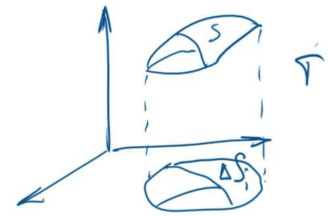
Рк1 тер вер

30 сентября 2023 г. 16:32

1. Дать определение двойного интеграла. Сформулировать его основные свойства.

Рассмотрим $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$

$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D,\ 0 \le z \le f(x,y)\}$



Разобьём область D на n частей

$D = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_n \quad D_i \cap D_j = \varnothing \ \forall i \ne j$

Выбираем $(\xi_k, \eta_k) \in D_k$, $k = 1, \ldots, n$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta S_k$ – интегральная сумма для ф-ии $z = f(x,y)$ по области D

Если $\exists$ конечн. предел интегральной суммы и он не зависит ни от способа разбиения D ни от выбора точки, то он наз. двойным интегралом от ф-ии $z = f(x,y)$ по области D

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{\max \operatorname{diam}(D_k) \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta S_k$$

где $\operatorname{diam}(D_k) = \max |AB|$, $A \in D_k$, $B \in D_k$

Св-ва:

1. если ф-ии $f(x,y), g(x,y)$ интегрир. в области D, то их сумма так же интегрируема в области D

$$\iint_D (f(x,y) + g(x,y))\,dx\,dy = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy + \iint_D g(x,y)\,dx\,dy$$

2. $\iint_D a f(x,y)\,dx\,dy = a \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$

3. $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy + \ldots + \iint_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy$

4. если $f(x,y)$ и $g(x,y)$ интегрируемы в D, $f(x,y) \le g(x,y)$

$$\iint_D f(x,y) \le \iint_D g(x,y)$$

5. если ф-ия $f(x,y)$ интегрируема D и $\forall (x,y) \in D : m \le f(x,y) \le M$

5. если ф-ия $f(x,y)$ интегрируема в D
и $\forall (x,y) \in D: m \leq f(x,y) \leq M$
$m, M \in \mathbb{R}$
$$m S \leq \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy \leq M S,$$
S – площадь области D

2. Дать определение объёма цилиндрического тела.

если ф-ия $z=f(x,y)$ непр. в области D и
$\forall (x,y) \in D: f(x,y) \geq 0$, то объем
цилиндрического тела
$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D, 0 \leq z \leq f(x,y)\}$
= двойному интегралу от ф-ии
$f(x,y)$, взятого по области D
$$V = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$$

3. Сформулировать теоремы о сведении двойного интеграла к повторному в декартовых координатах в случае прямоугольной и криволинейной области.

(Пусть D - прямоуг. со сторон. || к-ным осям)

Пусть $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$

и $\exists \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy \Rightarrow$

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy$$

Пусть $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: a\le x\le b,\ \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}$

и пусть $\exists \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy \Rightarrow$

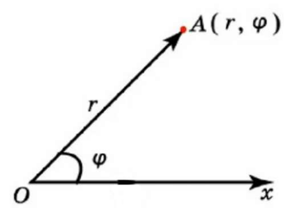
$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$$

Пусть $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: c\le y\le d,\ \varphi_1(y)\le x\le\varphi_2(y)\}$

и пусть $\exists \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy \Rightarrow$

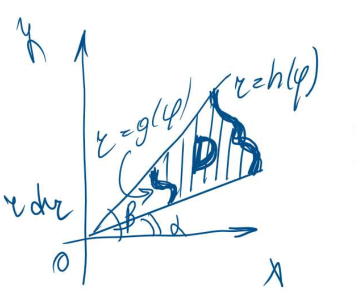
$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_c^d dy\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\,dx$$

4. Дать определение полярных координат. Выписать формулу перехода в двойном интеграле в полярных координатах.

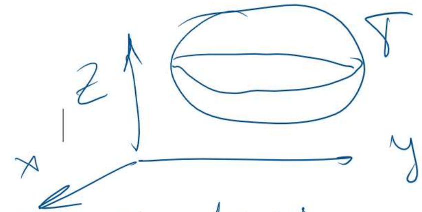


Полярная система координат- система плоских координат, образованная направленным лучом OX, называющимся полярной осью. Каждая точка плоскости задается полярным углом и полярным радиусом.

$$\iint f(x,y)\,dx\,dy=\int_\alpha^\beta d\varphi\int_{g(\varphi)}^{h(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr$$



5. Дать определение массы тела.



$f(x, y, z)$ — ин-ть T

$T = T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_n \qquad T_i \cap T_j = \varnothing \quad \forall i \neq j$

$(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \in T_k \qquad k = 1, \ldots, n$

$$M \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot \Delta V(T_k) \xrightarrow[\substack{1 \le k \le n}]{} \max \operatorname{diam}(T_k) \to 0$$

$$\iiint_T f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

6. Дать определение тройного интеграла. Сформулировать его основные свойства.

Начало как в прошлом

Если $\exists$ конечный предел интегральной суммы и он не зависит ни от способа разбиения области T, ни от выбора точки в области T_i, то

$$\lim_{\substack{\max(\operatorname{diam} T_i) \to 0 \\ 1 \le k \le n}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \Delta V_i = \iiint_T f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

Св-ва:

1) если ф-ии $f(x,y,z)$ и $g(x,y,z)$ интегрир. в области τ, то их сумма так же интегрируема в области τ:

$$\iiint\limits_{\tau}(f(x,y,z)+g(x,y,z))\,dxdydz =$$
$$=\iiint\limits_{\tau} f(x,y,z)\,dxdydz+\iiint\limits_{\tau} g(x,y,z)\,dxdydz$$

2) $$\iiint\limits_{\tau} \alpha f(x,y,z)\,dxdydz = \alpha\iiint\limits_{\tau} f(x,y,z)\,dxdydz$$

3) если $f(x,y,z)$ интегр. в обл-ти τ

$$\iiint\limits_{\tau} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{\tau_1} f(x,y,z)\,dxdydz +$$
$$\iiint\limits_{\tau_2} f(x,y,z)\,dxdydz + \dots + \iiint\limits_{\tau_n} f(x,y,z)\,dxdydz$$

4) ф-ии $f(x,y,z)$ и $g(x,y,z)$ интегр. в области τ, $f(x,y,z)\le g(x,y,z)$

$$\iiint\limits_{\tau} f(x,y,z)\,dxdydz \le \iiint\limits_{\tau} g(x,y,z)\,dxdydz$$

5) ф-ия $f(x,y,z)$ интегр. в обл-ти τ
$\forall (x,y,z)\in\tau: m\le f(x,y,z)\le M$
$m, M\in\mathbb{R}$

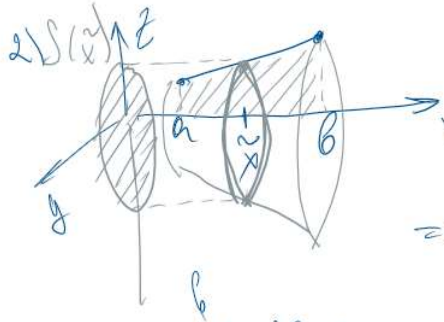
$$mV \le \iiint\limits_{\tau} f(x,y,z)\,dxdydz \le MV$$

V – объем тела τ

7. Сформулировать теоремы о сведении тройного интеграла к повторному в декартовых координатах.

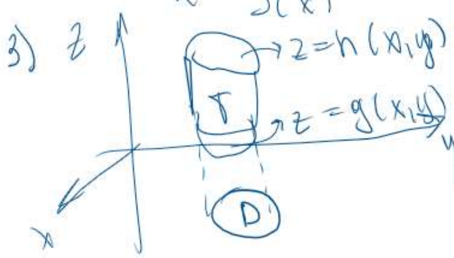
1) если $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \le x \le b,\ c \le y \le d,\ e \le z \le g\}$, то

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f f(x,y,z)\,dz$$

2) 

$S(\tilde{x})$ — проекция на Oyz пересечения T с плоскостью $x = \tilde{x}$

$$\Rightarrow \iiint_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b dx \iint_{S(x)} f(x,y,z)\,dy\,dz$$

3) 

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_D dx\,dy \int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

8. Дать определение ряда.

Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ — числ. посл-ть
Беск. сумма $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — числовой ряд

9. Дать определение частичной суммы ряда.

Посл-ть $S_1, \dots, S_n, \dots$, где $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ — последовательность частичных сумм ряда, где S_n — n-ая частичная сумма

10. Дать определение сходимости ряда.

Если $\exists$ конечн. предел $S = \lim_{n \to \infty} S_n$, то ряд — сходящийся, а S — его сумма

11. Дать определение расходящегося ряда.

Если предел посл-ти частичных сумм $S = \lim_{n \to \infty} S_n$ $\nexists$ $(=\infty)$, то ряд — расх.

12. Дать определение остатка ряда.

$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ – n-ый остаток ряда

13. Дать определение абсолютной сходимости ряда.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сх., то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – абс. сх.

14. Какой ряд называют гармоническим?

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

15. Какой ряд называется рядом Дирихле?

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$

16. Сформулировать теорему о связи сходимости ряда и сходимости его остатка.

Сходимость ряда равносильна сходимости любого его остатка.

17. Сформулировать необходимый признак сходимости ряда.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх., то $\exists \lim_{n \to \infty} a_n = 0$

18. Сформулировать признак сравнения сходимости ряда.

Пусть $0 \leq a_n \leq b_n$, $n = 1, 2, \ldots$

Тогда:

1) если $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сх., то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх.

2) если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расх., то $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расх.

19. Сформулировать предельный признак сравнения сходимости ряда.

Пусть $0 < a_n$, $0 \leq b_n$, $n = 1, 2, \ldots, n$ пусть

Пусть $\exists \lambda = \lim_{n \to \infty} \frac{b_n}{a_n}$, где $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq \infty$

Тогда сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ равносильна сх-ти $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

20. Сформулировать признак Даламбера для ряда с положительными членами.

$n=1$

Пусть $a_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, и пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q_5$

Тогда:

1) если $q_5 < 1$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сх.

2) если $q_5 > 1$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расх.

21. Сформулировать признак Коши (радикальный) для ряда с неотрицательными членами.

Пусть $a_n \geq 0$ $n = 1, 2, \ldots$, и пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q_5$

Тогда:

1) если $q_5 < 1$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сх.

2) если $q_5 > 1$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расх.

22. Сформулировать интегральный признак сходимости.

Пусть $f(x) \geq 0$ $\forall x \geq 1$ и

пусть $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ монотонно

Тогда сх-ть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ равносильна сх-ти $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$

23. Сформулировать признак Лейбница.

Пусть $b_n > 0$ $n = 1, 2, \ldots$ и $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

монотонно

Тогда ряд $b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \ldots + (-1)^{n-1} b_n + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$

сходится и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n < b_1$

24. Сформулировать признак Даламбера для знакопеременного ряда.

Пусть $a_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$ и пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q_5$

Тогда:

1) если $q_5 < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ абс. сход.

2) если $q_5 > 1$, то ряд расх.

25. Сформулировать признак Коши для знакопеременного ряда.

Пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$

1. если $q < 1$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сх. абс.

2. если $q > 1$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расх.