; e) 梯度特征值法; f) 对数回归法; g) 最小平方方法; h) 最小偏差法等。其中, 方法 a)、b)、c) 因只考虑判断矩阵一行或一列的影响, 信息利用程度不高, 所以计算精度不高, 常作为其他方法的迭代初值。方法 d) 是目前最常用的方法, 它计算判断矩阵的最大特征根所对应的特征向量并归一化后即作为排序权值, 该法的不足, 一是在权值计算时没有考虑判断矩阵的一致性条件, 权值计算与判断矩阵的一致性检验是分开进行的, 判断矩阵一旦确定, 权值和一致性指标就随之确定、无法改善, 因此是一种“被动”方法; 二是当判断矩阵规模增大或一致性程度变差时, 求解特征值很困难。方法 e) 除具有方法 d) 的上述缺点外, 当判断矩阵不完全一致时, 矩阵元素所处的位置对计算结果的影响是不同的。

AGA-AHP 法和方法 f)、g)、h), 都是利用判断矩阵所有元素的信息、并根据尽可能满足式(1)的一致性条件而构造相应的优化问题来推求排序权值的, 在理论上它们相互等价, 因此, AGA-AHP 具有层次分析法中合理的排序方法应具有的置换不变性、相容性、对称性和完全协调性等优良性

质^[7]。这4种方法对处理不完全一致性甚至残缺判断矩阵和群体专家判断矩阵适应性强,这些方法把权值计算与判断矩阵的一致性检验结合起来,在一致性指标最小化下推求权值,在判断矩阵已定时,通过调整各元素的权值来改进一致性指标值,因此是一类“主动”方法。

但在具体求解排序权值时,AGA-AHP法与方法f)、g)、h)有所不同。后三者在求解相应的优化问题中都存在项 w_i/w_j ,即所求解的排序权值 w_j 出现在分母中,当所求的某个排序权值很小时容易产生较大的计算误差,使得计算结果稳定性差。而AGA-AHP法不存在这种问题,是一种稳健的方法。

AGA-AHP法直接根据判断矩阵的定义导出描述判断矩阵一致性程度的一致性指标函数,而目前AHP法常把判断矩阵的最大特征根与判断矩阵的阶数的差异来度量判断矩阵一致性程度的一致性指标,可见,前者的指标比后者更为直接和合理。另外,经大量的实例计算,我们初步认为,当判断矩阵的一致性指标函数值小于0.10时,可以认为该判断矩阵具有满意的一致性。

3 应用实例

下面以文献[1]中某军工企业在产品结构调整中如何选择最佳支柱民品这一多目标决策问题为例,进一步说明AGA-AHP的应用过程。经过大量的市场调查、市场预测和初步分析研究,得到了相应的层次结构模型^[1],见图1。

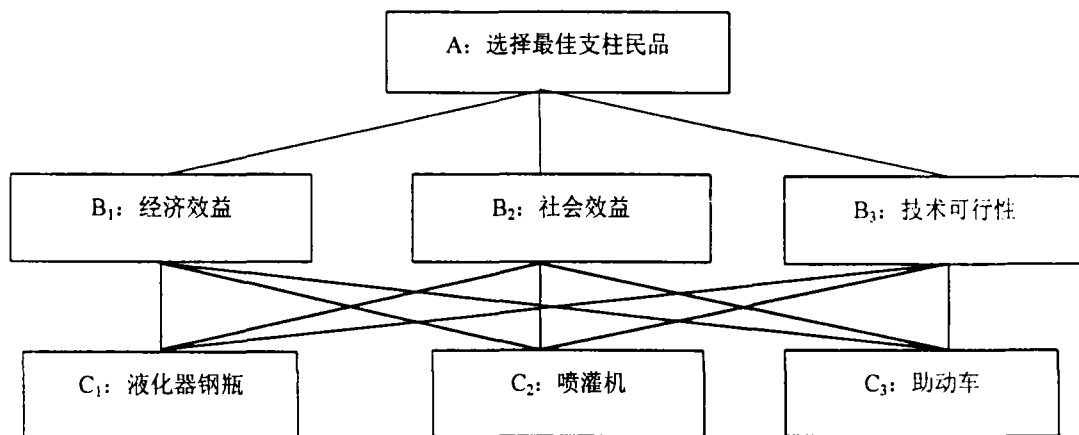


图1 支柱民品方案优选的层次结构模型^[1]

相应于图1的4个判断矩阵为^[1]:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1/3 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}, C^1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1/3 & 1 & 3 \\ 1/5 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}, C^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ 1/3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, C^3 = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 1/5 & 1 & 3 \\ 1/7 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

用AGA-AHP法计算这4个判断矩阵的排序权值,结果见表1。表1中AGA-AHP法的计算结果说明,这4个判断矩阵的一致性指标函数值均小于0.10,因此认为这些判断矩阵具有满意的一致性,于是可得图1中C层各方案 C_1 、 C_2 和 C_3 对于A层相对重要性程度的总排序权值分别为

0.6161、0.2409 和 0.1430,总排序的一致性指标函数值为 0.004。据此可确定最佳支柱民品为液化器钢瓶。这一结果与文献[1]相同,这是该军工企业应用系统工程方法辅助领导进行科学决策,及时进行产品结构调整,迅速实现企业战略转移的一次成功应用^[1]。

表 2 给出了用 AGA 计算判断矩阵 B 的排序权值的过程。

表 1 AGA-AHP 法与特征值法计算判断矩阵排序权值的结果

方法	判断矩阵	排序权值			一致性指标函数值
		w_1	w_2	w_3	
特征值法 ^[1]	B	0.4286	0.4286	0.1428	0.000
AGA-AHP 法	B	0.4286	0.4286	0.1428	0.000
特征值法 ^[1]	C ¹	0.6370	0.2583	0.1047	0.013
AGA-AHP 法	C ¹	0.6404	0.2584	0.1011	0.004
特征值法 ^[1]	C ²	0.5499	0.2402	0.2098	0.006
AGA-AHP 法	C ²	0.5518	0.2412	0.2071	0.004
特征值法 ^[1]	C ³	0.7207	0.1957	0.0835	0.042
AGA-AHP 法	C ³	0.7360	0.1878	0.0761	0.005

表 2 用 AGA 计算判断矩阵 C3 的排序权值

加速 次数	优秀个体的变化区间			最小一致性 指标函数值
	w_1	w_2	w_3	
1	0.000, 1.000	0.000, 1.000	0.000, 1.000	0.069
4	0.734, 0.738	0.183, 0.190	0.075, 0.080	0.006
7	0.735, 0.737	0.187, 0.188	0.076, 0.077	0.005
AGA 结果	0.7360	0.1878	0.0761	0.005
特征值法 ^[1]	0.7207	0.1957	0.0835	0.042

表 1 和表 2 说明:1)当判断矩阵(如矩阵 B)满足一致性条件时,AGA 法计算排序权值的结果与特征值法完全相同,如这里判断矩阵 B 的情况。2)AGA 在排序权值可能取值的区间[0,1]内进行快速自适应全局优化搜索,求解精度高,计算结果稳定。3)在 AGA-AHP 法的计算结果中:B 层准则要素中经济效益、社会效益和技术可行性的排序权值分别为 0.4286、0.4286 和 0.1428,说明该厂在优选民品方案时主要看经济效益和社会效益,两者的权重相等,技术可行性所占权重很少;判断矩阵 C¹、C²、C³ 的排序权值说明,在经济效益准则、社会效益准则或技术可行性准则下,液化器钢瓶方案都比喷灌机方案和助动车方案明显重要,而喷灌机方案又比助动车方案重要一些;因此,层次分析法的最终分析结果认为,这 3 种方案从优到劣依次为液化器钢瓶方案、喷灌机方案和助动车方案,这一结论为厂方领导在决策时提供了重要依据。

4 结 论

系统工程所面对的多目标决策系统是由众多工程技术要素和社会经济要素组成的复杂系统,其中的许多要素是难以完全定量描述的,如何把这些定性要素量化是当今理论研究和应用研究的热点和难点之一。层次分析法是目前处理这类系统的一种简便而有效的方法。在本文中,针对层次分析法中判断矩阵的权值计算问题和一致性问题,提出了基于加速遗传算法的层次分析新方法(AGA-AHP),利用该法可同时计算系统各要素的排序权值和检验判断矩阵的一致性。初步的理论分析和实例分析表明,AGA-AHP法的计算结果的精度明显高于目前常用的基于特征根的AHP法的相应结果。AGA-AHP法具有通用性,在各种具体系统工程实践中具有广泛的应用前景。

参考文献:

- [1] 易进先. 层次分析法在产品结构调整中的应用[J]. 中国管理科学, 1999(专辑): 102 - 106.
- [2] 陈来安, 陆军令. 系统工程原理与应用[M]. 北京: 学术期刊出版社, 1988.
- [3] 汪应洛. 系统工程[M]. (第2版), 北京: 机械工业出版社, 2001.
- [4] 金菊良, 丁晶. 遗传算法及其在水科学中的应用[M]. 成都: 四川大学出版社, 2000.
- [5] 王莲芬. 层次分析法中排序权数的计算方法[J]. 系统工程理论与实践, 1987, (2): 31 - 37.
- [6] 王莲芬. 梯度特征向量排序法的推导与改进[J]. 系统工程理论与实践, 1989, (2): 17 - 21.
- [7] 徐泽水. 层次分析中判断矩阵排序的新方法—广义最小平方方法[J]. 系统工程理论与实践, 1998, (9): 38 - 43.

A New Method for Computing Priority Weights of Analytic Hierarchy Process

JIN Ju - liang¹, WEI Yi - ming², FU Qiang³, DING Jing³

(1. College of Civil Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China;

2. Institute of Policy & Management, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China;

3. College of Hydro-electricity, Sichuan University, Chengdu 610065, China)

Abstract: Directly according to the definition of judgement matrix, in this paper, a new analytic hierarchy process based on accelerating genetic algorithm (AGA - AHP) is presented for multi - object decision - making complex system. The priority weights of hierarchy elements can be determined and the consistency check of judgement matrix can be done at the same time by using AGA - AHP. The results of theoretical analysis and case study show that AGA - AHP is visual, feasible, effective and convenient, that the computational precision of AGA - AHP is high, and that AGA - AHP possesses important theoretical sense and broad application value in systems engineering.

Key words: the analytic hierarchy process; judgement matrix; genetic algorithm; systems engineering