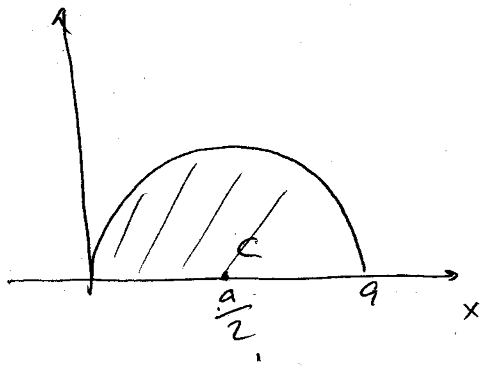
№ 2165

Переходя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл

$\iint\limits_{(S)} y\,dx\,dy$, где S - полукруг диаметра a

с центром в точке $C\left(\frac{a}{2};0\right)$



Решение:

Уравнение окружности с радиусом $\frac{a}{2}$ и центром в $C\left(\frac{a}{2};0\right)$ имеет вид

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{4}$$, $y \geq 0$ (это для перехода к полуокружности)

Сделаем замену $\begin{cases} x = r\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\varphi) \end{cases}$, $J = r$

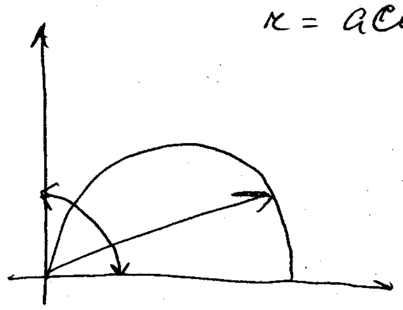
$$x^2-ax+\frac{a^2}{4}+y^2=\frac{a^2}{4}$$

$$x^2-ax+y^2=0$$

$$r^2\cos^2(\varphi)-ar\cos(\varphi)+r^2\sin^2(\varphi)=0$$

$$r^2-ar\cos(\varphi)=0$$

$$r=a\cos(\varphi)$$



Итого, область интегрирования можно задать неравенствами:

$$\begin{cases} 0<\varphi<\frac{\pi}{2} \\ 0<r<a\cos(\varphi) \end{cases}$$

Тогда интеграл имеет вид: $\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{a\cos(\varphi)} r\cdot r\sin(\varphi)\,dr = \int\limits_0^{\pi/2}\sin(\varphi)\,d\varphi\int\limits_0^{a\cos(\varphi)} r^2\,dr =$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\varphi)\cdot\frac{r^3}{3}\Big|_0^{a\cos(\varphi)}d\varphi=\frac{a^3}{3}\int\limits_0^{\pi/2}\sin(\varphi)\cos^3(\varphi)\,d\varphi=-\frac{a^3}{3}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^3(\varphi)\,d\cos(\varphi)=-\frac{a^3}{3}\frac{\cos^4(\varphi)}{4}\Big|_0^{\pi/2}=$$

$$=-\frac{a^3}{12}\left(\cos^4\left(\frac{\pi}{2}\right)-\cos^4(0)\right)=\frac{a^3}{12}$$

Ответ: $a^3/12$.