Mais programação dinâmica

CLRS 15.4 e 15.5

= "recursão–com–tabela"
= transformação inteligente de recursão em iteração

Subsequências

$\langle z_1, \ldots, z_k \rangle$ é subsequência de $\langle x_1, \ldots, x_m \rangle$
se existem índices $i_1 < \cdots < i_k$ tais que

$$z_1 = x_{i_1} \quad \ldots \quad z_k = x_{i_k}$$

EXEMPLOS:

$\langle 5, 9, 2, 7 \rangle$ é subsequência de $\langle 9, 5, 6, 9, 6, 2, 7, 3 \rangle$

$\langle$A, A, D, A, A$\rangle$ é subsequência de
$\langle$A, B, R, A, C, A, D, A, B, R, A$\rangle$

A			A			D	A			A
|			|			|	|			|
A	B	R	A	C	A	D	A	B	R	A

Subsequência comum máxima

Z é subseq comum de X e Y

se Z é subsequência de X e de Y

ssco = subseq comum

Subsequência comum máxima

Z é subseq comum de X e Y

se Z é subsequência de X e de Y

ssco $=$ subseq comum

$|Z|$ denota o comprimento da sequência Z

Subsequência comum máxima

Z é subseq comum de X e Y

se Z é subsequência de X e de Y

ssco $=$ subseq comum

$|Z|$ denota o comprimento da sequência Z

Exemplos: $X =$ A B C B D A B

$Y =$ B D C A B A

$Z =$ B C A é uma ssco com $|Z| = 3$

Subsequência comum máxima

Z é subseq comum de X e Y

se Z é subsequência de X e de Y

ssco = subseq comum

$|Z|$ denota o comprimento da sequência Z

Exemplos: $X =$ A B C B D A B

$Y =$ B D C A B A

$Z =$ B C A é uma ssco com $|Z| = 3$

$Z' =$ B D A B é uma ssco com $|Z'| = 4$

Subsequência comum máxima

Z é subseq comum de X e Y

se Z é subsequência de X e de Y

ssco = subseq comum

$|Z|$ denota o comprimento da sequência Z

Exemplos: $X =$ A B C B D A B

$Y =$ B D C A B A

$Z =$ B C A é uma ssco com $|Z| = 3$

$Z' =$ B D A B é uma ssco com $|Z'| = 4$

a ssco $W =$ A B A não pode ser aumentada para uma ssco maior

Subsequência comum máxima

Z é subseq comum de X e Y

se Z é subsequência de X e de Y

ssco = subseq comum

$|Z|$ denota o comprimento da sequência Z

Exemplos: $X =$ A B C B D A B

$Y =$ B D C A B A

$Z =$ B C A é uma ssco com $|Z| = 3$

$Z' =$ B D A B é uma ssco com $|Z'| = 4$

a ssco $W =$ A B A não pode ser aumentada

para uma ssco maior:

não existe uma ssco W' que tenha W como subseq e

com $|W'| > |W|$

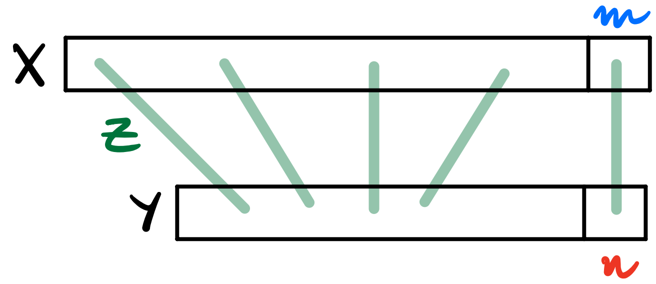
Problema: Longest Common Subsequence

Problema (LCS): Encontrar uma ssco máxima de X e Y.

Subestrutura ótima

Suponha que $Z[1\,..\,k]$ é ssco máxima de $X[1\,..\,m]$ e $Y[1\,..\,n]$.

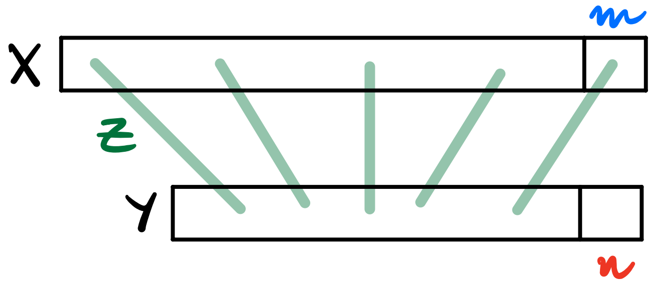
Subestrutura ótima



Suponha que $Z[1\,..\,k]$ é ssco máxima de $X[1\,..\,m]$ e $Y[1\,..\,n]$.

- Se $X[m] = Y[n]$,
  então $Z[k] = X[m] = Y[n]$ e
  $Z[1\,..\,k{-}1]$ é ssco máxima de $X[1\,..\,m{-}1]$ e $Y[1\,..\,n{-}1]$.

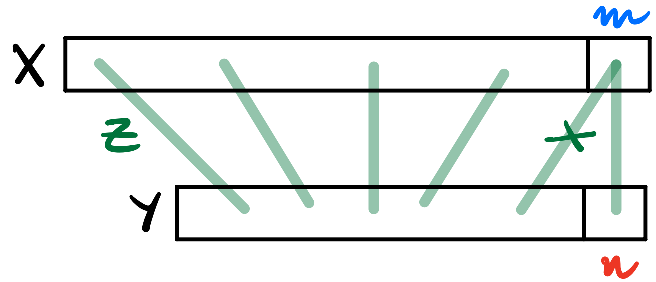
Subestrutura ótima



Suponha que $Z[1\,..\,k]$ é ssco máxima de $X[1\,..\,m]$ e $Y[1\,..\,n]$.

- Se $X[m] = Y[n]$,
  então $Z[k] = X[m] = Y[n]$ e
  $Z[1\,..\,k{-}1]$ é ssco máxima de $X[1\,..\,m{-}1]$ e $Y[1\,..\,n{-}1]$.

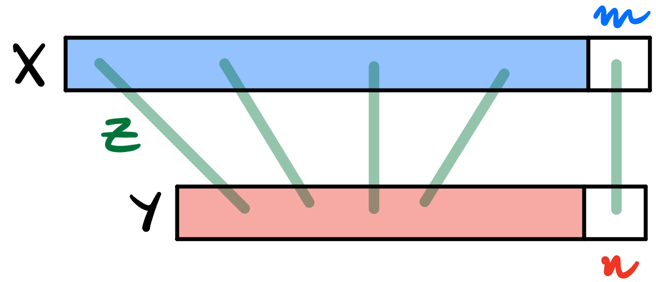
Subestrutura ótima



Suponha que $Z[1\,..\,k]$ é ssco máxima de $X[1\,..\,m]$ e $Y[1\,..\,n]$.

- Se $X[m] = Y[n]$,
  então $Z[k] = X[m] = Y[n]$ e
  $Z[1\,..\,k{-}1]$ é ssco máxima de $X[1\,..\,m{-}1]$ e $Y[1\,..\,n{-}1]$.

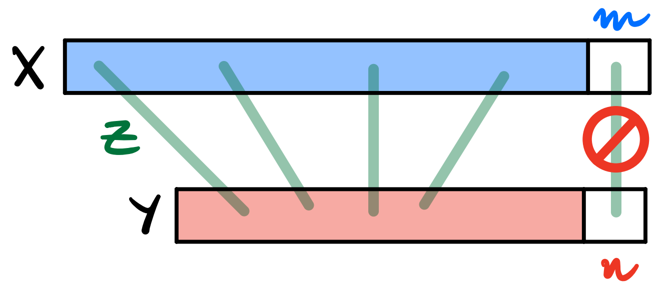
Subestrutura ótima



Suponha que $Z[1\,..\,k]$ é ssco máxima de $X[1\,..\,m]$ e $Y[1\,..\,n]$.

- Se $X[m] = Y[n]$,
  então $Z[k] = X[m] = Y[n]$ e
  $Z[1\,..\,k{-}1]$ é ssco máxima de $X[1\,..\,m{-}1]$ e $Y[1\,..\,n{-}1]$.

Subestrutura ótima



Suponha que $Z[1\,..\,k]$ é ssco máxima de $X[1\,..\,m]$ e $Y[1\,..\,n]$.

- Se $X[m] = Y[n]$,
  então $Z[k] = X[m] = Y[n]$ e
  $Z[1\,..\,k{-}1]$ é ssco máxima de $X[1\,..\,m{-}1]$ e $Y[1\,..\,n{-}1]$.

- Se $X[m] \neq Y[n]$, então $Z[k] \neq X[m]$ ou $Z[k] \neq Y[n]$.

Subestrutura ótima

Suponha que $Z[1\,..\,k]$ é ssco máxima de $X[1\,..\,m]$ e $Y[1\,..\,n]$.

- Se $X[m] = Y[n]$,
  então $Z[k] = X[m] = Y[n]$ e
  $Z[1\,..\,k{-}1]$ é ssco máxima de $X[1\,..\,m{-}1]$ e $Y[1\,..\,n{-}1]$.
- Se $X[m] \neq Y[n]$, então $Z[k] \neq X[m]$ ou $Z[k] \neq Y[n]$.
- Se $X[m] \neq Y[n]$ e $Z[k] \neq X[m]$,
  então $Z[1\,..\,k]$ é ssco máxima de $X[1\,..\,m{-}1]$ e $Y[1\,..\,n]$.

Subestrutura ótima

Suponha que $Z[1\,..\,k]$ é ssco máxima de $X[1\,..\,m]$ e $Y[1\,..\,n]$.

- Se $X[m] = Y[n]$,
  então $Z[k] = X[m] = Y[n]$ e
  $Z[1\,..\,k{-}1]$ é ssco máxima de $X[1\,..\,m{-}1]$ e $Y[1\,..\,n{-}1]$.
- Se $X[m] \neq Y[n]$, então $Z[k] \neq X[m]$ ou $Z[k] \neq Y[n]$.
- Se $X[m] \neq Y[n]$ e $Z[k] \neq X[m]$,
  então $Z[1\,..\,k]$ é ssco máxima de $X[1\,..\,m{-}1]$ e $Y[1\,..\,n]$.
- Se $X[m] \neq Y[n]$ e $Z[k] \neq Y[n]$,
  então $Z[1\,..\,k]$ é ssco máxima de $X[1\,..\,m]$ e $Y[1\,..\,n{-}1]$.

Simplificação

Problema: encontrar o comprimento de uma ssco máxima.

Simplificação

Problema: encontrar o comprimento de uma ssco máxima.

$c[i, j] =$ comprimento de uma ssco máxima de $X[1 \,..\, i]$ e $Y[1 \,..\, j]$

Simplificação

Problema: encontrar o comprimento de uma ssco máxima.

$c[i, j] =$ comprimento de uma ssco máxima de $X[1\,..\,i]$ e $Y[1\,..\,j]$

Recorrência:

$c[0, j] = c[i, 0] = 0$

Simplificação

Problema: encontrar o comprimento de uma ssco máxima.

$c[i,j] =$ comprimento de uma ssco máxima de $X[1\,..\,i]$ e $Y[1\,..\,j]$

Recorrência:

$c[0,j] = c[i,0] = 0$

$c[i,j] = c[i-1,j-1] + 1$ se $X[i] = Y[j]$

Simplificação

Problema: encontrar o comprimento de uma ssco máxima.

$c[i,j] =$ comprimento de uma ssco máxima de $X[1\,..\,i]$ e $Y[1\,..\,j]$

Recorrência:

$$c[0,j] = c[i,0] = 0$$

$$c[i,j] = c[i{-}1,j{-}1] + 1 \text{ se } X[i] = Y[j]$$

$$c[i,j] = \max\left(c[i,j{-}1], c[i{-}1,j]\right) \text{ se } X[i] \neq Y[j]$$

Algoritmo recursivo

Devolve o comprimento de uma ssco máxima de $X[1\,..\,i]$ e $Y[1\,..\,j]$.

REC-LCS-LENGTH (X, i, Y, i)

se $i = 0$ **ou** $j = 0$ **então devolva** 0
se $X[i] = Y[j]$
    então $c[i, j] \leftarrow$ REC-LCS-LENGTH $(X, i{-}1, Y, j{-}1) + 1$
    senão $q_1 \leftarrow$ REC-LCS-LENGTH $(X, i{-}1, Y, j)$
        $q_2 \leftarrow$ REC-LCS-LENGTH $(X, i, Y, j{-}1)$
        se $q_1 \geq q2$
            então $c[i, j] \leftarrow q_1$
            senão$c[i, j] \leftarrow q_2$
devolva $c[i, j]$

Consumo de tempo

$T(m, n) :=$ número de comparações feitas por REC-LCS-LENGTH (X, m, Y, n) no pior caso

Consumo de tempo

$T(m, n) :=$ número de comparações feitas por
REC-LCS-LENGTH (X, m, Y, n) no pior caso

Recorrência

$$
\begin{aligned}
T(0, n) &= 0 \\
T(m, 0) &= 0 \\
T(m, n) &\geq T(m-1, n) + T(m, n-1) + 1 \quad \text{para } n \geq 1 \text{ e } m \geq 1
\end{aligned}
$$

Consumo de tempo

$T(m, n) :=$ número de comparações feitas por REC-LCS-LENGTH (X, m, Y, n) no pior caso

Recorrência

$$
\begin{aligned}
T(0, n) &= 0 \\
T(m, 0) &= 0 \\
T(m, n) &\geq T(m-1, n) + T(m, n-1) + 1 \quad \text{para } n \geq 1 \text{ e } m \geq 1
\end{aligned}
$$

A que classe Ω pertence $T(m, n)$?

Recorrência

Note que $T(m, n) = T(n, m)$ para $n = 0, 1, \ldots$ e $m = 0, 1, \ldots$.

Recorrência

Note que $T(m, n) = T(n, m)$ para $n = 0, 1, \ldots$ e $m = 0, 1, \ldots$.

Seja $k := \min\{m, n\}$. Temos que

$$T(m, n) \geq T(k, k) \geq S(k),$$

onde

$$\begin{aligned} S(0) &= 0 \\ S(k) &= 2S(k-1) + 1 \quad \text{para } k = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Recorrência

Note que $T(m, n) = T(n, m)$ para $n = 0, 1, \ldots$ e $m = 0, 1, \ldots$.

Seja $k := \min\{m, n\}$. Temos que

$$T(m, n) \geq T(k, k) \geq S(k),$$

onde

$$\begin{aligned} S(0) &= 0 \\ S(k) &= 2S(k-1) + 1 \quad \text{para } k = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

$S(k)$ é $\Theta(2^k) \Rightarrow T(m, n)$ é $\Omega(2^{\min\{m,n\}})$

Recorrência

Note que $T(m, n) = T(n, m)$ para $n = 0, 1, \ldots$ e $m = 0, 1, \ldots$.

Seja $k := \min\{m, n\}$. Temos que

$$T(m, n) \geq T(k, k) \geq S(k),$$

onde

$$\begin{aligned} S(0) &= 0 \\ S(k) &= 2S(k-1) + 1 \quad \text{para } k = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

$S(k)$ é $\Theta(2^k) \Rightarrow T(m, n)$ é $\Omega(2^{\min\{m,n\}})$

$T(m, n)$ é exponecial

Conclusão

O consumo de tempo do algoritmo
REC-LEC-LENGTH é $\Omega(2^{\min\{m,n\}})$.

Programação dinâmica

Cada subproblema, comprimento de uma ssco máxima de

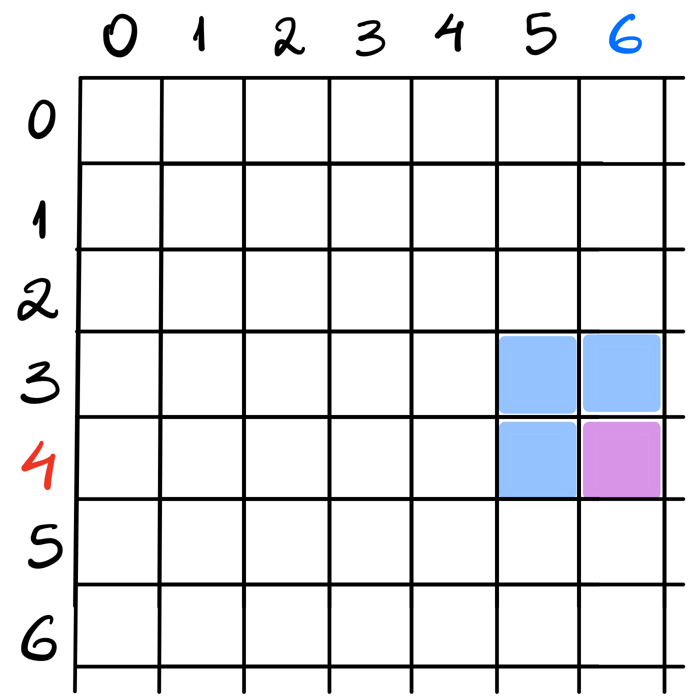
$$X[1\,.\,.\,i] \quad \text{e} \quad Y[1\,.\,.\,j],$$

é resolvido uma só vez.

Em que ordem calcular as entradas da tabela c?

Para calcular $\boxed{c[4,6]}$ preciso de . . .

$\boxed{c[4,5],\ c[3,6] \text{ e de } c[3,5]}$.



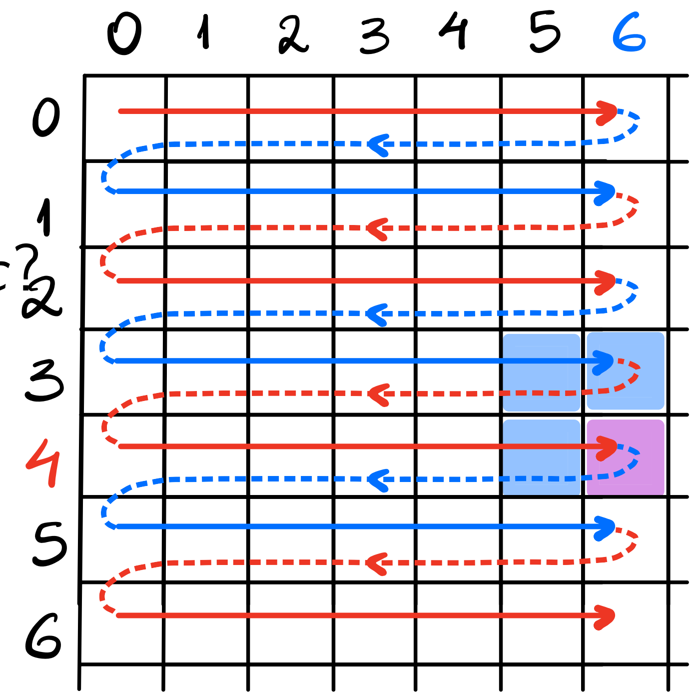
Programação dinâmica

Cada subproblema, comprimento de uma ssco máxima de

$$X[1\,.\,.\,i] \quad \text{e} \quad Y[1\,.\,.\,j],$$

é resolvido uma só vez.

Em que ordem calcular as entradas da tabela c?



Para calcular $c[4, 6]$ preciso de ...

$c[4, 5]$, $c[3, 6]$ e de $c[3, 5]$.

Calcule todos os $c[i, j]$ com $i = 1$ e $j = 0, 1, \ldots, n$,
depois todos com $i = 2$ e $j = 0, 1, \ldots, n$,
depois todos com $i = 3$ e $j = 0, 1, \ldots, n$,
etc.

Simulação

$$c[i,j] = \begin{cases} c[i-1,j-1]+1 & \text{se } X[i] = Y[j] \\ \max\left(c[i,j-1], c[i-1,j]\right) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	??						
B	2	0							
C	3	0							
B	4	0							
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

$$c[i,j] = \begin{cases} c[i-1,j-1]+1 & \text{se } X[i] = Y[j] \\ \max(c[i,j-1], c[i-1,j]) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	??					
B	2	0							
C	3	0							
B	4	0							
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

$$c[i,j] = \begin{cases} c[i-1, j-1] + 1 & \text{se } X[i] = Y[j] \\ \max(c[i, j-1], c[i-1, j]) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	??				
B	2	0							
C	3	0							
B	4	0							
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

$$c[i,j] = \begin{cases} c[i-1, j-1] + 1 & \text{se } X[i] = Y[j] \\ \max\left(c[i, j-1], c[i-1, j]\right) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	??			
B	2	0							
C	3	0							
B	4	0							
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

$$c[i,j] = \begin{cases} c[i-1, j-1] + 1 & \text{se } X[i] = Y[j] \\ \max(c[i, j-1], c[i-1, j]) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	??		
B	2	0							
C	3	0							
B	4	0							
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

$$c[i,j] = \begin{cases} c[i-1, j-1] + 1 & \text{se } X[i] = Y[j] \\ \max\left(c[i, j-1], c[i-1, j]\right) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

X	Y		B	D	C	A	B	A	
		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	??	
B	2	0							
C	3	0							
B	4	0							
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

$$c[i,j] = \begin{cases} c[i-1, j-1] + 1 & \text{se } X[i] = Y[j] \\ \max(c[i, j-1], c[i-1, j]) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

X	Y		B	D	C	A	B	A	
		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	??						
C	3	0							
B	4	0							
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

$$c[i,j] = \begin{cases} c[i-1, j-1] + 1 & \text{se } X[i] = Y[j] \\ \max(c[i, j-1], c[i-1, j]) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	??					
C	3	0							
B	4	0							
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

$$c[i,j] = \begin{cases} c[i-1,j-1]+1 & \text{se } X[i] = Y[j] \\ \max(c[i,j-1], c[i-1,j]) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	??				
C	3	0							
B	4	0							
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

$$c[i,j] = \begin{cases} c[i-1, j-1] + 1 & \text{se } X[i] = Y[j] \\ \max(c[i, j-1], c[i-1, j]) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Y			B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	??			
C	3	0							
B	4	0							
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

$$c[i,j] = \begin{cases} c[i-1, j-1] + 1 & \text{se } X[i] = Y[j] \\ \max\left(c[i, j-1], c[i-1, j]\right) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	??		
C	3	0							
B	4	0							
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

$$c[i,j] = \begin{cases} c[i-1, j-1] + 1 & \text{se } X[i] = Y[j] \\ \max(c[i, j-1], c[i-1, j]) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	??	
C	3	0							
B	4	0							
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

$$c[i,j] = \begin{cases} c[i-1,j-1]+1 & \text{se } X[i] = Y[j] \\ \max\left(c[i,j-1], c[i-1,j]\right) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	??						
B	4	0							
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

$$c[i,j] = \begin{cases} c[i-1,j-1]+1 & \text{se } X[i] = Y[j] \\ \max(c[i,j-1], c[i-1,j]) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

		Y	B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	??					
B	4	0							
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

$$c[i,j] = \begin{cases} c[i-1,j-1]+1 & \text{se } X[i] = Y[j] \\ \max\left(c[i,j-1], c[i-1,j]\right) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	??				
B	4	0							
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

$$c[i,j] = \begin{cases} c[i-1,j-1]+1 & \text{se } X[i] = Y[j] \\ \max(c[i,j-1], c[i-1,j]) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	??			
B	4	0							
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

$$c[i,j] = \begin{cases} c[i-1, j-1] + 1 & \text{se } X[i] = Y[j] \\ \max\left(c[i, j-1], c[i-1, j]\right) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	??		
B	4	0							
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

$$c[i,j] = \begin{cases} c[i-1, j-1] + 1 & \text{se } X[i] = Y[j] \\ \max(c[i, j-1], c[i-1, j]) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	??	
B	4	0							
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

$$c[i,j] = \begin{cases} c[i-1,j-1]+1 & \text{se } X[i] = Y[j] \\ \max(c[i,j-1], c[i-1,j]) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	??						
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

$$c[i,j] = \begin{cases} c[i-1,j-1]+1 & \text{se } X[i] = Y[j] \\ \max\left(c[i,j-1], c[i-1,j]\right) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

X \ Y	i \ j	0	B 1	D 2	C 3	A 4	B 5	A 6
	0	0	0	0	0	0	0	0
A	1	0	0	0	0	1	1	1
B	2	0	1	1	1	1	2	2
C	3	0	1	1	2	2	2	2
B	4	0	1	??				
D	5	0						
A	6	0						
B	7	0						

Simulação

$$c[i,j] = \begin{cases} c[i-1,j-1]+1 & \text{se } X[i] = Y[j] \\ \max(c[i,j-1], c[i-1,j]) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	??				
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

$$c[i,j] = \begin{cases} c[i-1,j-1]+1 & \text{se } X[i] = Y[j] \\ \max\left(c[i,j-1], c[i-1,j]\right) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Y			B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	??			
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

$$c[i,j] = \begin{cases} c[i-1,j-1]+1 & \text{se } X[i] = Y[j] \\ \max\left(c[i,j-1], c[i-1,j]\right) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

X	Y		B	D	C	A	B	A	
		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	??		
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

$$c[i,j] = \begin{cases} c[i-1,j-1]+1 & \text{se } X[i] = Y[j] \\ \max\left(c[i,j-1], c[i-1,j]\right) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	??	
D	5	0							
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

$$c[i,j] = \begin{cases} c[i-1,j-1]+1 & \text{se } X[i] = Y[j] \\ \max(c[i,j-1], c[i-1,j]) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

X	Y		B	D	C	A	B	A	
		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	??						
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

$$c[i,j] = \begin{cases} c[i-1,j-1]+1 & \text{se } X[i] = Y[j] \\ \max(c[i,j-1], c[i-1,j]) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	??					
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

$$c[i,j] = \begin{cases} c[i-1,j-1]+1 & \text{se } X[i] = Y[j] \\ \max\left(c[i,j-1], c[i-1,j]\right) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	??				
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

$$c[i,j] = \begin{cases} c[i-1,j-1]+1 & \text{se } X[i] = Y[j] \\ \max\left(c[i,j-1], c[i-1,j]\right) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	2	??			
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

$$c[i,j] = \begin{cases} c[i-1, j-1] + 1 & \text{se } X[i] = Y[j] \\ \max(c[i, j-1], c[i-1, j]) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

X	Y		B	D	C	A	B	A	
		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	2	2	??		
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

$$c[i,j] = \begin{cases} c[i-1,j-1]+1 & \text{se } X[i] = Y[j] \\ \max\left(c[i,j-1], c[i-1,j]\right) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

X \ Y			B	D	C	A	B	A	
		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	2	2	3	??	
A	6	0							
B	7	0							
	i								

Simulação

$$c[i,j] = \begin{cases} c[i-1,j-1]+1 & \text{se } X[i] = Y[j] \\ \max(c[i,j-1], c[i-1,j]) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	2	2	3	3	
A	6	0	??						
B	7	0							
	i								

Simulação

$$c[i,j] = \begin{cases} c[i-1,j-1]+1 & \text{se } X[i] = Y[j] \\ \max\left(c[i,j-1], c[i-1,j]\right) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	2	2	3	3	
A	6	0	1	??					
B	7	0							
	i								

Simulação

$$c[i,j] = \begin{cases} c[i-1,j-1]+1 & \text{se } X[i] = Y[j] \\ \max(c[i,j-1], c[i-1,j]) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

X	Y		B	D	C	A	B	A	
		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	2	2	3	3	
A	6	0	1	2	??				
B	7	0							
	i								

Simulação

$$c[i,j] = \begin{cases} c[i-1, j-1] + 1 & \text{se } X[i] = Y[j] \\ \max(c[i, j-1], c[i-1, j]) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

X \ Y			B	D	C	A	B	A	
		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	2	2	3	3	
A	6	0	1	2	2	??			
B	7	0							
	i								

Simulação

$$c[i,j] = \begin{cases} c[i-1,j-1]+1 & \text{se } X[i] = Y[j] \\ \max(c[i,j-1], c[i-1,j]) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

X	Y	0	1 (B)	2 (D)	3 (C)	4 (A)	5 (B)	6 (A)
	0	0	0	0	0	0	0	0
A	1	0	0	0	0	1	1	1
B	2	0	1	1	1	1	2	2
C	3	0	1	1	2	2	2	2
B	4	0	1	1	2	2	3	3
D	5	0	1	2	2	2	3	3
A	6	0	1	2	2	3	??	
B	7	0						

Rows indexed by i, columns by j.

Simulação

$$c[i,j] = \begin{cases} c[i-1,j-1]+1 & \text{se } X[i] = Y[j] \\ \max\left(c[i,j-1], c[i-1,j]\right) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	2	2	3	3	
A	6	0	1	2	2	3	3	??	
B	7	0							
	i								

Simulação

$$c[i,j] = \begin{cases} c[i-1,j-1]+1 & \text{se } X[i]=Y[j] \\ \max\left(c[i,j-1], c[i-1,j]\right) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

X	Y	0	B 1	D 2	C 3	A 4	B 5	A 6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	2	2	3	3	
A	6	0	1	2	2	3	3	4	
B	7	0	??						
	i								

Simulação

$$c[i,j] = \begin{cases} c[i-1,j-1]+1 & \text{se } X[i] = Y[j] \\ \max\left(c[i,j-1], c[i-1,j]\right) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	2	2	3	3	
A	6	0	1	2	2	3	3	4	
B	7	0	1	??					
	i								

Simulação

$$c[i,j] = \begin{cases} c[i-1,j-1]+1 & \text{se } X[i] = Y[j] \\ \max(c[i,j-1], c[i-1,j]) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

X	Y		B	D	C	A	B	A	
		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	2	2	3	3	
A	6	0	1	2	2	3	3	4	
B	7	0	1	2	??				
	i								

Simulação

$$c[i,j] = \begin{cases} c[i-1,j-1]+1 & \text{se } X[i] = Y[j] \\ \max(c[i,j-1], c[i-1,j]) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	2	2	3	3	
A	6	0	1	2	2	3	3	4	
B	7	0	1	2	2	??			
	i								

Simulação

$$c[i,j] = \begin{cases} c[i-1,j-1]+1 & \text{se } X[i] = Y[j] \\ \max\left(c[i,j-1], c[i-1,j]\right) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	2	2	3	3	
A	6	0	1	2	2	3	3	4	
B	7	0	1	2	2	3	??		
	i								

Simulação

$$c[i,j] = \begin{cases} c[i-1, j-1] + 1 & \text{se } X[i] = Y[j] \\ \max(c[i, j-1], c[i-1, j]) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

X \ Y			B	D	C	A	B	A	
		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	2	2	3	3	
A	6	0	1	2	2	3	3	4	
B	7	0	1	2	2	3	4	??	
	i								

Simulação

$$c[i,j] = \begin{cases} c[i-1, j-1] + 1 & \text{se } X[i] = Y[j] \\ \max(c[i, j-1], c[i-1, j]) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	0	0	0	0	0	0	0	
A	1	0	0	0	0	1	1	1	
B	2	0	1	1	1	1	2	2	
C	3	0	1	1	2	2	2	2	
B	4	0	1	1	2	2	3	3	
D	5	0	1	2	2	2	3	3	
A	6	0	1	2	2	3	3	4	
B	7	0	1	2	2	3	4	4	
	i								

Simulação

$$c[i,j] = \begin{cases} c[i-1,j-1]+1 & \text{se } X[i] = Y[j] \\ \max\left(c[i,j-1], c[i-1,j]\right) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	
A	1	$\star$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nwarrow$	
B	2	$\star$	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\uparrow$	
C	3	$\star$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	
B	4	$\star$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\uparrow$	
D	5	$\star$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	
A	6	$\star$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	
B	7	$\star$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	
	i								

Algoritmo de programação dinâmica

Devolve o comprimento de
uma ssco máxima de $X[1\,..\,m]$ e $Y[1\,..\,n]$.

LEC-LENGTH (X, m, Y, n)

para $i \leftarrow 0$ **até** m **faça** $c[i, 0] \leftarrow 0$
para $j \leftarrow 1$ **até** n **faça** $c[0, j] \leftarrow 0$
para $i \leftarrow 1$ **até** m **faça**
    para $j \leftarrow 1$ **até** n **faça**
        se $X[i] = Y[j]$
            então $c[i, j] \leftarrow c[i-1, j-1] + 1$
            senão se $c[i-1, j] \geq c[i, j-1]$
                    então $c[i, j] \leftarrow c[i-1, j]$
                    senão $c[i, j] \leftarrow c[i, j-1]$
devolva $c[m, n]$

Algoritmo de programação dinâmica

Devolve o comprimento de
uma ssco máxima de $X[1 \,..\, m]$ e $Y[1 \,..\, n]$.

LEC-LENGTH (X, m, Y, n)

para $i \leftarrow 0$ **até** m **faça** $c[i, 0] \leftarrow 0$
para $j \leftarrow 1$ **até** n **faça** $c[0, j] \leftarrow 0$
para $i \leftarrow 1$ **até** m **faça**
    para $j \leftarrow 1$ **até** n **faça**
        se $X[i] = Y[j]$
            então $c[i, j] \leftarrow c[i-1, j-1] + 1$
            senão se $c[i-1, j] \geq c[i, j-1]$
                    então $c[i, j] \leftarrow c[i-1, j]$
                    senão $c[i, j] \leftarrow c[i, j-1]$
devolva $c[m, n]$

Consumo de tempo: $\mathrm{O}(mn)$

Conclusão

O consumo de tempo do algoritmo
LEC-LENGTH é $\Theta(mn)$.

Subsequência comum máxima

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	
A	1	$\star$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	
B	2	$\star$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	
C	3	$\star$	$\uparrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	
B	4	$\star$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\uparrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	
D	5	$\star$	$\uparrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\uparrow$	$\leftarrow$	
A	6	$\star$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	
B	7	$\star$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\leftarrow$	$\uparrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	
	i								

Subsequência comum máxima

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	
A	1	$\star$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	
B	2	$\star$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	
C	3	$\star$	$\uparrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	
B	4	$\star$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\uparrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	
D	5	$\star$	$\uparrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\uparrow$	$\leftarrow$	
A	6	$\star$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	
B	7	$\star$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\leftarrow$	$\uparrow$	$\nwarrow$	$\boxed{\leftarrow}$	
	i								

Subsequência comum máxima

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	⋆	⋆	⋆	⋆	⋆	⋆	⋆	
A	1	⋆	←	←	←	↖	←	↖	
B	2	⋆	↖	←	←	←	↖	←	
C	3	⋆	↑	←	↖	←	←	←	
B	4	⋆	↖	←	↑	←	↖	←	
D	5	⋆	↑	↖	←	←	↑	←	
A	6	⋆	↑	↑	←	↖	←	↖	
B	7	⋆	↑	↑	←	↑	↖	←	
	i								

Subsequência comum máxima

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	
A	1	$\star$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	
B	2	$\star$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	
C	3	$\star$	$\uparrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	
B	4	$\star$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\uparrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	
D	5	$\star$	$\uparrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\uparrow$	$\leftarrow$	
A	6	$\star$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	
B	7	$\star$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\leftarrow$	$\uparrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	
	i								

Subsequência comum máxima

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	
A	1	$\star$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	
B	2	$\star$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	
C	3	$\star$	$\uparrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	
B	4	$\star$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\uparrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	
D	5	$\star$	$\uparrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\uparrow$	$\leftarrow$	
A	6	$\star$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	
B	7	$\star$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\leftarrow$	$\uparrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	
	i								

Subsequência comum máxima

X	Y		B	D	C	A	B	A	
		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	
A	1	$\star$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	
B	2	$\star$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	
C	3	$\star$	$\uparrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	
B	4	$\star$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\uparrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	
D	5	$\star$	$\uparrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\uparrow$	$\leftarrow$	
A	6	$\star$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	
B	7	$\star$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\leftarrow$	$\uparrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	
	i								

Subsequência comum máxima

	Y		B	D	C	A	B	A	
X		0	1	2	3	4	5	6	j
	0	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	
A	1	$\star$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	
B	2	$\star$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	
C	3	$\star$	$\uparrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	
B	4	$\star$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\uparrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	
D	5	$\star$	$\uparrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\uparrow$	$\leftarrow$	
A	6	$\star$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	
B	7	$\star$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\leftarrow$	$\uparrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	
	i								

Algoritmo de programação dinâmica

LEC-LENGTH (X, m, Y, n)

para $i \leftarrow 0$ **até** m **faça** $c[i,0] \leftarrow 0$
para $j \leftarrow 1$ **até** n **faça** $c[0,j] \leftarrow 0$
para $i \leftarrow 1$ **até** m **faça**
    para $j \leftarrow 1$ **até** n **faça**
        se $X[i] = Y[j]$
            então $c[i,j] \leftarrow c[i-1, j-1] + 1$
                    $b[i,j] \leftarrow$ "$\nwarrow$"
            senão se $c[i-1,j] \leq c[i,j-1]$
                        então $c[i,j] \leftarrow c[i, j-1]$
                                $b[i,j] \leftarrow$ "$\leftarrow$"
                        senão $c[i,j] \leftarrow c[i-1, j]$
                                $b[i,j] \leftarrow$ "$\uparrow$"
devolva c e b

Algoritmo de programação dinâmica

LEC-LENGTH (X, m, Y, n)

para $i \leftarrow 0$ **até** m **faça** $c[i, 0] \leftarrow 0$
para $j \leftarrow 1$ **até** n **faça** $c[0, j] \leftarrow 0$
para $i \leftarrow 1$ **até** m **faça**
  para $j \leftarrow 1$ **até** n **faça**
    se $X[i] = Y[j]$
      então $c[i, j] \leftarrow c[i-1, j-1] + 1$
        $b[i, j] \leftarrow$ "$\nwarrow$"
      senão se $c[i-1, j] \leq c[i, j-1]$
        então $c[i, j] \leftarrow c[i, j-1]$
          $b[i, j] \leftarrow$ "$\leftarrow$"
        senão $c[i, j] \leftarrow c[i-1, j]$
          $b[i, j] \leftarrow$ "$\uparrow$"
devolva c e b

Consumo de tempo: $\mathrm{O}(mn)$

Get-LCS

Get-LCS $(X, m, n, b, \text{máxcomp})$

$k \leftarrow \text{máxcomp}$

$i \leftarrow m$

$j \leftarrow n$

enquanto $i > 0$ **e** $j > 0$ **faça**

  se $b[i,j] = \text{``}\nwarrow\text{''}$

    então $Z[k] \leftarrow X[i]$

      $k \leftarrow k-1 \quad i \leftarrow i-1 \quad j \leftarrow j-1$

    senão se $b[i,j] = \text{``}\leftarrow\text{''}$

      então $i \leftarrow i-1$

      senão $j \leftarrow j-1$

devolva Z

Consumo de tempo é $\mathrm{O}(m+n)$.