Análise probabilística

CLRS 5.1, 5.2, C.1 a C.3, 7.1 e 7.2

Máximo

Problema: Encontrar o elemento máximo de
um vetor $A[1\,..\,n]$ de números inteiros positivos distintos.

```
MAX (A, n)
1   max ← 0
2   para i ← 1 até n faça
3       se A[i] > max
4           então max ← A[i]
5   devolva max
```

Quantas vezes a linha 4 é executada?

Máximo

Problema: Encontrar o elemento máximo de um vetor $A[1\,..\,n]$ de números inteiros positivos distintos.

```
MAX (A, n)
1  max ← 0
2  para i ← 1 até n faça
3      se A[i] > max
4          então max ← A[i]
5  devolva max
```

Quantas vezes a linha 4 é executada?

Melhor caso, pior caso, caso médio?

Máximo

Problema: Encontrar o elemento máximo de
um vetor $A[1\,..\,n]$ de números inteiros positivos distintos.

```
MAX (A, n)
1  max ← 0
2  para i ← 1 até n faça
3       se A[i] > max
4            então max ← A[i]
5  devolva max
```

Quantas vezes a linha 4 é executada?

Melhor caso, pior caso, caso médio?

Suponha que $A[1\,..\,n]$ é
permutação aleatória uniforme de $1, \dots, n$.

Máximo

Problema: Encontrar o elemento máximo de
um vetor $A[1\,.\,.\,n]$ de números inteiros positivos distintos.

```
MAX (A, n)
1  max ← 0
2  para i ← 1 até n faça
3      se A[i] > max
4          então max ← A[i]
5  devolva max
```

Quantas vezes a linha 4 é executada?

Melhor caso, pior caso, caso médio?

Suponha que $A[1\,.\,.\,n]$ é
permutação aleatória uniforme de $1, \ldots, n$.

Cada permutação tem probabilidade $1/n!$.

Um pouco de probabilidade

$(\Omega, \mathbb{P})$ espaço de probabilidade
$\Omega =$ conjunto finito (espaço amostral)
$\mathbb{P}\colon \Omega \to [0,1]$ é uma função tal que

p1. $\mathbb{P}(\omega) \geq 0$ *para todo* $\omega \in \Omega$ *e*
p2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
onde $\mathbb{P}(U)$ *é abreviação de* $\displaystyle\sum_{\omega \in U} \mathbb{P}(\omega)$ *para todo* $U \subseteq \Omega$.

Um pouco de probabilidade

$(\Omega, \mathbb{P})$ espaço de probabilidade
Ω = conjunto finito (espaço amostral)
$\mathbb{P} \colon \Omega \to [0,1]$ é uma função tal que

p1. *$\mathbb{P}(\omega) \geq 0$ para todo $\omega \in \Omega$ e*

p2. *$\mathbb{P}(\Omega) = 1$,*

onde $\mathbb{P}(U)$ é abreviação de $\displaystyle\sum_{\omega \in U} \mathbb{P}(\omega)$ para todo $U \subseteq \Omega$.

Note que,

p3. *para quaisquer $R, S \subseteq \Omega$, vale que*
$\mathbb{P}(R \cup S) = \mathbb{P}(R) + \mathbb{P}(S) - \mathbb{P}(R \cap S)$.

Um pouco de probabilidade

$(\Omega, \mathbb{P})$ espaço de probabilidade
$\Omega =$ conjunto finito (espaço amostral)
$\mathbb{P}\colon \Omega \to [0,1]$ é uma função tal que

p1. $\mathbb{P}(\omega) \geq 0$ *para todo* $\omega \in \Omega$ *e*
p2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
onde $\mathbb{P}(U)$ *é abreviação de* $\sum_{\omega \in U} \mathbb{P}(\omega)$ *para todo* $U \subseteq \Omega$.

Note que,

p3. *para quaisquer* $R, S \subseteq \Omega$, *vale que*
$\mathbb{P}(R \cup S) = \mathbb{P}(R) + \mathbb{P}(S) - \mathbb{P}(R \cap S)$.

No problema do máximo:

- Ω é o conjunto das permutações dos números de $1, \ldots, n$;
- na distribuição uniforme, para cada $\omega \in \Omega$, $\mathbb{P}(\omega) = 1/n!$.

Mais um pouco de probabilidade

Um evento é um subconjunto de Ω.

Mais um pouco de probabilidade

Um evento é um subconjunto de Ω.

No problema do máximo,
eventos são subconjuntos de permutações de $1, \ldots, n$.

Exemplo.

$$U := \{\text{permutações de } 1, \ldots, n \text{ em que } A[n] \text{ é máximo}\}$$

é um evento de Ω.

Mais um pouco de probabilidade

Um evento é um subconjunto de Ω.

No problema do máximo,
eventos são subconjuntos de permutações de $1, \ldots, n$.

Exemplo.

$$U := \{\text{permutações de } 1, \ldots, n \text{ em que } A[n] \text{ é máximo}\}$$

é um evento de Ω.

Se $\mathbb{P}$ é a distribuição uniforme, então

$$\mathbb{P}(U) = ???.$$

Mais um pouco de probabilidade

Um evento é um subconjunto de Ω.

No problema do máximo,
eventos são subconjuntos de permutações de $1, \ldots, n$.

Exemplo.

$$U := \{\text{permutações de } 1, \ldots, n \text{ em que } A[n] \text{ é máximo}\}$$

é um evento de Ω.

Se $\mathbb{P}$ é a distribuição uniforme, então

$$\mathbb{P}(U) = \frac{1}{n}.$$

Mais um pouco de probabilidade

Uma variável aleatória é uma função numérica definida sobre o espaço amostral Ω.

Mais um pouco de probabilidade

Uma variável aleatória é uma função numérica definida sobre o espaço amostral Ω.

Exemplo de variável aleatória

$$X(A) := \text{número de execuções da linha 4 em MAX}(A, n)$$

Mais um pouco de probabilidade

Uma variável aleatória é uma função numérica definida sobre o espaço amostral Ω.

Exemplo de variável aleatória

$$X(A) := \text{número de execuções da linha 4 em } \text{MAX}(A, n)$$

"$X = k$" é uma abreviação de $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = k\}$

Esperança $\mathbb{E}[X]$ de uma variável aleatória X

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k \in \mathrm{Im}(X)} k \cdot \mathbb{P}(X = k) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot \mathbb{P}(\omega)$$

Mais um pouco de probabilidade

Uma variável aleatória é uma função numérica definida sobre o espaço amostral Ω.

Exemplo de variável aleatória

$$X(A) := \text{número de execuções da linha 4 em } \text{MAX}(A, n)$$

"$X = k$" é uma abreviação de $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = k\}$

Esperança $\mathbb{E}[X]$ de uma variável aleatória X

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k \in \text{Im}(X)} k \cdot \mathbb{P}(X = k) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot \mathbb{P}(\omega)$$

Linearidade da esperança: $\mathbb{E}[\alpha X + \beta Y] = \alpha \mathbb{E}[X] + \beta \mathbb{E}[Y]$

De volta ao máximo

Problema: Encontrar o elemento máximo de um vetor $A[1\,..\,n]$ de números inteiros distintos.

MAX (A, n)
1 $\quad$ $max \leftarrow 0$
2 $\quad$ **para** $i \leftarrow 1$ **até** n **faça**
3 $\qquad$ **se** $A[i] > max$
4 $\qquad\quad$ **então** $max \leftarrow A[i]$
5 $\quad$ **devolva** max

Quantas vezes a linha 4 é executada no caso médio?

Suponha que
$A[1\,..\,n]$ é permutação aleatória uniforme de $1, \ldots, n$.

Cada permutação tem probabilidade $1/n!$.

Exemplos

$A[1\,..\,2]$	linha 4
1,2	2
2,1	1
$\mathbb{E}[X]$	3/2

$A[1\,..\,3]$	linha 4
1,2,3	3
1,3,2	2
2,1,3	2
2,3,1	2
3,1,2	1
3,2,1	1
$\mathbb{E}[X]$	11/6

Mais um exemplo

$A[1\,..\,4]$	linha 4
1,2,3,4	4
1,2,4,3	3
1,3,2,4	3
1,3,4,2	3
1,4,2,3	2
1,4,3,2	2
2,1,3,4	3
2,1,4,3	2
2,3,1,4	3
2,3,4,1	3
2,4,1,3	2
2,4,3,1	2

$A[1\,..\,4]$	linha 14
3,1,2,4	2
3,1,4,2	2
3,2,1,4	2
3,2,4,1	2
3,4,1,2	2
3,4,2,1	2
4,1,2,3	1
4,1,3,2	1
4,2,1,3	1
4,2,3,1	1
4,3,1,2	1
4,3,2,1	1
$\mathbb{E}[X]$	50/24

Variáveis aleatórias

$$X = \text{número total de execuções da linha 4}$$

Variáveis aleatórias

$$X = \text{número total de execuções da linha 4}$$

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se ``} max \leftarrow A[i] \text{'' é executado} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} X &= \text{número total de execuções da linha 4} \\ &= X_1 + \cdots + X_n \end{aligned}$$

Variáveis aleatórias

$$X = \text{número total de execuções da linha 4}$$

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se ``} max \leftarrow A[i] \text{'' é executado} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} X &= \text{número total de execuções da linha 4} \\ &= X_1 + \cdots + X_n \end{aligned}$$

Esperanças:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_i] &= \text{probabilidade de que } A[i] \text{ seja} \\ &\quad\ \text{máximo em } A[1\,..\,i] \\ &= 1/i \end{aligned}$$

Esperança

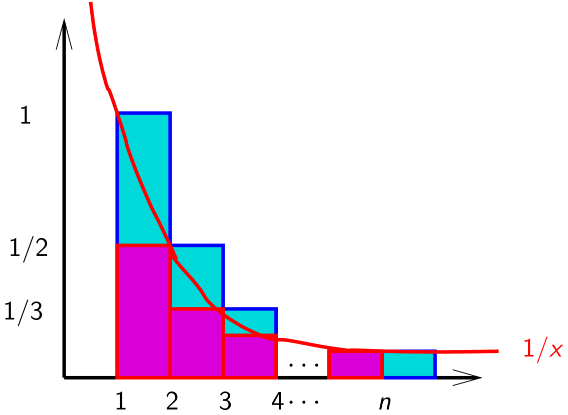
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \mathbb{E}[X_1 + \cdots + X_n] \\
&= \mathbb{E}[X_1] + \cdots + \mathbb{E}[X_n] \\
&= 1/1 + \cdots + 1/n \\
&< 1 + \ln n \\
&= \Theta(\lg n)
\end{aligned}$$

$$2.92 < \frac{1}{1} + \cdots + \frac{1}{10} < 2.93 < 3.30 < 1 + \ln 10$$

$$5.18 < \frac{1}{1} + \cdots + \frac{1}{100} < 5.19 < 6.60 < 1 + \ln 100$$

$$9.78 < \frac{1}{1} + \cdots + \frac{1}{10000} < 9.79 < 10.21 < 1 + \ln 10000$$

Série harmônica



$$\ln n = \int_1^n \frac{dx}{x} < H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$$

$$< 1 + \int_1^n \frac{dx}{x} = 1 + \ln n.$$

De volta ao Quicksort

Rearranja $A[p\,..\,r)$ em ordem crescente.

QUICKSORT (A, p, r)
se $r - p > 1$
  então $q \leftarrow$ PARTICIONE (A, p, r)
    QUICKSORT (A, p, q)
    QUICKSORT $(A, q + 1, r)$

O consumo de tempo do QUICKSORT é $\mathrm{O}(n^2)$ e $\Omega(n \lg n)$.

Por que ele é melhor na prática que
outros algoritmos que têm consumo de tempo $\mathrm{O}(n \lg n)$?

Particione

Rearranja $A[p\,..\,r)$ de modo que $p \leq q < r$ e
$A[p\,..\,q) \leq A[q] < A(q\,..\,r)$

PARTICIONE (A, p, r)

$x \leftarrow A[r-1]$ $\quad\triangleright$ x é o "pivô"
$i \leftarrow p$
para $j \leftarrow p$ **até** $r-2$ **faça**
  se $A[j] \leq x$
    então $A[i] \leftrightarrow A[j]$
      $i \leftarrow i+1$
$A[i] \leftrightarrow A[r-1]$ $\quad\triangleright$ troca com o "pivô"
devolva i

Análise de caso médio

Considere que $A[0\,..\,n)$ é permutação escolhida uniformemente dentre todas as permutações de 1 a n.

Análise de caso médio

Considere que $A[0\,..\,n)$ é permutação escolhida uniformemente dentre todas as permutações de 1 a n.

Seja $X(A)$ o número de vezes que a linha 4 do PARTICIONE é executada para uma chamada de QUICKSORT$(A, 0, n)$.

Observe que X é uma variável aleatória.

Análise de caso médio

Considere que $A[0\,..\,n)$ é permutação escolhida uniformemente dentre todas as permutações de 1 a n.

Seja $X(A)$ o número de vezes que a linha 4 do PARTICIONE é executada para uma chamada de QUICKSORT$(A, 0, n)$.

Observe que X é uma variável aleatória.

Uma maneira de estimarmos o consumo de tempo médio do QUICKSORT é calcularmos $\mathbb{E}[X]$.

Análise de caso médio

Considere que $A[0\,.\,.\,n)$ é permutação escolhida uniformemente dentre todas as permutações de 1 a n.

Seja $X(A)$ o número de vezes que a linha 4 do PARTICIONE é executada para uma chamada de QUICKSORT$(A, 0, n)$.

Observe que X é uma variável aleatória.

Uma maneira de estimarmos o consumo de tempo médio do QUICKSORT é calcularmos $\mathbb{E}[X]$.

Ideia: Escrever X como soma de variáveis aleatórias binárias, cuja esperança é mais fácil de calcular.

Quem serão essas variáveis aleatórias binárias?

Exemplo

1	3	6	2	5	7	4

1	3	2	4	5	7	6

1	2	3	4	5	6	7

	1	2	3	4	5	6	7
1		1	0	1	0	0	0
2	1		1	1	0	0	0
3	0	1		1	0	0	0
4	1	1	1		1	1	1
5	0	0	0	1		1	0
6	0	0	0	1	1		1
7	0	0	0	1	0	1	

Consumo de tempo esperado

Para a e b em $\{1, \ldots, n\}$, seja

$$X_{ab} = \text{número de comparações entre } a \text{ e } b \text{ na linha 4 de PARTICIONE.}$$

Queremos calcular

$$\begin{aligned} X &= \text{total de execuções da linha 4 do PARTICIONE} \\ &= \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{b=a+1}^{n} X_{ab} \end{aligned}$$

Consumo de tempo esperado

Supondo $a < b$,

$$X_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{se o primeiro pivô em } \{a, \dots, b\} \text{ é } a \text{ ou } b \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Qual a probabilidade de X_{ab} valer 1?

Consumo de tempo esperado

Supondo $a < b$,

$$X_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{se o primeiro pivô em } \{a, \ldots, b\} \text{ é } a \text{ ou } b \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Qual a probabilidade de X_{ab} valer 1?

$$\mathbb{E}[X_{ab}] = \mathbb{P}(X_{ab}=1) = \frac{1}{b-a+1} + \frac{1}{b-a+1}$$

Consumo de tempo esperado

Supondo $a < b$,

$$X_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{se o primeiro pivô em } \{a, \ldots, b\} \text{ é } a \text{ ou } b \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Qual a probabilidade de X_{ab} valer 1?

$$\mathbb{E}[X_{ab}] \;= \mathbb{P}(X_{ab}{=}1) \;=\; \frac{1}{b-a+1} + \frac{1}{b-a+1}$$

$$X = \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{b=a+1}^{n} X_{ab}$$

$\mathbb{E}[X] = ????$

Consumo de tempo esperado

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{b=a+1}^{n} \mathbb{E}[X_{ab}] \\
&= \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{b=a+1}^{n} \mathbb{P}(X_{ab}{=}1) \\
&= \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{b=a+1}^{n} \frac{2}{b-a+1} \\
&= \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-a} \frac{2}{k+1} \\
&< \sum_{a=1}^{n-1} 2\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) \\
&< 2n\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) \; < \; 2n\,(1+\ln n)
\end{aligned}
$$

Conclusão

O consumo de tempo esperado do QUICKSORT,
quando sua entrada é uma permutação de $1, \ldots, n$
escolhida uniformemente, é $\mathrm{O}(n \log n)$.