РК2 тервер

11 ноября 2023 г. 13:50

1. Дать определение сигма-алгебры событий

Пусть Ω - несчетное мн-во
Класс $\mathcal{A}$ подмножеств из Ω - σ-алгебра событий $\mathcal{A}$, если:
1) если $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$
2) если $A_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \dots$, то $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ тоже должно лежать в этом классе

2. Операции, определенные для случайных событий

Сумма $A+B$ событий A и B - мн-во $A \cup B$
Пр-ие AB событий A и B - мн-во $A \cap B$
Противопол. событие $\bar{A}$ к A - мн-во $\Omega \setminus A$
Разность $A-B$ событий A и B - мн-во $A \setminus B$

3. Дать классическое определение вероятности

1. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$ - конечн. мн-во
2. $P(\omega_k) = \frac{1}{N}$ $\forall k = 1, 2, \dots, N$
(все исходы случ. эксп. равновероятны)
3. если $A = \{\omega_{i1}, \omega_{i2}, \dots, \omega_{ik}\}$, то

$$P(A) = \frac{k}{N}$$

4. Дать аксиоматическое определение вероятности

Элементы A из $\mathcal{A}$ - случ. события
Любая ф-ия из $\mathcal{A}$ в $\mathbb{R}$ - вероятностная, если:
1) $P(A) \geq 0$ $\forall A \in \mathcal{A}$
2) $P(\Omega) = 1$
3) если $A_n \in \mathcal{A}$ $n = 1, 2, \dots$ и $A_k \cdot A_n = \varnothing$ $\forall k \neq n$, то

$$P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

Число $P(A)$ - вероятность события A

5. Сформулировать основные свойства вероятности

Осн. св-ва вероятности:

1) $A \subset B \Rightarrow P(A) \le P(B)$ $\forall A$ и B из $\mathcal{A}$

2) $P(A) \in [0, 1]$ $\forall A \in \mathcal{A}$

3) $P(\varnothing) = 0$

4) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

5) $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

– т-ма сложений для двух событий

6. Определение достоверного события

Мн-во элементарных событий Ω – достоверное

7. Определение невозможного события

Событие $\varnothing$ невозможное событие

8. Определение несовместных событий

События A и B – несовместные, если $AB = \varnothing$
(нет общего исхода)

9. Определение условной вероятности

$P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$ – усл. вер-ть A при условии B

10. Определение независимых событий

События A и B – независ., если
$P(AB) = P(A)P(B)$
или
A не зав. от B, если $P(A|B) = P(A)$
$P(B|A) = P(B)$
События $A_1, \ldots, A_n$ – незав. в сов-ти,
если $\forall\ 1 < k \le n$ и $\forall\ 1 < i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$
$P(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \ldots P(A_{i_k})$

11. Определение полной группы событий

События $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образ. полную группу событий, если
1) $H_1 + H_2 + \ldots + H_n = \Omega$
2) $H_i H_j = 0$ $\forall i \ne j$
$\Rightarrow P(H_1) + \ldots P(H_n) = 1$

12. Теорема умножения

$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_1A_2 \ldots A_{n-1})$

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_1A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n|A_1A_2\cdot\ldots\cdot A_{n-1})$$

13. Теорема сложения

для двух событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

14. Теорема о полной вероятности

Пусть $H_1,\ldots,H_n$ образует полную группу событий. Тогда для $\forall$ события A

$$P(A)=P(A|H_1)P(H_1)+P(A|H_2)\cdot P(H_2)+\ldots+P(A|H_n)P(H_n)$$

15. Теорема Байеса

Пусть $H_1,\ldots,H_n$ образуют полную группу событий, тогда $\forall$ события A

$$P(H_k|A)=\frac{P(A|H_k)P(H_k)}{P(A|H_1)P(H_1)+\ldots+P(A|H_n)P(H_n)},\ k=1,2,\ldots,n$$

16. Теорема Бернулли

Схема Бернулли:

1. исп-ия незав.
2. вер-ть успеха p не меняется от исп-ия к исп-ию

Теорема Бернулли

Обозначим через Y_n число успехов в n испытаниях Бернулли с вер-тью успеха p

Тогда $P\{Y_n=k\}=C_n^k p^k q^{n-k}$ $\quad k=0,1,\ldots,n$

$q=1-p$

17. Следствия из теоремы Бернулли

$$P\{Y_n\geq 1\}=1-q^n$$

$$P\{k_1\leq Y_n\leq k_2\}=\sum_{k=k_1}^{k_2}C_n^k p^k q^{n-k}$$

18. Определение случайной величины, дискретной случайной величины, непрерывной случайной величины

Опр

Пусть есть пр-во элем. событий Ω с σ-алгеброй событий $\mathcal{A}$ и вероятностью P

$\Omega\to\mathbb{R}$ — сл. величина если $\forall x\in\mathbb{R}$

Опр

Пусть есть пр-во элем. событий Ω с σ-алгеброй событий $\mathcal{A}$ и вероятностью P

ф-ия ξ из Ω в $\mathbb{R}$ — случ. величина, если $\forall x \in \mathbb{R}$ $\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{A}$

Опр

Случ. величина — дискретная, если она принимает не более, чем счетное число различн. значений

если мн-во ее возм. значений конечно и счетно

Опр

Случ. величина ξ — непр., если её ф-ию распределения $F(x)$ можно представить в виде

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

$f(t)$ - пл-ть распределения вер-ти ξ

19. Определение функции распределения и плотности распределения вероятностей случайной величины, сформулировать их основные свойства

Ф-ия $F(x) = P\{\xi < x\}, x \in \mathbb{R}$ - ф-ия распределения вероятности случ. величины ξ

Св-ва:

1) $0 \leq F(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
2) $F(x) \leq F(y)$ для $\forall x < y$, $x, y \in \mathbb{R}$ (не убывает)
3) $F(-\infty) = 0 \quad F(+\infty) = 1$
4) $P\{a \leq \xi < b\} = F(b) - F(a)$
5) F непр. слева, т.е. $\lim\limits_{y \to x-0} F(y) = F(x)$

Для непр. случ. величины ф-ия распр-ия:

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

$f(t)$ - пл-ть распр-ия вер-ти ξ

Св-ва:

1) $F'(x) = f(x) \quad \forall x$, где $\exists F'(x)$
2) $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
3) $P\{a \leq \xi < b\} = \int_a^b f(x)\,dx$
4) $P\{x \leq \xi < x + \Delta x\} = f(x)\Delta x + \bar{o}(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$

3) $P\{a \le \xi < b\} = \int_a^b f(x)\,dx$

4) $P\{x \le \xi < x + \Delta x\} = f(x)\Delta x + \bar{o}(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$

5) $P\{\xi = x\} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

6) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

20. Определения математического ожидания и дисперсии случайной величины, сформулировать их основные свойства

для дискр. случ. величины:

Опр Пусть ξ - дискр. случ. величина и пусть

$P\{\xi = x_n\} = p_n \quad n = 1, 2, \dots$

$p_1 + \dots + p_n + \dots = 1$

Число $M\xi = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} x_n p_n$ - мат. ожидание случ. величины ξ при условии, что этот ряд абс. сход.

Опр Число $D\xi = M((\xi - M\xi)^2)$ - дисперсия случ. величины ξ

$D\xi = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n - M\xi)^2 p_n$

для непр. случ. величин

Опр Пусть ξ - непр. случ. велич. с пл-тью $f(x)$

Мат. ожидание ξ - число $M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$ при условии, что этот интеграл абс. сход.

Опр $D\xi = M((\xi - M\xi)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2 f(x)\,dx$

Св-ва мат. ожидание

1) если ξ принимает одно значение C, то $M\xi = C$

2) $M(a\xi + b) = aM\xi + b$, a, b - неслуч. действ. числа

3) $M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$

4) если ξ и η незав. случ. велич., то $M(\xi \cdot \eta) = (M\xi)(M\eta)$

Св-ва дисперсии

1) $D(C) = 0$, $C = const$

2) $D(a\xi + b) = a^2 D\xi$

3) $D\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2$

4) если ξ и η незав., то $D(\xi \pm \eta) = D\xi + D\eta$

3) $D\xi = M(\xi ...)$ ...

4) если ξ и η незав., то $D(\xi \pm \eta) = D\xi + D\eta$

21. Определение биномиальной, пуассоновской, экспоненциальной, нормальной, равномерно распределённой случайной величины, свойства нормальной случайной величины

Дискретные

Опр

Случ. велич. ξ - биномиальная с параметрами $n \in \mathbb{N}$ и $p \in (0,1)$, если

$P\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}$ $\quad k = 0, 1, 2, \ldots, n$

$q = 1 - p$

ξ	x_1	x_2	...
p	p_1	p_2	...

$M\xi = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots$

$M\xi = \sum\limits_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k p^k q^{n-k} = \ldots = n \cdot p$

$D\xi = n \cdot p \cdot q$

Опр

Случ. величина ξ - пуассоновск. с параметрами $\lambda > 0$, если

$P\{\xi = n\} = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$ $\quad n = 0, 1, 2, \ldots$

$M\xi = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = \lambda \cdot e^{-\lambda} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = \ldots = \lambda$

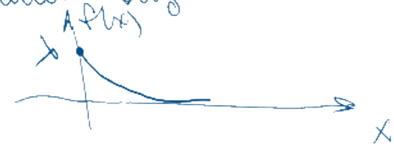
$D\xi = \lambda$

Непрерывные

Опр

Случ. величина - экспоненц. с параметром $\lambda > 0$, если её пл-ть имеет вид

$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$



$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t) dt = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$

$M\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int\limits_{0}^{+\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \ldots = \frac{1}{\lambda}$

$D\xi = \frac{1}{\lambda^2}$

Опр

случ. величина - нормальная с параметрами $M \in \mathbb{R}$ и $\sigma^2 > 0$ если её пл-ть имеет вид

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2}}$, $x \in \mathbb{R}$

$\ldots \quad \frac{1}{\ldots} \quad -\frac{(t-M)^2}{2\sigma^2}$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}$

$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$

$\xi - N(\mu, \sigma^2)$

ξ - норм. случ. величина с параметрами μ и σ^2

($M\xi = \mu$ и $D\xi = \sigma^2$)

<u>Св-ва</u>:

1) $\Phi(x) = \Phi_0(x) + \frac{1}{2}$

2) $\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$

3) $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

4) $F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

5) $M\xi = \mu \quad D\xi = \sigma^2$

<u>Опр</u>

случ. величина ξ ~ равномерно распред. на отрезке $[a,b]$, если её пл-ть имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} &, x \in [a,b] \\ 0 &, x \notin [a,b] \end{cases}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 1 &, x \geq b \\ \frac{x-a}{b-a} &, a < x < b \\ 0 &, x \leq a \end{cases}$$

$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{a}^{b} x \frac{1}{b-a} dx = \frac{b+a}{2}$

$D\xi = \ldots = \frac{(b-a)^2}{12}$

$P\{a \leq \xi \leq b\} = \int_a^b f(x)dx$

22. Теоремы о виде плотности функции от случайной величины

<u>Теорема</u>

Пусть ξ - непр. случ. величина с пл-тью $f(x)$ и пусть $M = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$ - мн-во возм. знач. ξ

Пусть также $y = \varphi(x)$ диф-мая и монотонная ф-ия на мн-ве M

Тогда пл-ть $g(y)$ случ. величины $\eta = \varphi(\xi)$ есть

$$g(y) = \begin{cases} f(\psi(y)) \cdot |\psi'(y)| &, y \in \varphi(M) \\ 0 &, y \notin \varphi(M) \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} \dots & \\ 0, & y \notin \varphi(M) \end{cases}$$

где $\varphi(M) = \{y \in \mathbb{R} : y = \varphi(x),\ x \in M\}$ - мн-во возможн. значений η

<u>Теорема</u>

Пусть ξ - непр. случ. величина с пл-тью $f(x)$ и пусть $M = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$ - мн-во возм. знач. ξ. Пусть также $y = \varphi(x)$ диф-мая ф-ия на мн-ве M

Тогда пл-ть $g(y)$ случ. величины $\eta = \varphi(\xi)$ есть

$$g(y) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{m} f(\psi_k(y)) |\psi_k'(y)|, & y \in \varphi(M) \\ 0, & y \notin \varphi(M) \end{cases}$$

где $\varphi(M) = \{y \in \mathbb{R} : y = \varphi(x),\ x \in M\}$ - мн-во возможн. значений η

$\psi_1(y), \dots, \psi_m(y)$ - обратные ф-ии к $y = \varphi(x)$ в окрестности точки y