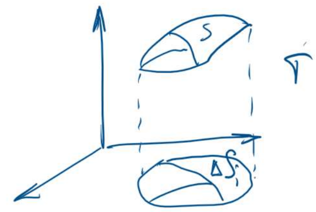
Рк1 тер вер

30 сентября 2023 г. 16:32

1. Дать определение двойного интеграла. Сформулировать его основные свойства.



Рассмотрим $z=f(x,y)$, $(x,y)\in D$

$T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in D,\ 0\le z\le f(x,y)\}$

Разобьём область D на n частей

$D=D_1\cup D_2\cup\ldots\cup D_n$ $\quad D_i\cap D_j=\varnothing\ \forall i\ne j$

Выбираем $(\xi_k,\eta_k)\in D_k$, $k=1,\ldots,n$

$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\cdot\Delta S_k$ – интегральная сумма для ф-ии $z=f(x,y)$ по области D

Если $\exists$ конечн. предел интегральной суммы и он не зависит ни от способа разбиения D ни от выбора точки, то он наз. двойным интегралом от ф-ии $z=f(x,y)$ по области D

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy=\lim_{\max diam(D_k)\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\cdot\Delta S_k$$

где $diam(D_k)=\max|AB|$, $A\in D_k$, $B\in D_k$

Св-ва:

1. если ф-ии $f(x,y)$, $g(x,y)$ интегрир. в области D, то их сумма так же интегрируема в области D
$$\iint\limits_D (f(x,y)+g(x,y))\,dx\,dy=\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy+\iint\limits_D g(x,y)\,dx\,dy$$
2. $\iint\limits_D af(x,y)\,dx\,dy=a\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$
3. $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy+\iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy+\ldots+\iint\limits_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy$
4. если $f(x,y)$ и $g(x,y)$ интегрируемы в D, $f(x,y)\le g(x,y)$
$$\iint\limits_D f(x,y)\le\iint\limits_D g(x,y)$$
5. если ф-ия $f(x,y)$ интегрируема D и $\forall (x,y)\in D: m\le f(x,y)\le M$

э, если ф-ия f(x,y) интегрируема
и $\forall (x,y) \in D: m \le f(x,y) \le M$

$m, M \in \mathbb{R}$

$$m S \le \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy \le M S,$$

S - площадь области D

2. Дать определение объёма цилиндрического тела.

если ф-ия $z = f(x,y)$ непр. в области D и $\forall (x,y) \in D: f(x,y) \ge 0$, то объем цилиндрического тела

$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D, 0 \le z \le f(x,y)\}$

= двойному интегралу от ф-ии f(x,y), взятого по области D

$$V = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$$

3. Сформулировать теоремы о сведении двойного интеграла к повторному в декартовых координатах в случае прямоугольной и криволинейной области.

(Пусть D - прямоуг. со сторон. ∥ к-ным осям)

Пусть $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b, c \le y \le d\}$
и $\exists \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy \Rightarrow$

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy$$

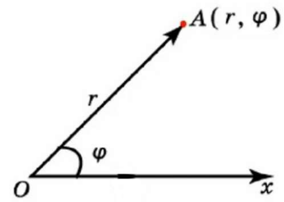
Пусть $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$
и пусть $\exists \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy \Rightarrow$

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$$

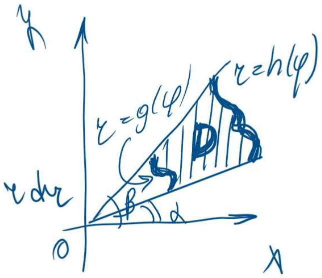
Пусть $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \le y \le d, \varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y)\}$
и пусть $\exists \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy \Rightarrow$

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\,dx$$

4. Дать определение полярных координат. Выписать формулу перехода в двойном интеграле в полярных координатах.

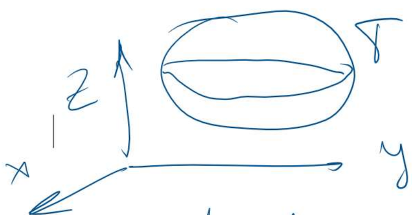


Полярная система координат- система плоских координат, образованная направленным лучом OX, называющимся полярной осью. Каждая точка плоскости задается полярным углом и полярным радиусом.



$$\iint f(x,y)\,dxdy = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{g(\varphi)}^{h(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, dr$$

5. Дать определение массы тела.



$f(x, y, z)$ – пл-ть τ

$\tau = \tau_1 \cup \tau_2 \cup \ldots \cup \tau_n \qquad \tau_i \cap \tau_j = \varnothing \quad \forall i \neq j$

$(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \in \tau_k \qquad k = 1, \ldots, n$

$$M \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot V(\tau_k) \xrightarrow[1 \le k \le n]{\max \operatorname{diam}(\tau_k) \to 0}$$

$$\iiint_{\tau} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

6. Дать определение тройного интеграла. Сформулировать его основные свойства.

Начало как в прошлом

Если $\exists$ конечный предел интегральной суммы и он не зависит ни от способа разбиения области τ, ни от выбора точки в области τ, то

$$\lim_{\substack{\max(\operatorname{diam} \tau_i) \to 0 \\ 1 \le k \le n}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \Delta V_i = \iiint_{\tau} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

Св-ва:

1) если ф-ии $f(x,y,z)$ и $g(x,y,z)$ интегрир. в области T, то их сумма так же интегрируема в области T:

$$\iiint_T (f(x,y,z)+g(x,y,z))\,dx\,dy\,dz =$$
$$=\iiint_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz + \iiint_T g(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

2) $$\iiint_T \alpha f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \alpha \iiint_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

3) если $f(x,y,z)$ интегр. в обл-ти T

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{T_1} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz +$$
$$\iiint_{T_2} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz + \ldots + \iiint_{T_n} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

4) ф-ии $f(x,y,z)$ и $g(x,y,z)$ интегр. в области T, $f(x,y,z) \le g(x,y,z)$

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \le \iiint_T g(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

5) ф-ия $f(x,y,z)$ интегр. в обл-ти T
$\forall (x,y,z) \in T: m \le f(x,y,z) \le M$
$m, M \in \mathbb{R}$

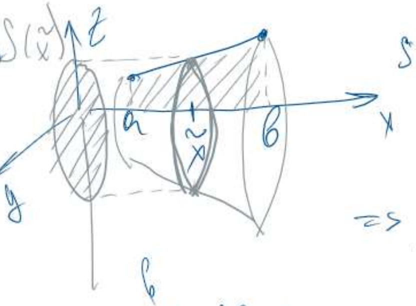
$$mV \le \iiint_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \le MV$$

V - объем тела T

7. Сформулировать теоремы о сведении тройного интеграла к повторному в декартовых координатах.

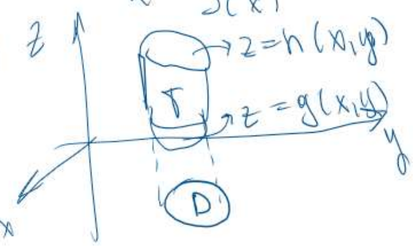
1) если $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \le x \le b, c \le y \le d,$ $e \le z \le g\}$, то

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dxdydz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f f(x,y,z)\,dz$$

2) 

$S(\tilde{x})$ – проекция на Oyz пересечения T с плоскостью $x = \tilde{x}$

$$\Rightarrow \iiint_T f(x,y,z)\,dxdydz = \int_a^b dx \iint_{S(x)} f(x,y,z)\,dydz$$

3) 

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_D dxdy \int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

8. Дать определение ряда.

Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ – числ. посл-ть

Беск. сумма $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – числовой ряд

9. Дать определение частичной суммы ряда.

Посл-ть $S_1, \dots, S_n, \dots$, где $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ – последовательность частичных сумм ряда, где S_n – n-ая частичная сумма

10. Дать определение сходимости ряда.

Если $\exists$ конечн. предел $S = \lim_{n\to\infty} S_n$, то ряд – сходящийся, а S – его сумма

11. Дать определение расходящегося ряда.

Если предел посл-ти частичных сумм $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ $\nexists$ $(=\infty)$, то ряд – расх.

12. Дать определение остатка ряда.

$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ – n-ый остаток ряда

13. Дать определение абсолютной сходимости ряда.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сх., то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – абс. сх.

14. Какой ряд называют гармоническим?

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

15. Какой ряд называется рядом Дирихле?

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$

16. Сформулировать теорему о связи сходимости ряда и сходимости его остатка.
    Сходимость ряда равносильна сходимости любого его остатка.
17. Сформулировать необходимый признак сходимости ряда.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх., то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

18. Сформулировать признак сравнения сходимости ряда.

Пусть $0 \leq a_n \leq b_n$, $n = 1, 2, \ldots$

Тогда:

1) если $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сх., то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх.

2) если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расх., то $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расх.

19. Сформулировать предельный признак сравнения сходимости ряда.

Пусть $0 < a_n$, $0 \leq b_n$, $n = 1, 2, \ldots, n$ пусть

Пусть $\exists \lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n}$, где $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq \infty$

Тогда сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ равносильна сх-ти $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

20. Сформулировать признак Даламбера для ряда с положительными членами.

$n=1$

Пусть $a_n > 0$, $n=1,2,\ldots$, и пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$

Тогда:

1) если $q<1$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сх.

2) если $q>1$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расх.

21. Сформулировать признак Коши (радикальный) для ряда с неотрицательными членами.

Пусть $a_n \geq 0$ $n=1,2,\ldots$, и пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$

Тогда:

1) если $q<1$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сх.

2) если $q>1$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расх.

22. Сформулировать интегральный признак сходимости.

Пусть $f(x) \geq 0$ $\forall x \geq 1$ и

пусть $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ монотонно

Тогда сх-ть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ равносильна сх-ти $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$

23. Сформулировать признак Лейбница.

Пусть $b_n > 0$ $n=1,2,\ldots$ и $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

монотонно

Тогда ряд $b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \ldots + (-1)^{n-1} b_n + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$

сходится и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n < b_1$

24. Сформулировать признак Даламбера для знакопеременного ряда.

Пусть $a_n \neq 0$, $n=1,2,\ldots$ и пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$

Тогда:

1) если $q<1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ абс. сход.

2) если $q>1$, то ряд расх.

25. Сформулировать признак Коши для знакопеременного ряда.

Пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$

1. если $q<1$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сх. абс.

2. если $q>1$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расх.

Пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$

1. если $q < 1$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сх. абс.

2. если $q > 1$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расх.