שיטות חישוביות באופטמזציה - סיכום הרצאות ותרגולים

סיכום הרצאות.מרצה: כפיר לוי

23 ביולי 2020

תוכן עניינים

IV שיטות ואלגוריתמים מסדר שני 183

חלק I
מושגי מפתח באופטמזציה ובקמירות

1 הרצאה 1 ותרגול 1 .מבוא והגדרות

1.1 חומר מבוא חזרה על מושגים מאלגברה וחדווא.

1.1.1 המרחב האוקלידי ה n מימדי $\mathbb{R}^n$

הגדרה 1.1 $\mathbb{R}^n$ ווקטור עומדה בן n שורות עם כניסות ממשיות.לדוגמא. $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.השחלוף של הווקטור הינו ווקטור שורה $\boldsymbol{x}^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$.

תכונות של ווקטורים ב $\mathbb{R}^n$:

1. חיבור ווקטורים Component wise:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

2. כפל בסקלר:

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

סימון 2.1 הבסיס הסטנדרטי (נקרא גם הבסיס הקנוני) מסומן $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \ldots, \boldsymbol{e_n}$.כאשר $\boldsymbol{e_i}$ הוא ווקטור של אפסים פרט לכניסה הi שבה היא 1, לדוגמא ,

$$\boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \boldsymbol{e_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

סימון 3.1 הווקטור e הוא ווקטור שכולו 1־ים.כלומר $\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.סימון מקובל אחר $\boldsymbol{1}$.כלומר $\boldsymbol{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

סימון 4.1 הווקטור 0 הוא ווקטור שכולו 0־ים.כלומר $\mathbf{0}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$.

תתי מרחבים חשובים של $\mathbb{R}^n$.

הגדרה 5.1 תת מרחב הווקטורים האי שליליים nonnegative orthant הוא תת מרחב של $\mathbb{R}^n$ שמכיל את כל הווקטורים ב $\mathbb{R}^n$ שעבורו כל הרכיבים הם אי שליליים.הוא מסומן $\mathbb{R}^n_+$ ומוגדר כך :

$$\mathbb{R}^n_+=\left\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T \mid x_1,x_2,\ldots,x_n\geq 0\right\}$$

הגדרה 6.1 תת מרחב הווקטורים החיוביים positive orthant הוא תת מרחב של $\mathbb{R}^n$ שמכיל את כל הווקטורים ב $\mathbb{R}^n$ שעבורו כל הרכיבים הם חיוביים.הוא מסומן $\mathbb{R}^n_{++}$ ומוגדר כך :

$$\mathbb{R}^n_{++}=\left\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T \mid x_1,x_2,\ldots,x_n> 0\right\}$$

הגדרה 7.1 עבור $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$ אז תת המרחב של $\mathbb{R}^n$ שמהווה את **הקטע הסגור** בין $\boldsymbol{x}$ ל $\boldsymbol{y}$, נקרא the closed line segment between x and y. מסומן $[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]$ ומוגדר כך:

$$[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]=\{\boldsymbol{x}+\alpha\left(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\right) \mid \alpha\in[0,1]\}$$

הגדרה 8.1 עבור $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$ אז תת המרחב של $\mathbb{R}^n$ שמהווה את **הקטע הפתוח** בין $\boldsymbol{x}$ ל $\boldsymbol{y}$, נקרא the open line segment between x and y. מסומן $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ ומוגדר כך:

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\{\boldsymbol{x}+\alpha\left(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\right) \mid \alpha\in(0,1)\}$$

הגדרה 9.1 הunit-simplex מסומן על ידי Δ_n ומוגדר על ידי :

$$\Delta_n=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n}x_i=1,\forall i\in\{1,\ldots,n\}:x_i\geq 0\right\}$$

כלומר,אוסף כל הווקטורים שעבורו כל הרכיבים הם אי שליליים (כלומר $\forall i\in\{1,\ldots,n\}:x_i\geq 0$) **וגם** שמתקיים שסכום רכיביו הוא 1,כלומר $\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{x}=1$ כלומר $\sum_{i=1}^{n}x_i=1$.

1.1.2 המרחב ה $m \times n$ מימדי $\mathbb{R}^{m\times n}$

הגדרה 10.1 המרחב $\mathbb{R}^{m\times n}$ הוא מרחב כל המטריצות במימד $m \times n$ (m שורות ו n עומודות) בעלות ערכים ממשיים.

סימון 11.1 I_n היא מטריצת היחידה ממימד $n \times n$. כלומר $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

סימון 12.1 $0_{m\times n}$ היא מטריצת האפס. $0_{m\times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.1.3 מכפלה פנימית $\langle \cdot, \cdot \rangle$

הגדרה 13.1 מכפלה פנימית.מכפלה פנימית מעל מרחב $\mathbb{R}^n$ היא פונקציה $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ שמקיימת את כל 4 התכונות הבאות:

1. **סמטריה:** $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n : \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle$
2. **אדטיביות:** $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n : \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle$
3. **הומוגניות:**$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \langle \lambda \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \lambda \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$
4. **חיוביות מוגדרת:** הפונקציה תקרא חיובית מוגדרת אם שני התנאים הבאים מתקיימים:

   (א) $\forall x \in \mathbb{R}^n : \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \geq 0$

   (ב) $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0 \iff \boldsymbol{x} = 0$

דוגמאות למכפלה פנימית.

דוגמה 14.1 the dot product :

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n : \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

הערה 15.1 מכפלה פנימית זו מכונה המכפלה פנימית הטבעית או המכפלה פנימית הסטנדרטית.

דוגמה 16.1 the weighted dot product :

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n, \forall \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n_{++} : \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle_w = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i y_i$$

1.1.4 נורמת ווקטורים $\|\cdot\|$

הגדרה 17.1 נורמה מעל מרחב $\mathbb{R}^n$ היא פונקציה (סקלארית) $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ שמקיימת את כל 3 התכונות הבאות:

1. **אי שליליות:** הפונקצייה תקרא אי שלילית אם שני התנאים הבאים מתקיימים:

   (א) $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{x}\| \geq 0$

   (ב) $\|\boldsymbol{x}\| = 0 \iff \boldsymbol{x} = 0$

2. **הומגונית חיובית:** $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \|\lambda \boldsymbol{x}\| = |\lambda| \, \|\boldsymbol{x}\|$
3. **אי שוויון המשולש:** $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \le \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$

סימון 18.1 $\|\cdot\|$ הוא סימון לנורמה כלשהיא. $\|\cdot\|_{\text{symb}}$ הוא סימון של נורמה ספצפית.

דוגמה 19.1 דרך טבעית אחת לייצר נורמה מעל $\mathbb{R}^n$ היא לקחת איזה מכפלה פנימית כלשהיא (נזכיר כי $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$) ולהגדיר את הנורמה הבאה:

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{x}\| \equiv \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle}$$

הערה 20.1 נורמה זו נקראת גם הנורמה המושרית על ידי המכפלה הפנימית.

הגדרה 21.1 **הנורמה** שמוגדרת עם המכפלה הפנימית dot product נקראת גם **הנורמה האוקלידית** או **נורמת** l_2 ומוגדרת ומסומנת כך:

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

הגדרה 22.1 לכל $p \in \{1, 2, \dots\}$ נגדיר את ה $l_p\text{norm}$ באופן הבא:

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{x}\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}$$

הגדרה 23.1 נגדיר את ה $l_\infty\text{norm}$ באופן הבא:

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |x_i|$$

הערה 24.1 ניתן להראות כי $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \|\boldsymbol{x}\|_p$

הערה 25.1 נבחין כי $l_{\frac{1}{2}}$ **אינה נורמה**.

1.1.5 אי שוויון קושי שוורץ

משפט 26.1 אי שוויון קושי שוורץ:

$$\forall \boldsymbol{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \left|\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y}\right| \le \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|$$

הערה 27.1 אי שוויון קושי שוורץ קושר את המכפלה הפנימית והנורמה במרחבי מכפלה פנימית.
כלומר המשפט תקף במרחבים בהם הנורמה היא "הנורמה הטבעית" כפי שהוגדר בהערה 19.1: $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{x}\| \equiv \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle}$.

הערה 28.1 אי שוויון קושי שוורץ מסומן גם $|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| \le \|\boldsymbol{y}\| \cdot \|\boldsymbol{x}\|$.

הוכחת אי שוויון קושי שוורץ:

- **טענה:** לכל $\lambda \in \mathbb{R}$ מתקיים $\|\boldsymbol{x}+\lambda \boldsymbol{y}\|^2 = \lambda^2 \|\boldsymbol{y}\|^2 + 2\lambda \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle + \|\boldsymbol{x}\|^2$.

הוכחת הטענה:

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y}\|^2 &= \left(\sqrt{\langle \boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y}\rangle}\right)^2\\
&= \langle \boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y}\rangle\\
&= \langle \boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle + \langle \boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y},\lambda\boldsymbol{y}\rangle\\
&= \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y}\rangle + \langle \lambda\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y}\rangle\\
&= \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle + \langle \boldsymbol{x},\lambda\boldsymbol{y}\rangle + \langle \lambda\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle + \langle \lambda\boldsymbol{y},\lambda\boldsymbol{y}\rangle\\
&= \left(\sqrt{\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle}\right)^2 + \langle \lambda\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle + \lambda\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle + \left(\sqrt{\langle \lambda\boldsymbol{y},\lambda\boldsymbol{y}\rangle}\right)^2\\
&= (\|\boldsymbol{x}\|)^2 + \lambda\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle + \lambda\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle + (\|\lambda\boldsymbol{y}\|)^2\\
&= \|\boldsymbol{x}\|^2 + \lambda\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle + \lambda\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle + (|\lambda|\,\|\boldsymbol{y}\|)^2\\
&= \|\boldsymbol{x}\|^2 + \lambda\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle + \lambda\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle + |\lambda|^2\,\|\boldsymbol{y}\|^2\\
&= \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\lambda\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle + \lambda^2\|\boldsymbol{y}\|^2\\
&= \lambda^2\|\boldsymbol{y}\|^2 + 2\lambda\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle + \|\boldsymbol{x}\|^2
\end{aligned}$$

- אנו יודעים כי מתכונות הנורמה $\|\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y}\|^2 \geq 0$ ולכן מהטענה הקודמת ייבנע כי $\lambda^2\|\boldsymbol{y}\|^2 + 2\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle\lambda + \|\boldsymbol{x}\|^2 \geq 0$.נבחין כי $\|\boldsymbol{x}\|^2, \|\boldsymbol{y}\|^2$ הם סקלארים ולכן ,קיבלנו פולינום ב λ **במקדמים ממשיים**.נסמן $\|\boldsymbol{x}\|^2 = c \quad , 2\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle = b \quad , \|\boldsymbol{y}\|^2 = a$.כלומר קיבלנו את הפולינום $a\lambda^2 + b\lambda + c \geq 0$.ערכו של הפולינום תמיד גדול או שווה לאפס.כלומר הפרבולה שמיוצגת על ידי המשוואה לכל היותר נוגעת בציר λ אך אינה עוברת מתחתיו ולכן **למשוואה יש פתרון יחיד לכל היותר**.נזכיר כי הדסקרימיננטה מסומנת $\Delta = b^2 - 4ac$.אנו יודעים (מויקפידה) שעבור פולינומום ריבועי מעל שדה הממשיים מקיים :
  - הדיסקרימיננטה חיובית $\Delta > 0$ כשיש למשוואה שני פתרונות שונים.
  - הדיסקרימיננטה שווה לאפס $\Delta = 0$ כשיש פתרון ממשי יחיד.
  - הדיסקרימיננטה שלילית $\Delta < 0$ כשאין לפולינום פתרונות מעל השדה $\mathbb{R}$.(אלא רק בשדה $\mathbb{C}$כלומר פתרונות λ שהם צמודים מרוכבים)

  למשוואה $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ יש פתרון יחיד או שאין לה פתרונות (מעל $\mathbb{R}$) מתקיים $\Delta \leq 0$ כלומר מתקיים $b^2 - 4ac \leq 0$ נציב בחזרה את הסימונים ונקבל $(2\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle)^2 - 4\|\boldsymbol{y}\|^2 \cdot \|\boldsymbol{x}\|^2 \leq 0$ כלומר $4 \cdot \left[\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle^2\right] - 4\|\boldsymbol{y}\|^2 \cdot \|\boldsymbol{x}\|^2 \leq 0$ נחלק ב 4 ונעביר אגפים ונקבל $\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle^2 \leq \|\boldsymbol{y}\|^2 \cdot \|\boldsymbol{x}\|^2$.

- נבחין כי $\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle \in \mathbb{R}$ הוא סקלר ולכן $\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle^2$ הוא סקלר חיובי ולכן $0 \leq \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle^2 \leq \|\boldsymbol{y}\|^2 \cdot \|\boldsymbol{x}\|^2$.

- נוציא שורש מכל האגפים (שורש היא חד חד ערכית מעל הממשיים החיוביים) ונקבל $0 \leq |\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle| \leq |\|\boldsymbol{y}\| \cdot \|\boldsymbol{x}\||$.נזכור כי $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{x}\| \geq 0$ ולכן $|\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle| \leq \|\boldsymbol{y}\| \cdot \|\boldsymbol{x}\|$.

- נבחין כי תחת הסימונים של אי השוויון קושי שוורץ ושל המכפלה הפנימית dot prodact מתקיים $\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}$ ולכן נקבל את אי שוויון קושי שוורץ :

$$\left|\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}\right| \leq \|\boldsymbol{y}\| \cdot \|\boldsymbol{x}\|$$

1.1.6 ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים

הגדרה 29.1 תהא $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.ווקטור $0 \neq \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ ייקרא **ווקטור עצמי** של $\boldsymbol{A}$ אם קיים $\lambda \in \mathbb{C}$ כך ש $\boldsymbol{A}v = \lambda\boldsymbol{v}$.הסקלר λ נקרא **ערך עצמי** המתאים לווקטור העצמי $\boldsymbol{v}$.

הערה 30.1 באופן כללי , למטריצות עם ערכים ממשיים יכולים להיות ערכים עצמיים קומלפקסים.

משפט 31.1 **אם** המטריצה $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ היא **סמטרית** (מטריצה סמטרית היא מטריצה המקיימת $\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}$), **אז** כל הערכים העצמיים שלה הם בהכרח **ממשיים** .

הערה 32.1 כלומר המשפט במילים אחרות אם המטריצה $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ היא סמטרית, אזי קיימים:

- $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (הערכים העצמיים) כך ש $\forall i \in \{1, \ldots, n\} : \lambda_i \in \mathbb{R}$. **נדגיש כי האמירה של המשפט כי אלו ע"ע ממשיים!**
- וקטורים שונים מאפס אורטוגונליים $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ (הווקטורים העצמיים)

כך ש $\forall i \in \{1, \ldots, n\} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{v}_i$.

סימון 33.1 הערכים העצמיים של מטריצה סמטרית $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מסומנים לפי גדולם כך:

$$\lambda_1(\boldsymbol{A}) \geq \lambda_2(\boldsymbol{A}) \geq \cdots \geq \lambda_n(\boldsymbol{A})$$

סימון 34.1 הערך העצמי המקסמלי מסומן גם $\lambda_{\max}(\boldsymbol{A})$ (כלומר $\lambda_1(\boldsymbol{A})$).

סימון 35.1 הערך העצמי המינמלי מסומן גם $\lambda_{\min}(\boldsymbol{A})$ (כלומר $\lambda_n(\boldsymbol{A})$).

1.1.7 משפט הפירוק הספקטרלי

רקע:

סימון 36.1 תהא $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מטריצה ריבועית נסמן את סכום איברים האלכסון $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A})$.כלומר

$$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$$

משפט 37.1 סכום איברי האלכסון של מכפלת מטריצות אשר המכפלה שלהם נותנת מטריצה ריבועית , מקיים את התכונות הבאות:

$$\forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{m \times n} : \mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{B}\right) = \mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T\right) = \mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T\right) = \mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{B}^T \boldsymbol{A}\right) = \sum_{i,j} A_{ij} B_{ij}$$

כלומר הוא מהווה סכום של מכפלת כל הכניסות של שתי המטריצות.
ראה להסבר נוסף https://en.wikipedia.org/wiki/Trace_(linear_algebra)

מסקנה 38.1 מתחת לסימן Tr מטריצות יכולות להתחלף בכפל: כלומר

$$\forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{m \times n} : \mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})$$

משפט 39.1 לכל $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ מתקיים $\det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = \det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B})$.כאשר $\det(\boldsymbol{A}) = |\boldsymbol{A}|$ מסמן את הדטרמיננטה של $\boldsymbol{A}$.

סימון 40.1 מטריצה אלכסונית $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מסומנת כך

$$\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n) = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

הגדרה 41.1 מטריצה אוינטרית. $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ תקרא אוינטרית אם $\boldsymbol{A}$ מטריצה הפיכה ו $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^T$.

הערה 42.1 כלומר אם $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מטריצה אוניטרית אז $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{I}_n$.

משפט 43.1 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ אוניטרית $\iff$ **שורותיה** הן בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^n$ ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית בו$\iff$ **עמודותיה** הן בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^n$ ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית בו.

משפט הפירוק:

משפט 44.1 (הפירוק הספקטרלי) תהא $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$מטריצה **סמטרית**.אזי **קיימת** מטריצה אוניטרית $\boldsymbol{U} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ($\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^T = I_n$) ומטריצה אלכוסנית $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ כך ש

$$\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{D}$$

הערה 45.1 D היא המטריצה אלכסונית כך שכל איבר באלכסון שלה הוא ע"ע של מטריצה $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

הערה 46.1 עמודות $\boldsymbol{U}$ מהוות בסיס אורטונורמלי למרחב $\mathbb{R}^n$ אשר עמודותיה הם הו"ע של $\boldsymbol{A}$.(כאשר העמודה הi של $\boldsymbol{U}$ היא הווקטור העצמי המתאים לערך העצמי d_i)

הערה 47.1 מהכפלה של המשוואה $\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{D}$ ב $\boldsymbol{U}$ משמאל וב $\boldsymbol{U}^T$ מימין נקבל $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{D}\boldsymbol{U}^T$.

מסקנה 48.1 מסקנות ישירות מהמשפט:

משפט 49.1 סכום איברי האלכסון של מטריצה סמטרית $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$שווה לסכום הערכים העצמיים שלה.כלומר

$$\text{if } \boldsymbol{A} \text{ is symetric} \Rightarrow \operatorname{Tr}(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\boldsymbol{A})$$

הוכחה:

$$\operatorname{Tr}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{Tr}\left(\boldsymbol{U}\boldsymbol{D}\boldsymbol{U}^T\right) = \operatorname{Tr}\left(\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{D}\right) = \operatorname{Tr}(\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{D}) = \operatorname{Tr}(\boldsymbol{D}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\boldsymbol{A})$$

משפט 50.1 הדטרמיננטה של $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מקיימת

$$\text{if } \boldsymbol{A} \text{ is symetric} \Rightarrow \det(\boldsymbol{A}) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i(\boldsymbol{A})$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{A}) &= \det\left(\boldsymbol{U}\boldsymbol{D}\boldsymbol{U}^T\right) \\
&= \det(\boldsymbol{U}) \cdot \det(\boldsymbol{D}) \cdot \det\left(\boldsymbol{U}^T\right) \\
&= \det(\boldsymbol{U}) \cdot \det\left(\boldsymbol{U}^T\right) \cdot \det(\boldsymbol{D}) \\
&= \det\left(\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^T\right) \cdot \det(\boldsymbol{D}) \\
&= \det(\boldsymbol{I}_n) \cdot \det(\boldsymbol{D}) \\
&= 1 \cdot \det(\boldsymbol{D}) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \lambda_i(\boldsymbol{A})
\end{aligned}$$

הגדרה 51.1 מטריצה $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **סמטרית** תקרא **חיובית מוגדרת** Positive definite אם לכל $0 \neq \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ מתקיים $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0$.אם $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ חיובית מוגדרת אז מסמנים $A \succ 0$.

סימון 52.1 קבוצת כל המטריצות החיוביות מוגדרות מסדר n מסומן $\boldsymbol{S}^n_{++}$.

הגדרה 53.1 מטריצה $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **סמטרית** תקרא **אי שלילית מוגדרת** Positive semidefinite אם לכל $0 \neq \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ מתקיים $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq 0$.אם $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ אי שלילית מוגדרת אז מסמנים $A \succeq 0$.

סימון 54.1 קבוצת כל המטריצות האי שליליות מוגדרות מסדר n מסומן $\boldsymbol{S}^n_{+}$.

משפט 55.1 (הוכח בתרגול)תהא מטריצה $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ אזי : $A \succ 0 \iff$ כל הערכים העצמיים של A חיוביים ממש.

משפט 56.1 (הוכח בתרגול) תהא מטריצה $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ אזי : $A \succeq 0 \iff$ כל הערכים העצמיים של A אי שליליים.

סימון 57.1 נבחין כי אנו מסמנים $\boldsymbol{S}^n$ את מרחב המטריצות **הסמטריות** בגדול $n \times n$.$\boldsymbol{S}^n \in \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ (כי עבור מטריצה סמטרית $n \times n$ יש $\frac{n(n+1)}{2} = \overbrace{\frac{n^2-n}{2}}^{\text{res of the elements}} + \overbrace{n}^{\text{diagonal}}$ דרגות חופש).כלומר $\boldsymbol{S}^n = \left\{X \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid X = X^T\right\}$.

סיכום הסימונים למרחב המטריצות האחרונים שפורטו:

קבוצה	תיאור	פירוט
$\boldsymbol{S}^n$	מרחב המטריצות **הסמטריות**	$\boldsymbol{S}^n = \left\{\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}^T\right\}$
$\boldsymbol{S}^n_+$	מרחב המטריצות **האי שליליות** מוגדרות	$\boldsymbol{S}^n_+ = \{\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{S}^n \mid \boldsymbol{X} \succeq 0\}$
$\boldsymbol{S}^n_{++}$	מרחב המטריצות **החיוביות** מוגדרות	$\boldsymbol{S}^n_+ = \{\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{S}^n \mid \boldsymbol{X} \succ 0\}$

טענה 58.1 לכל $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית כלשהיא ולכל לכל $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ קיימת מטריצה $\boldsymbol{A}$ סמטרית (השווה ל $\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\left(B^T + B\right)$) כך שמתקיים

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$$

הוכחת הטענה:
$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ הוא סקלאר. ולכן $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$ ולכן $\left[\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}\right] = \left[\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}\right]^T = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{x}$.ומכאן נובע כי

$$x^T\boldsymbol{B}x = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}\right) = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}\right) = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{x}^T\left[\boldsymbol{B}^T + \boldsymbol{B}\right]\boldsymbol{x}\right)$$

$$= \left(\boldsymbol{x}^T\left[\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{B}^T + \boldsymbol{B}\right]\right]\boldsymbol{x}\right) = \left(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\right)$$

נראה כי A אכן סמטרית כי

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{B}^T + B\right) = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}^T\right) = \left[\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{B}^T + \boldsymbol{B}\right)\right]^T = \boldsymbol{A}^T$$

1.1.8 עקרונות בסיסיים בטופולוגיה

הגדרה 59.1 כדור **פתוח** במרכז $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ וברדיוס r:

$$B(\boldsymbol{c}, r) \equiv \{\boldsymbol{x} \mid \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}\| < r\}$$

הגדרה 60.1 כדור **סגור** במרכז $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ וברדיוס r:

$$B[\boldsymbol{c}, r] \equiv \{x \mid \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}\| \leq r\}$$

הערה 61.1 ההגדרה היא חוקית לכל נורמה.

הגדרה 62.1 בהנתן קבוצה של נקודות U מ $\mathbb{R}^n$,כלומר $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ובהנתן נקודה $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$.נאמר שנקודה $\boldsymbol{c} \in U$ היא **נקודה פנימית** (interior point) של קבוצה U אם קיים $r > 0$ עבורו $B(\boldsymbol{c}, r) \subseteq U$.

הגדרה 63.1 בהנתן קבוצה של נקודות U מ $\mathbb{R}^n$.הקבוצה של כל הנקודות $\boldsymbol{c} \in U$ שמהוות נקודות פנימיות נקרא Interior (בעברית **הפנים**) של U ומסומן $\text{int}(U)$.

$$\text{int}(U) = \{c \in U \mid B(\boldsymbol{c}, r) \subseteq \mathbb{R}^n \text{ for some } r > 0\}$$

דוגמה 64.1 דוגמאות :

$$\text{int}\left(\mathbb{R}^n_+\right) = \mathbb{R}^n_{++}$$
$$\forall c \in \mathbb{R}^n, \forall \overbrace{r \in \mathbb{R}_{++}}^{\substack{r \in \mathbb{R}_{++} \Rightarrow \\ r \in \mathbb{R}^1_{++} \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbb{R} \ni r > 0}} : \text{int}(B[\boldsymbol{c}, r]) = B(\boldsymbol{c}, r)$$
$$\text{int}([x, y]) = \emptyset$$

קבוצות פתוחות וסגורות

הגדרה 65.1 בהנתן קבוצה של נקודות U מ $\mathbb{R}^n$.הקבוצה U תקרא קבוצה פתוחה Open set אם U מכילה רק נקודות שמהוות נקודות Interior (=נקודות פנים). כלומר $U = \text{int}(U)$.

דוגמה 66.1 דוגמאות לקבוצות פתוחות:

- כדור פתוח $B(\boldsymbol{c}, r)$ (מכאן שמו)
- קו פתוח **רק עבור** $n = 1$. **(בכל** $n > 1$ **קו פתוח אינו קבוצה פתוחה)**
- המרחב $\mathbb{R}^n_{++}$.

משפט 67.1 כל איחוד של קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה.

משפט 68.1 כל חיתוך של מספר סופי של קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה.

הגדרה 69.1 בהנתן קבוצה של נקודות U מ $\mathbb{R}^n$.הקבוצה U תקרא קבוצה סגורה Close set אם U מכילה את כל גבולות של כל סדרת איברים בה.כלומר U סגורה $\iff$ לכל סדרה $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq U$ (סדרה של ווקטורים מ U) המקיימת $\lim_{i\to\infty} x_i = x^*$ אז $x^* \in U$.

משפט 70.1 U היא קבוצה סגורה $\iff$ הקבוצה המשלימה שלה שמסומנת U^c היא קבוצה פתוחה.

דוגמה 71.1 דוגמאות לקבוצות סגורות:

- כדור סגור $B[\boldsymbol{c}, r]$
- קו סגור $[x, y]$
- המרחב $\mathbb{R}^n_+$.
- ה unit simplex שסומן Δ_n ומשמעותו $\Delta_n = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1, \forall i \in \{1, \ldots, n\} : x_i \geq 0\}$.

הערה 72.1 בנוגע ל $\mathbb{R}^n$ ול$\emptyset$ הם גם נחשבות קבוצות פתוחות וגם נחשבות קבוצות סגורות.

נקודות שפה וסגור

הגדרה 73.1 בהנתן קבוצה של נקודות U מ $\mathbb{R}^n$.ובהנתן נקודה $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.נאמר שנקודה $\boldsymbol{x}$ (נבחין כי $\boldsymbol{x}$ לא חייב להיות מוכל ב U) היא נקודת שפה Boundary Point אם כל סביבה של $\boldsymbol{x}$ (כלומר כל כדור סביב נקודה $\boldsymbol{x}$) מכילה לפחות נקודה אחת מ U וגם נקודה אחת מ U^c(=משלים של U).

סימון 74.1 בהנתן קבוצה של נקודות U מ $\mathbb{R}^n$.הקבוצה של כל הנקודות $\boldsymbol{x}$ כך שמהוות נקודות שפה Boundary Points של U תסומן $\mathrm{bd}\,(U)$.

הגדרה 75.1 בהנתן קבוצה של נקודות $U \subseteq \mathbb{R}^n$. **הסגור** של U מסומן $\mathrm{cl}\,(U)$ ומוגדר להיות "הקבוצה הקטנה ביותר" של הקבוצות הסגורות המכילות את U.כלומר $\mathrm{cl}\,(U) = \bigcap \{T \mid U \subseteq T, \quad T \text{ is closed}\}$. הגדרה שקולה היא

$$\mathrm{cl}\,(U) = U \cup \mathrm{bd}\,(U)$$

קומפקטביות וחסימות

הגדרה 76.1 בהנתן קבוצה של נקודות $U \subseteq \mathbb{R}^n$.הקבוצה U תקרא **חסומה** אם קיים $M > 0$ כך ש $U \subseteq B\,(\mathbf{0}, M)$.

הגדרה 77.1 בהנתן קבוצה של נקודות $U \subseteq \mathbb{R}^n$.הקבוצה U תקרא **קומפקטית** אם U היא סגורה וחסומה.

טבלה מסכמת של כלל ההגדרות:

נקודה $x \in \mathbb{R}^n$ תקרא	**נקודה פנימית** (interior point) של קבוצה $U \subseteq \mathbb{R}^n$	אם	קיים $r > 0$ עבורו $B\,(\boldsymbol{c}, r) \subseteq U$
בהנתן $U \subseteq \mathbb{R}^n$.הקבוצה $C \subseteq U$	תקרא **הפנים** Interior של U	אם	$C = \mathrm{int}\,(U) = \{c \in U \mid B\,(\boldsymbol{c}, r) \subseteq U \text{ for some } r > 0\}$ותסומן $C = \mathrm{int}$
בהנתן $U \subseteq \mathbb{R}^n$	הקבוצה U תקרא קבוצה פתוחה Open set	אם	$U = \mathrm{int}\,(U)$
בהנתן $U \subseteq \mathbb{R}^n$	הקבוצה U תקרא קבוצה סגורה Close set	אם	לכל סדרה $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq U$ (סדרה של ווקטורים מ U) המקיימת x^* $\lim_{i \to \infty} x_i = x^*$.אז $x^* \in U$
	משפט: U היא קבוצה סגורה $\iff$ הקבוצה המשלימה שלה שמסומנת U^c היא קבוצה פתוחה.		
נקודה $x \in \mathbb{R}^n$ תקרא	**נקודה שפה** (Boundary Point) של קבוצה $U \subseteq \mathbb{R}^n$	אם	כל סביבה של $\boldsymbol{x}$ מכילה לפחות נקודה אחת מ U וגם נקודה אחת מ U^c.כלומר $\forall r > 0 : \begin{matrix} B\,(x, r) \cap U \neq \emptyset \\ B\,(x, r) \cap U^c \neq \emptyset \end{matrix}$
בהנתן $U \subseteq \mathbb{R}^n$.הקבוצה $C \subseteq U$	הקבוצה של כל הנקודות $\boldsymbol{x}$ כך שמהוות נקודות שפה Boundary Points של U תסומן $bd\,(U)$.קיים משפט שאומר ש $\mathrm{bd}\,(C) = \mathrm{cl}\,(C) \setminus \mathrm{int}\,(C)$		
בהנתן $U \subseteq \mathbb{R}^n$.הקבוצה $C \subseteq U$	תקרא **הסגור** של U מסומן $C = \mathrm{cl}\,(U)$	אם	$\mathrm{cl}\,(U) = U \cup \mathrm{bd}\,(U)$ (או אם (הגדרה שקולה)) $\mathrm{cl}\,(U) = \bigcap \{T \mid U \subseteq T, \quad T \text{ is closed}\}$
בהנתן $U \subseteq \mathbb{R}^n$	הקבוצה U תקרא **חסומה**	אם	$\exists M > 0 : U \subseteq B\,(\mathbf{0}, M)$
בהנתן $U \subseteq \mathbb{R}^n$	הקבוצה U תקרא **קומפקטית**	אם	U היא סגורה וחסומה.

1.1.9 נגזרות

הגדרה 78.1 תהא f פונקציה המוגדרת מעל קבוצה $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^n$.תהא x נקדוה נקודה פנימית של $\mathcal{S}$, כלומר $\boldsymbol{x} \in \mathrm{int}\,(\mathcal{S})$.יהא $d \in \mathbb{R}^n$. אם הגבול $\lim_{t \to 0^+} \frac{f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{d})-f(\boldsymbol{x})}{t}$ קיים , אז הוא ייקרא הנגזרת המכוונת של f בנקודה x בכיוון d" The directional derivative (of f at $\mathbf{x}$ along the direction $\mathbf{d}$) ומסומן $f'\,(\boldsymbol{x}; d)$.כלומר אם הגבול קיים נוכל לסמן אותו כך :

$$f'\,(x; d) \equiv \lim_{t \to 0^+} \frac{f\,(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{d}) - f\,(\boldsymbol{x})}{t}$$

סימון 79.1 לכל $i \in \{1, \ldots, n\}$ "הגבול של הנגזרת הכיוונית של f בנקודה x בכיוון e_i נקרא "הנגזרת החלקית ה-i-ית של f בנקודה x". (The i-th partial derivative) ומסומן $\frac{\partial f}{\partial x_i}\,(x)$.כלומר

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\,(\boldsymbol{x}) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f\,(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{e_i}) - f\,(\boldsymbol{x})}{t}$$

הגדרה 80.1 אם כל ההנגזרת החלקיות של f בנקודה x קיימות .אז ה**גדדיאנט** של f בנקודה $\boldsymbol{x}$ מוגדר כך:

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

הגדרה 81.1 תהא f פונקציה המוגדרת מעל קבוצה **פתוחה** $U \subseteq \mathbb{R}^n$.f תקרא **גזירה ברציפות מעל** U (continuosly differentiable) אם כל הנגזרות החלקיות שלה קיימות ורציפות ב U.במקרה כזה:

$$f'(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{d}) = \nabla f(\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{d} \quad , \boldsymbol{x} \in U, \boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n$$

משפט 82.1 תהא f פונקציה המוגדרת מעל קבוצה **פתוחה** $U \subseteq \mathbb{R}^n$.אם f גזירה ברציפות מעל U אזי

$$\forall \boldsymbol{x} \in U : \lim_{\boldsymbol{d} \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}) - f(\boldsymbol{x}) - \nabla f(\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{d}}{\|\boldsymbol{d}\|} = 0$$

הערה 83.1 דרך אחרת לרשום את אי השוויון למעלה הוא $f(\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x})^T (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) + o(\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\|)$ כאשר $o(\cdot) : \mathbb{R}_+^n \longrightarrow \mathbb{R}$ היא פונק המקיימת $\lim_{t \to 0^+} \frac{o(t)}{t} \to 0$.

הגדרה 84.1 הנגזרת החלקית ה (i,j) של f בנקודה $x \in U$ (אם קיימת) מוגדרת ומסומנת על ידי

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})$$

הגדרה 85.1 תהא f פונקציה המוגדרת מעל קבוצה **פתוחה** $U \subseteq \mathbb{R}^n$.f תקרא **גזירה ברציפות פעמיים מעל** U (twice continuosly differentiable) אם כל הנגזרות החלקיות מסדר שני שלה **קיימות ורציפות** ב U.במקרה כזה, הנגזרות מסדר שני הם סמטריות, כלומר לכל $i \neq j$ ולכל $\boldsymbol{x} \in U$ מתקיים :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

הגדרה 86.1 מטריצת ההאסיאן Hessian של f בנקודה $\boldsymbol{x} \in U$ היא מטריצה $n \times n$ מהצורה :

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\boldsymbol{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\boldsymbol{x}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\boldsymbol{x}) & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\boldsymbol{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

הערה 87.1 אם המטריצה גזירה ברציפות פעמיים מעל U אזי מטריצת ההאסיאן היא מטריצה סמטרית.

משפט 88.1 תכונות של :

יהיו $g, f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ פונקציות המוגדרות מעל קבוצה **פתוחה** $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

1. **אדטיביות:** אם f,g גזירות ברציפות אזי $\nabla(f+g)=\nabla f+\nabla g$.
2. **הומוגניות:** אם f גזירה ברציפות ו $\lambda\in\mathbb{R}$ אזי $\nabla(\lambda f)=\lambda\nabla f$.
3. אם f גזירה ברציפות , $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times m}$ ו $g(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{A}x)$ אזי

$$\nabla g(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}^T\nabla f(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})$$
$$\nabla^2 g(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}^T\nabla^2 f(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}$$

הערה 89.1 תזוכרת : גזירה וקטורית:

חוקי גזירה וקטורית

$\frac{\partial}{\partial \underline{x}}\left(\underline{\underline{A}}\underline{x}+\underline{b}\right)^T\left(\underline{\underline{A}}\underline{x}+\underline{b}\right)=2\underline{\underline{A}}^T\left(\underline{\underline{A}}\underline{x}+\underline{b}\right)$
$\frac{\partial}{\partial \underline{x}}\left(\underline{\underline{A}}\underline{x}+\underline{b}\right)^T\underline{\underline{C}}\left(\underline{\underline{A}}\underline{x}+\underline{b}\right)=\underline{\underline{A}}^T\left(\underline{\underline{C}}+\underline{\underline{C}}^T\right)\left(\underline{\underline{A}}\underline{x}+\underline{b}\right)$
$\frac{\partial}{\partial \underline{x}}\left(\underline{\underline{A}}\underline{x}+\underline{b}\right)^T\left(\underline{\underline{D}}\underline{x}+\underline{e}\right)=\underline{\underline{A}}^T\left(\underline{\underline{D}}\underline{x}+\underline{e}\right)+\underline{\underline{D}}^T\left(\underline{\underline{A}}\underline{x}+\underline{b}\right)$
$\frac{\partial}{\partial \underline{x}}\left(\underline{\underline{A}}\underline{x}+\underline{b}\right)^T\underline{\underline{C}}\left(\underline{\underline{D}}\underline{x}+\underline{e}\right)=\underline{\underline{A}}^T\underline{\underline{C}}\left(\underline{\underline{D}}\underline{x}+\underline{e}\right)+\underline{\underline{D}}^T\underline{\underline{C}}^T\left(\underline{\underline{A}}\underline{x}+\underline{b}\right)$

$\frac{\partial}{\partial \underline{x}}\left(\underline{a}^T\underline{x}\right)=\frac{\partial}{\partial \underline{x}}\left(\underline{x}^T\underline{a}\right)=\underline{a}$
$\frac{\partial}{\partial \underline{x}}\left(\underline{x}^T\underline{\underline{A}}\underline{x}\right)=\left(\underline{\underline{A}}^T+\underline{\underline{A}}\right)\underline{x}$
$\frac{\partial z}{\partial \underline{x}}=\frac{\partial \underline{y}}{\partial \underline{x}}\frac{\partial z}{\partial \underline{y}}$
$\frac{\partial z}{\partial \underline{x}}\neq\frac{\partial z}{\partial \underline{y}}\frac{\partial \underline{y}}{\partial \underline{x}}$ בדרך כלל
$\frac{\partial}{\partial \underline{x}}\underline{\underline{A}}^T\underline{x}=\frac{\partial}{\partial \underline{x}}\underline{x}^T\underline{\underline{A}}=\underline{\underline{A}}$

משפטי קירוב

משפט 90.1 משפט הקירוב הלינארי(=קירוב טיילור מסדר ראשון).תהא $f:U\longrightarrow\mathbb{R}$ פונקציה מעל קבוצה פתחה $U\subseteq\mathbb{R}^n$ אשר גזירה ברציפות פעמיים מעל U.תהא נקודה $x\in\mathbb{R}^n$ המקיימת $\boldsymbol{x}\in U$ ויהא $r>0$ המקיים $B(\boldsymbol{x},r)\subseteq U$.אזי לכל נקודה $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$ המקיימת $\boldsymbol{y}\in B(\boldsymbol{x},r)$קיים $\xi\in[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]$ כך ש:

$$f(\boldsymbol{y})=f(\boldsymbol{x})+\nabla f(\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})+\frac{1}{2}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})^T\nabla^2 f(\xi)(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})$$

משפט 91.1 משפט הקירוב הריבועי(=קירוב טיילור מסדר שני).תהא $f:U\longrightarrow\mathbb{R}$ פונקציה מעל קבוצה פתחה $U\subseteq\mathbb{R}^n$ אשר גזירה ברציפות פעמיים מעל U.תהא נקודה $x\in\mathbb{R}^n$ המקיימת $\boldsymbol{x}\in U$ ויהא $r>0$ המקיים $B(\boldsymbol{x},r)\subseteq U$.אזי לכל נקודה $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$ המקיימת $\boldsymbol{y}\in B(\boldsymbol{x},r)$מתקיים :

$$f(\boldsymbol{y})=f(\boldsymbol{x})+\nabla f(\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})+\frac{1}{2}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})^T\nabla^2 f(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})+o\left(\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|^2\right)$$

1.2 חומר של הרצאה 1

1.2.1 סוגי הבעיות שניתן לפתור בייעילות

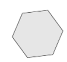
שם הבעיה	צורה מתמטית	פתרון	סבוכיות	הערות
Least squears	$\text{minimize } \Vert A\boldsymbol{x}-b\Vert_2^2$ $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$	$x^*=\left(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\right)^{-1}\boldsymbol{A}^T b$	$n^2k\left(\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{k\times n}\right)$	קל לזהוי.ניתן להוסיף גורם רגולרזציה
Linear programming	$\text{minimize } \Vert A\boldsymbol{x}-b\Vert_2^2$ $\text{s.t:}a_i^T x\leq b_i \quad ,i\in\{1,\ldots,m\}$ $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$	אין פתרון אנליטי או נוסחא סגורה.	סבוכיות $n^2m \text{ if } m\geq n$	קשה לזהוי.פונ' המטרה והאילוצים הם לינאריים.
בעיות קמורות Convex optimiztion problems	$\text{minimize} g\left(\boldsymbol{x}\right)$ $\text{s.t:}g_i\left(\boldsymbol{x}\right)\leq 0 \quad ,i\in\{1,\ldots,m\}$ $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$	בעיות Least squears וLinear programming הם מקרה פרטי של Convex optimiztion problems		פונקציית המטרה והאילוצים קמורים.

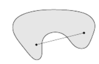
1.2.2 הגדרות הקשורות למושג הקמירות

הגדרה 92.1 קבוצה $C\subseteq\mathbb{R}^n$ תקרא **קבוצה קמורה** Convex set אם

$$\begin{gathered}\forall t\in\mathbb{R},t\in[0,1]:\\ \forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in C\Rightarrow t\boldsymbol{x}+(1-t)\,\boldsymbol{y}\in C\end{gathered}$$

הערה 93.1 במילים:קבוצה היא קמורה אם לכל 2 נקודות בקבוצה, הקו המחבר בין 2 הנקודות מכיל אך ורק נקודות ששייכות לקבוצה.

דוגמה 94.1 דוגמא לקבוצה קמורה 

דוגמה 95.1 דוגמא לקבוצה שאינה קמורה 

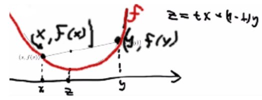
סימון 96.1 תהא פונ' $f:A\longrightarrow B$. נסמן את תחום ההגדרה של f $\text{dom}\left(f\right)\subseteq\mathbb{R}^n$.

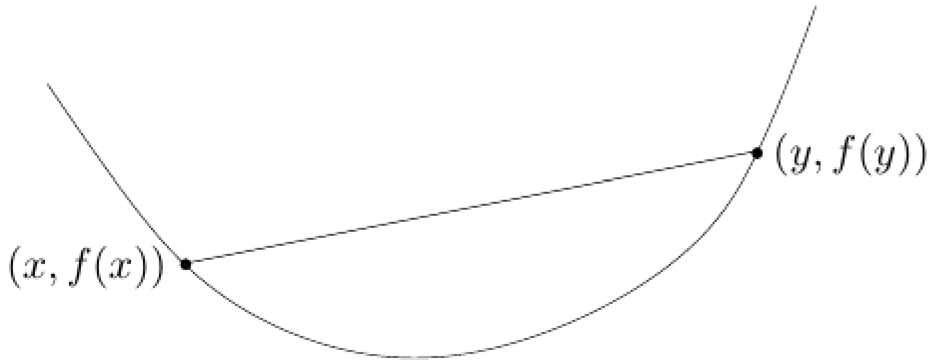
הגדרה 97.1 תהא פונקציה $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ כך ש $\text{dom}\left(f\right)\subseteq\mathbb{R}^n$ כאשר $\text{dom}\left(f\right)$ הוא קבוצה קונבקסית.אזי f תקרא **פונקציה קמורה** convex fumction אם

$$\begin{gathered}\forall t\in\mathbb{R},t\in[0,1]:\\ \forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\text{dom}\left(f\right)\Rightarrow f\left(t\boldsymbol{x}+(1-t)\,\boldsymbol{y}\right)\leq tf\left(\boldsymbol{x}\right)+(1-t)\,f\left(\boldsymbol{y}\right)\end{gathered}$$

הערה 98.1 לעתים ארשום פונ' קונבקסית / פונ' קמורה.חשוב לזכור כי זה אותו הדבר(שם לועזי ועברי לאותו הדבר)

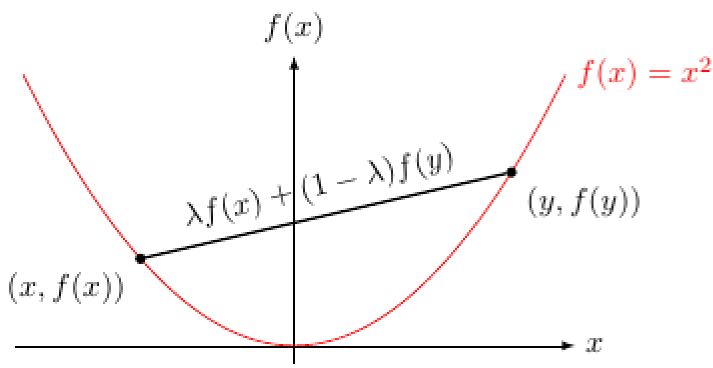
דוגמה 99.1 דוגמא לפונק' קונבקסית





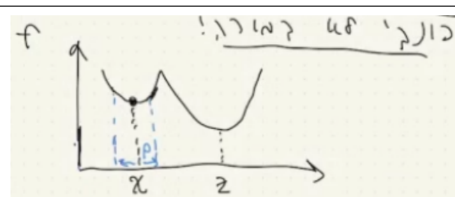
משמעות קמירות מבחינה גרפית:

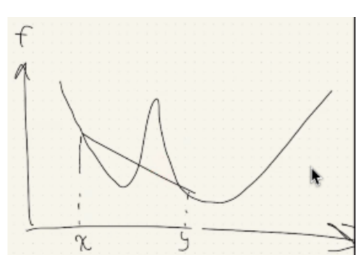
גרפית, הקטע המחבר בין שתי נקודות נמצא מעל לגרף הפונקציה.



הערה 100.1 כלומר פונ' f תקרא קונבקסית אם לכל x, y בתחום ההגדרה של f , הקו המחבר בין x ל y נמצא מעל הפונקציה f.

דוגמה 101.1 דוגמא לפונקציות **לא קמורות**





הגדרה 102.1 פונקצייה $h:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ תקרא **אפינית** אם לכל $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$, קיימים $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^n$ כך ש $h(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}$.

הגדרה 103.1 **בעיית אופטמזציה קמורה**.נתונה הבעיה הבאה

$$\begin{array}{ll} & \min_{x\in D} f(x) \\ \text{subject to } : & g_i(\boldsymbol{x})\le 0 \qquad ,i=1,\dots m \\ & h_j(\boldsymbol{x})=0 \qquad ,j=1,\dots r \end{array}$$

כאשר תחום $D=\operatorname{dom}(f)\cap\left[\bigcap_{i=1}^m \operatorname{dom}(g_i)\bigcap_{j=1}^p \operatorname{dom}(h_j)\right]$ הוא תחום ההגדרה המשותף לכל הפונ' תקרא **בעיית אופטמזציה קמורה** בהנתן ש f היא פונ' קמורה **וגם** $g_i(x),i=1,\dots m$ הם אילוצים קמורים ו $h_j(\boldsymbol{x}),j=1,\dots r$ הם פונקציות אפיניות.(כלומר שכל אילוצי השוויון הם מהצורה $h_j(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{a}_j^T\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}_j \qquad ,j=1,\dots r$)

משפט 104.1 אם f **פונקצייה קמורה** וקיים $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ כך ש $f(\boldsymbol{x})\le f(\boldsymbol{y})$: $\forall\boldsymbol{y}:\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|\le\rho$ עבור $\rho>0$ כלשהו,אזי $\forall y:f(\boldsymbol{x})\le f(\boldsymbol{y})$.

הערה 105.1 במילים אחרות , **אם** f פונקצייה קמורה ו x הוא מינימום לוקלי **אזי** $\boldsymbol{x}$ הוא מינימום גלובלי.

הערה 106.1 במילים אחרות **אם** f פונקצייה קמורה וקיים $\rho>0$ כך שעבורו $\forall\boldsymbol{y}\in B[\boldsymbol{x},\rho]:f(\boldsymbol{x})\le f(\boldsymbol{y})$ אזי $\forall\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$: $f(\boldsymbol{x})\le f(\boldsymbol{y})$.

משפט 107.1 הוכחה:
נזכיר את הסימון של כדור היחידה הסגור $B[\boldsymbol{c},r]\equiv\{x\mid\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}\|\le r\}$.
נתון נתון שf היא פונקציהי קמורה ונתון שקיים $\rho>0$ כך שעבורו $\forall\boldsymbol{y}\in B[\boldsymbol{x},\rho]:f(\boldsymbol{x})\le f(\boldsymbol{y})$.
צ"ל שלכל $\forall\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n:f(\boldsymbol{x})\le f(\boldsymbol{y})$.
הוכחה:
יהא $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$כשלהו.אם $\boldsymbol{y}\in B[\boldsymbol{x},\rho]$אזי מתקיים עבורו $f(\boldsymbol{x})\le f(\boldsymbol{y})$ מהנתון ולכן סיימנו.אחרת $\boldsymbol{y}\notin B[\boldsymbol{x},\rho]$.
אזי $B[\boldsymbol{x},\rho]\cap[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]\ne\emptyset$ ומכאן , ניתן למצוא $\boldsymbol{y}'\in\mathbb{R}^n$ כך ש $\boldsymbol{y}'\in(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$וגם ש $\boldsymbol{y}'\in B[\boldsymbol{x},\rho]$.כלומר

$$\exists\alpha\in(0,1)\subseteq\mathbb{R}:\boldsymbol{y}'=(1-\alpha)\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}\in B[\boldsymbol{x},\rho]$$

- $\boldsymbol{y}'\in B[\boldsymbol{x},\rho]$ ולכן מהנתון נובע כי $f(\boldsymbol{x})\le f(\boldsymbol{y}')$.נציב את $\boldsymbol{y}'$ ונקבל

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &\le f\left(\overbrace{\boldsymbol{y}'}^{(1-\alpha)\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}}\right) \\ &= f((1-\alpha)\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}) \\ &\overbrace{\le}^{f\text{ is convex}} (1-\alpha)f(\boldsymbol{x})+\alpha f(\boldsymbol{y}) \end{aligned}$$

- מכאן נובע כי

$$\begin{gathered} f(\boldsymbol{x})\le(1-\alpha)f(\boldsymbol{x})+\alpha f(\boldsymbol{y}) \\ \Rightarrow(\alpha-1)f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{x})\le\alpha f(\boldsymbol{y}) \\ \Rightarrow\alpha f(\boldsymbol{x})\le\alpha f(\boldsymbol{y}) \\ \overbrace{\Rightarrow}^{\alpha\in(0,1)\Rightarrow\alpha>0} \quad f(\boldsymbol{x})\le f(\boldsymbol{y}) \end{gathered}$$

הראנו כי $\forall\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n:f(\boldsymbol{x})\le f(\boldsymbol{y})$ וסיימנו $\blacksquare$.

2 הרצאה 2

הגדרה 1.2 צרוף קמור Convex combination של $x_1,\dots,x_k\in\mathbb{R}^n$.הוא כל צרוף לנארי $\theta_1x_1+\ldots+\theta_kx_k$ כך ש : $\forall i\in\{1,\dots,n\}$ $\theta_i\geq0$ וגם $\sum_{i=1}^{k}\theta_i=1$.

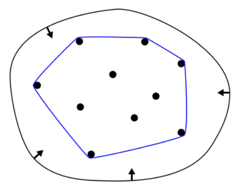
הגדרה 2.2 הקמור Convex hull (קרי קמור) של קבוצה C מסומן $\operatorname{conv}(C)$ומוגדר להיות כל הצרופים הקמורים של אלמנטים ב C.

משפט 3.2 הקמור של קבוצה C ($\operatorname{conv}(C)$) הוא קבוצה קמורה.

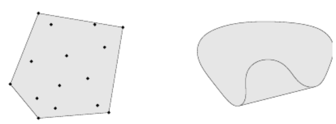
הערה 4.2 הקמור של קבוצה C הוא למעשה הגוף הקמור המינמלי המכיל את כל הנקודות בקבוצה C.

הערה 5.2 אינטואיציה (מתוך ויקפדיה)

- במרחב הדו מימדי: ניתן לדמות את הקמור לגומייה, שנמתחה כך שתקיף את כולם, ולאחר מכן שוחררה.
  - בשרטוט , נניח שהקבוצה C הם הנקודות השחורות, אזי העיגול השחור הוא כמו הגומיה המתוחה שצבועהבכחול והיא הקמור של הקבוצה C (הגומיה המתוחה הכחולה "שהתלבשה" על הנקודות השחורות").

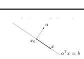
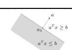
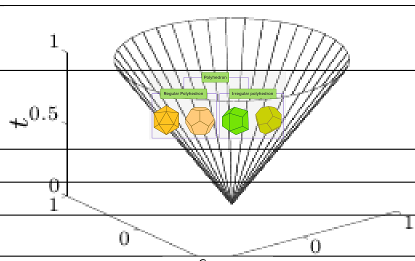
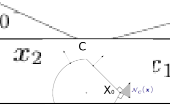
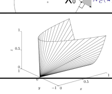


  - דוגמאות נוספות לקמור של צורות:



- במרחב התלת מימדי: ניתן לדמות את הקמור ליריעה אלסטית מתוחה, שמקיפה אוסף של עצמים גאומטריים.

דוגמה 6.2 דוגמאות לקבוצות קמורות:

דוגמא לקבוצה קמורה:	הגדרת קבוצה קמורה: $\forall t\in\mathbb{R},t\in[0,1]:$ $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in C\Rightarrow t\boldsymbol{x}+(1-t)\boldsymbol{y}\in C$	הערות	שרטוט
כדור נורמה norm ball	$\{x\mid\|x\|\leq r\}$עבור נורמה $\|\cdot\|$ ורדיוס r		
מישור hyper plane	$\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^n,b\in\mathbb{R},\|a\|=1:\left\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}=b\right\},\boldsymbol{a}\neq0$	a הוא ווקטור מנורמל. על מישור הוא גם קבוצה אפינית.	
חצי מישור half space	$\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^n,b\in\mathbb{R},\boldsymbol{a}\neq0,\|a\|=1:$ $\left\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}\geq b\right\}$ or $\left\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}\leq b\right\}$	a הוא ווקטור מנורמל.	
מרחב אפיני affine space	$\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n},\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^n:\{x\mid Ax=b\}$		
חרוט נורמה	$\{\{x,t\}\mid\|x\|\leq t\}$	אם $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ אז החרוט הוא תת מרחב של$\mathbb{R}^{n+1}$	
פולינדרומים	$\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leq\boldsymbol{b}\}$ כאשר : $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n},\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^n$ וכאשר בהקשר הזה הסימן $\leq$ מחושב לכל שורה בנפרד.		
קמור של קבוצה C כלשהי	$\operatorname{conv}(C)$	(נקרא סימפלקס של C)	
simplex	$\operatorname{conv}(e_1,\ldots,e_n)$	מקרה פרטי של פאון.	
conic hull	$S=\{x_1,\ldots,x_k\}$ $\operatorname{coni}(S)=\left\{\sum_{i=1}^{k}\theta_ix_i\mid x_i\in S,0\leq\theta_i\in\mathbb{R},i,k\in\mathbb{N}\backslash\{0\}\right\}$	$\forall S:0\in\operatorname{coni}(S)$	
normal cone	קבוצה $C\subseteq\mathbb{R}^n$ ונקודה $\boldsymbol{x}_0\in C$ $\mathcal{N}_C(\boldsymbol{x})=\left\{\boldsymbol{y}\mid\boldsymbol{y}^T(x-x_0)\geq0\text{ for all }x\in C\right\}$	$\mathcal{N}_C(\boldsymbol{x})$ הוא תמיד חרוט קמור (ולכן בפרט קבוצה קמורה)	
positive semidefinite c	$\boldsymbol{S}_+^n=\{\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{S}^n\mid\boldsymbol{X}\succeq0\}\in\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$	(כאשר $\boldsymbol{S}^n$ מסמן את מרחב המטריצות **הסמטריות**)	

הערה 7.2 כל הקבוצות בטבלה הם קבוצות קמורות.

2.1 קבוצות וקבוצות קמורות

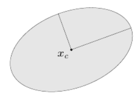
2.1.1 כדורים וחרוטים

נזכיר את ההגדרה של כדור (הפעם תחת נורמה L_2):

הגדרה(תזכורת) : כדור (אוקלידי) (כלומר כדור נורמה תחת הנורמה L_2) עם מרכז $x_c \in \mathbb{R}^n$ ורדיוס $r \in \mathbb{R}$:

$$B\left[x_c, r\right] = \{\boldsymbol{x} \mid \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_c}\| \leq r_c\} = \{\boldsymbol{x}_c + r\boldsymbol{u} \mid \|u\|_2 \leq 1\}$$

הגדרה 8.2 אליפסואיד הוא סט של נקודות מהצורה $\left\{\boldsymbol{x} \mid (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_c})^T P^{-1} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_c) \leq 1\right\}$ כאשר $P \in \boldsymbol{S}_{++}^n$ כלומר P היא חיובית מוגדרת.



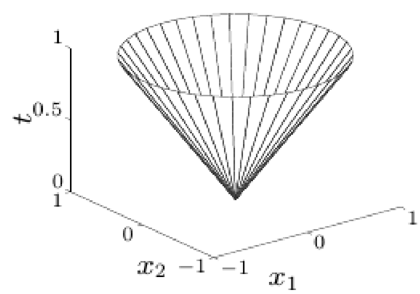
הערה 9.2 הגדרה שקולה לאליפסואיד : סט של נקודות מהצורה $\{\boldsymbol{x}_c + \boldsymbol{A}u \mid \|u\|_2 \leq 1\}$ כאשר $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ היא מטריצה ריבועית $n \times n$ שאינה סינגולרית (=הפיכה).

הגדרה (תזכורת) כדור נורמה (הפעם נורמה כללית כלשהיא) עם מרכז $\boldsymbol{x}_c \in \mathbb{R}^n$ ורדיוס $\boldsymbol{r}$

$$B\left[x_c, r\right] = \{\boldsymbol{x} \mid \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_c}\| \leq r\} = \{\boldsymbol{x}_c + r\boldsymbol{u} \mid \|u\| \leq 1\}$$

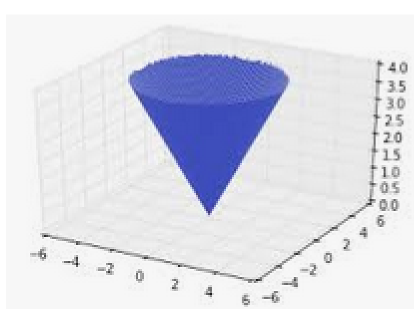
הערה 10.2 כדור נורמה הוא קובצה קמורה.

הגדרה 11.2 חרוט נורמה norm cone מוגדר להיות $\{(\boldsymbol{x}, t) \mid \|x\| \leq t\}$.



הערה 12.2 אם $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ אזי חרוט נורמה הוא קבוצה מעל המרחב $\mathbb{R}^{n+1}$.לדוגמא השרטוט הזה מציג חרוט קוני מעל הקבוצה $\mathbb{R}^3$(שימו לב כי $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$)

הערה 13.2 חרוט הנורמה הוא הקבוצה הכחולה (החרוט עצמו , כולל הקצוות) :



סימון 14.2 שם: חרוט נורמה תחת הנורמה האוקלידית L_2 נקרא גם **חרוט מסדר שני**.

הערה 15.2 חרוט נורמה הוא **קבוצה קמורה**.

2.1.2 פאון וסימפלקס - גופים קמורים

הגדרה 16.2 פאון Polyhedron (פוליהדרון)הוא קבוצה $\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}\}$ כאשר : $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ וכאשר בהקשר הזה הסימן $\leq$ מחושב לכל שורה בנפרד.כלומר

כלומר פאון היא הקבוצה המוגדרת על ידי אוסף $\boldsymbol{x}$-ים המהווים פתרונות למערכת המשוואות הלנארית (מערכת אילוצים (אישוויונות) לינארית) כלשהי:

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1+ & a_{12}x_2+ & \dots+ & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\ a_{21}x_1+ & a_{22}x_2+ & \dots+ & a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1+ & a_{n2}x_2+ & \dots+ & a_{nn}x_n & \leq & b_n \end{array} \overbrace{\rightarrow}^{\text{denoted as}} \boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$$

הערה 17.2 שימו לב שגם הקבוצה $\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{Cx} = \boldsymbol{d}\}$כאשר : $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n$ וכאשר בהקשר הזה הסימן $\leq$ מחושב לכל שורה בנפרד.**גם הוא פאון**.

הערה 18.2 פאון יכול להיות גם מתואר על ידי : $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$.

הערה 19.2 למה? כי אני יכול לבנות $\tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{C} \end{pmatrix}, \tilde{\boldsymbol{m}} = \begin{pmatrix} b \\ d \\ -d \end{pmatrix}$

- כזו ש: תכיל גם אילוצי אי שוויון המקוריים $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ וגם תכיל את האילוץ $\boldsymbol{Cx} \leq \boldsymbol{d}$ וגם תכיל את האילוץ $-\boldsymbol{Cx} \leq -\boldsymbol{d}$.(כך שלמעשה מע' האילוצים הכוללת
  - כך שהאילוץ $\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x} \leq \tilde{\boldsymbol{m}}$שקול לאילוצים $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{Cx} = \boldsymbol{d}$.ולכן ההערה נכונה.

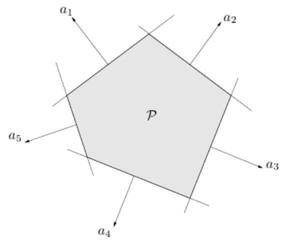
הערה 20.2 פאון היא צורה סגורה.(מכילה את נקודות השפה שלה)

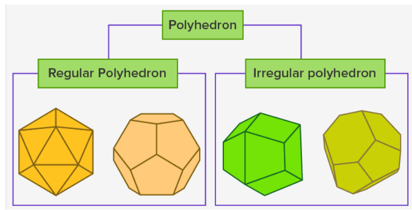
הערה 21.2 למה פאון היא צורה קמורה? הוכחה: נסמן ב a_i^T את השורה הi במטריצה A.אזי הפאון P הוא למעשה $P = \cap_{i=1}^{n}\left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{x} \leq b_i\right\}$.הקבוצה P היא קמורה לכל i כי עבור כל i הקבוצה $\left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{x} \leq b_i\right\}$ מהווה חצי מרחב HalfSpace וראינו שזו צורה קמורה.ראינ וכי חיתוך של קבוצות קמורות הוא קבוצה קמורה ולכן P הפולינדרום היא קבוצה קמורה.

מסקנה 22.2 הפאון שמוגדר על ידי $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ הוא חיתוך של m חצאי מרחב שכל אחד מהם במימד $\mathbb{R}^n$.

הערה 23.2 בחיים האמתיים פאונים הם צורות שלא בהכרח חייבות קמורות.אבל בקורס,דרך ההגדרה שלנו מחייבת שפאון הוא קבוצה קמורה.כי בקורס שלנו הפאון המוגדר הוא למעשה הגדרה אמיתית של"פוליהדרון קמור".(קיימים פוליהדרנים אחרים אבל האחד שמוגדר לנו בקורס מוגדר ככה שהוא קמור).

שרטוטים לדוגמא:





הגדרה 24.2 סימפלקס simplex הוא מקרה פרטי של פאון Polyhedron. הסימפלקס של $x_0, x_1, \ldots, x_k$ נתון על ידי $\text{conv}\{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$ (כלומר **הסימפלקס של** $x_0, x_1, \ldots, x_k$ **הוא הקמור** (קרי קמור) של הנקודות $x_0, x_1, \ldots, x_k$)

הערה 25.2 בשביל $\text{conv}\{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$ יוכל להיות מוגדר simplex על הנקודות $x_0, x_1, \ldots, x_k$ להיות **אי תלויות אפינית.** לא נכנסים להגדרה הזו בקורס

הערה 26.2 תזכורת הקמור של קבוצה C הוא למעשה הגוף הקמור המינמלי המכיל את כל הנקודות בקבוצה C.

הגדרה 27.2 הסימפלקס הוא תת קבוצה של הפאונים ומכיוון שכל פאון הוא קמור נובע כי הסימפלקס גם הוא קמור.

דוגמה 28.2 דוגמא לסימפלקסים:

- סימפלקס 0 מימדי הוא נקודה,סימפלקס 1 מימדי הוא קו , סימפלקס דו מימדי הוא משולש וסימפלקס תלת מימדי הוא פרמידה.

סימון 29.2 נסמן את ה**סימפלקס ההסתברות probability simplex** להיות הסימפלקס שמוגדר על ידי הנקודות $e_1, \ldots, e_n$ (וקטורי הבסיס הטאוואלי (=ווקטורי היחידה) למרחב $\mathbb{R}^n$).כלומר

$$\text{conv}\{e_1, \ldots, e_n\} = \left\{x \mid x \geq 0, 1^T x = 1\right\}$$

הערה 30.2 בקורס הזה **probability simplex נקרא לו בשם ה simplex.**

הערה 31.2 גוף קמור מאוד חשוב ומאוד מיוחד שנתקל בו הרבה בהמשך.

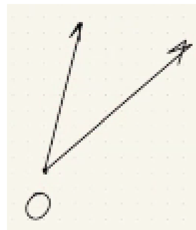
2.1.3 סוגי חרוטים (=קונוסים) - המשך

הגדרה 32.2 קבוצה $C \subseteq \mathbb{R}^n$ תקרא **חרוט** אם

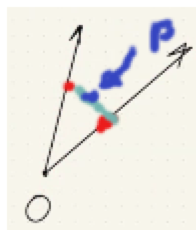
$$x \in C \Rightarrow tx \in C \text{ for all } t \geq 0$$

הערה 33.2 כלומר אם לוקחים כל נקודה בקבוצה ומכפילים אותה בסקלאר חיובי מקבלים נקודה שהיא בקבוצה.

הערה 34.2 קונוס באופן כללי לא חייב להיות קמור.לדוגמא החרוט הבא שמורכב מ2 קרניים בלבד):



נבחין כי הוא לא קמור כי אפשר למצוא שתי נקודות ולמתוח בינהם קו ולקבל נקודה p שאינה בקבוצה.



הגדרה 35.2 קבוצה $C \subseteq \mathbb{R}^n$ תקרא **חרוט קמור** convex cone אם היא קבוצה קמורה **וגם** היא חרוט.כלומר :

$$x_1, x_2 \in C \Rightarrow t_1 x_1 + t_2 x_2 \in C \text{ for all } t_1, t_2 \geq 0$$

הגדרה 36.2 קומבנציה קונית/צרוף קוני conic combination של $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$ הוא כל צרוף קוני

$$\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k$$

עבורו

$$\forall i \in \{1, \ldots, k\} : \theta_i \geq 0$$

הגדרה 37.2 conic hull של נקודות היא קבוצת כל הצרופים הקוניים של $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$.כלומר אם

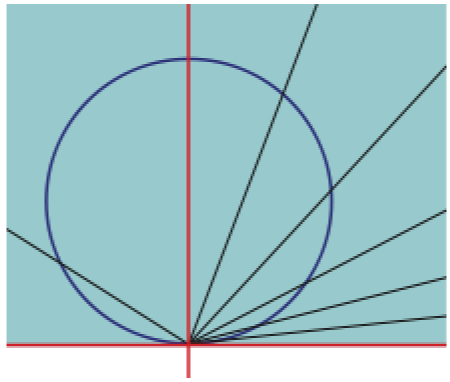
$$S = \{x_1, \ldots, x_k\}$$

$$\text{coni}\,(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \theta_i x_i \mid x_i \in S, 0 \leq \theta_i \in \mathbb{R}, i, k \in \mathbb{N} \backslash \{0\} \right\}$$

מסקנה 38.2 מההגדרה נובע ישירות כי ראשית הצירים $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ מקיימת שהיא שייכת לכל conic hull של כל קבוצה S, כלומר $\forall S : 0 \in \text{coni}\,(S)$.

הערה 39.2 conic hull צרוף קוני של נקודות הוא **קבוצה קמורה.**

דוגמה 40.2 (מוויקפדיה) במישור הדו מימדי, תהא S קבוצה של כל הנקודות של מעגל שחותך את ראשית הצירים (כמאוייר בשרטוט) אזי הconic hull S הוא **חצי מישור הפתוח העליון (צבוע בכחול).** (כלומר **לא כולל** את ציר הx)
איור:



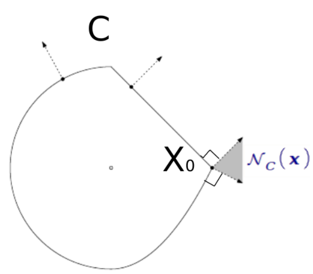
הגדרה 41.2 חרוט נורמאלי normal cone ($\neq$norm cone) עבור קבוצה $C \subseteq \mathbb{R}^n$ של הנקודה $\boldsymbol{x}_0 \in C$ הוא קבוצת כל הווקטורים $\boldsymbol{y}$ המקיימים $\boldsymbol{y}^T\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0}\right) \leq 0$ לכל $x \in C$.(כלומר הוא קבוצת כל הווקטורים שמגדירים על מישור תומך (supporing hyper plane) ל C בנקודה x_0 (ההגדרה של מישור תומך תוגדר בהמשך))

$$\mathcal{N}_C\left(\boldsymbol{x}\right)=\left\{\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x}_0 \geq \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x} \text{ for all } x \in C\right\}$$

או במילים אחרות:

$$\mathcal{N}_C\left(\boldsymbol{x}\right)=\left\{\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y}^T\left(x-x_0\right) \geq 0 \text{ for all } x \in C\right\}$$

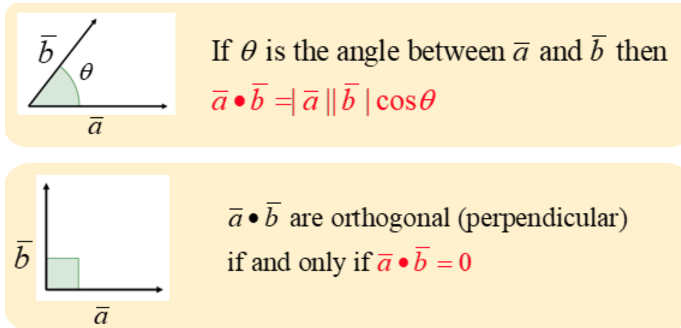
הערה 42.2 $\mathcal{N}_C\left(\boldsymbol{x}\right)$ הוא תמיד חרוט קמור (convex cone) בלי קשר לקבוצה C.(ובפרט קבוצה קמורה)



הערה 43.2 נזכיר כי מכפלה ווקטורים (=dot product) מוגדר גם כ

$$a^Tb=a\cdot b=\left|a\right|\left|b\right|\cos\left(\theta\right)$$

כאשר θ היא הזוויות שבין a, b.



הגדרה 44.2 מרחב המטריצות האי שליליות מוגדרות (באנגלית קראו לזה positive semidefinite cone) (זה כנראה סוג של מרחב חרוטי).כלומר $\boldsymbol{S}_+^n = \{\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{S}^n \mid \boldsymbol{X} \succeq 0\}$ (כאשר $\boldsymbol{S}^n$ מסמן את מרחב המטריצות **הסמטריות** $\boldsymbol{S}^n = \left\{\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}^T\right\}$).כפי שהוסבר קודם $\boldsymbol{S}_+^n \in \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

הערה 45.2 מרחב זה הוא מרחב **קמור**.

דוגמה 46.2 המרחב positive semidefinite cone מעל S^2 (מטריצות סמטריות 2×2) ניתן להראות כי

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} \in S_+^2 \iff X \succeq 0 \iff \begin{array}{c} x \geq 0 \\ z \geq 0 \\ xz \geq y^2 \end{array}$$

איור:

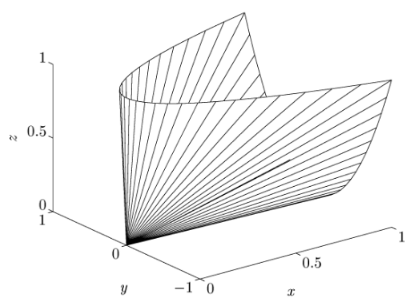


Figure 2.12 Boundary of positive semidefinite cone in $\mathbf{S}^2$.

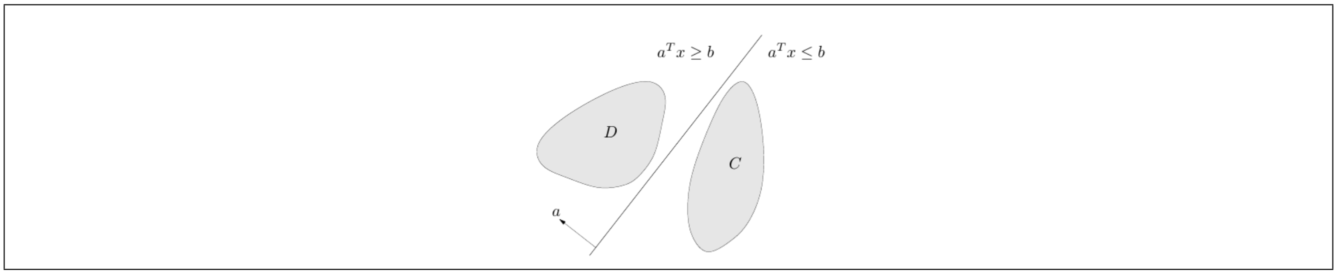
2.2 תכונות חשובות של קבוצות קמורות

משפט 47.2 משפט המישור המפריד.separating hyperplane theorem יהיו שני גופים קמורים $C, D \subseteq \mathbb{R}^n$ ולא ריקים (כלומר $C \neq \emptyset, D \neq \emptyset$) כך ש $C \cap D = \emptyset$ (הגופים זרים) אזי קיימים $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ כך ש

$$C \subseteq \left\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\right\}$$
$$D \subseteq \left\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}\right\}$$

הערה 48.2 כלומר, אם יש שני גופים קמורים זרים , יהיה קיים על מישור (לפחות אחד) שייפריד בינהם.

דוגמה 49.2 איור לדוגמא:



הגדרה 50.2 מישור תומך. יהא $C \subseteq \mathbb{R}^n$ גוף **כלשהו** ותהא $\boldsymbol{x_0} \in \mathrm{bd}(C)$ (=נקודה שפה של C, כלומר $\boldsymbol{x_0} \in \mathrm{bd}(C) = \mathrm{cl}(C) \setminus \mathrm{int}(C)$).יהא $0 \neq \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ המקיים $\forall x \in C : \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x_0}$. אזי נאמר שהמישור התומך $\left\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x_0}\right\}$ נקרא **המישור התומך לC בנקודה $\boldsymbol{x_0}$.**

הערה 51.2 משמעות התנאי $\forall x \in C : \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x_0}$ היא שתמקיים $\forall x \in C : \boldsymbol{a}^T(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}) \le 0$ כלומר, שהזוויות בין $\boldsymbol{a}$ לבין $(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0})$ (מווקטור שמתחיל מx_0 ומסתיים ב $\boldsymbol{x}$)היא או 90° או גדולה יותר (ואז קוסינוס הזוית בינהם יהיה שלילי ואז $\forall x \in C : \boldsymbol{a}^T(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}) \le 0$).

כלומר,שהמישור $\left\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x_0}\right\}$ **משיק** לגוף C בנקודה x_0.

דוגמה 52.2 דוגמא למישור תומך לגוף C בנקודה x_0:

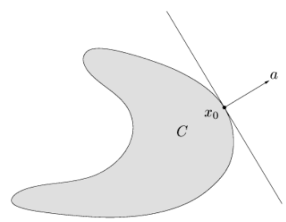


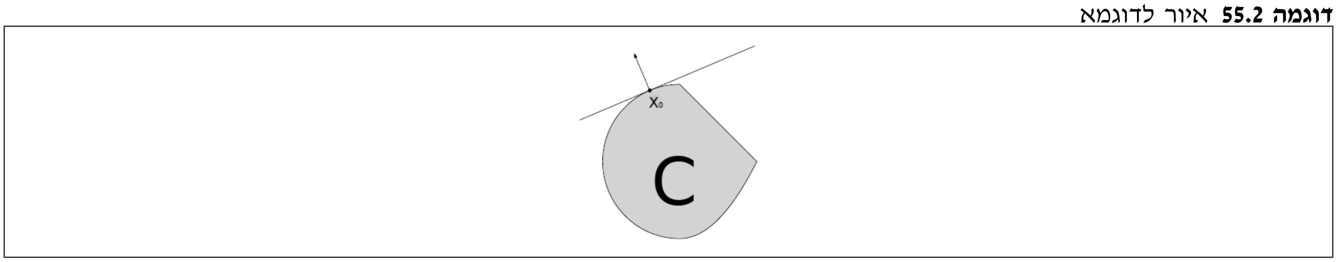
Figure 2.21 The hyperplane $\{x \mid a^Tx = a^Tx_0\}$ supports C at x_0.

משפט 53.2 משפט המישור התומך.supporting hyperplane theorem יהא $C \subseteq \mathbb{R}^n$ גוף **קמור** ולא ריק ($C \neq \emptyset$) ותהא $x_0 \in \mathrm{bd}(C)$ (=נקודה שפה של C) אזי **קיים** $a \in \mathbb{R}^n$ כך ש:

$$C \subseteq \left\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}_0\right\}$$

הערה 54.2 במילים אחרות,"בגבול/בכל נקודות שפה (שנסמן$\boldsymbol{x_0}$)" של הגוף הקמור C **תמיד** יהיה מישור תומך לC בנקודה $\boldsymbol{x}_0$.

דוגמה 55.2 איור לדוגמא



2.3 תכונות חשובות של פונקציות קמורות

סימון 56.2 משמעות הסימון $\mathrm{dom}(f)$ הוא **תחום ההגדרה** של הפונקציה $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.כלומר $\mathrm{dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^n$.

משפט 57.2 (מאוד חשוב) אי שוויון הגרדיאנט First-order characterization תהא $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ גזירה. אזי :

f היא פונקציה קמורה $\iff$ $\mathrm{dom}(f)$ היא תחום קמור **ובנוסף** $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathrm{dom}(f) : f(\boldsymbol{y}) \ge f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})$

מסקנה 58.2 (שהיא גם משפט בפני עצמו) תהא $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ גזירה וקמורה.אזי: $\nabla f(\boldsymbol{x})=0 \iff \boldsymbol{x}$ היא נקודת מינימום גלובלי של f.

מתוך ההרצאה:

למה התכונה הזו מעניינת?

תהא $\boldsymbol{x}^*$ נקודת המינימום הגלובלי של f

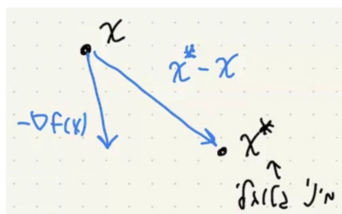
$$f(x^*) \geq f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x})^T (\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}) \Rightarrow$$

$$\nabla f(\boldsymbol{x})^T (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*) \geq \overbrace{f(\boldsymbol{x}) - f(x^*)}^{f(\boldsymbol{x})>f(x^*)} \Rightarrow$$

$$(-\nabla f(\boldsymbol{x}))^T (\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}) > 0 \Rightarrow$$

כלומר: להליכה בכיוון ירידת הגרדיאנט **קורולציה חיובית** עם הכיוון שבו עלינו ללכת על מנת להגיע למינימום הגלובלי.

איור :



הערה 59.2 המשמעות שבפונ' גזירות וקמורות : כל נקודה סטציונרית (=כלומר,כל נקודה שבה $\nabla f(\boldsymbol{x})=0$) היא **בהכרח** נקודה של מינימום גלובלי .

הערה 60.2 ניסוח שקול : יהא $C \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהא $f:C \longrightarrow \mathbb{R}$ גזירה אזי :

f היא פונקציה קמורה $\iff \forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in C : f(\boldsymbol{y}) \geq f(\boldsymbol{x}) + \langle \boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}, \nabla f(\boldsymbol{x}) \rangle$

הערה 61.2 הוכחה:

הוכחת כיוון אחד של המשפט (תרגילון):

תהא $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ גזירה וקמורה.

כיוון $\Leftarrow$:

נוכיח ש $\nabla f(\boldsymbol{x})=0 \Leftarrow \boldsymbol{x}$ היא נקודת מינימום גלובלי של f.

הוכחה:

f היא פונקציה קמורה.

ולכן,מאי שוויון הגרדיאנט (שתאיו מתקיימים):

$$\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathrm{dom}(f) : f(\boldsymbol{y}) \geq f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x})^T (\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})$$

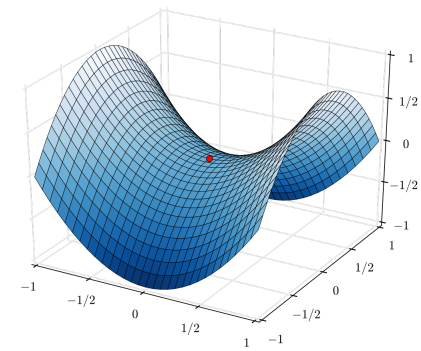
אזי עבור $\boldsymbol{x}$ שעבורו נתון ש $\nabla f(\boldsymbol{x})=0$ ולכן

$$\forall \boldsymbol{y} \in \mathrm{dom}(f) : f(\boldsymbol{y}) \geq f(\boldsymbol{x})$$

כלומר קיבלנו שלכל $\boldsymbol{y}$ מתקיים ש $f(\boldsymbol{y}) \geq f(\boldsymbol{x})$ ולכן $\boldsymbol{x}$ הוא נקודת מינימום גלובלי וסיימנו.■

הערה 62.2 המשפט **הזה לא נכון** עבור **פונקציות שאינם קמורות**.לדוגמא פונ' ברב מימד עם אוכף.(אזו שבו $\nabla f\left(\boldsymbol{x}\right)=0$ אבל היא לא נקודה של מינימום גלובלי ולא נקודה של מקסימוטם גלובלי).

דוגמה 63.2 פונ' **שאינה קמורה** עם אוכף ונקודה שבה $\nabla f\left(\boldsymbol{x}\right)=0$ (באדום) ונקודה זו אינה מינ'/מקס' גלובלי



משפט 64.2 אפיון מסדר שניsecond-order characterization תהא $f:\mathbb{R}^{n}\longrightarrow\mathbb{R}$ גזירה פעמיים ברציפות.אזי :
f היא קמורה $\iff$ $\mathrm{dom}\left(f\right)$ הוא תחום קמור **וגם** $\forall x\in\mathrm{dom}\left(f\right):\nabla^{2}f\left(\boldsymbol{x}\right)\succeq0$.

הערה 65.2 $\forall x\in\mathrm{dom}\left(f\right):\nabla^{2}f\left(\boldsymbol{x}\right)\succeq0$ הכוונה היא שפונ' ההאסיאן של f בכל נקודה x היא מטריצה אי שלילית .

הערה 66.2 ניסוח שקול : יהא $C\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום קמור ותהא $f:C\longrightarrow\mathbb{R}$ גזירה פעמיים ברציפות אזי :
f היא פונקציה קמורה $\iff$ $\forall\boldsymbol{x}\in C:\nabla^{2}f\left(\boldsymbol{x}\right)\succeq0$

הערה 67.2 זו גם תכונה חזקה מאוד ושימושית בשביל להוכיח קמירות.

דוגמה 68.2 דוגמה לשימוש במשפט ניתן למצוא בהוכחה ש $\text{log-sum-exp(softmax)}$ היא פונקציה קמורה.(עמוד 30 הרצאה 2) אני לא מוסיף אותה כאן כי היא סתם עמוסה.וגם ככה המסמך הזה עמוס.

משפט 69.2 אי שוויון יינסן Jensen's inequality .אם $f:\mathrm{dom}\left(f\right)\longrightarrow\mathbb{R}$ פונקציה קמורה ו X משתנה אקראי כך ש X מקבל ערכים בתחום ההגדרה של f.כלומר $X\subseteq\mathrm{dom}\left(f\right)$ אזי

$$f\left(\mathbb{E}\left[X\right]\right)\leq\mathbb{E}\left[f\left(X\right)\right]$$

אינטואציה:
התכונה של קמירות היא למעשה מקרה פרטי של אי שוויון ינסן.

- הגדרה של קמירות היא למעשה "צרוף ("צרוף קמור") של שתי נקודות הוא מעל הפונ'"
- אי שויון ינסן משצמש בהגדרה הזו רק עם יותר מצרוף של שתי נקודות.

במקרה הבדיד $i = 1, 2, \ldots$

$$P\left(X = x_i\right) = p_X\left(i\right)$$

$$\mathbb{E}\left[X\right] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_X\left(i\right)$$

במקרה הרציף (הרחבה לרצף)

$$\mathbb{E}\left[X\right] = \int_x x f_X\left(x\right) dx$$

כאשר $f_X\left(x\right)$ היא פונ' הצפיפות של x.
בשני המקרים התוחלת של $\mathbb{E}\left[X\right]$ היא למעשה צרוף קמור (של כמות סופית/אינסוף נוקודות) של הנקודות x_i־ים.ומכאן מגיעה האינטואציה למשפט.
הוכחת אי שוויון ינסן:
להשלים מסוף הראצה 3.

הערה 70.2 ניסוח שקול **לאי שוויון יינסן** Jensen's inequality. תהא $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ פונקציה קמורה ויהיו $x_1, x_2, \ldots, x_N \in C$ וכן $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \geq 0$ כך ש $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1$ אזי

$$f\left(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{N} \lambda_i f\left(x_i\right)$$

2.4 על מישורים ־ לינארי ואפיני

הגדרה 71.2 נגדיר "על מישור לינארי" באופן הבא $\left\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x} = 0\right\}$: $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$.

הערה 72.2 $0 \in \mathbb{R}^n$ שייך לכל על מישור לינארי .

נגדיר "על מישור אפיני" באופן הבא $\left\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\right\}$: $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$.

2.5 פעולות משמרות קמירות

משפט 73.2 חיתוך: חיתוך של גופים קמורים הוא גוף קמור.

דוגמה 74.2 אם $B, A \subseteq \mathbb{R}^n$ גופים קמורים אז $C = A \cap B$ הוא גוף קמור.

משפט 75.2 הזזה כיווץ ומתיחה: אם $C \subseteq \mathbb{R}^n$ גוף קמור אזי $\boldsymbol{a}C + \boldsymbol{b} = \left\{\boldsymbol{a}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} \mid \boldsymbol{x} \in C\right\}$ הוא גוף קמור לכל $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$.

משפט 76.2 פונקציה אפינית או הופכית לה.Affine images and pre images תהא $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ פונקציה מהצורה $f\left(\boldsymbol{x}\right) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ (=פונקצייה אפינית) עבור $m, n \in \mathbb{N} \backslash \left\{0\right\}$ עבור מטריצות $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ ויהא $\boldsymbol{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ גוף קמור.אזי $f\left(C\right) = \left\{f\left(\boldsymbol{x}\right) \mid \boldsymbol{x} \in C\right\} \subseteq \mathbb{R}^m$ הוא גוף קמור.
באופן דומה אם $f : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$ פונקציה מהצורה $f\left(\boldsymbol{x}\right) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ (פונקצייה אפינית) עבור $m, n \in \mathbb{N} \backslash \left\{0\right\}$ עבור מטריצות $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$.ובנוף אם $S \subseteq \mathbb{R}^n$ **תחום קמור**.אזי התחום $f^{-1}\left(S\right) = \left\{\boldsymbol{x} \mid f\left(\boldsymbol{x}\right) \in S\right\} \subseteq \mathbb{R}^k$ גם הוא תחום קמור.

נ"ל לדוגמא: יהיו $A_1, A_2, \ldots, A_k, B \in \mathbb{S}^n$.(כלומר כולם מטריצות סמטריות).**מערכת אי שיוויונות לינארית־מטיריצית** linear matrix inequality היא התנאי מהצורה $A(\boldsymbol{x}) \preceq B$ עבור $A(\boldsymbol{x}) = x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_kA_k$ ועבור $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^k$.
נסמן $C = \{\boldsymbol{x} \mid A(\boldsymbol{x}) \preceq B\}$.**צ"ל** ש C הוא קבוצה קמורה.
הוכחה:

- **דרך ראשונה:** לבדוק עבור כל זוג נקודות $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in C$ שגם $t\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{y} \in C$ (עבור $t \in (0,1)$.כלומר, לבדוק ש $A\left(\overbrace{t\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{y}}^{\boldsymbol{z}}\right) \preceq B$ כלומר לבדוק ש $z_1A_1 + z_2A_2 + \ldots + z_kA_k \preceq B$ כלומר לבדוק שלכל $v \in \mathbb{R}^n$ מתקיים $v^T(z_1A_1 + z_2A_2 + \ldots + z_kA_k)v \leq v^TBv$ כלומר לבדוק ש $v^T\left(\sum_{i=1}^k z_iA_i - B\right)v \leq 0$ כלומר לבדוק ש $v^T\left(B - \sum_{i=1}^k z_iA_i\right)v \leq 0$ עבור $z_i = tx_i + (1-t)y_i$.

- **דרך שניה:** תהא $f : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{S}^n$ **פונקציה איפינית** המוגדרת באופן הבא $f(\boldsymbol{x}) = B - \sum_{i=1}^n x_iA_i \subseteq \mathbb{S}^n$.אנו יודעים כי $\mathbb{S}_+^n$ מוכל ב $\mathbb{S}^n$.כלומר $\mathbb{S}_+^n \subseteq \mathbb{S}^n$.בנוסף ראינו כי $\mathbb{S}_+^n$ הוא **תחום קמור**.עלינו לשים לב כי $C = f^{-1}\left(\mathbb{S}_+^n\right)$ כי $C =$ $\{\boldsymbol{x} \mid A(\boldsymbol{x}) - B \preceq 0\} = \{\boldsymbol{x} \mid A(\boldsymbol{x}) \preceq B\}$ ולכן C הוא תחום קמור.

הערה 77.2 נבחין כי $\mathbb{S}^n = \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ ולכן תנאי המשפט מתקיימים.כמו כן ניתן בקלות יחסית להראות כי $A(\boldsymbol{x}) - B \preceq$ $0 \iff A(\boldsymbol{x}) \preceq B$ ולכן ההוכחה הנ"ל תקפה.

הגדרה 78.2 Perspective Images הפונקציה הprespective היא פונקציה $P : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{++} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ המוגזרת להיות $\forall(\boldsymbol{x}, z) \in$ $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{++} : P(\boldsymbol{x}, z) = \frac{1}{z} \cdot \boldsymbol{x}$.

הערה 79.2 (נבחין כי $z \in \mathbb{R}_{++}$ כלומר $z > 0$ (שלם חיובי))

משפט 80.2 שימור קימרות תחת Perspective Images and preimages :

- אם $C \subseteq \mathrm{dom}(P)$ (=אם קבוצה C השייכת לתחום P) היא **קבוצה קמורה** אזי $P(C)$ היא גם קבוצה קמורה.
- אם D היא קבוצה קמורה אזי גם $P^{-1}(D) = \{\boldsymbol{x} \mid P(\boldsymbol{x}) \in D\}$ היא קבוצה קמורה.

הגדרה 81.2 Linear fractional function .הPerspective map שנורתץ עם פונקציה אפינית $f(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c^T}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d}}$ נקראת Linear fractional function .כלומר Linear fractional function היא פונקציה $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ המוגדרת על ידי $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \boldsymbol{b} \in$ $\mathbb{R}^m, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n, d \in \mathbb{R}$ כך

$$f(\boldsymbol{x}) = P\left(\boldsymbol{A}x + b, \boldsymbol{c^T}\boldsymbol{x} + d\right) = \frac{\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c^T}\boldsymbol{x} + d}$$

הערה 82.2 הפונקציה Linear fractional function היא מקרה פרטי של Perspective map במימדים $P : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{++} \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

מסקנה 83.2 מסקנה ישירה מהמשפט הקודם:עבור Linear fractional images and preimages המוגדרות עבור $\boldsymbol{c^T}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d} > 0$

- אם $C \subseteq \mathrm{dom}(f)$ (=אם קבוצה C השייכת לתחום P) היא קבוצה קמורה אזי $f(C)$ היא גם קבוצה קמורה.
- אם D היא קבוצה קמורה אזי גם $f^{-1}(D) = \{\boldsymbol{x} \mid f(\boldsymbol{x}) \in D\}$ היא קבוצה קמורה.

הנ"ל דוגמא: יהיו U,V משתנים אקראיים בדידים מעל $\{1,\ldots,n\}$ ו $\{1,\ldots,m\}$ בהתאמה.
נגדיר $C\subseteq\mathbb{R}^{nm}$ קבוצה של הסתברויות משותפות של U,V.כלומרלכל איבר בקבוצה $p_{i,j}\in C$ מגדיר התפלגות משותפת כך $p_{i,j}=\mathbb{P}\left(U=i,V=j\right)$.
כלומר C היא קבוצה של מטריצות $m\times n$ (או ווקטורים mn) שסוכמם כל הכינסות שלהם יחד שווה ל 1 (כי הם מתארים פונ' התפלגות משותפת) ומתארים את ההתפלגויות המשותפות (ניתן להשתכנע שC מוכל ב propapilty simplex).
נגדיר $D\subseteq\mathbb{R}^{nm}$ הקבוצה המתאימה שמכילה הסתברויות מותנות $q_{ij}=\mathbb{P}\left(U=i\mid V=j\right)$.
נניח כי C קבוצה קמורה.נוכיח כי D קבוצה קמורה.
אנו יודעים כי Linear fractional function משמרת קמירות.
נבחר לייצג את $\boldsymbol{x}$ בתור מטריצה (אבל בחישוב של ה Linear fractional function יש להראות את החישוב כ$\boldsymbol{x}$ מחשוב בתור עמודה) .אזי

$$D=\left\{ q=\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & a_{1m}\\ q_{21} & q_{22} & \vdots & a_{2m}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ q_{n1} & q_{n2} & \vdots & a_{nm} \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{nm}:q_{ij}=\frac{p_{ij}}{\sum_{k=1}^{n}p_{kj}}\text{ for some }p\in C\right\} =f\left(C\right)$$

וניתן למצוא Linear fractional function שמבצעת את הטרנספורמציה הנ"ל.(קצת חופר להראות את זה אבל זה אפשרי).
ולכן מכיוון ש Linear fractional function משמרת קמירות $D=f\left(C\right)$ הוא תחום קמור.

משפט 84.2 צרוף לנארי אי שלילי.nonnegative linear combination . יהיו $f_{1},\ldots,f_{m}$ פונקציות קמורות.אזי לכל $\alpha_{1},\ldots,\alpha_{m}\geq0$ סקלארים אי שליליים הפונקציה

$$\alpha_{1}f_{1}+\ldots+\alpha_{m}f_{m}$$

היא פונקציה קמורה.

משפט 85.2 ("מקסימום של פונקציות קמורות") Pointwise maximiztion . תהיה קבוצה S. ויהיו $\{f_{1},f_{2},\ldots\}$ פונקציות.אם לכל $s\in S$ הפונקציה f_{s} היא פונקציה קמורה אזי הפונקציה $g\left(\boldsymbol{x}\right)=\max_{s\in S}f_{s}\left(\boldsymbol{x}\right)$ היא גם פונקצייה קמורה.

הערה 86.2 נבחין כי S יכולה להיות גם קבוצה אינסופית.הקבוצה S **לא חייבת ליהיות בת מניה**.

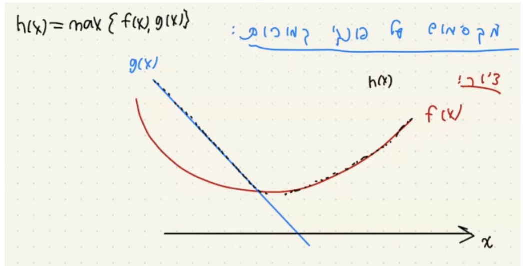
הערה 87.2 מניחים במשפט הזה שהפונקציות $\{f_{1},f_{2},\ldots\}$ חיות תחת אותו domain כלומר $\forall i,j\in\mathbb{N}\backslash\left\{ 0\right\} :\mathrm{dom}\left(f_{i}\right)=\mathrm{dom}\left(f_{j}\right)$.

הערה 88.2 קיימת גרסא של המשפט (שלא למדנו) עבורה אין דרישה שהשהפונקציות $\{f_{1},f_{2},\ldots\}$יחיו תחת אותו domain.ואז

$$\mathrm{dom}\left(g\right)=\bigcap_{i\in\{1,2,\ldots\}}\mathrm{dom}\left(f_{i}\right)$$

דוגמה 89.2 איורים לדוגמא:

ציור מתוך ההרצאה:



ציור מהאינרנט:

הערה 90.2 הוכחת גרסא מצומצמת של המשפט:

נוכיח את המשפט עבור קבוצה בת 2 פונקציות.ההוכחה עבור קבוצה גדולה יותר או אינסופית של פונקציות היא דומה אבל דורשת כתיבה מסובכת יותר.

משפט 91.2 (מקסימום בין 2 פונ' קמורות) אם $f,g:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ קמורות ו $\mathrm{dom}\left(f\right)=\mathrm{dom}\left(g\right)$ אזי הפונקציה $h\left(\boldsymbol{x}\right):\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n:h\left(\boldsymbol{x}\right)=\max\left\{f\left(\boldsymbol{x}\right),g\left(\boldsymbol{x}\right)\right\}$ היא קמורה בתחום $\mathrm{dom}\left(h\right)\equiv\mathrm{dom}\left(f\right)=\mathrm{dom}\left(g\right)$.

הוכחה:

- f קמורה ולכן לפי הגדרת קמירות $\begin{matrix}\forall t\in\mathbb{R},t\in[0,1]:\\ \forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathrm{dom}\left(f\right)\Rightarrow f\left(t\boldsymbol{x}+\left(1-t\right)\boldsymbol{y}\right)\leq tf\left(\boldsymbol{x}\right)+\left(1-t\right)f\left(\boldsymbol{y}\right)\end{matrix}$.
- g קמורה ולכן לפי הגדרת קמירות $\begin{matrix}\forall t\in\mathbb{R},t\in[0,1]:\\ \forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathrm{dom}\left(g\right)\Rightarrow g\left(t\boldsymbol{x}+\left(1-t\right)\boldsymbol{y}\right)\leq tg\left(\boldsymbol{x}\right)+\left(1-t\right)g\left(\boldsymbol{y}\right)\end{matrix}$
- אזי $\forall t\in\mathbb{R},t\in[0,1]$ ולכל $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathrm{dom}\left(h\right)$ מתקיים:
  - $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathrm{dom}\left(h\right)=\mathrm{dom}\left(f\right)=\mathrm{dom}\left(g\right)$ ולכן מתקיים ש:

$$\begin{aligned}h\left(t\boldsymbol{x}+\left(1-t\right)\boldsymbol{y}\right)&=\max\left\{f\left(t\boldsymbol{x}+\left(1-t\right)\boldsymbol{y}\right),g\left(t\boldsymbol{x}+\left(1-t\right)\boldsymbol{y}\right)\right\}\\&\leq\max\left\{tf\left(\boldsymbol{x}\right)+\left(1-t\right)f\left(\boldsymbol{y}\right),tg\left(\boldsymbol{x}\right)+\left(1-t\right)g\left(\boldsymbol{y}\right)\right\}\\&\leq\ldots\end{aligned}$$

נשים לב כי

$$\begin{gathered}\forall\boldsymbol{x}\in\mathrm{dom}\left(f\right):f\left(\boldsymbol{x}\right)\leq\max\left\{f\left(\boldsymbol{x}\right),g\left(\boldsymbol{x}\right)\right\}=h\left(\boldsymbol{x}\right)\\ \forall\boldsymbol{y}\in\mathrm{dom}\left(f\right):f\left(\boldsymbol{y}\right)\leq\max\left\{f\left(\boldsymbol{y}\right),g\left(\boldsymbol{y}\right)\right\}=h\left(\boldsymbol{y}\right)\\ \Downarrow\\ \forall t\in\mathbb{R},t\in[0,1]:tf\left(\boldsymbol{x}\right)+\left(1-t\right)f\left(\boldsymbol{y}\right)\leq th\left(\boldsymbol{x}\right)+\left(1-t\right)h\left(\boldsymbol{y}\right)\end{gathered}$$

באופן דומה,

$$\forall t\in\mathbb{R},t\in[0,1]:tg\left(\boldsymbol{x}\right)+\left(1-t\right)g\left(\boldsymbol{y}\right)\leq th\left(\boldsymbol{x}\right)+\left(1-t\right)h\left(\boldsymbol{y}\right)$$

ולכן

$$\begin{aligned}h\left(t\boldsymbol{x}+\left(1-t\right)\boldsymbol{y}\right)&=\max\left\{f\left(t\boldsymbol{x}+\left(1-t\right)\boldsymbol{y}\right),g\left(t\boldsymbol{x}+\left(1-t\right)\boldsymbol{y}\right)\right\}\\&\leq\max\left\{tf\left(\boldsymbol{x}\right)+\left(1-t\right)f\left(\boldsymbol{y}\right),tg\left(\boldsymbol{x}\right)+\left(1-t\right)g\left(\boldsymbol{y}\right)\right\}\\&\leq\max\left\{th\left(\boldsymbol{x}\right)+\left(1-t\right)h\left(\boldsymbol{y}\right),th\left(\boldsymbol{x}\right)+\left(1-t\right)h\left(\boldsymbol{y}\right)\right\}\\&=th\left(\boldsymbol{x}\right)+\left(1-t\right)h\left(\boldsymbol{y}\right)\end{aligned}$$

והראנו כי $\begin{matrix}\forall t\in\mathbb{R},t\in[0,1]:\\ \forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathrm{dom}\left(h\right)\Rightarrow h\left(t\boldsymbol{x}+\left(1-t\right)\boldsymbol{y}\right)\leq th\left(\boldsymbol{x}\right)+\left(1-t\right)h\left(\boldsymbol{y}\right)\end{matrix}$ ולכן h קמורה לפי הגדרה. ■

משפט 92.2 parital minimization. תהיה פונקציה $g:\mathbb{R}^{m+n}\longrightarrow\mathbb{R}$. נסמן $\boldsymbol{z}=\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)\in\mathbb{R}^{m+n}$. אזי אם $\overbrace{g\left(\boldsymbol{z}\right)}^{=g\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)}$ קמורה בתחום C אזי

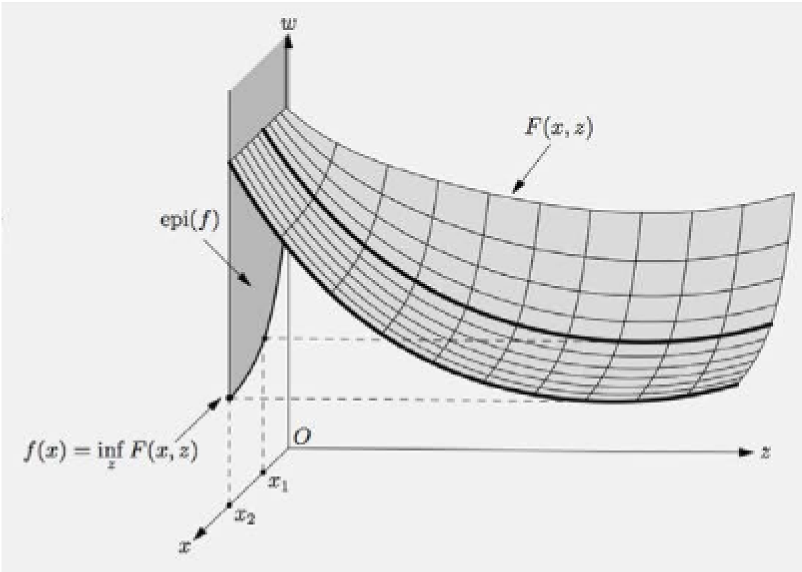
$$f\left(x\right)=\min_{y\in C}g\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)$$

גם היא פונקציה קמורה.

הערה 93.2 אם לקוחים פונ' שקמורה בכמה משתנים.ומגדרים פונ' חדשה שהיא הפונ' מינימיזציה של הפונ' המקורית בחלק משמתנים.אז הפונ' המתקבלת גם היא קמורה.

דוגמה 94.2 דוגמא להמחשה:

זו לא תמונה שמסבירה הכי טוב אבל זה יותר טוב מכלום:



מרחק מקבוצה

Examle: distances to a set

תרגיל ראשון מרחק מקסמלי מקבוצה:

תהא C קבוצה כלשהי.

נגדיר את פונקציית **מקסימום המרחק** של $C \subseteq \mathbb{R}^n$ תחת נורמה שרירותית כלשהי$\|\cdot\|$ באופן הבא $f(\boldsymbol{x}) = \max_{\boldsymbol{y}\in C} \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$

הוכח ש $f(\boldsymbol{x})$ היא פונקציה קמורה.

פתרון:

תהא קבוצה $S = \mathbb{R}^n$ לכל $s \in S$ נגדיר את הפונקציה $f_s(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{s}\|$.

- אנו יודעים כי $\|\cdot\|$ היא קמורה לכל נורמה.
- אנו יודעים כי קומבנציה אפינית משמרת קמירות. כלומר if l is convex,then $g(x) = l(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b})$ is convex ופרט $l \equiv \|\cdot\|$ ועבור $\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{s}$ ו $\boldsymbol{A} = I$
- נקבל $f_s(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{s}\|$ היא קמורה.

הראנו כי לכל $s \in S$ $f_s(\boldsymbol{x})$ היא קמורה ולפי המשפט Pointwise maximiztion יינבע כי $f(\boldsymbol{x}) = \max_{\boldsymbol{y}\in C} \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$ היא פונקציה קמורה.

תרגיל שני מרחק מינימלי מקבוצה קמורה:

תהא C קבוצה **קמורה** כלשהי.

נגדיר את פונקציית **מינימום המרחק** של $C \subseteq \mathbb{R}^n$ תחת נורמה שרירותית כלשהי$\|\cdot\|$ באופן הבא $f(\boldsymbol{x}) = \min_{\boldsymbol{y}\in C} \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$.

הוכח ש $f(\boldsymbol{x})$ היא פונקציה קמורה.

הוכחה:

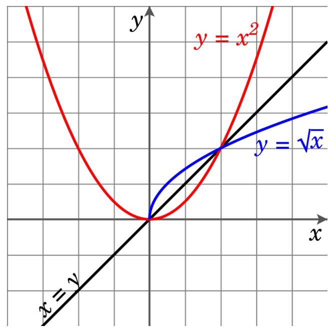
תהא קבוצה $S = \mathbb{R}^n$ לכל $s \in S$ נגדיר את הפונקציה $f_s(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{s}\|$.מאותו נימוק של קומבנציה אפינית קודם , לכל $s \in S$ $f_s(\boldsymbol{x})$ היא קמורה .

לפי המשפט parital minimization (שתנאיו מתקיימים כי C קבוצה קמורה) יינבע כי $f(\boldsymbol{x}) = \min_{\boldsymbol{y}\in C} \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$ היא פונקציה קמורה.

2.6 פעולות משמרות קמירות

הגדרה 95.2 Restriction . הRestriction של פונקציה f היא פונקציה חדשה שמסומנת $f\mid_A$ שמושגת באמצעות צמצום התחום המקורי של f.באופן פורמלי אם $f: A \longrightarrow B$ היא פונקציה . אזי נגדיר פונקציה הRestriction של פונקציה f באופן הבא: $f\mid_c : C \longrightarrow B$ עבור $C \subseteq A$ המקיימת $\forall c \in C : f\mid_C (c) = f(c)$.

דוגמה 96.2 ל$f(x) = x^2$ אין פונקציה הופכית בתחום $\mathbb{R}$.אבל לפונקציה $f\mid_{\mathbb{R}^+}(x)$ (כלומר הRestriction של פונקציה f עבור תחום $\mathbb{R}^+$) יש פונקציה הופכית: $\sqrt{x}$) איור:



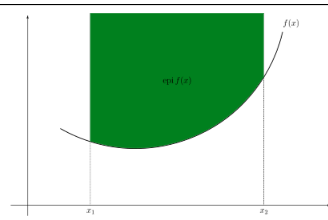
משפט 97.2 f היא פונקציה קמורה $\iff$ הRestriction של פונקציה f עבור כל **קו** היא פונקציה קמורה.

הגדרה 98.2 קבוצת האפיגרף Epigrph של פונקציה $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ מוגדר להיות קבוצת כל הנקודות שנמצאאות על או מעל הפונקציה.האפיגרף של פונקציה $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ שייך למימד $\mathbb{R}^{n+1}$.כלומר

$$\mathrm{epi}(f) = \{(\boldsymbol{x}, \mu) \mid x \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R}, \mu \geq f(\boldsymbol{x})\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

לדוגמא:

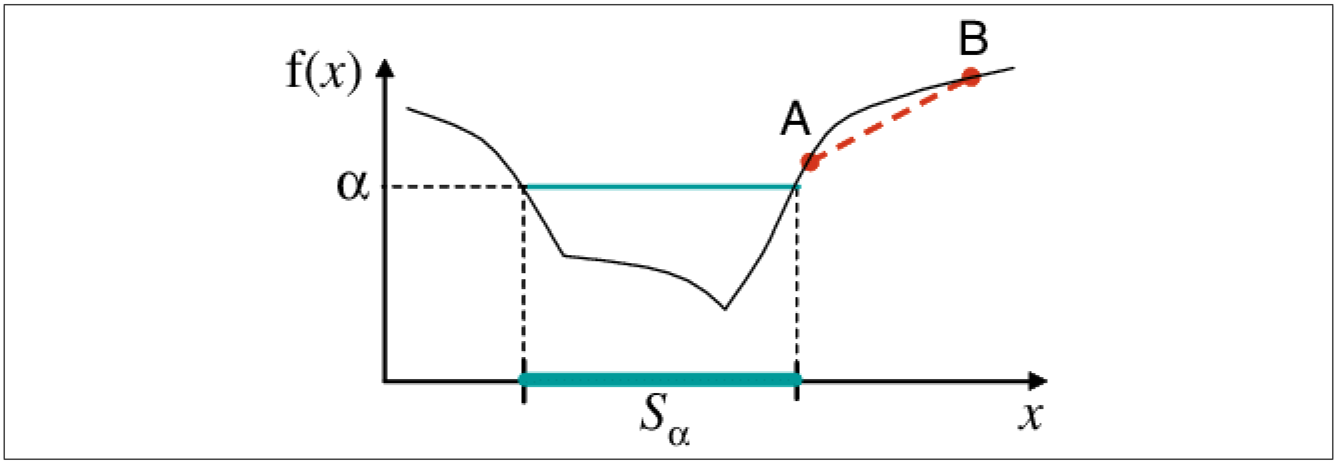
דוגמה 99.2 דוגמא לאפיגרף (צבוע בירוק) לפונקציה (שצבועה בשחור).שימו לב שהפונקציה היא $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ אבל האפיגרף שלה חיי במימד $\mathbb{R}^2$.



משפט 100.2 f היא **פונקציה** קמורה $\iff$ האפיגרף Epigrph של פונקציה f היא **קבוצה** קמורה.

הגדרה 101.2 קבוצת הsublevel set של פונקציה f.תהא f פונקציה אזי לכל $t \in \mathbb{R}$, הקבוצה $\{\boldsymbol{x} \in \mathrm{dom}(f) \mid f(\boldsymbol{x}) \leq t\}$ תקרא הsublevel set ביחס ל t של פונקציה f. סימון אפשרי S_t.

דוגמה 102.2 דוגמא לsublevelsets של פונקציה f ביחס ל α :



הערה 103.2 הsublevel set חיי בימימד $\mathbb{R}^n$. (כי $\{\boldsymbol{x}\in\operatorname{dom}(f)\mid f(\boldsymbol{x})\le t\}\subseteq\operatorname{dom}(f)\subseteq\mathbb{R}^n$)

הערה 104.2 למעשה הsublevel set ביחס ל t הוא **קבוצת הנקודות בתחום של** f שהפעלת f עליהם (=שתמונותם) תניב ערך קטן מ t
.

משפט 105.2 אם f היא פונקציה קמורה **אז** לכל t הsublevel set של f ביחס ל t היא קבוצה קמורה.

הערה 106.2 המשפט ההפוך אינו נכון.

משפט 107.2 הרכבה אפינית (קומבנציה אפינית) Affine composition. אם $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ היא פונקציה קמורה. אז לכל $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times n},\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^m$ מתקיים ש $g(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b})$ היא פונקציה קמורה.

משפט 108.2 כללי הרכבה כללית **General composition** תהא $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ ו $h:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$. $f=h\circ g$ (כלומר $\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n: f(\boldsymbol{x})\equiv(h\circ g)(\boldsymbol{x})\equiv h(g(\boldsymbol{x}))$). אזי:

				אזי	
אם	h קמורה ולא יורדת	וגם	g קמורה	$\Leftarrow$	f קמורה
	h קמורה ולא עולה		g קעורה		f קמורה
	h קמורה ולא יורדת		g קעורה		f קעורה
	h קמורה ולא עולה		g קמורה		f קעורה

דוגמה 109.2 $e^{g(x)}$ קמורה אם $g(x)$ היא קמורה. למה?

- הפונ' $h(g(\boldsymbol{x}))\equiv(h\circ g)(\boldsymbol{x})\equiv f(\boldsymbol{x})=e^{g(x)}$ עבור $h(x)=e^x$ ו $g:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$.
- הפונ' $h(x)=e^x$ היא קמורה ולא יורדת (במקרה הזה היא אפילו עולה ממש).ולכן לפי שורה ראשונה: אם g קמורה אז f קמורה.

דוגמה 110.2 $f(x)=\frac{1}{g(x)}$ היא קמורה אם g היא קעורה. במקרה הזה $h(x)=\frac{1}{x}$ לכל x חיובי. ולכן לכל $\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n: g(\boldsymbol{x})>0$ מתקיים ש $\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n: g(\boldsymbol{x})>0: f(\boldsymbol{x})=h(g(\boldsymbol{x}))$ לפי שורה 2 נובע שאם g היא קעורה אז f קמורה.

הערה 111.2 אינטואציה לאיך לזכור את הכללים של הרכבה כללית:

$f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ היא פונ' סקלארית (הפלט הוא חד מימדי) ולכן אם $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : f''(\boldsymbol{x}) \geq 0$ אזי f היא פונ' קמורה.
(ואם $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : f''(\boldsymbol{x}) \leq 0$ אזי f היא פונ' קעורה.)
נפעיל את כלל השרשרת פעמיים :

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{\partial^2}{\partial^2 \boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial^2 \boldsymbol{x}} \left[h\left(g\left(\boldsymbol{x}\right)\right)\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \left[h\left(g\left(\boldsymbol{x}\right)\right)\right]\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \left[\frac{\partial \left[h\left(g\left(\boldsymbol{x}\right)\right)\right]}{\partial g\left(\boldsymbol{x}\right)} \cdot \frac{\partial \left[g\left(\boldsymbol{x}\right)\right]}{\partial \boldsymbol{x}}\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \left[h'\left(g\left(\boldsymbol{x}\right)\right) \cdot g'\left(\boldsymbol{x}\right)\right] \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \left(h'\left(g\left(\boldsymbol{x}\right)\right)\right) \cdot g'\left(\boldsymbol{x}\right) + h'\left(g\left(\boldsymbol{x}\right)\right) \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \left(g'\left(\boldsymbol{x}\right)\right)\right] \\
&= \left[\left(\frac{\partial h'\left(g\left(\boldsymbol{x}\right)\right)}{\partial g\left(\boldsymbol{x}\right)} \cdot \frac{\partial g\left(\boldsymbol{x}\right)}{\boldsymbol{x}}\right) \cdot g'\left(\boldsymbol{x}\right) + h'\left(g\left(\boldsymbol{x}\right)\right) \cdot g''\left(\boldsymbol{x}\right)\right] \\
&= h''\left(g\left(\boldsymbol{x}\right)\right) \cdot g'\left(\boldsymbol{x}\right) \cdot g'\left(\boldsymbol{x}\right) + h'\left(g\left(\boldsymbol{x}\right)\right) \cdot g''\left(\boldsymbol{x}\right) \\
&= h''\left(g\left(\boldsymbol{x}\right)\right) \cdot \left(g'\left(\boldsymbol{x}\right)\right)^2 + h'\left(g\left(\boldsymbol{x}\right)\right) \cdot g''\left(\boldsymbol{x}\right)
\end{aligned}$$

כלומר

$$\boxed{f''(x) = h''\left(g\left(\boldsymbol{x}\right)\right) \cdot \left(g'\left(\boldsymbol{x}\right)\right)^2 + h'\left(g\left(\boldsymbol{x}\right)\right) \cdot g''\left(\boldsymbol{x}\right)}$$

- אם h קמורה אזי $h''\left(g\left(\boldsymbol{x}\right)\right) \geq 0$.
- $\left(g'\left(\boldsymbol{x}\right)\right)^2$ הוא תמיד חיובי (ריבוע של איזה שהוא מספר הוא תמיד חיובי).
- אם g קמורה אזי $g''\left(\boldsymbol{x}\right) > 0$.ואם h לא עולה אזי $h'\left(\boldsymbol{x}\right) \geq 0$ ובפרט גם $h'\left(g\left(\boldsymbol{x}\right)\right) \geq 0$ ולכן
- אם h היא קמורה ולא יורדת וגם g קמורה אז f קמורה:

$$f''(x) = \overbrace{h''\left(g\left(\boldsymbol{x}\right)\right)}^{\substack{\text{h is convex} \\ \geq 0}} \cdot \overbrace{\left(g'\left(\boldsymbol{x}\right)\right)^2}^{\substack{\text{always} \\ \geq 0}} + \overbrace{h'\left(g\left(\boldsymbol{x}\right)\right)}^{\substack{h \text{ is nondecresing} \\ \geq 0}} \cdot \overbrace{g''\left(\boldsymbol{x}\right)}^{\substack{g \text{ is convex:} \\ \geq 0}} \geq 0 \Rightarrow f \text{ is convex}$$

- אם h היא קמורה ולא עולה וגם g קעורה אז f קמורה:

$$f''(x) = \overbrace{h''\left(g\left(\boldsymbol{x}\right)\right)}^{\substack{\text{h is convex} \\ \geq 0}} \cdot \overbrace{\left(g'\left(\boldsymbol{x}\right)\right)^2}^{\substack{\text{always} \\ \geq 0}} + \overbrace{\overbrace{h'\left(g\left(\boldsymbol{x}\right)\right)}^{\substack{h \text{ is nonincrising} \\ \leq 0}} \cdot \overbrace{g''\left(\boldsymbol{x}\right)}^{\substack{g \text{ is concave:} \\ \leq 0}}}^{\geq 0} \geq 0 \Rightarrow f \text{ is convex}$$

הערה 112.2 אפשר להראות זאת גם על המשפטים האחרים בטבלה.לפי אותה הנוסחא .

הערה 113.2 (ניסוח דומה למשפט 1 בטבלה למעלה מתוך תרגול 3 (הניסוח מדוייק יותר כי הוא מתייחס לתחומי ההגדרות של הפונ') יהא $C \subseteq \mathbb{R}^n, I \subseteq \mathbb{R}, f: C \longrightarrow I, g: I \longrightarrow \mathbb{R}$.אם f, g קמורות וg לא יורדת. אזי $g(f(\boldsymbol{x}))$ היא פונק' קמורה.

משפט 114.2 **Vector comostion** נניח ש $f(\boldsymbol{x}) = h(g(\boldsymbol{x})) = h(g_1(\boldsymbol{x}), g_2(\boldsymbol{x}), g_3(\boldsymbol{x}), \ldots, g_k(\boldsymbol{x}))$. כאשר
$$\begin{array}{l} g: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k \\ h: \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R} \\ f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \end{array}$$
אזי :

				אזי	
אם	h קמורה ולא יורדת עבור כל ארגמנט בנפרד.	וגם	g_i קמורה עבור כל $i \in \{1 \ldots, k\}$.	$\Leftarrow$	f קמורה
	h קמורה ולא עולה עבור כל ארגמנט בנפרד.		g_i קעורה עבור כל $i \in \{1 \ldots, k\}$		f קמורה
	h קמורה ולא יורדת עבור כל ארגמנט בנפרד.		g_i קעורה עבור כל $i \in \{1 \ldots, k\}$		f קעורה
	h קמורה ולא עולה עבור כל ארגמנט בנפרד.		g_i קמורה עבור כל $i \in \{1 \ldots, k\}$		f קעורה

דוגמה 115.2 $\sum_{i=1}^{M} \log g_i(x)$ היא קמורה אם $\forall i \in \{1, \ldots, M\}$ g_i היא קמורה וחיובית. (כי סכום של k $\log$־ים לא יורדת עבור ערכים חיוביים).

הערה 116.2 הוכחת קמירות של softmax נראה בתרגול ונוסיף לכאן למסמך בהמשך.

2.6.1 טבלה מסכמת:פעולות משמרות קמירות

פעולות משמרות קמירות - טבלה מסכמת	
שם הפעולה	**תיאור הפעולה**
חיתוך	A, B is convex $\Rightarrow A \cap B = C$ is convex
הזזה כיווץ ומתיחה	אם $C \subseteq \mathbb{R}^n$ גוף קמור אזי $\boldsymbol{a}C + \boldsymbol{b} = \{\boldsymbol{a}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} \mid \boldsymbol{x} \in C\}$ הוא גוף קמור לכל $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$.
	$\forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$: C is convex $\Rightarrow \boldsymbol{a}C + \boldsymbol{b}$ is convex
Affine images and pre images	$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\forall m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$: C is convex $\Rightarrow f(C) = \{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in C\}$ is convex D is convex $\Rightarrow f^{-1}(D) = \{\boldsymbol{x} \mid f(\boldsymbol{x}) \in D\}$ is convex
Perspective Images	$\forall m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, $P: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{++} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $\forall (\boldsymbol{x}, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{++} : P(\boldsymbol{x}, z) = \frac{1}{z} \cdot \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ note that $z > 0$ $C \subseteq \mathrm{dom}(P)$ is convex $\Rightarrow P(C)$ is convex D is convex $\Rightarrow P^{-1}(D)$ is convex
Linear fractional function (מקרה פרטי של Perspective Images)	$\forall m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{d} \in \mathbb{R}$, such that $\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d} > 0, f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $f(\boldsymbol{x}) = P\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{x} + d\right) = \frac{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{x} + d}$: $C \subseteq \mathrm{dom}(f)$ is convex $\Rightarrow f(C)$ is convex D is convex $\Rightarrow f^{-1}(D)$ is convex
צרוף לנארי אי שלילי (=צרוף משקולות אי שלילי)	$f_1, \ldots, f_m$ are convex and $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \geq 0$ $\Rightarrow g = \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_m f_m$ is convex
Pointwise maximiztion (המשפט נכון גם עבור סופרמום ולא רק עבור מקסימום)	let be set S and let $\{f_1, f_2, \ldots\}$ a set of functions if $\forall s \in S : f_s$ is convex functions $\Rightarrow g(\boldsymbol{x}) = \max_{s \in S} f_s(\boldsymbol{x})$ is a convex function
Partial minimization	denote $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ let C be convex set C and let $\overbrace{f(\boldsymbol{z})}^{=g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}$ convex function $\Rightarrow g(\boldsymbol{x}) = \min_{y \in C} g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ is a convex function
Affine composition	if f is convex, then $g(x) = f(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b})$ is convex

2.6.2 טבלה מסכמת:משפטי קמירות

משפטי קמירות - טבלה מסכמת
f היא פונקציה קמורה $\iff$ הRestriction של פונקציה f עבור כל קו היא פונקציה קמורה.
f היא **פונקציה** קמורה $\iff$ האפיגרף Epigrph של פונקציה f היא **קבוצה** קמורה.
f היא פונקציה קמורה $\Leftarrow$ לכל t הsublevel set של f ביחס ל t היא קבוצה קמורה.(הערה:הכיוון ההפוך לא נכון)
f היא פונקציה קמורה $\iff$ $\text{dom}(f)$ היא תחום קמור **ובנוסף** $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \text{dom}(f) : f(\boldsymbol{y}) \geq f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x})^T (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})$
תהא $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ גזירה וקמורה.**אזי:** $\nabla f(\boldsymbol{x}) = 0 \iff \boldsymbol{x}$ היא נקודת מינימום גלובלי של f.
תהא $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ גזירה פעמיים ברציפות.אזי : f היא קמורה $\iff$ $\text{dom}(f)$ היא תחום קמורה **וגם** $\forall x \in \text{dom}(f) : \nabla^2 f(\boldsymbol{x}) \succeq 0$
(אי שוויון ג'ייסן Jensen's inequality) אם f פונקציה קמורה ו X משתנה אקראי כך ש X מקבל ערכים שהרם רק בתחום ההגדרה של f.   כלומר אם $X \subseteq \text{dom}(f)$ אזי $f(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[f(X)]$
אם $f(\boldsymbol{x})$ קמורה $\Leftarrow$ אזי $g(\boldsymbol{x}, y) = y \cdot f\left(\frac{1}{y} \cdot \boldsymbol{x}\right)$ היא קמורה (בהנתן ש $y > 0$)

2.7 אנליזת פונקציות קמרות - מונחים ודוגמאות

מינוחים נוספים

משפט 117.2 פונקציה קעורה.פונקציה f תקרא קעורה $\iff$ $-f$ היא פונקציה קמורה.(כלומר האי שוויונות של הקמירות מתקימות בכיוון ההפוך)

נזכר בהגדרת קמירות:

הגדרה תהא פונקציה $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ כך ש $\text{dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^n$ כאשר $\text{dom}(f)$ הוא קבוצה קונבקסית.אזי f תקרא **פונקציה קמורה** convex fumction אם

$$\forall t \in \mathbb{R}, t \in [0,1] :$$
$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \text{dom}(f) \Rightarrow f(t\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{y}) \leq tf(\boldsymbol{x}) + (1-t) f(\boldsymbol{y})$$

הגדרה 118.2 פונקציה קמורה ממש stictly convex :פונקציה $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ תקרא כך ש f **קמורה ממש** stictly convex אם f היא פונקציה קמורה וגם

$$\forall t \in \mathbb{R}, t \in (0,1) :$$
$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \text{dom}(f) \text{ such that } \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y} \Rightarrow f(t\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{y}) < tf(\boldsymbol{x}) + (1-t) f(\boldsymbol{y})$$

הערה 119.2 כלומר f היא קמורה וגם f אינה קו לינארי.

הערה 120.2 כלומר, f קמורה ממש אם בהגדרת הקמירות מחליפים כל אי שוויון חלש $\leq$ באי שוויון חריף $<$.

הגדרה 121.2 פונקציה קמורה חזק strongly convex :פונקציה $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ תקרא m **קמורה חזק** strongly convex אם קיים $m > 0$ כלשהו כך ש $f - \frac{m}{2} \|\boldsymbol{x}\|_2^2$ היא פונקצייה קמורה.

הערה 122.2 פונקציה קמורה חזק זו תכונה מאוד שימושית וחשובה.

משפט 123.2 פונקציה קמורה חזק⇐פונקציה קמורה ממש⇐ פונקציה קמורה.
(כלומר $\text{strongly convex} \Rightarrow \text{stictly convex} \Rightarrow \text{convex}$)

הערה 124.2 קיים משפט והגדרות מקבילים עבור פונקציות קעורות.

דוגמאות לפוקנקציות קמורות

הערות	שם	פונקציה $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$	תנאי לקמירות	תנאי לקעירות
פונקציות של x **במשתנה יחיד**: כלומר $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$	אקספוננט עבור $x\in\mathbb{R},\ a\in\mathbb{R}$	e^{ax}	קמורה לכל $a\in\mathbb{R}$	$\times$ (לעולם לא קעורה)
	power function חזקה	x^a	קמורה לכל $a\geq 1$ או $a\leq 0$ עבור $x\in\mathbb{R}_+$ (לדוגמא x^2)	קעורה לכל $0\leq a\leq 1$ עבור $x\in\mathbb{R}_+$ (לדוגמא $\sqrt{x}$)
	לוגריתם	$\log(x)$	$\times$ (לעולם לא קמורה)	קעורה לכל $x\in\mathbb{R}_{++}$.
	פונקציות אפיניות	$Q\in\mathbb{R}^{n\times n},\ \boldsymbol{b}^T\in\mathbb{R}^n$: $\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x}+c$	אם $Q\succeq 0$ (אי שלילית מוגדרת) אז הפונקציה תמיד קמורה	לא כתוב.
(מסקנה משורה קודמת)	Least squares loss	$\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n},\ \boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$ $\Vert\boldsymbol{y}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\Vert_2^2$	**קמורה תמיד** לכל $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$. (כי תמיד $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\succeq 0$)	$\times$ (לעולם לא קעורה)
נכון לכל נורמה שהיא	נרומה	$\Vert x\Vert$ כלשהי (לדוגמא $\Vert x\Vert_p$, $\Vert x\Vert_\infty$)	**קמורה תמיד**	$\times$ (לעולם לא קעורה)
	פונקציית אינדיקטור	$I_C(\boldsymbol{x})=\begin{cases}0 & \boldsymbol{x}\in C\\ \infty & x\notin C\end{cases}$	אם C היא קבוצה קמורה , $I_C(\boldsymbol{x})$ היא קמורה.	לא כתוב.
(פונקציית התמך מודדת את המרחק של מישורים תומכים לקבוצה C מהראשית)	פונקציית התמך	$I_C^*(\boldsymbol{x})=\max_{y\in C}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}$	**קמורה תמיד , לכל C :** **(גם עבור C קמורה וגם עבור C שאינה קמורה)**	$\times$ (לעולם לא קעורה)
	פונקציית המקסימום	$f(x)=\max\{x_1,\ldots,x_n\}$	**קמורה תמיד**	$\times$ (לעולם לא קעורה)

3 הרצאה 3 + תחילת הרצאה 4) ותרגול 3 .

3.1 הרצאה

שיעור קודם התמקדנו בתכונות של פונ' קמורות.בחלק הזה נדבר בעיקר על אופטמזציה.

3.1.1 טרמינולוגיות

מתחילים בקטן

- הבעיה $\begin{matrix}\min f(x)\\ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d\end{matrix}$ נקראת "בעית אופטמזציה קמורה ללא אילוצים" **אם:**
  - $f:\mathbb{R}^d\longrightarrow\mathbb{R}$ היא פונקצייה קמורה.
- הבעיה $\begin{matrix}\min f(x)\\ \boldsymbol{x}\in C\subseteq\mathbb{R}^d\end{matrix}$ נקראת "בעית אופטמזציה קמורה עם אילוצים" **אם:**
  - $f:\mathbb{R}^d\longrightarrow\mathbb{R}$ היא פונקצייה **קמורה**
  - **וגם** התחום C **הוא תחום קמור**.

(האילוצים הם ש $\boldsymbol{x}$ חייבים להיות שייכים לתחום C).

הגדרה פורמלית - ניסוח כללי

הגדרה 1.3 הבעיה

$$\begin{gathered}\min_{\boldsymbol{x}\in D} f(\boldsymbol{x})\\ (\text{subject to})\,\text{s.t}:\\ \forall i\in\{1,\ldots,m\}:g_i(\boldsymbol{x})\leq 0\\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\end{gathered}$$

נקראת "בעיית אופטמזציה קמורה " כאשר

- $f:\mathbb{R}^d\longrightarrow\mathbb{R}$ היא פונקצייה קמורה.f נקראת **פונקציית המטרה**.
- $\forall i\in\{1,\ldots,m\}:\ g_i$ הם פונקציות קמורות.$\forall i\in\{1,\ldots,m\}:\ g_i$ נקראים **אילוצי אי השוויון**.

הערה 2.3 התחום D מוגדר על ידי $D=\mathrm{dom}(f)\cap\bigcap_{i=1}^m\mathrm{dom}(g_i)$.(בד"כ אנו לא מציינים במפורש את D)

- אם קיימת נקודה $\boldsymbol{x}$ המקיימת: $\boldsymbol{x}\in D$, וגם $\forall i\in\{1,\ldots,m\}:g_i(\boldsymbol{x})\leq 0$ וגם $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$.אזי $\boldsymbol{x}$ נקראת נקודה פיזבלית feasible point.(כלומר $\boldsymbol{x}$ מקיימת את האילוצים).

  כלומר נקודה $\boldsymbol{x}$ נקראת פיזבילית אם היא מקיימת את האילוצים של הבעיה.

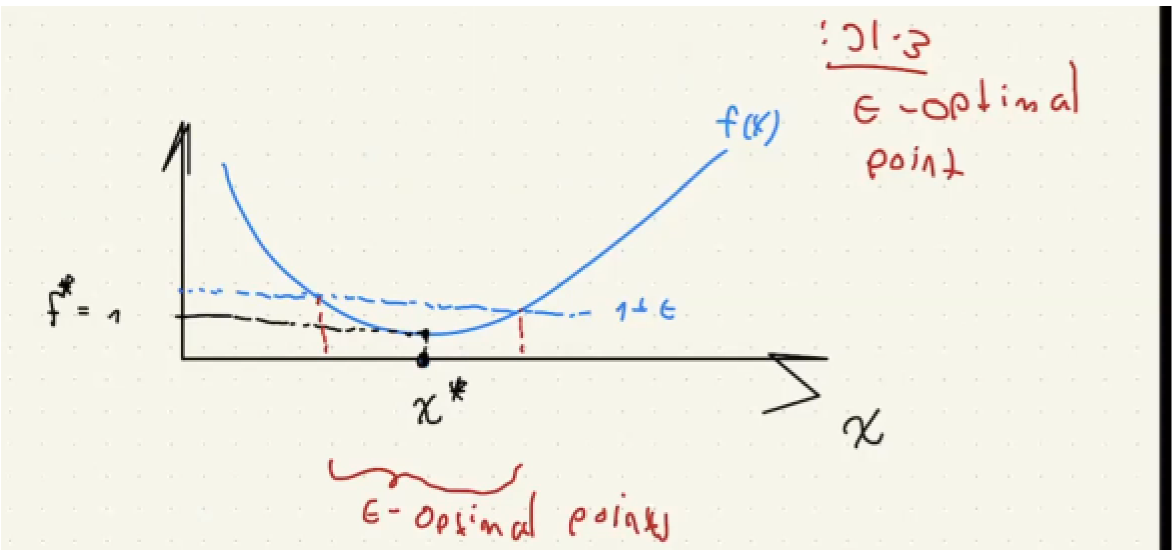
- הערך המינימלי של $f(\boldsymbol{x})$ תחת כל הנקודות $\boldsymbol{x}$ שמקיימות את האילוצים (כלומר כל ה feasible points) נקרא **הערך האופטמלי** ומסומן f^*.

- אם $\boldsymbol{x}$ היא נקודה פיזבלית וגם $f(\boldsymbol{x})=f^*$ אזי $\boldsymbol{x}$ נקרא **אופטמלי** optimal.או נקראת **הפתרון** solution.

- אם $\boldsymbol{x}$ היא נקודה פיזבלית וגם $f(\boldsymbol{x})\leq f^*+\epsilon$ עבור $\epsilon>0$ כלשהו, אזי נקודה $\boldsymbol{x}$ תקרא "ϵ אופטמלי" ϵ suboptimal.(נקרא גם ϵ optimal)

  - כמעט בדרך כלל לא נחפש פתרון אופטמלי ונסתפק במציאת פתרון שהוא ϵ אופטמלי.

ציור של דוגמא ל ϵ אופטמלי.



- אם $\boldsymbol{x}$ היא נקודה פיזבילית וגם $g_i(\boldsymbol{x})=0$ נאמר ש g_i היא **פעילה** בנקודה $\boldsymbol{x}$ (g_i is active at $\boldsymbol{x}$)

- מינמזציה של פונ' קמורה יכול להיות מובטא על ידי מקסמזציה של פונ' קעורה:

$$\begin{array}{c}\min_{\boldsymbol{x}\in D} f(\boldsymbol{x})\\ \text{(subject to)}\,\text{s.t}:\\ \forall i\in\{1,\ldots,m\}:g_i(\boldsymbol{x})\leq 0\\ \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}\end{array}\iff\begin{array}{c}\max_{\boldsymbol{x}\in D} -f(\boldsymbol{x})\\ \text{(subject to)}\,\text{s.t}:\\ \forall i\in\{1,\ldots,m\}:g_i(\boldsymbol{x})\leq 0\\ \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}\end{array}$$

שתי הבעיות נקראות בעיות אופטמזציה.

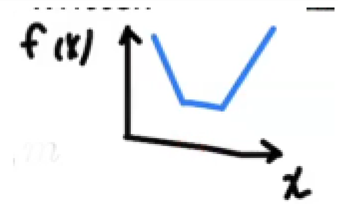
תכונות של אוסף הפתרונות של בעיית אופטמזציה

הגדרה 3.3 נסמן X_{opt} להיות אוסף הנקודות שמהוות פתרון של בעיית האופטמציה הקמורה.אזי:

$$X_{\text{opt}}=\left\{x\mid\begin{array}{c}x=\arg\min_{\tilde{\boldsymbol{x}}} f(\tilde{\boldsymbol{x}})\\ \text{s.t}:\forall i\in\{1,\ldots,m\}:g_i(\tilde{\boldsymbol{x}})\leq 0,\boldsymbol{A\tilde{x}}=\boldsymbol{b}\end{array}\right\}$$

משפט 4.3 תכונה 1 : הקבוצה X_{opt} היא **קבוצה קמורה**.

דוגמה 5.3 איור לדוגמא:



וכחה: הוכחה:

הוכחת המשפט:

יהיו $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in X_{\text{opt}}\subseteq\mathbb{R}^n$ ולכן $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ פתרונות לבעיית האופטמזציה (מהגדרת X_{opt}).
כלומר

$$\begin{array}{c}\forall i\in\{1,\ldots,m\}:g_i(\boldsymbol{y})\leq 0,\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b},\\ \forall i\in\{1,\ldots,m\}:g_i(\boldsymbol{x})\leq 0,\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\end{array}\quad\text{and } f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{y})=f^*$$

יהא $t\in[0,1]$ כשלהו.
עלינו להכיח כי $t\boldsymbol{x}+(1-t)\boldsymbol{y}\in X_{\text{opt}}$ כלומר עלינו להוכיח כי $(t\boldsymbol{x}+(1-t)\boldsymbol{y})$ **פתרון** .

- תחילה נראה כי $(t\boldsymbol{x}+(1-t)\boldsymbol{y})$ היא נקודה פיזבלית:
  - $(t\boldsymbol{x}+(1-t)\boldsymbol{y})$ מקיימת את אילוצי האי שוויון:

$$\forall i\in\{1,\ldots,m\}:g_i(t\boldsymbol{x}+(1-t)\boldsymbol{y})\overbrace{\leq}^{g_i\text{ is convex}}\overbrace{t}^{\geq 0}\overbrace{g_i(\boldsymbol{x})}^{\leq 0}+\overbrace{(1-t)}^{\geq 0}\overbrace{g_i(\boldsymbol{y})}^{\leq 0}\leq 0$$

  - $(t\boldsymbol{x}+(1-t)\boldsymbol{y})$ מקיימת את האילוץ $\boldsymbol{A}(t\boldsymbol{x}+(1-t)\boldsymbol{y})=\boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{A}(t\boldsymbol{x}+(1-t)\boldsymbol{y})=t(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})+(1-t)(\boldsymbol{A}\boldsymbol{y})=t\boldsymbol{b}+(1-t)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$$

$(t\boldsymbol{x}+(1-t)\boldsymbol{y})$ היא נקודה פיזבילית.

- מתקיים $f(t\boldsymbol{x}+(1-t)\boldsymbol{y})=f^*$.הוכחה:

$$f(t\boldsymbol{x}+(1-t)\boldsymbol{y})\overbrace{\leq}^{f\text{ is convex}}tf(\boldsymbol{x})+(1-t)f(\boldsymbol{y})=tf^*+(1-t)f^*=f^*$$

ולכן $(t\boldsymbol{x}+(1-t)\boldsymbol{y})$ **פתרון**. ולכן $(t\boldsymbol{x}+(1-t)\boldsymbol{y})\in X_{\text{opt}}$.

■

■

משפט 6.3 תכונה 2: אם f היא **קמורה ממש** strictly convex אזי **הפתרון הוא יחיד** כלומר X_{opt} היא קבוצה שמכילה בדיוק איבר אחד.

טענה 7.3 הרבה פעמים עולה השאלה "כמה פתרונות יש לבעייה".אם מראים שפונ' המטרה היא **קמורה ממש** אז **הפתרון הוא בהכרח**

יחיד.

הערה 8.3 במשפט הזה אפשר להתעלם מהאילוצים.

מסקנה 9.3 f קמורה ממש $\Leftarrow$ יש לבעיה פתרון יחיד.

הערה 10.3 המשפט ההפוך לא נכון.אם הפונ' היא לא קמורה ממש זה לא אומר כלום אם קיים או לא קיים פתרון יחיד.

הערה 11.3 **תזכורת:** אם f גזירה פעמיים אז : f קמורה ממש $\iff \forall \boldsymbol{x} \in \operatorname{dom}(f) : \nabla^2 f(\boldsymbol{x}) \succ 0$.

סיכום בניים:

אם f היא קמורה אזי $\forall \boldsymbol{x} \in \operatorname{dom}(f) : \nabla^2 f(\boldsymbol{x}) \succeq 0$
אם f היא קמורה **ממש** אזי $\forall \boldsymbol{x} \in \operatorname{dom}(f) : \nabla^2 f(\boldsymbol{x}) \succ 0$

3.1.2 דוגמאות:

הגדרה 12.3 **בעיית lasso.** בהנתן $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ ו$\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ נגדיר את ה **lasso problem** **בעיית לאסו:**

$$\begin{array}{c} \min_{\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p} |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}|_2^2 \\ \textbf{subject to } \|\beta\|_1 \leq s \end{array}$$

הרצאה 3 שקף 14 שואלים שאלות על הבעיה הנ"ל.המרצה **דילג** עליה .(ואין פתרונות לבעיות במצגת).אז נסתפק בזה.

הגדרה 13.3 בהנתן $\boldsymbol{y} \in \{-1,1\}^n$ ו$\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ עם שורות $x_1, \ldots, x_n$ ויהא $C \geq 0$.נגדיר את בעיית הsupport vector machine או הSVM (בעיית הווקטורים התומכים) באופן הבא :

$$\begin{array}{c} \min_{\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p, \beta_0 \in \mathbb{R}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|\beta\|_2^2 + C \sum_{i=1}^n \xi_i \\ \text{subject to } \xi_i \geq 0 \quad , i = 1, \ldots, n \\ y_i \left(x_i^T \beta + \beta_0 \right) \geq 1 - \xi_i \qquad , i = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

הערה 14.3 נדבר על הבעיה הזו בהרחבה בהרצאה 4.

הערה 15.3 משתנה האופטמזציה כאן הוא שרשור של כמה אלמטים $(\boldsymbol{\beta}, \beta_0, \boldsymbol{\xi})$ ($\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\xi}$ ווקטורים ו β_0 סקלאר).

האם בעיית הSVM היא בעיית אופטמזציה קמורה?

- **פונקציית המטרה:**
  - החלק $\|\beta\|_2^2 = \sum_{i=1}^p \beta_i^2$ היא פונק' קמורה .(כי $\|\cdot\|_2$ קמורה ונותנתפלטים אי שליליים ו $h(x) = x^2$ לא יורדת וקמורה על $\mathbb{R}_+$ ולכן לפי כללי ההרכבה $\|\beta\|_2^2$ קמורה).כפל בקבוע חיובי אינו משנה את הקמירות ולכן $\frac{1}{2} \|\beta\|_2^2$ קמורה.
  - החלק $\sum_{i=1}^n \xi_i$ הוא למעשה שווה ל $\|\xi\|_1$ בתחום בו $\forall i \in \{1, \ldots, n\} : \xi_i \geq 0$. $\|\cdot\|_1$ קמורה ולכן $C \cdot \|\cdot\|_1$ עבור C אי שלילי היא גם קמורה.
  - שני החלקים של פונ' המטרה קמורים .חיבור של שני פונ' קמורות נותן פונ' קמורה(אפשר להוכיח את זה)
  - ולכן נובע כי פונ' המטרה : $\frac{1}{2} \|\beta\|_2^2 + C \sum_{i=1}^n \xi_i$ **קמורה.**
- **אילוצים:**
  - **האילוץ** $, i = 1, \ldots, n \quad \xi_i \geq 0$ שקול לאילוץ $-\xi_i \leq 0$.כלומר שקולה לאילוצים: $\forall i \in \{1, \ldots, n\} : g_i(\boldsymbol{\beta}, \beta_0, \boldsymbol{\xi}) = -\xi_i \leq 0$ וזו פונ' לינארית ולכן קמורה.

– **האילוץ** $y_i\left(x_i^T\beta+\beta_0\right)\geq 1-\xi_i$ הוא אילוץ קמור כי

$$\begin{gathered}y_i\left(x_i^T\beta+\beta_0\right)\geq 1-\xi_i \iff\\ -1+\xi_i+y_i\left(x_i^T\beta+\beta_0\right)\geq 0 \iff\\ \overbrace{1-\xi_i-y_i\left(x_i^T\beta+\beta_0\right)}^{\equiv h_i(\boldsymbol{\beta},\beta_0,\boldsymbol{\xi})}\leq 0\end{gathered}$$

והפונ' $h_i\left(\boldsymbol{\beta},\beta_0,\boldsymbol{\xi}\right)$ היא לינארית ב$\boldsymbol{\beta},\beta_0,\boldsymbol{\xi}_i$. ולכן היא פונ' קמורה.

– לכן נובע כי האילוצים הם קמורה

- הראנו כי פונ' המטרה לינארית וגם האילוצים לינאריים ולכן הבעיה היא בעיית אופטמזציה קמורה.

מה היא קבוצת כל הנקודות הפיזבליות feasible sets ?

היא קבוצת כל ה$\left(\boldsymbol{\beta},\beta_0,\boldsymbol{\xi}\right)$ אשר מקיימות את האילוצים (שהם : $\begin{smallmatrix}\xi_i\geq 0 & ,i=1,\ldots,n\\ y_i\left(x_i^T\beta+\beta_0\right)\geq 1-\xi_i & ,i=1,2,\ldots,n\end{smallmatrix}$)

האם הפתרון לבעיית הSVM הוא פתרון יחיד?

הערה 16.3 הכלי היחיד כרגע שיש לנו בארגז הכלים ע"מ להוכיח יחידות פתרון , הוא להראות שהבעיה היא קמורה ממש.ואז הפתרון הוא בהרכח יחיד. (ואם היא לא קמורה ממש, אין אמירה לגבי יחידות הפתרון).

עלינו לבחון את ההסיאן של פונ' המטרה (אפשר להתעלם מהאילוצים) כלומר

$$\begin{aligned}\nabla^2 f\left(\boldsymbol{\beta},\beta_0,\boldsymbol{\xi}\right)&=\frac{\partial^2 f\left(\boldsymbol{\beta},\beta_0,\boldsymbol{\xi}\right)}{\partial^2\left(\boldsymbol{\beta},\beta_0,\boldsymbol{\xi}\right)}\\ &=\frac{\partial^2\frac{1}{2}\left\|\beta\right\|_2^2+C\sum_{i=1}^n\xi_i}{\partial^2\left(\boldsymbol{\beta},\beta_0,\boldsymbol{\xi}\right)}\\ &=\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2\left\|\beta\right\|_2^2}{\partial^2\left(\boldsymbol{\beta},\beta_0,\boldsymbol{\xi}\right)}+C\cancelto{0}{\frac{\partial^2\sum_{i=1}^n\xi_i}{\partial^2\left(\boldsymbol{\beta},\beta_0,\boldsymbol{\xi}\right)}}\\ &=\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2\left\|\beta\right\|_2^2}{\partial^2\left(\boldsymbol{\beta},\beta_0,\boldsymbol{\xi}\right)}\\ &=\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2\sum_{i=1}^n\beta_i^2}{\partial^2\left(\boldsymbol{\beta},\beta_0,\boldsymbol{\xi}\right)}\\ &=\ldots\end{aligned}$$

- האיבר $\sum_{i=1}^n\xi_i$ שורד גזירה לפי $\boldsymbol{\xi}$ רק פעם אחת, בגזירה השניה הוא מתאפס.
- נבחין תחילה כי **אין איברים מחוץ לאלכסון** ,כי לכל איבר גנזור אותו לפי שני אלמנטים שונים (לודגמא לפי β_1 ואז לפי ξ_1 נקבל 0). מכאן נובע כי **ההסיאן** היא מטריצה **אלכסונית**.
- לאחר שני גזירות נקבל רק קבועים.כלומר $\nabla^2 f\left(\boldsymbol{\beta},\beta_0,\boldsymbol{\xi}\right)$היא מטריצה של קבועים. (הוא לא משתנה בין נקודה אחת לאחרת) כי פונ' המטרה היא ריבועית (ולא יותר מזה) ולכן אחרי 2 גזירות נקבל רק מספרים קבועים.
- נסמן $\left(\boldsymbol{\beta},\beta_0,\boldsymbol{\xi}\right)\equiv\boldsymbol{x}$

• ולכן

$$\nabla^2 f\left(\boldsymbol{x}\right)=\left(\begin{array}{cccc|c|cccc}
\frac{\partial^2 f}{\partial\beta_1^2}\left(\boldsymbol{x}\right) & \frac{\partial^2 f}{\partial\beta_1\partial\beta_2}\left(\boldsymbol{x}\right) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial\beta_1\partial\beta_n}\left(\boldsymbol{x}\right) & \frac{\partial^2 f}{\partial\beta_1\partial\beta_0}\left(\boldsymbol{x}\right) & \frac{\partial^2 f}{\partial\beta_1\partial\xi_1}\left(\boldsymbol{x}\right) & \frac{\partial^2 f}{\partial\beta_1\partial\xi_2}\left(\boldsymbol{x}\right) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial\beta_1\partial\xi_p}\left(\boldsymbol{x}\right)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial\beta_2\partial\beta_1}\left(\boldsymbol{x}\right) & \frac{\partial^2 f}{\partial\beta_2^2}\left(\boldsymbol{x}\right) & \cdots & \vdots & \frac{\partial^2 f}{\partial\beta_2\partial\beta_0}\left(\boldsymbol{x}\right) & \frac{\partial^2 f}{\partial\beta_2\partial\xi_1}\left(\boldsymbol{x}\right) & \frac{\partial^2 f}{\partial\beta_2\partial\xi_2}\left(\boldsymbol{x}\right) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial\beta_2\partial\xi_p}\left(\boldsymbol{x}\right)\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\frac{\partial^2 f}{\partial\beta_n\partial\beta_1}\left(\boldsymbol{x}\right) & \frac{\partial^2 f}{\partial\beta_n\partial\beta_2}\left(\boldsymbol{x}\right) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial\beta_n^2}\left(\boldsymbol{x}\right) & \frac{\partial^2 f}{\partial\beta_n\partial\beta_0}\left(\boldsymbol{x}\right) & \frac{\partial^2 f}{\partial\beta_n\partial\xi_1}\left(\boldsymbol{x}\right) & \frac{\partial^2 f}{\partial\beta_n\partial\xi_2}\left(\boldsymbol{x}\right) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial\beta_n\partial\xi_p}\left(\boldsymbol{x}\right)\\
\hline
\frac{\partial^2 f}{\partial\beta_0\partial\beta_1}\left(\boldsymbol{x}\right) & \frac{\partial^2 f}{\partial\beta_0\partial\beta_2}\left(\boldsymbol{x}\right) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial\beta_0\partial\beta_n}\left(\boldsymbol{x}\right) & \frac{\partial^2 f}{\partial\beta_0^2}\left(\boldsymbol{x}\right) & \frac{\partial^2 f}{\partial\beta_0\partial\xi_1}\left(\boldsymbol{x}\right) & \frac{\partial^2 f}{\partial\beta_0\xi_2}\left(\boldsymbol{x}\right) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial\beta_0\partial\xi_p}\left(\boldsymbol{x}\right)\\
\hline
\frac{\partial^2 f}{\partial\xi_1\partial\beta_1}\left(\boldsymbol{x}\right) & \frac{\partial^2 f}{\partial\xi_1\partial\beta_2}\left(\boldsymbol{x}\right) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial\xi_1\partial\beta_n}\left(\boldsymbol{x}\right) & \frac{\partial^2 f}{\partial\xi_1\partial\beta_0}\left(\boldsymbol{x}\right) & \frac{\partial^2 f}{\partial\xi_1^2}\left(\boldsymbol{x}\right) & \frac{\partial^2 f}{\partial\xi_1\partial\xi_2}\left(\boldsymbol{x}\right) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial\xi_1\partial\xi_p}\left(\boldsymbol{x}\right)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial\xi_2\partial\beta_1}\left(\boldsymbol{x}\right) & \frac{\partial^2 f}{\partial\xi_2\partial\beta_2}\left(\boldsymbol{x}\right) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial\xi_2\partial\beta_n}\left(\boldsymbol{x}\right) & \frac{\partial^2 f}{\partial\xi_2\partial\beta_0}\left(\boldsymbol{x}\right) & \frac{\partial^2 f}{\partial\beta_2\partial\beta_1}\left(\boldsymbol{x}\right) & \frac{\partial^2 f}{\partial\xi_2^2}\left(\boldsymbol{x}\right) & \cdots & \vdots\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\frac{\partial^2 f}{\partial\xi_p\partial\beta_1}\left(\boldsymbol{x}\right) & \frac{\partial^2 f}{\partial\xi_p\partial\beta_2}\left(\boldsymbol{x}\right) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial\xi_p\beta_n}\left(\boldsymbol{x}\right) & \frac{\partial^2 f}{\partial\xi_p\partial\beta_0}\left(\boldsymbol{x}\right) & \frac{\partial^2 f}{\partial\xi_p\partial\xi_1}\left(\boldsymbol{x}\right) & \frac{\partial^2 f}{\partial\xi_p\partial\xi_2}\left(\boldsymbol{x}\right) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial\xi_p^2}\left(\boldsymbol{x}\right)
\end{array}\right)$$

כלומר:

$$\nabla^2 f\left(\boldsymbol{\beta},\beta_0,\boldsymbol{\xi}\right)=\left(\begin{array}{cccc|c|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
\hline
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
\hline
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)$$

מטרית ההסיאן היא אלכסונית (ולכן הע"ע שלה נמצאים על איברי האלכסון) ולכן יש לה ע"ע שהם שווים ממש ל0 ולכן $\nabla^2 f\left(\boldsymbol{\beta},\beta_0,\boldsymbol{\xi}\right)$ היא **לא** positive definte. ולכן $\nabla^2 f\left(\boldsymbol{\beta},\beta_0,\boldsymbol{\xi}\right)$ היא לא קמורה ממש ולכן **לא נוכל לקבוע** האם יש לה או אין לה פתרון יחיד.

עבור פונקציית המטרה אחרת $g\left(\boldsymbol{\beta},\beta_0,\boldsymbol{\xi}\right)=\frac{1}{2}\left\|\beta\right\|_2^2+\frac{1}{2}\beta_0^2+C\cdot\sum_{i=1}^{n}\xi_i^{1.01}$ נקבל כי ההסיאן הוא

$$\nabla^2 g\left(\boldsymbol{\beta},\beta_0,\boldsymbol{\xi}\right)=\left(\begin{array}{cccc|c|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
\hline
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
\hline
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{\xi_1^{0.99}} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\xi_2^{0.99}} & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\xi_3^{0.99}}
\end{array}\right)$$

• אנו יודעים ש$\forall i\in\left\{1,2,\ldots,n\right\}:\xi_i\geq0$ ולכן המט' $\nabla^2 g\left(\boldsymbol{\beta},\beta_0,\boldsymbol{\xi}\right)$ היא בעלת ע"ע חיוביים.(כל איברי האלכסון (=הע"ע של המט') הם חיוביים). ולכן $\nabla^2 g\left(\boldsymbol{\beta},\beta_0,\boldsymbol{\xi}\right)\succeq0$ ולכן בעיית האופטמזציה שפונ' המטרה שלה היא $g\left(\boldsymbol{\beta},\beta_0,\boldsymbol{\xi}\right)$ (היא פונ' מטרה קמורה ממש) ולכן עבור פונ' מטרה זו , קיים פתרון יחיד.

3.1.3 תכונות ואפיון מסדר ראשון של פתרונות אופטמליים

3.1.4 תנאי אופטמליות תחת אילוצים

סימון 17.3 ניסוח שקול לבעיית אופטמזציה קמורה:

בעיית אופטמזציה הקמורה

$$\arg\min f(\boldsymbol{x})$$
$$\text{s.t}: \forall i\in\{1,\dots,m\}: g_i(\boldsymbol{x})\le 0, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$$

יכולה להיות מנוסחת באופן הבא

$$\min_{\boldsymbol{x}} f(x)\ \ \text{s.t}\ \boldsymbol{x}\in C$$

כאשר $C=\{\boldsymbol{x}\mid \forall i\in\{1,\dots,m\}: g_i(\boldsymbol{x})\le 0, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\}$.כלומר C היא קבוצת כל הנקודות הפיזבליות feasible points.

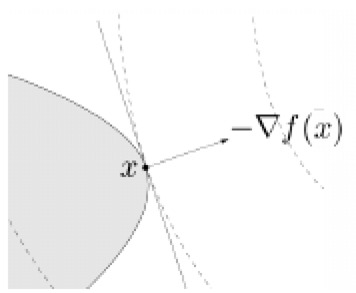
משפט 18.3 תנאי מסדר ראשון לפתרון אופטמלי עבור בעיית האופטמזציה הבאה: $\min_{\boldsymbol{x}} f(x)\ \ \text{s.t}\ \boldsymbol{x}\in C$ (כאשר C היא קבוצת כל הנקודות **אשר מקיימות את האילוצים** כלומר C , מוגדרת כמו קודם) ו f גזירה.אזי נקודה פיזבלית $\boldsymbol{x}\in C$ (feasible point) היא **אופטמימלית אם ורק אם**

$$\forall\boldsymbol{y}\in C: \nabla f(\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\ge 0$$

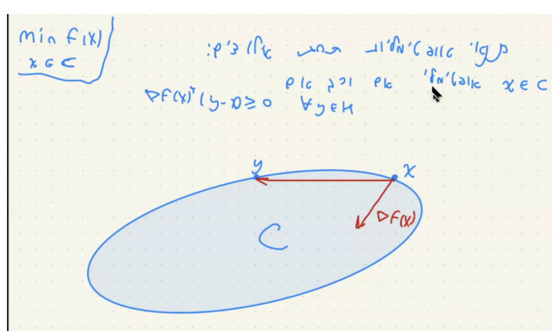
התכונה הבאה נקראת **תנאי מסדר ראשון לפתרון אופטמלי** .
במילים: כל כיוון שנבחר שמתחיל בנקודה $\boldsymbol{x}$ ומגיע לנקודה $\boldsymbol{y}$ אחרת בתוך C יהיה עם קורולציה חיובית לכיוון הגרדיאנט $\nabla f(\boldsymbol{x})$ כלומר, יהיה בכיוון העליה.(כלומר כלל כיוון שמתחיל בנקודה $\boldsymbol{x}$ ומגיע לנקודה $\boldsymbol{y}$אחרת בתוך C הפונקציה f תהיה **עולה (=לא יורדת)** בכיוון הזה כלומר זה יהיה **כיוון עליה** של f).

דוגמה 19.3 שרטוטים לדוגמא:

שרטוט מהספר(פחות טוב):



שרטוט מההרצאה (שמחמחיש את יותר טוב):



הערה 20.3 אם $C=\mathbb{R}^n$ (כלומר בעיית האופטמזציה היא **ללא אילוצים**) אזי התנאי לאופטמליות הוא הופך להיות פשוט יותר: נקודה פיזבלית $\boldsymbol{x}\in C=\mathbb{R}^n$ (feasible point) היא **אופטמימלית אם ורק אם**

$$\forall\boldsymbol{y}\in C=\mathbb{R}^n: \nabla f(\boldsymbol{x})^T=0$$

	יש או אין אילוצים?	הנקודה $x \in C$ היא **אופטמימלית אם ורק אם :**
תנאי מסדר ראשון	האילוץ $C \neq \mathbb{R}^n$(=יש אילוצים):	$\forall \boldsymbol{y} \in C : \nabla f(\boldsymbol{x})^T (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) \geq 0$
לפתרון אופטמלי עבור:	האילוץ $C = \mathbb{R}^n$ (=אין אילוצים):	$\forall \boldsymbol{y} \in C = \mathbb{R}^n : \nabla f(\boldsymbol{x})^T = 0$

3.1.5 תרגיל לדוגמא : quadratic minimization

(נזכיר כי עבור פונ' ריבועית מהצורה $f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{Q} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{x} + c$ היא פונ' קמורה $\iff Q \succeq 0$)
נניח שפונ' המטרה שלנו היא $f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{Q} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{x} + c$ כאשר $Q \succeq 0$.
אזי $f(\boldsymbol{x})$ היא פונ' קמורה.ושבעיית האופטמזציה שלנו היא לא מאולצת כלומר בעיית האופטמזציה שלנו היא

$$\min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})$$

אזי ה**תנאי מסדר ראשון לפתרון אופטמלי** קובע כי **הפתרון האופטמלי** של הבעיה $\boldsymbol{x}$ מקיים $\nabla f(\boldsymbol{x}) = 0$.כלומר

$$\begin{aligned}
\nabla f(\boldsymbol{x}) &= \nabla \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{Q} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{x} + c \right) \\
&= \nabla \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{Q} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{x} \right) \\
&= \frac{1}{2} \nabla \left(\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{Q} \boldsymbol{x} \right) + \nabla \left(\boldsymbol{b}^T \boldsymbol{x} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{Q}^T + \boldsymbol{Q} \right) \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} \\
&\overbrace{=}^{\substack{\boldsymbol{Q} \succeq 0 \\ \Rightarrow \boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{Q}}} \frac{1}{2} (2\boldsymbol{Q}) \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} \\
&= \boldsymbol{Q} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} \\
&= 0
\end{aligned}$$

כלומר **הפתרון האופטמלי** של הבעיה $\boldsymbol{x}$ מקיים $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} = 0$. כלומר שמקיים $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{b}$.
איך ממשיכים מכאן?
$Q \succeq 0$ ולכן Q היא מט' אלכוסנית ולכן לפי משפט הפירוק הספקטרלי קיימת מטריצה אלכסונית Λ ומטריצה אוניטרית U (כלומר $UU^T = U^T U = I$) כך שמתקיים

$$Q = U \Lambda U^T$$

כאשר $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ ו $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ היא קבוצת הע"ע של Q.
נסמן את הע"ע לפי גדולם כך ש $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$.

- אם Q הפיכה:
  אז $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n > 0$ (כלומר על הע"ע של Q חיוביים ממש) אזי Q היא $Q \succ 0$ (כי Q היא הפיכה,ראינו את זה בתרגיל בית 1) ולכן הפתרון הוא $\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{b}$.כאשר

$$Q^{-1} = \left(U \Lambda U^T \right)^{-1} = \left(U^T \right)^{-1} (\Lambda)^{-1} (U)^{-1} = U \Lambda^{-1} U^T$$

  כאשר $\Lambda^{-1} = \mathrm{diag}\left(\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1} \right)$.לסיכום במצב זה קיים **פתרון יחיד** והוא $\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{b}$.

- אחרת Q סינגולרית (=לא הפיכה):
  Q סינגולרית ולכן $\exists i \in \{1, \ldots, n\} : \lambda_i = 0$. לפי הסימנים מעלה $\lambda_n = 0$.(ואולי יש עוד ע"ע עם ערך אפס).
  נסמן את עמודות Q , באופן הבא: העמודה ה i של Q תסומן Q_i.כלומר $Q = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ Q_1 & Q_1 & \cdots & Q_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$.

נבחין כי לכל ווקטור $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^n$ מתקיים ש

$$Q\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ Q_1 & Q_1 & \cdots & Q_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{Q_i}$$

לכל ווקטור $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ כלומר ניתן לרשום את Qx כצירוף לינארי של העמודות של Q. כלומר $Q\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{Q_i}$
נזכר שמתקיים ש שמקיים $\boldsymbol{Qx} = -\boldsymbol{b}$ כלומר $\sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{Q_i} = -\boldsymbol{b}$.**נשאלת השאלה** האם קיים צרוף לינארי של העמודות של Q (של ה$\boldsymbol{Q_i}$־ים) כך שהוא שווה ל $\boldsymbol{b}$. כלומר האם b שייך למרחב הנפרש על ידי $\{\boldsymbol{Q_i}\}_{i=1}^{n}$ כלומר, האם $b \overbrace{\in}^{?} \text{span} \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 & \dots & Q_n \end{pmatrix}$?

– אם $b \notin \text{span} \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 & \dots & Q_n \end{pmatrix}$ אזי אין פתרון לבעיה (כלומר אין $\boldsymbol{x}$ שמקיים את המשוואה $\boldsymbol{Qx} = -\boldsymbol{b}$) במקרה הזה אפשר להראות ש$\min_x f(x) = -\infty$ (כלומר המינימום הוא אינו חסום).**חשבו מדוע? (נמחיש מדוע עם תרגיל)**

– אחרת $b \in \text{span} \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 & \dots & Q_n \end{pmatrix}$ כלומר **קיימים** פתרונות למשוואה $\boldsymbol{Qx} = -\boldsymbol{b}$. במקרה זה **קיימים אינסוף פתרונות**.

דוגמא לפתרון כזה: $\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{Q}^{\dagger}\boldsymbol{b}$,כאשר $Q^{\dagger}$ היא הפסאדו אינברס pseudoinvese של Q.

* מה זה pseudoinvese של Q?

ממשפט הפירוק הספקטרלי ראינו כי $Q = U\Lambda U^T$ וגם כי $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$
נבחין כי ראינו כי קיימים ע"ע ששוים לאפס (כי Q אינה הפיכה) ולכן לפי הסימון שביצענו בהתחלה של הע"ע (לפי גדולם) $\exists k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ כך שלכל $i > k$ מתקיים $= \Lambda = \text{diag}\left(\overbrace{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k}^{k \text{ elements}}, \overbrace{0, 0, \dots, 0}^{(n-k) \text{ elements}}\right)$
$\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, 0, 0, \dots, 0)$ אזי הפסאדו אינוורס מוגדרת על ידי

$$\begin{aligned} Q^{\dagger} &\triangleq U\text{diag}\left(\overbrace{\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \dots, \lambda_k^{-1}}^{k \text{ elements}}, \overbrace{0, 0, \dots, 0}^{(n-k) \text{ elements}}\right) U^T \\ &= U\text{diag}\left(\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \dots, \lambda_k^{-1}, 0, 0, \dots, 0\right) U^T \end{aligned}$$

כלומר הפסאדו אינוורס הופכת את הע"ע ששונים מאפס על האלכסון ואת שאר האפסים על האלכסון משאירה ללא שנוי.

* כלומר כל הפתרונות הם מהצורה

$$\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{Q}^{\dagger}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{z} \qquad , \boldsymbol{z} \in \text{null}(\boldsymbol{Q}) = \{\boldsymbol{z} \mid Q\boldsymbol{z} = 0\}$$

כאשר $\boldsymbol{z} \in \text{null}(\boldsymbol{Q})$ הכוונה היא לאוסף הווקטורים שעבורם $\boldsymbol{Qz} = 0$ (קיימים אינסוף כאלה כי העמודות של Q תלויות כי Q הפיכה).

* לעיתים מסמנים $\text{null}(\boldsymbol{Q}) = \ker(\boldsymbol{Q})$ כלומר, הגרעין של מטריצה $\boldsymbol{Q}$.

תרגיל למחשבה :
הניחו כי $Q=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.$Q$ לא הפיכה ומצאו b כך שמתקיים

- מקרה 1 (כלומר מתקיים ש $b\in\text{span}\begin{pmatrix}Q_1 & Q_2\end{pmatrix}$)

תשובה: $b=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ כי $Q_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},Q_2=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ ולכן $b=1\cdot Q_1+0\cdot Q_2$ ולכן $b\in\text{span}\begin{pmatrix}Q_1 & Q_2\end{pmatrix}$.במקרה
כזה יש אינסוף פתרונות : והם $\left\{\begin{pmatrix}1\\ a\end{pmatrix}\mid a\in\mathbb{R}\right\}$ כי לכל $a\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$Qx=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=b$$

כפי שניתן לראות זו קבוצת פתרונות אינסופית.

- מקרה 2 (כלומר מתקיים ש $b\notin\text{span}\begin{pmatrix}Q_1 & Q_2\end{pmatrix}$)

תשובה: $b=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$.כפי שניתן לראות לכל ווקטור $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ מתקיים

$$\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2:\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\ 0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=b$$

כלומר לא קיימים פתרונות במקרה הזה.

3.2 תרגול 3

משפט 21.3 אם f,g קמורות , ו $\lambda,\mu\geq 0$ אזי $\lambda f+\mu g$ היא פונ' קמורה

הערה 22.3 כלומר סכום של פונ' קמורות עם מקדמים חיוביים הוא פונ' קמורה.

מסקנה 23.3 אם $f(\boldsymbol{x})$ קמורה $\Leftarrow$ אזי $g(\boldsymbol{x},y)=y\cdot f\left(\frac{1}{y}\cdot\boldsymbol{x}\right)$ היא קמורה (בהנתן ש $y>0$)

4 הרצאה 4

4.1 הרצאה

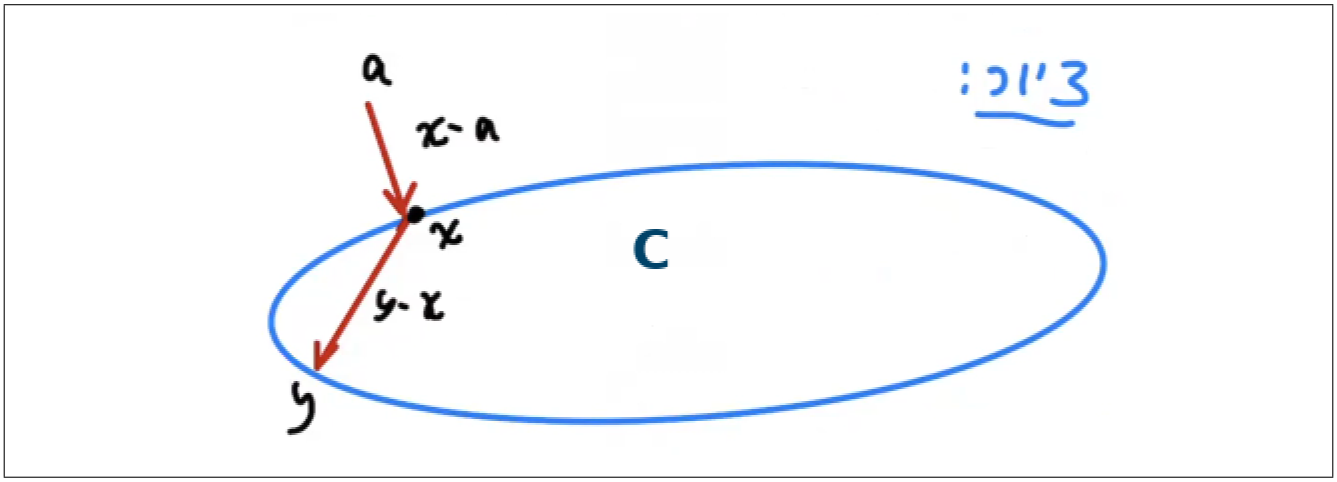
המשך מצגת 3

4.1.1 תרגיל לדוגמא :הטלה של נקודה לתחום קמור projection onto a convex set

תהא קבוצה קמורה $C\subseteq\mathbb{R}^n$.נניח שיש לנו נקודה $\mathbb{R}^n\ni\boldsymbol{a}\notin C$ ונקצה להטיל אותה לנקודה בתוך הקבוצה C.
כלומר

$$\min_{\boldsymbol{x}}\|\boldsymbol{a}-x\|_2^2\ \text{subject to}\ \boldsymbol{x}\in C\subseteq\mathbb{R}^n$$

ציור להמחשה:



תנאי מסדר ראשון לפתרון אופטמלי עבור בעיית האופטמזציה קובע כי

$$\forall \boldsymbol{y} \in C : \nabla f(\boldsymbol{x})^T (\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) \geq 0$$

נחשב את הגרדינאנט(נזכר בכלל הגזירה הוקטורית $\frac{\partial}{\partial \underline{x}}\left(\underline{a}^T \underline{x}\right) = \frac{\partial}{\partial \underline{x}}\left(\underline{x}^T \underline{a}\right) = \underline{a}$ ובכלל $\frac{\partial}{\partial \underline{x}}\left(\underline{x}^T \underline{\underline{A}}\underline{x}\right) = \left(\underline{\underline{A}}^T + \underline{\underline{A}}\right)\underline{x}$) נקבל:

$$\begin{aligned}
\nabla f(\boldsymbol{x}) &= \|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{x}\|_2^2 \\
&= \nabla\left[(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{x})\right] \\
&= \nabla\left[\left(\boldsymbol{a}^T-\boldsymbol{x}^T\right)(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{x})\right] \\
&= \nabla\left[\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}\right] \\
&= \nabla\left[\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}\right]-\nabla\left[\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}\right]-\nabla\left[\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{a}\right]+\nabla\left[\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}\right] \\
&= 0-\nabla\left[\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}\right]-\nabla\left[\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{a}\right]+\nabla\left[\boldsymbol{x}^T I\boldsymbol{x}\right] \\
&= -\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}+\left(I^T+I\right)\boldsymbol{x} \\
&= -2\boldsymbol{a}+(2I)\boldsymbol{x} \\
&= -2\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{x} \\
&= 2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})
\end{aligned}$$

נציב $\nabla f(\boldsymbol{x}) = 2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})$ בתנאי מסדר ראשון לפתרון אופטמלי ונקבל כי :

$$\begin{aligned}
&\forall \boldsymbol{y} \in C : \nabla f(\boldsymbol{x})^T (\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) \geq 0 \\
\iff &\forall \boldsymbol{y} \in C : (2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}))^T (\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) \geq 0 \\
\iff &\forall \boldsymbol{y} \in C : (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^T (\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) \geq 0
\end{aligned}$$

ממליץ להסתכל שוב על להמשחשה יחד עם התנאי $\forall \boldsymbol{y} \in C : (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^T (\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) \geq 0$ (אינטואציה) (שלי,לא רשמית): במקרה הדו מימדי אפשר לחשוב על זה בתור הזווית שנוצרת בין הווקטור $a \to x$ לווקטור $x \to y$ כאשר שמים את זנבות הווקטורים לגוע אחד בשני, אז משמעות התנאי $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^T (\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) \geq 0$ היא שהזווית שנוצרת תהיה עם קוסינוס חיובי (כלומר שווסר זווית קטנה מ90 מעלות לכל y שנבחר)

הערה 1.4 אם $\boldsymbol{a} \in C$ אז ה$x = a$ ו $\min_{\boldsymbol{x}} \|\boldsymbol{a}-x\|_2^2 = 0$.

מפויים/טרנספורמציות שניתן לבצע מבעיות אופטמזציות אל בעיות שקולות

4.1.2 (פעולה משמרת בעיית אופוטמזציה קמורה) אופטמזציה חלקית (/מינימזציה חלקית)

תזכורת :
נגדיר $g(x)=\min_{y\in C} f(x,y)$.
אם f היא פונ' קמורה ב (x,y) ו C הוא תחום קמור אז הבעייה של מציאת מינימום ל $g(x)$ היא בעיית אופטמזציה קמורה ב x (כלומר $g(x)$ היא פונ' קמורה).

כלומר מיד ניתן לבצע **אופטמזציה חלקית** לבעייה קמורה והבעיה המתקבלת תשמר קמורה.
(כלומר **אופטמזציה חלקית משמרת קמירות**)
הכללה:
יהא $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ כך שניתן להביא את $\boldsymbol{x}$ באופן הבא: $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{x_2})\in\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ אזי :
נסמן $\tilde{f}(\boldsymbol{x}_1)=\begin{array}{c}\min_{\boldsymbol{x_2}} f(\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{x_2})\\ \text{s.t } g_2(\boldsymbol{x_2})\le 0\end{array}$.אזי מתקיים :

$$\begin{array}{c}\min_{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x_2}} f(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x_2})\\ \text{s.t } g_1(\boldsymbol{x}_1)\le 0\\ g_2(\boldsymbol{x}_2)\le 0\end{array}\iff\begin{array}{c}\min_{\boldsymbol{x}_1}\tilde{f}(\boldsymbol{x}_1)\\ \text{s.t } g_1(\boldsymbol{x}_1)\le 0\end{array}$$

כלומר :
הבעיה הימנית היא הבעיית אופטמזציה קמורה $\iff$ **הבעיה השמאלית** היא הבעיית אופטמזציה קמורה .
תכונה זו מאוד שימושית
נדגים כעת מודע

4.1.3 שימוש לאופטמזציה חלקית: כתיבת בעיית הSVM בניסוח צירי hinge form of SVM

נזכר בבעייה של הSVM שראינו בהרצאה הקודמת

בהנתן $\boldsymbol{y}\in\{-1,1\}^n$ ו$\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^{n\times p}$ עם שורות $x_1,\ldots,x_n$ ויהא $C\ge 0$.נגדיר את בעיית הsupport vector machine או הSVM (בעיית הווקטורים התומכים) באופן הבא :

$$\begin{array}{c}\min_{\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^p,\beta_0\in\mathbb{R},\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^n}\frac{1}{2}\|\beta\|_2^2+C\sum_{i=1}^n\xi_i\\ \text{subject to } \xi_i\ge 0\quad ,i=1,\ldots,n\\ y_i\left(x_i^T\beta+\beta_0\right)\ge 1-\xi_i\qquad ,i=1,2,\ldots,n\end{array}$$

ראינו בהרצאה 3 כי בעיית הSVM היא בעיית אופטמזציה קמורה.
ננסח את האילוצים $\begin{array}{c}\text{subject to } \xi_i\ge 0\quad ,i=1,\ldots,n\\ y_i\left(x_i^T\beta+\beta_0\right)\ge 1-\xi_i\qquad ,i=1,2,\ldots,n\end{array}$ מחדש באופן הבא

$$\begin{aligned}&\left[\begin{array}{c}\min_{\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^p,\beta_0\in\mathbb{R},\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^n}\ldots\text{subject to } \xi_i\ge 0\quad ,i=1,\ldots,n\\ y_i\left(x_i^T\beta+\beta_0\right)\ge 1-\xi_i\qquad ,i=1,2,\ldots,n\end{array}\right]\\ \iff&\left[\begin{array}{c}\min_{\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^p,\beta_0\in\mathbb{R},\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^n}\ldots\text{subject to } \xi_i\ge 0\quad ,i=1,\ldots,n\\ -y_i\left(x_i^T\beta+\beta_0\right)\le \xi_i-1\qquad ,i=1,2,\ldots,n\end{array}\right]\\ \iff&\left[\begin{array}{c}\min_{\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^p,\beta_0\in\mathbb{R},\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^n}\ldots\text{subject to } 0\le\xi_i\quad ,i=1,\ldots,n\\ 1-y_i\left(x_i^T\beta+\beta_0\right)\le \xi_i\qquad ,i=1,2,\ldots,n\end{array}\right]\\ \iff&\left[\begin{array}{c}\min_{\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^p,\beta_0\in\mathbb{R}}\ldots\text{subject to}\\ \max\left\{0,1-y_i\left(x_i^T\beta+\beta_0\right)\right\}\le \xi_i\qquad ,i=1,2,\ldots,n\end{array}\right]\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו אילוצים חדשים :

$$\begin{array}{c}\ldots\text{subject to}\\ \max\left\{0,1-y_i\left(x_i^T\beta+\beta_0\right)\right\}=\left[1-y_i\left(x_i^T\beta+\beta_0\right)\right]_+\le\xi_i\qquad ,i=1,2,\ldots,n\end{array}$$

נסמן את הפונ' $a_+=\max\{0,a\}$.במקרה הזה הξ_i המינמלים שמקיימים את התנאי הם כאשר השוויון מתקיים כלומר

$$\max\left\{0,1-y_i\left(x_i^T\beta+\beta_0\right)\right\}=\left[1-y_i\left(x_i^T\beta+\beta_0\right)\right]_+=\xi_i\qquad ,i=1,2,\ldots,n$$

וכעת נציב בחזרה את את $\forall i \in \{1,2,\dots,n\} : \xi_i = \left[1 - y_i\left(x_i^T\beta + \beta_0\right)\right]_+$ האילוצים לבעיית האופטמזציה ונקבל את **הניסוח הצירי של בעיית הSVM**:

$$\boxed{\min_{\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^p,\beta_0\in\mathbb{R}} \frac{1}{2}\|\beta\|_2^2 + C\sum_{i=1}^{n}\left[1 - y_i\left(x_i^T\beta + \beta_0\right)\right]_+}$$

כלומר כעת ניסחנו את בעיית SVM **ללא אילוץ על ξ. (כלומר ביצענו כבר את המינמזציה של המשתנים של ξ_i לכל $i \in \{1,\dots,n\}$)**
לפי המשפט שראינו (על מינמזציה חלקית) נובע כי הניסוח הנ"ל של הבעיה הוא בעיית אופטמזציה קמורה.
כלומר כי בעיית הSVM בניסוח צירי היא בעיית אופטמזציה קמורה.
בעיית **הSVMבניסוח הצירי** היא בעיית מנימזציה רק של המשתנים $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p, \beta_0 \in \mathbb{R}$.
בניסוח זה הוא הדרך היותר פופלרית להסתכל על בעיית הSVM נחזור אליה בהמשך הקורס.

4.1.4 החלפת משתנים trasformation and change of variables

משפט 2.4 תהא $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ פונ' מונותנית עולה אזי

$$\begin{gathered}\min_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}) \text{ subject to } x \in C\\ \Longleftrightarrow\\ \min_{\boldsymbol{x}} h(f(\boldsymbol{x})) \text{ subject to } x \in C\end{gathered}$$

הערה 3.4 כלומר הפתרון האופטמלי של הבעיה הוא זהה עבור $f(\boldsymbol{x})$ ועבור $h(f(\boldsymbol{x}))$. באופן דומה ניתן להפעיל פונ' מונוטנית עולה על אילוצי השוויון/אי שוויון וקימרות הבעיה תשמר.יכול לעזור לנו להראות כי הבעיה שקיבלנו היא קמורה.

משפט 4.4 יהא תחום קמור $C \subseteq \mathbb{R}^m$ תהא $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ שמקיימת שני תנאים:

1. ϕ היא פונ' חד חד ערכית
2. התמונה של ϕ על $\mathbb{R}^n$ (כלומר על כל הע־$\boldsymbol{y}$־ים) מכילה את התחום C.בעצם אנו רוצים להיות מסוגלים לבטא כל $\boldsymbol{x}$ בתחום C על ידי ϕ.כלומר

$$\forall \boldsymbol{x} \in C \subseteq \mathbb{R}^m, \exists \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n : \phi(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}$$

$$\begin{gathered}\min_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}) \text{ subject to } x \in C\\ \Longleftrightarrow\\ \min_{\boldsymbol{y}} f(\phi(\boldsymbol{x})) \text{ subject to } \phi(\boldsymbol{y}) \in C\end{gathered}$$

זאת אומרת הבעיות הנ"ל שקולות כלומר אם אני מוצא $\boldsymbol{y}$ שממזער את הבעיה $\min_{\boldsymbol{y}} f(\phi(\boldsymbol{x})) \text{ subject to } \phi(\boldsymbol{y}) \in C$ אזי בהכרח $\phi(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}$ ממזער את הבעיה $\min_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}) \text{ subject to } x \in C$. **ולהפך.**

4.1.5 דוגמא: תכנות גאומטרי geometric programing

תזכורת : הקבוצה $\left\{(x_1,x_2,\dots,x_n)^T \mid x_1,x_2,\dots,x_n > 0\right\} = \mathbb{R}^n_{++}$.

הגדרה 5.4 מונום monomial היא פונ' $f : \mathbb{R}^n_{++} \longrightarrow \mathbb{R}$ מהצורה $f(\boldsymbol{x}) = \gamma \cdots x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}$ כאשר $\gamma > 0$ ובנוסף $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{R}$.

הגדרה 6.4 פוסינומיאל posynimial היא פונ' $f : \mathbb{R}^n_{++} \longrightarrow \mathbb{R}$ שמהווה סכום של מונומים.כלומר

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \cdots x_1^{a_{k1}}x_2^{a_{k2}}\cdots x_n^{a_{kn}}$$

(כאשר לכל $k \in \{1,\dots,p\}$) $\gamma_p > 0$ ובנוסף $a_{k1},\dots,a_{kn} \in \mathbb{R}$.

הגדרה 7.4 בעיית תכנות גאומטרי geometric program היא מהצורה

$$\begin{array}{c}\min_{\boldsymbol{x}} f\left(\boldsymbol{x}\right)\\ \text{s.t:}\\ \forall i\in\{1,\ldots,m\}:g_i\left(\boldsymbol{x}\right)\leq 1\\ \forall j\in\{1,\ldots,r\}:h_j\left(\boldsymbol{x}\right)=1\end{array}$$

כאשר $\forall i\in\{1,\ldots,m\}:f,g_i$ הם **פוסינומילאים posynimial** ו $\forall j\in\{1,\ldots,r\}:h_j\left(\boldsymbol{x}\right)$ **הם מונומים** monomials .

הערה 8.4 נבחין כי בעיית התכנות הגאומטרי אינה בעייה קמורה. (לודגמא, ניתן להבחין כי האילוצים לא קמורים) **אבל** אפשר להפעיל עליה את הפעולות התאימות בשביל להעביר אותה להיות בעייה קונבקסית.

- עבור כל **מונום** $f\left(\boldsymbol{x}\right)=\gamma\cdots x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}$ נציע את החלפת המשתנים הבאה: $\forall i\in\{1,\ldots n\}:y_i=\log x_i$ כלומר $\forall i\in\{1,\ldots n\}:e^{y_i}=x_i$ כלומר $\phi:\mathbb{R}^n_{++}\longrightarrow\mathbb{R}^n_{++}\subseteq\mathbb{R}^n$ מקיימת $\phi\left(\boldsymbol{y}\right)=\phi\left(\begin{pmatrix}y_1 & y_2 & \ldots & y_n\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}e^{y_1} & e^{y_2} & \ldots & e^{y_n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \ldots & x_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{x}$ אזי נגדיר

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \ldots & a_n\end{pmatrix},\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1 & y_2 & \ldots & y_n\end{pmatrix}$$

ובנוסף נסמן $b=\log\left(\gamma\right)$ אזי $e^b=\gamma$ ואז מתקיים

$$\begin{aligned}f\left(\boldsymbol{x}\right)&=\gamma x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}\\&=\gamma\left(e^{y_1}\right)^{a_1}\left(e^{y_2}\right)^{a_2}\cdots\left(e^{y_n}\right)^{a_n}\\&=\gamma\left(e^{y_1a_1}\right)\left(e^{y_2a_2}\right)\cdots\left(e^{y_na_n}\right)\\&=\gamma\left(e^{y_1a_1+y_2a_2+\ldots+y_na_n}\right)\\&=\gamma\left(e^{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{y}}\right)\\&=e^b\left(e^{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{y}}\right)\\&=e^{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{y}+b}\end{aligned}$$

- באופן דומה עבור כל כל **פוינומיאל** ניתן לכתוב באופן הבא $f\left(\boldsymbol{x}\right)=\sum_{k=1}^{p}e^{\boldsymbol{a}_k^T\boldsymbol{y}+b_k}$.
- נבחין כי ההתמרה המוצעת $\phi\left(\boldsymbol{y}\right)=\phi\left(\begin{pmatrix}y_1 & y_2 & \ldots & y_n\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}e^{y_1} & e^{y_2} & \ldots & e^{y_n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \ldots & x_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{x}$
  - היא פונ' חד חד ערכית .(כי העלאה באקספוננט היא פונ' חד חד ערכית)
  - ואכן מתקיים $\forall\boldsymbol{x}\in C\subseteq\mathbb{R}^n_{++},\exists\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n_{++}:\phi\left(\boldsymbol{y}\right)=\boldsymbol{x}$ כי :

$$\forall\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \ldots & x_n\end{pmatrix}\in C\subseteq\mathbb{R}^n_{++},\exists\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}\log x_1 & \log x_2 & \ldots & \log x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n_{++}:\phi\left(\boldsymbol{y}\right)=\boldsymbol{x}$$

  - ולכן ההחלפת המשתנים היא קבילה.

אזי לפי המשפט על החלפת משתנים המוצעת(☾) ולפי המשפט על שימור קמירות של פונ' מונוטונית עולה (☼) ($\log\left(x\right)$ היא פונ' מונוטנית עולה) נובע כי

בעיית התכנות הגאומרטי שקולה :

$$\begin{bmatrix} \min_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t:} \\ \forall i\in\{1,\dots,m\}: g_i(\boldsymbol{x})\le 1 \\ \forall j\in\{1,\dots,r\}: h_j(\boldsymbol{x})=1 \end{bmatrix} \underbrace{\Longleftrightarrow}_{(☼)} \begin{bmatrix} \min_{\boldsymbol{x}} \log(f(\boldsymbol{x})) \\ \text{s.t:} \\ \forall i\in\{1,\dots,m\}: \log(g_i(\boldsymbol{x}))\le \log(1) \\ \forall j\in\{1,\dots,r\}: \log(h_j(\boldsymbol{x}))=\log(1) \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} \min_{\boldsymbol{x}} \log(f(\boldsymbol{x})) \\ \text{s.t:} \\ \forall i\in\{1,\dots,m\}: \log(g_i(\boldsymbol{x}))\le 0 \\ \forall j\in\{1,\dots,r\}: \log(h_j(\boldsymbol{x}))=0 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\Longleftrightarrow}_{(☾)} \begin{bmatrix} \min_{\boldsymbol{y}} \log\left(\sum_{k=1}^{p} e^{\boldsymbol{a}_k^T\boldsymbol{y}+b_k}\right) \\ \text{s.t:} \\ \forall i\in\{1,\dots,m\}: \log\left(\sum_{k=1}^{p} e^{\boldsymbol{a}_k^T\boldsymbol{y}+b_k}\right)\le 0 \\ \forall j\in\{1,\dots,r\}: \log\left(e^{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{y}+b}\right)=0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} \min_{\boldsymbol{y}} \log\left(\sum_{k=1}^{p} e^{\boldsymbol{a}_k^T\boldsymbol{y}+b_k}\right) \\ \text{s.t:} \\ \forall i\in\{1,\dots,m\}: \log\left(\sum_{k=1}^{p} e^{\boldsymbol{a}_k^T\boldsymbol{y}+b_k}\right)\le 0 \\ \forall j\in\{1,\dots,r\}: \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{y}+b=0 \end{bmatrix}$$

נתבונן בבעיה השקולה שהתקבלה:

$$\begin{gathered} \min_{\boldsymbol{y}} \log\left(\sum_{k=1}^{p} e^{\boldsymbol{a}_k^T\boldsymbol{y}+b_k}\right) \\ \text{s.t:} \\ \forall i\in\{1,\dots,m\}: \log\left(\sum_{k=1}^{p} e^{\boldsymbol{a}_k^T\boldsymbol{y}+b_k}\right)\le 0 \\ \forall j\in\{1,\dots,r\}: \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{y}+b=0 \end{gathered}$$

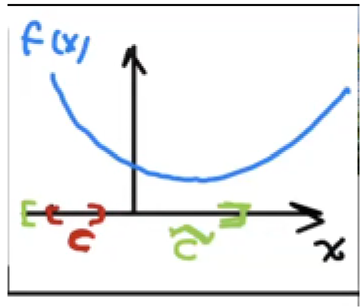
- אילוצי השוויון $\forall j\in\{1,\dots,r\}: \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{y}+b=0$ הם לינאריים ולכן הם קמורים.
- פונ' המטרה ואילוצי אי השוויון זה לוג של סכום של אספוננטים הוכחנו בתרגול שהפונ' מהצורה הזו הן פונ' קמורות.

כלומר, עברנו מבעיה שאינה קמורה (בעיית התכנות הגאומרטי) אל בעייה שהיא קמורה.

4.1.6 רלקסציה ("הרגעה") relaxation

בהנתן בעיית אופטמיזציה $\min_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x})$ s.t to $x\in C$ תמיד נוכל לקחת תחום מורחב ("מקל") $\tilde{C}$ שמקיים $C\subseteq\tilde{C}$ ולהתבונן בבעיה שנוצרת $\min_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x})$ s.t to $x\in\tilde{C}$.לפעולה של הרחבת האילוצים הזו אנו קוראים **רלקסציה relaxation** והערך האופטמלי שמתקבל עבור בעיה זו הוא קטן או שווה לערך האופטמלי שמתקבל עבור הבעיה המקורית.כלומר רק יכול לשפר את הפתרון האופטמלי.

ציור להמחשה:



האילוץ הירוק מכיל את האילוץ האדום ואכן הפתרון האופטמלי תחת האילוץ הירוק טוב יותר מאשר הפתרון האופטמלי תחת האילוץ האדום.

הערה 9.4 פעולת הרלקסציה מאוד שימושית במדעי המחשב.

דוגמה 10.4 דוגמא חשובה : ראינו שבבעיית אופטמזציה עם אילוצי שוויון מהצורה $h_j(\boldsymbol{x}) = 0 : \forall j \in \{1, \ldots, r\}$ אז הבעיה תהיה קמורה בתנאי ש $h_j(\boldsymbol{x}) : \forall j \in \{1, \ldots, r\}$ הם פונ' לינאריות (כלומר הם אפינים) כלומר מתקיים ש $\forall j \in \{1, \ldots, r\}, \exists \boldsymbol{a_j} \in \mathbb{R}^n, \exists b \in \mathbb{R} : h_j(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a_j}^T \boldsymbol{x} + b$.

אם ה $h_j(\boldsymbol{x})$-ים האלה הם **פונ' קמורות אבל לא לינאריות** אז הבעיה עם אילוצי שוויון מהצורה $h_j(\boldsymbol{x}) = 0 : \forall j \in \{1, \ldots, r\}$ **אינה בעייה קמורה.**

אז מה עושים

אם $\forall j \in \{1, \ldots, r\}$, $h_j(\boldsymbol{x})$ היא פונ' קמורה(אבל לא אפינית(כלומר לא לינארית)) **אפשר לבצע רלקסציה (להרחיב את התחום)** ולאפשר אילוי אי שוויון מהצורה $h_j(\boldsymbol{x}) \leq 0 : \forall j \in \{1, \ldots, r\}$ וזה **אילוץ קמור** .

כלומר:

התחלנו עם אילוץ לא קומר, ביצענו רלקסציה וקיבלנו אילוץ קמור.

הערה 11.4 משתמשים בדוגמא הזו המון.

הערה 12.4 ההפסד כאן הוא שאנחנו לא מקיימים יותר את האילוצים המקוריים של הבעיה.

4 מצגת צורות קנוניות של בעיות אופטמזציה

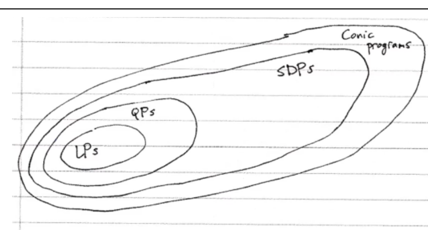
נדבר על בעיות אופטמזציה מפורסמות.יש עוד בעיות אופטמזציה אבל הדוגמאות שנדבר עליהם נחקרו המון והם נחשבות מאוד חשובות.

רוב הבעיות האופטמזציה אינם קמורות.בעיות קמורות הן תת קבוצה של בעיות אופטמזציה.מה שמיוחד בבעיות קמורות שיש תואריה מפותחת מאוד לפתרון שלהם ולשאר הבעיות (אלא אם כן יש לבעיות האלו קיים מבנה אחר מיוחד) מציאת פתרון היא משימה מאוד מורכבת.

נדבר על הבעיות הבאות:

- **תכנות לינארי** LPs Linear programs
- **תכנות ריבועי** QPs Quadratic programs
- **תכנות "חיובי מוגדר"** SDPs Semidefinite programs
- **תכנות קוני** Cone programs

היררכיה של בעיות אופטמזציה:



הערה 13.4 קיימות צורות נוספות של בעיות אופטמזציה קמורות שאינם אף אחת מ4 סוגי הבעיות שמוזכרות מעלה.

4.1.7 תכונות לינארי LPs Linear programs

הגדרה 14.4 בעיית **תכונות לינארי** LPs Linear programs היא בעיית אופטמזציה מהצורה

$$\begin{array}{c} \min_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \text{subject to:} \boldsymbol{D}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{d}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \end{array}$$

נבחין כי בבעיה זו אילוצי השוויון ואילוצי אי השוויון כולם לינאריים.
נבחין כי בעיית **תכונות לינארי היא תמיד בעייה קמורה.**
כלומר לכל וקטורים $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}$ ומטריצות $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{D}$ הבעייה תהיה בעיה קמורה.

הערה 15.4 האלגוריתם לפתרון בעיות כאלה הוא אלגוריתם ה**סימפלקס** . הוא שונה מאוד מהאלג' שנלמד בקורס , כי הפתרון הזה מיוחד מאוד לבעיות לינאריות.קיימות שיטות טובות יותר שנלמד עליהם לקראת סוף הקורס, ושיטות אלו נחשבות יעילות יותר ואפשר להכליל אותם על סוגים רבים יותר של בעיות.

הערה 16.4 קיימים קורסים בתעו"נ שמתעסקים רק בפתרון בעיות מהסוג הזה.בעיות אלה בשימוש נרחב במדעי המחשב.

דוגמה 17.4 בעיית תכנות לינארי לדוגמא:

בעיית הדיאטה diet problem:
מצא את השילוב הזול ביותר של מזונות שמספקים מגבלות תזונתיות מסויימות:
כלומר

$$\begin{array}{c} \min_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \text{subject to:} \boldsymbol{D}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{d}, \boldsymbol{x} \geq 0 \end{array}$$

כאשר

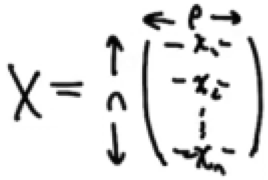
- c_j הוא המחיר של מזון j
- d_i הוא הכמות המינימלית של הויטמין i שצריך לקרחת ביום
- D_{ij} הו אהכמות של הויטמין i ליחדית מזון j
- x_j הוא כמות יחידות המזון ממזון j בדיאטה

הערה 18.4 יש את האילוץ $\boldsymbol{x} \geq 0$ למניעת צריכה שלילית של מזון.כלומר אסור להקיא מזון החוצה!

הערה 19.4 השתמשו בבעיה הנ"ל על מנת לספק תצרוכת של צבאות, לדוגמא של הצבא הרוסי.

דוגמה 20.4 בעיית תכנות לינארי לדוגמא:

בעיית basis pursuit
נניח שיש לנו מטריצה נתונה $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{n\times p}$ (כלומר n שורות ו p עמודות) ונניח שיש לנו $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^p$ ושמתקיים $p > n$.
ונניח שאנחנו רוצים למצוא את הפתרון **הדליל ביותר** למערכת המשוואות הלינארית $X\boldsymbol{\beta} = y$.



אפשר לבטא את הבעיה כבעיה **לא קמורה** באופן הבא:

$$\begin{gathered}\min_{\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^p} \|\boldsymbol{\beta}\|_0 \\ \text{s.t:} X\beta = y\end{gathered}$$

כאשר הסימון $\|\boldsymbol{\beta}\|_0$ מסמן $\|\boldsymbol{\beta}\|_0 = \sum_{j=1}^{p} \mathbb{I}\{\beta_j \neq 0\}$ (כאשר $\mathbb{I}$ היא פונ' אינדיקטור) (נבהיר כי צורה זו מכונה "נורמת l_0" למרות שl_0 אינה נורמה , לא מקיימת את הגדרת נורמה).כלומר הסימון $\|\boldsymbol{\beta}\|_0$ הוא מנייה של מספר הריכיבים בווקטור שאינם אפס.**נדגיש שוב** l_0 **זה לא באמת נורמה!(** זה רק מסומן כמו נורמה).
כלומר השאיפה שלנו היא למצוא β שמקיים את האילוץ $X\beta = y$ עם הכי פחות "כניסות מולדקות" כלומר שהווקטור β יהיה הכי דליל שאפשר.

- האילוץ $\text{s.t:} X\beta = y$ הוא אילוץ לינארי אבל פונ' המטרה $\|\boldsymbol{\beta}\|_0$ אינה קמורה. (שוב נזכיר , l_0 אינה נורמה).
- ולכן הבעיה הנ"ל אינה בעייה קמורה.

בשביל לפתור את הבעיה לעיתם מבצעים **קירוב** שנקרא **קירוב** l_1 , ולעיתים נקרא **basis pursuit**
ננסה לפתור את הבעיה הבאה:

$$\begin{gathered}\min_{\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^p} \|\boldsymbol{\beta}\|_1 \\ \text{s.t:} X\beta = y\end{gathered}$$

זו בעיה קמורה.(האילוצים קמורים ופונ' המטרה קמורה, כי פונ' המטרה היא נורמה ולכן היא קמורה).
הבעיה basis pursuit לא נראית כמו בעיית תכנות לינארית (LP) האילוצים אומנם לינארים אבל פונ' המטרה $\|\boldsymbol{\beta}\|_1$ אינה לינארית.
ניתן להציג את הבעיה basis pursuit באמצעות בעיית תכנות לנארי.**איך עושים זאת?**
על ידי הוספת משתנים חדשים $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \ldots & z_p \end{pmatrix}^T$:

$$\forall i \in \{1,\ldots,p\} : z_i = |\beta_i|$$

ואז:

$$\|\beta\|_1 = \sum_{i=1}^{p} |\beta_i| = \sum_{i=1}^{p} z_i = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_p \end{pmatrix} = \mathbf{1}^T\boldsymbol{z}$$

$$\forall i \in \{1,\ldots,p\} : z_i = |\beta_i| \Rightarrow z_i \geq \beta_i \text{ and } z_i \geq -\beta_i$$

ונראה איך הבעיה החדשה נראית:

$$\begin{gathered}\min_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{z}} \mathbf{1}^T\boldsymbol{z} \\ \text{s.t:} \\ \forall i \in \{1,\ldots,p\} : z_i \geq \beta_i \\ \forall i \in \{1,\ldots,p\} : z_i \geq -\beta_i \\ X\beta = y\end{gathered}$$

דוגמה 21.4 רלקסציה לבעיה לדוגמא:

Dantzig selector

רלקסציה אפשרית לבעיית ה basis pursuit שראינו קודם : נאפשר במקום את האילוץ של $y = X\beta$ את האילוץ של $y \approx X\beta$ (לא דורשים שוויון מפורש) אזי בעיית ה **Dantzig selector** מוגדרת כך

$$\begin{aligned}&\min_{\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^p} \|\boldsymbol{\beta}\|_1\\ \text{s.t:}\ &\left\|\boldsymbol{X}^T\left(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta}\right)\right\|_\infty \le \lambda\end{aligned}$$

עבור $\lambda \ge 0$ שזה הוא פרמטר שאנו שולטים בו ודרכו קובעים את "הרזולוציה " של השוויון. ככל λ קטן יורת כך $X\beta$ "ייתקרב יותר" ל y.

בעיה זו אינה בעיית תכנות לינארי ,אבל לבעיה זו קיים ניסוח של בעיית תכנות לינארי.

הערה 22.4 האילוץ $\lambda \ge \left\|\boldsymbol{X}^T\left(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta}\right)\right\|_\infty$ s.t: משמעו שהמקסימום של כל איבר בווקטור קטן מ λ.(חסום על ידי λ)

אנו יודעים כי עבור האילוץ מתקיים (לפי חוקי גזירה ווקטורית):

(נזכר בכלל הגזירה הוקטורית $\frac{\partial}{\partial \underline{x}}\left(\underline{a}^T\underline{x}\right)=\frac{\partial}{\partial \underline{x}}\left(\underline{x}^T\underline{a}\right)=\underline{a}$ ובכלל $\frac{\partial}{\partial \underline{x}}\left(\underline{x}^T\underline{\underline{A}}\underline{x}\right)=\left(\underline{\underline{A}}^T+\underline{\underline{A}}\right)\underline{x}$)

$$\begin{aligned}
&\min_{\boldsymbol{\beta}} \|\boldsymbol{X\beta}-\boldsymbol{y}\|_2^2\\
&\overbrace{\iff}^{\beta\in\mathbb{R}^p,☼} \nabla\|\boldsymbol{X\beta}-\boldsymbol{y}\|_2^2=0\\
&\iff \nabla\left(\boldsymbol{X\beta}-\boldsymbol{y}\right)^T\left(\boldsymbol{X\beta}-\boldsymbol{y}\right)=0\\
&\iff \nabla\left(\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{X}^T-\boldsymbol{y}^T\right)\left(\boldsymbol{X\beta}-\boldsymbol{y}\right)=0\\
&\iff \nabla\left(\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X\beta}-\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{X\beta}-\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y}\right)=0\\
&\iff \nabla\left(\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X\beta}-\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{X\beta}-\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y}\right)=0\\
&\iff \nabla\left(\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X\beta}-\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{X\beta}\right)=0\\
&\iff \left(\left(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}\right)^T+\left(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}\right)\right)\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{y}-\left(\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{X}\right)^T=0\\
&\iff 2\left(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}\right)\boldsymbol{\beta}-2\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{y}=0\\
&\iff 2\boldsymbol{X}^T\left(\boldsymbol{X\beta}-2\boldsymbol{y}\right)=0
\end{aligned}$$

כלומר

$$\min_{\boldsymbol{\beta}} \|\boldsymbol{X\beta}-\boldsymbol{y}\|_2^2 \iff 2\boldsymbol{X}^T\left(\boldsymbol{X\beta}-2\boldsymbol{y}\right)=0$$

- ☼ לפי תנאי אופטמליות מסדר ראשון כשאין מגבלה על המרחב הפתרון האופטמלי הוא התאפסות הגרדיאנט .

הערה 23.4 לא הורחב הרבה על הבעיה הנ"ל.

4.1.8 צורה סנדרטית של LP

תזכורת : בעיית תכנות לינארי היא מהצורה :

$$\min_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$$
$$\text{subject to:}\boldsymbol{D}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{d}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

הגדרה 24.4 נאמר שבעיית תכנות לניארי היא **מהצורה הסטנדרטית standard form** אם ניתן לכתוב אותה כך:

$$\min_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$$
$$\text{subject to:}\boldsymbol{x} \ge 0, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

הערה 25.4 הבעיה הזו חשובה כי היא מהווה קלט לאלג' הסימפלקס לפתרון בעיות תכנות ליאנרי.(כלומר בשביל לפתור כל בעיית תכנות לינארי צריך קודם להביא אותה לצורה סטנדרטית ורק אז להפעיל על הצורה הסטנדרטית שלה את אלג' הסימפלקס.

נבחין כי כל בעיית תכנות לינארי קיים ניסוח שקול בצורה הסנדטרית.
למה?
ההבדל בין הצורה הסנטרטית לצורה הרגילה של LP יש הבדל רק באילוצים.

- אילוצי הבעיה המקורית $\text{subject to:}\boldsymbol{D}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{d}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$
- אילוצי הצוררה הסנדרטית $\text{subject to:}\boldsymbol{x} \ge 0, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

נוסיף משתנים שנקראים slack varibles משתני עזר. **נגדיר** משתנים חדשים $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{d} - D\boldsymbol{x}$.
האילוץ

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{d} \iff 0 \le \boldsymbol{d} - \boldsymbol{D}\boldsymbol{x} \iff 0 \le \boldsymbol{s} \text{ and } \boldsymbol{s} = \boldsymbol{d} - D\boldsymbol{x}$$

כלומר האילוץ $\boldsymbol{D}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{d}$ שקול לאילוצים $0 \le \boldsymbol{s} \text{ and } \boldsymbol{s} = \boldsymbol{d} - D\boldsymbol{x}$.ואז בעיית האופטמזציה תראה כך

$$\min_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$$
$$\text{subject to:}0 \le \boldsymbol{s}, \text{ and } \boldsymbol{s} = \boldsymbol{d} - D\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

הערה 26.4 משמעות הסימון $\boldsymbol{s} \le 0$ כלומר כל רכיב בווקטור $\boldsymbol{s}$ צריך להיות גדול או שווה מאפס.

4.1.9 תכנות ריבועי QPs Quadratic programs

הגדרה 27.4 בעיית **תכנות ריבועי QPs Quadratic programs** היא בעיית אופטמזציה מהצורה

$$\min_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}$$
$$\text{subject to:}\boldsymbol{D}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{d}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

כאשר $\boldsymbol{Q} \succeq 0$, כלומר $\boldsymbol{Q}$ היא מטריצה אי שלילית מוגדרת.

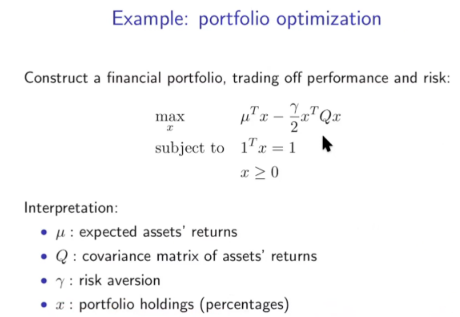
הערה 28.4 נבחין כי QP מאוד דומה ל LP רק שהפעם לפונ' המטרה הוספנו את האיבר $+\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}$. (רכיב ריבועי)

הערה 29.4 נבחין כי הבעיה **אינה קמורה** כאשר $\boldsymbol{Q} \not\succeq 0$.

הערה 30.4 מעתה נניח באופן סמוי שבכל פעם שנאמר שבעיה היא QP , מתקיים ש $\boldsymbol{Q} \succeq 0$ (והבעיה קמורה).במידה וזה לא מתקיים,נציין זאת במפורש.

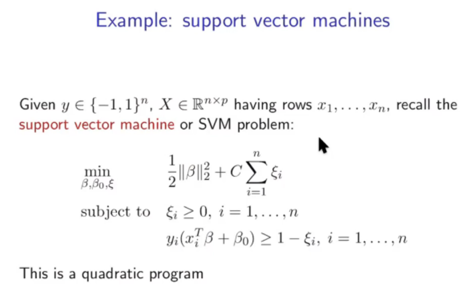
דוגמה 31.4 בעיית תכנות ריבועי לדוגמא:

בעיית porfolio optimiztion



נבחין כי כאן יש לנו בעית מקסמזציה קעורה, ולכן היא שקולה לבעיית מנימזציה קמורה.(על ידי הוצאת מינוס בפונ' המטרה)

דוגמה 32.4 בעיית תכנות ריבועי לדוגמא SVM :



הערה 33.4 דילגו בהרצאות על Lasso

4.1.10 הצורה הסטנדרטית של בעיית QP

תזכורת : בעיית תכנות הריבועי היא מהצורה :

$$\min_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}$$
$$\text{subject to:} \boldsymbol{D}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{d}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

הגדרה 34.4 נאמר שבעיית תכנות ריבועי היא **מהצורה הסטנדרטית standard form** אם ניתן לכתוב אותה כך:

$$\min_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}$$
$$\text{subject to:} \boldsymbol{x} \geq 0, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

נבחין כי כל בעיית תכנות ריבועי קיים ניסוח שקול בצורה הסנדטרית. (ההסבר זהה לזה כמו במקרה של תכנות לינארי)

4.1.11 SMs semidefinite programs

מבוא **תזכורת :** בעיית תכנות לינארי היא מהצורה :

$$\min_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$$
$$\text{subject to:} \boldsymbol{D}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{d}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

הבעיה הנ"ל יכולה להיות מוכללת על ידי הכללה של הסימון $\leq$ לסימון $\preceq$.
SM היא בעצם הכללה של LP, הפעם $\boldsymbol{x}$ במקום ווקטור יהיה יהיה עתיד להיות מטריצה.
נזכר בסימונים הבאים :

סימון 35.4 קבוצת כל המטריצות הסמטריות מסדר n מסומן $\mathbb{S}^n$ כלומר $\mathbb{S}^n=\left\{\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^{n\times n}\mid\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^T\right\}$

סימון 36.4 קבוצת כל המטריצותהאי שליליות מסדר n מסומן $\mathbb{S}_+^n$כלומר $\mathbb{S}_+^n=\{\boldsymbol{X}\in\mathbb{S}^n\mid\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{X}\boldsymbol{u}\geq 0\text{ for all }u\in\mathbb{R}^n\}$

סימון 37.4 קבוצת כל המטריצות החיוביות מוגדרות מסדר n מסומן $\mathbb{S}_{++}^n$כלומר $\mathbb{S}_{++}^n=\{\boldsymbol{X}\in\mathbb{S}^n\mid\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{X}\boldsymbol{u}>0\text{ for all }u\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}\ \}$

ומתקיים $\mathbb{S}_{++}^n\subseteq\mathbb{S}_+^n\subseteq\mathbb{S}^n$.
עבודה חשובה מאלגברה לינארית:
נסמן את הערכים העצמיים של המטריצה $\boldsymbol{X}$ באופן הבא:

$$\lambda\left(\boldsymbol{X}\right)=\left(\lambda_1\left(\boldsymbol{X}\right),\lambda_2\left(\boldsymbol{X}\right),\ldots,\lambda_n\left(\boldsymbol{X}\right)\right)$$

אזי

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}\in\mathbb{S}^n &\iff \lambda\left(\boldsymbol{X}\right)\in\mathbb{R}^n\\ \boldsymbol{X}\in\mathbb{S}_+^n &\iff \lambda\left(\boldsymbol{X}\right)\in\mathbb{R}_+^n\\ \boldsymbol{X}\in\mathbb{S}_{++}^n &\iff \lambda\left(\boldsymbol{X}\right)\in\mathbb{R}_{++}^n\end{aligned}$$

הגדרה 38.4 נגדיר מכפלה פנימים מעל $\mathbb{S}^n$, בהנתן $X,Y\in\mathbb{S}^n$, נגדיר

$$\langle X,Y\rangle=X\bullet Y=\operatorname{tr}\left(XY\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(XY\right)_{i,i}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}X_{i,j}\cdot Y_{i,j}$$

הגדרה 39.4 נגדיר **סדר** מעל $\mathbb{S}^n$, בהנתן $X,Y\in\mathbb{S}^n$, נגדיר

$$X\succeq Y\iff\left(X-Y\right)\in\boldsymbol{S}_+^n$$

הערה 40.4 לכל $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$ מתקיים ש $\operatorname{diag}\left(\boldsymbol{x}\right)\succeq\operatorname{diag}\left(\boldsymbol{y}\right)\iff\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{y}$ (משמעות הסימון :לכל כניסה בווקטור $\boldsymbol{x}$ הוא גדול יותר מכל כניסה זהה בווקטור $\boldsymbol{y}$)

בעיית ה **SMps semidefinite programs**

הגדרת **SMps semidefinite programs**

הגדרה 41.4 (שקולה) לבעיית **SMps semidefinite programs** היא בעיית אופטמזציה מהצורה

$$\begin{gathered}\min_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{c^T}\boldsymbol{x}\\ \text{subject to:}\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{F_1}+\ldots\boldsymbol{x}_n\boldsymbol{F_n}\preceq F_0\\ Ax=b\end{gathered}$$

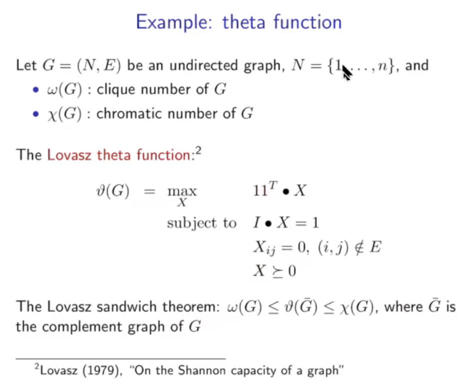
כאשר כאן $\boldsymbol{F_j}\in\mathbb{S}^d$ לכל $j\in\{0,1,\ldots,n\}$ ו $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$ ו $c\in\mathbb{R}^n$ ו $b\in\mathbb{R}^m$, נבחין כי זו בעיית אופטמזציה קמורה **תמיד**. (לכל $\boldsymbol{F_1},\ldots,\boldsymbol{F_n},\boldsymbol{A},\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}$)
בנוסף , כל בעיה LP היא גם בעייה SP.(אפשר לבדוק זאת, כנראה עבור מימד אחד)

הערה 42.4 כל בעיית **SMps semidefinite programs** ניתן לכתוב בצורה סטנדרטית וזו הצורה הסטדרטית שלה.

הגדרה 43.4 הצורה הסנדרטית של בעיית **semidefinite programs SMps** היא בעיית אופטמיזציה מהצורה

$$\begin{gathered}\min_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{C} \bullet \boldsymbol{X} \\ \text{subject to:} A_i \bullet X = b_i, i \in \{1, \ldots, m\} \\ \boldsymbol{X} \succeq 0\end{gathered}$$

דוגמה 44.4 דוגמא לבעיית **SMs** :



11^T היא מט' בגדול $n \times n$ שכל רכיביה הם 1.
$11^T \bullet X$ הוא למעשה סכום רכיבי כל האיברים במט' X
הבטוי $I \bullet X = 1$ הוא אילוץ שסכום כל אבירי האלכסון של X יהיו שווים לאחד.

הערה 45.4 זו בעיה שקשורה לתורת הגרפים

הערה 46.4 לא כל כך נדון בבעיות כאלה בקוקס

4.1.12 תכנות קוני Cone programs

הגדרה 47.4 אמר שבעיית **תכנות קוני Cone programs** אם ניתן לכתוב אותה כך:

$$\begin{gathered}\min_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \text{subject to:} D(\boldsymbol{x}) + d \in K, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\end{gathered}$$

כאשר

- $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ ו $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$
- $D : \mathbb{R}^n \longrightarrow Y$ הוא מפוי לינארי (פומ' לנארי), $d \in Y$ במרחב אוקלידי
- ו K מקיים ש $K \subseteq Y$ הוא חרוף קמור. (כלומר K הוא חרוט(קונוס) וגם K קבוצה סגורה).

נבחין כי LPs ו SDps הם מקרים מיוחדים של תכנות קוני.עבור LP נבחין כי $K = \mathbb{R}_+^n$ ועבור SDPs מתקיים $K = \mathbb{S}_+^n$ לא נראה את זה בצורה מסודרת בקורס.

הערה 48.4 לא הוכרחב על הדבר הזה יותר מדי

4.2 תרגול 4 - בעיות אופטמזציה קמורות ואלגוריתמים

4.2.1 בעיות אופטמזציה קמורות

הערה 49.4 בתרגול הזה נגדיר שוב את אותם ההגדרות שראינו בהרצאות.הפעם בניסוח טיפה אחר.

הגדרה 50.4 הבעיית האופטמזציה $\min_{\boldsymbol{x}} \overbrace{\{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in C\}}^{\{f(\boldsymbol{x})\}\ \text{s.t}\ |\boldsymbol{x}\in C}$ נקראת **בעייה קמורה** אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

1. פונ' המטרה f היא פונ' קמורה
2. תחום האילוץ C קמור.

תנאי מספיק לבעיות קמורות: נתובנן בבעיית האופטמזציה הבאה מעל $\mathbb{R}^n$ כאשר אנו מניחים כי כל הפונקציות מוגדרות בכל נקודה (ואולי מקבלות בה את הערך ∞) :

$$\min_{\boldsymbol{x}} \{f(\boldsymbol{x}) \mid g_i(\boldsymbol{x}) \le 0, h_j(\boldsymbol{x}) = 0, \forall i \in \{1,\ldots,m\}, \forall j \in \{1,\ldots,p\}\}$$

או ברישום החלופי

$$\begin{gathered}\min_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x})\\ \text{s.t} g_i(\boldsymbol{x}) \le 0, \forall i \in \{1,\ldots,m\}\\ h_j(\boldsymbol{x}) = 0, \forall j \in \{1,\ldots,p\}\end{gathered}$$

הערה 51.4 אזי, **אם** הפונ' f קמורה , הפונ' $g_i(\boldsymbol{x}) \le 0, \forall i \in \{1,\ldots,m\}$ קמורות והפונ' $h_j(\boldsymbol{x}) = 0, \forall j \in \{1,\ldots,p\}$ **אפיניות** (כלומר מהצורה $\forall j \in \{1,\ldots,p\} : h_j(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}_j^T\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}$) אזי הבעיה קמורה.

הערה 52.4 נשים לב שהתנאי הנ"ל הוא **תנאי מספיק אך לא הכרחי** לקימרות של בעיות אופטמזציה. למשל בבעיית האופטמזציה (החד מימדית) הבאה: $\min_x \left\{x \mid -x^2 = 0\right\}$ פונ' המטרה לינארית ולכן קמורה,אבל קיים אילוץ שוויון שאינו פונ' אפינית (x^2 אינו פונ' אפינית) ובכל זאת $C = \left\{x \mid -x^2 = 0\right\} = \{0\}$ מכיל נקודה בודדת ולכן תחום זה קמור.

הגדרה 53.4 בעית אופטמזציה נקראת **פיזבילית (בת־השגה)** אם קיימת נקודה $\boldsymbol{x}_0$ בתחום האילוץ כלומר $\boldsymbol{x}_0 \in C$ במקרה הזה נאמר שהנקודה $\boldsymbol{x}_0$ היא **פתרון פיזבילי**.

הגדרה 54.4 נקודה פיזבילית $\boldsymbol{x}^* \in C$ נקראת **מינימום מקומי של f ב** C אם קיים $r > 0$ כך שלכל $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}^*; r) \cap C$ מתקיים $f(\boldsymbol{x}^*) \le f(\boldsymbol{x})$.(נזכיר כי משמעות הסימון $B(\boldsymbol{c}; r)$ היא כדור פתוח ברדיוס r סביב נקודה $\boldsymbol{c}$)

הערה 55.4 החיתוך עם קבוצה C בהגדרה ש"לכל $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}^*; r) \cap C$" נובע מהשיקול בו במידה והערך האופטמלי מתקבל בקצה של התחום C נרצה שההגדרה של מינמום מקומי תכלול אותו.(אילו לא היה את ה $\cap C$ אז במידה והדרישה היתה שלכל $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}^*; r)$ מתקיים $f(\boldsymbol{x}^*) \le f(\boldsymbol{x})$ ואז במידה ו$\boldsymbol{x}^*$ הוא נקודת שפה (אינו נקודת פנים) f לא בהכרח מוגדרת על כל כדור ב $\boldsymbol{x}^*$ ואז ההגדרה למינימון מקומי לא תכלול את $\boldsymbol{x}^*$ שזה מצב לא רצוי)

הגדרה 56.4 נקודה פיזבילית $\boldsymbol{x}^* \in C$ נקראת **מינימום גלובלי של f ב** C אם לכל $\boldsymbol{x} \in C$ מתקיים $f(\boldsymbol{x}^*) \le f(\boldsymbol{x})$.

הגדרה 57.4 נקודה פיזבילית $\boldsymbol{x}^* \in C$ נקראת **מינימום גלובלי ממש של f ב** C אם לכל $\boldsymbol{x} \in C$ מתקיים $f(\boldsymbol{x}^*) < f(\boldsymbol{x})$.

הערה 58.4 נקרודת מינימום גלובלי $\boldsymbol{x}^*$ נקראת לעיתים גם **פתרון אופטמלי** של הבעיה . הערך $f(\boldsymbol{x}^*)$ שיסומן לעיתים על ידי f^* נקרא **הערך האופטממלי** (או הערך המינמלי) של הבעיהד

משפט 59.4 כל נקודת מינימום של בעיית אופטמזציה היא **מינימום גלובלי.**

במילים אחרות עבור בעיית אופטמזציה קמורה, מינימום מקומי הוא גם גלובלי.המשפט ליעיל אינו אומר כי לבעיית אופטזציה קמורה קיימת נקודת מינימום יחידה , לדוגמא עבור הבעיה הקמורה $\min_x \{f(x)\}, f(x)=0$ כל נקודה x היא מינימום גלובלי של הבעיה.

הוכחת המשפט:

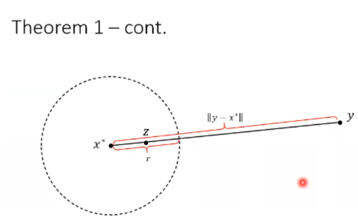
תהא $\boldsymbol{x}^*$ היא נקודת מינימום לוקלי .
נניח בשלילה ש$\boldsymbol{x}^*$ **אינה** מינימום גלובלי.

- $\boldsymbol{x}^*$ **אינה** מינימום גלובלי $\Leftarrow$ $\exists \boldsymbol{y}\in C: f(y) < f(\boldsymbol{x}^*)$ נסמן טענה זו ב ☼.
- $\boldsymbol{x}^*$ היא נקודת מינימום לוקלי $\Leftarrow$ $\exists r\in\mathbb{R}, \forall \boldsymbol{x}\in B(\boldsymbol{x}^*;r)\cap C: f(\boldsymbol{x}^*)\le f(\boldsymbol{x})$.ובנוסף $\boldsymbol{x}^*\in C$.נסמן טענה זו ב ☾.
- בעיית אופטמזציה היא קמורה ולכן C תחום קמור. מכיוון ש $\boldsymbol{x}^*\in C$ וגם $\boldsymbol{y}\in C$ נובע כי לכל $t\in[0,1]$ מתקיים $(t\boldsymbol{y}+(1-t)\boldsymbol{x}^*)\in C$.
- בפרט, עבור $t=\frac{r}{2\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}^*\|}\in(0,1)$ מתקיים $(t\boldsymbol{y}+(1-t)\boldsymbol{x}^*)\in C$
- בעיית אופטמזציה היא קמורה ולכן f קמורה ומכאן נובע כי

$$f(\boldsymbol{z})=f(t\boldsymbol{y}+(1-t)\boldsymbol{x}^*)\le tf(\boldsymbol{y})+(1-t)f(\boldsymbol{x}^*)\overbrace{<}^{☼}tf(\boldsymbol{x}^*)+(1-t)f(\boldsymbol{x}^*)=f(\boldsymbol{x}^*)$$

- **מצד אחד:** בפרט $f(\boldsymbol{z})<f(\boldsymbol{x}^*)$
- **מצד אחר:** נבחין כי $\boldsymbol{z}\in B(\boldsymbol{x}^*;r)\cap C$ ולכן לפי טענה ☾ ראינו כי $f(\boldsymbol{x}^*)\le f(\boldsymbol{z})$.

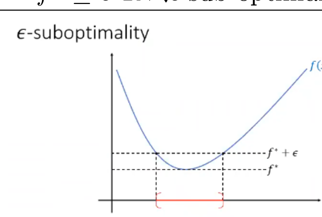
סתירה!
$\Leftarrow$ $\boldsymbol{x}^*$ מינימום גלובלי.
הסבר נוסף על מדוע $t=\frac{r}{2\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}^*\|}\in(0,1)$:



כאשר חילקנו ב2 כדי לא להתעסק עם ניסאנסים של כדור סגור או פתוח.

הערה 60.4 זה משפט חזק מאוד כי רוב האלג' שנראה מבטיחים התכנסות למינמום לוקלי.ולכן כאשר הבעיה קמורה אז המינימום הלוקלי הוא המינימום הגלובלי.

הגדרה 61.4 הנקדה $\boldsymbol{x}$ נקראת ϵ **- תת אופטמלית** (ϵ sub optimal) אם $f(\boldsymbol{x})-f^*\le\epsilon$.



משפט 62.4 תנאי מסדר ראשון לאופטמליות יהא $C\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום קמורה ותהא $f:C\longrightarrow\mathbb{R}$ פונ' קמורה וגזירה בריצפות . אזי:

הנקודה $\boldsymbol{x}^*$ היא פתרון אופטמלי עבור הבעיה $\min_{\boldsymbol{x}} \{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in C\} \iff \forall \boldsymbol{y} \in C : \nabla f(\boldsymbol{x}^*)^T (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^*) \geq 0$

4.2.2 מבוא לאלגוריתמי אופטמיזציה

בהנתן בעיית אופטמזציה כללית כלשהיא $\min_{\boldsymbol{x}} \{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in C\}$ לרוב לא תמיד אפשר לפתור את הבעיה באופן אנליטי ולכן משתמשים באלג' **נומריים** שמאפשרים למצוא פתרון **מקורב** לבעייה.באופן כללי אלגורתמי האופטמזציה מתחילים מניחוש כלשהו $\boldsymbol{x}_0$ ומפיקים סדרת פתרונות פיזביליים $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots$ בצורה **איטרטיבית**.מכיוון שהתמטר היא למצוא פתרון מקורב לבעיית האופטמזציה , ככל שתתבצענה יותר איטרציות ערך פונ' המטרה יישאף לערך האופטמלי . כלומר

$$\lim_{t \to \infty} f(\boldsymbol{x}_t) = f^*$$

הגדרה 63.4 נאמר כי **קצב ההתכנסות convergence rate של אלג' אופטמזציה הוא** $O(g(t))$אם **לכל** ניחוש התחלתי $\boldsymbol{x}_0$ **קיים** קבוע אי שלילי $c(\boldsymbol{x}_0) \in \mathbb{R}$ (כלומר הקבוע c תלוי ב $\boldsymbol{x}_0$) עבורו מתקיים $\forall t \in \{1, 2, \ldots, \} : f(\boldsymbol{x}_t) - f^* \leq c(\boldsymbol{x}_0) \cdot g(t)$.

הערה 64.4 במקרים רבים הקבוע $c(\boldsymbol{x}_0)$ תלוי בפרטמטרים נוספים של הפונ' (שאינם תלויים בt)

דוגמה 65.4 על מנת להמחיש את חשיבות קצב ההתכנסות עבור אלג' אופטמזציה נתעיין בשאלה הבאה: **מה הוא מספר האיטרציות הדרוש על מנת לקבל פתרון שהוא ϵ תת אופטמלי** עבור אלגוריתמי אופטמזציה שונים?
לשם כך נצרך לדגרוש $f(\boldsymbol{x}_t) - f^* \leq c(\boldsymbol{x}_0) \cdot g(t) \leq \epsilon$.

- במקרים נפוצים הקבוע המתקבל הינו $c(\boldsymbol{x}_0) = \|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}^*\|_2$. אנו נתעניין במקרה ספצפי אף יות רבו הקבוע הזה הוא 1 (למשל כאשר בעיית האופטמזציה היא $\min_{\boldsymbol{x}} \|\boldsymbol{x}\|_2^2$ והניחוש ההתחלתי הוא על מעגל היחידה.
- נניח כי ברצוננו להגיע לפתרון ϵ תת אופטמלי עבור $\epsilon = 10^{-4}$.
  - עבור קצב של $O\left(\frac{1}{t}\right)$:

$$\frac{1}{t} \leq \epsilon \Rightarrow \frac{1}{\epsilon} \leq t \Rightarrow \frac{1}{10^{-4}} \leq t \Rightarrow 10^4 \leq t$$

כלומר נצטרך 10^4 איטרציות של האלג' על מנת להבטיח את המרחק הדרוש האופטימום.

  - עבור קצה של $O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$:

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \leq \epsilon \Rightarrow \frac{1}{\epsilon} \leq \sqrt{t} \Rightarrow \frac{1}{10^{-4}} \leq \sqrt{t} \Rightarrow 10^4 \leq \sqrt{t} \Rightarrow 10^8 \leq t$$

כלומר נצטרך 10^8 איטרציות של האלג' על מנת להבטיח את המרחק הדרוש האופטימום.

  - עבור קצה של $O(e^{-t})$:

$$e^{-t} \leq \epsilon \Rightarrow -t \leq \ln(\epsilon) \Rightarrow t \geq -\ln(\epsilon) \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \leq t \Rightarrow 9.21 \approx \ln\left(\frac{1}{10^4}\right) \leq t$$

כלומר נזדקק סה"כ ל 10 איטרציות בלבד על מנת להבטיח את המרחק הדרוש מהאופטימום.

חלק II
שיטות ואלגוריתמים מסדר ראשון

5 הרצאה 5 ותרגול 5

5.1 הרצאה 5 התחלה של הנושא Gradient desecnt

בהרצה נראצה למזער פונ' קמורה f חלקה וללא אילוצים.כלומר נרצה לפתור את בעיית האופטמזציה $\min_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x})$.

כלומר f פונ' קמורה וגזירה בתחום הגדרתה $\mathrm{dom}\left(f\right)=\mathbb{R}^{n}$.
נסמן את הערך האופטמלי $f^{*}=\min_{\boldsymbol{x}}f\left(\boldsymbol{x}\right)$ ואת הפתרון האופטמלי $\boldsymbol{x}^{*}$.
בשיעור הזה נשתמש ב**גרדיאנט** של הפונ' בתור כלי מרכזי לניתוח של הפונ' במטרה למצוא את המינומם שלה.שיטות כאלה,נקראות **שיטות מסדר ראשון.**קיצור לשיטות מסדר ראשון הם GD(קיצור ל GD-Gradient desecnt =משפחת האלג' מסדר ראשון).שיטות אלו הן שיטות **איטרטיביות** שמשתמשות בגרדיאנט של f כדי לעדכן את הערך $\boldsymbol{x}_{i}$ מאיטרציה אחת לאחרת.
למה שיטות מסדר ראשון חשובות כל כך?

- **תכונה ראשונה:עלות חישובית נמוכה.**בהשוואה לשיטות מסדר שני (שיטות איטרטיביות שמשתמשות בגרדיאנט + האסיאן לצורך בצוע צעד עדכון) הן **בעלות עלות חישובית נמוכה יותר.**

דוגמה 1.5 אם לבעיה שלנו יש מימד $n=10^{4}$ אז עלות חישוב הגרדיאנט היא מסדר $\mathcal{O}\left(n\right)$.מצד שני עלות חישוב ההאסיאן היא מסדר $\mathcal{O}\left(n^{2}\right)$.ולכן שיטות מסדר ראשון הם בסיבוכיות $\mathcal{O}\left(n\right)$ לעומת שיטות מסדר שני שהם בסיבוכיות $\mathcal{O}\left(n^{2}+n\right)=\mathcal{O}\left(n^{2}\right)$.כלומר שיטות מסדר שני במימדים גבוהים הם לא לעיתים קרובות מעשיות כי העלות החישובית שלהם היא במיוחד מאוד.

- **תכונה שניה:חסינות לרעש** השיטות ממשפחת GD מסוגלות להתמודד באופן יפה עם רעש בבעיה.לשיטות מסדר שני אין התכונה הזו של התמודדות עם רעש בהצלחה.

5.1.1 האלגוריתם GD-Gradient desecnt

קלט:

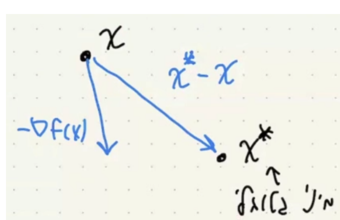
- **פונ'** $f:\mathbb{R}^{d}\longrightarrow\mathbb{R}$ קמורה, גזירה ובעלת מינימום גלובלי $\boldsymbol{x}^{*}$.
- **תנאי עצירה** $0<\epsilon$.
  - כלומר, כמה קרוב אנו רוצים להיות לפתרון?
- **גודל צעד(=קצב הלימוד)** $0<\eta$.
  - בחירה הפרמטר הזה הוא **קריטי** אם נדע לבחור את גדול הצעד בצורה נכונה,זה יכול להיות ההבדל המשמעותי בין ההצלחה של האלג' לכשלון.

הערה 2.5 ניתן גם לבחור את **נקודת ההתחלה** $\boldsymbol{x}_{0}$ אם יש לנו מידע מקדים על הפתרון האופטמלי נרצה לבחור נקודת התחלה שקרובה אליו.

מטרה/פלט: מצא $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{d}$ כך ש $f\left(\boldsymbol{x}\right)-f\left(\boldsymbol{x}^{*}\right)\leq\epsilon$.למעשה, מספיק לנו למצוא **פתרון מקורב** לפתרון האופטמלי.זה מספיק בחיים האמתיים לכל צורך פרקטי.

הערה 3.5 שים לב שייתכנו כמה נקודות $\boldsymbol{x}_{1}^{*}\neq\boldsymbol{x}_{2}^{*}$ עבורם $f\left(\boldsymbol{x}_{1}^{*}\right)=f\left(\boldsymbol{x}_{2}^{*}\right)$.

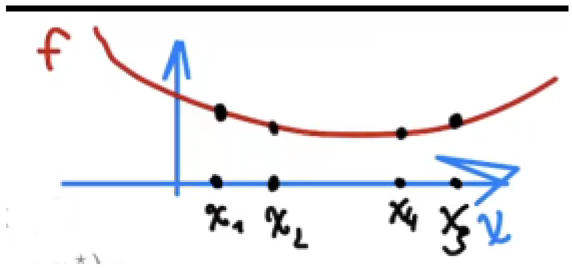
צעד העדכון: $\boldsymbol{x}_{t+1}=\boldsymbol{x}_{t}+\eta\nabla f\left(\boldsymbol{x}_{t}\right)$**לכל איטרציה** $t\in\{0,1,\ldots\}$.
אינטואציה: נזכר שראינו בהרצאה 2 את **המסקנה מאי שוויון הגרדיאנט**:לכל פונ' קמורה $\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{d}:\left(-\nabla f\left(\boldsymbol{x}\right)\right)^{T}\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{*}\right)\geq0$.
כלומר ראינו כי **אם** f **פונ' קמורה** אז להליכה בכיוון ירידת הגרדיאנט **תמיד תהיה קורולציה אי שלילית** עם הכיוון שבו עלינו ללכת על מנת להגיע למינימום הגלובלי.



כלומר התקדמות בכיוון $\left(-\nabla f\left(\boldsymbol{x}\right)\right)$ תקדם אותי לעבר הפתרון האופטמלי.

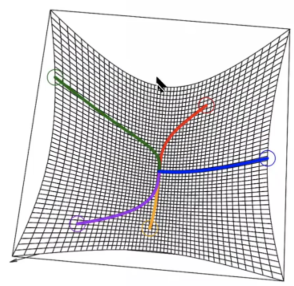
הרעיון הוא שנו מתחילים בנקודה שירורתית כלשהו x_0 ובכל צעד הולכים בכיוון השלילי של הגרדיאנט של הפתרון שאנו נמצאים בו כעת.

איור לדוגמא:



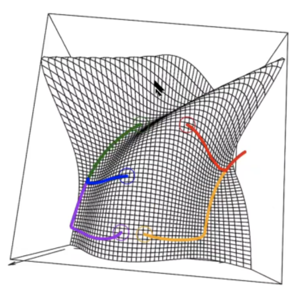
הערה 4.5 (**באיור הנקודה הראשונה היא** x_1)

דוגמה 5.5 איור נוסף להתכנסות האלג' GD עבור אתחולים שוינם (בצבעים שונים)



נשים לב שעבור פונ' קמורה (הפונ' באיור מעלה) לא משנה מאיפה אתחלנו (מוקף בעיגול) את האלג': הגענו לאותו הפתרון האופטמלי.

עבור פונ' לא קמורות המצב שונה:



כעת אתחלנו את האלג' מנקודות שונות (העיגולים בצבעים) והגענו למקומות שונים : ההסבר הוא שהפונ' באיור הנ"ל אינה קמורה.

כלומר אם f **קמורה** מובטחת התכנסות למינמום הגלובלי,אם f אינה קמורה,יכולה להתקיים התכנסות,אבל לא בהכרח למינימום גלובלי (אלא למינימום לוקלי) או אפילו יותר גרוע: יש התכנסות למקומות בהם הגרדאנט מתאפס (לדומא: נקודות אוכף) ונקודות אלה אפילו לא מהוות נקודות מינימום.

פרשנות (אינרפטציה) לאלג' GD-Gradient desecnt נניח שיש לנו פונ' $f\left(\boldsymbol{y}\right)$ אז ראינו שניתן לעשות לה **קירוב מסדר ראשון** סביב נקודה $\boldsymbol{x}$ באופן הבא:

$$f\left(\boldsymbol{y}\right)\approx f\left(\boldsymbol{x}\right)+\nabla f\left(\boldsymbol{x}\right)^{T}\left(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\right)$$

אנו יודעים כי הקירוב הנ"ל תקף רק ב**סביבה קרובה** של הנקודה $\boldsymbol{x}$ כלומר, ככל שנתרחק מהנקודה $\boldsymbol{x}$ ככה הקירוב מסדר ראשון פחות ופחות ייצג לנו נאמנה את f.

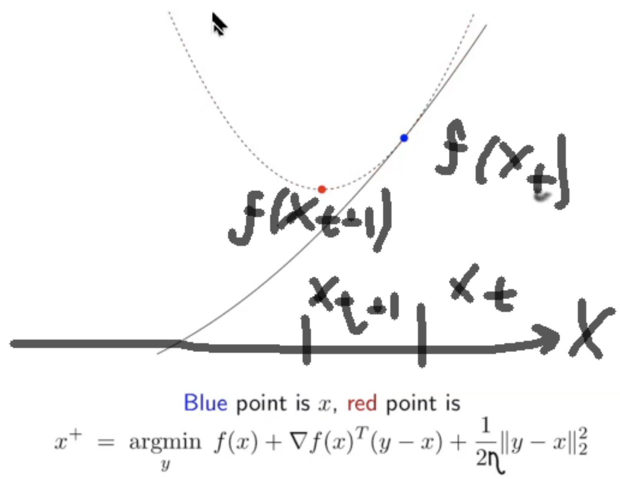
ולכן גישה אחת בהתבוננות על בעיית הGD היא **מזעור של הקירוב מסדר ראשון** של f, תוך מתן **קנס** (איבר מהצורה $\frac{1}{2\eta}\cdot\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|_2^2$ הוא איבר שמכריח אותנו להשאר קרובים לנקודה $\boldsymbol{x}$ שהתחלנו ממנה את האיטרציה)ככל שאנו מתרחקים מנקודה $\boldsymbol{x}$.מתמטית ניתן להראות זאת באופן הבא.באיטרציה הt, נרצה למזער את $\boldsymbol{x}_t$.כלומר נחפש $\boldsymbol{y}$ **בסביבה הקורבה** של $\boldsymbol{x}$ שמקיים:

$$\min_{\boldsymbol{y}} f\left(\boldsymbol{x}_t\right)+\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)^T\left(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}_t\right)+\frac{1}{2\eta}\cdot\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}_t\|_2^2$$

מסתבר שאם אנו עושים זאת , נקבל כלל עדכון **ששקול** לכלל העדכון הבא:

$$\boldsymbol{x}_{t+1}=\boldsymbol{x}_t-\eta\cdot\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)$$

איור:



- בעצם מה שקורה כאן: יש את הפונ' f (הקו הרציף)
- והקירוב הלינארי שלה+גורם ריבועי $\frac{1}{2\eta}\cdot\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}_t\|_2^2$ (הקו המקוקו) .
  - הגורם הלינארי מקרב את הפונ' בסביבה של הנקודה $\boldsymbol{x}^t$.
  - הגורם הריבועי מתפצוץ ככל שתמרחקים מ $f\left(\boldsymbol{x}_t\right)$.(הנקודה הכחולה)
  - שני הגורמים מרכיבים את הפרבולה שאנו רואים בשרטוט.
- הנקודה הכחולה היא נקודת ההתחלה $f\left(\boldsymbol{x}_t\right)$
- הנקודה **האדומה** היא הנקודה של המינימום של הקירוב הלינארי שלה+הגורם ריבועי $\boldsymbol{x}$.שימו לב שככל שנתרחק מהנקודה הכחולה כך הגורם הריבועי ייגדל (=הקירוב הלינארי לא יהיה תקף והבטוי יגדל).
- הנקודה הבאה שניקח תהיה $f\left(\boldsymbol{x}_{t+1}\right)$ (את $\boldsymbol{x}_{t+1}$) זו הנקודה האדומה.

מה נעשה בשאר השיעור?

- איך בוחרים את η קצב הלימוד
- הוכחת התכנסות של האלג' עבור בחירה נכונה של η ודיון על קצב ההתכנסות
- דיון עבור תכונות ההתכנסות של האלג' עבור פונ' שאינן קמורות.

קצבי התכנסות

תוצאה טיפוסית לגבי קצב ההתכנסות:

דוגמה 6.5 אם מריצים GD למשך t איטרציות (=סיבובים/עדכונים) אז מקבלים את הפתרון x_t כך ש :

$$f\left(\boldsymbol{x}_t\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right) \leq \frac{C}{t} \qquad , C \text{ is Const such that} C>0$$

- **המשמעות**, ככל שלוקחים יותר יותר איטרציות, ככה הפתרון נעשה יותר מדויק הערך שלו נעשה קרוב יותר לערך האופטמלי. הקבוע C בד"כ קשור לאתחול של האלג אם הנקודה ההתחלתית היא $\boldsymbol{x}^*$ אז $C=0$,לדוגמא.לתכונה הזו נקראת **הבטחת קצב**. בדוגמא פה קצב ההתכנסות הוא $\frac{C}{t}$ אבל ייתכנו קצבים אחרים לדוגמא $\frac{C}{\sqrt{t}}, \frac{C}{t^2}$.כלומר בדוגמא שלנו **הפתרון משתפר כמו** $\frac{C}{t}$.**כלומר : הלכת t איטרציות ? תקבל פתרון שקרוב לאופטמלי לכל הפחות** $\frac{C}{t}$.
- **ניתן** להתבונן על אי השוויון מזווית אחרת: אם אני רוצה למצוא **פתרון** ϵ **אופטמלי** (קרוב לפתרון האופטמלי בלכל הפחות ϵ),**כמה איטרציות אני צריך** על מנת להגיע לפתרון כזה.כלומר, אם רוצים להבטיח כי $f\left(\boldsymbol{x}_t\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right) \leq \epsilon \qquad , C \text{ is Const such that} \epsilon>0$ כמה איטרציות t אנו נזדקק?

ראינו כי אחרי t איטרציות הפתרון יהיה "$\frac{C}{t}$ אופטמלי " (רחוק מהפתרון האופטמליבלכל היותר $\frac{C}{t}$) ולכן על מנת למצוא את t נחלץ אותו מהמשוואה $\epsilon \geq \frac{C}{t}$ כלומר $t \geq \frac{C}{\epsilon}$.(אם t אינו שלם, ניקח ערך שלם עליון שלו).כלומר

$$f\left(\boldsymbol{x}_t\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right) \leq \frac{C}{t} \leq \boldsymbol{\epsilon} \Rightarrow \boxed{t \geq \frac{C}{\epsilon}}$$

כלומר עלינו ללכחת $\left\lceil\frac{C}{\epsilon}\right\rceil$ צעדים על מנת להגיע לפתרון ϵ אופטמלי.

כלומר **שני דרכי ההסתכלות** על **קצב התכנסות** הם:

1. **הלכת t איטרציות ?** $\Leftarrow$ **כמה הפתרון שנקבל קרוב לאופטמלי ?**
   - תת אופטמליות כפונ' של מספר האיטרציות.
2. **רוצים למצוא פתרון קרוב לפתרון האופטמלי בלכל הפחות ϵ (בדיוק של ϵ)**$\Leftarrow$**כמה איטרציות נזדקק ?**
   - מספר האיטרציות הנדרשות כפונ' של אפסילון.

וזה מה שחשוב לזכור.

אנליזה ראשונית איך חוסמים את $f\left(\boldsymbol{x}_t\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)$? כלומר למצוא חסם עליון לאחר T צעדים (=תת אופטמליות כפונ' של מספר האיטרציות T)

נסמן $g_t \equiv \nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)$ ולכן צעד העדכון של אלג' הגרדיאנט $\boldsymbol{x}_{t+1}=\boldsymbol{x}_t-\eta \cdot \nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)$ מוגדר להיות כעת תחת הסימון החדש

$$\forall t \in\{0,1,2, \ldots, T-1\}: \boldsymbol{x}_{t+1}=\boldsymbol{x}_t-\eta \cdot g_t$$

משפט 7.5 אם $f: \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ היא פונ' קמורה אזי **אלג' GD** מבטיח כי א

$$\frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1}\left(f\left(\boldsymbol{x}_t\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right) \leq \frac{1}{T} \cdot\left[\frac{1}{2 \eta} \cdot\left\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}^*\right\|_2^2+\frac{\eta}{2} \cdot \sum_{t=0}^{T-1}\left\|g_t\right\|_2^2\right]$$

ניתוח המשפט:

- השגיאה באיטרציה הt נתונה על ידי $\left(f\left(\boldsymbol{x}_t\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right)$, **סכום כל השגיאות** לאורך כל T האיטרציות נתון על ידי $\sum_{t=0}^{T-1}\left(f\left(\boldsymbol{x}_t\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right)$.אם ניחק את הבטוי ב T נקבל את הבטוי $\frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1}\left(f\left(\boldsymbol{x}_t\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right)$ משמעות הבטוי הוא **השגיאה הממוצעת** של האלג במהלך T האיטרציות שלו.

  אזי **השגיאה הממוצעת** של האלג לאחר T איטרציות **קטנה או שווה (=חסומה)** על ידי אגף ימין. (כלומר חסומה על ייד $\frac{1}{T} \cdot\left[\frac{1}{2 \eta} \cdot\left\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}^*\right\|_2^2+\frac{\eta}{2} \cdot \sum_{t=0}^{T-1}\left\|g_t\right\|_2^2\right]$)

ההבטחה הזו היא נכונה לכל $\eta > 0$.**מתי** ההבטחה הזו משמעותית?כלומר **מתי** שהשגיאה ממוצעת הולכת ופחותת עם הגגדלת כמות האיטרציות?

- משמעות האיבר $\frac{1}{2\eta} \cdot \|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}^*\|_2^2$ רלוונטי לתנאי ההתחלה.אם הנקודה התחלתית $\boldsymbol{x}_0$ קרוב לפתרון האופטמלי $\boldsymbol{x}^*$ אז הערך שלה איבר הזה הולך להיות נמוך (ואם רחוקים־האיבר יהיה גבוהה).
- משמעות האיבר : $\frac{1}{2} \cdot \sum_{t=0}^{T-1} \|g_t\|_2^2$ אם הגרדיאנטים לאורך הפתרון מאוד גדולים אז האיבר הזה יהיה גדול אם הם קטנים לאורך הפתרון אז האיבר קטן והשגיאה הולכת להיות נמוכה.

נוכיח את המשפט ונראה שקיים ביחרה של קצב לימוד $\eta > 0$ כך שהבטוי הימני (האיבר $\frac{1}{T} \cdot \left[\frac{1}{2\eta} \cdot \|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}^*\|_2^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{t=0}^{T-1} \|g_t\|_2^2\right]$) הולך וקטן ונמצא את η עבורו הבטוי הנ"ל יהיה אופטמלי (=הקטן ביותר).

למה מסתכלים על השגיאה הממוצעת? לא מובטח לנו מכל סיבוב לכל סיבוב הערך $f(\boldsymbol{x}_t) - f(\boldsymbol{x}^*)$ יקטן,יש סיבובים בה השגיאה עלולה לגדול (כלומר,יש איטרציות עבורם $f(\boldsymbol{x}_{t+1}) - f(\boldsymbol{x}^*) > f(\boldsymbol{x}_t) - f(\boldsymbol{x}^*)$) אבל בממוצע, השגיאה הולכת לקטון מסיבוב לסיבוב.

הניתוח (=הוכחת המשפט) הבא של האלג' הולך לחזור על עצמו כל הקרוס כמעט לכל האלג'.אז חשוב להבין אותו.
הוכת המשפט:

1. נזכר באי שוויון הגרדיאנט $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ וקמורה ולכן תנאיו מתקיימים ולכן :

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \operatorname{dom}(f) : f(\boldsymbol{y}) \geq f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x})^T (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})$$

ולכן:

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \operatorname{dom}(f) : f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x}) \geq +\nabla f(\boldsymbol{x})^T (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})$$

ולכן:

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \operatorname{dom}(f) : f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y}) \leq \nabla f(\boldsymbol{x})^T (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$$

בפרט עבור $\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{y} \in \operatorname{dom}(f)$ מתקיים $f(\boldsymbol{x}_t) - f(\boldsymbol{x}^*) \leq \nabla f(\boldsymbol{x}_t)^T (\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}^*)$.נסמן $g_t \equiv \nabla f(\boldsymbol{x}_t)$ כפי שהגדרנו קודם ולכן נקבל כי מתקיים

$$f(\boldsymbol{x}_t) - f(\boldsymbol{x}^*) \leq \boldsymbol{g}_t^T (\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}^*)$$

אי השוויון הנ"ל נכון לכל t ולכן גם יהיה נכון על הסכום של כל ה־tים:

$$(\text{✡}) : \sum_{t=0}^{T-1} (f(\boldsymbol{x}_t) - f(\boldsymbol{x}^*)) \leq \sum_{t=1}^{T-1} \left[\boldsymbol{g}_t^T (\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}^*)\right]$$

.

(א) נתבונן בשני האיטרציות הראשונות:

$$\begin{array}{r|l} t=0 & 2\eta \cdot \boldsymbol{g}_0^T (\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}^*) \leq \|(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}^*)\|_2^2 - \|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}^*\|_2^2 + \eta^2 \cdot \|\boldsymbol{g}_0\|_2^2 \\ \hline t=1 & 2\eta \cdot \boldsymbol{g}_1^T (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}^*) \leq \|(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}^*)\|_2^2 - \|\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}^*\|_2^2 + \eta^2 \cdot \|\boldsymbol{g}_1\|_2^2 \end{array}$$

נחבר את שני המשוואות האיברים הבאים יתבטלו

$$\begin{array}{r|l} t=0 & 2\eta \cdot \boldsymbol{g}_0^T (\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}^*) \leq \|(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}^*)\|_2^2 - \cancel{\|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}^*\|_2^2} + \eta^2 \cdot \|\boldsymbol{g}_0\|_2^2 \\ \hline t=1 & 2\eta \cdot \boldsymbol{g}_1^T (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}^*) \leq \cancel{\|(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}^*)\|_2^2} - \|\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}^*\|_2^2 + \eta^2 \cdot \|\boldsymbol{g}_1\|_2^2 \end{array}$$

(זה נקרא סכום טלסקופי) זה יקרה עבור כל שני אי שוויונות עוקבים.ולכן אם נסכום את כל ה־Tים נשאר עם האיבר הראשון והאיבר האחרון.המחשנו את זה עבור $t = 0, t = 1$.אזי אם נסכום על פני כל הסיבובים $t = 0, 1, 2, \ldots, T-1$ נקבל:

$$\sum_{t=0}^{T-1} 2\eta \cdot \boldsymbol{g}_t^T (\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}^*) \leq \sum_{t=0}^{T-1} \left(\|(\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}^*)\|_2^2 - \|\boldsymbol{x}_{t+1} - \boldsymbol{x}^*\|_2^2 + \eta^2 \cdot \|\boldsymbol{g}_t\|_2^2\right)$$

ומהתכונות של הטור הטלסקופי נשאר עם

$$\sum_{t=0}^{T-1} 2\eta \cdot \boldsymbol{g}_t^T\left(\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}^*\right) \le \|(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}^*)\|_2^2 - \left\|\boldsymbol{x}_{(T-1)+1} - \boldsymbol{x}^*\right\|_2^2 + \eta^2 \cdot \sum_{t=0}^{T-1} \|\boldsymbol{g}_t\|_2^2$$

כלומר

$$\sum_{t=0}^{T-1} 2\eta \cdot \boldsymbol{g}_t^T\left(\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}^*\right) \le \|(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}^*)\|_2^2 - \|\boldsymbol{x}_T - \boldsymbol{x}^*\|_2^2 + \eta^2 \cdot \sum_{t=0}^{T-1} \|\boldsymbol{g}_t\|_2^2$$

מתכונות הנורמה האיבר $\|\boldsymbol{x}_T - \boldsymbol{x}^*\|_2^2$ אי שלילי ולכן האיבר $-\|\boldsymbol{x}_T - \boldsymbol{x}^*\|_2^2$ אי חיובי ולכן נוכל להשמיט אותו ולהגדיל את אי השוויון ולקבל

$$\begin{aligned}\sum_{t=0}^{T-1} 2\eta \cdot \boldsymbol{g}_t^T\left(\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}^*\right) &\le \|(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}^*)\|_2^2 - \|\boldsymbol{x}_T - \boldsymbol{x}^*\|_2^2 + \eta^2 \cdot \sum_{t=0}^{T-1} \|\boldsymbol{g}_t\|_2^2 \\ &\le \|(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}^*)\|_2^2 + \eta^2 \cdot \sum_{t=0}^{T-1} \|\boldsymbol{g}_t\|_2^2\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו את אי השייון

$$\sum_{t=0}^{T-1} 2\eta \cdot \boldsymbol{g}_t^T\left(\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}^*\right) \le \|(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}^*)\|_2^2 + \eta^2 \cdot \sum_{t=0}^{T-1} \|\boldsymbol{g}_t\|_2^2$$

נחלק ב 2η ונקבל

$$\hexagon : \sum_{t=0}^{T-1} \boldsymbol{g}_t^T\left(\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}^*\right) \le \frac{1}{2\eta} \cdot \|(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}^*)\|_2^2 + \frac{\eta}{2} \cdot \sum_{t=0}^{T-1} \|\boldsymbol{g}_t\|_2^2$$

2. נזכר בכלל העדכון של האלג $\boldsymbol{x}_{t+1} = \boldsymbol{x}_t - \eta \cdot \boldsymbol{g}_t$: $\forall t \in \{0, 1, 2, \dots, T-1\}$ וננתח את הבטוי $\|\boldsymbol{x}_{t+1} - \boldsymbol{x}^*\|_2^2$:

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}_{t+1} - \boldsymbol{x}^*\|_2^2 &= \|(\boldsymbol{x}_t - \eta \cdot \boldsymbol{g}_t) - \boldsymbol{x}^*\|_2^2 \\ &= \|(\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}^*) - \eta \cdot \boldsymbol{g}_t\|_2^2 \\ &= \|(\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}^*)\|_2^2 - 2\eta \cdot \boldsymbol{g}_t^T\left(\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}^*\right) + \eta^2 \cdot \|\boldsymbol{g}_t\|_2^2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|\boldsymbol{x}_{t+1} - \boldsymbol{x}^*\|_2^2 = \|(\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}^*)\|_2^2 - 2\eta \cdot \boldsymbol{g}_t\left(\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}^*\right) + \eta^2 \cdot \|\boldsymbol{g}_t\|_2^2$$

נבצע העברת אגפים ונקבל

$$2\eta \cdot \boldsymbol{g}_t^T\left(\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}^*\right) \le \|(\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}^*)\|_2^2 - \|\boldsymbol{x}_{t+1} - \boldsymbol{x}^*\|_2^2 + \eta^2 \cdot \|\boldsymbol{g}_t\|_2^2$$

(א) נשרשר את אי השוויון ✡ ו ⬡ ונקבל

$$\sum_{t=0}^{T-1}\left(f\left(\boldsymbol{x}_t\right) - f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right) \overbrace{\le}^{✡} \sum_{t=0}^{T-1} \boldsymbol{g}_t^T\left(\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}^*\right) \overbrace{\le}^{\hexagon} \frac{1}{2\eta} \cdot \|(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}^*)\|_2^2 + \frac{\eta}{2} \cdot \sum_{t=0}^{T-1} \|\boldsymbol{g}_t\|_2^2$$

ובפרט

$$\sum_{t=0}^{T-1}\left(f\left(\boldsymbol{x}_t\right) - f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right) \le \frac{1}{2\eta} \cdot \|(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}^*)\|_2^2 + \frac{\eta}{2} \cdot \sum_{t=0}^{T-1} \|\boldsymbol{g}_t\|_2^2$$

נחלק את אי השוויון הנ"ל ב T ונקבל

$$\frac{1}{T}\cdot\left[\sum_{t=0}^{T-1}\left(f\left(\boldsymbol{x}_t\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right)\right]\leq\frac{1}{T}\left[\frac{1}{2\eta}\cdot\left\|\left(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}^*\right)\right\|_2^2+\frac{\eta}{2}\cdot\sum_{t=0}^{T-1}\left\|\boldsymbol{g}_t\right\|_2^2\right]$$

שזה מה שרצינו להוכיח ולכן,סיימנו.

■

נמשיך בניתוח של המשפט נתבונן בנקודה $\overline{\boldsymbol{x}}_T=\frac{1}{T}\cdot\sum_{t=0}^{T-1}\boldsymbol{x}_t$ היא מהווה צירוף קמור של $\boldsymbol{x}_t$ ־ים לאורך כל T האיטרציות (כל המקדמים $\lambda_i=\frac{1}{T}$ אי שליליים והסכום של כולם הוא 1).מאי שוויון ינסן 69.2 נובע כי

$$f\left(\overline{\boldsymbol{x}}_T\right)=f\left(\frac{1}{T}\cdot\sum_{t=0}^{T-1}\boldsymbol{x}_t\right)=f\left(\sum_{t=0}^{T-1}\frac{1}{T}\boldsymbol{x}_t\right)\overbrace{\leq}^{\text{Jensen's inequality}}\sum_{t=0}^{T-1}\frac{1}{T}f\left(\boldsymbol{x}_t\right)=\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1}f\left(\boldsymbol{x}_t\right)$$

כלומר

$$f\left(\overline{\boldsymbol{x}}_T\right)\leq\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1}f\left(x_t\right)$$

נחסיר $f\left(\boldsymbol{x}^*\right)$ משני האגפים ונקבל

$$\begin{aligned}f\left(\overline{\boldsymbol{x}}_T\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)&\leq\left[\frac{1}{T}\left[\sum_{t=0}^{T-1}\left(f\left(x_t\right)\right)\right]\right]-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)=\left[\frac{1}{T}\left[\sum_{t=0}^{T-1}\left(f\left(x_t\right)\right)\right]-Tf\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right]\\&=\left[\frac{1}{T}\left[\sum_{t=0}^{T-1}\left(f\left(x_t\right)-T\cdot\frac{1}{T}f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right)\right]\right]=\left[\frac{1}{T}\left[\sum_{t=0}^{T-1}\left(f\left(x_t\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right)\right]\right]\end{aligned}$$

בפרט $f\left(\overline{\boldsymbol{x}}_T\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\leq\left[\frac{1}{T}\left[\sum_{t=0}^{T-1}\left(f\left(x_t\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right)\right]\right]$ אגף ימין הוא האגף מהמשפט ולכן לאחר הפעלת המשפט נקבל כי

$$f\left(\overline{\boldsymbol{x}}_T\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\leq\left[\frac{1}{T}\left[\sum_{t=0}^{T-1}\left(f\left(x_t\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right)\right]\right]\leq\frac{1}{T}\left[\frac{1}{2\eta}\cdot\left\|\left(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}^*\right)\right\|_2^2+\frac{\eta}{2}\cdot\sum_{i=1}^{T-1}\left\|\boldsymbol{g}_t\right\|_2^2\right]$$

לא רק שהשגיאה ממוצעת לאורך כל האיטרציות $\frac{1}{T}\left[\sum_{t=0}^{T-1}\left(f\left(x_t\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right)\right]$ הולכת וקטנה ככל שעושים יותר סיבובים (T גדל).

אלא שממש אפשר לבחור נקודה אחת מסויימת בסוף התהליך של האופטמזציה $\overline{\boldsymbol{x}}_T=\frac{1}{T}\cdot\sum_{t=0}^{T-1}\boldsymbol{x}_t$ שהשגיאה שלה תהיה **נמוכה** (**נומכה ממש** נקודה מסויימת) כלומר:

- כלומר **מסיבוב לסיבוב לא מובטח שיפור**,כלומר, עלול להתקיים ש$f\left(\boldsymbol{x}_{t+1}\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)>f\left(\boldsymbol{x}_t\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)$ (השגיאה גדלה מאיטרציה מסויימת לאיטרציה העוקבת)
- אבל **בסוף תהליך האופטמזציה** אפשר לבחור את הנקודה $\overline{\boldsymbol{x}}_T=\frac{1}{T}\cdot\sum_{t=0}^{T-1}\boldsymbol{x}_t$ עבורה יתקיים $f\left(\overline{\boldsymbol{x}}_T\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\leq\frac{1}{T}\left[\frac{1}{2\eta}\cdot\left\|\left(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}^*\right)\right\|_2^2+\frac{\eta}{2}\cdot\sum_{i=1}^{T-1}\left\|\boldsymbol{g}_t\right\|_2^2\right]$.עבור נקודה זו, מתקיים **תמיד** שככל שT גדול יותר, (עשינו יותר איטרציות) ככה השגיאה שלה תהיה נמוכה יותר ויותר , וזה באופן וודאי.

מסקנה 8.5 מסקנה חשובה כלומר, **מסיבוב לבסיבוב לא מובטח** שיפור בתת האופטמליות של השגיאה (ייתכנו $f\left(\boldsymbol{x}_{t+1}\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)>\left(f\left(\boldsymbol{x}_t\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right)$.אבל **ערך הפונ' בנקודה שהיא הממוצע** $\overline{\boldsymbol{x}}_t$, תמיד יישתפר מסיבוב לסיבוב כלומר $\forall t\in\mathbb{N}\backslash\{0\}:f\left(\overline{\boldsymbol{x}}_{t+1}\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\leq f\left(\overline{\boldsymbol{x}}_t\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)$ **תמיד**.כלומר **האיכות** של הפתרון (=תת אופטמלי עבור מספר קטן יותר) של הנקודה $\overline{x}_t$,**הולכת ומשפתרת תמיד** ככל שמגדילים את מספר האיטרציות.

פונ' קמורה ליפשיץ

הגדרה 9.5 פונ' $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ תקרא B **לפשיצית** אם **קיים** $B\in\mathbb{R}$ כך ש : $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n:\|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})\|\leq B\cdot\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$.

הערה 10.5 תנאי שקול לפונ' f להיות B לפשיצית היא שכל הגרדיאנטים שלהב חסומים על ידי קבוע B. כלומר : $\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ $\|\nabla f(\boldsymbol{x})\|\leq B$.

נרצה לראות מתי לחסם מהמשפט הקודם שקיבלנו יש משמעות.אנו הולכים להניח שני **הנחות נוספות** על הפונ' f :

1. אנו מניחים שהפונ' היא ליפשיצית.(כלומר שכל הגרדיאנטים שלהב חסומים על ידי קבוע B).
2. בנוסף אנו מניחים שקיים R עבורו נקודת האתחול של האלג' שלנו מקיים $\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}^*\|\leq R$.

הערה 11.5 בווקפדיה , עבור פונ' קמורה ליפשצית מכל תחום במימד לכל טווח במימד כלשהו,תנאי לישפציות יכול להיות מוגדר עם כל שני מרחבי נורמות שהם (אחת שמוגדרת לתחום ואחת שמוגדרת לטווח) :

Definitions [edit]

Given two metric spaces (X, d_X) and (Y, d_Y), where d_X denotes the metric on the set X and d_Y is the metric on set Y, a function $f : X \to Y$ is called **Lipschitz continuous** if there exists a real constant $K \geq 0$ such that, for all x_1 and x_2 in X,

$$d_Y(f(x_1),f(x_2))\leq Kd_X(x_1,x_2).$$ [3]

אזי אם נבצע את ההנחות הנוספות האלו על f, נקבל את המשפט הבא:

משפט 12.5 תהא $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ **קמורה** , **גזירה** , עם נקודת מינימום גלובלית שנסמנה $\boldsymbol{x}^*$.**בנוסף נניח** כי $\exists R,\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n:$ $\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}^*\|\leq R$ וכי $\exists B,\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n:\|\nabla f(\boldsymbol{x})\|\leq B$.**אזי** אם נבחר את גודל הצעד η באופן הבא

$$\eta:=\frac{R}{B\sqrt{T}}$$

אזי **אלגוריתם הגרדיאנט GD** יניב את התואה הבאה:

$$\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1}\left(f\left(\boldsymbol{x}_t\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right)\leq\frac{RB}{\sqrt{T}}$$

הערה 13.5 נבחין כי η הוא פורפרוציוני למרחק האתחול $\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}^*\|\leq R$ ופרופורציוני הפוך לחסם על הגרדיאנטים $\|\nabla f(\boldsymbol{x})\|\leq B$.

הערה 14.5 כלומר השגיאה ממוצעת $\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1}\left(f\left(\boldsymbol{x}_t\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right)$ קטנה או שווה מ $\frac{RB}{\sqrt{T}}$.כלומר השגיאה הממוצעת הולכת וקטנה ככל ש T הולך וגדל. כלומר השגיאה הממוצעת הולכת וקטנה כפונ' של $\frac{1}{\sqrt{T}}$.

הערה 15.5 נבחין כי המשפט **דורש לדעת מראש** מה היא כמות האיטרציות שאנו הולכים לבצע , T.

הערה 16.5 אזי, כדי לקבל ϵ אופטמליות , כמה איטרציות T נצטרך? החישוב נראה כך $\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1}\left(f\left(\boldsymbol{x}_t\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right)\leq\boldsymbol{\frac{RB}{\sqrt{T}}\leq\epsilon}$ נרצה לבטא את T כפונ' של ϵ:נקבל

$$\frac{RB}{\sqrt{T}}\leq\epsilon\iff\frac{RB}{\epsilon}\leq\sqrt{T}\iff\left(\frac{RB}{\epsilon}\right)^2\leq T$$

ז"א נצטרך לפחות $\left(\frac{RB}{\epsilon}\right)^2$ איטרציות (אם המספר לא שלם ניקח ערך שלם עליון) בשביל לקבל פתרון ϵ אופטמלי.
במילים אחרות, כדי לקבל ϵ אופטמליות (שגיאה של לכל היותר ϵ) נצטרך לפחות מספר צעדים שפרופורציוני ל $\frac{1}{\epsilon^2}$.כלומר **הקצב הוא** $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon^2}\right)$.

הערה 17.5 ראינו קודם כי עבור הנקודה $\overline{\boldsymbol{x}}_T=\frac{1}{T}\cdot\sum_{t=0}^{T-1}\boldsymbol{x}_t$ יתקיים $f\left(\overline{\boldsymbol{x}}_T\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\leq\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1}\left(f\left(\boldsymbol{x}_t\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right)$ ולכן נוכל לשרשר אותו למשפט שריאנו ולקבל את אי השווין

$$f\left(\overline{\boldsymbol{x}}_T\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\leq\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1}\left(f\left(\boldsymbol{x}_t\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right)\leq\frac{RB}{\sqrt{T}}$$

הוכחת המשפט: ראינו לפי המשפט הקודם כי

$$\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1}\left(f\left(\boldsymbol{x}_t\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right)\leq\frac{1}{T}\cdot\left[\frac{1}{2\eta}\cdot\left\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}^*\right\|_2^2+\frac{\eta}{2}\cdot\sum_{t=0}^{T-1}\left\|g_t\right\|_2^2\right]$$

כעת נגדיל את אי השוויון על ידי $\exists R,\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n:\left\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}^*\right\|\leq R$ וכי $\exists B,\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n:\left\|\overbrace{\nabla f\left(\boldsymbol{x}\right)}^{g_t}\right\|\leq B$ ונקבל

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1}\left(f\left(\boldsymbol{x}_t\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right)&\leq\frac{1}{T}\cdot\left[\frac{1}{2\eta}\cdot\left\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}^*\right\|_2^2+\frac{\eta}{2}\cdot\sum_{t=0}^{T-1}\left\|g_t\right\|_2^2\right]\\&\leq\frac{1}{T}\cdot\left[\frac{1}{2\eta}\cdot R^2+\frac{\eta}{2}\cdot\sum_{t=0}^{T-1}B^2\right]\\&=\frac{1}{T}\cdot\left[\frac{1}{2\eta}\cdot R^2+\frac{\eta}{2}\cdot TB^2\right]\end{aligned}$$

כלומר מתקבל כי

$$\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1}\left(f\left(\boldsymbol{x}_t\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right)\leq\frac{1}{T}\cdot\left[\frac{1}{2\eta}\cdot R^2+\frac{\eta}{2}\cdot TB^2\right]$$

כלומר קיבלנו בטוי של השגיאה ממוצעת (אגף שמאל) שחסומה על ידי פונ' של η (אגף ימין) ..**נרצה למצוא את החסם ההדוק ביותר**, כלומר את השגיאה הממוצעת הקטנה ביותר.

ולכן , נסמן $q\left(\eta\right)=\frac{1}{2\eta}\cdot R^2+\frac{\eta}{2}\cdot TB^2$ ונרצה לבחור η עבורו נקבל ש $q\left(\eta\right)$ מקבל מינימום.נגזור את q לפי η ונקבל

$$q'\left(\eta\right)=-\frac{1}{\eta^2}\left[\frac{1}{2}\cdot R^2\right]+\frac{1}{2}\cdot TB^2=0\Rightarrow\frac{1}{2}\cdot TB^2=\frac{1}{\eta^2}\left[\frac{1}{2}\cdot R^2\right]\Rightarrow\frac{\frac{1}{2}\cdot TB^2}{\frac{1}{2}\cdot R^2}=\frac{1}{\eta^2}\Rightarrow\frac{\cancel{\frac{1}{2}}\cdot R^2}{\cancel{\frac{1}{2}}\cdot TB^2}=\eta^2\Rightarrow\boxed{\frac{R}{\sqrt{T}B}=\eta}$$

נבחין כי $\eta=\frac{R}{\sqrt{T}B}$ הוא הערך עבורו מתקבל המינימום של הפונ'.(ניתן לגזור פעם נוספת ולהראות שנגזרת חיובית ולכן זו אכן נקודת מינימום: $0\overbrace{<}^{\text{becuse }\eta>0}\frac{1}{\eta^3}\left[\frac{1}{2}\cdot R^2\right]=q''\left(\eta\right)$)

ולכן קיבלנו כי עבור $\eta=\frac{R}{\sqrt{T}B}$ קצב הלימוד מתקבל כי

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1}\left(f\left(\boldsymbol{x}_t\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right) &\leq \frac{1}{T}\cdot\left[\frac{1}{2\eta}\cdot R^2+\frac{\eta}{2}\cdot TB^2\right]\\ &=\frac{1}{T}\cdot\left[\frac{1}{2\left(\frac{R}{\sqrt{T}B}\right)}\cdot R^2+\frac{\left(\frac{R}{\sqrt{T}B}\right)}{2}\cdot TB^2\right]\\ &=\frac{1}{T}\cdot\left[\frac{\sqrt{T}B\cdot R}{2}+\left(\frac{R}{\sqrt{T}B}\right)\frac{TB^2}{2}\right]\\ &=\frac{1}{T}\cdot\left[\frac{\sqrt{T}B\cdot R}{2}+\frac{\sqrt{T}BR}{2}\right]\\ &=\frac{1}{T}\cdot\left[\sqrt{T}B\cdot R\right]\\ &=\frac{BR}{\sqrt{T}}\end{aligned}$$

כלומר עבור $\eta=\frac{R}{\sqrt{T}B}$ (ה η האופטמלי) מתקבל כי $\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1}\left(f\left(\boldsymbol{x}_t\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right)\leq\frac{BR}{\sqrt{T}}$.וזה מה שרצינו להוכיח

■

הערה 18.5 הערה חשובה: קיבלנו את התוצאה שעבור $\eta=\frac{R}{\sqrt{T}B}$ מתקיים ש $\overbrace{\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1}\left(f\left(\boldsymbol{x}_t\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right)}^{\text{avarage error}}\leq\frac{BR}{\sqrt{T}}$כלומר **התוצאה היא אינה תלויה במימד של הבעיה!** כלומר החסם על השגיאה הממוצעת אינו תלוי במימד של הבעיה.קיימים הרבה מקרים שבהם הקבועים R,B אינם תלויים במימד.**למה זה חשוב?** יש שיטות (שלא נלמד בקורס:eplipsoid, cutting plae שהתלות שלהם באפסילון אומנם קטנה מאוד,אבל התלות שלהם במימד הבעיה גדול מאוד (לדוגמא $\mathcal{O}\left(n^3\right)$) שזו סבוכיות גדולה מאוד שמגבילה אותנו לכל צורך מעשי לבעיות מעשיות.**ולכן חשוב להעריך את התכונה הזו.**

הערה 19.5 הערה חשובה 2: קיבלנו את התוצאה שעבור $\eta=\frac{R}{\sqrt{T}B}$ מתקיים ש $\overbrace{\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1}\left(f\left(\boldsymbol{x}_t\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right)}^{\text{avarage error}}\leq\frac{BR}{\sqrt{T}}$.ראינו כי מתקיים כבר $f\left(\overline{\boldsymbol{x}}_T\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\leq\frac{BR}{\sqrt{T}}$ ולכן החסם $\frac{BR}{\sqrt{T}}$ חוסם מלמעלה גם את השגיאה הזו $f\left(\overline{\boldsymbol{x}}_T\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)$, וגם חוסם מלמעלה את האיטרינט סעל השגיאה הכי נמוכה ($\boldsymbol{t}^*=\arg\min_{t\in\{0,1,\ldots,T-1\}}\left\{f\left(\boldsymbol{x}_t\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right\}$ כלומר מתקיים עבור האיטרנט הכי טוב שהוא חסום מלמעלה על ידי אותו חסם , $f\left(\boldsymbol{x}_{t^*}\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\leq\frac{BR}{\sqrt{T}}$ כלומר לסיכום

$$\begin{aligned} f\left(\overline{\boldsymbol{x}}_T\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\leq\frac{BR}{\sqrt{T}} &\qquad ,\overline{\boldsymbol{x}}_T=\frac{1}{T}\cdot\sum_{t=0}^{T-1}\boldsymbol{x}_t\\ f\left(\boldsymbol{x}_{t^*}\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\leq\frac{BR}{\sqrt{T}} &\qquad ,\boldsymbol{t}^*=\arg\min_{t\in\{0,1,\ldots,T-1\}}\left\{f\left(\boldsymbol{x}_t\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right\}\end{aligned}$$

הבעיה היא שלא תמיד אנו יודעים את R ו/או את B למעשה לרוב לא נדע אותם.קיימות שיטות (אחת מהם נלמד בתרגול) שמנסה ללמוד את הפרמטרים הללו תוך כדי הרצת אלג' האופטמזציה (נקראת adagrad) שיטה שהיא אדפטיבית לנורמות של הגרדיאנטים (לא צריכה לדעת את הB מראש.

5.1.2 פונ' חלקות

אנו הולכים להגביל את הדיון שלנו כעת לפונ' קמורות שהם בנוסף גם **חלקות** .
נתחיל בהגדרת פונ' חלקות

הגדרה 20.5 הגדרה ראשונה: פונ' $f:\mathbb{R}^d\longrightarrow\mathbb{R}$ תקרא **פונ' L־חלקה** L smooth (עבור פרמטר $L\geq 0$) אם היא **גזירה ברציפות** ובנוסף $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^d:\|\nabla f(\boldsymbol{x})-\nabla f(\boldsymbol{y})\|\leq L\cdot\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$.(**שקול** להגדרה שהגרדיאנט הוא L ליפשיץ,ראה הערה) השימוש בהגדרה הזו בד"כ נעשה מחוץ להקשר של אופטמזציה.עבור אופטמזציה נהוג להשתמש בהגדרה השניה (שנובעת מההגדרה מספר 1).

הערה 21.5 ההגדרה הזו אינה דורשת קמירות (יהיה לנו שימושי בהמשך).עבור פונ' קמורות ההגדרה הראשונה והשניה , שקולות.

הערה 22.5 (הגדרה שקולה , של התרגול) פונ' $f:\mathbb{R}^d\longrightarrow\mathbb{R}$ תהיה בעלת גרדיאנט ליפשצי עם קבוע L L-lipshchits cotinuous gradient אם לכל $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$ מתקיים $\|\nabla f(\boldsymbol{x})-\nabla f(\boldsymbol{y})\|\leq L\cdot\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$

הערה 23.5 נוכל לומר על פונ' לינארית (הגרדיאנטים שלה מתאפסים) שהיא **0 ־ חלקה**.(זה הכי חלק שיכול להיות).

הגדרה 24.5 הגדרה שניה: פונ' $f:\mathbb{R}^d\longrightarrow\mathbb{R}$ תקרא **פונ' L־חלקה** L smooth (עבור פרמטר $L\geq 0$) אם היא **קמורה,גזירה** ובנוסף $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^d:f(\boldsymbol{y})\leq f(\boldsymbol{x})+\nabla f(\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})+\frac{L}{2}\cdot\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2$.

הערה 25.5 כלומר, לפי ההערה הקודמת **אם** f **קמורה וגזירה ברציפות** :

$$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^d:\|\nabla f(\boldsymbol{x})-\nabla f(\boldsymbol{y})\|\leq L\cdot\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^d:f(\boldsymbol{y})\leq f(\boldsymbol{x})+\nabla f(\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})+\frac{L}{2}\cdot\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2$$

כלומר אם פונ' f קמורה וגזירה ברציפות אזי : f היא L חלקה $\Longleftrightarrow$ f בעלת גרדיאנט ליפשיצי עם קבוע L.

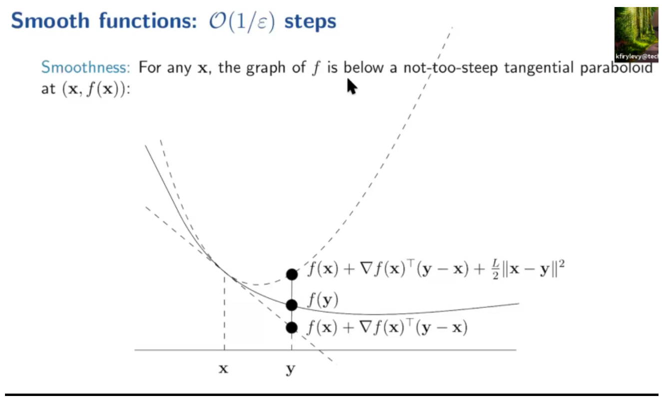
משפט 26.5 (מתוך הרצאה 5)תהא פונ' $f:\mathbb{R}^d\longrightarrow\mathbb{R}$ אם f גזירה פעמיים ובנוסף f היא פונ' קמורה , אזי f L חלקה אם $\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d:\lambda_{\max}\left(\nabla^2 f(\boldsymbol{x})\right)\leq L$ (הע"ע הגדול ביותר של מט' ההסיאן של f , קטן מ L בכל מקום) אזי f **היא** L **חלקה**.

משפט 27.5 (מתוך הרצאה 5)תהא פונ' $f:\mathbb{R}^d\longrightarrow\mathbb{R}$ אם f גזירה פעמיים (כאן אין דרישה על קמירות f) .נסמן את מט' ההאסיאן $\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$ ואת קבוצת הע"ע שלה $\{\lambda_i\}_{i=1}^d$,. אזי כל הע"ע שלה חסומים מקיימים

$$\forall i\in\{1,2,\ldots,d\}:|\lambda_i|\leq L$$

אזי f **היא** L **חלקה**.

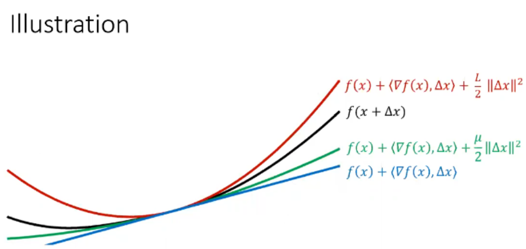
דוגמה 28.5 איור מתוך ההרצאה שמנסה להדגים זאת:



כלומר אם הפונ' f קמורה וחלקה, אז לכל נקודה x , הפונ' תמצא במעיין "סנדביץ" מעל הפונ' יהיה המשיק + האיבר האיבועי (שגדל ככל שמתרחקים מ$\boldsymbol{x}$) $\frac{L}{2}\cdot\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2$ $+\nabla f(\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})$ ומתחת לפונ' יהיה המשיק שלה $\nabla f(\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})$כלומר

$$\text{if } f \text{ is convex and smooth}:$$
$$\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^d:$$
$$\leq f(\boldsymbol{x})+\nabla f(\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\leq f(\boldsymbol{y})\leq f(\boldsymbol{x})+\nabla f(\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})+\frac{L}{2}\cdot\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2$$

איר נוסף לסנדוויץ, מתוך התרגול:



- בשחור זו הפונ' הקמורה והחלקה.
  - ובאדום זה הבטוי של החלקות (אם האדום מעל השחור לכל נקודה אז הפונ' f L חלקה)
  - ובכחול זה המשיק לפונ' (ראינו שעבור פונ' קמורות הוא יהיה תמיד מתחת לפונ')
  - בוירוק זה בטוי שמתאר פונ' קמורה ממש.(פונ' קמורה ממש אם תחסיר ממנה איבר ריבועי מסויים ותקבל עדיין פונ' קמורה.

אנחנו הולכים להראות שאם יש פונ' שהיא חלקה אז אפשר לקבל קצב עבור GD שהוא **טוב יותר** מהקצב שראינו.קודם ראינו שהקצב היה $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon^2}\right)$ (=בשביל לקבל פתרון ϵ היינו צריכים ללכת סדר גודל של $\frac{1}{\epsilon^2}$ צעדים) אזי כעת נראה שבקצב עבור f קמורה וגם **חלקה** יהיה טוב יותר כלומר שהקצב היה $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$ (=בשביל לקבל פתרון ϵ היינו צריכים ללכת סדר גודל של $\frac{1}{\epsilon}$ צעדים) ולכן זה שיפור מאוד ניקר.

משפט 29.5 פונ' שהם ריבועיות Quadric functions הן פונ' חלקות.

פעולות משמרות חלקות:

משפט 30.5 יהיו $f_1,f_2,\ldots,f_m$ פונ' קמורות שחלקות עבור פרמטרים $L_1,L_2,\ldots,L_m$ בהתאמה. יהיו $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m\in\mathbb{R}_+$(כלומר λ_i אי שלילית לכל i). אזי הפונ' הבאה: $\sum_{i=1}^m\lambda_i f_i \triangleq f$ היא הקמורה (לפי משפט אחר) **וחלקה** עם פרמטר חלקות $\sum_{i=1}^m\lambda_i L_i$.

משפט 31.5 תהא f פונ' קמורה ו L חלקה.נגדיר $g(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}$ עבור $A\in\mathbb{R}^{d\times n},\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^d$ אזי הפונ' $f\circ g=f(g(\boldsymbol{x}))$ היא

קמורה (לפי משפט אחר) **וחלקה** עם פרמטר חלוקת $L\|A\|^2$ כאשר

$$\|A\| = \max_{x\neq 0}\frac{\|A\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} = \sqrt{\lambda_{\max}\cdot\left(A^T A\right)}$$

כלומר , $\|A\|$ היא הנורמה $2-\mathrm{norm}$. (מכונה גם הנוקמה הספקטרלית) של A.

קימירות אל מול לפשציות:

הערה 32.5 ראינו כי

- הגרדיאנטים חסומים $\iff$ הפונ' f היא L לפשציית.
- הפו' חלקה $\iff$ עם הפונ' ∇f היא לפשיצית.

משפט 33.5 (ראינו אותו מעלה) תהא $f:\mathbb{R}^d\longrightarrow\mathbb{R}$ פונ' קמורה וגזרירה אזי :
f היא חלקה עם פרמטר חלקות L. $\iff$ $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^d:\|\nabla f(\boldsymbol{x})-\nabla f(\boldsymbol{y})\|\leq L\cdot\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$

הוכחה של GD עבור פונ' חלקות.

למה 34.5 sufficient decrease תהא $f:\mathbb{R}^d\longrightarrow\mathbb{R}$ פונ' גזירה וחלקה עם פרמטר חלקות L. אזי עבור צעד הלימוד $\eta=\frac{1}{L}$ אלג' ה GD מבטיח

$$f\left(\boldsymbol{x}_{t+1}\right)\leq f\left(\boldsymbol{x}_t\right)-\frac{1}{2L}\cdot\left\|\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)\right\|^2 \qquad .t\geq 0$$

הערה 35.5 נבחין שאי השוויון הזה מתקיים אם L חלקה עם פרמטר L עבור הקו המחבר בין הנקודות $\boldsymbol{x}_{t+1},\boldsymbol{x}_t$.

הערה 36.5 נזכור שפרמטר חלקות מוגדר עבור $L\geq 0$.

מסקנה 37.5 מסקנה ראשונה כלומר ההבטחה כאן היא שבין כל שני איטרנטים קיים שיפור.

$$f\left(\boldsymbol{x}_{t+1}\right)\leq f\left(\boldsymbol{x}_t\right)-\frac{1}{2L}\cdot\left\|\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)\right\|^2 \iff f\left(\boldsymbol{x}_{t+1}\right)-f\left(\boldsymbol{x}_t\right)\leq-\overbrace{\frac{1}{2L}\cdot\left\|\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)\right\|^2}^{\text{not negative}}$$

$$\Rightarrow f\left(\boldsymbol{x}_{t+1}\right)-f\left(\boldsymbol{x}_t\right)\leq 0\Rightarrow\boxed{f\left(\boldsymbol{x}_{t+1}\right)\leq f\left(\boldsymbol{x}_t\right)}$$

כלומר **בניגוד** למקרה הכללי במקרה הזה **תמיד** **יש** שיפור **בין כל שני צעדים** של האלג', עבור פונ' חלקה וגודל צעד הבא $\eta=\frac{1}{L}$, בכל צעד ערך הפונ' $f\left(\boldsymbol{x}_t\right)$ הולך וקטן.(מתקרבים למינימום.השיפור הנ"ל פורפרוציוני לגרדיאנט בנקודה הזו $\boldsymbol{\|\nabla f(x_t)\|^2}$ $\boldsymbol{\frac{1}{2L}\cdot}$ $f\left(\boldsymbol{x}_t\right)-$ כלומר ככל שהגדריאנט גדול נקבל שיפור משמעותי יותר וככל שהגדריאנט קטן נקבל שיפור קטן יותר .

כלומרא ראינו כי $f\left(\boldsymbol{x}_{t+1}\right)\leq f\left(\boldsymbol{x}_t\right)$ לכל t בפרט עבור האיטרנט האחרון מתקיים

$$\forall t\in\{0,1,\ldots,T-1,T\}:f\left(\boldsymbol{x}_T\right)\leq f\left(\boldsymbol{x}_t\right)$$

מסקנה 38.5 מסקנה שניה (נובעת מהעברת אגפים) אנו יכולים לחסום את $\left\|\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)\right\|^2$ (ריבוע הנורמה של הגרדינאט בנוקדה $\boldsymbol{x}_t$) על ידי

$$\boxed{\frac{1}{2L}\cdot\left\|\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)\right\|^2\leq f\left(\boldsymbol{x}_t\right)-f\left(\boldsymbol{x}_{t+1}\right)}$$

למה זה חשוב? ריאנו בהוכחה הקודמת כי היה בטוי מהצורה $\left\|\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)\right\|^2$, כעת יש לנו חסם נוסף על הגודל הזה.ולכן נוכל להשתמש בו בהוכחה הקודמת עבור פונ' חלקות.

הוכחת הלמה: נזכר בהגדרת החלקות (הגדרה 2) $\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^d: f(\boldsymbol{y})\le f(\boldsymbol{x})+\nabla f(\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})+\frac{L}{2}\cdot\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2$ ובפרט עבור $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_t,\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}_{t+1}$ ונקבל

$$f(\boldsymbol{x}_{t+1})\le f(\boldsymbol{x}_t)+\nabla f(\boldsymbol{x}_t)^T(\boldsymbol{x}_{t+1}-\boldsymbol{x}_t)+\frac{L}{2}\cdot\|\boldsymbol{x}_t-\boldsymbol{x}_{t+1}\|^2$$

נזכור כי $\boldsymbol{x}_{t+1}=\boldsymbol{x}_t-\eta\nabla f(\boldsymbol{x}_t)$ ונציב אותו ונקבל

$$f(\boldsymbol{x}_{t+1})\le f(\boldsymbol{x}_t)+\nabla f(\boldsymbol{x}_t)^T(\boldsymbol{x}_t-\eta\nabla f(\boldsymbol{x}_t)-\boldsymbol{x}_t)+\frac{L}{2}\cdot\|\boldsymbol{x}_t-\boldsymbol{x}_t-\eta\nabla f(\boldsymbol{x}_t)\|^2$$

$$f(\boldsymbol{x}_{t+1})\le f(\boldsymbol{x}_t)-\eta\nabla f(\boldsymbol{x}_t)^T(\nabla f(\boldsymbol{x}_t))+\frac{L}{2}\cdot\|\eta\nabla f(\boldsymbol{x}_t)\|^2$$

$$f(\boldsymbol{x}_{t+1})\le f(\boldsymbol{x}_t)-\eta\nabla f(\boldsymbol{x}_t)^T(\nabla f(\boldsymbol{x}_t))+\frac{L}{2}\cdot\left|\eta^2\right|\|\nabla f(\boldsymbol{x}_t)\|^2$$

$$\Downarrow\eta=\frac{1}{L}$$

$$f(\boldsymbol{x}_{t+1})\le f(\boldsymbol{x}_t)-\frac{1}{L}\cdot\|\nabla f(\boldsymbol{x}_t)\|^2+\frac{1}{2L}\cdot\|\nabla f(\boldsymbol{x}_t)\|^2$$

$$f(\boldsymbol{x}_{t+1})\le f(\boldsymbol{x}_t)-\frac{1}{2L}\cdot\|\nabla f(\boldsymbol{x}_t)\|^2$$

■

המשפט GD עבור פונ' חלקות

משפט 39.5 תהא $f:\mathbb{R}^d\longrightarrow\mathbb{R}$ פונ' **קמורה גזירה** בעלת נקודות מינימום שנסמנה $\boldsymbol{x}^*$.**בנוסף** נניח כי f **חלקה** עם פרמטר חלקות L.אזי , עבור **גודל הצעד** $\eta=\frac{1}{L}$ **, אלג' GD יניב:**

$$f(\boldsymbol{x}_T)-f(\boldsymbol{x}^*)\le\frac{L}{2T}\cdot\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}^*\|^2\qquad ,T>0$$

הערה 40.5 הדבר הזה משמעותי כי המשמעות שלו היא שככל שT גדול השגיאה של **האיטרציה האחרונה** $f(\boldsymbol{x}_T)-f(\boldsymbol{x}^*)$ הולכת וקטנה. (בניגוד למקודם , שהיה לנו משפט שדיבר על "השגיאה הממוצעת") כאן אנו מדברים על האיטרציה האחרונה.

הערה 41.5 בשפת אפסילון על מנת להגיע לשגיאה קטנה לפחות כמו ϵ (פתרון ϵ תת אופטמלי) , עלינו שיתקיים $\frac{L}{2T}\cdot\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}^*\|^2\le\epsilon$ כלומר עלינו לבצע $T\ge\frac{L}{2\epsilon}\cdot\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}^*\|^2$ איטרציות .

כלומר מהסימונים שלנו ממקודם , במקרה כזה של פונ' חלקה וגודל צעד $\eta=\frac{1}{L}$ מתקיים שקצב הלימוד הוא $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$.

כלומר, אם נסמן $\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}^*\|^2=R^2$, נקבל כי כדי לקבל פתרון ϵ תת אופטמלי $T\ge\frac{L}{2\epsilon}\cdot R^2$ איטרציות .

הערה 42.5 מה קורה אם אנו לא יודעים את קבוע החלקות L? מעשית יש הרבה דרכים לחזות אותו. קיימות כל מני שיטות לא לדעת אותו בדיוק ועדיין להשתמש באלג':

- Line searchנראה אותה בתרגול
- Polyak step sizeנראה בתרגיל בית
- adaptive methods
  - אחת השיטות של ה adaptive methods היא adagrad ונראה אותה בתרגול

הוכחת המשפט GD עבור פונ' חלקות נרצה להוכיח

$$,T>0 \qquad f\left(\boldsymbol{x}_T\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right) \leq \frac{L}{2T} \cdot \left\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}^*\right\|^2$$

נזכור כי $\eta=\frac{L}{2}$.
ראינו והכוחנו בעבר כי :

$$\frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1}\left(f\left(\boldsymbol{x}_t\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right) \leq \frac{1}{T} \cdot\left[\frac{1}{2\eta} \cdot\left\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}^*\right\|_2^2+\frac{\eta}{2} \cdot \sum_{t=0}^{T-1}\left\|g_t\right\|_2^2\right]$$

נפכיל את T בשני האגפים :

$$\text{✡}: \sum_{t=0}^{T-1}\left(f\left(\boldsymbol{x}_t\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right) \leq \frac{1}{2\eta} \cdot\left\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}^*\right\|_2^2+\frac{\eta}{2} \cdot \sum_{t=0}^{T-1}\left\|g_t\right\|_2^2$$

בנוסף f חלקה ולכן לפי הלמה $\frac{1}{2L} \cdot \left\|\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)\right\|^2 \leq f\left(\boldsymbol{x}_t\right)-f\left(\boldsymbol{x}_{t+1}\right)$ לכל t.ולכן נסכום את אי השוויון על כל המקרים של T:

$$\frac{1}{2L} \cdot \sum_{t=0}^{T-1}\left\|\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)\right\|^2 \overbrace{\leq}^{\text{sufficient decrease}} \sum_{t=0}^{T-1}\left(f\left(\boldsymbol{x}_t\right)-f\left(\boldsymbol{x}_{t+1}\right)\right)$$

ראינו כי אדף ימין הוא סכום טלסופי שמקיים $\sum_{t=0}^{T-1}\left(f\left(\boldsymbol{x}_t\right)-f\left(\boldsymbol{x}_{t+1}\right)\right)=f\left(\boldsymbol{x}_0\right)-f\left(\boldsymbol{x}_T\right)$ ולכן מתקיים

$$\text{♋}: \frac{1}{2L} \cdot \sum_{t=0}^{T-1}\left\|\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)\right\|^2 \leq f\left(\boldsymbol{x}_0\right)-f\left(\boldsymbol{x}_T\right)$$

נזכור כי $\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right) \equiv g_t$ לפי הסימונים ולכן לפי ✡ ושרשור האי שוויון מעלה נקבל:

$$\begin{aligned}
\sum_{t=0}^{T-1}\left(f\left(\boldsymbol{x}_t\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right) & \overbrace{\leq}^{\text{✡}} \frac{1}{2\eta} \cdot\left\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}^*\right\|_2^2+\frac{\eta}{2} \cdot \sum_{t=0}^{T-1}\left\|g_t\right\|_2^2 \\
& \overbrace{=}^{\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right) \equiv g_t} \frac{1}{2\eta} \cdot\left\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}^*\right\|_2^2+\frac{\eta}{2} \cdot \sum_{t=0}^{T-1}\left\|\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)\right\|_2^2= \\
& =\frac{1}{2\eta} \cdot\left\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}^*\right\|_2^2+\eta \cdot L \cdot \frac{1}{2L} \cdot \sum_{t=0}^{T-1}\left\|\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)\right\|_2^2 \\
& \overbrace{\leq}^{\text{♋}} \frac{1}{2\eta} \cdot\left\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}^*\right\|_2^2+\eta \cdot L \cdot\left[f\left(\boldsymbol{x}_0\right)-f\left(\boldsymbol{x}_T\right)\right] \\
& \overbrace{=}^{\eta=\frac{L}{2}} \frac{L}{2} \cdot\left\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}^*\right\|_2^2+f\left(\boldsymbol{x}_0\right)-f\left(\boldsymbol{x}_T\right)
\end{aligned}$$

בפרט $\sum_{t=0}^{T-1}\left(f\left(\boldsymbol{x}_t\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right) \leq \frac{L}{2} \cdot\left\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}^*\right\|_2^2+f\left(\boldsymbol{x}_0\right)-f\left(\boldsymbol{x}_T\right)$.נעביראת $f\left(\boldsymbol{x}_0\right)-f\left(\boldsymbol{x}_T\right)$ אגף ונקבל אגפים ונקבל

$$\overbrace{\sum_{t=0}^{T-1}\left(f\left(\boldsymbol{x}_t\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right)}^{\left(f\left(\boldsymbol{x}_0\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right)+\left(f\left(\boldsymbol{x}_1\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right)+\ldots+\left(f\left(\boldsymbol{x}_{T-1}\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right)} \leq \frac{L}{2} \cdot\left\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}^*\right\|_2^2+f\left(\boldsymbol{x}_0\right)-f\left(\boldsymbol{x}_T\right)$$

$$\sum_{t=1}^{T}\left(f\left(\boldsymbol{x}_t\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right) \leq \frac{L}{2} \cdot\left\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}^*\right\|_2^2$$

מהלמה sufficient decrease ראינו שהאירנט האחרון הכי טוב, כלומר ראינו כי מתקיים $\forall t\in\{0,1,\ldots,T-1,T\}:f(\boldsymbol{x}_T)\leq f(\boldsymbol{x}_t)$ ולכן מתקיים $T[f(\boldsymbol{x}_T)-f(\boldsymbol{x}^*)]\leq\sum_{t=1}^{T}(f(\boldsymbol{x}_t)-f(\boldsymbol{x}^*))$.כלומר :

$$T[f(\boldsymbol{x}_T)-f(\boldsymbol{x}^*)]\leq\sum_{t=1}^{T}(f(\boldsymbol{x}_t)-f(\boldsymbol{x}^*))\leq\frac{L}{2}\cdot\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}^*\|_2^2$$

נצמצם ב T (נזכור ש $T>0$), ונקבל כי מתקיים

$$f(\boldsymbol{x}_t)-f(\boldsymbol{x}^*)\leq\frac{L}{2T}\cdot\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}^*\|_2^2$$

וזה מה שרצינו להוכיח

■

ההוכחה הנ"ל היתה דומה להוכחה הראשונה תוך שימוש בחלקות ובלמת sufficient decrease.

5.1.3 תרגול 5

הוגדר בתחילת התרגול ההגדרות הבאות(שראינו בהרצאה):

הערה 43.5 פונ' $f:\mathbb{R}^d\longrightarrow\mathbb{R}$ גזירה ברציפות.נאמר כי הפונ' **בעלת גרדיאנט ליפשצי עם קבוע** L L-lipshchits cotinuous gradient אם $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n:\|\nabla f(\boldsymbol{x})-\nabla f(\boldsymbol{y})\|_2\leq L\cdot\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_2$

הגדרה 44.5 הגדרה שניה: פונ' $f:\mathbb{R}^d\longrightarrow\mathbb{R}$ גזירה ברציפות.תקרא **פונ'** L**-חלקה** L smooth (עבור פרמטר $L\geq 0$) אם $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^d:f(\boldsymbol{y})\leq f(\boldsymbol{x})+\nabla f(\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})+\frac{L}{2}\cdot\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2$.

למה 45.5 אם פונ' f קמורה וגזירה ברציפות אזי : f היא L חלקה $\Longleftrightarrow$ f בעלת גרדיאנט ליפשיצי עם קבוע L.

נתובנן בבעית האופטמיזציה הלא מאולצת הבארה $\min_{\boldsymbol{x}}f(\boldsymbol{x})$.כאשר f היא פונ' קמורה ו L-חלקה.אלג' GD **(אלג' הגרדיאנט)** הוא אלג' איטרטיבי בו כלל העדוכן הוא מהצורה $\boldsymbol{x}_t=\boldsymbol{x}_{t-1}-\eta_t\nabla f(\boldsymbol{x}_{t-1})$.ראינו בתרגיל בית 1 כי $\boldsymbol{d}=-\nabla f(\boldsymbol{x})$ הוא **כיוון ירידה** של f ב $\boldsymbol{x}$ אם $\boldsymbol{d}\neq 0$.ולכן (מהגדרת כיוון ירידה) עבור גודל צעד $\eta_t>0$ קטן מספיק, מתקיים $f(\boldsymbol{x}_t)<f(\boldsymbol{x}_{t-1})$ כאשר $\nabla f(\boldsymbol{x}_{t-1})\neq 0$.

אלגוריתם 1 אלג' הגרדיאנט Gradient Desecnt (GD) - תרגול 5

Data: Initial guess, $\mathbf{x}_0$, tolerance parameter $0<\epsilon\ll 1$

for $t=1,2,\ldots$ **do**

  $\eta_t\leftarrow$ `ComputeStepSize`$(\mathbf{x}_{t-1},\ \nabla f(\mathbf{x}_{t-1}))$

  $\mathbf{x}_t\leftarrow\mathbf{x}_{t-1}-\eta_t\nabla f(\mathbf{x}_{t-1})$

  if $\|\nabla f(\mathbf{x}_t)\|<\epsilon$ **then**

    return $\mathbf{x}_t$

  end

end

אלג' הגרדיאנט: בנק' המינימום הגרדיאנט מתאפס.ולכן תנאי העצירה מבטיח כי אנו קרובים מספיק לנקודת המינימום, בה $\nabla f(\boldsymbol{x})=0$.

קיימות גישות שונות לבחירת גודל הצעד:

1. **גודל צעד קבוע** בכל איטרציות $\forall t : \eta_t \equiv \eta$ כלומר בכל האיטרציות נתקדם תמיד באותו גודל צעד.

2. **גודל צעד מדוייק** בגישה זו נבצע מנימזיציה על כל גדלי הצעד במטרה למתוא את הגודל שיביא לירידה המקסמלית בערך פונ' המטרה, כלומר לכל t נבצע את החישוב הבא:

$$\forall t : \eta_t = \arg\min_{\eta \geq 0} f\left(\boldsymbol{x}_{t-1} - \eta \nabla f\left(\boldsymbol{x}_{t-1}\right)\right)$$

   (א) גישה זו לרוב לא נפוצה מעשית ובעיקר בדיון של קבילת אנשי האופטמזיציה הטהורה (נשמע סוג של כת)

3. **גודל צעד דועך** גישה זו היא בחירת גודל צעד דוערךףכלומר ככל ש t גדל גודל הצעד, קטן.

לבחירת קצב הלימוד η חשיבות מכרעת על ביצועי האלג' (בחירה לא טובה של η עלולה להוביל שהאלג' לא ייתכנס או לחלופין שייתכנס לאחר הרבה מאוד זמן).

משפט 46.5 אי שוויון קנטורוביץ' Kantorovich
עבור $\mathbb{R}^{n\times n} \ni Q \succ 0$ נסמן את M הע"ע הגדול ביותר של Q וm הע"ע הקטן ביותר של Q. אזי מתקיים:

$$\frac{\boldsymbol{x}^T Q \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}^T Q^{-1} \boldsymbol{x}}{\left(\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x}\right)^2} \leq \frac{(M+m)^2}{4Mm}, \forall \boldsymbol{x} \neq 0$$

הגדרה 47.5 תהא $\mathbb{R}^{n\times n} \ni Q \succ 0$ נסמן את M הע"ע הגדול ביותר של Q וm הע"ע הקטן ביותר של Q.**נגדיר** את הcondition number של Q להיות $\kappa \triangleq \frac{M}{m}$.

מסקנה 48.5 (מסקנה (למעשה,הכללה) של תרגיל 2 בתרגול 5) זה שעבור אלג' הגרדיאנט עם גודל צעד מדוייק מתקיים עבור בעיה ריבועית כי

$$f\left(\boldsymbol{x}_t\right) - f\left(\boldsymbol{x}\right) \leq \left(\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\right)^{2t} \left(f\left(\boldsymbol{x}_0\right) - f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right)$$

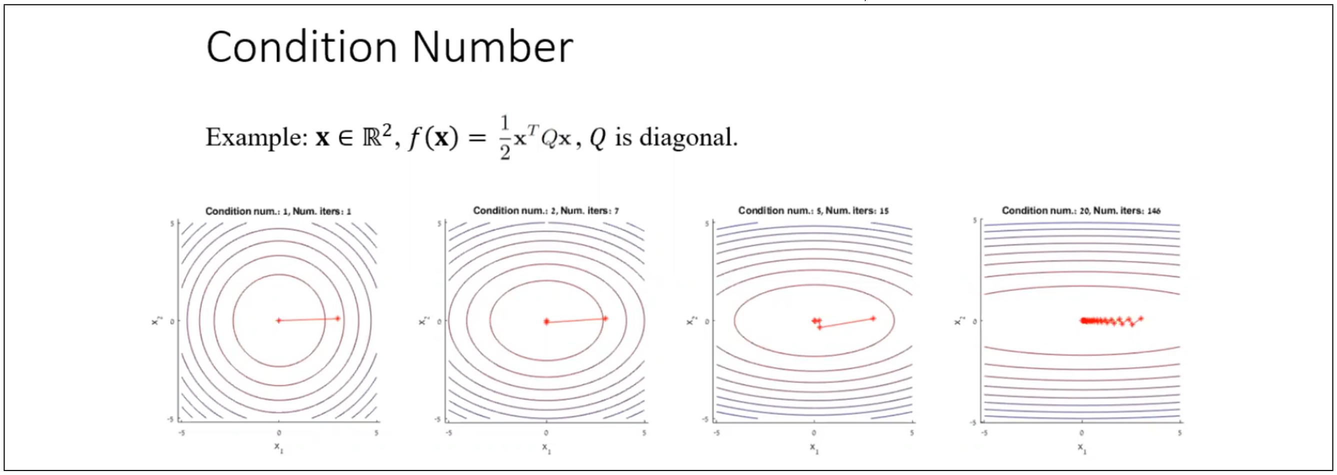
כלומר יש כאן קצב התכנסות **אקפוננסצאלי**.ככל שמתקדמים באיטאציות אנו מקטינים את המרחק פי הקבוע $\frac{\kappa-1}{\kappa+1}$ שקטן מ1. (בספרות לעיתים קרואים לזה התכנסות לינארית כי המינוח לינארי מקשר בין ערך הפונ' באיטרנט הנוכחי ובאיטרנט הקודם,והקשר בינהם הוא קבוע $\frac{\kappa-1}{\kappa+1}$.(קבוע לינארי ולכן מכאן מינוח של "התכנסות לינארית" בפועל זו התכנסות אקספוננצאלית (בכל צעד מכפלים קטן מ 1))

- אם $\kappa = 1$ (ע"ע מינימלי ו ע"ע מקסימלי), אזי אחרי צעד 1 נגיע לערך האופטמלי.
- אם $\kappa \approx 1$אז ההתכנסות תהיה מהירה.
- ככל שκ גדל , הקבוע $\frac{\kappa-1}{\kappa+1}$ יותר ויותר קרוב ל 1, ולכן ההתכנסות אומנם אקפוננצלאית אבל הקבוע שיש לנו בבסיס מאוד קרוב ל1.ולכן עבור $\kappa \gg 0$ ההתכנסות תהיה איטית יותר.
- **הכללה של** הcondition number לפונ' f קמורות המקיימות L-חלקות ו μ-מתכנסות חזק μstrongly convex and L-smooth .נגדיר את הcondition number להיות

$$k \triangleq \frac{1}{\gamma} = \frac{L}{\mu}$$

- משתמשים המון בcondition number זה דבר נפוץ.
- ככל ש κ conditonal number גדול יותר ככה ההתכנסות איטית יותר.בד"כ הקשר של זה למציאות הוא שלמעשה השככל ש=ש κ conditonal number גדול יותר ככה הצירים השונים (המימדים השונים) לא נמצאים באותה הסקלאה (לדוגמא, מימד ראשון$\boldsymbol{x}_1$ מודד בקילומטרים ומימד שני $\boldsymbol{x}_2$ מודד ב**ננומטרים**) במקרה כזה הבעיה תראה יותר "פחוסה" (ראה איור הימני ביותר מתוך סדרת האיורים שלמטה בדוגמא) ובמקרה הזה האלג' ייתכנס לאט יותר עבור גודל צעד אופטמלי.(ולכן גם ייתכנס לאט יותר עבר כל גודל צעד אחר)

דוגמה 49.5 דוגמא ל conditonal number וקצבי התכנסות



הערה אלג' Backtracking search: בגישה זו מתחילים עם גודל צעד נתון ומקטינים אותו עד אשר מובטחת ירידה "מספקת" שיטה זו מוגדרת על ידי שני פרמטרים $\alpha \in (0, 0.5)$ ו $\beta \in (0, 1)$.פרמטרים אלו נקבעים לפני התחלת האלג, ואינם משתנים במהלך ריצתו.

בכל איטרציה מתחילים עם גודל צעד התחלתי כלשהו למשל $\eta = 1$ וכל עוד מתקיים

$$f\left(\boldsymbol{x} - \eta \nabla f\left(\boldsymbol{x}\right)\right) > f\left(\boldsymbol{x}\right) - \alpha\eta \left\|\nabla f\left(\boldsymbol{x}\right)\right\|_2^2$$

נקטין את גודל הצעד פי β : $\eta \leftarrow \beta\eta$.הייתרון בגישה הזו הוא שהיא פשוטה ולעיתים רבות מאפשרת לקבל ביצועים טובים בבעיות מעשיות.

אלגוריתם 2 backtraking line search

Data: Current guess $\mathbf{x}$, Current gradient $\nabla f(\mathbf{x})$, parameters $\alpha \in (0, 0.5)$, $\beta \in (0, 1)$

Result: Step size η

$\eta \leftarrow 1$

$\mathbf{y} \leftarrow \mathbf{x} - \eta \nabla f(\mathbf{x})$

while $f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) > -\alpha\eta \|\nabla f(\mathbf{x})\|_2^2$ **do**

    $\eta \leftarrow \beta\eta$

    $y \leftarrow \mathbf{x} - \eta \nabla f(\mathbf{x})$

end

return η

6 הרצאה 6 ותרגול 6

6.1 הרצאה 6

6.1.1 קצבי לימוד : הדגמה על בעיה ריבועית

נצרה למזער את הפונ' $f\left(\boldsymbol{x}\right) = \frac{10x_1^2 + x_2^2}{2}$, זו בעיה ריבועית $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ דו מימדית בשימוש באלג' GD עם גודל צעד קבוע $\forall k \in \{1, \ldots, T\} : \eta_k = \eta$.

ניתן להבחין בקלות (מהתבוננות ב $f\left(\boldsymbol{x}\right)$) כי האופטימום שלה הוא בנקודה $(0, 0)$) נבחן את פעולת האלג' GD עבור גודל צעד קבוע ,עבור מספק גדלי צעד אפשריים.

בנוסף ניתן להראות כי f היא פונ' חלקה עם פרמטר חלקות $L = 10$.

נצמש במשפט שאומר שאם f גזירה פעמיים וקמורה, אזי f L חלקה אם $\lambda_{\max}\left(\nabla^2 f\left(\boldsymbol{x}\right)\right) \le L$ (הע"ע הגדול ביותר של מט' ההאסיאן של f , קטן מ L) אזי f **היא** L **חלקה**.
אזי

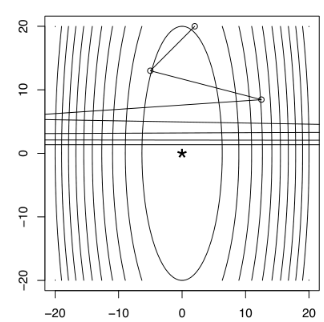
$$\nabla^2 f\left(\boldsymbol{x}\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial^2 x_1} f\left(\boldsymbol{x}\right) & \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2} f\left(\boldsymbol{x}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2} f\left(\boldsymbol{x}\right) & \frac{\partial}{\partial^2 x_2} f\left(\boldsymbol{x}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

f חיובית מוגדר כי שני הע"ע שלה גדולים ממש ולכן f קמורה.בנוסף , במט' אלכסונית הע"ע שלה הם ערכי האלכסון. ולכן $\lambda_{\max}\left(\nabla^2 f\left(\boldsymbol{x}\right)\right) = 10 \le L = 10$ ולכן f היא $L=10$ חלקה לפי מפשט.
המסקנה היא ש f היא $L=10$ חלקה.ראינו בשיעור קודם כי עבור פו'נ חלקות עם פרמטר חלקות L, אלג' הGD מתכנס רק עם $\eta \le \frac{1}{L}$ במקרה שלנו $\eta \le \frac{1}{10}$.
ן f היא $L=10$ חלקה ולכן כלומר האלג' GD ייתכנס עבור $f\left(\boldsymbol{x}\right) = \frac{10x_1^2+x_2^2}{2}$ רק עם גודל צעד $\eta \le \frac{1}{L} = \frac{1}{10}$.
התבדרות

נבחין כי במקרה עבורו $\eta = 1$ (כלומר, פי עשר מהקצב המקסמלי שמבטיח התכנסות) נקבל **התבדרות** של האלג':

Fixed step size

Simply take $\eta_t = \eta$ for all $k = 1, 2, 3, \ldots$, can diverge if η is too big.
Consider $f(x) = (10x_1^2 + x_2^2)/2$, gradient descent after 8 steps:

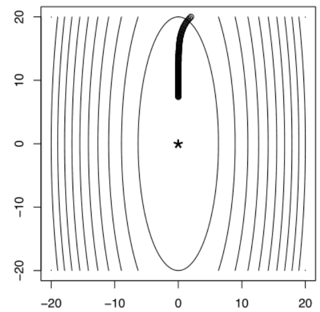


* f(x) here is L-smooth with L = 10

בתמונה אנו רואים 8 צעדים של האלג'
בתמונה רואים קצב לימוד שהוא פי 10 מהאופטמלי (האלג' מתבתדר)
התכנסות:

נבחין כי במקרה עבורו $\eta \ll \frac{1}{L}$ במקרה הזה האלג' עדיין מתכנס, אבל קצב ההתכנסות יהיה מאוד איטי.

Can be slow if η is too small. Same example, gradient descent after 100 steps:



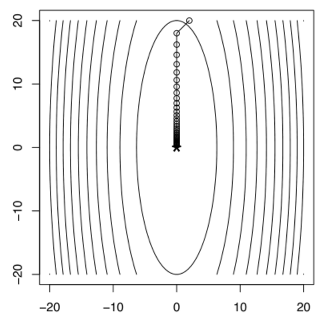
בתמונה אנו רואים 100 צעדים של האלג'

בתמונה רואים קצב לימוד שהוא קטן מהאופטימלי (האלג' מתכנס אבל מאוד לאט) במקרה הזה $\eta = \frac{1}{10L} = \frac{1}{100}$.

התכנסות מתאימה של האלג':

נבחין כי במקרה עבורו $\eta = \frac{1}{L}$ במקרה הזה האלג' מתכנס באופן יפה:

Converges nicely when η is "just right". Same example, 40 steps:



נבחין כי בדוגמא הנ"ל ישנם 40 איטרציות.

6.1.2 החסם של נדטרוב

הראנו בשיעור קודם כי עבור פונ' L חלקות , כדי לקבל ϵ שגיאה אנו צריכים $\frac{1}{\epsilon}$ איטרציות (במינוחי אפסילון) נשאלת השאלה האם ניתן להשיג **ביצועים טובים** יותר עבור פונ' L חלקות והתשובה היא **שכן**.אבל,**אי אפשר** להשיג תוצאה שהיא **משמעותית טובה יותר** מזו שכבר השגנו.

נזכיר כי **ההגדרה של שיטות מסדר ראשון** , הן שיטות של אלג' איטרטיביים המעדכנות את x בכל צעד על ידי הגרדיאנטים שלו כלומר,

$$\text{First order methods}: \\ \forall t = 1, 2, \ldots : x_t \in \{x_0 + \text{span}\{\nabla f(x_0), \nabla f(x_1), \nabla f(x_2), \ldots, \nabla f(x_t), \ldots\}\}$$

כלומר שיטות מסדר ראשון הן שיטות שבהם כל צעד בהם הוא קומבנציה לינארית של נקודת ההתחלה x_0 והגדדיאנטים שהאלג' חישב עד כה.משפט נסטרוב נותן חסם מלמטה על אלגוריתמים מהסוג זה (ובפרט עבור GD).

נדגים מדוע GD הוא ממשפחת האלג' הנ"ל ? מכיוון שאפשר לרשום את האx־ים השונים שבאלג' באופן הבא(ק"ל של הגרדיאנטים שהאלג' פגש עד רגע t):

$$\forall t \in \{0, 1, \ldots\} : x_t = \begin{cases} x_0 & t = 0 \\ x_0 - \left(\sum_{i=1}^{t} \eta_i \nabla f(x_i)\right) & \text{else} \end{cases}$$

משפט 1.6 משפט נדסטרוב לכל אלג' מסדר ראשון , (ובפרט לאלגוריתמים מהמשפחה של GD) , ולכל $t \leq \frac{n-1}{2}$ ולכל תנאי התחלה x_0 , לכל בעיה עם פונ' f קמורה L חלקה.מתקיים:

$$f\left(x_t\right)-f^* \geq \frac{3L\cdot\left\|x_0-x^*\right\|_2^2}{32\left(t+1\right)^2}$$

כלומר, כל שיטה של GD חסומה מלמטה על ידי $\frac{3L\cdot\left\|x_0-x^*\right\|_2^2}{32(t+1)^2}$.זה הוא חסם מלמטה על התת אופטמליות של האלג' .

הערה 2.6 המשמעות של $t \leq \frac{n-1}{2}$ היא שהממד של הבעיה n (כלומר $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$) כלומר שמספר הצעדים קטן מהממד חלקי שתיים בערך.המרצה אמר שהוא חושב ש"הוכיחו את המשפט כבר ללא ההנחה הזו".ההנחה שהממד מאוד גדול ביחס לכמות הצעדים באלג' היא הנחה סבירה לרוב,בעיקר בבעיות בתחומי הbigdata .

מסקנה 3.6 לא נצליח להגיע לקצב שהוא טוב יותר מ $\mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ (או בלשון אפסילון $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\right)$) על ידי שימוש באלגוריתמים מסדר ראשון.

כלומר, לאחר t איטציות ,(כאשר האתחול אינו על נקודת המינימום) לא נצליח להגיע לשגיאה שקטנה יותר מ$\frac{1}{t^2}$ כפול קבוע חיובי מסויים שתלוי בנקודת ההתחלה.

הערה 4.6 קיימת שיטה יותר מתוכחמת מGD ששוברת את החסם הזה ואולי אנו נדבר עליה בהמשך.

הערה 5.6 הקצב שמציע נסטרוב $\mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ (שיכולה להיות מובטאת על ידי החסם של $f\left(x_t\right)-f^* \geq \frac{3L\cdot\left\|x_0-x^*\right\|_2^2}{32(t+1)^2}$) על שיטות מסדר ראשון הוא קצב טוב יותר יותר מהקצב של הGD שראינו עבור פונ' חלקות (שראינו שהקצב שלהם הוא $\mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right)$).כלומר קיים **פער מפתיע** בין הקצב הטוב ביותר שאולי נוכל להגיע אליו לבין הקצב שאנו כבר מגיעים אליו בGD ולכן , לאחר שנסטר הוכיח את החסם התחתון הנ"ל , נסטר ואיש חכם נוסף שאיני זוכר את שמו הראו כי קיימת שיטה מסדר ראשון שאכן מצליחה להגיע לחסם האופטמלי הזה.(כלומר,שיטה מסדר ראשון שיותר טובה מGD) .לא נדבר בהרחבה על השיטה הזו ששמה accelerated gradeint decent.

6.1.3 אנליזה של אלג' של GD עבור פונ' שאינן קמורות

נאמר שלצרכים מעשיים בתחומים שונים משתמשים באלג' GD גם על פונ' שאינן קמורות ומקסלים תוצאות מוצלחות.קיימות מספר הבטחות שיש כאשר משתמשים באלג' GD עבור פונ' לא קמורות.

לעיתם למצוא נקודה אופטמלית היא משימה קשה מדי , אנו יכולים להסתפק ב "ϵ **סטציונריות**" קרי: שהנורמה של הגרדיאנט שלהם היא אפסילון קטנה כלומר $\left\|\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)\right\|_2 \leq \epsilon$.

הנה אחת מהם:

משפט 6.6 אם פונ' המטרה היא L חלקה (כלומר , הגרדיאנטיים שלה הם ליפשיצים) ומפעילים את הGD עם קצב לימוד קבוע $\eta = \frac{1}{L}$ גם אם f אינה קמורה אזי

$$\min_{t=1,2,\ldots,T}\left\|\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)\right\|_2 \leq \sqrt{\frac{2L}{T}\cdot\left(f\left(x_1\right)-f^*\right)}$$

וקצב זה **אינו יכול להשתפר**.

הערה 7.6 כלומר,אם תנאי המשפט מתקיימים : אז אחרי T צעדים , אז הנורמה של הגרדיאנט $\left\|\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)\right\|_2$ **הולכת וקטנה**.כלומר,GD לפונ' L-חלקות שאינן קמורות מוצא נקודות "ϵ סטציונריות " כלומר: שהנורמה של הגרדיאנט שלהם $\left\|\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)\right\|_2$ היא אפסילון קטנה כלומר $\min_{t=1,2,\ldots,T}\left\|\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)\right\|_2 \leq \epsilon$.כלומר, לאחר T איטרציות , אז **הנורמה של הגרדיאנט** הכי קטנה שחישבנו מתוך כל הגרדגיאנטים שחישבנו בתהליך , תהיה קטנה יותר מהחסם $\sqrt{\frac{2L}{T}\cdot\left(f\left(x_1\right)-f^*\right)}$ כלומר, היא הולכת וקטנה כמו $\frac{1}{\sqrt{T}}$.

הערה 8.6 נראה את החלק הזה של המשפט הנ"ל בתרגיל הבית.

הערה 9.6 קצב הלימוד הקבוע $\eta = \frac{1}{L}$ הוא זהה לזה שהוכחנו עבורו חלק מהמפשטים בפונ' קמורות.

6.1.4 מסקנות מהשיעור הקודם סיכום

- צעד עדכון של אלג' GD הוא מהצורה $\boldsymbol{x}_{t+1}=\boldsymbol{x}_t-\eta\nabla f(\boldsymbol{x}_t)$.
- אם $f(\cdot)$ היא פונ' קמורה וגזירה $\Leftarrow$ אלג' GD מתכנס.
- אם $f(\cdot)$ היא פונ' B ליפשיצית וגם $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*\|\le R$ ומסמנים $\overline{\boldsymbol{x}}_T=\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1}\boldsymbol{x}_t$ אזי הפעלת GD עם גודל הצעד הקבוע $\eta=\frac{R}{B\sqrt{T}}$ תניב כי $f(\overline{\boldsymbol{x}}_T)-f(\boldsymbol{x}^*)\le\frac{BR}{\sqrt{T}}$.
- אם $f(\cdot)$ היא L־חלקה וגם $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*\|\le R$ אזי הפעלת GD עם גודל הצעד הקבוע $\eta=\frac{1}{L}$ תניב כי $f(\boldsymbol{x}_T)-f(\boldsymbol{x}^*)\le\frac{LR^2}{T}$.

מה ייקרה כאשר $f(\cdot)$ לא גזירה? נגלה כעת.(אני בטוח שאתם במתח)

6.1.5 אנליזה של פונקציות קמורות שאינן גזירות

- במקרה הזה נגידר גודל שנקרא subgradient במקום גרדיאנט ושתמש בגודל הזה של subgradient עם אלג' הגרדיאנט ונראה שאנו מקבלים את אותה התוצאה
- פונ' שאינן דיפרנציביליות , לא חלקות (אי אפשר לדבר על הכרדיאנטים שלה)

6.1.6 subgradient

נגדיר את הגודל subgradient באופן הבא:

הגדרה 10.6 וקטור $\boldsymbol{g}\in\mathbb{R}^d$ ייקרא **סאב־גרדיאנט(=תת גרדיאנט /subgradient)** של f בנקודה $\boldsymbol{x}$ אם

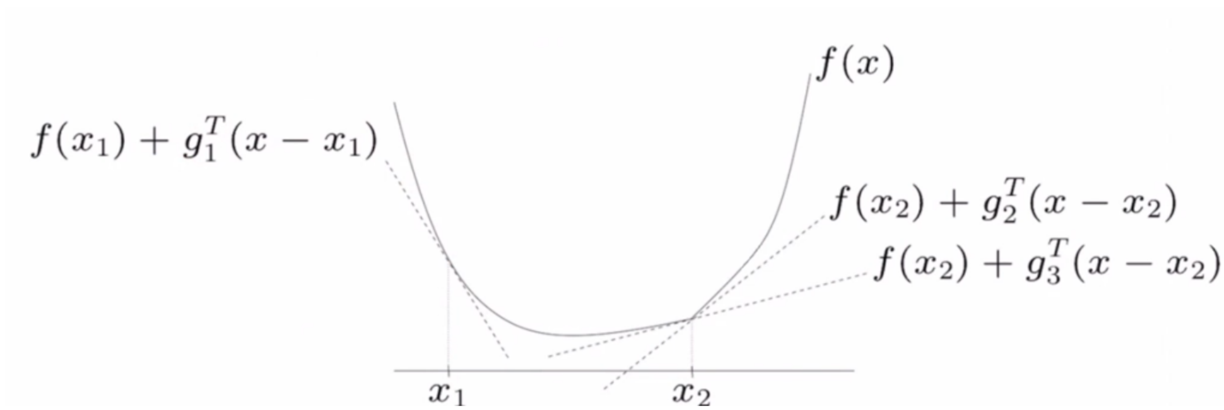
$$\forall\boldsymbol{y}\in\mathrm{dom}(f):f(\boldsymbol{y})\ge f(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{g}^T(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})$$

הערה 11.6 כלומר , הסאב־גרדיאנט הוא **שיפוע** של קו לינארי שעובר בנקודה $\{\boldsymbol{x}_i,f(\boldsymbol{x}_i)\}$ ונמצא מתחת לפונ'. כלומר, ה**תת־גרדיאנט** הוא **השיפוע** של הישר $f(\boldsymbol{x}_i)+g_i^T(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_i)$ ובנוסף הוא עובר **מתחת לפונ'** f **בכל נקודה בתחום הגדרתה**.

הערה 12.6 הגודל subgradient הוא הגרדיאנט עבור פונ' חלקות וקמורות.(אפשר להוכיח את זה כי אז הסאב־גרדיאנט צריך לקיים את אי שוויון הגרדיאנט ואת אי השוויון .

סימון 13.6 מסמנים $\partial f(\boldsymbol{x})\subseteq\mathbb{R}^d$ את ה**סאב־דיפרנציאל subdifferential** להיות קבוצת ה**תת גרדיאנטים** של f בנקודה $\boldsymbol{x}$.

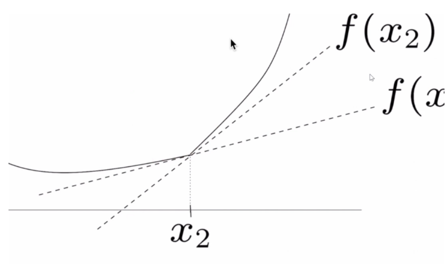
דוגמה 14.6 איור לדוגמא:



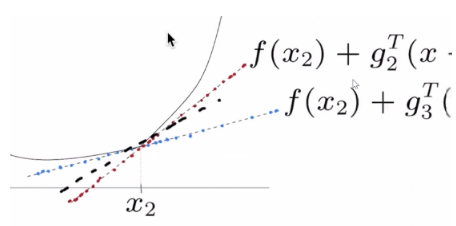
הערה 15.6 בנקודה $\boldsymbol{x}_1$ הפונ' גזירה ולכן הסאב גרדיאנט g_1, **מתלכד** עם הגרדיגנט .כלומר הסאב־גרדיאנט הוא בעצם הגרדיאנט .כלומר, קבוצת הסאב דיפרנציאל של f בנקודה הנ"ל היא **בדיוק** האיבר היחיד שהוא הגרדיאנט של f בנקודה.
זה נכון כי **מאי שוויון הגרדיאנט** First-order characterization עבור $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ גזירה וקמורה , מתקיים ש :

$\mathbf{dom}(f)$ היא תחום קמור **ובנוסף** $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathrm{dom}(f) : f(\boldsymbol{y}) \geq f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x})^T (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})$. כלומר הגרדיאנט $\nabla f(\boldsymbol{x})$ מקיים את אי השוויון בכל $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathrm{dom}(f)$ ובפרט בנקודה $\boldsymbol{x}_1$ (לדוגמא) ולכן מקיים את הגדרת התת־גרדיאנט ולכן אם f גזירה בנקודה אז הגרדיאנט של f בנקודה מהווה תת גרדיאנט של f בנקודה.

הערה 16.6 בנקודה $\boldsymbol{x}_2$, שני הישירים הבאים g_2, g_3 הם subgradient־ים : כי שניהם עוברים בנקודה $\boldsymbol{x}_2$.נדיגש כי הפונ' אינה חלקה בנקודה זו (הנגזרת מימין ומשמאל שונות):



למעשה, קיימים אינסוף subgradient־ים בנקודה $\boldsymbol{x}_2$הזו.לדוגמא:



מסקנה 17.6 עבור פונ' שהם קמורות .אם $f(\cdot)$ וגזירות בנקודה $\boldsymbol{x}$: הסאב גרדיאנט ב $\boldsymbol{x}$ הוא פשוט הגרדיאנט,עבור שאינן גזירות ב$\boldsymbol{x}$יש אוסף אינסופי סאב גרדיאנטים שעונים על ההגדרה.

מסקנה 18.6 נבחין כי כל סאב גרדינט לפי ההגדרה מקיים את אי השוויון $\forall \boldsymbol{y} \in \mathrm{dom}(f) : f(\boldsymbol{y}) \geq f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}^T (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})$ שזה שוויון שמזכיר מאוד את אי שוויון הגרדיאנט , כפי שהגדרנו בעבר עבור פונ' קמורות.

דוגמה 19.6 נתבונן בפונ' $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ הבאה: $f(x) = |x|$.עבורה בכל מקום הנגזרת קיימת פרט לנקודה 0, בה הפונ' f אינה גזירה.לפי המסקנה הקודמת, $\forall x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ הסאב־גרדיאנט של f בכל נקודה כזו הוא פשוט הגרדיאנט שלה שם.בנוסף עבור $x = 0$ הסאב גרדיאנט יכול להיות כל ישר שעובר בראשית עם שיפוע קטן מ 1 או גדול מ -1.כלומר

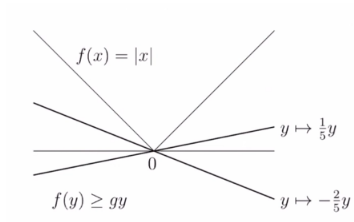
$$x = 0 : f(y) \geq f(0) + g(y - 0) = |0| + gy = gy \Rightarrow x = 0 : |y| \geq gy \Rightarrow x = 0 : \frac{|y|}{y} \geq g$$

$$\Rightarrow x=0:\operatorname{sign}(y)\geq g$$

ולכן במקרה הזה הסאב דיפרציאל של f בנקודה 0 המסומן $\partial f(0)$ מקיים $\partial f(0)=[-1,1]$. כלומר $\partial f(0)=\{g \mid g\in[0,1]\}$.
כלומר הופטנצאיל של f בנקודה x מקיים:

$$\forall x\in\mathbb{R}:\partial f(x)=\begin{cases}\{-1\} & x<0\\ [-1,1] & x=0\\ \{+1\} & x>0\end{cases}$$

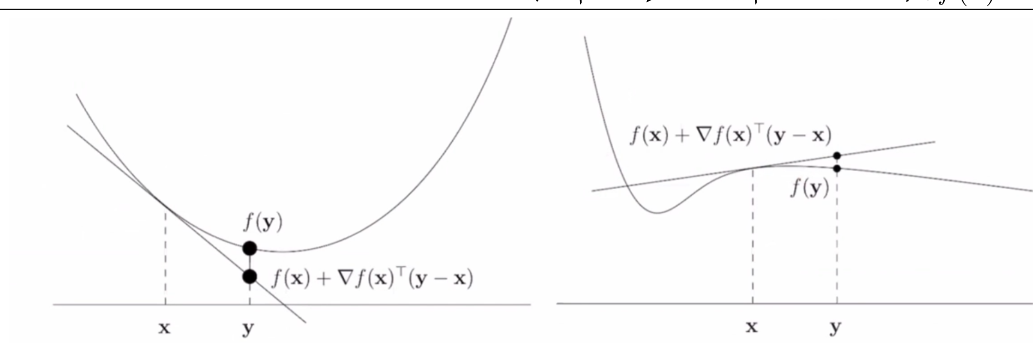
איור לדוגמא שממחיש את הפונ':



למה זה מעניין?

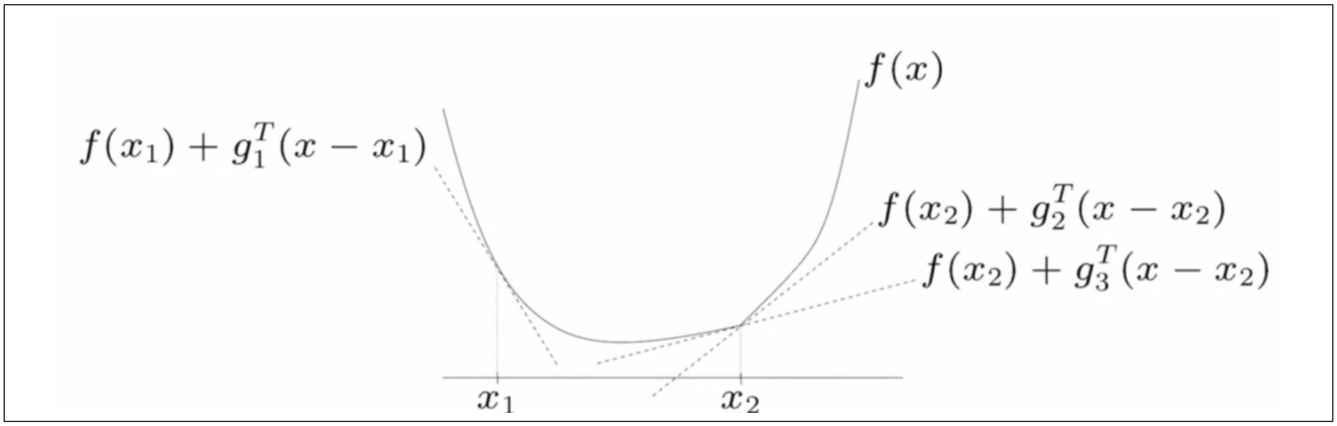
- באלג' רבים בmachine learning ובתחומים נוספים , נהוג לעיתים להוסיף לפונ' מטרה איבר שאינו גזיר בכל מקום שהוא מהצורה $\|\boldsymbol{x}\|_1=\sum_{i=1}^{d}|x_i|$ (**=איבר רגולרזציה מסוג רגולרזציה** l_1) היינו רוצים עדיין למצוא לפונ' המטרה מינימום אפילו שהיא מכילה איבר שאינו גזיר בכל המרחב. כלומר היינו רוצים למצוא מינימום לפונ' מהצורה הבאה $f(\boldsymbol{x})=f_0(\boldsymbol{x})+\lambda\|\boldsymbol{x}\|_1$.
- לעיתים רבות אנו נתקלים בפנ' מהצורה הבאה $f(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{n}\max\left\{\theta_i b_i-\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{x}\right\}$ כלומר f היא אוסף של פונ' שאינן גזירות (max אינה פונ' גזירה בכל מקום) . אבל כל אחת מהפונ' $\left\{\theta_i b_i-\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{x}\right\}_{i=1}^{n}$ היא קמורה כקומבנציה אפינית שלהם .היינו רוצים למצוא להם מקסימום.לבעיה זו קרואים SVM suppurt vector machines והיינו רוצים למצוא להם פתרון אופטמלי, אפילו ש f אינה גזירה .

הערה 20.6 המושג של סאב גרדיאנט שימושי בעיקר עבור פונ' שהם קמורות.עבור פונ' כללית אם $f:\operatorname{dom}(f)\longrightarrow\mathbb{R}$ היא פונ' גזירה בנקודה $\boldsymbol{x}\in\operatorname{dom}(f)$ אזי מתקיים כי $\partial f(\boldsymbol{x})\subseteq\{\nabla f(\boldsymbol{x})\}$.וייתכנו שני מקרים או $\partial f(\boldsymbol{x})=\nabla f(\boldsymbol{x})$ (תמיד המקרה אם הפונ' קמורה) או ש $\partial f(\boldsymbol{x})=\emptyset$ (אם הפונ' לא קמורה זה עלול לקרות).



משפט אפיון לפונ' קמורות , דרך הגדרת הסאב -גרדיאנטים:

משפט 21.6 תהא פונ' $f:\operatorname{dom}(f)\longrightarrow\mathbb{R}$. **אזי**
f פו'נ קמורה $\iff$ $\operatorname{dom}(f)$ הוא תחום קמור **וגם** $\forall\boldsymbol{x}\in\operatorname{dom}(f):\partial f(\boldsymbol{x})\neq\emptyset$



הערה 22.6 ניתן לזכור את המשפט הזה על ידי האמירה ”קמירות=סאב־גרדיאנטים בכל מקום“.

הקשר ”קמורה ולפשיצית = סאב גרדיאנטים חסומים“

משפט 23.6 תהא פונ' $f : \mathrm{dom}\,(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ פונ' **קמורה**, התחום $\mathrm{dom}\,(f)$ תחום פתוח ו $B \in \mathbb{R}_{++}$. **אזי** התנאים הבאים שקולים : (קיים בינהם יחס אמ"מ)

1. $\forall \boldsymbol{x} \in \mathrm{dom}\,(f)\,, \forall \boldsymbol{g} \in \partial f\,(\boldsymbol{x}) : \|\boldsymbol{g}\|_2 \leq B$. (=כל הסאב גרדיאנטים חסומים על ידי B)
2. $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \dim\,(f) : |f\,(\boldsymbol{x}) - f\,(\boldsymbol{y})| \leq B \cdot \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2$ (=הפונ' B לפשיצית)

הערה 24.6 ההגדרה של לפשציות בהקשר הזה היא עבור עבור הנורמות $\|\|_2$ ו $||$ יחד, בהגדרה מווקפדיה של לפשציות , זה מסתדר (ראה הגדרה של לפשציות בווקפדיה האנגלית)

הערה 25.6 נשים לב שבמשפט הנ"ל נכון עבור פונ' גזירות וגם עבור פונ' שאינן גזירות (כי יש התייחסות ל"$\forall \boldsymbol{g} \in \partial f\,(\boldsymbol{x})$" כלומר לכל התת גרדאנטים בנקודה מסווימת)

הערה 26.6 אנחנו נראה שלצורכי אופטמזציה בהפעלה של אלג' GD על פונ' שאינן גזירות , כל סאב גרדיאנט שנבחר יהיה טוב לצרכי האופטמזציה.עבור כל בחירה שלנו

תכונות של סאב־גרדיאנטים

משפט 27.6 יהיו $f\,(\cdot)$ ו $h\,(\cdot)$ אשר עבורם $\partial f\,(\boldsymbol{x}) \neq \emptyset, \partial h\,(\boldsymbol{x}) \neq \emptyset$. אזי הסאב גרדיאנט של הפונ' $(f+h)\,(\cdot)$ בנקודה $\boldsymbol{x}$ הוא :

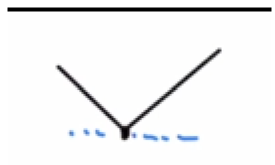
$$\partial\,(f+h)\,(\boldsymbol{x}) = \{g_1 + g_2 \mid g_1 \in \partial f\,(\boldsymbol{x})\,, g_2 \in \partial h\,(\boldsymbol{x})\}$$

דוגמאות של סאב־גרדיאנטים של פונקציות לא גזירות

עבור הפונ' $f\,(x) = \|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ נוכל להראות כי דוגמא לסאב־גרדיאנט של f לכל $\boldsymbol{x}$ הוא $g = \begin{pmatrix} \mathrm{sign}\,(x_1) & \mathrm{sign}\,(x_2) & \dots & \mathrm{sign}\,(x_n) \end{pmatrix}$ כאשר $\mathrm{sign}\,(\alpha) = \begin{cases} -1 & \alpha < 1 \\ 0 & \alpha = 0 \\ 1 & \alpha > 1 \end{cases}$(יש עוד סאב גדרינטים) .יש עוד סאב גרדיאנטים שנוכל לקחת ,אבל זה בטוי שקל לעבוד איתו.

קל יותר להבין את הבטוי הזה עבור חד מימד.נניח כי $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.אזי

נבחין כי $g = 0$ (הקו הכחול האיור מטה) הוא סאב גרדינאט עבור רכיב שמתאפס כי הוא מתחת לגרף בכל נקודה ועובר בנקודה $(0,0)$, קל לראות את זה במקרה הבחד מימד הנ"ל:



נראה על התכונה הזו של מה קורה כאשר $\mathbf{0} \in \partial f(\boldsymbol{x})$ כמו כאן,בלמה/משפט הבאה:

תכונות של סאב־גרדיאנטים

למה 29.6 תהא $f : \mathrm{dom}(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ ותהא נקודה $\boldsymbol{x} \in \mathrm{dom}(f)$ כלשהי.**אם** מתקיים כי $\mathbf{0} \in \partial f(\boldsymbol{x})$ **אזי** $\boldsymbol{x}$ היא **נקודת מינימום גלובלי.**

הוכחה:
ההוכחה נובעת ישירות מההוכחה של סאב־גרדיאנט.
נתון כי $\mathbf{0} \in \partial f(\boldsymbol{x})$ ולכן נוכל להציב את הנקודה $\boldsymbol{g} = \mathbf{0}$ בהגדרת המינימום הגלובלי

$$\forall \boldsymbol{y} \in \mathrm{dom}(f) : f(\boldsymbol{y}) \geq f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}^T(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})$$

ולקבל :

$$\forall \boldsymbol{y} \in \mathrm{dom}(f) : f(\boldsymbol{y}) \geq f(\boldsymbol{x})$$

כלומר , $\boldsymbol{x}$ היא נקודת מינימום גלובלי, לפי הגדרה.

■

6.1.7 אלג' סאב־גרדיאנט subgradient descent

כעת הבעיה היא ללא אילוצים
המטרה שלנו היא למזער את הפונ' f , כלומר

$$\min_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x})$$

האלג' מחשב את הסאב גרדיאנטים ומתקדם במורדם,ייתכן שיהיו מספר סאב־גרדיאנטים ובכל צעד זה לא משנה איזה סאב־גרדיאנטים אנו בוחרים בשביל להתקדם.
עקרי אלגוריתם הסאב־גרדיאנט:

אלגוריתם 3 אלג' הסאב־גרדיאנט

1. בחר $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^d$
2. לכל $t = 0, 1, 2, \ldots$ ועבור צעד $\eta \geq 0$
   (א) חשב $g_t \in \partial f(\boldsymbol{x}_t)$ (אם יש כמה,מצא אחד מהם באופן שרירותי)
   (ב) בצע צעד עדכון $\boldsymbol{x}_{t+1} = \boldsymbol{x}_t - \eta \boldsymbol{g}_t$

באופן עקרוני η יכול להשתנות מאיטרציה אחת לאחרת,אבל בניתוח האלג' שנציג כאן ננתח את האלג' עבור η שהוא קבוע לכל האיטרציות.

אלג' הסאב גרדיאנט עבור פונ' קמורה לפשצית נותן קצב של $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon^2}\right)$

הערה 30.6 המשפט הבא תקף לפונ' שאינן בהכרח גזירות כי הוא משתמש באלג' הsubgradient descent.

משפט 31.6 תהא פונ' $f:\mathbb{R}^d\longrightarrow\mathbb{R}$ פונ' קמורה ו B-לפשיצית, רציפה עם מינימום גלובלי $\boldsymbol{x}^*$. בנוסף נניח כי $\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}^*\|\leq R$.**אזי** אלג' הsubgradient descent עם גודל הצעד $\eta=\frac{R}{B\sqrt{T}}$ ייתן את התוצאה הבאה:

$$f\left(\overline{\boldsymbol{x}}_T\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\leq\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1}\left[f\left(\boldsymbol{x}_t\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right]\leq\frac{RB}{\sqrt{T}}$$

הערה 32.6 נבחין כי

- משמעות אי השוויון : $\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1}\left[f\left(\boldsymbol{x}_t\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right]\leq\frac{RB}{\sqrt{T}}$ היא שהשגיאה הממוצעת הולכת ודואכת כמו $\frac{1}{\sqrt{T}}$.
- מפונ' קמורות (ומאי שוויון ינסן) נובע כי $f\left(\overline{\boldsymbol{x}}_T\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\leq\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1}\left[f\left(\boldsymbol{x}_t\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right]$ כלומר קיימת הנקודה $\overline{\boldsymbol{x}}_T=\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}\boldsymbol{x}_i$ (ממוצע של כל הנקודות שראינו עד עכשיו) שהשגיאה שלה קטנה או שווה לשגיאה הממוצעת שריאנו עד עכשיו.
- משרשור אי השווינות מקבלים $f\left(\overline{\boldsymbol{x}}_T\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\leq\frac{RB}{\sqrt{T}}$ כלומר השגיאה של הנקודה $\overline{\boldsymbol{x}}_T=\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}\boldsymbol{x}_i$ הולכת וקטנה כמו $\frac{1}{\sqrt{T}}$.כלומר ככל שנעשה יותר איטרציות השגיאה הזו תהיה קטנה יותר.
- בשפת אפסילון (כמה סיבובים אנו נצטרך לעשות כדי לקבל פתרון ϵ אופטמלי , כלומר ש $f\left(\overline{\boldsymbol{x}}_T\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\leq\epsilon$?) אזי

$$f\left(\overline{\boldsymbol{x}}_T\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\leq\frac{RB}{\sqrt{T}}\leq\epsilon\Rightarrow\frac{RB}{\sqrt{T}}\leq\epsilon\Rightarrow\frac{RB}{\epsilon}\leq\sqrt{T}\Rightarrow\frac{(RB)^2}{\epsilon^2}\leq T\Rightarrow\mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon^2}\right)$$

כלומר קצב הלימוד במקרה הזה הוא $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon^2}\right)$ (או בהסתכלות האחרת $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)$)

משפט 33.6 ההוכחה:
ההוכחה זהה לחלוטין להוכחה עבור המשפט gradient descent המקורי (והמסקנה זהה לחלוטין) עבור פונ' קמורות אבל לא חלקות ,עד כדי השנויים הבאים:

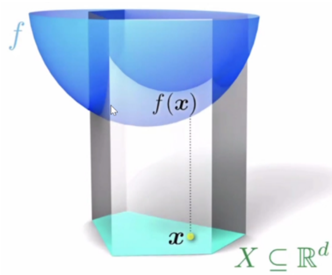
- f היא קמורה ולכן $\operatorname{dom}(f)$ תחום קמור ו $\forall\boldsymbol{x}\in\operatorname{dom}(f):f(\boldsymbol{x})\neq\emptyset$ (כלומר,יש לה סאב גרדיאנטים בכל מקום (=בכל נקודה שמקיימת $\boldsymbol{x}\in\operatorname{dom}(f)$)
- מבקום $\boldsymbol{g}_t=\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)$ נבחר $\boldsymbol{g}_t\in\partial f\left(\boldsymbol{x}_t\right)$(נחליף את הגרדיאנט בסאב גרדיאנט כלשהו)
- אי השוויון $\forall t:f\left(\boldsymbol{x}_t\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\geq\boldsymbol{g}_t^T\left(\boldsymbol{x}_t-\boldsymbol{x}^*\right)$ כעת נובע ישירות מהגדרת הסאב גרדיאנט (במקום מאי שוויון הגרדיאנט(משפט אפיון מסדר ראשון לפונ' קמורות))

6.1.8 אופטמזציה עם אילוצים

נעשה רגע הפסקה מבעיות אופטמזציה לא גזירות.כעת נראה כיצד פותרים בעיות אופטמזציה גזירות עם אילוצים.
עד כה פתרנו בעיות אופטמזציה לא מאולצות.
נשתמש בשיטות מסדר ראשון עם אלג' ה gradient descent עבור בעיות עם אילוצים.
כלומר נרצה לפתור את הבעיה הבאה:

$$\begin{gathered}\min f(\boldsymbol{x})\\ \text{s.t }x\in X,X\subseteq\mathbb{R}^d\end{gathered}$$

כאשר X היא קבוצה קומפטית וסגורהץ
איור למחשה:

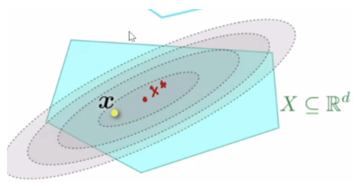


קיימות דרכי פתרון שונות לפתרון בעיות אופטמזציה עם אילוצים.בקורס נראה שני גישות:

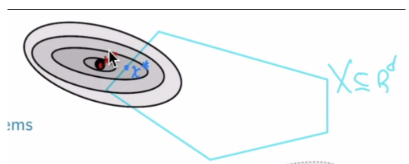
1. להשתמש באלג' Projected Gradient Descent (את זה נראה היום)
2. להפול את הביעה לבעיה שינה מאולצת (ללא אילוצים,נראה בהמשך הקורס,לקראת סוף הקורס)

קיימים 2 מקרים עקריים עבורם אנו רוצים לפתור בעיות אופטמזציה עם אילוצים:

1. המקרה בו המינימום הגלובלי (=הפתרון האופטמלי הגלובלי) שייך לתחום האילוץ $\boldsymbol{x}^* \in X$.במקרה כזה הרצה של אלג' GD הרגיל תניב לנו תוצאה שתהיה בתוך התחום X לאחר מספיק איטרציות.



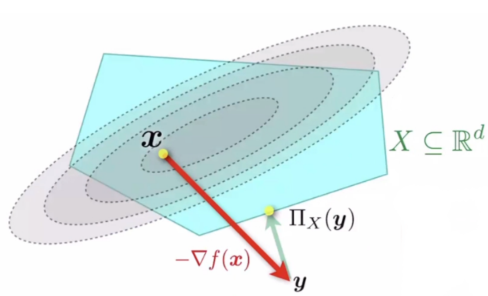
2. המקרה בו המינימום הגלובלי (=הפתרון האופטמלי הגלובלי) לא שייך לתחום האילוץ $\boldsymbol{x}^* \notin X$.



כאן הנקודה האדומה (האופטימום הגלובלי) מחוץ לתחום האילוץ והרצת GD הרגיל יניב לנו אותה,אבל אנו לא רוצים אותה כי היא לא מקיימת את האילוצים ולכן נרצה למצוא אלג' שייניב לנו את הנקודה הכחולה: נקודת מינימום של הפונ' מתוך כל הנקודות שנמצאות בתחום האילוץ.כלומר נרצה נקודה בתחום האילוץ שמניבה ערך מינימלי על f.

6.1.9 אלג' projected gradient descent

רעיון: בכל צעד **נטיל** את תוצאת צעד של האלג' (צעד בכיון מורד הרגדיאנט) **על התחום** X.כמתואר באיור הבא:



סימון 34.6 יהא תחום $X \subseteq \mathbb{R}^d$ ונקודה $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$.אזי, את **מסמנים** את **ההטלה** של נקודה $\boldsymbol{y}$ על התחום X באופן הבא $\Pi_X(\boldsymbol{y}) \triangleq \arg\min_{\boldsymbol{x} \in X} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$.

הערה 35.6 לדוגמא, אם $\boldsymbol{y}\in X$ אזי $\Pi_X\left(\boldsymbol{y}\right)=\boldsymbol{y}$.אם $\boldsymbol{y}\notin X$ אז ההטלה של $\boldsymbol{y}$ על התחום X היא נקודה אחרת (הנקודה הקרובה ביותר אל $\boldsymbol{y}$ שנמצאת בתחום X).נראה דוגמאות להטלות בהמשך.

המשך רעיון האלג': כלומר, במקרה של האלג' צעד העדכון יהיה $\boldsymbol{x}_{t+1}\leftarrow\Pi_X\left[\boldsymbol{x}_t-\eta\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)\right]$.
עקרי האלגוריתם projected gradient descent:

אלגוריתם 4 אלג' הסאב־גרדיאנט

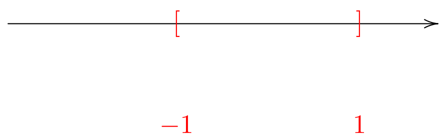
1. בחר $\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}^d$
2. לכל $t=0,1,2,\ldots$ ועבור צעד $\eta\geq 0$
   (א) חשב את הגדריאנט בנקודה $\boldsymbol{x}_t$: $\boldsymbol{g}_t=\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)$
   (ב) בצע צעד עדכון $\boldsymbol{x}_{t+1}=\Pi_X\left(\boldsymbol{x}_t-\eta\boldsymbol{g}_t\right)$

הערה 36.6 אחרת החסרונות של שיטת הprojected gradient descent היא שהטלה לא תמיד נחשבת כמשימה פשוטה ,לעיתים מציאת הטלה היא כשלעצמה בעיית אופטמזיציה שצריך לפתור, אבל בהרבה מקרים עבור תחומים מסויימים ההטלה היא יחסית פשוטה.נציג מספר דוגמאות (ללא הוכחות) להטלות כאלו.**חשוב מאוד להכיר את הדוגמאות להטלה.(ככה המרצה אמר,כנראה שיש לו סיבה טובה לומר דבר שכזה).**

הערה 37.6 בהרבה מהמקרים נניח כי חישוב ההטלה הוא משימה פשוטה יחסית שניתן לחשב ביעילות (זה נכון עבור תחומים פשוטים כמו קוביה כדור או סימפלקס כמו שנראה בהמשך) .פחות נתמקד בתחומים אקזוטיים יותר שההטלה שלהם מורכבת.

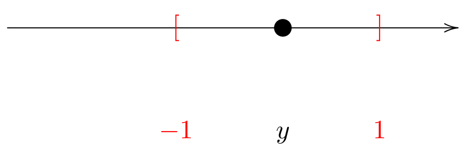
6.1.10 דוגמאות להטלה

דוגמה 38.6 קטע ישר במימד אחד נניח שהבעיה שלנו היא חד מימדית (על הישר $\mathbb{R}$) והתחום שלנו הוא $X=\left[-1,1\right]$.



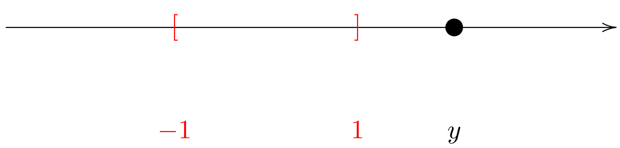
תהא נקודה $y\in\mathbb{R}$ כלשהיא ונרצה לחשב את ההטלה שלה.

- אם $y\in X$ אזי



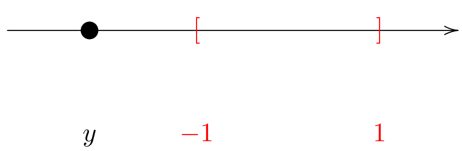
כלומר $\Pi_X\left(y\right)=y$

- אם $y>1$ אזי



כלומר $\Pi_X\left(y\right)=1$

- אם $y<-1$ אזי



כלומר $\Pi_X\left(y\right)=-1$

ולכן ההטלה של y היא:

$$\Pi_X\left(y\right)=\begin{cases}-1 & y<-1\\ 0 & y\in[-1,1]=X\\ 1 & y>1\end{cases}$$

במקרה הזה ההטלה קלה יחסית ואינטואיטיבית.

דוגמה 39.6 קוביה d מימדית נניח שהבעיה שלנו היא רב מימדית (במישור הd מימדי $\mathbb{R}^d$) והתחום שלנו הוא $X=[-1,1]^d$ (קוביית במימד d/קובייה במימד d/כדור היחידה בנורמת l_∞ , שניתן לסמנו כך $\mathcal{B}_\infty=\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n\mid\|\boldsymbol{y}\|_\infty\le1\}=\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n\mid\max_{i=1,2,3,\dots,n}|y_i|\le1\}$). תהא $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\dots,y_d)\in\mathbb{R}^d$.אזי הרכיב ה$i$ של ההטלה יסומן $(\Pi_X(\boldsymbol{y}))_i$ ויוגדר באופן הבא (כמו למעלה)

$$\left(\Pi_X\left(\boldsymbol{y}\right)\right)_i=\begin{cases}-1 & y_i<-1\\ 0 & y_i\in[-1,1]\\ 1 & y_i>1\end{cases}$$

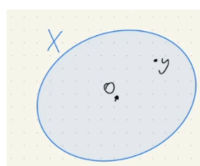
כלומר ההטלה תראה

$$\Pi_X\left(y\right)=\begin{pmatrix}(\Pi_X(\boldsymbol{y}))_1 & (\Pi_X(\boldsymbol{y}))_2 & \dots & (\Pi_X(\boldsymbol{y}))_d\end{pmatrix}$$

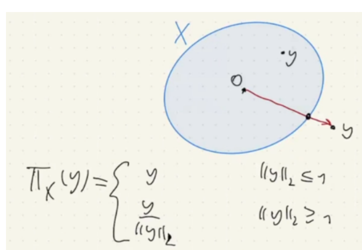
וכל איבר בה הוגדר מעלה.

דוגמה 40.6 כדור אוקלידי נניח שהבעיה שלנו היא רב מימדית (במישור הd מימדי $\mathbb{R}^d$) והתחום שלנו הוא $X=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d\mid\|\boldsymbol{x}\|_2\le1\right\}$ (הכדור האוקלידי) תהא $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\dots,y_d)\in\mathbb{R}^d$.אזי הרכיב ה$i$ של ההטלה יסומן $\left(\Pi_X\left(y\right)\right)_i$ ויוגדר באופן הבא (כמו למעלה).

- אם $y\in X$ (כלומר $\|\boldsymbol{y}\|_2\le1$) אזי



ומתקיים כי $\Pi_X\left(\boldsymbol{y}\right)=\boldsymbol{y}$.
כאשר $y\in Xy\notin X$ (כלומר $\|\boldsymbol{y}\|_2>1$) אזי נתבונן על הישר ממרכז הכדור ל y, אינטואטיבית הנקודה שהכי קרובה לכדור אל y היא הישר ממרכזה כדור ל y חלקי הנורמה של אותו הישר.(נמצאת בדיוק על שפת הכדור).



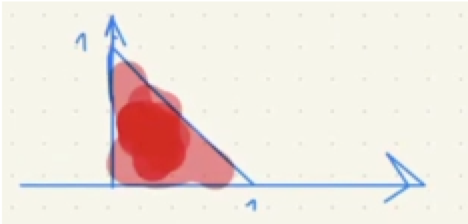
כלומר

$$\Pi_X\left(\boldsymbol{y}\right)=\begin{cases}\boldsymbol{y} & \boldsymbol{y}\in X\;(\text{in that case }\|\boldsymbol{y}\|_2\le1)\\ \frac{\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{y}\|_2} & \boldsymbol{y}\notin X\;(\text{in that case }\|\boldsymbol{y}\|_2>1)\end{cases}$$

הערה 41.6 לסימפלקס קיימות כמה הגדרות,נבחר כעת באחת מהם (שונה אולי מההגדרה שראינו בהרצאה 2).ראינו בהרצאה 2 הגדרה פופולרית לסימפלקס $X = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid \forall i : x_i \geq 0 \textbf{ and } \sum_{i=1}^{d} x_i = 1 \right\}$ אבל אנו נשתמש בהגדרה דומה וקצת אחרת לסימפלקס $X = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid \forall i : x_i \geq 0 \textbf{ and } \sum_{i=1}^{d} x_i \leq 1 \right\}$ בניתוח.(נראה את שני ההטלות על שני סוגי הסימפלקס)

הערה 42.6 הסימפלקס זה אילוץ שמתמשים בו בתחומים רבים : בתורת האינפורמציה /תורת הקידוד ובmachine lerning.והוא נחשב אילוץ מאוד חשוב שההטלה עליו היא פחות טרוואלית.

דוגמה 43.6 הסימפלקס Simplex נניח שהבעיה שלנו היא רב מימדית (במישור הd מימדי $\mathbb{R}^d$) והתחום שלנו הוא $X = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid \forall i : x_i \geq 0 \textbf{ and } \sum_{i=1}^{d} x_i \leq 1 \right\}$.תחום הסימפלקס X (בדו מימד) נראה ככה:



תהא $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_d) \in \mathbb{R}^d$.

- אם $X \ni \boldsymbol{y}$ אזי $\Pi_X(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}$ כפי שריאנו .
- אם $\boldsymbol{y} \notin X$:

נניח ש $y_1 \geq y_2 \geq \ldots \geq y_d$ (אם זה לא המצב נוכל "למיין" את הווקטור לצורכי נוחות על מנת שזה ייתקיים) כלומר הרכיבים של y ממוינים מהגדול לקטן (אנו מציגים זאת לצרכי נוחות הצגת ההטלה) עבור ההטלה של הווקטור הלא ממויון נוכל למיין את $\boldsymbol{y}$ להטיל ולהחזיר את כל איבר בהטלה למקומו המקורי לפני המיון.אזי.

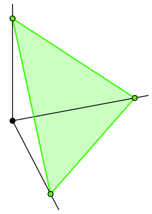
אזי כל ריכיב בהטלה של $\boldsymbol{y}$ על הסימפלקס היא :

$$(\Pi_X(\boldsymbol{y}))_i = \max\{0, y_i - \lambda\}$$

כך ש $\sum_{i=1}^{d} (\Pi_X(\boldsymbol{y}))_i \leq 1$ (וזה האילוץ דרכו בוחרים את λ וזה בעצם האילוץ שקובע כי $\Pi_X(\boldsymbol{y}) \in X$).אזי כלומר ההטלה תראה

$$\Pi_X(y) = \begin{pmatrix} (\Pi_X(\boldsymbol{y}))_1 & (\Pi_X(\boldsymbol{y}))_2 & \ldots & (\Pi_X(\boldsymbol{y}))_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - \lambda & y_2 - \lambda & \ldots & y_k - \lambda & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

הערה 44.6 עבור הגדרת הסימפלקס מצורה $X = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid \forall i : x_i \geq 0 \textbf{ and } \sum_{i=1}^{d} x_i = 1 \right\}$.כלומר הסימפלקס ייראה באופן הבא:



אזי ההטלה תראה כך אם $\boldsymbol{y} \in X$ אזי $\Pi_X(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}$ כפי שריאנו אם $\boldsymbol{y} \notin X$ נניח ש $y_1 \geq y_2 \geq \ldots \geq y_d$ (אותו רעיון של המיון ממקודם) אזי ל ריכיב בהטלה של $\boldsymbol{y}$ על הסימפלקס היא: $(\Pi_X(\boldsymbol{y}))_i = \max\{0, y_i - \lambda\}$ כל ש$\sum_{i=1}^{d} (\Pi_X(\boldsymbol{y}))_i = 1$ וזה האילוץ דרכו בוחרים את λ וזה בעצם האילוץ שקובע כי $\Pi_X(\boldsymbol{y}) \in X$).אזי כלומר ההטלה תראה

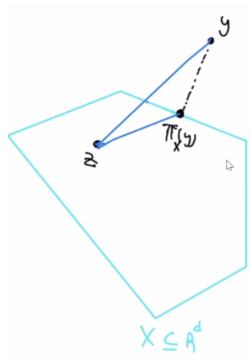
$$\Pi_X(y) = \begin{pmatrix} (\Pi_X(\boldsymbol{y}))_1 & (\Pi_X(\boldsymbol{y}))_2 & \ldots & (\Pi_X(\boldsymbol{y}))_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - \lambda & y_2 - \lambda & \ldots & y_k - \lambda & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

תכונות של הטלה

משפט 45.6 קיימות להטלה על תחום תכונות רבות.התכונה הכי חשובה לנו לצרכי אופטמזציה דרך אלג' GD היא התכונה הבאה:

יהא $X\subseteq\mathbb{R}^d$ תחום סגור חסום וקמור (=קומפקטי) ויהיו $\boldsymbol{z}\in X$ ו $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^d$.אזי

$$\left\|\Pi_X\left(\boldsymbol{y}\right)-\boldsymbol{z}\right\|_2\leq\left\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}\right\|_2$$



כלומר, שלכל נקודה במרחב $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^d$ מתקיים שהמרחק בין כל נקודה בתחום $\boldsymbol{z}\in X$ להטלה $\Pi_X\left(\boldsymbol{y}\right)$ הוא קטן או שווה מהמרחק של הנקודה $\boldsymbol{z}\in X$ לנקודה $\boldsymbol{y}$ המקורית.במילים אחרות **ההטלה מקצרת את המרחקים** בין כל $\boldsymbol{y}$ לבין כל נקודה בתחום $\boldsymbol{z}$.(כלומר שימוש בהטלה לא יגדיל את המרחק)

הערה 46.6 המשפט מדבר **רק על הנורמה האוקלידית** (כומר רק לנורמת l_2 שמסומנת $\|\cdot\|_2$)

הוכחה:

- **תזכורת:** נניח שרוצים למזער את $f\left(\cdot\right)$ שמוגדרת בתחום קמור $\mathrm{dom}\left(f\right)$ קמור תחת אילוצים X .

  וראינו כי: $\forall\boldsymbol{x}\in X:\nabla f\left(\boldsymbol{x}^*\right)^T\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*\right)\geq0\iff\boldsymbol{x}^*=\arg\min_{x\in X\subseteq\mathrm{dom}(f)}f\left(x\right)$

- ההטלה היא פתרון אופטמלי של בעיית אופטמזציה קמורה.ולכן נוכל להשתמש בתזכורת (נסמן $f\left(\boldsymbol{z}\right)=\left\|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\right\|$ הפונ' הזו היא תחום קמור ב$\boldsymbol{z}$ כפונ' קמורה $\boldsymbol{z}$ פחות קבוע מורכבת על נורמה) שהיא פונ' קמורה)) ונקבל כי :

$$\begin{aligned}&\forall\boldsymbol{z}\in X,\forall\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^d:\Pi_X\left(\boldsymbol{y}\right)\triangleq\arg\min_{\boldsymbol{z}\in X}\left\|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\right\|\\\iff&\forall\boldsymbol{z}\in X,\forall\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^d:\nabla f\left(\Pi_X\left(\boldsymbol{y}\right)\right)^T\left(\boldsymbol{z}-\Pi_X\left(\boldsymbol{y}\right)\right)\geq0\\\iff&\dots\end{aligned}$$

נחשב

$$
\begin{aligned}
\nabla f\left(\Pi_X\left(\boldsymbol{y}\right)\right)^T &= \left.\nabla f\left(\boldsymbol{z}\right)^T\right|_{\boldsymbol{z}=\Pi_X(\boldsymbol{y})} \\
&= \left.\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{z}}\left\|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\right\|_2\right)^T\right|_{\boldsymbol{z}=\Pi_X(\boldsymbol{y})} \\
&= \left.\left(\frac{\partial\left\|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\right\|_2}{\partial\left(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\right)}\cdot\frac{\partial\left(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\right)}{\partial \boldsymbol{z}}\right)^T\right|_{\boldsymbol{z}=\Pi_X(\boldsymbol{y})} \\
&= \left.\left(\frac{\partial\sqrt{\left(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\right)^T\left(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\right)}}{\partial\left(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\right)}\cdot 1\right)^T\right|_{\boldsymbol{z}=\Pi_X(\boldsymbol{y})} \\
&= \left.\left(\frac{\partial\sqrt{\left(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\right)^T\left(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\right)}}{\partial\left(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\right)}\right)^T\right|_{\boldsymbol{z}=\Pi_X(\boldsymbol{y})} \\
&= \left.\left(\frac{\partial\sqrt{\left(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\right)^T\left(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\right)}}{\partial\left(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\right)^T\left(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\right)}\cdot\frac{\partial\left(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\right)^T\left(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\right)}{\partial\left(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\right)}\right)^T\right|_{\boldsymbol{z}=\Pi_X(\boldsymbol{y})} \\
&= \left.\left(\frac{1}{2\sqrt{\left(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\right)^T\left(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\right)}}\cdot\frac{\partial\left(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\right)^T I\left(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\right)}{\partial\left(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\right)}\right)^T\right|_{\boldsymbol{z}=\Pi_X(\boldsymbol{y})} \\
&\overbrace{=}^{\frac{\partial \boldsymbol{\underline{a}}^T \underline{\underline{A}}\boldsymbol{\underline{a}}}{\partial \boldsymbol{\underline{a}}}=\left(\underline{\underline{A}}^T+\underline{\underline{A}}\right)\boldsymbol{\underline{a}}} \left.\left(\frac{1}{2\sqrt{\left(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\right)^T\left(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\right)}}\cdot\left(I^T+I\right)\left(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\right)\right)^T\right|_{\boldsymbol{z}=\Pi_X(\boldsymbol{y})} \\
&= \left.\left(\frac{1}{2\left\|\left(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\right)\right\|_2}\cdot 2\left(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\right)\right)^T\right|_{\boldsymbol{z}=\Pi_X(\boldsymbol{y})} \\
&= \left.\left(\frac{\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}}{\left\|\left(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\right)\right\|_2}\right)^T\right|_{\boldsymbol{z}=\Pi_X(\boldsymbol{y})} \\
&= \left(\frac{\Pi_X\left(\boldsymbol{y}\right)-\boldsymbol{y}}{\left\|\left(\Pi_X\left(\boldsymbol{y}\right)-\boldsymbol{y}\right)\right\|_2}\right)^T \\
&= \frac{\left(\Pi_X\left(\boldsymbol{y}\right)-\boldsymbol{y}\right)^T}{\left\|\left(\Pi_X\left(\boldsymbol{y}\right)-\boldsymbol{y}\right)\right\|_2}
\end{aligned}
$$

נציב ונקבל

$$
\begin{aligned}
&\forall \boldsymbol{z}\in X,\forall \boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^d:\Pi_X\left(\boldsymbol{y}\right)\triangleq\arg\min_{\boldsymbol{z}\in X}\left\|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\right\| \\
\Longleftrightarrow\ &\forall \boldsymbol{z}\in X,\forall \boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^d:\nabla f\left(\Pi_X\left(\boldsymbol{y}\right)\right)^T\left(\boldsymbol{z}-\Pi_X\left(\boldsymbol{y}\right)\right)\geq 0 \\
\Longleftrightarrow\ &\forall \boldsymbol{z}\in X,\forall \boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^d:\frac{\left(\Pi_X\left(\boldsymbol{y}\right)-\boldsymbol{y}\right)^T}{\left\|\left(\Pi_X\left(\boldsymbol{y}\right)-\boldsymbol{y}\right)\right\|_2}\left(\boldsymbol{z}-\Pi_X\left(\boldsymbol{y}\right)\right)\geq 0 \\
\overbrace{\Longleftrightarrow}^{\|\cdot\|_2\geq 0}\ &\forall \boldsymbol{z}\in X,\forall \boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^d:\left(\Pi_X\left(\boldsymbol{y}\right)-\boldsymbol{y}\right)^T\left(\boldsymbol{z}-\Pi_X\left(\boldsymbol{y}\right)\right)\geq 0
\end{aligned}
$$

כלומר הראנו כי

$$
\forall \boldsymbol{z}\in X,\forall \boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^d:\left(\Pi_X\left(\boldsymbol{y}\right)-\boldsymbol{y}\right)^T\left(\boldsymbol{z}-\Pi_X\left(\boldsymbol{y}\right)\right)\geq 0
$$

כלומר הראנו כי

$$\forall \boldsymbol{z} \in X, \forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d : (\boldsymbol{z} - \Pi_X(\boldsymbol{y}))^T (\Pi_X(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{y}) \geq 0$$

ולכן גם

$$✡ : \forall \boldsymbol{z} \in X, \forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d : 2(\boldsymbol{z} - \Pi_X(\boldsymbol{y}))^T (\Pi_X(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{y}) \geq 0$$

כעת ,

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{y}\|_2^2 &= \left\| \boldsymbol{z} \overbrace{- \Pi_X(\boldsymbol{y}) + \Pi_X(\boldsymbol{y})}^{=0} - \boldsymbol{y} \right\|_2^2 \\
&= \|(\boldsymbol{z} - \Pi_X(\boldsymbol{y})) + (\Pi_X(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{y})\|_2^2 \\
&= \|\boldsymbol{z} - \Pi_X(\boldsymbol{y})\|_2^2 + \overbrace{2(\boldsymbol{z} - \Pi_X(\boldsymbol{y}))^T (\Pi_X(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{y})}^{\substack{✡ \\ \geq 0}} + \overbrace{\|\Pi_X(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{y}\|_2^2}^{\substack{\|\cdot\| \geq 0 \\ \geq 0}} \\
&\geq \|\boldsymbol{z} - \Pi_X(\boldsymbol{y})\|_2^2
\end{aligned}$$

ולכן מתקיים

$$\|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{y}\|_2^2 \geq \|\boldsymbol{z} - \Pi_X(\boldsymbol{y})\|_2^2$$

וזה מה שריצינו להוכית.

■

6.2 תרגול 6

הערה 47.6 ההגדרות בתרגול הוצוגו גם בהצראה, אני מנסח אותם שוב בלשון התרגול לצורך שלמות המסמך

6.2.1 תת גרדיאנטים

הגדרה 48.6 תהא $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ פונ' כלשהיא.ווקטור $\boldsymbol{g} \in \mathbb{R}^n$ נקרא תת־גרדיאנט sub-greadient של f בנקודה $\boldsymbol{x}$ אם מתקיים:

$$\forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n : f(\boldsymbol{y}) \geq f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}^T (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})$$

הערה 49.6 עבור f קמורה וגזירה ברציפות בנקודה $\boldsymbol{x}$ אי השוויון הנ"ל מתקיים אך ורק עבור $\boldsymbol{g} = \nabla f(\boldsymbol{x})$.

הגדרה 50.6 התת־דיפרנציאל sub-differential של f בנקודה $\boldsymbol{x}$ הוא קבוצת כל התת־גרדינאטים באות ההנקודה

$$\partial f(\boldsymbol{x}) = \left\{ \boldsymbol{g} \in \mathbb{R}^n \mid \forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n : f(\boldsymbol{y}) \geq f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}^T (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) \right\}$$

משפט 51.6 תכונות של תת דפרנציאל:

1. $\forall a \in \mathbb{R}, a > 0 : \partial(af(\boldsymbol{x})) = a\partial(f(\boldsymbol{x}))$
2. $\partial(f_1(\boldsymbol{x}) + f_2(\boldsymbol{x})) = \{g_1 + g_2 \mid g_1 \in \partial f(\boldsymbol{x}), g_2 \in \partial h(\boldsymbol{x})\}$

6.2.2 הטלה על קבוצה קמורה

הגדרה 52.6 תהא $C \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה קמורה וקומפקטית (=סגורה וחסומה) נגדיר את **ההטלה** projection של הנקודה $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ על הקבוצה C פתרון פתרון בעיית האופטמזציה הבאה

$$(P): \begin{array}{c} \min_{\boldsymbol{y}} \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\| \\ \text{s.t:} \boldsymbol{y} \in C \end{array} \quad s$$

כמעט תמיד נתעניין בנורמה האוקלידית (נורמת l_2 כלומר $\|\cdot\|_2$) נסמן את ההטלה של $\boldsymbol{x}$ על C על ידי $P_C(\boldsymbol{x})$. נשים לב כי בעיית האופטמזציה (P) היא בעיית אופטמזציה קמורה מכיוון ש פונ' המורה קמורה וכך גם התחום C.

משפט 53.6 קיים פתרון יחיד לבעיה (P) כלומר **ההיטל הינו יחיד.**

משפט 54.6 תחת הנורמה האוקלידית $\boldsymbol{y}^* = P_C(\boldsymbol{x}) \iff$ לכל $\boldsymbol{z} \in C$ מתקיים $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}^*)^T(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}^*) \leq 0$.

הערה 55.6 המשמעות הגאומטרית היא שקוסינוס הזווית בין הווקטור $\overbrace{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}^*}^{\boldsymbol{y}^* \to \boldsymbol{x}}, \overbrace{\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}^*}^{\boldsymbol{y}^* \to \boldsymbol{z}}$ גדול או שווה ל$90°$. משמעות גאומטרית נוספת היא שבכל מקרה כזה של הטלה , קיים **מישור שמשיק** לתחום הקמור C בנקודה $P_C(\boldsymbol{x})$.

6.2.3 אלגוריתם הגרדיאנט המוטל

נתובנן בבעית האופטמזציה המאולצת הבאה

$$(Q): \begin{array}{c} \min_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t:} \boldsymbol{x} \in C \end{array} \quad s$$

כאשר f פונ' קמורה ו C קבוצה קמורה וקמפקטית . אלג' הגרדינאט המוטל מבצע עדכון באופן הבא:

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = P_c(\boldsymbol{x}_t - \eta_t \boldsymbol{g}_t)$$

כאשר $\boldsymbol{g}_t$ הוא תת גרדיאנט כלשהו ב $\boldsymbol{x}_t$ דהיינו $\boldsymbol{g}_t \in \partial f(\boldsymbol{x}_t)$ כלומר רשית מתבצע עדוכן תת־גרדיאנט ולאחר מכן מתבצעת הטלה חזרה על הקבוצה C.

הגדרה 56.6 הפונ' $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ נקראת **רציפה ליפשיץ Lipshchitz continuous** עם קבוע G אם לכל $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ מתקיים

$$|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| \leq G \cdot \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_2$$

למה 57.6 עבור פונקציה קמורה f התכונות הבאות שקולות

1. f רציפה לישפציץ עם קבוע G.
2. לכל $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ כל התת גרדיאנטים של f חסומים בנורמה על ידי G : $\|\boldsymbol{g}\|_2 \leq G, \forall \boldsymbol{g} \in \partial f(\boldsymbol{x})$.

הגדרה 58.6 תהא $C \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה קומפקטית (=סגורה וחסומה) .הקוטר diameter של C המסומן על ידי $\text{diam}C$ מוגדר על ידי

$$\text{diam}C \triangleq \begin{array}{c} \sup \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_2 \\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in C \end{array}$$

7 הרצאה 7 ותרגול 7

7.1 הרצאה 7

בשיעור שעבר למדנו על הנושא של אופטמזציה עם אילוצים ועל אלג' הגרדיאנט המוטל projected gradient descent .

7.1.1 אלג' הגרדיאנט המוטל projected gradient descent המשך

כמעט כל תוצאה שהוכחנו עבור אלג' הגרדיאנט הרגיל תקפה גם על אלג' הגרדיאנט המוטל:

1. התכנסות של פונ' קמורה ולפשיצית (לאו דווקא חלקה) מעל תחום X לוקחת $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon^2}\right)$ צעדים.
2. התכנסות של פונ' קמורה וחלקה(=הגרדיאנטים לפשציים עבור L קבוע כלשהו) מעל תחום X לוקחת $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$ צעדים.
3. התכנסות של פונ' **קמורה חזק** strongly convex וחלקות מעל תחום X לוקחת $\mathcal{O}\left(\log\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right)$ צעדים.(נדבר על המקרה הזה בהרצאה הזו עבור אלג' הרגרדינט הרגיל וגם על אלג' הגרדיאנט המוטל).
   (א) $\mathcal{O}\left(\log\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right)$ צעדים נחשב קצב מהיר מאוד.

אבל לאלג' הגרדיאנט המוטל **יש עלות נוספת**:

- בכל צעד נאלץ לבצע הטלה לתחום X (וזה לא תמיד משימה פשוטה!ההטלה עלולה להיות מסובכת חישובית ואלג' הגרדינאט המוטל לא מתאים לשימוש במקרים אלו ,אבל יש לזה ייהיו פתרונות אחרים שנראה בשבוע הבא ובסוף הקורס).
- יכול להיות לא יעיל (קיימים המקרים שהאלג' אכן יעיל ראינו בשיעור שעבר מקרים שההטלה היא פשוטה)

כלומר אם התחום X מספיק פשוט האלג' הנ"ל מאוד אטרקטיבי וברוב המקרים האילוצים פשוטים מספיק והאלג' הגרדיאנט המוטל מאוד שימושי.

התכנסות עבור פונ' קמורה ולשפצית מעל X בסדר גודל של $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon^2}\right)$ צעדים הנחות:

1. התחום X הוא תחום קמור וסגור (=האילוצים בבעיה הם קמורים וסגורים). (אחרת הבעיה אינה בעיית אופטמזציה קמורה)
2. כל הגרדיאנטים של f חסומים על ידי קבוע B מעל X. כלומר $\forall \boldsymbol{x}\in X:\|\nabla f(\boldsymbol{x})\|\leq B$.
   הערות:
   (א) ראינו שזה התנאי הנ"ל הוא תנאי שקול לאמירה שf היא לפשצית מעל X.
   (ב) קיימים פונ' מעניינות קבות שהם לפשציות מעל אילוצים מסויימים (כלומר קיימות פונ' f רבות עבורם קיים תחום X שהפונ' f היא לפשצית בהם)

משפט 1.7 אלג' הגרדיאנט המוטל עבור המקרה שבו הפונ' קמורה ולפשצית מעל X
תהא $f:\mathbb{R}^d\longrightarrow\mathbb{R}$ פונ' קמורה גזירה.יהא $X\subseteq\mathbb{R}^d$ תחום קמור וסגור. תהא $\boldsymbol{x}^*$ נקודת מינימום של f מעל X.בנוסף נניח כי $\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}^*\|\leq R$עם $\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}$ ובנוסף ש $\exists B\in\mathbb{R}:\forall\boldsymbol{x}\in X:\|\nabla f(\boldsymbol{x})\|\leq B$ אזי עבור גדול הצעד $\eta=\frac{R}{B\sqrt{T}}$ הפעלת אלגוריתם הגרדיאנט המוטל תניב לאחר T סיבובים:

$$f\left(\overline{\boldsymbol{x}}_T\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\leq\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1}\left(f\left(\boldsymbol{x}_t\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right)\leq\frac{RB}{\sqrt{T}}$$

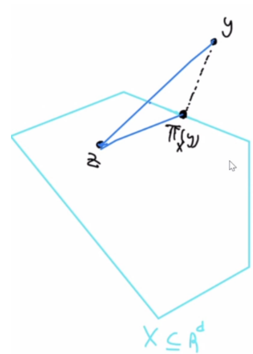
הערה 2.7

1. כרגיל מסמנים $\overline{\boldsymbol{x}}_T=\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1}f\left(\boldsymbol{x}_t\right)$.
2. תזכורת המשמעות של הבטוי $\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1}\left(f\left(\boldsymbol{x}_t\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right)$ היא השגיאה הממוצעת.
3. ולכן כמו שראינו כרגיל, $\frac{RB}{\sqrt{T}}$ ככל שמספר הצעדים עולה,השגיאה הממוצעת הולכת וקטנה.במונחי "ϵ כדי להשגיאה שגיאה קטנה או שווה מאפסילון נצטרך $\epsilon\geq\frac{RB}{\sqrt{T}}\Leftarrow T\geq\frac{RB}{\epsilon^2}$ כלומר סדר גודל של $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon^2}\right)$ צעדים.
4. המשפט הנ"ל זהה למשפט של האלג' הלא מוטל אבל שימושי יותר,ועובד גם עבור subgradients .כלומר אם פונ' המטרה אינה גזירה בכל נקודה אז אם נשתמש באלג' הגרדיאנט המוטל אבל עם סאב־גרדיאנטים במקום עם גרדינאטים נקבל את אותו הקצב של התכנסות עבור אלג' הגרדינט המוטל (כלומר נקבל את אותו הקצב עבור אלג' הסאב גדריאנט המוטל).

- **לפני הוכחת המשפט נזכר** במשפט משיעור קודם (שהוכחנו בסוף הרצאה 6) על התכונה של ההטלה:

משפט (תכונה של הטלה property of projection): יהא $X \subseteq \mathbb{R}^d$ תחום סגור חסום וקמור (=קומפקטי) ויהיו $\boldsymbol{z} \in X$ ו $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$.אזי

$$\left\|\Pi_X\left(\boldsymbol{y}\right)-\boldsymbol{z}\right\|_2 \leq \left\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}\right\|_2$$



כלומר, שלכל נקודה במרחב $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$ מתקיים שהמרחק בין כל נקודה בתחום $\boldsymbol{z} \in X$ להטלה $\Pi_X\left(\boldsymbol{y}\right)$ הוא קטן או שווה מהמרחק של הנקודה $\boldsymbol{z} \in X$ לנקודה $\boldsymbol{y}$ המקורית.במילים אחרות **ההטלה מקצרת את המרחקים** בין כל $\boldsymbol{y}$ לבין כל נקודה בתחום z.(כלומר שימוש בהטלה לא יגדיל את המרחק) **הוכחנו את המשפט בשיעור קודם (סוף הרצאה 6)**

הוכחת המשפט:

- כמו קודם , הוכחת אי השוויון $f\left(\overline{\boldsymbol{x}}_T\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right) \leq \frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1}\left(f\left(\boldsymbol{x}_t\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right)$ נעשת דרך אי שוויון ינסן

בדיוק כמו בהוכחות קודמות נתבונן במרחקים בין האיטרנטים השונים מהנקודה האופטמלית.נזכר כי צעד העדכון הוא $\boldsymbol{x}_{t+1} = \left\|\Pi_X\left(\boldsymbol{x}_t-\eta\boldsymbol{g}_t\right)^2\right\|_2^2$ ולכן מתקיים :

$$\left\|\boldsymbol{x}_{t+1}-\boldsymbol{x}^*\right\|^2 = \left\|\Pi_X\left(\boldsymbol{x}_t-\eta\boldsymbol{g}_t\right)-\boldsymbol{x}^*\right\|^2 \overbrace{\leq}^{\text{property of projection}} \left\|\boldsymbol{x}_t-\eta\boldsymbol{g}_t-\boldsymbol{x}^*\right\|^2$$

כלומר

$$\begin{aligned}\left\|\boldsymbol{x}_{t+1}-\boldsymbol{x}^*\right\|^2 &\leq \left\|\boldsymbol{x}_t-\eta\boldsymbol{g}_t-\boldsymbol{x}^*\right\|^2\\ &= \left\|\left(\boldsymbol{x}_t-\boldsymbol{x}^*\right)-\eta\boldsymbol{g}_t\right\|^2\\ &= \left\|\left(\boldsymbol{x}_t-\boldsymbol{x}^*\right)\right\|^2-2\eta\boldsymbol{g}_t^T\left(\boldsymbol{x}_t-\boldsymbol{x}^*\right)+\eta^2\left\|\boldsymbol{g}_t\right\|^2\end{aligned}$$

כלומר

$$\left\|\boldsymbol{x}_{t+1}-\boldsymbol{x}^*\right\|^2 \leq \left\|\left(\boldsymbol{x}_t-\boldsymbol{x}^*\right)\right\|^2-2\eta\boldsymbol{g}_t^T\left(\boldsymbol{x}_t-\boldsymbol{x}^*\right)+\eta^2\left\|\boldsymbol{g}_t\right\|^2$$

מהנקודה הזו ההוכחה היא בדיוק כמו ההוכחה הרגילה של המשפט שכבר ראינו.
לאחר העברת האגפים נקבל כי

$$2\eta\boldsymbol{g}_t^T\left(\boldsymbol{x}_t-\boldsymbol{x}^*\right) \leq \left\|\left(\boldsymbol{x}_t-\boldsymbol{x}^*\right)\right\|^2+\eta^2\left\|\boldsymbol{g}_t\right\|^2-\left\|\boldsymbol{x}_{t+1}-\boldsymbol{x}^*\right\|^2$$

אי השוויון נכון לכל $t \in \{0,1,\ldots,T-1\}$ ולכן נוכל לבצע את הסכימה $\sum_{t=0}^{T-1}$ על שני האגפים ולקבל

$$\sum_{t=0}^{T-1} 2\eta \boldsymbol{g}_t^T \left(\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}^*\right) \le \sum_{t=0}^{T-1} \left(\|(\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}^*)\|^2 + \eta^2 \|\boldsymbol{g}_t\|^2 - \|\boldsymbol{x}_{t+1} - \boldsymbol{x}^*\|^2 \right)$$

מתכונות של טור טלסקופי מתקיים

$$\sum_{t=0}^{T-1} 2\eta \boldsymbol{g}_t^T \left(\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}^*\right) \le \left(\|(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}^*)\|^2 + \eta^2 \sum_{t=0}^{T-1} \|\boldsymbol{g}_t\|^2 - \|\boldsymbol{x}_T - \boldsymbol{x}^*\|^2 \right)$$

מתכונות הנורמה האיבר $\|\boldsymbol{x}_T - \boldsymbol{x}^*\|_2^2$ אי שלילי ולכן האיבר $-\|\boldsymbol{x}_T - \boldsymbol{x}^*\|_2^2$ אי חיובי ולכן נוכל להשמיט אותו ולהגדיל את אי השוויון ולקבל

$$\sum_{t=0}^{T-1} 2\eta \boldsymbol{g}_t^T \left(\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}^*\right) \le \|(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}^*)\|^2 + \eta^2 \sum_{t=0}^{T-1} \|\boldsymbol{g}_t\|^2$$

נחלק ב2η ונקבל

$$\sum_{t=0}^{T-1} \boldsymbol{g}_t^T \left(\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}^*\right) \le \frac{1}{2\eta} \|(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}^*)\|^2 + \frac{\eta}{2} \sum_{t=0}^{T-1} \|\boldsymbol{g}_t\|^2$$

כלומר

$$\begin{aligned}
\sum_{t=0}^{T-1} \boldsymbol{g}_t^T \left(\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}^*\right) &\le \frac{1}{2\eta} \|(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}^*)\|^2 + \frac{\eta}{2} \sum_{t=0}^{T-1} \|\boldsymbol{g}_t\|^2 \\
&\underbrace{\le}_{\substack{\|(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}^*)\| \le R \\ \|\boldsymbol{g}_t\| \le B}} \frac{1}{2\eta} R^2 + \frac{\eta}{2} \sum_{t=0}^{T-1} B^2 \\
&= \frac{1}{2\eta} R^2 + \frac{\eta}{2} T B^2 \\
&\underbrace{=}_{\eta = \frac{R}{B\sqrt{T}}} \frac{1}{2\left(\frac{R}{B\sqrt{T}}\right)} R^2 + \frac{\left(\frac{R}{B\sqrt{T}}\right)}{2} T B^2 \\
&= \frac{B\sqrt{T}}{2} R + \frac{R}{2} \sqrt{T} B \\
&= RB\sqrt{T}
\end{aligned}$$

לכל $t \in \{0,\ldots,T-1\}$ מאי שוויון הגדרינט עבור $\boldsymbol{x}_t$ ו $\boldsymbol{x}^*$ נסמן $g_t \equiv \nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)$ ומאי שוויון הגרדינאט (/הסאב גרדיאנט במקרה שרוצים להוכיח שהמשפט נכון עבור פונ' לא גזירה) מתקיים

$$f\left(\boldsymbol{x}_t\right) - f\left(\boldsymbol{x}^*\right) \le \boldsymbol{g}_t^T \left(\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}^*\right)$$

נשרשר את אי השוויונות

$$\sum_{t=0}^{T-1} \left(f\left(\boldsymbol{x}_t\right) - f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right) \le \sum_{t=0}^{T-1} \boldsymbol{g}_t^T \left(\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}^*\right) \le RB\sqrt{T}$$

נחלק בT ונקבל

$$\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1}\left(f\left(\boldsymbol{x}_t\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right)\leq\sum_{t=0}^{T-1}\boldsymbol{g}_t^T\left(\boldsymbol{x}_t-\boldsymbol{x}^*\right)\leq\frac{RB}{\sqrt{T}}$$

ולכן הוכחנו את אי השוויון השני.
בזה הסתיימה הוכחת המשפט.
נעצור את הנושא של אלג' הגרדיאנט המוטל כדי להתקדם לנושא הבא.

7.1.2 אלג' הגרדיאנט :קצבי התכנסות מהירים יותר.

נחזור לנושא של אלג' הגרדיאנט ללא אילוצים .ראינו שככל שאנו מבצעים הנחות חזקות יותר על f ככה נוכל להבטיח קצבי התכנסות מהירים יותר.
ראינו כי קצבי ההתכנסות מקיימים:

1. עבור פונ' קמורה $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon^2}\right)$.
2. עבור פונ' קמורה וחלקה $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$.

עכשיו נראה שניתן לקבל קצב מהיר בהרבה עבור הנחה חזקה יותר מאלו.
אינטואציה

- עבור הפונ' החד מימדית $f\left(x\right)=x^2$ וגודל צעד $\gamma=\frac{1}{2}$.נזכיר כי המינימום שלה מתקבל ב$x^*=0$.

  מתקיים עבור הפונ' הזו וגודל הצעד הזה:

  $$x_{t+1}=x_t-\gamma\nabla f\left(x_t\right)=x_t-\frac{1}{2}\left(2x_t\right)=0=x^*$$

  כלומר קיבלנו התכנסות בצעד אחד.

  הערות:

  - נזכיר כי המינימום של הפונ' $f\left(x\right)=x^2$ מתקבל ב$x^*=0$.
  - (נזכיר כי f היא 2 חלקה כי לפי הגדרת L חלקה מתקיים $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^d:\left\|\nabla f\left(\boldsymbol{x}\right)-\nabla f\left(\boldsymbol{y}\right)\right\|\leq L\cdot\left\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right\|$ נציב את הרגדיאנטים של f ונקבל כי $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^d:\left\|2x-2y\right\|\leq L\cdot\left\|x-y\right\|$ כלומר $L=2$ מקיים את המשוואה ולכן הפונ' היא 2 חלקה).
  - דרך נוספת לראות את זה : ראינו שפונ' שאם הערך העצמי של ההאסין בכל מקום (כלומר לכל $\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\nabla^2f\left(\boldsymbol{x}\right)$) חסום על ידי L כלומר $\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\lambda_{\max}\left(\nabla^2f\left(\boldsymbol{x}\right)\right)\leq L$.אזי הפונ' היא L חלקה .ההאסיאן של $f\left(x\right)$ הוא $\nabla^2f\left(x\right)=2\in\mathbb{R}^{1,1}$ עם ע"ע 2.ולכן הפונ' היא 2 חלקה.
  - זה נכון גם עבור הפונ' הרב מידמית $f\left(\boldsymbol{x}\right)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}=\left\|\boldsymbol{x}\right\|_2^2$, ניתן להראות שוב בשתי האופנים(או דרך הגדרה או דרך משפט על ההאסיאן) לדוגמא עבור המפשט על ההאסיאן

  $$\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n:\nabla^2f\left(\boldsymbol{x}\right)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2f}{\partial x_1^2}\left(\boldsymbol{x}\right) & \frac{\partial^2f}{\partial x_1\partial x_2}\left(\boldsymbol{x}\right) & \cdots & \frac{\partial^2f}{\partial x_1\partial x_n}\left(\boldsymbol{x}\right)\\ \frac{\partial^2f}{\partial x_2\partial x_1}\left(\boldsymbol{x}\right) & \frac{\partial^2f}{\partial x_2^2}\left(\boldsymbol{x}\right) & \cdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial^2f}{\partial x_n\partial x_1}\left(\boldsymbol{x}\right) & \frac{\partial^2f}{\partial x_n\partial x_2}\left(\boldsymbol{x}\right) & \cdots & \frac{\partial^2f}{\partial x_n^2}\left(\boldsymbol{x}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 2 & \cdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 2\end{pmatrix}$$

  המט' היא אלכסונית ולכן הע"ע מופעים על האלכסון,הערך הכדי גדול הוא 2 ולכן הפונ' $f\left(\boldsymbol{x}\right)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}=\left\|\boldsymbol{x}\right\|_2^2$ היא 2 חלקה.

  - זה מקרה מיוחד מאוד עבור הפונ' הנ"ל וטוב מכדי להיות מוכלל למקרה הכללי.נתבונן על גודל צעד אחר.

- עבור הפונ' החד מימדית $f\left(x\right)=x^2$ (כמו קודם) וגודל צעד $\gamma=\frac{1}{4}$.(נבחין כי מכיוון שהפונ' היא 2 חלקה,אז לכל מההגדרה נובע שלכל n שגדול מ2 הפונ' תהיה גם n חלקה,ובפרט הפונ' 4 חלקה).

מתקיים עבור הפונ' הזו וגודל הצעד הזה:

$$x_{t+1}=x_t-\gamma\nabla f\left(x_t\right)=x_t-\frac{1}{4}\left(2x_t\right)=\frac{1}{2}x_t$$

כלומר בכל צעד אנו מצמצמים את הערך שקיבלנו בחצי כלומר x_t בכל איטרציה קטן בפקטור חצי ,כלומר

$$x_t=\frac{1}{2^t}\cdot x_0$$

$$f\left(x_t\right)=f\left(\frac{1}{2^t}\cdot x_0\right)=\left(\frac{1}{2^t}\cdot x_0\right)^2=\frac{1}{2^{2t}}\cdot x_0^2=\left(\frac{1}{4}\right)^t\cdot x_0^2$$

משמעות היא קצב התכנסות התכנסות אקספוננצאלית בt.

כלומר עבור המקרה של $f\left(x\right)=x^2$ עם גודל צעד $\gamma=\frac{1}{4}$ הראנו שהפונ' קטנה בכל איטרנט בקצב אקספוננצאלי ב t.

נגדיר את המקרה הכללי.ננסח בצורה מורחבת את ההגדרה של פונ' קמורה חזק.

הגדרה :פונ' קמורות חזק

אינטואציה לפונ' קמורה ממש = "לא יותר מדי שטוחה"

הגדרה 3.7 תהא $f:\mathrm{dom}\left(f\right)\longrightarrow\mathbb{R}$ פונ' גזירה.יהא תחום $X\subseteq\mathrm{dom}\left(f\right)$ פונ' קמורה ויהא $\mu\in\mathbb{R}_+$ (כלומר $\mathbb{R}\ni\mu>0$). **אזי** פונ' f תקרא **קמורה ממש** μ strongly convex (עם פרמטר μ ("μ קמורה ממש")) מעל תחום X אם

$$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in X:f\left(\boldsymbol{y}\right)\geq f\left(\boldsymbol{x}\right)+\nabla f\left(\boldsymbol{x}\right)^T\left(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\right)+\frac{\mu}{2}\left\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right\|_2^2$$

הערה 4.7 שימושי יותר במקרים עבורם f אינה גזירה פעמיים.

משפט 5.7 (נאמר בעל פה) **תהא** פונ' $f:\mathbb{R}^d\longrightarrow\mathbb{R}$ אם f גזירה פעמיים, אזי f תקרא μ קמורה ממש strongly convex אם $\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d:\lambda_{\min}\left(\nabla^2 f\left(\boldsymbol{x}\right)\right)\geq\mu$ (הע"ע הקטן ביותר של מט' ההאסיאן של f , גדול מ μ בכל מקום) אזי f **היא** μ **קמורה ממש**.

הערה 6.7 שימושי יותר במקרים עבורם f גזירה פעמיים.

הערה 7.7 נזכר כיניתן להראות ש:פונקציה קמורה חזק $\Leftarrow$פונקציה קמורה ממש$\Leftarrow$ פונקציה קמורה.

(כלומר strongly convex $\Rightarrow$ stictly convex $\Rightarrow$ convex)

ובנוסף כי לפונ' קמורות ממש strongly convex קיימת נקודת מינימום יחידה.

פט 8.7 אם $f\left(\cdot\right)$ היא μ קמורה חזק וגזירה אזי עבור אלג' GD עם גודל צעד μ מתקיים $\left\|\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)\right\|^2\geq 2\mu\left(f\left(\boldsymbol{x}_t\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right)\overbrace{=}^{h_t\equiv\left(f\left(\boldsymbol{x}_t\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right)}2\mu h_t$.

הוכחת המשפט:

מהגדרת קמירות חזק $\mu>0$.

יהיו $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$ כלשהם.אזי מהגדרת הקמירות ממש מתקיים כי

$$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n:f\left(\boldsymbol{y}\right)\geq f\left(\boldsymbol{x}\right)+\nabla f\left(\boldsymbol{x}\right)^T\left(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\right)+\frac{\mu}{2}\left\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right\|_2^2\equiv g\left(\boldsymbol{x}\right)=\dots$$

הפונ' $g\left(\boldsymbol{y}\right)\equiv f\left(\boldsymbol{x}\right)+\nabla f\left(\boldsymbol{x}\right)^T\left(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\right)+\frac{\mu}{2}\left\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right\|_2^2$ היא פונ' קמורה:

נחשב את הגדרינט שלה

$$\begin{aligned}\nabla g(\boldsymbol{y}) &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}} g(\boldsymbol{y}) \\ &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}}\left[f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) + \frac{\mu}{2}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_2^2\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}}\left[\nabla f(\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{y} + \frac{\mu}{2}\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|_2^2\right] \\ &\overbrace{=}^{\frac{\partial}{\partial \underline{x}}\left(\underline{a}^T\underline{x}\right)=\frac{\partial}{\partial \underline{x}}\left(\underline{x}^T\underline{a}\right)=\underline{a}} \nabla f(\boldsymbol{x}) + \frac{\mu}{2}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}}\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|_2^2 \\ &= \nabla f(\boldsymbol{x}) + \frac{\mu}{2}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}}\left[(I\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})^T(I\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\right] \\ &= \nabla f(\boldsymbol{x}) + \frac{\mu}{2}\left[2I^T(I\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\right] \\ &= \nabla f(\boldsymbol{x}) + \mu(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

ואת ההאסיאן שלה

$$\nabla^2 g(\boldsymbol{y}) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y^T}} g(\boldsymbol{y}) = \mu > 0$$

ולכן $\forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n : \nabla^2 g(\boldsymbol{y}) = \mu > 0$ היא חיובית מוגדרת ולכן g היא פונ' קמורה. ולכן אם לg יש נקודה בה הגרדיאנט מתאפס זו נקודת מינימום גלובלי.כלומר

$$\nabla g(\boldsymbol{y}) = \nabla f(\boldsymbol{x}) + \mu(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x})$$

$$\begin{aligned} & [\nabla g(\boldsymbol{z})]_{\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}^*} = 0 \\ \iff & [\nabla f(\boldsymbol{x}) + \mu(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x})]_{\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}^*} = 0 \\ \iff & \nabla f(\boldsymbol{x}) + \mu(\boldsymbol{z}^*-\boldsymbol{x}) = 0 \\ \iff & \nabla f(\boldsymbol{x}) + \mu\boldsymbol{z}^* - \mu\boldsymbol{x} = 0 \\ \iff & \mu\boldsymbol{z}^* = \mu\boldsymbol{x} - \nabla f(\boldsymbol{x}) \\ & \boxed{\boldsymbol{z}^* = \boldsymbol{x} - \frac{1}{\mu}\nabla f(\boldsymbol{x})}\end{aligned}$$

כלומר $\boldsymbol{z}^*$ היא מינימום גלובלי של g כלומר

$$\forall \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n : g(\boldsymbol{z}) \geq g(\boldsymbol{z}^*)$$

וגם עבור $\boldsymbol{y}$ מתקיים

$$\star : g(\boldsymbol{y}) \geq g(\boldsymbol{z}^*)$$

נמשיך ונפתח את אי השוויון מתחילת ההוכחה:

$$\begin{aligned}\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n : f(\boldsymbol{y}) &\geq f(\boldsymbol{x})+\nabla f(\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})+\frac{\mu}{2}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_2^2\\
&= g(\boldsymbol{y})\\
&\geq (\boldsymbol{z}^*)\\
&= f(\boldsymbol{x})+\nabla f(\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{z}^*-\boldsymbol{x})+\frac{\mu}{2}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}^*\|_2^2\\
&= f(\boldsymbol{x})+\nabla f(\boldsymbol{x})^T\left(\left(\boldsymbol{x}-\frac{1}{\mu}\nabla f(\boldsymbol{x})\right)-\boldsymbol{x}\right)+\frac{\mu}{2}\left\|\boldsymbol{x}-\left(\boldsymbol{x}-\frac{1}{\mu}\nabla f(\boldsymbol{x})\right)\right\|_2^2\\
&= f(\boldsymbol{x})-\nabla f(\boldsymbol{x})^T\frac{1}{\mu}\nabla f(\boldsymbol{x})+\frac{\mu}{2}\left\|-\frac{1}{\mu}\nabla f(\boldsymbol{x})\right\|_2^2\\
&= f(\boldsymbol{x})-\frac{1}{\mu}\|\nabla f(\boldsymbol{x})\|_2^2+\frac{1}{2\mu}\|\nabla f(\boldsymbol{x})\|_2^2\\
&= f(\boldsymbol{x})-\frac{1}{2\mu}\|\nabla f(\boldsymbol{x})\|_2^2\end{aligned}$$

כלומר

$$\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n : f(\boldsymbol{y})=f(\boldsymbol{x})-\frac{1}{2\mu}\|\nabla f(\boldsymbol{x})\|_2^2$$

נבחר $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_t$ ו $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}^*$ ונקבל כי $f(\boldsymbol{x}^*)\geq f(\boldsymbol{x}_t)-\frac{1}{2\mu}\|\nabla f(\boldsymbol{x}_t)\|_2^2$ נעביר אגפים $f(\boldsymbol{x}^*)-f(\boldsymbol{x}_t)\geq -\frac{1}{2\mu}\|\nabla f(\boldsymbol{x}_t)\|_2^2$ נמשיך ונקבל $2\mu(f(\boldsymbol{x}_t)-f(\boldsymbol{x}^*))\leq\|\nabla f(\boldsymbol{x}_t)\|_2^2$ כלומר קיבלנו

$$\|\nabla f(\boldsymbol{x}_t)\|^2\geq 2\mu(f(\boldsymbol{x}_t)-f(\boldsymbol{x}^*))\overbrace{=}^{h_t\equiv(f(\boldsymbol{x}_t)-f(\boldsymbol{x}^*))}2\mu h_t$$

וזה מה שרצינו להוכיח.

הערה 9.7 ראינו שאם f קמורה וגזירה ברציפות אזי : f היא L חלקה $\iff$ f בעלת גרדיאנט ליפשיצי עם קבוע L. ומכאן יינבע כי

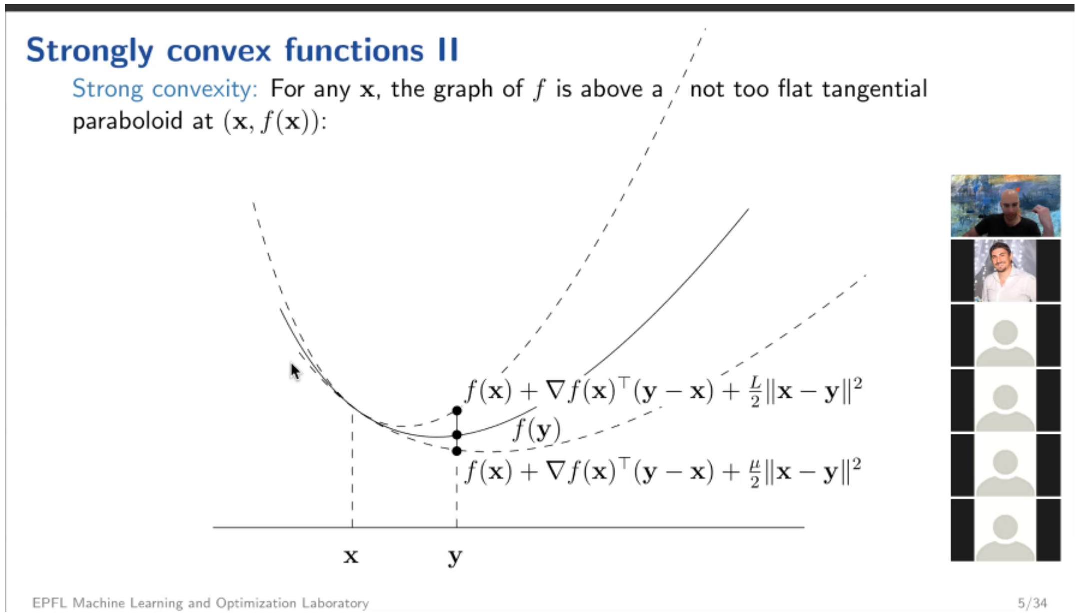
$$\begin{gathered}\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^d : \|\nabla f(\boldsymbol{x})-\nabla f(\boldsymbol{y})\|\leq L\cdot\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|\\ \iff\\ \forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^d : f(\boldsymbol{y})\leq f(\boldsymbol{x})+\nabla f(\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})+\tfrac{L}{2}\cdot\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2\end{gathered}$$

הערה 10.7 כלומר עבור פונקציה f גזירה ברציפות שהיא גם μ קמורה חזק strongly convex μ וגם L חלקה smooth מתקיים כי

$$\begin{aligned}\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} : &f(\boldsymbol{x})+\nabla f(\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})+\frac{L}{2}\cdot\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2\\
&\overbrace{\geq}^{L\,\text{smooth}} f(\boldsymbol{y})\\
&\overbrace{\geq}^{\mu\,\text{strongly convex}} f(\boldsymbol{x})+\nabla f(\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})+\frac{\mu}{2}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_2^2\end{aligned}$$

נבחין כי מאי השוויון נובע גם כי $\mu\leq L$.(מקדם הקמירות ממש μ תמיד קטן או שווה למקדם החלקות L)

איור: (פונ' שהיא גם μ קמורה חזק μstrongly convex וגם L חלקה smooth)



נבחין שבכל נקודה יש לנו מעיין "סנדביץ'" שמלמטה נוצר מההגדרה של μ קמורה ממש וממעלה נוצר מההגדרה של L חלקה. כלומר במקרה הזה

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} : f(\boldsymbol{x}) + \|\nabla f(\boldsymbol{x}) - \nabla f(\boldsymbol{y})\| \le L \cdot \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$$

נזכיר את צעד האלג' בGD : $\boldsymbol{x}_{t+1} = \boldsymbol{x}_t - \eta \boldsymbol{g}_t$ כאשר $\boldsymbol{g}_t = \nabla f(\boldsymbol{x}_t)$.

משפט 11.7 תהא $f(\cdot)$ פונ' μ קמורה חזק μstrongly convex וגם L חלקה smooth.אזי על ידי גודל צעד $\eta = \frac{1}{L}$ שימוש באלג' GD מבטיח כי

$$f(\boldsymbol{x}_t) - f(\boldsymbol{x}^*) \le (f(\boldsymbol{x}_0) - f(\boldsymbol{x}^*))\, e^{-\frac{\mu}{L}\cdot t}$$

הערה 12.7 המשמעות היא שהשגיאה דועכת אקספוננצאלית במספר הצעדים.

הערה 13.7 נבחין כי ראינו ש $\mu \le L$ ולכן תמיד מתקיים $\frac{\mu}{L} \le 1$.לגודל $\frac{\mu}{L}$ יש שם מיוחד, הוא נקרא הCondition number כלומר $\frac{\mu}{L} \equiv$ Condition number מה אומר הגדול הזה?

- נזכיר כי השגיאה במשפט היא לפי $e^{-\frac{\mu}{L}\cdot t}$ כלומר, ככל שה Condition number קטן יותר ככה השגיאה היא איטית יותר.
- ראינו קודם כי עבור x^2 (פונ' 2 חלקה ואפשר להראות שגם 2 קמורה ממש) הCondition number הוא בדיוק 1 כלומר $\frac{\mu}{L} = \frac{2}{2} = 1 \equiv$ Condition number. כלומר לפונ' זו יש את ה Condition number המקסמלי האפשרי.ולכן במקרה הזה (עבור הפעלת אלג' GD עם $\eta = \frac{1}{L} = \frac{1}{2}$) ראינו ההתכנסות היא תוך איטרציה בודדת(=כלומר התכנסות מהירה).

הערה 14.7 ראינו את השימוש בגודל הצעד של $\eta = \frac{1}{L}$ גם במקרה שf היא רק L חלקה.

הערה 15.7 בשביל להגיע לפתרון ϵ אופטמלי נזדקק ל t איטרציות כך שייתקיים $\left(f\left(\boldsymbol{x}_0\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right)e^{-\frac{\mu}{L}\cdot t}\leq\epsilon$ נמצא את t:

$$\begin{aligned}
&\left(f\left(\boldsymbol{x}_0\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right)e^{-\frac{\mu}{L}\cdot t}\leq\epsilon\\
\iff & e^{-\frac{\mu}{L}\cdot t}\leq\frac{1}{\left(f\left(\boldsymbol{x}_0\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right)}\cdot\epsilon\\
\iff & -\frac{\mu}{L}\cdot t\leq\ln\left(\frac{1}{\left(f\left(\boldsymbol{x}_0\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right)}\cdot\epsilon\right)\\
\iff & -t\leq\frac{L}{\mu}\ln\left(\frac{1}{\left(f\left(\boldsymbol{x}_0\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right)}\cdot\epsilon\right)\\
\iff & t\geq\frac{L}{\mu}\ln\left(\frac{\left(f\left(\boldsymbol{x}_0\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right)}{\epsilon}\right)
\end{aligned}$$

כלומר ההתכנסות הולכת כמו $\mathcal{O}\left(\ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right)$.

הוכחת המשפט

נוכיח את קצב ההתכנסות של המשפט:

נסמן $h_t=f\left(\boldsymbol{x}_t\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)$ את השגיאה של האיטרנט הt.נזכר במשפטים הבאים

1. אם $f\left(\cdot\right)$ היא פונ' גזירה וחלקה אזי לפי הלמה sufficient decrease עבור צעד הלימוד $\eta=\frac{1}{L}$ אלג' ה GD מבטיח

$$f\left(\boldsymbol{x}_{t+1}\right)\leq f\left(\boldsymbol{x}_t\right)-\frac{1}{2L}\cdot\left\|\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)\right\|^2\qquad .t\geq 0$$

   (א) (ראינו את אי השוויון הזה בהרצאות קודמות)
   (ב) כלומר אם נחסיר $f\left(\boldsymbol{x}^*\right)$ משני האגפים נקבל

$$\star: h_{t+1}\leq h_t-\frac{1}{2L}\cdot\left\|\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)\right\|^2$$

2. אם $f\left(\cdot\right)$ היא פונ' μ קמורה ממש אזי :

$$\star\star:\left\|\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)\right\|^2\geq 2\mu\left(f\left(\boldsymbol{x}_t\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right)=2\mu h_t$$

   (א)

3. אי שוויון שימושי $\forall x\geq 0:(1-x)\leq e^{-x}$.אנו יודעים כי $1\geq\frac{\mu}{L}=$ Condition number ולכן $1-\frac{\mu}{L}\geq 0$ ולכן נקבל את :

$$\star\star\star:\left[1-\frac{\mu}{L}\right]\leq e^{-\frac{\mu}{L}}$$

ולכן:

$$h_{t+1}\overbrace{\leq}^{\star}h_t-\frac{1}{2L}\cdot\left\|\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)\right\|^2\overbrace{\leq}^{\star\star}h_t-\frac{1}{2L}\cdot\left(2\mu h_t\right)=h_t\left[1-\frac{\mu}{L}\right]\overbrace{\leq}^{\star\star\star}h_t\cdot e^{-\frac{\mu}{L}}$$

כלומר

$$h_{t+1}\leq h_t\cdot e^{-\frac{\mu}{L}}$$

נשתמש באופן רקורסיבי באי השוויון ונקבל

$$h_{t+1} \leq h_t \cdot e^{-\frac{\mu}{L}} \leq h_{t-1} \cdot e^{-\frac{\mu}{L}} \cdot e^{-\frac{\mu}{L}} \leq h_{t-2} \cdot e^{-\frac{\mu}{L}} \cdot e^{-\frac{\mu}{L}} \cdot e^{-\frac{\mu}{L}} \leq \ldots \leq h_0 \cdot e^{-\frac{\mu}{L} \cdot (t+1)}$$

כלומר עבור $\tilde{t} = t+1$ נקבל

$$h_t \leq h_0 \cdot e^{-\frac{\mu}{L} \cdot t}$$

נציב בחזרה את $h_t = f(\boldsymbol{x}_t) - f(\boldsymbol{x}^*)$ ונקבל

$$f(\boldsymbol{x}_t) - f(\boldsymbol{x}^*) \leq (f(\boldsymbol{x}_0) - f(\boldsymbol{x}^*)) e^{-\frac{\mu}{L} \cdot t}$$

וקיבלנו את מה שרצינו להוכיח ■.

7.1.3 אלגוריתם הגרדיאנט הסטוכסתי stochastic gradient descent SGD

עד עכשיו דיברנו על המקרה שבו היתה לנו פונ' ידוע ואנו מסוגלים לחשב את הגרדיאנטים שלה ואת הערכים שלה במדויק.הרבה פעמים בעולם זה לא המצב.

יש לנו גישה רק לחלק מהמידע על $f(\boldsymbol{x})$ (פונ' שנרצה למזער) למדגם מייצג שלה אין לנו גישה לכל הפונ' ובאמצעות המדגם המייצג אנו רוצים למצוא נקודת המינימום של כל הפונ'.האלג' שנלמד שימושי מאוד בבעיות של למידה,בקרה,תורת האינפורמציה.

פונ' מטרהרבות הם מהצורה של סכום כלומר מהצורה:

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_i(\boldsymbol{x})$$

לדוגמא, f_i היא פונ' המחיר עבור האיטרציה הi שנמדדה עבור סט האימון ,בתהליך של אימון רשת שמכיל n איטרציות.

באופן כללי בשביל לחפש את $\nabla f(\boldsymbol{x})$: הגרדיאנט של סכום הפונ' f_i יכול להיות תהליך יקר חישובית (לסכום n גרדיאנטים של n פונ' (שיכולות להיות שונות אבל לא בהכרח)).

הערה 16.7 n יכול להיות מספר מאוד גדול בבעיות מעשיות,בסדר גודל של מליונים ואפילו מילארדים.

דוגמה 17.7 לדוגמא , $f(\boldsymbol{x})$ הוא פונ' ממרחב דגימות הדם של בנדאם לתחזית האם הבנדאם שממנו נלקחו הדגימות הדם יחלה בקורנה או שלא.כלומר $\boldsymbol{x}$ הוא בדיקות הדם (ווקטור פרמטרים (=ווקטור פיצ'רים) :באחת הכניסות שלו :רמת סוכר בדם ובכניסה אחרת שלו :רמת גלוקוז בדם וכו'...) ו$f(\boldsymbol{x})$ זה החזוי (=שערוך) האם האדם יחלה בקורונה או שלא.יש לנו גישה רק לחלק מהאנשים כלומר אנו יודעים רק M זוגות של אנשים $\{\boldsymbol{x}_i, f(\boldsymbol{x}_i)\}_{i=1}^{M}$ =תיוגים והיינו רוצים לדעת מה השערוך שיניב את השגיאה המינימלית עבור כל האנשים בעולם (לדוגמא יש n אנשים בעולם) $\{\boldsymbol{x}_i, f(\boldsymbol{x}_i)\}_{i=1}^{n}$.במקרה הזה לחשב את הגרדיאנט יכול להיות מאוד יקר ודורש מליוני או מלארדי חישובים,שזה דבר שאינו מעשי.

דוגמה 18.7 רגרסיה לוגיסטית

בהנתן דוגמאות מתויגות $\{(x_i, y_i)\} \in \mathbb{R}^p \times \{0,1\}, i \in \{1, \ldots, n\}$ נזכר בבעית הרגרסיה הלוגיסטית:

$$\min_{\beta} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\underbrace{-y_i x_i^T \beta + \log\left(1 + \exp\left(x_i^T \beta\right)\right)}_{f_i(\beta)} \right)$$

החישוב של הגרדינאט $f_i(\beta)$ הוא מעשי כאשר n הוא צנוע אבל כאשר n גדול מאוד אז החישוב שלו אינו מעשה.

$$\nabla f(\beta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (y_i - p_i(\beta)) x_i$$

השוואה בין האלג' הגרדיאנט הרגיל (=גרדיאנט מלא/full gradeint/batch gradient) אל מול הגרדיאנט הסטוכססטי stochastic :

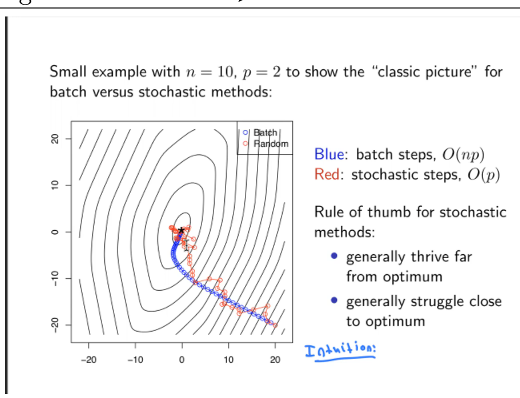
- מעבר על הbatch ועדכון פונ' המחיר פעם אחת עולה $\mathcal{O}(np)$.
- מעבר על חלק מסט האימון ועדכון פונ' המחיר (=עדכון סטוכססטי) פעם אחת עולה $\mathcal{O}(p)$.

לכן כשn גדול מספיק נעדיף להשתמש באלג' הגרדיאנט הסטוכססטי.

מבנה האלגוריתם: פונ' המטרה שאנו רוצים מזער $\min_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}) = \min_{\boldsymbol{x}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i(\boldsymbol{x})$.

- בחר $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^d$.
- לכל $t = 0, 1, \ldots$ ועבור צעד $\eta_t \geq 0$
  - דגום את i_t באופן אקראי מתוך הקבוצה $i_t \in \{1, 2, \ldots, n\}$ עם פונ' פילוג יוניפורמית אחידה.
  - בצע את העדכון $\boldsymbol{x}_{t+1} = \boldsymbol{x}_t - \eta_t \boldsymbol{g}_t$ כאשר $\boldsymbol{g}_t = \nabla f_{i_t}(\boldsymbol{x}_t)$.
- באלג' הגרדיאנט הזה העדכון מתבצע לפי $\boldsymbol{g}_t$ הגרדיאנט בנקודה $\boldsymbol{x}_t$על פני הפונ' f_{i_t} בלבד:הפונ' שדגמנו בסיבוב הזה.באלג' הגרדיאנט המלא ביצענו את חישוב הגרדיאנט לפי הפונ' f הגדולה.(כלומר לפי $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i(\boldsymbol{x})$) .
- כלומר בכל סיבוב בוחרים מייצג אחד f_{i_t} מתוך n הפונ' $\{f_i\}_{i=1}^{n}$ שמתארות את $f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i(\boldsymbol{x})$ ומחשבים עליו את הגרדיאנט ומעדכני רק לפי כיוונו.
- נדגיש כי בכל סיבוב אנו מגרילים **פונ חדשה** לא בהכרח אותה פונ כמו בסיבוב הקודם.כלומר **ייתכנו דגימות שונות שייגרלו פונ' שונות.**
- כלומר מעדכנים את הגרדיאנט בכל פעם רק עם f_i אחת במקום להשתמש בעדכון הגרדיאנט המלא.ולכן כל איטרציה היא **"זולה""יותר חישובית** פי n מאשר עדכון full gradient (עולה $\mathcal{O}(d)$ במקום $\mathcal{O}(nd)$ כי n גדול מאוד זה הבדל משמעותי). הווקטור $g_t = \nabla f_i(\boldsymbol{x}_t)$ נקרא **גרדיאנט סטוכסטי stochastic gradiwnt** . $\boldsymbol{g}_t$ הוא למעשה ווקטור של d משתנים אראיים (כלומר ווקטור אקראי) אבל לצורך נוחות נקרה לו "משתנה אקראי".
- האלג' נקרא אלג' **הגרדיאנט הסטוכסטי** מכיוון שיש כאן בתהליך הזה **אקראיות (=סטוכסטיות)** בתהליך (כל סיבוב מבצעים דגימה אקראית).
  - כלמר גם $\boldsymbol{x}_t$ וגם ה$\boldsymbol{g}_t$ הם למעשה ווקטורים אקראיים.
- מטבע הדברים האלג' סטוכסטי ותלוי במשתנים אקראיים (וייתכן שאפילו לא דגמנו את כל הפונ' ב $\{f_i\}_{i=1}^{n}$) ולכן לא נוכל לומר שהאלג' ייתכנס בהתברות 1 למשהו,אלא נוכל לומר ש**בהסתברות גבוהה** קיים תופעת התכנסות רצויה או **שתוחלת** השגיאה היא קטנה.
- **סימונים:**
  - האות d והאות p מסמנות את אותו הדבר,מימד הקלט (לעיתים מסמנים ככה ולעיתים מסמנים ככה)זה המימד של התחום של f.כלומר $f : \overbrace{\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^p}^{p\equiv d} \longrightarrow \mathbb{R}$
  - n. משמעו כמות הפונ' שבסכום של הפונ' המלאה $\min_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}) = \min_{\boldsymbol{x}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i(\boldsymbol{x})$.

דוגמה 19.7 ניתן לראות שהאלג' הסטוכסטי מתכנס בצורה יותר רועשת מהאלג' fullgradient אבל בכל זאת מתכנס.לדוגמא:



אינטואציה:אפשר לחשוב על אלג' הגרדיאנט הסטוכסטי מנקודת המבט הבאה:
בכל סיבוב אפשר לחשוב על אלג' הגרדיאנט הסטוכסטי בתור אלג' הגרדיאנט הרגיל האמיתי,מוסיף לו קצת(או הרבה) רעש ואז מבצע את העדכון.כלומר הוא מעיין גרסא של אלג' הגרדיאנט המלא רק שבכל פעם מתווסף לנו רעש לצעד העדכון.כלומר אם האלג' הגרדיאנט המלא (הכחול) עוקב אחרי הגרדיאנטים , אז גם האלג' הגרדיאנט הסטוכטי עוקב אחרי הגרדיאנטים (האדום עוקב אחרי הכחול) אבל באופן יותר רועש.אבל עדיין אם הגרדיאנט גדול מספיק,אז עדיין יש התקדמות ("סחיפה") בכיוון הגדריאנט.

- באופן כללי הביצועים של אלגורתמים סטוכסטיים:
  - כאשאנו בנקודה בה אנו **רחוקים** מהאופטימום (ואז הגרדיאנט מאוד מאוד חזק) נוכל למור שהאלג' הסטוכסטיים **מתכנסים מאוד מהר**.(מהר אפילו כמו full gradient) אפילו שהעלות החישובית שלהם היא הרבה יותר נמוכה.
  - כאשאנו בנקודה בה אנו **קרובים** מהאופטימום וכאשר הגרדיאנט לא חזק נוכל למור שהאלג' הסטוכסטיים מתכנסים נאוד לאט.כי במקרה הזה הגרדינט הוא נמוך יחסית) ואז האלג' האלו יעשו הילוך מקרי.(כשבעצם לעומת זאת הfull gradient ימשיך ויישתפר כי תמיד ייתקדם לכיוון ההפוך לגרדיאנט האמיתי).
- לכן האלג' הנ"ל מוצלח עבור דיוקים לא גדולים מדי.
  - בדרך כלל בmachine leraning כמעט ולא אכפת לנו מפתרונות מאוד מדוייקים,ולכן האלג' הסטוכנסטי ייתן ביצועים טובים יותר ובעלות חישובית זולה יותר ולעתים קרובות נעדיף אותו על פני אלג' full gradient .
  - לדוגמא אלג' שמתכנן מסלול נסיעה בוויז ואומר לנו מה הזמן שנגיע ליעד.אם השגיאה היא ± 1 דקות אז אנחנו בסדר עם שגיאה כזו וזה לא כל כך נורא.לא תעניין אותנו רזולוציה (של הגעה ליעד) בדיוק של מיקרו שניות.(כלומר אנו בסדר לקבל פתרון שאינו מדויק מאוד מאוד) וגם שגיאה של דקה יכולה להספיק לנו.ולכן שימוש באלג' הסטוכסטי ייתאים לצרכינו.

השערוך הלא מוטה unbaisedness

ראינו כי בהוכחות הקודמות של התכנסויות השתמשנו באי שוויון הגרדיאנט עבור פונ קונבקסיות:

$$f(\boldsymbol{x}_t) - f(\boldsymbol{x}^*) \leq \boldsymbol{g}_t^T(\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}^*)$$

אבל מכיוון שהפעם באלג' הנוכחי $\boldsymbol{g}_t$ הוא לא הגרדיאנט שלנו ,אלא ה**גרדיאנט הסטוכסטי :** $\boldsymbol{g}_t = \nabla f_{i_t}(\boldsymbol{x}_t)$ **לא נוכל** להשתמש באי השוויון הנ"ל.(הוא לא בהכרח נכון) מה שכן נוכל להראות היא שהאי שוויון אכן נכון עבור תוחלות.
עבור זה נתחיל בהגדרה,

- נבחין כי $\boldsymbol{g}_t$ הוא משתנה אקראי: $\boldsymbol{g}_t = \nabla f_{i_t}(\boldsymbol{x}_t)$. עם פונ' פילוג מהצורה $P\{\boldsymbol{g}_t = \nabla f_{i_t}(\boldsymbol{x}_t) \mid i_t \in \{1,2,\ldots,n\}\} = \frac{1}{n}$.

הגדרה 20.7 תזכורת , הטיה של משערך $\hat{\theta}$ לפרמטר θ מוגדרת על ידי $\mathrm{bias}\left(\theta,\hat{\theta}\right) = \mathbb{E}\left(\hat{\theta}\right) - \theta$.ולכן מכאן נובע כי :

המשתנה האקראי $\boldsymbol{g}_t$ הוא **משערך בלתי מוטה** unbaised estimate (unbaised לא מוסט/לא מוטה) של $\nabla f(\boldsymbol{x}_t)$ כי לפי ההגדרה של תוחלת:

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{g}_t \mid \boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{x}] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \nabla f_i(\boldsymbol{x}_t) = \nabla f(\boldsymbol{x}_t) \qquad ,\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$$

כלומר

$$\mathrm{bias}\left(\nabla f(\boldsymbol{x}_t), (\boldsymbol{g}_t \mid \boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{x})\right) = \mathbb{E}[\boldsymbol{g}_t \mid \boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{x}] - \nabla f(\boldsymbol{x}_t) = \nabla f(\boldsymbol{x}_t) - \nabla f(\boldsymbol{x}_t) = 0$$

כלומר

$$\mathrm{bias}\left(\nabla f(\boldsymbol{x}_t), (\boldsymbol{g}_t \mid \boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{x})\right) = 0$$

ולכן $\boldsymbol{g}_t$ הוא משערך בלתי מוטה.

מסקנה 21.7 והמשמעות היא :בעצם הדרך הנכונה לחשוב על $\boldsymbol{g}_t$ הוא כגודל ששווה לגרדיאנט המדוייק בנקודה $\nabla f(\boldsymbol{x}_t)$ + שהוא רעש,**שהתוחלת שלו היא אפס.**

נוכיח שאי שוויון הגדריאנט $f(\boldsymbol{x}_t) - f(\boldsymbol{x}^*) \leq \boldsymbol{g}_t^T(\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}^*)$ נכון עבור **התוחלת** כלומר **נוכיח כי** $\mathbb{E}[f(\boldsymbol{x}_t) - f(\boldsymbol{x}^*)] \leq \mathbb{E}\left[\boldsymbol{g}_t^T(\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}^*)\right]$.

משפט 22.7 מתקיים convexetiy in expectation: $\mathbb{E}[f(\boldsymbol{x}_t) - f(\boldsymbol{x}^*)] \leq \mathbb{E}\left[\boldsymbol{g}_t^T(\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}^*)\right]$

כלומר זה הוא **אי שוויון הגרדיאנט הסטוכסטי (שמתקיים רק בתוחלת)**
הוכחה:

- f פונ' קמורה ולכן מאי שוויון הגדריאנט מתקיים $\star : f(\boldsymbol{x}_t) - f(\boldsymbol{x}^*) \leq \nabla f(\boldsymbol{x}_t)^T (\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}^*)$ כלומר $\star : \mathbb{E}[f(\boldsymbol{x}_t) - f(\boldsymbol{x}^*)] \leq \mathbb{E}\left[\nabla f(\boldsymbol{x}_t)^T (\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}^*)\right]$
- נזכיר כי ראינו מעלה כי מתקיים ש $\star\star : \mathbb{E}[\boldsymbol{g}_t \mid \boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{x}] = \nabla f(\boldsymbol{x}_t)$
- ממשפט ההחלקה נובע כי

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\boldsymbol{g}_t^T (\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}^*)\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\boldsymbol{g}_t^T (\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}^*) \mid \boldsymbol{x}_t\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\boldsymbol{g}_t^T \mid \boldsymbol{x}_t\right] (\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}^*)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(\mathbb{E}[\boldsymbol{g}_t \mid \boldsymbol{x}_t])^T (\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}^*)\right] \\
&\overbrace{=}^{\star\star} \mathbb{E}\left[\nabla f(\boldsymbol{x}_t)^T (\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}^*)\right]
\end{aligned}$$

כלומר

$$\star\star\star : \mathbb{E}\left[\boldsymbol{g}_t^T (\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}^*)\right] = \mathbb{E}\left[\nabla f(\boldsymbol{x}_t)^T (\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}^*)\right]$$

- נשרשר את $\star$ ואת $\star\star\star$ ונקבל

$$\mathbb{E}[f(\boldsymbol{x}_t) - f(\boldsymbol{x}^*)] \leq \mathbb{E}\left[\nabla f(\boldsymbol{x}_t)^T (\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}^*)\right] = \mathbb{E}\left[\boldsymbol{g}_t^T (\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}^*)\right]$$

ונקבל $\mathbb{E}[f(\boldsymbol{x}_t) - f(\boldsymbol{x}^*)] \leq \mathbb{E}\left[\boldsymbol{g}_t^T (\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}^*)\right]$.

■

הערה 23.7 נבחין כי **אם לא היינו מגדירלים** פונ' חדשה באופן יוניפורמי בכל סביבוב המעבר $(\mathbb{E}[\boldsymbol{g}_t \mid \boldsymbol{x}_t])^T = \nabla f(\boldsymbol{x}_t)^T$ **לא היה מוצדק**.

bounded stochastic gradient descent:$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon^2}\right)$steps

משפט 24.7 תהא $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ פונ' קונבקסית וגזירה ותהא $\boldsymbol{x}^*$ נקודת מינימום גלובלית של f.בנוסף נניח כי $\|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}\| \leq R$ וגם כי $\mathbb{E}\left(\|\boldsymbol{g}_t\|^2\right) \leq B^2$ לכל t.אזי עבור בחירת גודל הצעד $\eta = \frac{R}{B\sqrt{T}}$ האלג' stochastic gradient descent SGD יניב :

$$\mathbb{E}[f(\overline{\boldsymbol{x}_t}) - f(\boldsymbol{x}^*)] \leq \frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1}(\mathbb{E}[f(\boldsymbol{x}_t)] - f(\boldsymbol{x}^*)) \leq \frac{RB}{\sqrt{T}}$$

הוכחת המשפט בדיוק כפי שראינו בעבר (מספר פעמים) רק שהפעם:

1. שוב גם כאן $\overline{\boldsymbol{x}_t} = \frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1}\boldsymbol{x}_t$.
2. נבחין כי הפעם $\boldsymbol{x}_t$ לכל t הוא משתנה מקרי ולכן לא ניתן להבטיח עבורם שעבור $\boldsymbol{x}_t$ בהתסברות אחת יקרה משהו מסויים כי $\boldsymbol{x}_t$ תלוי בהגרלות שלנו על פני כל סיבוב ולכן אי השוויונות וכל המשתנים הסטוכסטיים (המשתנים האקראיים) חיים בתוך תוחלת.
3. מניחים שהגרדיאנטים חסומים **בתוחלת** $\mathbb{E}\left(\|\boldsymbol{g}_t\|^2\right) \leq B^2$
4. השגיאה בממוצעת חסומה **בתוחלת** $\mathbb{E}[f(\overline{\boldsymbol{x}_t}) - f(\boldsymbol{x}^*)] \leq \frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1}(\mathbb{E}[f(\boldsymbol{x}_t)] - f(\boldsymbol{x}^*))$ כלומר תוחלת השגיאה על פני כל הסיבובים $\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1}(\mathbb{E}[f(\boldsymbol{x}_t)] - f(\boldsymbol{x}^*))$ היא קטנה או שווה מ $\frac{RB}{\sqrt{T}}$.ככל שמספר הסיבובים T גדל ככה תוחלת השגיאה על פני כל הסיבובים הולכת וקטנה.

הוכחה:
החלק הראשון של אי השוויון הראשון מבוצע בגלל אי שוויון ינסן על f כי f פונ' קמורה ולקיחת תוחלת של התוצאה

$$\mathbb{E}\left[f\left(\overline{\boldsymbol{x}_t}\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right] \leq \frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1}\left(\mathbb{E}\left[f\left(\boldsymbol{x}_t\right)\right]-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right)$$

מאוד מזכיר את ההוכחות הקודמות.נזכור כי צעד העדכון הוא $\boldsymbol{x}_t-\eta\boldsymbol{g}_t$.
כפי שריאנו בעבר (כמה פעמים)
מתקיים

$$\begin{aligned}
\left\|\boldsymbol{x}_{t+1}-\boldsymbol{x}^*\right\|^2 &\leq \left\|\boldsymbol{x}_t-\eta\boldsymbol{g}_t-\boldsymbol{x}^*\right\|^2\\
&=\left\|\left(\boldsymbol{x}_t-\boldsymbol{x}^*\right)-\eta\boldsymbol{g}_t\right\|^2\\
&=\left\|\left(\boldsymbol{x}_t-\boldsymbol{x}^*\right)\right\|^2-2\eta\boldsymbol{g}_t^T\left(\boldsymbol{x}_t-\boldsymbol{x}^*\right)+\eta^2\left\|\boldsymbol{g}_t\right\|^2
\end{aligned}$$

העברת אגפים תניב

$$2\eta\boldsymbol{g}_t^T\left(\boldsymbol{x}_t-\boldsymbol{x}^*\right) \leq \left\|\left(\boldsymbol{x}_t-\boldsymbol{x}^*\right)\right\|^2-\left\|\boldsymbol{x}_{t+1}-\boldsymbol{x}^*\right\|^2+\eta^2\left\|\boldsymbol{g}_t\right\|^2$$

נסכום על פני $t\in\{0,1\ldots,T-1\}$ ונקבל סכום טלסקופי

$$\begin{aligned}
\sum_{t=0}^{T-1}2\eta\boldsymbol{g}_t^T\left(\boldsymbol{x}_t-\boldsymbol{x}^*\right) &\leq \sum_{t=0}^{T-1}\left(\left\|\left(\boldsymbol{x}_t-\boldsymbol{x}^*\right)\right\|^2+\eta^2\left\|\boldsymbol{g}_t\right\|^2-\left\|\boldsymbol{x}_{t+1}-\boldsymbol{x}^*\right\|^2\right)\\
&=\left(\left\|\left(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}^*\right)\right\|^2+T\eta^2\left\|\boldsymbol{g}_t\right\|^2-\overbrace{\left\|\boldsymbol{x}_T-\boldsymbol{x}^*\right\|^2}^{\left\|\boldsymbol{x}_T-\boldsymbol{x}^*\right\|^2>0}\right)\\
&\leq \left\|\left(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}^*\right)\right\|^2+T\eta^2\left\|\boldsymbol{g}_t\right\|^2
\end{aligned}$$

נצמצם ב 2η ונקבל

$$\star:\sum_{t=0}^{T-1}\boldsymbol{g}_t^T\left(\boldsymbol{x}_t-\boldsymbol{x}^*\right) \leq \frac{1}{2\eta}\left\|\left(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}^*\right)\right\|^2+\frac{\eta}{2}T\left\|\boldsymbol{g}_t\right\|^2$$

עד השלב הזה אי השוויונות נכונים בהסתברות אחת.אי השוויון תמיד מתקיים.
כעת נתחיל להשתמש בתוחלות.
ראינו לפי המשפט הקודם כי מתקיים $\star\star:\mathbb{E}\left[f\left(\boldsymbol{x}_t\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right] \leq \mathbb{E}\left[\boldsymbol{g}_t^T\left(\boldsymbol{x}_t-\boldsymbol{x}^*\right)\right]$ ולכן

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{t=0}^{T-1}\left(f\left(\boldsymbol{x}_t\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right)\right] \underbrace{\leq}^{\star\star} & \ \mathbb{E}\left[\sum_{t=0}^{T-1} \boldsymbol{g}_t^T\left(\boldsymbol{x}_t-\boldsymbol{x}^*\right)\right] \\
& \overbrace{\leq}^{\star} \mathbb{E}\left[\frac{1}{2\eta}\left\|\left(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}^*\right)\right\|^2+T\frac{\eta}{2}\left\|\boldsymbol{g}_t\right\|^2\right] \\
& \overbrace{\leq}^{\boldsymbol{x}_0 \text{ is deterministic}} \frac{1}{2\eta}\left\|\left(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}^*\right)\right\|^2+T\frac{\eta}{2}\mathbb{E}\left[\left\|\boldsymbol{g}_t\right\|^2\right] \\
& \overbrace{=}^{\substack{\mathbb{E}\left(\left\|\boldsymbol{g}_t\right\|^2\right) \leq B^2 \\ \left\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}\right\| \leq R}} \frac{1}{2\eta}R^2+\frac{\eta}{2}TB^2 \\
& \overbrace{=}^{\eta=\frac{R}{B\sqrt{T}}} \frac{1}{2\left(\frac{R}{B\sqrt{T}}\right)}R^2+\frac{\left(\frac{R}{B\sqrt{T}}\right)}{2}TB^2 \\
& =\frac{B\sqrt{T}}{2}R+\frac{R}{2}\sqrt{T}B \\
& =BR\sqrt{T}
\end{aligned}
$$

כלומר $\mathbb{E}\left[\sum_{t=0}^{T-1}\left(f\left(\boldsymbol{x}_t\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right)\right] \leq BR\sqrt{T}$ נכפיל ב $\frac{1}{T}$ בשני האגפים וקבל את מה שרצינו להוכיח.

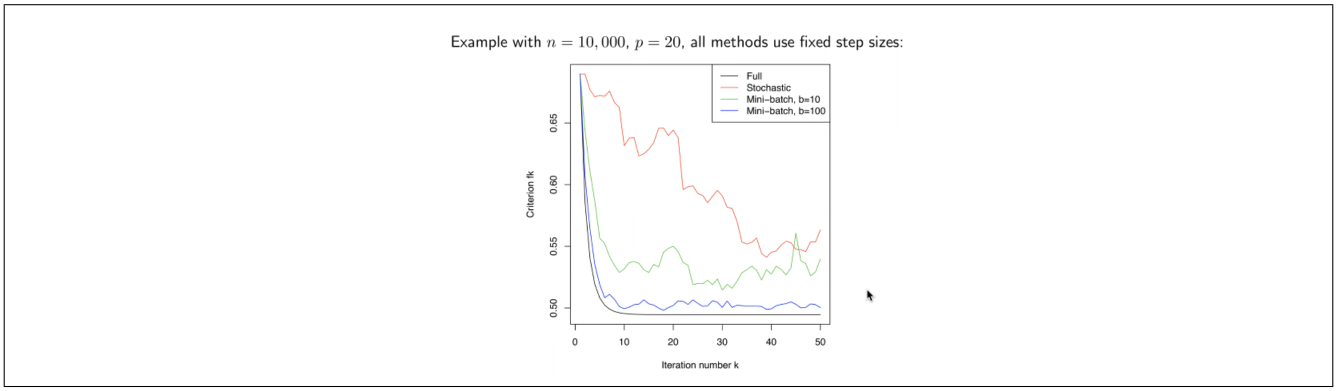
$$
\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1}\left(\mathbb{E}\left[f\left(\boldsymbol{x}_t\right)\right]-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right) \leq \frac{RB}{\sqrt{T}}
$$

וסיימנו.

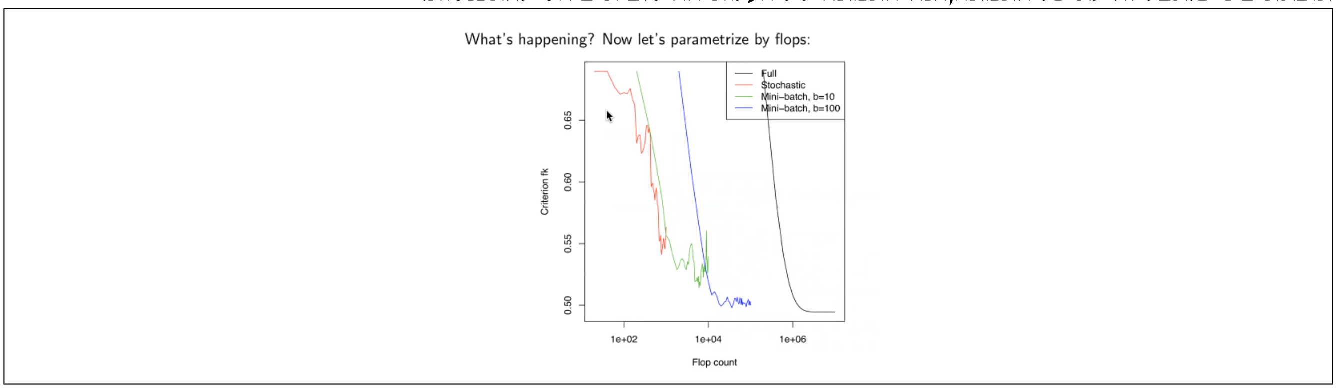
הערה 25.7 נבחין שבמהלך הפתרון מקבלים שהשגיאה הממוצעת בתוחלת מקיימת $\mathbb{E}\left[\sum_{t=0}^{T-1}\left(f\left(\boldsymbol{x}_t\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right)\right] \leq \frac{1}{2\eta}\left\|\left(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}^*\right)\right\|^2 +$ $\frac{\eta}{2}\sum_{t=0}^{T-1}\mathbb{E}\left[\left\|\boldsymbol{g}_t\right\|^2\right]$ וראינו שניתן לחשוב על $\boldsymbol{g}_t$ כעת $\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)$ (הגדרדיאנט המדויק) + רעש עם תוחלת אפס.ולכן על $\left\|\boldsymbol{g}_t\right\|^2$ אפשר לחשוב בתור משהו שקשור למומנט השני של $\boldsymbol{g}_t$ מכיוון שהתוחלת היא אפס נוכל לומר שככל שהמומנט השני (כלומר ככל שהווארינס) יותר קטן ככה ההתכנסות יותר מהירה (סכום השגיאות $\sum_{t=0}^{T-1}\left(f\left(\boldsymbol{x}_t\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right)$ חסום מלמעלה על ידי $\frac{\eta}{2}\sum_{t=0}^{T-1}\mathbb{E}\left[\left\|\boldsymbol{g}_t\right\|^2\right]$ ועוד איבר קבוע) כלומר סכום שהגשגיאות חסום על ידי סכום הווארינסים של $\left\|\boldsymbol{g}_t\right\|^2$כלומר סכום המומנטיים השניים של המשערכים של $\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)$.

בתרגול נראה דרך להקטין את המומנטים השניים (=הווארינסים במקרה הזה (של תוחלת אפס)) של $\left\|\boldsymbol{g}_t\right\|^2$ולקבל אלג' עם קצב התכנסות משופר.לא תמיד אפשר לעשות את זה ובתרגול נלמד דרך "חצי פרקטית " כיד לעשות זאת.

דוגמה 26.7 כאן $n = 10,000$ ($10,000$ פונ' שכל אחת מימד$p = 20$ כלומר $\forall i \in \{1,2,\ldots,10,000\} : f_i : \mathbb{R}^{20} \longrightarrow \mathbb{R}$) דוגמא לקצבי התכנסות של האלג' הגרדיאנט הסטוכסטי אלג' הרגדיאנט המלא ואלגורתמי mini-batch (דגימה של מספר פונ' מתוך הקבוצה,מעיין פשרת ביניים בין אלג' גרדיאנט סטוכסטי ואלג' גרדיאנט מלא)



ניתן לראות שאלג' הגרדיאנט המלא מתכנס הכי מהר ואלג' הגרדיאנט הסטוכסטי הכי לאט,האלג' של mini-batch למינהם נותנים תוצאת ביניים.אבל זה לא כל התמונה,הנה התמונה של העלות החישובית ביחס להתכנסות.

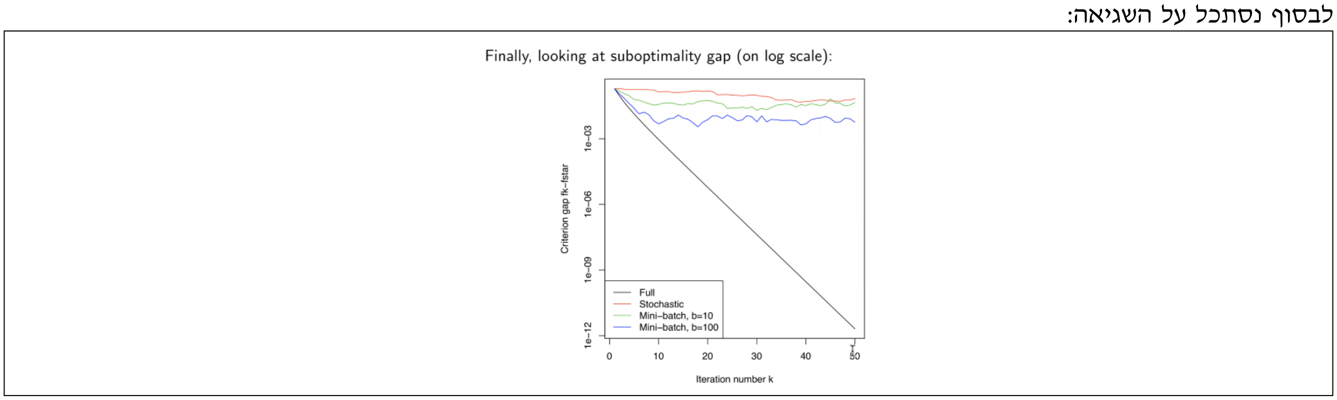


הפעם במקום איטרציות ציר X הוא כמות החישובים שהתבצעה Flop count - floating point operations conts (כמות חישובים בטיפוס נקודה צפה) .רואים כאן שהאלג' הגרדיאנט המלא מתכנס לשגיאה יותר נמוכה אבל העלות היחשובית שלו היא בסדרי גודל משמעותיים יותר.העלות החישובית שלו היא הרבה יותר גבוהה.בזמן שהאלג' הגרדיאנט המלא עשה צעד אחד (הנקודה הראשונה בגרף השחור) שלקח לחשב אותו סדר גודל של 10^5 חישובים של פעולות נקודה צפה. האלג' הסטוכסטי הספיק כבר לעשות הרבה צעדים ולהגיע לשגיאה שאינה טרוואלית (שגיאה נמוכה) בהרבה פחות חישובים.ואלג' הminibatch גם קיבל תוצאה יפה בעלות חישובית גדולה מהאלג' הסטוכסטי וקטנה מהfull גרדיאנט.

יש כאן למעשה trade off :

- כשאנחנו לוקחים מעט דוגמאות בכל סיבוב מספר החישובים הוא יותר נמוך וכבר במעט חישובים אפשר לקבל שגיאה שהיא לא טרוואלית.
- ככל שאנחנו לוקחים יותר דוגמאות בכל סיבוב (ככל שגודל הbatch גדל) (בגרף מ 10, ל100 ול full) העלות החישובים הולכת ועולה אבל השגיאה שמתכנסים אליה היא יותר נמוכה.

לבסוף נסתכל על השגיאה:



כמו שניתן לראות האלג' full gradeint descent מגיע לשגיאות מאוד מאוד קטנות, האלגורתמים הסטוכסטיים (הרועשים) לא מסוגלים להגיע לשגיאות כל כך קטנות.כלומר **אם יש לנו בעיה שבה חשוב לנו מאוד שגיאה מאוד קטנה** מאוד **שימוש באלגוריתמים**

סטוכסטיים הוא רעיון לא טוב במקרה הזה.ושוב כפי שאמרנו בד"כ בבעיות פרקטיות של machine lerning להגיע לשגיאות כל כך קטנות בסדרי גודל של 10^{-12} זה לא מעניין, ולא משמעותי.(כפי שהוסבר עם הדוגמא על הוויז).

7.2 תרגול 7

תזכורת מהסתברות:

הגדרה 27.7 יהא X משתנה אקראי RV-random varible דיקסרטי עם פונ' פילוג הסתברות $p(\cdot)$ מעל הקבוצה $\mathcal{X}$.(כלומר המ"א X מקבל ערכים מתוך הקבוצה $\mathcal{X}$ כאשר ההסתברות לקבל כל ערך מהקבוצה $\mathcal{X}$ מוגדרת על ידי פונ' ההסתברות $p(\cdot)$)

- **התוחלת** $\mathbb{E}[X] \triangleq \sum_{x\in\mathcal{X}} x \cdot p(x)$
- **המומנט השני** $\mathbb{E}[X^2] \triangleq \sum_{x\in\mathcal{X}} x^2 \cdot p(x)$
- **שונות:** $\operatorname{var}(X) \triangleq \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}(X))^2\right] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$

משפט 28.7 משפט ההחלקה: יהא X מ"א ויהא Y מ"א אחר.רזי

$$\mathbb{E}_X[X] = \mathbb{E}_Y\left[\begin{array}{c}\text{it's an RV:}\\ \text{(function of Y)}\\ \overbrace{\mathbb{E}_X[X \mid Y]}\\ \\ \\ \end{array}\right]$$

הערה 29.7 על ידי משפט ההחלקה נוכל לחשב תוחלת של משתנים אקראיים.

מבוא קצר לתורת השערוך:

- יהא θ משתנה **דטרמניסטי.**
- נניח שאנו מקבלים גישה למשתנה אקראי X כך שהוא קשור באופן כלשהו לθ, לדוגמא $X \sim \mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$.(כלומר יש גישה ל$X$ ולX יש קשר לθ)
- אנו רוצים לשערך את θ על X.(על סמך המדידה/המדידות של X)
  - במילים אחרות אנו רוצים למצוא פונ' $\hat{\theta} \equiv f(X)$ כך שעבורה מתקיים $\theta \approx \hat{\theta}$.
    - * נבחין כי X הוא משתנה אקראי ולכן $f(X)$ משתנה אקראי כלומר $\hat{\theta}$ הוא משתנה אקראי.
    - * נבחין כי θ הוא משתנה **דטרמנסטי.** כלומר $\overbrace{\hat{\theta}}^{\text{Random varible}} \approx \overbrace{\theta}^{\text{determnistic}}$
- אנו רוצים למצוא משערך **לא מוטה** של θ על סמך X.כלומר רוצים ש $\hat{\theta}$ יהיה משערך לא מוטה של θ.
  - כלומר רוצים ש $\mathbb{E}\left[\hat{\theta}\right] = \theta$ (כלומר שבתוחלת המשערך $\hat{\theta}$ יהיה שווה לפרמטר θ שאנו מנסים לשערך) כלומר,שבממוצע ,המשערך שלנו טוב.

7.2.1 אופטמזציה סטוכסטית

הגדרת הבעיה: רוצים למזער על פני $\boldsymbol{x}$ את הפונ' הבאה

$$\min_{\boldsymbol{x}} \mathbb{E}_{\boldsymbol{a}\sim\mathcal{D}}[f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})]$$

כאשר הווקטור $\boldsymbol{a}$ הוא ווקטור אקראי עם פונ' פילוג הסתברות $\mathcal{D}$.

הערה 30.7 $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})$ הוא אקראי גם הוא (בגלל ש $\boldsymbol{a}$ הוא קראי ו $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})$ היא גם פונ' של $\boldsymbol{a}$)

סימון 31.7 הסימון $\mathbb{E}_{\boldsymbol{a}\sim\mathcal{D}}\left[\cdot\right]$ משמעו "חשב את התוחלת על מה שבפנים $\left[\cdot\right]$ לפי משתנה $\boldsymbol{a}$ שמפולג לפי $\mathcal{D}$".

הערה 32.7 אנו מנסים למצוא מינימום לתוחלת.נדגיש כי התוחלת של המשתנה הזה היא דטרמנסטית.(כלומר $f\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}\right)$ אקראי אבל התוחלת שלו **דטרמנסטית** התוחלת היא פונ' של $\boldsymbol{x}$ בלבד (אנו מבצעים תוחלת על $\boldsymbol{a}$) וזה מספר דטרמנסיטי) .

הערה 33.7 לא ניתן לבצע אופטמזיציה על משהו שהוא אקראי,כי אין לזה משמעות.ולכן הופכים את הבעיה לדטרמנסטית כמסתכלים על התוחלת שלה.

Finte sum/FRM

- התוחלת $\mathcal{D}$ היא באופן כללי לא תמיד ידועה.(אנחנו לא תמיד יודעים את הפילוג $\mathcal{D}$,לפעמים זה דברים שקשורים לטבע/דברים שאנו פשוט לא יודעים).
- מה שכן אנו יודעים אלו דגימות $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_m\sim\mathcal{D}$ שנדגמו מתוך הפילוג $\mathcal{D}$.נדגיש כי לכל $i\in\{1,\ldots,m\}$ מתקיים ש $\boldsymbol{a}_i$ הוא ווקטור מהצורה $\boldsymbol{a}_i=\left(\begin{array}{ccccc} w_1^{(i)} & w_2^{(i)} & \ldots & w_d^{(i)} & y_i\end{array}\right)$
  - כאשר y_i הוא תיוג label (מספר סקלארי מהקבוצה $\{-1,1\}$)
  - ולכל לכל $j\in\{1,\ldots,d\}$ מתקיים ש $w_j^{(i)}$ הוא סאלקר. מסמנים ש$\left(\begin{array}{cccc} w_1^{(i)} & w_2^{(i)} & \ldots & w_d^{(i)}\end{array}\right)$ הוא ווקטור מאפיינים.(עם d מאפיינים).
  - כלומר $\boldsymbol{a}_i=\left(\overbrace{w_1^{(i)},w_2^{(i)},\ldots,w_d^{(i)}}^{\text{d features}},\quad\overbrace{y_i}^{\text{label}\in\{0,1\}}\right)$

דוגמה 34.7 $\boldsymbol{a}_i$ יכול להיות מדידה של האדם הi (מדידה של d מאפיינים בתיק רפואי שלו : מעשן/לא מעשן לחץ דם / רמת גלוקוז (סה"כ d מאפיינים) והתיות y_i הוא האם הבנדאם חולה בקוונה.אין לנו את המדגם המלא $\mathcal{D}$ של כל האנשים בעולם אבל יש לנו מספר סופי של מדידות מתוך התיוג הזה (מה שנמצא בdatabase של קופת החולים למשל).

במקרה הזה אין לנו גישה לתוחלת המלאה $\mathbb{E}_{\boldsymbol{a}\sim\mathcal{D}}$ שבבטוי מהצורה $\min_{\boldsymbol{x}}\mathbb{E}_{\boldsymbol{a}\sim\mathcal{D}}\left[f\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}\right)\right]$ כי אין לנו את הפילוג $\mathcal{D}$,אזי במקום למזער את $\mathbb{E}_{\boldsymbol{a}\sim\mathcal{D}}\left[f\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}\right)\right]$ נסתכל על הבטוי הבא

$$(P)\qquad:\min_{\boldsymbol{x}}F\left(\boldsymbol{x}\right)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}f_i\left(\boldsymbol{x}\right)$$

(מזעור התוחלת האמפירית תוחלת אמפרית).כאשר מסמנים $f_i\left(\boldsymbol{x}\right)\equiv f\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}_i\right)$.

הנחה:

לכל $i\in\{1,\ldots,m\}$ אז f_i היא פונ' קמורה ו L ־חלקה .

נשים לב:

$$\min_{\boldsymbol{x}}\mathbb{E}_{\boldsymbol{a}\sim\mathcal{D}}\left[f\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}\right)\right]\xRightarrow{\text{we don't have}\mathcal{D}\text{ so}}\min_{\boldsymbol{x}}\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}f_i\left(\boldsymbol{x}\right)=\min_{\boldsymbol{x}}\mathbb{E}_{\boldsymbol{a}_i\sim\text{Uni}}\left[f\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}_i\right)\right]$$

כי המוצע האמפרי הנ"ל $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}f_i\left(\boldsymbol{x}\right)$ ניתן לנסח באופן הבא $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}f_i\left(\boldsymbol{x}\right)=\mathbb{E}_{\boldsymbol{a}_i\sim\text{Uni}}\left[f\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}_i\right)\right]$ כלומר הממוצע האמפרי שקול (לפי הגדרת התוחלת) לתוחלת של הגרלה אקראית יוניפורמית מתוך הקבוצה$\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_m\}$.כלומר : $\forall i\in\{1,\ldots,m\}$ $\text{Uni}_A\left(A=\boldsymbol{a}_i\right)=\frac{1}{m}$.כלומר במקום להתייחס למדגם $\mathcal{D}$ אנו מבצעים הנחה שהמדגם שיש לנו $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_m\}$ הוא המדגם המלא האמיתי והקירוב ל$\mathcal{D}$שאנו מבצעים הוא ההגרלה האקראית היוניפורמית בכל פעם מתוך הקבוצה $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_m\}$.ולכן $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}f_i\left(\boldsymbol{x}\right)=\mathbb{E}_{\boldsymbol{a}_i\sim\text{Uni}}\left[f\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}_i\right)\right]$.

7.2.2 אלג' הגרדיאנט הסטוכסטי

- נרצה למזער את

$$(P) \qquad : \min_{\boldsymbol{x}} F(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} f_i(\boldsymbol{x})$$

- צעד עדכון עבור אלג' הגרדיאנט המקורי המלא בהקשר לבעיה (P): full gradeint

$$\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{x}_{t-1} - \eta_t \cdot \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \nabla f_i(\boldsymbol{x}_{t-1})$$

- צעד עדכון עבור אלג' הגרדיאנט הסטוכסטי בהקשר לבעיה (P): SGD

$$\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{x}_{t-1} - \eta_t \cdot \boldsymbol{g}_{t-1}$$

כאשר $\boldsymbol{g}_{t-1}$ הוא המשערך **הבלתי מוטה** של $\nabla F(\cdot)$ בנקודה $\boldsymbol{x}_{t-1}$ כלומר

$$\mathbb{E}\left[\boldsymbol{g}_{t-1}\right] = \nabla F(\boldsymbol{x}_{t-1})$$

כלומר $\boldsymbol{g}_{t-1}$ הוא משתנה אקראי שבתוחלת שלו משתווה ל $\nabla F(\boldsymbol{x}_{t-1})$ (כלומר ל∇F בנקודה $\boldsymbol{x}_{t-1}$).

כלומר צעד העדכון הוא

$$\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{x}_{t-1} - \eta_t \cdot \overbrace{\boldsymbol{g}_{t-1}}^{\text{unbiased gradient estimator}}$$

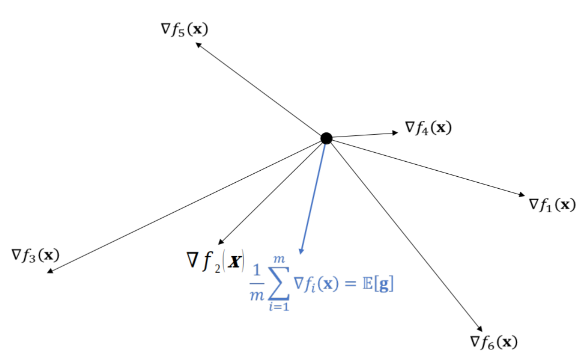
רוב המשערכים הנפוצים ל ∇F מושגים על ידי **דגימה אקראית**

$$\boldsymbol{g} = \nabla f_i(\boldsymbol{x}) \qquad , i \sim \text{uniform}(\{1, 2, \ldots, m\})$$

כלומר דוגמים באיחודות אינדקס i מתוך הקבוצה $\{1, 2, \ldots, m\}$ ומשתמשים בגרדינאט של f_i כמשערך לגדריאנט של F.נראה שמשערך זה אכן בלתי מוטה

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{g}] = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{m} \cdot \nabla f_i(\boldsymbol{x}) = \nabla\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{m} \cdot f_i(\boldsymbol{x})\right) = \nabla F(\boldsymbol{x})$$

$$\mathbf{g} = \nabla f_i(\mathbf{x}), \quad i \sim \text{Uniform}(\{1, \ldots, m\})$$



נבחין כי לא מובטח שבכל צעד אנו נתקדם בכיוון הכולל של מינוס של ∇F כמו באלג' הגרדיאנט המלא (כלומר ייתכנו סיבובים בהם נתרחק מנקודת המינימום) אבל **בתוחלת אנו נתקרב לשם.**

- בחירה נפוצה נוספת נקראת mini-batch .דוגמים באיחודת תת קבוצה I בגודל b (כאשר $b < m$) מתוך $\{1,\ldots,m\}$ וממצעים את הגרדיאנטים של $\{f_i\}_{i\in I}$ לקבלת המשערך

$$\boldsymbol{g}=\frac{1}{b}\sum_{i\in I}\nabla f_i\left(\boldsymbol{x}\right)$$

  - ניתן לוודא שגם משערך גרדיאנט זה הינו בלתי מוטה.
  - לבחור mini-batch מקטין את השונות של המשערך שלנו.לעומת בחירה של דגימה בודדת בכל סיבוב (שבעלת שונות גדולה יותר).
  - זו הגשיה הפרקטית ביותר שראינו עד כה.
  - כל גדל b הווארינס קטן כי לוקחים יותר דוגומאות ומצד שני חישוב כל גרדיאנט יהיה יקר יותר חישובית $\mathcal{O}\left(b\right)$.ולכן זה מעיין tradeoff .

אלגוריתם 5 אלג' הגרדיאנט הסטוכסטי Sochastic Gradient Desecnt (SGD) - תרגול 7

Data: Initial guess, $\mathbf{x}_0$, set of step sizes $\{\eta_t\}_{t\geq 1}$

for $t=1,2,\ldots$ **do**

  $\mathbf{g}_{t-1} \leftarrow \texttt{UnbiasedGradientEstimate}(\mathbf{x}_{t-1})$

  $\mathbf{x}_t \leftarrow \mathbf{x}_{t-1} - \eta_t \mathbf{g}_{t-1}$

end

אלג' הגרדיאנט הסטוכסטי: הנחת Realizability

לעיתים (לא תמיד ולא בכל הבעיות) ניתן להניח כי המינימום הגלובלי של $F\left(\boldsymbol{x}\right)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}f_i\left(\boldsymbol{x}\right)$ הוא גם המינימום הגלובלי של כל f_i בנפרד כלומר קיים $\boldsymbol{x}^*\in\mathbb{R}^n$ המקיים

$$\forall i\in\{1,\ldots,m\}:\nabla f_i\left(\boldsymbol{x}^*\right)=0$$

עבור ההנחה הנ"ל , קצב ההתכנסות של אלג' הגרדינאט הסטוכסטי הינו $\mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right)$.

למה 35.7 תהא $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ פונ' L חלקה ובעלת מינימום גלובלי המתקבל בנקודה $\boldsymbol{x}^*$.אזי לכל $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ מתקיים

$$\left\|\nabla f\left(\boldsymbol{x}\right)\right\|_2^2\leq 2L\left(f\left(\boldsymbol{x}\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right)$$

8 הרצאה 8 ותרגול 8

8.1 הרצאה 8

תקציר השיעור הקודם:

בשיעור הקודם דיברנו על אלג' SGD-stochastic gradeint descent וכמעט סיימנו לדבר עליו.ריאנו כי הוא מתאים לפתרון כאשר פונ' המטרה היא סכום של הרבה פונ' $f\left(\boldsymbol{x}\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f_i\left(\boldsymbol{x}\right)$.אמרנו שניתן להפעיל את אלג full gradeint (כלומר אלג'

גרדאנט המקורי) אבל זה יהיה מאוד יקר חישובית והיא תהיה פורפורציונית ל n.בבעיות פרקטיות n הוא מספר גדול (יכול להגיע לסדרי גודל של מילארדים) ולכן אלג' פופורציוני ל n הוא בזבזני מאוד חישובית ומכאן היתה המוטבציה לאלג' SGD שעוקף את האתגר החישובי הזה על ידי על ידי בחירה של פונ' אחת בכל סיבוב וחישוב רק הגרדיאנט שלה בתור צעד העדכון כלומר $\boldsymbol{x}_{t+1}=\boldsymbol{x}_t-\eta_t \boldsymbol{g}_t, \qquad \text{where} \boldsymbol{g}_t=\nabla f_i\left(\boldsymbol{x}_t\right)$ אלג' זה יותר מהיר פי n מאלג' הfull gradeint ודיברנו על תכונות התכנסות של אלג' SGD.האלג' SGD מתכנס בתוחלת (=**תוחלת השגיאה** דועכת כפונ' של מספר הצעדים שאנו מפעילים את האלג') וביצענו אנליזה של התוצאה הזו.

ראינו בנוסף:

- אלג' הSGD לא מסוגל לפתרון תת אופטמליים קטנים מאוד מאוד.(לדוגמא $\epsilon=10^{-12}$ תת אופטמלי).לכל צורך מעשי בmachine learning אנו נזדקק לפתרון תת אופטמליים סבירים יותר(מתרניים יותר) (לדוגמא $\epsilon=10^{-3}$ תת אופטמלי) ועבור מקרים אלו אלג' הSGD יכול להתכנס לפתרונות אלו בסבוכיות חישובית קטנה יותר מאלג' הגרדיאנט המלא.
- ראינו שהבטחת ההתכנסות היא על צעד לימוד דועך מהצורה $\eta=\frac{R}{B\sqrt{T}}$ (ככל שורצים להריץ את האלג' למשך T צעדים אז קצב הלימוד דועך).בניגוד לתאוריה הקלאסית שיפתחנו בהרצאה הקודמת,מה שעושים באופן מעשי עבור קביעת קצב הלימוד η באלג' SGD:

1. דבר אחד שמקובל לעשות:זה לקבוע **קצב לימוד(גדול צעד η) קבוע** ובעצם לכוונן מראש את הקצב הקבוע הזה על ידי בחינה של הביצועים של האלג' על תת קבוצה קטנה מספיק של הdataset (זה מעיין תהליך של וולידציה–כיוון של היפר פרמטר:גודל הצעד) ורק לאחר מכן לאחר שמצאנו קצב לימוד שמספק תוצאות טובות אנו משתמשים בו לבחינה של כל הdataset.
2. דבר אחר שמקובל לעשות:שימוש **בקצב לימוד אדפטיבי** לדוגמא על ידי אלגוריתם adagrad
3. יש המון טריקים פופולריות שמתשמשים בהם בפועל בלי שיש מאחורייהם תאוריה אנליטית מוצקה,לדוגמא שיטות של
   (א) **מומנטום Momentum**
   (ב) **תאוצה Acceleration**
   (ג) **מיצוע** averaginig(מושג מאוד חשוב בפתרון בעיות אופטמזציה רגילות ובבעיות אופטמזציה סטוכסטיות־חשוב עוד יותר , עוזר להפחית את הרעש של הפתרון)
4. אלגוריתמים של SGD הם מאוד פופולריים גם בפתרון של בעיות large-scale,continous,nonconvex optimization (רציפות לא קמורות ובמימדיות גבוהה) מפעילים את השיטות בשביל לפתור כאלה והם עובדות בצורה דיי טובה, אבל עדיין קיימות המון שאלות פתוחות בקשר לשימוש בשיטה הזו לבעיות כאלו(אחת השאלות החשובות לדוגמא שעודנה פתוחה היא בקשר לimplicit regularization) כלומר אנו עדיין לא מבינים מדוע השיטות האלו עובדות בפועל עבור בעיות מהסוגים הללו.זה נחשב נושא מחקר מאוד פעיל.

התחלת השיעור הנוכחי:

כעת נדבר על גרסאות נוספות לאלג' ה SGD .

נזכיר כי עדיין אנו רוצים לפתור את בעיית האופטמזציה מהצורה

$$\min_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x})=\min_{\boldsymbol{x}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i(\boldsymbol{x})$$

8.1.1 החרבה אפשרית ראשונה לאלג' ה SGD: אלגוריתם ה Mini-batch SGD

במקום להשתמש בפונ' אחת f_i (מתוך n הפונ' $\{f_i\}_{i=1}^n$) לצוך חישוב הנגזרת $\boldsymbol{g}_t$ בנקודה $\boldsymbol{x}$.בשיטות של Mini-batch SGDאנו משתמשים ב**מיצוע** על פני כמה מהן.

כלומר צעד העדכון באלג' מסוג זה הם מהצורה:

$$\tilde{\boldsymbol{g}}^t=\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \boldsymbol{g}_t^j$$

אפשר לנסח את חישוב הגרדיאנט $\tilde{\boldsymbol{g}}^t$וככלל העדכון שבמוצע על ידי Mini-batch SGD באופן הבא:

Mini-batch SGD

1. לכל איטרציה $t=0,1,2,\ldots$

(א) בחר m פונ' באקראי מתוך $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$.תהא הבחירה $\{f_t^1, f_t^2, \ldots, f_t^m\}$ המתקבלת עבור האיטרציה ה t.
(ונסמן $(\forall j \in \{1, 2, \ldots, m\} : \boldsymbol{g}_t^j = \nabla f_t^j(\boldsymbol{x})$
(ב) חשב $\tilde{\boldsymbol{g}}_t = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^m \boldsymbol{g}_t^j = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^m \nabla f_t^j(\boldsymbol{x})$
(ג) עדכן $\boldsymbol{x}_{t+1} = \boldsymbol{x}_t - \eta_t \tilde{\boldsymbol{g}}_t$

הערה 1.8 נשים לב למקרי הקיצון:

- אם $m = 1$ אזי אנו מבצעים שימוש רק בפונ' אחת f_i לצוך חישוב הגרדיאנט $\tilde{\boldsymbol{g}}_t$ ולכן עבור מקרה זה האלג' המתקבל שקול לאלג' SGD.
- אם $m = n$ אזי אנו משתמשים בכל הפונ' $\{f_i\}_{i=1}^n$ לצוך חישוב הגרדיאנט $\tilde{\boldsymbol{g}}_t$ ולכן עבור מקרה זה האלג' המתקבל שקול לאלג' full gradient. ואז היעילות החישובית של האלג' נפגעת מאוד (היא כמו full gradient כלומר היא לא יעילה ממשחישובית כי היא בסדר גודל של $\mathcal{O}(n)$ ולכן m הוא בדרך כלל הרבה יותר קטן בסדרי גודל מ n .

הערה 2.8 ייתרון של אלג' ה־ Mini-batch SGD הוא שחישוב הגרדיאנטים באופן טבעי יכול להיות מחושב **באופן מקבילי**.

הערה 3.8 בעולם האמיתי מאוד מקובל להשתמש באלג' Mini-batch SGD ולבחור m כלשהו כאשר $m > 1$.מסתבר שמתהבוננות בגרף של השגיאה כפונ' של מספר החישובים מתברר שהדבר הממולץ לעשות לקחת m שהוא טיפה יותר גדול מ1 והגדלים הפופולריים הם $m \in \{32, 64, 128\}$.

8.1.2 החרבה אפשרית שניה לאלג' ה SGD: אלגוריתם ה Stochastic subgradient Descent

$$\min_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}) = \min_{\boldsymbol{x}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f_i(\boldsymbol{x})$$

כעת יכולות להיות פונ' בקבוצה $\{f_i\}_{i=1}^n$ שאינן בהכרח גזירות .כלומר גם f אינה בהכרח פונ' גזירה.
עבור בעיות שאינן בהכרח גזירות , נציע שנוי קל באלג' הSGD כך שיישתמש בסאב־גרדיאנטים של f_i בכל איטרציה (כתחליף לגרדיאנטים שלה).
אפשר לנסח את חישוב הגרדיאנט $\tilde{\boldsymbol{g}}^t$וככל העדכון שבמוצע על ידי Stochastic subgradient Descent באופן הבא:
Stochastic subgradient Descent

1. לכל איטרציה $t = 0, 1, 2, \ldots$ (א) דגום $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ מתוך פילוג אחיד. (ב) סמן $\boldsymbol{g}_t \in \partial f_i(\boldsymbol{x}_t)$ (ג) עדכן $\boldsymbol{x}_{t+1} = \boldsymbol{x}_t - \eta_t \boldsymbol{g}_t$

במילים אחרות, אנו משתמשים **במשערך הבלתי מוטה של הסאב־גרדיאנט** בכל נקודה

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{g}_t \mid \boldsymbol{x}_t] \in \partial f(\boldsymbol{x}_t)$$

האלג' מתכנס בקצב של $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon^2}\right)$.(כדי לקבל פתרון ϵ תת אופטמלי נצטרך סדק גודל של $\frac{1}{\epsilon^2}$ סיבובים),גם כאן השיח של ההתכנסות הוא **בתחולת** השגיאה (האלג' סטוכסטי). ניתן להראות את ההוכחה ההתכנסות על ידי שימוש בתחילת ההוכחה בהגדרת הסאב כרדיאנט (הגדרת הסאב גרדיאנט:אי שוויון הסאב גרדיאנט , שדומה מאוד לאי שוויון הגרדיאנט) במקום איי שוויון הגרדיאנט שהיה בשימוש בהוכחה המקורית של ה SGD.זאת אומרת שהאלג' Stochastic subgradient Descent פועל בביצועים שווים לאלג' Stochastic gradient Descent.

8.1.3 החרבה אפשרית שלישית לאלג' ה SGD.בעייה מאולצת Constrained optimization: projected SGD

projected Stochastic gradient Descent כלומר projected SGD
נרצה לפתור בעיה מצורה

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}} f(\boldsymbol{x}) = \min_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f_i(\boldsymbol{x})$$

כלומר בבעיה הזו , $\boldsymbol{x}$ חייב להיות שייך לקבוצה $\mathcal{X}$ כלומר תחום האילוץ הוא הקבוצה $\mathcal{X}$,כאשר $\mathcal{X}$ היא קבוצה קמורה וקומפקטית (כלומר קמורה,סגורה וחסומה).

- ראינו בעבר כי גישה אחת לפתור בעיית מאולצות עם אלג' איטרטיבים היא לבצע אלג' גרדיאנט ולאחר כל צעד לבצע הטלה חזרה לתחום האילוץ $\mathcal{X}$.(=צעד הטלה בכל סיבוב) לאלג' שמבצע זאת קראנו projected gradient descent.

על מנת להשתמש ברעיון של אלגוריתם SGD עבור בעיה עם אילוצים , נוכל לבצע משהו מקביל:

1. בכל סיבוב מחשבים את הגרדיאנט לפונ' אחת שנבחרת באקראי.
2. מבצעים את עדכון הגרדיאנט לפי הכלל של SGD.
3. מבצעים הטלה של הנקודה שהתקבלה לתחום האילוץ $\mathcal{X}$.

כלומר:

projected SGD

1. לכל איטרציה $t = 0, 1, 2, \ldots$
   (א) דגום $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ מתוך פילוג אחיד.
   (ב) סמן $\boldsymbol{g}_t = \nabla f_i(\boldsymbol{x}_t)$
   (ג) עדכון $\boldsymbol{x}_{t+1} = \prod_X (\boldsymbol{x}_t - \eta_t \boldsymbol{g}_t)$

גם כאן האלג' מתכנס בקצב של $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon^2}\right)$.(כדי לקבל פתרון ϵ תת אופטמלי נצטרך סדק גודל של $\frac{1}{\epsilon^2}$ סיבובים),גם כאן השיח של ההתכנסות הוא **בתוחלת** השגיאה (האלג' סטוכסטי). זאת אומרת שהאלג' projected SGD פועל בביצועים שווים לאלג' SGD.

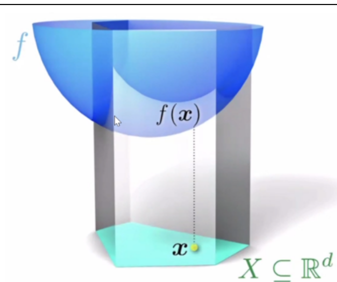
ובזאת מסתיים הדיון על SGD ועל הצורות השונות לממש אותו.

8.1.4 מוטבציה לאלגוריתם Frank Wolfe

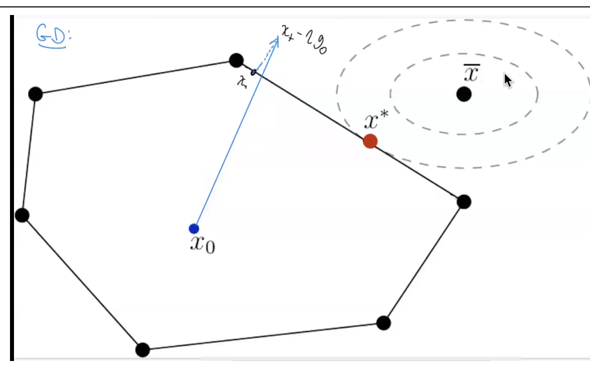
אלגוריתם שפותח בשנות החמישים אבל בשנים האחרונות צובר הרבה פופולריות.
לפני שני שיעורים דיברנו על בעיות אופטמזציה עם אילוצים:
כלומר אלו בעיות מהצורה הבאה:

$$\begin{gathered}\min f(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t } x \in X, X \subseteq \mathbb{R}^d\end{gathered}$$

כאשר X היא קבוצה קומפטית(=סגורה וחסומה) קמורה.
איור למחשה:



אחד הרעיונות שהראנו על מנת לפתור את הבעיה הזו היא להשתמש באלג' projected GD כלומר להשתמש באלג' הגרדיאנט עם ביצוע הטלה על תחום האילוץ X לאחר הליכה לכיוון הגרדיאנט לאחר כל איטרציה.
צעד עדכון לדוגמא:



כחלק מהשימוש באלג' projected GD , מה שהיינו צריכים לחשב בכל צעד זה את **ההטלה** של של $\boldsymbol{x}_t-\eta\boldsymbol{g}_t$ על התחום X.באופן כללי בעיית הטלה (=הנרודה הנקודה הקרובה ביותר בתחום X לנקודה $(\boldsymbol{x}_t-\eta\boldsymbol{g}_t)$ **היא בעיית אופטמזציה בפני עצמה.**
ראינו שישנם מקרים שחישוב ההטלה אינו מסובך ויכול להתבצע ביעילות אבל גם גילינו שישנם בעיות רבות שבהם X אינו בהכרח תחום שלבצע את חישוב ההטלה עליו הוא משימה קלה.עבור בעיות אלו הפעלת אלג' הprojected gradeint descent הוא רעיון לא מעשי (נראה דוגמאות לכך בהמשך).

- **נזכיר את בעיית ההטלה projection**

  בעיית ההטלה כאמור היא בעיית אופוטמזציה בפני עצמה.

  לדוגמא, **בעיית ההטלה של $\boldsymbol{y}$ על התחום** X נתונה על ידי $\min_{\boldsymbol{x}\in X}\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|_2^2$.כלומר בכל סביבו של projected gradeint descent עלינו לחשב את ההטלה $\min_{\boldsymbol{x}\in X}\|(\boldsymbol{x}_t-\eta\boldsymbol{g}_t)-\boldsymbol{x}\|_2^2$.מכאן נובע **שבעיית ההטלה היא בעיית אופטמזציה ריבועית.**

- **נזכרציג את בעיית הקירוב הלינארי Linear opt.problem**

  פתרון בעית אופטמזציה לינארית $\min_{\boldsymbol{x}\in X}\boldsymbol{g}^T\boldsymbol{x}$

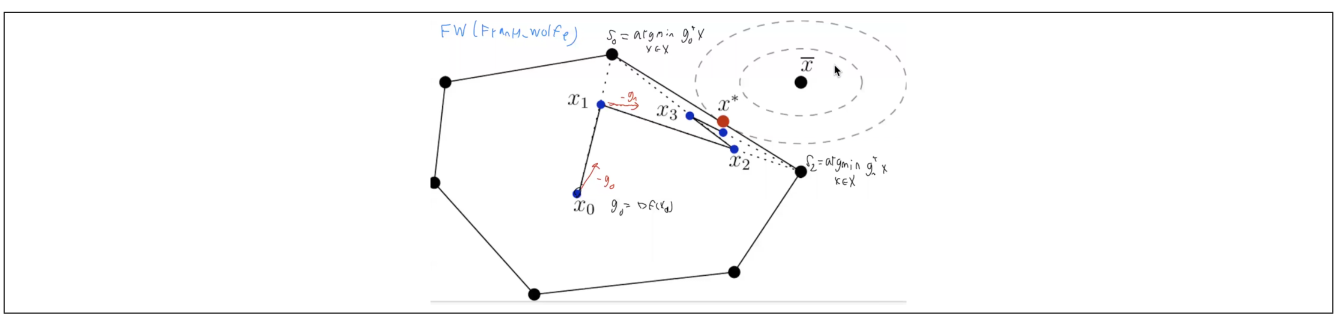
- **אלג' פרנק וולף** מכיר בעובדה שחישוב בעיית ההטלה (כאמור,בעיית אופטמזציה ריבועית) נחשבת בעייה קשה ומציע פתרון של בעייה מסוג אחר : בעזרת הקירוב הלינארי.הם שאלו את עצמם האם ניתן לפתור את הבעיה של אופטמזציה עם אילוצים על ידי שימוש בפתרונות של **בעיית הקירוב הלינארי** $\min_{\boldsymbol{x}\in X}\boldsymbol{g}^T\boldsymbol{x}$ (זול יותר חישובית) ולעשות בו שימוש על מנת לעדכן את הפתרון בכל איטרציה. במקום שימוש בפתרונות של בעיות הטלה(יקרות יותר חישובית) (כמו projected gradient descent) והם מצאו דרך לעשות זאת.

  – בכל איטרציה באל' פרנק וולף

    * נתבונן בגרדיאנט (=על מישור) של הפונ' בנקודה $\boldsymbol{x}_t$ (נקרא גם "**הקירוב הלינארי** של הפונ' בנקודה $\boldsymbol{x}_t$")
    * נמצא את הנקודה הפיזבילית (=בתחום האילוץ) על העל מישור (=הגרדיאנט) עבורה העל מישור עצמו מקבל את הערך הכי נמוך ונסמן נקודה זו $\boldsymbol{s}_t$(כלומר $\boldsymbol{s}_t$ היא פתרון של בעיית האופטמזציה $\boldsymbol{s}_t=\arg\min_{\boldsymbol{x}\in X}\boldsymbol{g}_t^T\boldsymbol{x}$).(=ניתן להראות שמכיוון שהעל מישור(=הגדריאנט) הוא מישור עם שיפוע קבוע,המינימום של הפונ' **תמיד מתקבל בקצוות התחום** X),כלומר $\boldsymbol{s}_t$ היא הנקודה שבה העל מישור מקבל את הערך הכי נמוך בתחום X (זה פתרון של בעיית אופטמזציה קמורה) .(לא נוכיח זאת).
      · $\boldsymbol{s}_t$ יהיה תמיד על הגבול/השפה של התחום שעליו אנו מבצעים אופטמזציה X.
    * נתקדם מנקודה $\boldsymbol{x}_t$ אל עבר הכיוון של $\boldsymbol{s}_t$על ידי גודל צעד מסויים.(באופן בו גודל הצעד משאיר אותנו פיזביליים,כלומר $\gamma_t=\frac{2}{t+1}$) וכך נעשה בכל איטרציה.$\boldsymbol{x}_{t+1}$ (ההתקדמות) יהיה שווה למעיין סוג של ממוצע בין הנקודה $\boldsymbol{x}_t$ לנוקדה $\boldsymbol{s}_t$, $\boldsymbol{x}_{t+1}=(1-\gamma)\,\boldsymbol{x}_t+\gamma\boldsymbol{s}_t$.

כלומר בכל איטרציה לוקחים את הנקודה שנמצאים בה ,מבצעים לינאריזציה של הפונ' (=כלומר, נתייחס רק לגרידנט של הפונ') נבדוק על איזה נקודה הגרדיאנט הכי נמוך בתחום X ונתקדם בצעד η לכיוון הזה.

  – את הפתרון של בעיית האופטמזציה $\boldsymbol{s}_t=\arg\min_{\boldsymbol{x}\in X}\boldsymbol{g}_t^T\boldsymbol{x}$ ניתן למצוא בצורה יעילה.



8.1.5 אלגוריתם Frank Wolfe/conditonal gradient

נניח שיש לנו אלג' שכבר פותר את בעיית ה**בעיית הקירוב הלינארי Linear opt.problem** באופן יעיל.אזי האלגוריתם הזה ייקרא "פותר" solver ויסומן וייקרא גם:

סימון 4.8 Linear Minimization Oracle נגדיר $\mathrm{LMO}(\boldsymbol{g})\equiv\arg\min_{\boldsymbol{s}\in X}\langle\boldsymbol{s},\boldsymbol{g}\rangle=\arg\min_{\boldsymbol{s}\in X}\boldsymbol{g}^T\boldsymbol{s}$

אלגוריתם 6 אלגוריתם פרנק וולף

1. לכל איטרציה $t = 0, 1, 2, \ldots$

(א) $\boldsymbol{s}_t = \mathrm{LMO}\left(\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)\right)$

(ב) $\boldsymbol{x}_{t+1} = \left(1-\gamma_t\right)\boldsymbol{x}_t + \gamma\boldsymbol{s}_t$

כאשר גודל הצעד $\gamma_t = \frac{2}{t+2}$.

הערה 5.8 בהרצאה נאמר שהמשקול הוא $\gamma_t = \frac{2}{t+1}$. ולדעתי אם זה המשקול אזי צעד העדכון צריך להיות $\boldsymbol{x}_{t+1} = \left(1-\gamma_{t+1}\right)\boldsymbol{x}_t + \gamma\boldsymbol{s}_t$.(אחרת γ_t עלול להיות גדול מ1 באיטרציה הראשונה)תגובת המרצה :"בוא נניח שמתחילים מאטרציה $t=1$" כלומר עבור המקרה הזה,האלג' הוא:

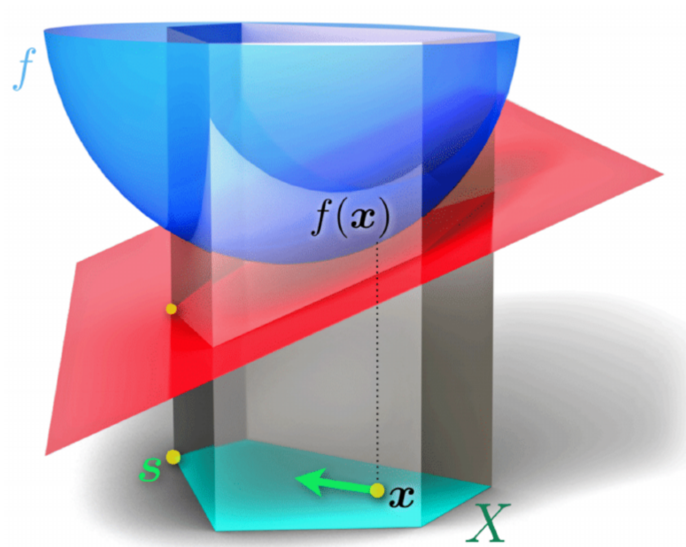
1. לכל איטרציה $t = 1, 2, \ldots$

(א) $\boldsymbol{s}_t = \mathrm{LMO}\left(\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)\right)$

(ב) $\boldsymbol{x}_{t+1} = \left(1-\gamma_t\right)\boldsymbol{x}_t + \gamma\boldsymbol{s}_t$

כאשר גודל הצעד $\gamma_t = \frac{2}{t+1}$.

איור לדוגמא:



(יש הסבר מוצלח על האיור הנ"ל בתרגול 8)

הערה 6.8 אם הפונ' המקורית היא בעצמה לינארית, אז אלג' פרנק וולף ייתכנס בצעד אחד מכיוון שהקירוב הלינארי לפונ' הוא בעצם הפונקציה עצמה.(במקרה הזה עבור גודל צעד של גודל צעד $0 < \gamma_t = \frac{2}{t+2} < 0$).

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_1 &= \left[\left(1-\gamma\right)\boldsymbol{x}_t + \gamma\boldsymbol{s}_t\right]_{t=0} \\
&= \left[\left(1-1\right)\boldsymbol{x}_t + 1\cdot\boldsymbol{s}_t\right]_{t=0} \\
&= \boldsymbol{s}_0 \\
&= \mathrm{LMO}\left(\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)\right) \\
&= \mathrm{LMO}\left(f\left(\boldsymbol{x}_t\right)\right)
\end{aligned}$$

ולכן זו ההתכנסות.

הערה 7.8 בכל צעד נישאר פיזביליים נראה זאת באינדוקציה על t:
כלומר נוכיח כי $\forall t \in \{0,1,\ldots\}$ מתקיים ש $\boldsymbol{x}_t \in X$.

- **בסיס** $\boldsymbol{x}_0 \in X$ נקודת התחלה ,חייב להיות פיזבלית כי ככה בוחרים אותה מראש.
- **הנחה** $\boldsymbol{x}_t \in X$ היא נקודה פיזבילית.
- **צעד** נוכיח כי $\boldsymbol{x}_{t+1} \in X$.

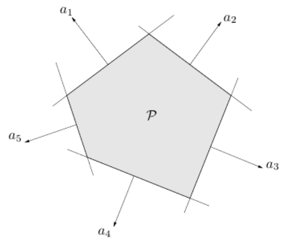
– אנו יודעים כי $\boldsymbol{x}_t \in X$ לפי הנחת האינדוקציה.
– $\boldsymbol{s}_t = \mathrm{LMO}\left(\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)\right) = \arg\min_{\boldsymbol{s}\in X}\left[\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)\right]^T \boldsymbol{s}$ כלומר $\boldsymbol{s}_t$ היא פתרון של בעיית אופטמיזיה מאולצת בתחום X ולכן $\boldsymbol{s}_t \in X$.
– X תחום קמור ולכן לכל $k \in [0,1]$ ולכל $\boldsymbol{y},\boldsymbol{z} \in X$ מתקיים $((1-k)\,\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}k) \in X$ ובפרט עבור $\boldsymbol{s}_t, \boldsymbol{x} \in X$ ועבור $\gamma_t \in [0,1]$ מתקיים ש $((1-\gamma_t)\,\boldsymbol{s_t} + \boldsymbol{x}_t\gamma_t) \in X$ אנו יודעים כי$\boldsymbol{x}_{t+1} = ((1-\gamma_t)\,\boldsymbol{s_t} + \boldsymbol{x}_t\gamma_t)$ ולכן $\boldsymbol{x}_{t+1} \in X$.

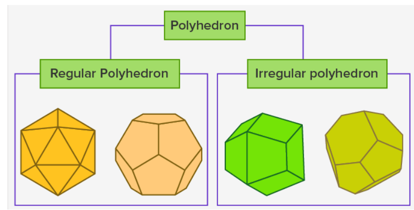
הערה 8.8 כלומר הנקודה $\boldsymbol{x}_{t+1}$ תהיה בתחום האילוץ.מכיוון שהאלג תמיד לוקח צירופים קמורים של נקודות בתחום האילוץ X.ולכן כל הנקודות באלג' יהיו בתחום.

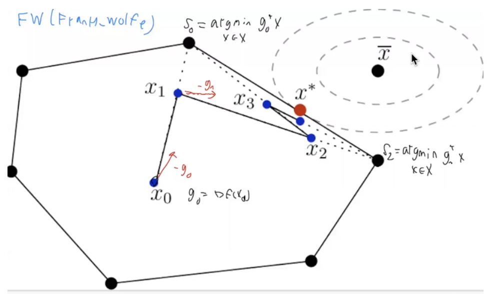
הערה 9.8 כלומר, במהשך האלג' **אין לנו שימוש בהטלות** כיוון שאופן ההתקדמות שלו משאיר אותנו כל הזמן פיזבליים כפיש הראנו למעלה.

תכונות של אלג' פרנק־וולף:

1. **האלג' מפיק נקודות פיזביליות לכל אורכו :** $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_t \in X$.(כיוון ש$\boldsymbol{x}_{t+1}$ על הקוד המחבר בין $[\boldsymbol{s}, \boldsymbol{x}_t]$ עבור $\gamma_t \in [0,1]$) כל הנקודות הם תמיד בתוך התחום.
2. **יעילות חישובית:**בכל סיבוב האלג' פותר בעיות LP במקום אלג' projected gradeint descent שפתר בעיות ריבועיות (=לא בעיות לינאריות) (בעיות הטלה).
3. **האלג' לא מחשב הטלות כלל** (בגלל 1)
4. האיטרציות של האלג' הן דלילות sparse iterates .
   (א) נזכר בתחום אילוצים לינארי, פאונים (נקרא גם "בעיות של פוליטופים") :
      i. מה זה פוליטופ (מצולע רב מימדי) ? זה אוסף של אילוצים לינארים.
      ii. תזכורת: **פאון** Polyhedron (פוליהדרון)הוא קבוצה $\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$ כאשר : $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ וכאשר בהקשר הזה הסימן $\leq$ מחושב לכל שורה בנפרד.
      כלומר פאון היא הקבוצה המוגדרת על ידי אוסף $\boldsymbol{x}$־ים המהווים פתרונות למערכת המשוואות הלנארית (מערכת אילוצים (אישוויונות) לינארית) כלשהי.שימו לב שגם הקבוצה $\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}\}$כאשר $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d} \in$







: $\mathbb{R}^n$ היא פאון.

iii. כשפותרים בעיות עם פוליטופים הפתרון תמיד יהיה אחד **מהקודקודים**.זאת אומרת ה־$\boldsymbol{s}_t$־ים תמיד יהיו **קודקודים של תחום האילוץ**.

iv. תחום אילוץ לינארי שכזה , מכיל הרבה פעמים המון קודקודים,שיכולים להיות אפילו אקספוננציאלים במימד הבעיה $\boldsymbol{n}$.

(ב) נבחין כי לכל T ניתן לבטא את $\boldsymbol{x}_T$ באופן הבא:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{x}_t=\sum_{t=1}^{T-1}\alpha_t\boldsymbol{s}_t+\alpha_0\boldsymbol{x}_0\\ \alpha_0+\sum_{t=1}^{T-1}\alpha_t=1\\ \forall t\in\{0,1,\dots,T-1\}:\alpha_t\geq 0\end{gathered}$$

כלומר $\boldsymbol{x}_t$ הוא צירוף קמור של $\boldsymbol{x}_0$ ושל כל הקודקדים שריאנו במהלך הבעיה $\{\boldsymbol{s}_t\}_{t=1}^{T-1}$.

(ג) הכוונה בsparse בהנתן בעיות שהאילוץ בו הוא לינארי (פוליטופ עם המון קודקודים) ,אפילו מספר הקודקודים יכול להיות אקספוננציאלי במימד הבעיה $\boldsymbol{n}$ (זה יכול לקרות דיי הרבה,לדוגמא בבעיות קומביטוריות).אם נריץ את האלג' למשך T איטרציות $\boldsymbol{x}_t=\sum_{t=1}^{T-1}\alpha_t\boldsymbol{s}_t+\alpha_0\boldsymbol{x}_0$ אזי הנקודה $\boldsymbol{x}_t$ תקבע רק על ידי T קודקודים,ולא מעבר לזה. (כלומר האלג' נקרא "דליל" כי לא משתמש בהמוני קודקודים שיש בתחום האילוץ אלא בכל איטרציה מתחשב לוקח בחשבון רק עוד קודקוד אחד נוסף).לרוב מספר האיטרציות T **הוא קטן יותר בסדרי גודל מכמות כל הקודקודים שבתחום האילוץ**.(לדוגמא , T בסדר גודל של אלפים או מאות , ומספר הקודקודים הוא 2^{100} או 2^{1000}) אזי נאמר **שהייצוג של** $\boldsymbol{x}_t$ **הוא דליל במספר הקודקודים**.

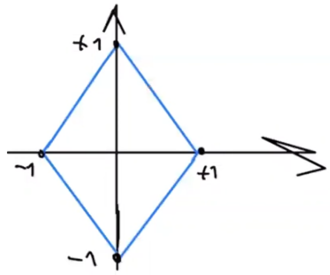
i. כלומר דליל הכוונה דליל במספר הקודקדים שמייצגים את $\boldsymbol{x}_t$ ביחס לכמות הקודקודים הכוללת בתחום האילוץ.

דוגמא: בעיית לאסו נתבונן בבעיית האופטמיזציה הבאה

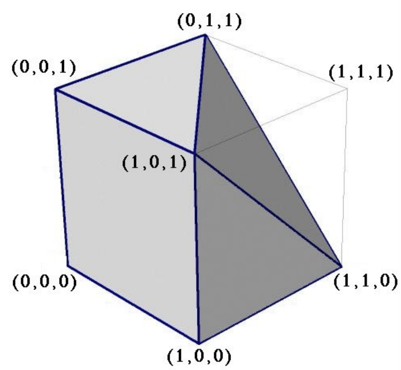
$$\begin{gathered}\min_{\boldsymbol{x}}\|A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\|_2^2\\ \text{s.t }\ \|\boldsymbol{x}\|_1\leq 1\end{gathered}$$

נבחין כי פונ' המטרה $\|A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\|_2^2$ היא פונ' ריבועית.**תזכורת:** נורמת l_1 היא מהצורה $\|\boldsymbol{x}\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$ (בכום הערכים המוחלטים של כל הרכיבים בווקטור $\boldsymbol{x}$). כלומר האילוץ הוא כדור נורמה סביב הראשית ברדיוס 1 .(אפשר גם לומר שזה Convex hull שנמתח על ידי ווקטורי היחידה כלומר $X=\{\boldsymbol{x}\mid\|\boldsymbol{x}\|_1\leq 1\}=\operatorname{conv}(\pm\boldsymbol{e}_1,\pm\boldsymbol{e}_2,\dots,\pm\boldsymbol{e}_n)$

דוגמה 10.8 כדור l_1 ברדיוס 1 בדו מימד:



דוגמה 11.8 כדור l_1 ברדיוס 2 בשלושה מימדים:



דוגמא לחיתוך חלק מתחום האילוץ של כדור l_1 ברדיוס 2. (כלומר האיור הוא חלק מהאילוץ $\|\boldsymbol{x}\|_1 \leq 1$)

אז בעצם יש לנו בעיית אופטימזציה קונבקסית $\min_{\boldsymbol{x}} \|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2^2$ עם תחום האילוץ של הפוליטופ (=פאון) הזה הפוליטופ הוא כדור נורמה סביב הראשית ברדיוס 1 כלומר $\|\boldsymbol{x}\|_1 \leq 1$: נרצה לראות כיצד נראים העדכונים של פרנק וולוף עבור האלג' הזה.

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g} = A^T (A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b})$$

$$\mathrm{LMO}(\boldsymbol{g}) = -\mathrm{sign}(\boldsymbol{g}_i)\, e_i \qquad , \text{with } i = \arg \max_{i \in \{1,2,3,\ldots,n\}} |g_i|$$

נבחין כי הפתרון של $\mathrm{LMO}(\boldsymbol{g})$ **פשוט בהרבה** מביצוע ההטלה על כדור נורמת l_1.כלומר לחישוב ה $\mathrm{LMO}(\boldsymbol{g})$ בסה"כ עוברים על הווקטור פעם אחת ומוצאים בו את הרכיב הגדול ביותר.(סבוכיות כגודל מימד הבעיה : המימד של $\boldsymbol{g}$).במקרה הזה הפתרון של ה$\mathrm{LMO}(\boldsymbol{g})$ הוא קל ולכן אילוצי l_1 זה בעיה קלאסית לפתור עם אלג' פרנק וולף.

נבחין מדוע הפתרון $\mathrm{LMO}(\boldsymbol{g}) = -\mathrm{sign}(\boldsymbol{g}_i)\, e_i \qquad , \text{with } i = \arg\max_{i \in \{1,2,3,\ldots,n\}} |g_i|$ הוא פתרון נכון של בעיית המינמזציה?

$$\text{LMO}\left(\boldsymbol{g}\right)=\min_{\|\boldsymbol{x}\|_1\leq1}\boldsymbol{g}^T\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}g_ix_i$$

בנוסף אנו יודעים כי $x\in X$ ולכן $\|\boldsymbol{x}\|_1\leq 1$ כלומר $\sum_{i=1}^{n}|x_i|\leq 1$ כלומר מכאן נובע שאפשר לחשוב על כל הx־ים כמעיין משקלים שהסכום שלהם בערך מוחלט מניב מספר שהוא לכל היותר 1.אז מה שיביא למינימום את הבעיה יהיה למצוא את הg_i שבערכו המוחלט הוא הגדול ביותר ולתת לו את כל המשקל (משקל אחד) תוך סימן מתאים.(סימן שייהפוך את המכפלה לשלילית). ולכן התוצאה של בעיית האופטמזציה היא:

$$\text{LMO}\left(\boldsymbol{g}\right)=-\text{sign}\left(\boldsymbol{g}_i\right)e_i\qquad,\text{with } i=\arg\max_{i\in\{1,2,3,\ldots,n\}}|g_i|$$

דוגמא (1) **שתמחיש מדוע הפתרון נכון:**

$$\min_{\text{s.t:}|x_1|+|x_2|\leq1}2x_1-3x_2$$

נרצה לחשוב איך אנחנו מחלקים את ווקטור המשקלים שלנו $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ כך שפונ' המטרה $(2x_1-3x_2)$ תהיה הקטנה ביותר תוך שהנקודה שנבחר תשאר פיזבלית $|x_1|+|x_2|\leq 1$. ניתן להשתכנע שהפתרון באופטמלי במקרה הזה הוא

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

דוגמא (2) **שתמחיש מדוע הפתרון נכון:**

$$\min_{\text{s.t:}|x_1|+|x_2|\leq1}2x_1-x_2$$

במקרה הזה הפתרון באופטמלי במקרה הזה הוא

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$$

במקה הכללי:

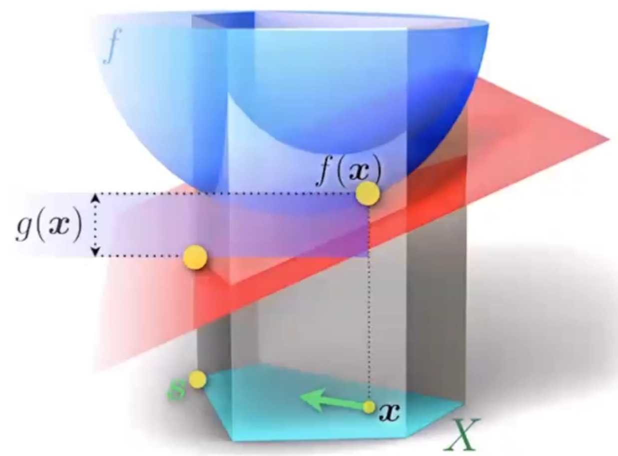
$$\text{LMO}\left(\boldsymbol{g}\right)=-\text{sign}\left(\boldsymbol{g}_i\right)e_i\qquad,\text{with } i=\arg\max_{i\in\{1,2,3,\ldots,n\}}|g_i|$$

כאשר e_i הוא ווקטור היחידה בכיוון i.

מושג ה Duality Gap נניח שיש לנו פונ' לינארית , לדוגמא פונ' לינארית שנראת ככה $\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)^T\boldsymbol{x}$ (=הקירוב הלינארי לפונ' f סביב הנקודה $\boldsymbol{x}_t$) נזכיר שבפרנק וולף , $\boldsymbol{s}_t$ הוא הממזער של הפונ' הלינארית הזו בתחום האילוץ כלומר $\boldsymbol{s}_t=\arg\min_{\boldsymbol{x}\in X}\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)^T\boldsymbol{x}$.**אזי** הגודל שנקרא Duality Gap מוגדר באופן הבא

$$\begin{aligned}g\left(\boldsymbol{x}\right)&\triangleq\left\langle\boldsymbol{x}-\boldsymbol{s},\nabla f\left(\boldsymbol{x}\right)\right\rangle\\&=\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{s}\right)^T\nabla f\left(\boldsymbol{x}\right)\\&=\boldsymbol{x}^T\nabla f\left(\boldsymbol{x}\right)-\boldsymbol{s}^T\nabla f\left(\boldsymbol{x}\right)\\&=\nabla f\left(\boldsymbol{x}\right)^T\boldsymbol{x}-\nabla f\left(\boldsymbol{x}\right)^T\boldsymbol{s}\end{aligned}$$

המשמעות של הגודל הזה הוא **תת אופטמליות** של הנקודה $\boldsymbol{x}$ עברו הקירוב הלינארי שסיביב $\boldsymbol{x}$. כלומר המשמעות של הגודל הזה הוא כמה ערך הקירוב הלינארי בנקודה $\boldsymbol{x}$ שנתון על ידי $\boldsymbol{x}^T\nabla f\left(\boldsymbol{x}\right)$ רחוק מערך עבורו הקירוב הלינארי מקבל את המינימום $\boldsymbol{s}^T\nabla f\left(\boldsymbol{x}\right)$.
כלומר , כמה $\boldsymbol{x}$ הוא פתרון תת אופטמלי של הקירוב הלינארי $\boldsymbol{x}^T\nabla f\left(\boldsymbol{x}\right)$.
איור לדוגמא:



אפשר להראות את עם הגודל Duality Gap את הדבר הבא:

- אם Duality Gap הוא קטן (כלומר עם $g\left(\boldsymbol{x}\right)\triangleq\left\langle \boldsymbol{x}-\boldsymbol{s},\nabla f\left(\boldsymbol{x}\right)\right\rangle$ הוא קטן) אז גם הסאב אופטמליות של $\boldsymbol{x}$ יחסית **לפונקציית המטרה המקורית** f היא קטנה יותר.

- **נראה זאת בנוסחא,**

נזכר כי:

1. נזכור כי נקודת המינימום של f מסומנת $\boldsymbol{x}^*=\arg\min_{x\in X}f\left(\boldsymbol{x}\right)$
2. נזכיר כי $\boldsymbol{s}_t=\arg\min_{\boldsymbol{s}\in X}\left[\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)\right]^T\boldsymbol{s}$: ✢ ולכן

$$\star:\left(-\boldsymbol{s}_t\right)=\arg\max_{\boldsymbol{s}\in X}\left[\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)\right]^T\boldsymbol{s}$$

ולכן.

$$\star\star:\max\nolimits_{\boldsymbol{s}\in X}\left(\left[\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)\right]^T\boldsymbol{x}_t-\left[\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)\right]^T\boldsymbol{s}\right)\Rightarrow$$
$$\left[\left[\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)\right]^T\boldsymbol{x}_t-\left[\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)\right]^T\boldsymbol{s}\right]_{\boldsymbol{s}=\boldsymbol{x}^*}\le\max\nolimits_{\boldsymbol{s}\in X}\left(\left[\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)\right]^T\boldsymbol{x}_t-\left[\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)\right]^T\boldsymbol{s}\right)$$

3. נזכיר כי $\star\star\star:\left\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\right\rangle=\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{a}$.
4. נזכר באי שוויון הגרדיאנט f: היא פונקציה קמורה $\iff$ $\mathrm{dom}\left(f\right)$ היא תחום קמור **ובנוסף** : $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathrm{dom}\left(f\right)$ אזי $f\left(\boldsymbol{y}\right)\ge f\left(\boldsymbol{x}\right)+\nabla f\left(\boldsymbol{x}\right)^T\left(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\right)$

$$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathrm{dom}\left(f\right):f\left(\boldsymbol{y}\right)-f\left(\boldsymbol{x}\right)\ge+\nabla f\left(\boldsymbol{x}\right)^T\left(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\right)$$

בפרט עבור $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_t,\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}^*$ מתקיים:

$$f\left(\boldsymbol{x}^*\right)-f\left(\boldsymbol{x}_t\right)\ge+\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)^T\left(\boldsymbol{x}^*-\boldsymbol{x}_t\right)$$

נכפיל במינוס 1 בשני האגפים ונקבל

$$\star\star\star\star:\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathrm{dom}\left(f\right):f\left(\boldsymbol{x}_t\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\le\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)^T\left(\boldsymbol{x}_t-\boldsymbol{x}^*\right)$$

ונראה זאת:

$$
\begin{aligned}
g\left(\boldsymbol{x}_t\right) &= \left\langle \boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{s}_t, \nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)\right\rangle \\
&\overbrace{=}^{\star\star\star} \nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)^T\left(\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{s}_t\right) \\
&= \nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)^T \boldsymbol{x}_t - \nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)^T \boldsymbol{s}_t \\
&\overbrace{=}^{\maltese} \nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)^T \boldsymbol{x}_t - \min_{\boldsymbol{s}\in X}\left(\left[\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)\right]^T \boldsymbol{s}\right) \\
&\overbrace{=}^{\star} \max_{\boldsymbol{s}\in X}\left(\left[\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)\right]^T \boldsymbol{x}_t - \left[\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)\right]^T \boldsymbol{s}\right) \\
&\overbrace{\geq}^{\star\star} \left[\left[\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)\right]^T \boldsymbol{x}_t - \left[\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)\right]^T \boldsymbol{s}\right]_{\boldsymbol{s}=\boldsymbol{x}^*} \\
&= \left[\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)\right]^T \boldsymbol{x}_t - \left[\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)\right]^T \boldsymbol{x}^* \\
&= \left[\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)\right]^T\left(\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}^*\right) \\
&\overbrace{\geq}^{\star\star\star\star} f\left(\boldsymbol{x}_t\right) - f\left(\boldsymbol{x}^*\right)
\end{aligned}
$$

כלומר

$$\boxed{g\left(\boldsymbol{x}_t\right) \geq f\left(\boldsymbol{x}_t\right) - f\left(\boldsymbol{x}^*\right)}$$

כלומר הDuality Gap מהווה חסם עליון על השגיאה באיטרציה הt.ככל ש Duality Gap קטן יותר ככה גם הסאב אופטמליות של $\boldsymbol{x}$ יחסית **לפונקציית המטרה המקורית** f היא קטנה יותר.

כלומר,הסאב אופטמליות של הנקודה $\boldsymbol{x}_t$ ביחס לפונ' המקורית f, קטנה או שווה מהDuality Gap בנקודה $\boldsymbol{x}_t$.(כלומר,מהאסב אופטמליות שלה בהתחשב בקירוב הלינארי של הפונ' סביב הנקודה $\boldsymbol{x}_t$)

- פיתחנו את המסקנה הזו על ידי הגדרת קמירות (על ידי אי שוויון הגרדינט) ועל ידי הגדרת ה Duality Gap.
- העובדה הזו תשמש אותנו בהוכחה של פרנק וולף.
- נבחין כי $f\left(\boldsymbol{x}_t\right) - f\left(\boldsymbol{x}^*\right)$ אינו גודל שניתן לחישוב כי איננו יודעים את $\boldsymbol{x}^*$ אבל הגדול $g\left(\boldsymbol{x}_t\right)$ הוא גודל שניתן לחישוב כי כל הפרמטרים שלו ידועים (חישוב הגרדיאנט, $\boldsymbol{s}_t$(על ידי הsolver) ו $\boldsymbol{x}_t$ שגם הוא ידוע ,את כל אלה אנו יודעים לחשב) .כלומר אנו לא יודעים את השגיאה עצמה אבל אנו כן מסוגלים לחשב חסם עליון עליה.ולכן את $g\left(\boldsymbol{x}_t\right)$ (שהוא גם החסם העליון על השגיאה באיטרציה הt) אפשר לחשב בכל סיבוב.

קביעת גודל הצעד γ_t קיימות כל מני דרכים:

$\gamma_t = \frac{2}{t+1}$	גודל צעד דועך	
$\gamma_t = \arg\min_{\gamma\in[0,1]} f\left(\left(1-\gamma\right)\boldsymbol{x}_t + \gamma\boldsymbol{s}_t\right)$	יש קו ישר בין $\boldsymbol{x}_t$ אל $\boldsymbol{s}$.נמצא γ שיימזער את הפונ' לאורך הקו הישר.	Line search
$\gamma_t = \min\left\{\frac{g(\boldsymbol{x}_t)}{L\|\boldsymbol{s}_t - \boldsymbol{x}_t\|^2}, 1\right\}$	L - חלקות הפונ'.$g\left(\boldsymbol{x}_t\right)$ הDuality Gap בנקודה $\boldsymbol{x}_t$	Gap-based לא נפרט על זה

אלו שלושת גדלי הצעד הפופולריים.לכולם יש את אותו קצב התכנסות.
בהרצאה זו ננתח את גודל הצעד $\gamma_t = \frac{2}{t+1}$.

הערה 12.8 אלגוריתם frank-wolfe לא מתכנס לפונ' שאינן חלקות! (לעומת זאת,gradient descent מתכנס לפונ' שאינן חלקות על ידי אלג' sub-gradient descent (אומנם בקצב איטי יותר,אבל לא חלק)) .כלומר על אלג' **frank-wolfe כמעט ולא מבטיח כלום במקרה ש f אינה חלקה.$\Leftarrow$ אלג' frank-wolfe עובד רק לפונ' שהן גם קמורות וגם חלקות.**

קצב התכנסות לאלגוריתם פרנק וולף

משפט 13.8 משפט התכנסות לאלג' frank-wolfe (נסמן FW)
תהא $f(\cdot)$ פונ' **קמורה ו L - חלקה**.ויהא X תחום האילוץ שהוא קמור וקומפקטי (=סגור וחסום).
אזי הפעלת אלג' FW עם גודל צעד $\gamma_t=\frac{2}{t+1}$ מבטיחה $\forall T\geq 2$ כי:

$$f\left(\boldsymbol{x}_T\right)-\min_{\boldsymbol{x}\in X}f\left(\boldsymbol{x}\right)\leq\frac{2LR^2}{T+1}\qquad,R=\max_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in X}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$$

הערה 14.8 כאמור,האיטרציה הראשונה של האלג' היא ב$t=1$.כלומר נקודת האיתחול היא $\boldsymbol{x}_1$.

הערה 15.8 נבחין כי $R=\max_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in X}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$ הוא המרחק הכי גדול בין כל שתי נקודות בתחום .

הערה 16.8 במונחי אפסילון , $\frac{2LR^2}{T+1}\leq\epsilon$

$$\Rightarrow\frac{2LR^2}{T+1}\leq\epsilon\Rightarrow\frac{2LR^2}{\epsilon}\leq T+1\Rightarrow\boxed{\frac{2LR^2}{\epsilon}-1\leq T}$$

כלומר בשביל להגיע לפתרון שהוא ϵ תת אופטמלי : נזקק לסדר גודל של $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$ איטרציות .**וזה קצב ההתכנסות של אלג' פרנק וולף**

הוכחת קצב ההתכנסות של אלג' פרנק וולף: ההוכחה של האלג לא כל כך מסובכת.
הכנות להוכחה:

- אנו יודעים כי כלל העדכון נראה כך : $\boldsymbol{x}_{t+1}=\left(1-\gamma_t\right)\boldsymbol{x}_t+\gamma_t\boldsymbol{s}_t$. נסדר אותו מחדש ונקבל

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_{t+1}&=\left(1-\gamma_t\right)\boldsymbol{x}_t+\gamma_t\boldsymbol{s}_t\\&=\boldsymbol{x}_t-\gamma_t\boldsymbol{x}_t+\gamma_t\boldsymbol{s}_t\\&=\boldsymbol{x}_t+\gamma_t\boldsymbol{s}_t-\gamma_t\boldsymbol{x}_t\\&=\boldsymbol{x}_t+\gamma_t\left(\boldsymbol{s}_t-\boldsymbol{x}_t\right)\end{aligned}$$

כלומר

$$\star:\boldsymbol{x}_{t+1}=\boldsymbol{x}_t+\gamma_t\left(\boldsymbol{s}_t-\boldsymbol{x}_t\right)$$

- נזכר בהגדרת החלקות:

הגדרה שניה: פונ' $f:\mathbb{R}^d\longrightarrow\mathbb{R}$ תקרא **פונ'** L**-חלקה** L smooth (עבור פרמטר $L\geq 0$) אם היא **קמורה,גזירה** ובנוסף $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^d:f\left(\boldsymbol{y}\right)\leq f\left(\boldsymbol{x}\right)+\nabla f\left(\boldsymbol{x}\right)^T\left(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\right)+\frac{L}{2}\cdot\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2$.

בפרט עבור $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}_{t+1},\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_t$ מתקיים

$$\begin{aligned}\star\star:f\left(\boldsymbol{x}_{t+1}\right)&\leq f\left(\boldsymbol{x}_t\right)+\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)^T\left(\boldsymbol{x}_{t+1}-\boldsymbol{x}_t\right)+\frac{L}{2}\cdot\|\boldsymbol{x}_t-\boldsymbol{x}_{t+1}\|^2\\&=f\left(\boldsymbol{x}_t\right)+\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)^T\left(\boldsymbol{x}_{t+1}-\boldsymbol{x}_t\right)+\frac{L}{2}\cdot\|\boldsymbol{x}_{t+1}-\boldsymbol{x}_t\|^2\end{aligned}$$

- $R=\max_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in X}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_2$ ולכן בפרט עבור $\boldsymbol{s}_t,\boldsymbol{x}_t\in X$ מתקיים $\star\star\star:\|(\boldsymbol{s}_t-\boldsymbol{x}_t)\|_2^2\leq\max_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in X}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_2^2=R^2$.
- נזכיר כי $\maltese:\boldsymbol{s}_t=\arg\min_{\boldsymbol{s}\in X}\left[\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)\right]^T\boldsymbol{s}$ ולכן

$$\forall\boldsymbol{x}\in X:\left[\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)\right]^T\boldsymbol{s}_t\leq\left[\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)\right]^T\boldsymbol{x}$$

ובפרט עבור $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*\in X$ מתקיים

$$\star\star\star\star:\forall\boldsymbol{x}\in X:\left[\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)\right]^T\boldsymbol{s}_t\leq\left[\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)\right]^T\boldsymbol{x}^*$$

- נזכר באי שוויון הגרדיאנט

$$\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\operatorname{dom}(f): f(\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x})\geq+\nabla f(\boldsymbol{x})^{T}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})$$

בפרט עבור $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_t,\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}^*$ מתקיים:

$$\boxed{\star}: f(\boldsymbol{x}^*)-f(\boldsymbol{x}_t)\geq\nabla f(\boldsymbol{x}_t)^{T}(\boldsymbol{x}^*-\boldsymbol{x}_t)$$

והרי להוכחה:

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}_{t+1}) &\overbrace{\leq}^{\star\star} f(\boldsymbol{x}_t)+\nabla f(\boldsymbol{x}_t)^{T}(\boldsymbol{x}_{t+1}-\boldsymbol{x}_t)+\frac{L}{2}\cdot\|\boldsymbol{x}_{t+1}-\boldsymbol{x}_t\|^2\\
&\overbrace{=}^{\star} f(\boldsymbol{x}_t)+\nabla f(\boldsymbol{x}_t)^{T}((\boldsymbol{x}_t+\gamma_t(\boldsymbol{s}_t-\boldsymbol{x}_t))-\boldsymbol{x}_t)+\frac{L}{2}\cdot\|(\boldsymbol{x}_t+\gamma_t(\boldsymbol{s}_t-\boldsymbol{x}_t))-\boldsymbol{x}_t\|^2\\
&= f(\boldsymbol{x}_t)+\nabla f(\boldsymbol{x}_t)^{T}(\gamma_t(\boldsymbol{s}_t-\boldsymbol{x}_t))+\frac{L}{2}\cdot\|\gamma_t(\boldsymbol{s}_t-\boldsymbol{x}_t)\|^2\\
&= f(\boldsymbol{x}_t)+\gamma_t\nabla f(\boldsymbol{x}_t)^{T}(\boldsymbol{s}_t-\boldsymbol{x}_t)+\frac{L}{2}\cdot|\gamma_t|^2\,\|(\boldsymbol{s}_t-\boldsymbol{x}_t)\|^2\\
&\overbrace{=}^{\gamma_t\geq 0} f(\boldsymbol{x}_t)+\gamma_t\nabla f(\boldsymbol{x}_t)^{T}(\boldsymbol{s}_t-\boldsymbol{x}_t)+\frac{L}{2}\cdot\gamma_t^2\,\|(\boldsymbol{s}_t-\boldsymbol{x}_t)\|^2\\
&= f(\boldsymbol{x}_t)+\gamma_t\nabla f(\boldsymbol{x}_t)^{T}(\boldsymbol{s}_t-\boldsymbol{x}_t)+\frac{L}{2}\cdot\gamma_t^2\,\|(\boldsymbol{s}_t-\boldsymbol{x}_t)\|^2\\
&\overbrace{\leq}^{\star\star\star} f(\boldsymbol{x}_t)+\gamma_t\nabla f(\boldsymbol{x}_t)^{T}(\boldsymbol{s}_t-\boldsymbol{x}_t)+\frac{L}{2}\cdot\gamma_t^2R^2\\
&\overbrace{\leq}^{\star\star\star\star} f(\boldsymbol{x}_t)+\gamma_t\nabla f(\boldsymbol{x}_t)^{T}(\boldsymbol{x}^*-\boldsymbol{x}_t)+\frac{L}{2}\cdot\gamma_t^2R^2\\
&\overbrace{\leq}^{\boxed{\star}} f(\boldsymbol{x}_t)+\gamma_t[f(\boldsymbol{x}^*)-f(\boldsymbol{x}_t)]+\frac{L}{2}\cdot\gamma_t^2R^2\\
&= f(\boldsymbol{x}_t)+\gamma_t f(\boldsymbol{x}^*)-\gamma_t f(\boldsymbol{x}_t)+\frac{L}{2}\cdot\gamma_t^2R^2\\
&= f(\boldsymbol{x}_t)+\gamma_t f(\boldsymbol{x}^*)-\gamma_t f(\boldsymbol{x}_t)+\frac{L}{2}\cdot\gamma_t^2R^2+f(\boldsymbol{x}^*)-f(\boldsymbol{x}^*)\\
&= f(\boldsymbol{x}_t)-\gamma_t f(\boldsymbol{x}_t)+\gamma_t f(\boldsymbol{x}^*)-f(\boldsymbol{x}^*)+\frac{L}{2}\cdot\gamma_t^2R^2+f(\boldsymbol{x}^*)\\
&= (1-\gamma_t)f(\boldsymbol{x}_t)+(\gamma_t-1)f(\boldsymbol{x}^*)+\frac{L}{2}\cdot\gamma_t^2R^2+f(\boldsymbol{x}^*)\\
&= (1-\gamma_t)f(\boldsymbol{x}_t)-(1-\gamma_t)f(\boldsymbol{x}^*)+\frac{L}{2}\cdot\gamma_t^2R^2+f(\boldsymbol{x}^*)\\
&= (1-\gamma_t)(f(\boldsymbol{x}_t)-f(\boldsymbol{x}^*))+\frac{L}{2}\cdot\gamma_t^2R^2+f(\boldsymbol{x}^*)
\end{aligned}$$

קיבלנו

$$f(\boldsymbol{x}_{t+1})\leq(1-\gamma_t)(f(\boldsymbol{x}_t)-f(\boldsymbol{x}^*))+\frac{L}{2}\cdot\gamma_t^2R^2+f(\boldsymbol{x}^*)$$

נחסיר $f(\boldsymbol{x}^*)$ משני הצדדים ונקבל

$$f(\boldsymbol{x}_{t+1})-f(\boldsymbol{x}^*)\leq(1-\gamma_t)(f(\boldsymbol{x}_t)-f(\boldsymbol{x}^*))+\frac{L}{2}\cdot\gamma_t^2R^2$$

נסמן $h_t = \left(f\left(\boldsymbol{x}_t\right) - f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right)$ כלומר h_t הוא השגיאה בזמן t,נקבל

$$\star : h_{t+1} \leq \left(1-\gamma_t\right) h_t + \frac{L}{2}\cdot\gamma_t^2 R^2$$

נזכיר כי

$$\star\star : \gamma_t = \frac{2}{t+1}$$

נוכיח כי $h_T \leq \frac{2LR^2}{T+1}$ **באידוקציה על** t **, לכל** $T \geq 2$**:**

- **בסיס:** נוכיח את נכונות הטענה עבור $T=2$:

$$\begin{aligned}
h_2 &\overbrace{\leq}^{\star} \left(1-\gamma_1\right) h_1 + \frac{L}{2}\cdot\gamma_1^2 R^2 \\
&\overbrace{=}^{\star\star} \cancelto{0}{\left(1-\frac{2}{1+1}\right)} h_1 + \frac{L}{2}\cdot\left(\frac{2}{1+1}\right)^2 R^2 \\
&= \frac{L}{2}\cdot(1)^2 R^2 \\
&= \frac{LR^2}{2} \\
&= \frac{2LR^2}{4} \\
&\overbrace{\leq}^{\left(2LR^2\right)>1} \frac{2LR^2}{3} \\
&= \frac{2LR^2}{2+1}
\end{aligned}$$

- **הנחה:** נניח את נכונות הטענה עבור $T \geq 2$ כלשהו.כלומר נניח כי $h_T \leq \frac{2LR^2}{T+1}$נסמן את בנחת האינדקוציה ✡.
- **צעד:** נוכיח את נכונות העטנה עבור $T+1$:כלומר צ"ל כי

$$h_{(T+1)} \leq \frac{2LR^2}{(T+1)+1}$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}
h_{(T+1)} &\overbrace{\leq}^{\star} \left(1-\gamma_T\right) h_T + \frac{L}{2}\cdot\gamma_T^2 R^2 \\
&\overbrace{=}^{\star\star} \left(1-\frac{2}{T+1}\right) h_T + \frac{L}{2}\cdot\left(\frac{2}{T+1}\right)^2 R^2 \\
&\overbrace{\leq}^{\text{✡}} \left(1-\frac{2}{T+1}\right)\cdot\frac{2LR^2}{T+1} + \frac{L}{2}\cdot\left(\frac{2}{T+1}\right)^2 R^2 \\
&= \left(\frac{T+1}{T+1}-\frac{2}{T+1}\right)\cdot\frac{2LR^2}{T+1} + \frac{LR^2}{2}\cdot\left(\frac{2^2}{(T+1)^2}\right) \\
&= \left(\frac{T-1}{T+1}\right)\cdot\frac{2LR^2}{T+1} + \frac{2LR^2}{(T+1)}\cdot\left(\frac{1}{(T+1)}\right) \\
&= \left[\left(\frac{T-1}{T+1}\right)+\left(\frac{1}{(T+1)}\right)\right]\cdot\frac{2LR^2}{T+1} \\
&= \left[\overbrace{\left(\frac{T}{T+1}\right)}^{\leq 1}\right]\cdot\frac{2LR^2}{T+1} \\
&\leq 1\cdot\frac{2LR^2}{T+1} \\
& \underbrace{\overbrace{\leq}^{}}_{\substack{T+1\leq (T+1)+1 \\ \frac{1}{T+1}\leq\frac{1}{(T+1)+1}}} \frac{2LR^2}{(T+1)+1}
\end{aligned}$$

כלומר הוכחנו $h_{(T+1)} \leq \frac{2LR^2}{(T+1)+1}$.

ולכן הוכחנו באינדוקציה כי $h_T \leq \frac{2LR^2}{T+1}$ לכל $T \geq 2$.
נזכיר כי $h_t = \left(f\left(\boldsymbol{x}_t\right) - f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right)$ ובנוסף $f\left(\boldsymbol{x}^*\right) = \min_{\boldsymbol{x}\in X} f\left(\boldsymbol{x}\right)$
ומכאן ייבנע כי הפעלת אלג' FW עם גודל צעד $\gamma_t = \frac{2}{t+1}$ מבטיחה $\forall T \geq 2$ כי:

$$f\left(\boldsymbol{x}_T\right) - \min_{\boldsymbol{x}\in X} f\left(\boldsymbol{x}\right) \leq \frac{2LR^2}{T+1} \qquad , R = \max_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in X}\left\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right\|$$

וזה מוכיח את אלג' פרנק וולף

■

הרחבות ושימושים של אלג' פרנק וולף: נזכור כי LMO ≡ Linear Minimization Oracle הוא למעשה הsolver שאנו משתמשים בו בכל איטרציה לפתרון הבעיה הלינארית בכל איטרציה.
הרחבות:

1. Approximate LMO(off additive multiplicative accuracy)(עבור המקרה שאין solver מדוייק שפותר את הבעיות הלינאריות בכל איטרציה (מציאת s_t) אלא פותר אותם בקירוב)
2. Randomized LMO
3. הרחבה לבעיה הלא מאולצת unconstrained problems(Matching Pursuit variants) (משפחה של אלגוריתמים שנקראים Matching Pursuit)

הערה 17.8 נראה בתרוגל שההרחבה הטבעית של אלג' פרנק וולף למקרה הסטוכסטי היא גרועה מאוד ולא עובדת.ויש דרכים טובות יותר לעשות את זה.

מקרים שמושיים

באופן כללי משתמשים באלג' במקרים בהם ההטלה מסובכת יותר חישובית לפתרון מאשר בעיות לינאריות.
האלג' צבר הרבה פופולריות ומשתמשים בו רבות בפתרון של בעיות מהסוגים הבאים:

1. **בעיות lasso** ובעיות L_1 מאולצות אחרות
2. scalabe algorithems:Matrix Completion (בעיות שבהם הפתרון שלנו הוא למעשה מטריצה.בבעיות כאלה הרבה פעמים ההטלה היא מאוד יקרה (עלות חישובית של חישוב הטלה לפי המימד **בשלישית**,כאשר המימד מאוד גדול שימוש באלג' הגרדיאנט המוטל זו אופציה שאינה מעשית).מסתבר שאלג' פרנק וולף הוא מאוד מתאים לפתרון בעיות מהסוגים האלו והוא הרבה יותר זול חישובית.
3. Relaxation of Combintorial problems (לדוגמא , בעיות שידוך/רשתות/זרימה matching,network,flows וכדומה). לא נרחיב את השיח עליו בקורס.

8.1.6 האצה acceleration ומומנטום momentum

כעת נחזור לאלגוריתמים של GD.
אנו ראינו שעבור בעיות אופטמזיציה קמורות ו L-חלקות ראינו שאלגוריתם הGD משיג קצב של $\mathcal{O}\left(\frac{1}{T}\right)$ (בשפת אפסילון $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$) כאשר T הוא מספר האיטרציות.ואז נשאלנו האם זה הקצב הטוב ביותר שאפשר להשיג ומסתבר שהתשובה היא לא (אפשר להראות שניתן להשיג קצב טוב יותר, של $\mathcal{O}\left(\frac{1}{T^2}\right)$ (בשפת אפסילון $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\right)$).בשנות בשמונים היה איש אופטמזיציה מפורסם בשם נסטרוב שהראה שאלגוריתם שהוא **לא הGD** שמקבל את הקצב המוצלח יותר של $\mathcal{O}\left(\frac{1}{T^2}\right)$ (והוכיח בנוסף שזה (כלומר , $\mathcal{O}\left(\frac{1}{T^2}\right)$) הוא הקצב האופטמלי לכלל השיטות מסדר ראשון(שיטות מסדר ראשון=(שיטות שמבצעות עדכונים לפי הפונ' והגרדיאנטים שלה))) .בשביל להגיע לאלג' נסטרוב השתמש במושג של **מומנטום** נדבר על הרעיון הזה בהרחבה נציג מדוע הוא מאוד פופלרי וכמו כן נציג את ה החסרונות שלו.

סיכום ביניים טבלה שמסכמת את התוצאות עבור ביצועי GD עבור תכונות של f ובחירת גדלי צעד שונים:

property of f	Learning Rate η	Number of steps
f is convex $\left\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}^*\right\| \leq R$ $\forall \boldsymbol{x}:\left\|\nabla f(\boldsymbol{x})\right\| \leq B$	$\frac{R}{B\sqrt{T}}$	$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon^2}\right)$
f is convex and f is L smooth	$\frac{1}{L}$	$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$
f is convex and f is L smooth and f is μ strongly convex	$\frac{1}{L}$	$\mathcal{O}\left(\log\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right)$

אם הפונ' f היא גם קמורה וגם חלקה ניתן להגיע לקצבים טובים עוד יותר.

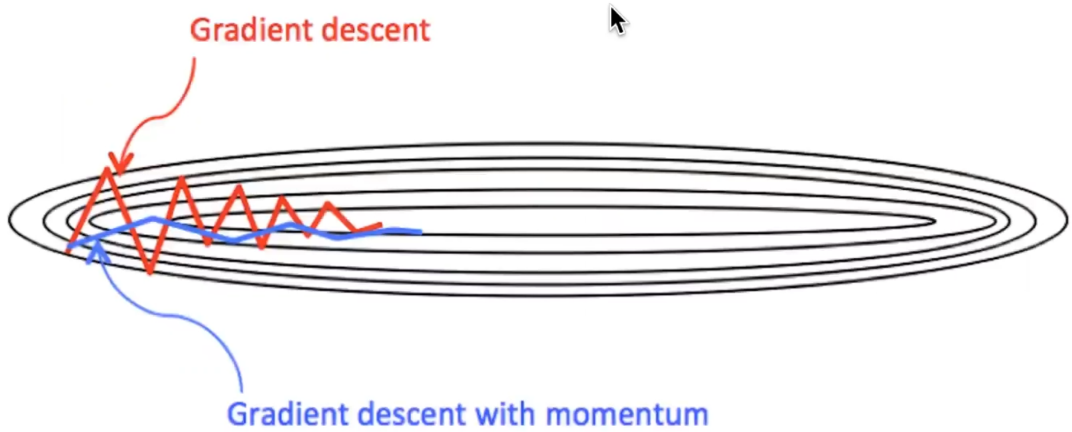
מומנטום נציע תוספת לכלל העדכון שנקראת **מומנטום**:

$$\boldsymbol{x}_{t+1}=\boldsymbol{x}_t-\eta \boldsymbol{g}_t+\beta\left(\boldsymbol{x}_t-\boldsymbol{x}_{t-1}\right) \qquad ;\boldsymbol{g}_t=\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)$$

כאשר $\beta>0$ נקרא **פרמפטר המומנטום.**
אינטואטיבית,המומנטום "דוחף" את ההתקדמות שלי עוד טיפה בכיוון הגרדינאט הקודם שאליו התקדמתי.
למה הדבר הזה הגיוני,ניתן להבחין שזה יכול לעזור,לדוגמא בציור הבא:

דוגמה 18.8 נתבונן בדוגמא הבאה:

דוגמא לבעייה קמורה ופתרונה עם GD רגילים (לא סטוכסטיים)

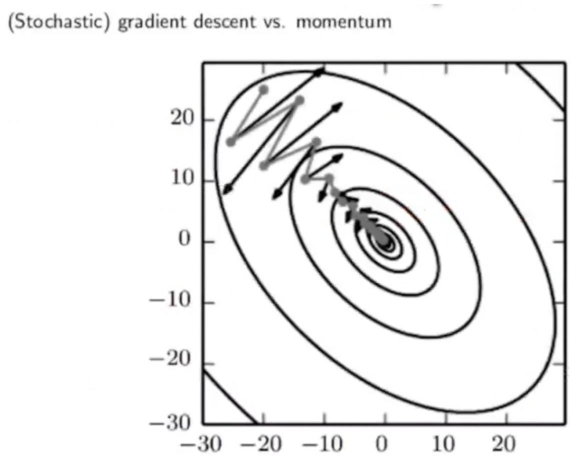


בשחור ,קווי הפוטנציאל של פונ' המטרה.
הפונ' נראת כמו אליבסות דחוסות,והאופטימות נמצא במרכז.
רוב הרכיב הדומיננטי של הגרדיאנט יהיה בציר y (אנכי) וניתן לראות שאלג' הGD הרגיל שמתקדם לאוכו מזגזג הרבה ניתן להבחין שהאלג' מתקדמם הרבה לאורך ציר y ופחות בציר x,כלומר לא מתקדם "מהר" מספיק לעבר האופטימום.
באלג' הgradient descent with momentum המומנטום למעשה "מפחית את הזגזוגים" עבור המקרה הזה,בכל צעד אנו נתקדם גם עוד קצת בכיוון של הצעד הקודם שביצענו.
זאת האיטואציה הציורית מאחורי רעין המומנטום.

הערה 19.8 לא הוכיחו עדיין (המרצה אמר "אי אפשר להוכיח") שהמומנטום אכן מתכנס יותר מהר,אבל משתמשים בו בפועל הרבה פעמים בעולם האמיתי והוא נותן תוצאות מוצלחות גם עבור פונ' שאינן קמורות.

דוגמה 20.8 נתבונן בדוגמא הבאה:

דוגמא לבעיה קמורה שפותרים באמצעות stochastic GD



למעשה יש כאן שימוש באלג' הגרדיאנט הסטוכסטי עם ובלי מומנטום.
כאן פונ' המטרה היא סכום של המון פונ'.

1. מה שרואים בשחור הוא מה שקורה שמפעילים את האלג' הגרדיאנט הסטוכסטי על הפונ'.(ניתן להבחין באלמנט האקראי בתנודות השחורות)

2. מה שרואים באפור הוא מה שקורה שמפעילים את האלג' הגרדיאנט הסטוכסטי יחד עם איבר מומנטום.נבחין כי גם עבור המקרה הזה ניתן לראות שהפונ מתכנסת באופן טוב יותר וששימוש במומנטום שיפר את ההתכנסות

הערה 21.8 גם בהרחבה הזו משתמשים בפועל הרבה פעמים בעולם האמיתי והוא נותן תוצאות מוצלחות גם עבור פונ' שאינן קמורות.

אלגוריתם הגרדיאנט המואץ Accelerated Gradient method -AGD

(נראה אלג' שמזכיר מאוד את אלג' הגרדיאנט המואץ של נסטרוב , שנראה בתרגול) לאלג' שנציג ניתן להוכיח באופן אנליטי את ההתכנסות שלו:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{x}_0 := \boldsymbol{y}_0 := \boldsymbol{z}_0 \quad \text{, init} \\
&\boldsymbol{y}_{t+1} := \boldsymbol{x}_t - \frac{1}{L}\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right) \quad \text{, the regular 'smooth' step} \\
&\boldsymbol{z}_{t+1} := \boldsymbol{z}_t - \frac{t+1}{2L} \cdot \nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right) \quad \text{, the fast 'aggressive' smooth step} \\
&\boldsymbol{x}_{t+1} := \tau \boldsymbol{y}_{t+1} + (1-\tau)\, \boldsymbol{z}_{t+1} \quad \text{, where : } \tau := \frac{t+1}{t+3}
\end{aligned}$$

הערה 22.8 נבחין כי

1. לאלג' יש שלושה איטרנטים (משתנים פנמיים שמתדעכנים בכל איטרציה) והם $\boldsymbol{x}_t, \boldsymbol{y}_t, \boldsymbol{z}_t$.
2. צעד העדכון $\boldsymbol{y}_{t+1} := \boldsymbol{x}_t - \frac{1}{L}\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)$ זהה לצעד עדכון מוכר של המקרה החלק.
3. צעד העדכון $\boldsymbol{z}_{t+1} := \boldsymbol{z}_t - \frac{t+1}{2L} \cdot \nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)$ מבצע עדכון מאוד אגרסיבי,שהוא וגדל ככל ש t גדל.
4. צעד העדכון של הנקודה הבאה $\boldsymbol{x}_{t+1} := \tau \boldsymbol{y}_{t+1} + (1-\tau)\, \boldsymbol{z}_{t+1}$ הוא ממוצע משוקלל של $\boldsymbol{y}_{t+1}$ ושל z_{t+1}.נבחין כי מצד אחד z_t גדל מסיבוב לסיבוב, אבל מצד שני המקדם שלו $(1-\tau)$ הולך וקטן מסיבוב לסיבוב.(כי t כבר גדול מאוד $\tau = \frac{t+1}{t+3} \overbrace{\approx}^{1 \ll t} 1$)

5. כלומר $\lim_{t\to\infty}\tau=1$ כלומר ככל ש t גדל ככה τ מתקרב להיות 1, ובאיטרציות מאוחרות האלג' מתנהג כמו GD במקרה ה-L-חלק.(בקביעת $\boldsymbol{x}_{t+1}$ יש יותר משקל לעדכון $\boldsymbol{y}_{t+1}$ שמתעדכן כמו במקרה ה-L-חלק.פחות משקל ל-z_{t+1} שמתעדכן באופן אגרסיבי).

6. בתחילת האל"ג יש יותר משקל בקביעת $\boldsymbol{x}_{t+1}$ לעדכון לפי העדכונים האגרסיביים z_{t+1} מאשר לעדכונים הסטדרטיים $\boldsymbol{y}_{t+1}$.נבחין כי עבור t-ים כאלו שבתחילת האלג' ה-t עוד לא גדולים מדי ולכן z_{t+1} לא מגיע לערכים גדולים מדי.

7. מסתבר שהאלג' הזה מתכנס באופן וינתון להראות את זה אנליטית.

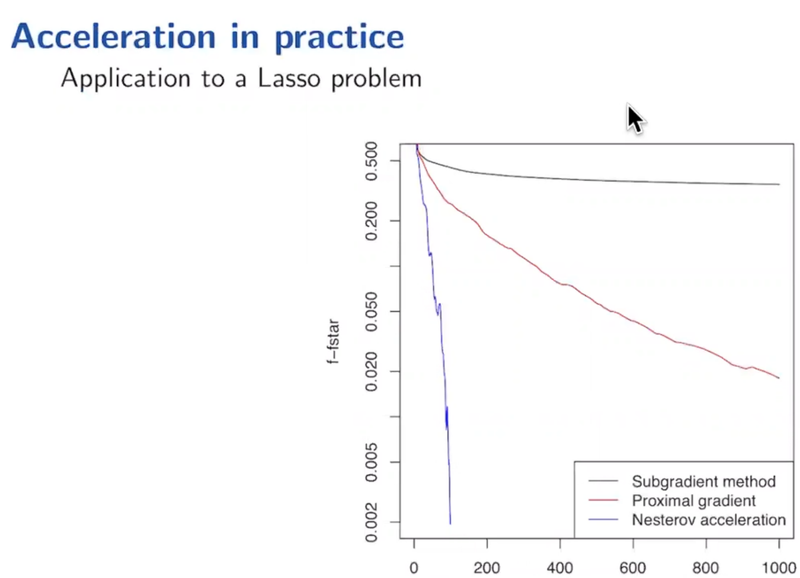
נשווה את אלג' GD לעומת אלג' AGD(accelerated gradient descent) בביצועים עבור פונ' קמורות.במונחי ϵ (=מספר העדכונים שנדרשים להשגת פתרון אופטמלי)

תכונות על f	GD steps	AGD steps
f is convex and L-smooth	$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$	$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\right)$
f is convex and L-smooth and μ strongly convex	$\mathcal{O}\left(\frac{L}{\mu}\cdot\log\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right)$	$\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{L}{\mu}}\cdot\log\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right)$

הערה 23.8 נזכור כי תמיד $1\geq\frac{L}{\mu}$, בד"כ $\frac{L}{\mu}$ הוא מספר גדול מאוד מ1 (בד"כ עשרות או מאות אלפים).ולכן הקצב של GD steps (שהוא $\mathcal{O}\left(\frac{L}{\mu}\cdot\log\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right)$) הוא פחות טוב מהקצב AGD steps שהוא $\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{L}{\mu}}\cdot\log\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right)$.ניתן לראות באופן כללי בהשוואה זו שאלג' AGD משיג תוצאות טובות יותר מאלג' הגרדיאנט הרגיל.

הערה 24.8 האלג' שריאנו של AGD הוא רק עבור המקרה שבו L חלקה.(מתעלמים מהקימרות חזק) אם רוצים שהאלג' AGD ייקח בחשבון את שהפונ' μ קמורה חזק ויגיע לתוצאות של $\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{L}{\mu}}\cdot\log\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right)$ אז האלג' AGD הוא מסובך יותר ולא נרחיב עליו כאן.

דוגמה 25.8 דוגמא בפועל:



- ציר Y , השגיאה.הציר הנ"ל הוא בסקלאה לוגריתמית.
- ציר X מספר האיטרציות.

ניתן להבחין האלג' המואץ של נסטרוב מתכנס מאוד מהר.
אלג' הGD הוא האלג' האדום (מתכנס לאט יותר).
אלג' הsubgradient (האלג' השחור) מתכנס הכי לאט.
מכאן ניתן לראות שהGD accelerated מאיץ באופן משמעותי את הביצועים של GD .

הערה 26.8 האלג' של המומנטום מאוד מאוד פופלרי אבל אלג' מואצים כדוגמת האלג' של נסטרוב הם הרבה פחות פופולריים מכיוון שאלג' של נסטרוב לדוגמא הוא מאוד מאוד רגיש.עבור בעיות עם רעש,האלג' של נסטרוב ישיג ביצועים לא מוצלחים במיוחד.כלומר האלג' של נסטרוב מאוד **רגיש לרעש** ולכן פחות פופלרי בשימושים של העולם האמיתי.מכאן גם ,שלא מפעילים את נסטרוב בבעיות סטוכסטיות (אקראיות,כפי שראינו) ובמקומו משתמשים באלג' ה**מומנטום** (שזה רעיון שהוא קרוב לרעיון של נסטרוב).

8.2 תרגול 8

8.2.1 אלגוריתם פרנק וולף

נתבונן בבעיית האופטמזציה הבאה

$$(P) \qquad \begin{array}{l} \min_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} \boldsymbol{x} \in C \end{array}$$

כאשר f פונ' קמורה ו L־חלקה והקבוצה C קמורה וקומפקטית (=סגורה וחסומה).

- **תזכורת:**בתרגול מספר 6 הכקרנו את אלג' הגדאניט המוטל לפתרון בעיות אופטמזציה מאולצות.

  נזכר כי כלל העדכון עבור אלג' זה היה נתון על ידי

  $$\boldsymbol{x}_t = P_C\left(\boldsymbol{x}_{t-1} - \eta_t \nabla f\left(\boldsymbol{x}_{t-1}\right)\right)$$

  במקרה שהפונ' היא חלקה אז ראינו כי האלג' מתכנס בקצב של $\mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right)$.(=כדי לקבל פתרון ϵ תת אופטמלי עלינו לבצע סדר גודל של $\frac{1}{\epsilon}$ צעדים).

  לעיתים חישוב ההטלה על קבוצה C יכול להיות מסובך ובכך הופך האלג' להיו לא יעיל ואף לא פרקטי כלומר העלות החישובית לביצוע כל איטרציה עלולה להיות גבוהה מאוד.עצם חישוב ההטלה הוא עלול להיות מסובך.

- אלגוריתם פרנק וולף (frak-wolfe) הוא אלגוריתם איטרטבי שפותר בעיית אופטמזציה לינארית LP בכל איטרציה.

אלגוריתם פרנק וולףהוא אלג' איטרטיבי בו בכל איטריצה מבצעים עדכון בכיוון הממזער על פני C , את הקירוב הלינארי של הפונ' באותה האיטרציה .

אם כן **בכל איטריצה** של האלג' פרנק־וולף עלינו **לפתור את בעיית האופטמזציה עם פונ' מטרה לינארית**.

במקרים רבים פתרון בעיה כזו הוא **קל יותר** מאשר ביצוע הטלה.

מוטבציה לכלל העדכון: כזכור הקירוב הלינאיר של פונ' קמורה וגזירה בריצפות,מהווה חסם תחתון על הפונ' (**אי שוויון הגדריאנט** לפונ' קמורות):

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in C : f(\boldsymbol{y}) \geq f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x})^T (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})$$

כלומר הקירוב הלינארי של הפונ' f בנקודה $\boldsymbol{y}$: $f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x})^T (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})$ מהווה חסם תחתון על $f(\boldsymbol{y})$ = ערך הפונ' בנקודה $\boldsymbol{y}$.

הערה 27.8 בסלנג של סמסטר ראשון ובחד מימד: זה מזכיר לנו "שיפוע הגרף מתחת לגרף".

ובפרט עבור הפתרון האופטלי $\boldsymbol{x}^* \in C$ (נציב $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^*$) מתקיים:

$$\star : \forall \boldsymbol{x} \in C : f(\boldsymbol{x}^*) \geq f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x})^T (\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x})$$

נפתח את הבטוי:

$$\begin{aligned} \forall \boldsymbol{x} \in C : f(\boldsymbol{x}^*) & \overbrace{\geq}^{\star} f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x})^T (\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}) \\ & \geq \min_{\boldsymbol{s} \in C} \left\{ f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x})^T (\boldsymbol{s} - \boldsymbol{x}) \right\} \\ & = \min_{\boldsymbol{s} \in C} \left\{ f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{s} - \nabla f(\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{x} \right\} \\ & = \min_{\boldsymbol{s} \in C} \left\{ f(\boldsymbol{x}) - \nabla f(\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{x} + \nabla f(\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{s} \right\} \\ & = f(\boldsymbol{x}) - \nabla f(\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{x} + \min_{\boldsymbol{s} \in C} \left\{ \nabla f(\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{s} \right\} \end{aligned}$$

כלומר

$$\forall \boldsymbol{x} \in C: f\left(\boldsymbol{x}^{*}\right) \geq f(\boldsymbol{x})-\nabla f(\boldsymbol{x})^{T} \boldsymbol{x}+\min _{\boldsymbol{s} \in C}\left\{\nabla f(\boldsymbol{x})^{T} \boldsymbol{s}\right\}$$

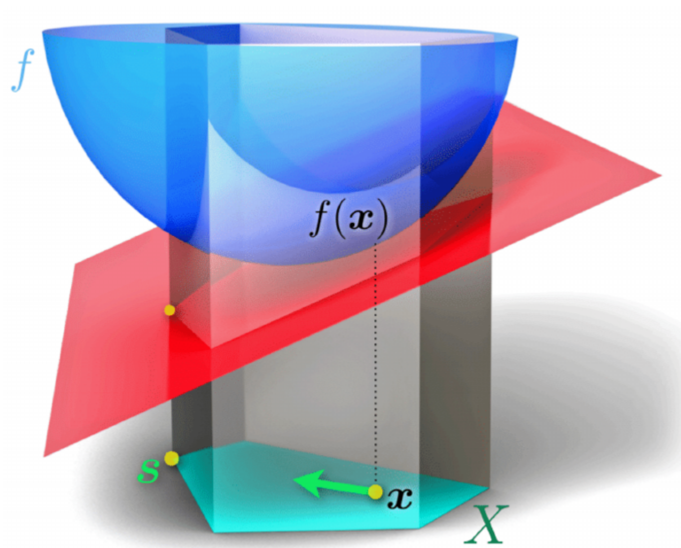
קיבלנו שבכל נקודה $\boldsymbol{x} \in C$

החסם התחתון לערך האופטמלי של הפונ' הוא איזה שהוא גודל קבוע $\left(f(\boldsymbol{x})-\nabla f(\boldsymbol{x})^{T} \boldsymbol{x}\right)$ שתלוי בנקודה $\boldsymbol{x}$ שאנו מתבוננים עליה כרגע ועוד פתרון לבעיית מינמזיציה לינארית LP: $\min_{\boldsymbol{s} \in C}\left\{\nabla f(\boldsymbol{x})^{T} \boldsymbol{s}\right\}$ כאשר פונ' המטרה היא $\nabla f(\boldsymbol{x})^{T} \boldsymbol{s}$.

הרעיון בפרנק וולף יהיה להתקדם בכל צעד קצת בכיוון $\boldsymbol{s}$ (=הווקטור שממזער את הפונ' $\left.\min_{\boldsymbol{s} \in C}\left\{\nabla f(\boldsymbol{x})^{T} \boldsymbol{s}\right\}\right)$ (=החסם התחתון המינימלי ביותר שנמצא על הקירוב הלינארי **(הנקודה הפיסבלית הנמוכה ביותר ששיכת לעל־המישור שהוא הקירוב הלינארי של הפונ' בנקודה $\boldsymbol{x}$)** על ערך פונ' המטרה האופטמלית $\left(f\left(\boldsymbol{x}^{*}\right)\right)$.

הראנו בהרצאה שאם מתקדמים בכיוון $\boldsymbol{s}$ אכן אנו מתקדמים בכיוון הנכון למזעור הפונ'.

איור לדוגמה:



תחום האילוץ הוא X , אנו נמצאים בנקודה x ופונ' המטרה שנרצה למזער היא f.
הקירוב הליאנרי בנקודה $\boldsymbol{x}$ הוא על מישור זה הוא העל מישור האדום.
אם היינו רוצים למזער על כל העל מישור לא היינו יכולים לבצע את המינמזיציה כי העל מישור הוא אינו חסום.(כלומר אם רוצים רק למזער את הפונ' באדום אפשר לרדת עד $-\infty$) אבל הרעיון הוא שכאשר אנו חסומים על ידי תחום **קומפטי** X **(=סגור וחסום)** (או C במקרה הכללי) ניתן למזער את העל מישור על גבי תחום האילוץ.(למצוא את הנקודה על פני על המישור שממזערת אותה ומקיימת את האילוץ X)ברגע שנמצא את הנקודה הזו,נתקדם מעד בכיוונה.

Data: Initial guess, $\mathbf{x}_0 \in C$

for $t = 1, 2, \ldots$ **do**

Solve minimization problem:

$$\mathbf{s}_{t-1} = \arg\min_{\mathbf{s}\in C} \nabla f(\mathbf{x}_{t-1})^T \mathbf{s}$$

$\eta_t \leftarrow \frac{2}{t+2}$ `// or exact line-search`

$\mathbf{x}_t \leftarrow (1-\eta_t)\mathbf{x}_{t-1} + \eta_t \mathbf{s}_{t-1}$

end

אלג' פרנק וולף:

הערה 28.8

- בכל איטרציה אנו מוצאים את s **שמביא למינימום את** $s_{t-1} = \min_{s\in C}\left\{\nabla f\left(\boldsymbol{x}_{t-1}\right)^T \boldsymbol{s}\right\}$ (כפי שראינו במוטבציה,מביא למינימום את החסם הפיסבלי על הערך של הפונ' בנק' האופטמלית)
- **שימו לב שהגודל הצעד** חייב לקיים $\eta_t \in [0,1]$ ולכן $\boldsymbol{x}_t \leftarrow (1-\eta_t)\boldsymbol{x}_{t-1} + \eta_t \boldsymbol{s}_{t-1}$ (אפשר להראות ש $\boldsymbol{x}_t$ פיזבילי כלומר ש $\boldsymbol{x}_t \in C$) :
  - $\boldsymbol{s}_{t-1} = \min_{\boldsymbol{s}\in C}\left\{\nabla f\left(\boldsymbol{x}_{t-1}\right)^T \boldsymbol{s}\right\}$ כלומר $\boldsymbol{s}_{t-1}$ הוא פתרון של בעיית אופטזמציה עם האילוץ C ולכן $\boldsymbol{s}_{t-1} \in C$ (כלומר הוא מקיים את האילוץ).
  - $\boldsymbol{x}_{t-1} \in C$
  - ולכן עבור כל $\eta_t \in [0,1]$ מכיוון שC הוא תחום קמור אנו יודעים כי :
    $\overbrace{\left(\left(1-\eta_t\right)\boldsymbol{x}_{t-1} + \eta_t \boldsymbol{s}_{t-1}\right)}^{\boldsymbol{x}_t} \in C$ כלומר $\boldsymbol{x}_t$ הוא נקודה פיזבלית.
- **כמה מתקדמים בכיוון** s**?**
  - אפשרות אחת (גרסא אחת של האלג') להתקדם בצורה הזו : $\eta_t \leftarrow \frac{2}{t+2}$ (גודל צעד דועך)
  - אפשרות שניה (גרסא אחרת של האלג') להתקדם בגדול צעד מדוייק: (דורש פתרון של בעיית אופטמזיציה נוספת):
    אפשר לבצע מציאה של גודל צעד מדוקי **Exact line search:** $\eta_t = \arg\min_{\eta\in[0,1]} f\left(\left(1-\eta\right)\boldsymbol{x}_{t-1} + \eta \boldsymbol{s}_{t-1}\right)$ (למצוא את ה η שתמזער את הערך של $\boldsymbol{x}_t = \left(1-\eta\right)\boldsymbol{x}_{t-1} + \eta \boldsymbol{s}_{t-1}$).זו גרסא נוספת של האלג' .
- האלג' מבטיח קצב התכנסות של $\mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right)$ (כמו projected gradeint descent רק הפעם שבמקום בכל איטרציה לפתור בעיית אופטמיזציה של הטלה שיכולה להיות מסובכת נפתור בעיית אופטמיזציה לינארית LP)

8.2.2 אינוורנטיות לטרסנפומציה אפינית

הגדרה 29.8 נתונה בעיית האופטמזציה הבאות

$$(P) \qquad \min_{\boldsymbol{y}\in C} f\left(\boldsymbol{y}\right)$$

כאשר קיימת $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה הפיכה כשלהיא.כעת נגדיר את בעיה השקולה לאחר הטרנספומציה על ידי

$$(P') \qquad \min_{\boldsymbol{x}\in C'} g\left(\boldsymbol{x}\right)$$

כאשר $g\left(\boldsymbol{x}\right) \triangleq f\left(A\boldsymbol{x}\right)$ ו $C' = A^{-1}C \triangleq \left\{A^{-1}\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y} \in C\right\}$.

מפעילים אלגוריתם איטרטיבי כלשהוא על הבעיה (P) ומקבלים את סדרת הפתרונות $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_T$.
מפעילים את אותו אלגוריתם איטרטיבי כלשהוא על הבעיה (P) ומקבלים את סדרת הפתרונות $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_T$.
נאמר כי אלגוריתם אופטזמציה הוא אינווריאנטי לטרנסופמציה אפינית affine invariant אם לכל ניחושים התחלתיים המקיימים את הקשר $\boldsymbol{y}_0 = A\boldsymbol{x}_0$ ולכל $t \geq 1$ מתקיים $\boldsymbol{y}_t = A\boldsymbol{x}_t$.

הערה 30.8 $\boldsymbol{A}$ היא טרנספורמציה הפיכה מט' $n \times n$ לינארית ולכן מה היא יכולה לעשות:

- כיווץ/מתיחה
- סיבוב

  כלומר הטרנספורמציה רק משנה לנו את מערכת הצירים

כלומר אנו מסתכלים על במערכת קורידנטות אחרת (לאחר הפעלת הטרנספומציה),על בעיה שקולה.
בעיות שקולות כי אם נציב $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{y} \in C'$ עבור $\boldsymbol{y} \in C$ ונציב ב g נקבל

$$g(\boldsymbol{x}) \triangleq f(A\boldsymbol{x}) = f\left(A\left(A^{-1}\boldsymbol{y}\right)\right) = f(\boldsymbol{y})$$

כלומר הפונ' היא אותה הפונ' והתחום הוא אותה התחום,רק פשוט אנו מסתכלים על הבעיה ממערכות צירים שונות.(מתוחה/מקווצת/מסובבת).
רוצים להראות שאם מפעילים אלג' אופטמזציה על P, P' ונרצה להראות שהאלג' אינוורנטי לטרנסופמציה.

הערה 31.8 התכונה **אינווריאנטיות לטרנסופמציה אפינית** היא **תכונה רצויה** של אלג':
(**אנו לא רוצים** שהביצועים של האלג' יושפעו מ"כמה הצירים מתוחים" או כמה ה"צירים מסובבים").

הערה 32.8 הוכחה של אינווריאנטיות של אלג' לטרנס' אפינית היא ההוכחה על סדרה של נקודות (אולי אינסופית) ולכן נוח ומקובל להשתמש באינדוקציה לצורך הוכחות אינוורינטיות.

- הוכחה של אינווריאנטיות עבורת דרך זהות שראינו בתרגול 1:
  - **תזכורות:** אם f גזירה ברציפות , $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ו $g(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{A}x)$ אזי

$$\boxed{\nabla g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}^T \nabla f(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})}$$
$$\nabla^2 g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}^T \nabla^2 f(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{A}$$

הערה 33.8 הראנו בתרגול כי **אלג' פרנק וולף הוא אינווראנטי לטרנסופמציה אפינית**

הערה 34.8 הראנו בתרגול כי **אלג' הגרדיאנט הוא לא אינווראנטי לטרנסופמציה אפינית**

8.2.3 מומנטום ואלגוריתם הגרדיאנט המואץ של נסטרוב

נזכר בכלל העדכון עבור אלגוריתם הגרדיאנט :

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \boldsymbol{x}_t - \eta_{t+1} \nabla f(\boldsymbol{x}_t)$$

תזכורת:

הכללה של הcondition number לפונ' f קמורות המקיימות L-חלקות ו μ-מתכנסות חזק μstrongly convex and L-smooth ראינו נגדיר את הcondition number להיות.

$$\kappa \triangleq \frac{1}{\gamma} = \frac{L}{\mu}$$

בעבר כי ביצועי האלג' GD מקיימים :

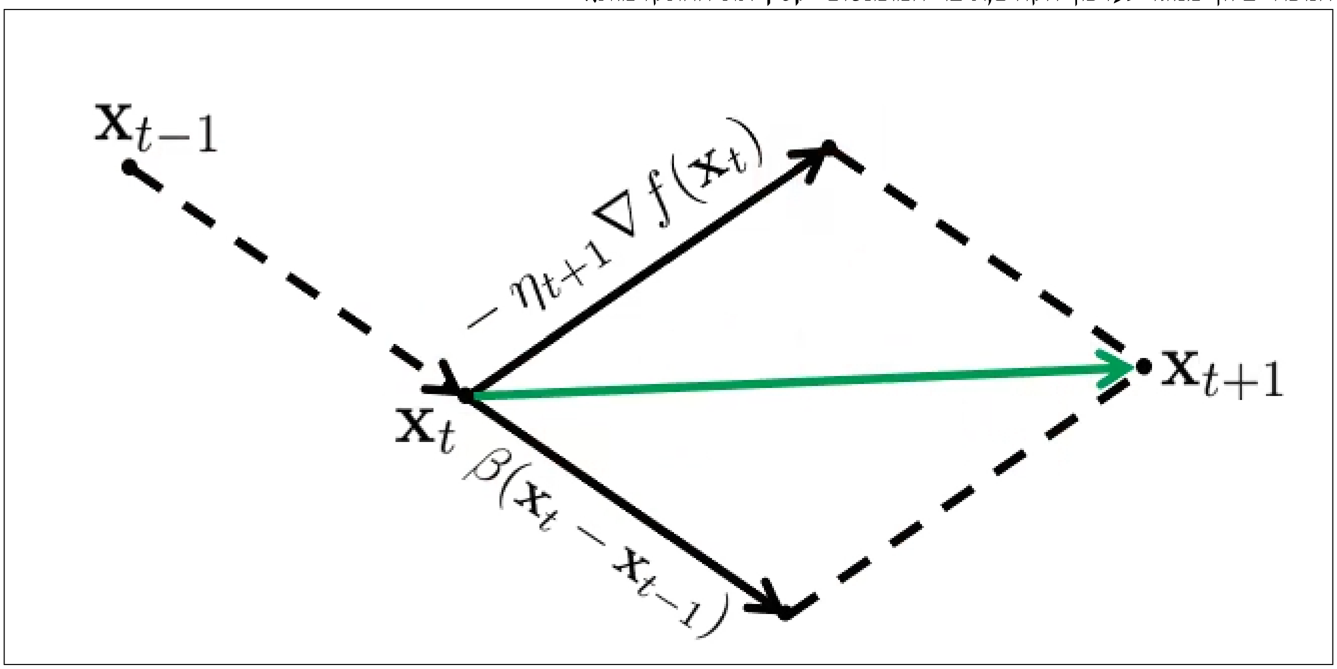
$$f\left(\boldsymbol{x}_t\right)-f\left(\boldsymbol{x}\right) \leq \left(\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\right)^{2t}\left(f\left(\boldsymbol{x}_0\right)-f\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right)$$

כלומר הביצועים
יכולים להיות גרועים במקרים בהם κ (ה condition number) של הפונ' גדול מדי.
(ככל שκ גדל , הקבוע $\frac{\kappa-1}{\kappa+1}$ יותר ויותר קרוב ל 1, ולכן ההתכנסות אומנם אקפוננצלאית אבל הקבוע שיש לנו בבסיס מאוד קרוב ל1.ולכן עבור $\kappa \gg 0$ ההתכנסות תהיה איטית יותר.)
בעיות בהם הcondition number גדול נקראות ill-conditioned (או poorly conditioned) ועבורן קצב ההתכנסות של אלג' הגרדיאנט הוא איטי.
איטואיטיבית , עבור בעיות אלו האלגוריתם מבצע בחלק מהצירים בכיוונים מנוגדים ("זיגזג").

הוספת איבר מומנטום לאלג' הGD על מנת להתגבר על הבעיה הזו מוצא להוסיף **איבר מומנטום momentum** אלגלרויתם הגרדיאנט:

$$\boldsymbol{x}_{t+1}=\boldsymbol{x}_t-\eta_{t+1}\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)+\beta\left(\boldsymbol{x}_t-\boldsymbol{x}_{t-1}\right)$$

כאשר $0<\beta<1$ הוא פרמטר כלשהו.
(איבר המומנטום הוא $\beta\left(\boldsymbol{x}_t-\boldsymbol{x}_{t-1}\right)$ האיבר הזה "מושך אותי" לכיוון של אותו הצעד שביצעתי באיטרציה הקודמת) במידה ועדכון הגרדיאנט הנוכחי הוא **באותו כיוון** כמו העדכון הקודם איבר המומנטום **יגדיל את ההתקדמות בכיוון זה** (ואילו אם העדכון הנוכחי ביוון **מנוגד** לעדכון הקודם,איבר המומנטום **יקטין** את ההתקדמות).



הערה 35.8 הרבה פעמים נותנים אנלוגיה פיזיקלית של ירידה במורד הגרדיאנט (אלג' גרדיאנט רגיל) כאיש שיורד בכיוון הירידה הכי חזקה של ההר והקצב ההתקדות של האיש, וירידה במורד הגרדיאנט **עם מומנטום** לכדור שבמהלך הירידה מההר **צובר תאוצה לאורך המורד** .

הערה 36.8 באופן מעשי משתלים לבחור את β שיהיה כמה שיותר גדול ובתחום $0<\beta<1$ לודגמא $\beta=0.99$.

כעת ניתן לרשום את **צעד העדכון בצורה דו שלבית** :

$$\begin{cases}\boldsymbol{v}_{t+1}=\beta\boldsymbol{v}_t-\eta_{t+1}\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)\\ \boldsymbol{x}_{t+1}=\boldsymbol{x}_t+\boldsymbol{v}_{t+1}\end{cases}$$

למה זה נכון? כי :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_{t+1} &= \boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{v}_{t+1}\\ &= \boldsymbol{x}_t + \beta \boldsymbol{v}_t - \eta_{t+1}\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right)\\ &= \boldsymbol{x}_t - \eta_{t+1}\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right) + \beta \boldsymbol{v}_t\end{aligned}$$

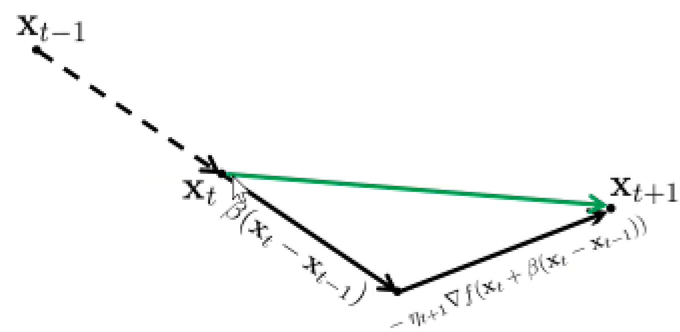
$$\begin{aligned}&\boldsymbol{x}_{t+1} = \boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{v}_{t+1}\\ &\Rightarrow \boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{x}_{t-1} + \boldsymbol{v}_t\\ &\Rightarrow \boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}_{t-1} = \boldsymbol{v}_t\end{aligned}$$

$$\overbrace{=} \quad \boldsymbol{x}_t - \eta_{t+1}\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t\right) + \beta\left(\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}_{t-1}\right)$$

אלגוריתם הגרדינט המואץ של נסטרוב Nesterov's accelerated gradient אלגוריתם הגרדינט המואץ של נסטרוב Nesterov's accelerated gradient הוא וריאציה נוספת של אלגוריתם הגרדיאנט .כלל העדכון עבור אלגוריתם זה דומה לשיטת המומנטום אך במקום לחשב את הגרדיאנט בנקודה x_t ולאחר מכן לבצע עדכון גרידנאט ועדכון מומנטום,הגרדיאנט מחושב בנקודה המתקבלת **לאחר** עדכון המומנטום כלומר כלל העדכון עבור אלגקויתם הרדיאנט המואץ הינו

$$\begin{cases}\boldsymbol{v}_{t+1} = \beta \boldsymbol{v}_t - \eta_{t+1}\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t + \beta \boldsymbol{v}_t\right)\\ \boldsymbol{x}_{t+1} = \boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{v}_{t+1}\end{cases}$$

איור להמחשה:



נזכיר כי גם כאן :

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{x}_{t+1} = \boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{v}_{t+1}\\ &\Rightarrow \boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{x}_{t-1} + \boldsymbol{v}_t\\ &\Rightarrow \boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}_{t-1} = \boldsymbol{v}_t\end{aligned}$$

נסטרוב הראשה שכלל עדכון זה משיג קצב של $\mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ עבור פונ' קמורות וחלקות (לעומת $\mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right)$ עבור אלג' הגרדיאנט הרגיל).
כלומר כלל עדכון זה עדכון זה משיג קצב של $\mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ עבור פונ' קמורות וחלקות.כלומר עבור פתרון ϵ תת אופטמלי נצטרך ללכת סדר גודל של $\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$ סיבובים

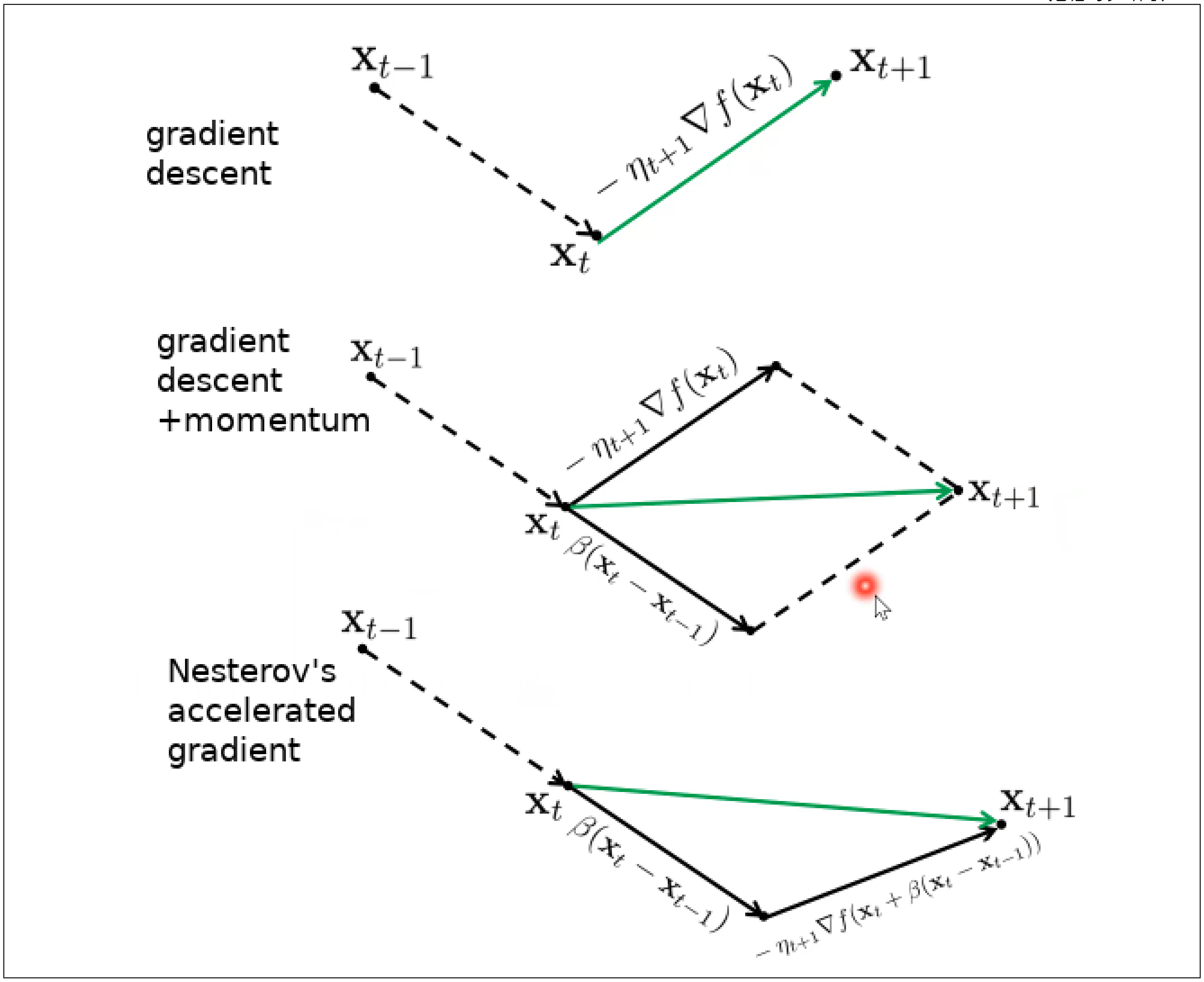
$$\begin{aligned}&\frac{1}{t^2} \le \epsilon\\ \Rightarrow &\frac{1}{\epsilon} \le t^2\\ \Rightarrow &\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \le t\end{aligned}$$

(שזה הרבה יותר טוב לעומת $\frac{1}{\epsilon}$ צעדים באלג' הכרדיאנט הרגיל).

מחוץ לחומר הקורס:

נסטרוב הראה שגם קצב של $\mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ הוא הקצב הכי טוב שאפשר להשיג לכל שיטה מסדר ראשון.(חסם על קצב התכנסות עבור שיטות מסדר ראשון (שיטות שמבצעות עדכונים לפי הפונ' והגרדיאנטים שלה) זה למעשה הקצב הנמוך ביותר שאפשר להשיג , שמושג על ידי האלגוריתם של נסטרוב).

איור לסיכום:



אנימציית מחשב של אלג' המומנטום (יש באתר הסברים על הנושא של מומנטום)
https://distill.pub/2017/momentum/

8.3 תרגיל בית 3

היינו צריכים לזכור בתרגיל בית 3 כי עברו הפרבולה $y = ax^2 + bx + c$ קודקוד הפרבולה נתון על ידי $x^* = \frac{-b}{2a}$(אפשר להגיע מתוך גזירה והשוואה לאפס)

חלק III
הלגראנג'יאן והבעיה הדואלית

9 הרצאה 9 ותרגול 9

9.1 הרצאה 9

מה שעשינו בשבועות האחרונים ־ התרכזנו באלג' מסדר ראשון.(שיטות שמשתמשות בנגזרת הראשונה של פונ' המטרה כדי להתקדם).
ראינו מספר שיטות כאלה, הראשונה היתה GD וגרסאותיה (GD עם אילוצים/GD עם סטוכסטי) ובשיעור האחרון למדנו גם על אלג' פרנק וולף ועל אלג' המומנטום של נסטרוב.
בשעורים הקרובים נדבר על מושג ה**דואליות** ונראה שהוא מאוד שימושי ,במיוחד בהקשר של בעיות קמורות.

9.1.1 לגראנז'אין

נתבונן בבעיית האופטמזציה הבאה

$$\begin{gathered}\min_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}) \\ \text{subject to:} h_i(\boldsymbol{x}) \leq 0, i=0,1,2,\ldots,m \\ l_i(\boldsymbol{x}) = 0, i=0,1,2,\ldots,r\end{gathered}$$

הבעיה לא חייבת להיות בעיית אופטמזציה קמורה אבל הקורס נשים דגש מיוחד על המקרה שבו היא קמורה.
(כרגע הדיון הוא עבור המקרה הכללי ־ הבעיה לא חייבת להיות בעיית אופטמזציה קמורה)

- נציג את מושג ההלגראנז'יאן שהרעיון שלו הוא להתאים לכל אילוץ משתנה סקלרי u_i. הוא סקלר שיותאם לאילוץ אי שוויון הi $(h_i(\boldsymbol{x}) \leq 0, i=0,1,2,\ldots,m)$, ו v_i הוא סקלר שיותאם לאילוץ השוויון הi $(l_i(\boldsymbol{x}) = 0, i=0,1,2,\ldots,r)$.

הגדרה 1.9 נגדיר את ה**לגראנז'יאן** Lagrangian באופן הבא:

$$L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i h_i(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{r} v_j l_j(\boldsymbol{x})$$

כאשר $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^r$, $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m_+$ (כלומר כל אחד מהאלמנטים ב $\boldsymbol{u}$ אי שלילי, $(\forall i \in \{1,\ldots,m\} : u_i \geq 0$.
אחרת (אם $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_m \end{pmatrix} \notin \mathbb{R}^m_+$) נגדיר $L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = -\infty$)

הערה 2.9 באופן כללי נגיש כי ה**לגראנז'יאן** מוגדר גם עבור $\boldsymbol{x}$־ים שאינם בתחום האילוץ (=שאינם פיזבילים).כלומר הלגרנגז'יאן מוגדר לכל $\boldsymbol{x}$.(כלומר $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$)

כעת ניתן לראות שלקחנו את בעיית האופטמזציה המקורית (בעייה עם אילוצים) ועשינו לה מניפולציה באופן כזה שבו קיבלנו בעייה חדשה שאינה עם אילוצים , כשבעצם אילוצי הבעיה המקורית נכנסים לפונ' המטרה החדשה שלנו $L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ (ע"י הלאגראנז'יאן).
$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ נקראים גם **כופלי לגראנג'**
אם בוחרים את $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ באופן שרירותי הבעיות (בעיית האופטמזציה המקורית ובעיית ה$(L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ הנ"ל אינם שקולות,אחנו נראה באילו מקרים הבעיות הללו כן שקולות.בעצם דרך כתיבת הלגראנז'יאן היא מעבר מבעיה מאולצת לבעיה אחרת שאינה מאולצת שבה האילוצים נכנסים לתוך פונ' המטרה.
הייתרון שנראה בשעורים הבאים הוא שנעשה זאת נהפוך את הבעיה המאולצת לבעיה לא מאולצת "נבטל את האילוצים".
אינטואציה לגבי לגראנז'יאן
נתעלם לרגע מאילוצי השוויון (אפשר להכליל את האינטואציה עבורם גם למעשה זה שילוב של שני אילוצי אי שוויון חלש $\leq,\geq$) לצורך פישוט הדיון.
נתבונן בבעיה המקורית (נקראת גם הבעיה המקורית , או הבעיה הפרימלית primal) :

$$\begin{gathered}\min_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}) \\ \text{subject to:} h_i(\boldsymbol{x}) \leq 0, i=0,1,2,\ldots,m\end{gathered}$$

נתבונו בבעיה שקולה

$$\min_{\boldsymbol{x}}\max_{\boldsymbol{u}\geq0}\overbrace{f\left(\boldsymbol{x}\right)+\sum_{i=1}^{m}u_ih_i\left(\boldsymbol{x}\right)}^{L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}$$

(נזכור שהמשמעות $\boldsymbol{u}\geq0$ היא ש $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}u_1 & u_2 & \dots & u_m\end{pmatrix}\in\mathbb{R}_+^m$).
למה הבעיות הם שקולות? ה$\boldsymbol{x}$ האופטמלי הוא זהה עבור שתי הבעיות האלה.
למה?

- אם $\boldsymbol{x}$ נקודה פיזבלית (נקדוה פיזבלית=נקודה המקיימת את האלוצים) , $\forall i:h_i\left(\boldsymbol{x}\right)\leq0$ (כי הנקודה מקיימת את האילוצים) ולכן

$$\max_{\boldsymbol{u}\geq0}f\left(\boldsymbol{x}\right)+\sum_{i=1}^{m}u_ih_i\left(\boldsymbol{x}\right)=f\left(\boldsymbol{x}\right)$$

  - במקרה הזה $\forall i:h_i\left(\boldsymbol{x}\right)\leq0$ ועל מנת להגיע למצב שעבורו מקבלים את המקסימום של הפונ' $f\left(\boldsymbol{x}\right)+\sum_{i=1}^{m}u_ih_i\left(\boldsymbol{x}\right)$ נבחר $\forall i:u_i\equiv0$. ואז אכן $\max_{\boldsymbol{u}\geq0}f\left(\boldsymbol{x}\right)+\sum_{i=1}^{m}u_ih_i\left(\boldsymbol{x}\right)=f\left(\boldsymbol{x}\right)$.

- אם $\boldsymbol{x}$ אינו פיזבלי:($\exists i:h_i\left(\boldsymbol{x}\right)>0$)

$$\max_{\boldsymbol{u}\geq0}f\left(\boldsymbol{x}\right)+\sum_{i=1}^{m}u_ih_i\left(\boldsymbol{x}\right)=\infty$$

  - במקרה הזה מכיוון ש $\exists i:h_i\left(\boldsymbol{x}\right)>0$ נוכל לבחור את $u_i=\infty$ ואז ערך הבטוי הכולל יהיה אינסוף.

מסקנה 3.9 מסקנה, עבור כל $\boldsymbol{x}$ פיזבלי:

$$\max_{\boldsymbol{u}\geq0}f\left(\boldsymbol{x}\right)+\sum_{i=1}^{m}u_ih_i\left(\boldsymbol{x}\right)=f\left(\boldsymbol{x}\right)$$

עבור כל $\boldsymbol{x}$ שאינו פיזבילי

$$\max_{\boldsymbol{u}\geq0}f\left(\boldsymbol{x}\right)+\sum_{i=1}^{m}u_ih_i\left(\boldsymbol{x}\right)=\infty$$

המסקנה היא שאם רוצים למצוא בעיה ששקולה לבעיה המקורית שלנו נרצה למצוא את ה$\boldsymbol{x}$ עבורו הבטוי ($\max_{\boldsymbol{u}\geq0}f\left(\boldsymbol{x}\right)+\sum_{i=1}^{m}u_ih_i\left(\boldsymbol{x}\right)$) יהיה מינימלי.ו $\boldsymbol{x}$־ים לא פיזביליים "יסוננו" מכיוון ש"$\max_{\boldsymbol{u}\geq0}f\left(\boldsymbol{x}\right)+\sum_{i=1}^{m}u_ih_i\left(\boldsymbol{x}\right)=\infty$".
ולכן מכאן נובע כי קיבלנו בעיה שקולה לבעיה המקורית שלנו.

$$\begin{array}{c}\min_{\boldsymbol{x}}f\left(\boldsymbol{x}\right)\\ \text{subject to:}h_i\left(\boldsymbol{x}\right)\leq0,i=0,1,2,\dots,m\end{array}\iff\min_{\boldsymbol{x}}\max_{\boldsymbol{u}\geq0}L\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}\right)$$

נתבונן **בבעיה הדואלית**

$$\max_{\boldsymbol{u}\geq0}\overbrace{\min_{\boldsymbol{x}}L\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}\right)}^{g(\boldsymbol{u})}$$

למעשה , (החלפנו בין $\max_{\boldsymbol{u}\geq0}$ ל $\min_{\boldsymbol{x}}$).כלומר בבעיה דואלית קודם נרצה למצוא מינימום של $\boldsymbol{x}$ על הלגראנג'יאן ורק לאחר מכן נמצא מקסימום על פני כל ה$\boldsymbol{u}\geq0$.נשאלת השאלה מתי/האם ניתן להחליף $\max\leftrightarrow\min$)

הגדרה 4.9 נגדיר את **הפונ' הדואלית**

$$g\left(\boldsymbol{u}\right)=\min_{\boldsymbol{x}}L\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}\right)$$

הגדרה 5.9 נגדיר את **הבעיה הדואלית (או:בעיית לגראנג' הדואלית)**

$$\max_{\boldsymbol{u}\geq0}g\left(\boldsymbol{u}\right)=\max_{\boldsymbol{u}\geq0}\overbrace{\min_{\boldsymbol{x}}L\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}\right)}^{g(\boldsymbol{u})}$$

הערה 6.9 כלומר בבעיה זו מקפיאים את $\boldsymbol{u}$ וממזערים את $\min_{\boldsymbol{x}}L\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}\right)$ על פני $\boldsymbol{x}$ הפלט הוא פונ' של $\boldsymbol{u}$ שאותה ממזערים לפי $\boldsymbol{u}$.

הערה 7.9 נדגיש כי באופן כללי $\min_{\boldsymbol{x}}L\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)\triangleq g\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)$.

הערה 8.9 במקרה הכללי הבעיה הדואלית $\max_{\boldsymbol{u}\geq0}g\left(\boldsymbol{u}\right)=\max_{\boldsymbol{u}\geq0}\overbrace{\min_{\boldsymbol{x}}L\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}\right)}^{g(\boldsymbol{u})}$ והבעיה $\min_{\boldsymbol{x}}\max_{\boldsymbol{u}\geq0}L\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}\right)$ אינן שקולות, אבל במקרה שאנו מתעניינים בו.הרבה פעמים נראה שניתן לפתור את הבעיה הדואלית ביותר קלות ודרך הפתרון שלה נראה שיותר קל להגיע לפתרון של הבעיה במקורית (הבעיה הפרימלית).

בשעורים הבאים נדבר מדוע הבעיות הללו שימושיות.בשיעור הזה נדבר על תכונות של הבעיות הללו.בהמשך המוטבציה לנושא הדואליות תהיה ברורה יותר.

הערה 9.9 במקרה שאנו מדברים על אילוצי שוויון בבעיה , נוכל לפרמל את הבעיה השקולה לבעיה הפרימלית באופן הבא:

$$\max_{\boldsymbol{u}\geq0,\boldsymbol{v}}\overbrace{f\left(\boldsymbol{x}\right)+\sum_{i=1}^{m}u_{i}h_{i}\left(\boldsymbol{x}\right)+\sum_{j=1}^{r}v_{i}l_{j}\left(\boldsymbol{x}\right)}^{L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}=f\left(\boldsymbol{x}\right)$$

תכונה חשובה של הלגראנז'יאן לכל $\boldsymbol{u}\geq0$ ו $\boldsymbol{v}$ מתקיים ש
לכל $\boldsymbol{x}$ פיזבילי :

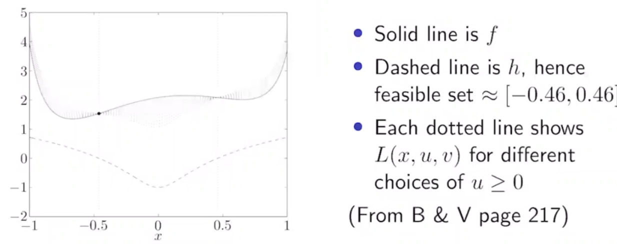
$$f\left(\boldsymbol{x}\right)\geq L\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)$$

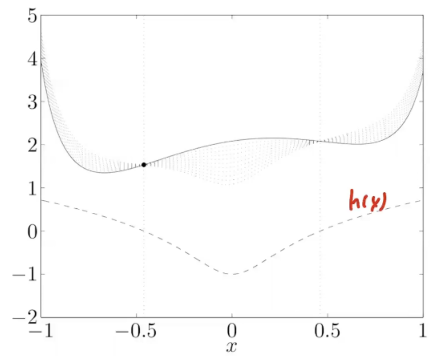
מדוע?
מכיוון שלכל $\boldsymbol{x}$ פיזבילי (=שמקיים את האילוצים) מתקיים

$$L\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)=f\left(\boldsymbol{x}\right)+\sum_{i=1}^{m}u_{i}\overbrace{h_{i}\left(\boldsymbol{x}\right)}^{\leq0}+\sum_{j=1}^{r}v_{i}\overbrace{l_{j}\left(\boldsymbol{x}\right)}^{=0}$$

כלומר הלגראנג'יאן לכל $\boldsymbol{x}$ פיזבילי חוסם מלמטה את הפונ'.

דוגמה 10.9 איור לדוגמא:



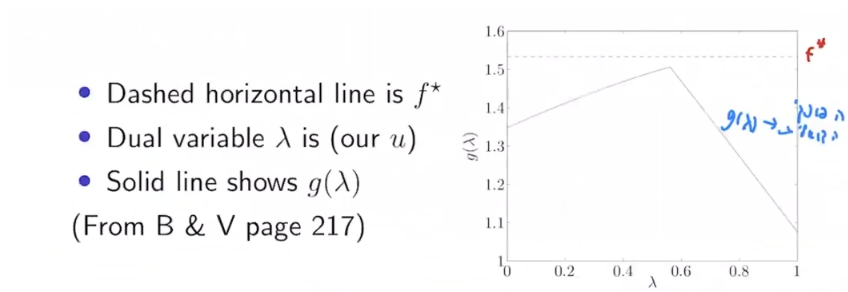


לכל הערכים x הפיזבילים (אזי $(-0.5, 0.5$ לכל הערכים של u נראה שהלגראנגזיאן מתחת לפונ' המטרה f.עבור ערכים שאינם פיזבילים
קיימים ווקטורי u עבורם הלגראנגזיאן מעל הפונ'

נסמן C זה התחום האילוץ של הבעיה הפרימלית (C הוא התחום בו האילוצים מתקיימים=C הוא אוסף כל הנק' הפיזבליות)
נסמן $f^* = \min_{\boldsymbol{x}\in C} f(\boldsymbol{x})$ כלומר f^* הוא הערך האופטמלי של הבעיה הפרימלית.
אזי **נזעור** $L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ **מעל כל** x **נוצן לנו את החסם התחתון הבא:**

$$f^* = \min_{\boldsymbol{x}\in C} f(\boldsymbol{x}) \geq \min_{\boldsymbol{x}\in C} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \geq \min_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \triangleq g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$$

דוגמה 11.9 איור לדוגמא:



הערה 12.9 נבחין כי כאן הסימון λ הוא למעשה u.
כלומר f^* חסום מלמטה לכל ערך של $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$

דוגמה 13.9 דוגמא: תכנות ריבועי $Q \succ 0$
נזכר בבעיית התכנות הריבועי

$$\begin{gathered}\min_{\boldsymbol{x}} \tfrac{1}{2}\boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x} + c^T\boldsymbol{x} \\ \text{subject to:} A\boldsymbol{x} = b, \boldsymbol{x} \geq 0\end{gathered}$$

כאשר $Q \succ 0$.

הלאגראנז'יאן נתון על ידי

$$L\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{T}Q\boldsymbol{x}+c^{T}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}^{T}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}^{T}\left(A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\right)$$

הערה 14.9 מדוע כי בביעה הפרימילית $h\left(\boldsymbol{x}\right)\leq0$ ומכיוון ש $\boldsymbol{x}\geq0$ נובע ש$h\left(\boldsymbol{x}\right)=-\boldsymbol{x}$ ואז $-\boldsymbol{u}^{T}\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{m}u_{i}h_{i}\left(\boldsymbol{x}\right)$ כאשר $h_{i}\left(\boldsymbol{x}\right)=-\boldsymbol{x}_{i}$.

נבחין כי הבעיה $L\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)$ היא בעיה ריבועית ב$\boldsymbol{x}$ ומכיוון ש $Q\succ0$ נובע כי שQ היא הפיכה.(כל הע"ע שלה חיוביים).

הבעיה $L\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)$ היא בעיה קמורה ב$\boldsymbol{x}$ וניתן לגזור לפי $\boldsymbol{x}$ (ולפי כללי גזירה ווקטורית)ולמצוא לה מינימום.

מסתבר שאם גזרנו ומצאנו את $\boldsymbol{x}$ האופטמלי והצבנו אותו בחזרה בבטוי $L\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)$ נקבל את **בעיית הלגאנג'יאן הדואלית כלומר נקבל כי:**

בעיית הלגאנג'יאן הדואלית :

$$g\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)=\min_{\boldsymbol{x}}L\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)=-\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{u}+A^{T}\boldsymbol{v}\right)^{T}Q^{-1}\left(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{u}+A^{T}\boldsymbol{v}\right)-\boldsymbol{b}^{T}\boldsymbol{v}$$

לכל $\boldsymbol{u}\geq0$ ולכל $\boldsymbol{v}$, זה בעצם חסם תחתון על הערך האופטמלי של הבעיה המקורית f^{*} (הבעיה הפרימילית).

(תזוכרת של הסימון : $f^{*}=\min_{\boldsymbol{x}\in C}f\left(\boldsymbol{x}\right)$)

הערה 15.9 איך מוצאים את $g\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)=?$

$$L\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{T}Q\boldsymbol{x}+c^{T}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}^{T}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}^{T}\left(A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\right)$$

נשים לב ש $L\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)$ היא קמורה ב$\boldsymbol{x}$ מכיוון ש$Q\succ0$.ולכן נרודת המינימום הגלובלי שלה היא הנקדה שבה הנגזרת מתאפסת.כלומר

$$\boldsymbol{x}^{*}=\arg\min_{\boldsymbol{x}}L\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)\iff\nabla_{\boldsymbol{x}}L\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{*}}=0$$

לאחר מכן נציב את $\boldsymbol{x}^{*}$ ב$L\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)$ נקבל את $g\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)$ כלומר

$$g\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)=L\left(\boldsymbol{x}^{*},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)$$

דוגמה 16.9 דוגמא: תכנות ריבועי $Q\succeq0$

כמו קודם , נזכר בבעיית התכנות הריבועי

$$\begin{gathered}\min_{\boldsymbol{x}}\tfrac{1}{2}\boldsymbol{x}^{T}Q\boldsymbol{x}+c^{T}\boldsymbol{x}\\ \text{subject to:}A\boldsymbol{x}=b,\boldsymbol{x}\geq0\end{gathered}$$

הפעם $Q\succeq0$.

כמו קודם , הלאגראנז'יאן נתון על ידי

$$L\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{T}Q\boldsymbol{x}+c^{T}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}^{T}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}^{T}\left(A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\right)$$

בעיית הלגאנג'יאן הדואלית :

$$g\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)=\begin{cases}-\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{u}+A^{T}\boldsymbol{v}\right)^{T}Q^{\dagger}\left(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{u}+A^{T}\boldsymbol{v}\right)-\boldsymbol{b}^{T}\boldsymbol{v} & \text{if }\left(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{u}+A^{T}\boldsymbol{v}\right)\perp\text{null}\left(Q\right)\\ -\infty & \text{else}\end{cases}$$

סימון 17.9 כאשר $Q^\dagger$ מסמן את ה**הופכי המוכלל(=הפסאדו אינוורס) של** Q**.**
$Q \succeq 0$ ולכן Q סמטרית.ממשפט הפירוק הספקטרלי קיימת מט' יונטרית U ($U^TU = UU^T = I$) ומט' אלכסונית $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ ולכן $Q = U^T \Lambda U$.אזי נגדיר את הופכי המוכלל(=הפסאדו אינוורס) של Q.להיות

$$Q^\dagger = U^T \Lambda^\dagger U$$

כאשר $\Lambda^\dagger = \operatorname{diag}\left(\tilde{\lambda}_1, \ldots, \tilde{\lambda}_n\right)$ וכאשר $\forall i \in \{1, \ldots, n\} : \tilde{\lambda}_i = \begin{cases} \lambda_i^{-1} & \text{if } \lambda_i > 0 \\ 0 & \text{if } \lambda_i = 0 \end{cases}$ (נבחין כי $Q \succeq 0$ ולכן כל העע' שלה אי שליליים ולכן $Q^\dagger$ מוגדרת היטב.).

הערה 18.9 עמודות U מהוות בסיס אורטונורמלי למרחב $\mathbb{R}^n$ אשר עמודותיה הם הע"ע של Q.(כאשר העמודה הi של U היא הווקטור העצמי המתאים לערך העצמי λ_i של Q (שהע"ע הזה נמצא את האלכסון של Λ)

לכל $\boldsymbol{u} \geq 0$ ולכל $\boldsymbol{v}$,עבור $\left(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{u} + A^T\boldsymbol{v}\right) \perp \operatorname{null}(Q)$ נובע כי $g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ היא חסם תחתון (שאינו טרוואלי,כלומר אינו $-\infty$) של f^*.
(תזוכרת של הסימון : $f^* = \min_{\boldsymbol{x} \in C} f(\boldsymbol{x})$)

הערה 19.9 הסבר על מה זה $\left(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{u} + A^T\boldsymbol{v}\right) \perp \operatorname{null}(Q)$.הסימון $\perp$ משמעו "אורטוגונלי".כלומר המשמעות היא שהווקטור $\left(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{u} + A^T\boldsymbol{v}\right)$ אורטוגונלי ל $\operatorname{null}(Q)$.

הערה 20.9 שני ווקטורים הם אוטוגונליים זה לזה אם ורק אם מכפלתם הפנימית שווה ל0 .כלומר $\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{v} = 0 \iff \boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$.

סימון 21.9 הסבר על מה זה $\operatorname{null}(Q)$, זה אוסף כל הווקטורים שהכפלה שלהם מימין לQ בQ תניב את ווקטור האפס.כלומר $\operatorname{null}(Q) = \{\boldsymbol{x} \mid Q\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$.

כלומר $f^* = \min_{\boldsymbol{x} \in C} f(\boldsymbol{x}) \geq g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ מהווה חסם תחתון על f^* (בנקודות הפיזבליות , חסם תחתון טרוואלי ובנקודות שלא מהווה $-\infty$ שזה גם חסם תחתון על f^*)
אינטואציה לבעיית הלגאנג'יאן הדואלית הנ"ל:

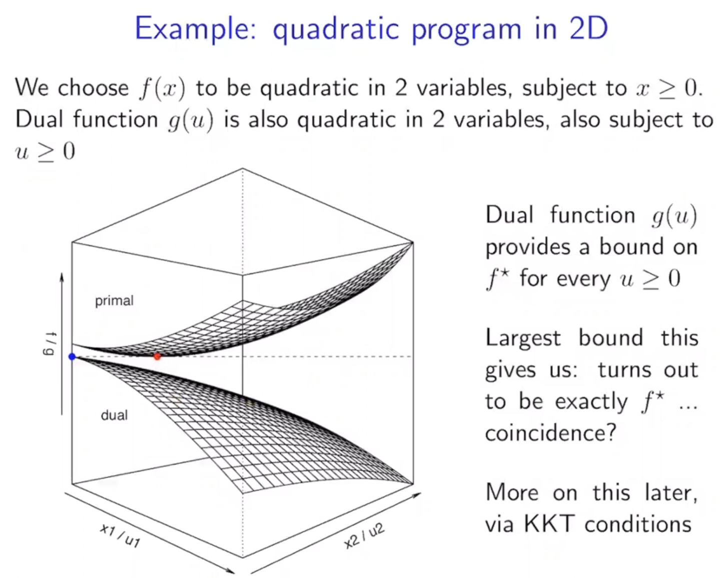
$$g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{u} + A^T\boldsymbol{v}\right)^T Q^\dagger \left(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{u} + A^T\boldsymbol{v}\right) - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{v} & \text{if } \left(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{u} + A^T\boldsymbol{v}\right) \perp \operatorname{null}(Q) \\ -\infty & \text{else} \end{cases}$$

מדוע בבעיית הלגאנג'יאן הדואלית יש אפשרות לקבל $-\infty$?
להלן אינטואציה בדוגמא: $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (כלומר $Q \succeq 0$) ו $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ (נסמן $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$). ואם c_1, c_2 הם לא מתאפסים אז המינימום של הפונ' $\min_{\boldsymbol{x}} \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^TQ\boldsymbol{x} + c^T\boldsymbol{x}$ יהיה מינוס אינסוף.)איך רואים את זה:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^TQ\boldsymbol{x} + c^T\boldsymbol{x} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + c_1x_1 + c_2x_2 \\ &= \frac{1}{2}x_1^2 + c_1x_1 + c_2x_2 \end{aligned}$$

בגלל שלx_2 אין רכיב ריבועי כלל (אין x_2^2 בבטוי) ,אז אם ניקח את x_2 להיות אינסוף בסימן הפוך משל c_2 נקבל $-\infty$.

דוגמה 22.9 איור לדוגמא:



נגיש כי הנקודה התחתונה ביותר בביע ההפרמלית (נקודה אדומה) שווה בערכה לנקודה הגבוהה ביותר בבעיה הדואלית (הנקודה הכחולה).
הדבר הזה הוא לא צירוף מקרים ,המינימום של הבעיה המקורית והמקסימום של הבעיה הדואלית הם מתלכדים עבור בעיות מהצורה הזו, כלומר עבור בעיות קמורות (ותחת תנאים נוספים שנלמד בהמשך).
הדבר הזה הוא לא נכון באופן כללי.
כלומר, אנו כן יודעים שבאופן כללי ערכי פונ' המטרה הפרימלית קטנים או שווים מערכי פונ' המטרה המקורית אבל המקסימום של הדואלי מתלכד עם המינימום של הפרימלי מתקיים רק עבור בעיות עם תכונות מיוחדות,כלומר ההתלכדות הזו לא נכונה באופן כללי.

עד כה, ראינו כי :
הבנתן הבעיה הפרימלית:

$$\begin{gathered} \min_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}) \\ \text{subject to:} h_i(\boldsymbol{x}) \leq 0, i = 0,1,2,\ldots,m \\ l_i(\boldsymbol{x}) = 0, i = 0,1,2,\ldots,r \end{gathered}$$

הפונ' הגואלית $g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ מקיימת $f^* \geq g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ לכל $\boldsymbol{u} \geq 0$ ולכל $\boldsymbol{v}$.נרצה למצוא את החסם ההדוק ביותר של f^* מלמטה.(החסם התחתון הגדול ביותר).
ולכן החסם התחתון ההדוק ביותר הוא מיקסום של $g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ מעל אוסף הנקודות $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ הפיזבליות.
ביצעו מקסמזציה זו יניב את **בעיית לגראנג' הדואלית:**

$$\begin{gathered} \max_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \\ \textbf{subject to :} \boldsymbol{u} \geq 0 \end{gathered}$$

9.1.2 תכונות של הבעיה הדואלית

דואליות חלשה תכונת מפתח נוספת של הבעיה הדואלית היא **דואליות חלשה:**
נסמן את הערך המקסמלי של בעיית לגרדנג' הדואלית g^* (כלומר $g^* = \max_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$) ונסמן את ערך המינמלי של הבעיה הפרמלית (כלומר $f^* = \min_{\boldsymbol{x}} f(x)$) אזי **תכונת הדואליות חלשה** היא שמתקיים

$$f^* \geq g^*$$

הערה 23.9 נשים לב שאי שוויון זה **תמיד מתקיים**. אי שוויון זה מתקיים גם אפילו אם הבעיה הפרמלית היא אינה קמורה.כלומר, **תמיד** המקסימום של הבעיה הדואלית קטן או שווה למינימום של הבעיה הפרימלית.

בעייה קמורה תכונת מפתח נוספת של הבעיה הדואלית היא שהיא מהווה **בעיית אופטמזציה קמורה**. (כפי כשכתבנו אותה קודם , $\begin{array}{l}\max_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} g\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)\\ \text{subject to }:\boldsymbol{u}\geq 0\end{array}$ היא בעיית מקזמציה קעורה שזה שקול לבעיית אופטמזצייה קמורה (ראה הערה מטה)).
לפי הגדרה:

$$\begin{aligned} g\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right) &= \min_{\boldsymbol{x}}\left\{L\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)\right\} \\ &= \min_{\boldsymbol{x}}\left\{\overbrace{f\left(\boldsymbol{x}\right)+\sum_{i=1}^{m}u_i h_i\left(\boldsymbol{x}\right)+\sum_{j=1}^{r}v_i l_j\left(\boldsymbol{x}\right)}^{L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\text{ is linear in }\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}}\right\} \\ &= -\max_{\boldsymbol{x}}\left\{\left[\overbrace{\left(-1\right)\left[f\left(\boldsymbol{x}\right)+\sum_{i=1}^{m}u_i h_i\left(\boldsymbol{x}\right)+\sum_{j=1}^{r}v_i l_j\left(\boldsymbol{x}\right)\right]}^{-L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\text{ is linear in }\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\text{ too}}\right]\right\} \end{aligned}$$

הערה 24.9 אם $g\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)$ קעורה אז $-g\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)$ היא קמורה, אזי $\overbrace{\begin{array}{l}\min_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} -g\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)\\ \text{subject to }:\boldsymbol{u}\geq 0\end{array}}^{\text{convex optimization problem}} \iff \begin{array}{l}\max_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} g\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)\\ \text{subject to }:\boldsymbol{u}\geq 0\end{array}$.כלומר הבעיה הדואלית היא בעיה שתמיד קל לפתור.אנו יודעים לפתור בצורות יעילות בעיות אופטמזציה קמורות אז הבעיה הדואלית נחשבת בעיה קלה יחסית.

נזכר במשפט

משפט 25.9 ("מקסימום של פונקציות קמורות" Pointwise maximiztion) . תהיה קבוצה S .ויהיו $\{f_1,f_2,\ldots\}$ פונקציות.אם לכל $s\in S$ הפונקציה f_s היא פונקציה קמורה אזי הפונקציה $g\left(\boldsymbol{x}\right)=\max_{s\in S} f_s\left(\boldsymbol{x}\right)$ היא גם פונקצייה קמורה.

אנו יודעים כי $L\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)$ לינארית במשתנים $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$.אנו יודעים כי $-L\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)$ לינארית במשתנים $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$.ולכן הפונ' $\min_{\boldsymbol{x}} L\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)$ גם היא פונ' לינארית וגם $\max_{\boldsymbol{x}} L\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)$

המרצה מדבר על השקף הנ"ל בשעה $00:06:01$ ולא הבנתי אותו.בהרצאה מספר 9 .
להלן השקף

Another key property: the dual problem is a convex optimization problem (as written, it is a concave maximization problem)

Again, this is always true (even when primal problem is not convex)

By definition:

!! $L(x,u,v)$ is linear in (u,v)

$$g(u,v) = \min_x \left\{ f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i h_i(x) + \sum_{j=1}^{r} v_j \ell_j(x) \right\}$$

$-L(x,u,v)$

$$= -\underbrace{\max_x \left\{ -f(x) - \sum_{i=1}^{m} u_i h_i(x) - \sum_{j=1}^{r} v_j \ell_j(x) \right\}}_{\text{pointwise maximum of convex functions in } (u,v)}$$

That is, g is concave in (u,v), and $u \geq 0$ is a convex constraint, so dual problem is a concave maximization problem

12

המסקנה היא שהבעיה הדואלית היא בעיית אופטמזיציה מסוג מקסמזיציה קעורה או (=ששקולה ל) בעיית מינזציה קונבקסית (קעורה) . (כלומר,רוב הבעיות שראינו עד כה)

מה שמעניין זה שהתכונה הנ"ל על הבעיה הדואלית כלל לא תלויה בתכונות של הבעיה הפרימלית.(לא משנה איך נראית פונ' המטרה או האילוצים ב

$$\min_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x})$$
$$\text{subject to:} h_i(\boldsymbol{x}) \leq 0, i = 0,1,2,\ldots,m$$
$$l_i(\boldsymbol{x}) = 0, i = 0,1,2,\ldots,r$$

תמיד הבעיה הדוארלית היא אופטמזיציה מסוג מקסמזיציה קעורה או בעיית מינזציה קונבקסית (קעורה)

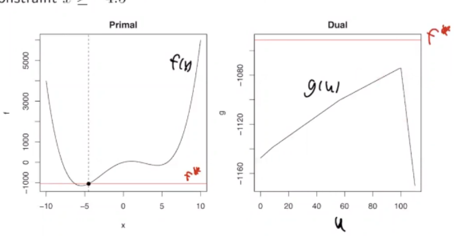
9.1.3 דוגמא

דוגמה 26.9 דוגמא : מזעור בעייה ריבועית אינה קמורה

ניקח את הפונ' הבאה (פונ' לא קמורה) $f(x) = x^4 - 50x^2 + 100x$ (לא קמורה) רוצים למזער את $f(x)$ תחת האילוצים ש $x \geq -4.5$.

Example: nonconvex quartic minimization

Define $f(x) = x^4 - 50x^2 + 100x$ (nonconvex), minimize subject to constraint $x \geq -4.5$



Dual function g can be derived explicitly, via closed-form equation for roots of a cubic equation

כלומר לפי שתי תכונות המפתח , אכן $g(u)$ מהווה חסם תחתון על f^*.בנוסף $g(u)$ קעורה.(המינוס של $g(u)$ קמור).לכן $g(u)$ מהווה בעיית אופטמזיציה.

הפונ' הדואלית g נתונה במופרש על ידי נוסחא סגורה של המשוואות של השורשים הריבועיים של הבעיה הנ"ל.

(נזכר שהלגראנגזיאן מוגדר על ידי $L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i h_i(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{r} v_j l_j(\boldsymbol{x})$ במקרה הכללי)
נתובנן בבעיה

$$\begin{gathered}\min_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}) \\ \text{subject to:} h_i(\boldsymbol{x}) \leq 0, i = 0,1,2,\ldots,m \\ l_i(\boldsymbol{x}) = 0, i = 0,1,2,\ldots,r\end{gathered}$$

עבור המקרה שלנו

$$\min_{x \geq 4.5} f(x) = x^4 - 50x^2 + 100x$$

ניתן לרשום את האילוץ באופן הבא

$$x \geq -4.5 \Rightarrow \overbrace{-x-4.5}^{h(x)} \leq 0 \Rightarrow h(x) = -x - 4.5 \leq 0$$

נרשום את הלגרנז'יאן של במקרה הכללי

$$L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i h_i(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{r} v_j l_j(\boldsymbol{x})$$

ונרשום את הלגרנז'יאן של במקרה שלנו

$$\begin{aligned}L(x,u) &= f(x) + uh(x) \\ &= x^4 - 50x^2 + 100x + u^T(-x-4.5) \\ &= x^4 - 50x^2 + 100x - u^T(x+4.5)\end{aligned}$$

כלומר הלגראנגיאן של הפונ' נתון על ידי

$$L(x,u) = x^4 - 50x^2 + 100x - u^T(x+4.5)$$

אנו יודעים כי

$$g(u) = \min_x L(x,u)$$

איך מחשבים את $\min_x L(x,u)$? $$\nabla_x L(x,u) = \frac{d}{dx} L(x,u) = 0$$ לאחר הגזירה מקבלים משוואה מסדר 3, עם שלושה שורשים ואחד מהם הוא המינימום הגלובלי.ולכן נציב את כל אחד מהשורשים בבעיה המקורית ונמצא מי מהם יניב את הערך המינמלי.(הנגזרת תמיד מתאפסת במינימום הגלובלי ולכן נציב את שלושת השורשים שמצאנו ונראה מי יניב את הערך הכי נמוך).

אפשר ממש לחשב את $g(u)$ לכל u (פתרון משוואה ממעלה 3 לכל u) וקבל פתרון סגור ל$g(u)$.זה לא נעים אבל אפשרי.הפתרון הזה אינו טרוואלי והוא נתון על ידי:

$$g(u) = \min_{i=1,2,3} \left\{F_i^4(u) - 50F_i^2(u) + 100F_i(u)\right\}$$

כאשר לכל $i \in \{1,2,3\}$

$$\begin{aligned}F_i(u) = &\frac{-a_i}{12 \cdot 2^{\frac{1}{3}}} \cdot \left(432(100-u) - \left(432^2(100-u)^2 - 4 \cdot 1200^3\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &- 100 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{\left(432(100-u) - \left(432^2(100-u)^2 - 4 \cdot 1200^3\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}}\end{aligned}$$

כאשר $a_1=1,a_2=\frac{\left(-1+i\sqrt{3}\right)}{2},a_3=\frac{\left(-1-i\sqrt{3}\right)}{2}$.
מבלי ההקשר של דאליות יהיה מאוד קשה לומר האם g קמורה או שאינה קמורה,אבל בגלל תכונת הדואליות אנו יודעים כי g היא קמורה.(אנו יודעים כי g היא בעיה דואלית של איזה שהיא בעיה פרימלית ולכן אנו מידית מסיקים כי g היא בעייה קעורה).

מסקנה 27.9 ולכן אם יש לי פונ' g כלשהיא שרוצים להוכיח (לדוגמא במבחן) שהיא קעורה,אז נוכל להראות שהיא מהווה בעיה דואלית של איזה שהיא בעיה פרימלית ולפי התכונה של בעיה דואלית יינבע כי g היא פונ' קעורה.**זו תכונה מאוד משמעותית.**

9.1.4 דואליות חזקה.

נזכר כי ראינו שתמיד $f^*\geq g^*$ (דואליות חלשה) .
מצד שני, קיימות בעיות עבורם ניתן להראות כי $f^*=g^*$.לתכונה זו קוראים **דואליות חזקה.**

משפט 28.9 תנאיי סלטר.

1. **אם** הבעיה הפרמילית היא בעיית אופטמזיציה קמורה (כלומר אם הבעיה הפרימלית

$$\begin{array}{c}\min_{\boldsymbol{x}} f\left(\boldsymbol{x}\right)\\ \text{subject to:} h_i\left(\boldsymbol{x}\right)\leq 0, i=1,1,2,\ldots,m\\ l_i\left(\boldsymbol{x}\right)=0, i=1,1,2,\ldots,r\end{array}$$

כך ש f הן פונ' קמורה והאילוצים $\{h_i\}_{i=1}^m$, קמורים והאילוצים $\{l_i\}_{r=1}^r$ אפינים(=לינארים))

2. **ובנוסף קיימת נקודה** $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ כך שמתקיים

$$\begin{array}{c}\forall i\in\{1,\ldots,m\}:h_i\left(x\right)<0\\ \text{and}\\ \forall i\in\{1,\ldots,r\}:l_i\left(x\right)=0\end{array}$$

(נקודה פיזבלית שמקיימת את כל אילוצי האי שוויון כאי שוויון חזק)

אזי נאמר שתנאיי סלטר מתקיימים **ולכן תכונת הדואליות חזקה מתקיימת , כלומר מתקיים** $f^*=g^*$.

הערה 29.9 ההוכחה של המשפט היא לא טרוואלית (היא לא פשוטה ודורשת רקע נוסף) בקורס המתקדם שניתן הסמסטר על ידי המרצה כפיר לוי הוכיחו את המשפט הנ"ל.

מסקנה 30.9 **אם** תנאיי סלטר מתקיימים **אז** תכונת הדואליות חזקה מתקיימת , כלומר מתקיים $f^*=g^*$.

9.1.5 דואליות בבעיות תכנות לינארי linear programs

בהנתן $c\in\mathbb{R}^n,A\in\mathbb{R}^{m\times n},b\in\mathbb{R}^m,G\in\mathbb{R}^{r\times n},h\in\mathbb{R}^r$:

Primal LP	dual LP
$\min_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$	$\max_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} -\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{u}-\boldsymbol{h}^T\boldsymbol{v}$
subject to $\begin{array}{c}A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\\ G\boldsymbol{x}\leq\boldsymbol{h}\end{array}$	subject to $\begin{array}{c}-A^T\boldsymbol{u}-G^T\boldsymbol{v}=\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{v}\geq 0\end{array}$

כלומר אם לוקחים בעיית linear program ומתסכלים על הבעיה הדואלית שלה ,מגלים שגם היא בעיית linear program.
הסבר:
לכל $\boldsymbol{u}$ ולכל $\boldsymbol{v}\geq 0$ ולכל $\boldsymbol{x}$ פיזבלי

$$\begin{array}{c}\boldsymbol{u}^T\left(A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\right)+\boldsymbol{v}^T\left(G\boldsymbol{x}-\boldsymbol{h}\right)\leq 0\\ \iff\left(-A^T\boldsymbol{u}-G^T\boldsymbol{v}\right)^T\boldsymbol{x}\geq-\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{u}-\boldsymbol{h}^T\boldsymbol{v}\end{array}$$

הערה 31.9 (נבחין כי בסמני השאלה הזו $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ בתקפידים הפוכים מבד"כ,זה סתם סימונים הפוכים מבד"כ ואין פה איזה משהו מעבר לזה)

ולכן אם $\boldsymbol{c} = -A^T\boldsymbol{u} - G^T\boldsymbol{v}$ נקבל חסם של הערך האופטמלי של הבעיה הפרימלית.
נוכיח את השקילות הנ"ל:

נוכיח את השקילות עם הסימונים של $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ בתפקידים כמו שאנו מכירים (ולא הפוכים כמו למעלה) ולבסוף נהפוך את התפקידים של $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$)

$$\text{Primal LP}: \begin{array}{cc} & \min_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & \begin{array}{c} A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \\ G\boldsymbol{x}\le \boldsymbol{h}\end{array}\end{array}$$

נמצא את הלגאנג'יאן.האילוצים הלינארים (אילוצי השוויון $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$) מיוצגים על ידי הווקטור $\boldsymbol{v}$ והאילוצים הלא לינארים (אילוציי האי שוויון $G\boldsymbol{x}\le\boldsymbol{h}$) מיוצגים על ידי הווקטור $\boldsymbol{u}$.אזי

$$\begin{gathered} A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\Rightarrow A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}=0\Rightarrow A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}=0 \\ G\boldsymbol{x}\le\boldsymbol{h}\Rightarrow G\boldsymbol{x}-\boldsymbol{h}\le 0\end{gathered}$$

ההלגראנג'יאן
נתון על ידי

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) &= \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}^T(G\boldsymbol{x}-\boldsymbol{h})+\boldsymbol{v}^T(A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}) \\ &= \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}^TG\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{h}+\boldsymbol{v}^TA\boldsymbol{x}-\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{b} \\ &= \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}^TG\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}^TA\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{h}-\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{b} \\ &= \left(\boldsymbol{c}^T+\boldsymbol{u}^TG+\boldsymbol{v}^TA\right)\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{h}-\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

(כאשר $\boldsymbol{u}\ge 0$ ו $\boldsymbol{v}$ הוא ווקטור ממימד מתאים)כלומר הלאגראנז'יאן נתון על ידי

$$L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\left(\boldsymbol{c}^T+\boldsymbol{u}^TG+\boldsymbol{v}^TA\right)\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{h}-\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{b}$$

נזכר שבונים את בעיה הדואלית $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ על ידי מזעור הלגאנג'יאן $L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ על פני $\boldsymbol{x}$. (כלומר $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=$ $\min_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$)
נבחין בין 2 מקרים:

1. המקרה הראשון כאשר $\left(\boldsymbol{c}^T+\boldsymbol{u}^TG+\boldsymbol{v}^TA\right)\neq 0$ במקרה זה

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\min_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=-\infty$$

(מכיוון שנוכל לבחור $\boldsymbol{x}$ באופן כזה שייהפוך את הפונ' למינוס אינסוף,נבחר רכיב שאינו מתאפס ב$\left(\boldsymbol{c}^T+\boldsymbol{u}^TG+\boldsymbol{v}^TA\right)$ ונגדיר רכיב שקול לו ב$\boldsymbol{x}$ עם סימן הפוך וגודל (בערך מוחלט) גדול מאוד מאוד,כרצוננו , ונקבל $-\infty$)

2. אחרת כאשר $\left(\boldsymbol{c}^T+\boldsymbol{u}^TG+\boldsymbol{v}^TA\right)=0$ ואז

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\min_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=-\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{h}-\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{b}$$

ולכן הבעיה הדואלית נתונה על ידי:

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\min_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=-\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{h}-\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{b}$$

ולכן

$$\begin{array}{c}\max_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \\ \text{s.t}: \boldsymbol{u}\ge 0,\boldsymbol{v}\end{array} \iff \begin{array}{cc} & \max_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} -\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{h}-\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{b} \\ \text{s.t}: & \begin{array}{c}\boldsymbol{u}\ge 0,\boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{c}^T+\boldsymbol{u}^TG+\boldsymbol{v}^TA=0\end{array}\end{array} \quad (\text{Dual LP})$$

מסקנה: אם בעיית האופטמיזציה היא LP אז גם בעיית האופטמיזציה הדואלית שלה היא גם LP .וזו אחת התכונות החשובות של דואליות.

הערה:
אם קיים פער בין מה שכתוב כאן למה שכתוב מעלה (מחוץ למלבן) מה שכתוב במלבן הוא הקובע(המכריע) ,(זה מה שהמרצה כפיר אמר,ופיתח בהרצאה בעצמו).

9.1.6 בעיית SVM

תזכורת:בהנתן $\boldsymbol{y}\in\{-1,1\}^n$ ו$\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^{n\times p}$ עם שורות $x_1,\ldots,x_n$ (כלומר $X=\begin{pmatrix}-x_1-\\-x_2-\\\vdots\\-x_n-\end{pmatrix}$ כאשר $\forall i\in\{1,\ldots,n\}:x_i\in\mathbb{R}^p$) ויהא $C\geq 0$.כלומר יש לנו אוסף של זוגות $\{(x_i,y_i)\}_{i=1}^n$ כאשר $\forall i\in\{1,\ldots,n\}:x_i\in\mathbb{R}^p,y_i\in\{-1,1\}$) נגדיר את בעיית הsupport vector machine או הSVM (בעיית הווקטורים התומכים) באופן הבא :

$$\begin{gathered}\min_{\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^p,\beta_0\in\mathbb{R},\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^n}\frac{1}{2}\|\boldsymbol{\beta}\|_2^2+C\sum_{i=1}^n\xi_i+\frac{1}{2}\beta_0^2\\ \text{subject to }\xi_i\geq 0\quad,i=1,\ldots,n\\ y_i\left(\boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{\beta}+\beta_0\right)\geq 1-\xi_i\qquad,i=1,2,\ldots,n\end{gathered}$$

הערה 32.9 את הרכיב $\frac{1}{2}\beta_0^2$ הוספנו לבעיה, (הוא לא היה בבעיה של הSVM המקורית) כלומר פונ' המטרה $\frac{1}{2}\|\beta\|_2^2+C\sum_{i=1}^n\xi_i+\frac{1}{2}\beta_0^2$ היא ריבועית בβ־ות (ב β_0) ועוד רכיב שהוא לינארי ב ξ_i־ים.(כשעושים SVM באופן מעשי מוסיפים את הרכיב $\frac{1}{2}\beta_0^2$ הזה)

בהרבה קורסים מציגים את בעיית הSVM ומציגים את בעיית הSVM הדואליות בלי ממש הרבה הסברים מאיפה הדואליות של הבעיה נולדה.הדואליות שמדברים עליה בקורסים שקיימים זו בדיוק הדואליות במובן שדיברנו עליו בקורס.הבעיה הדואלית היא הבעיית SVM שהצגנו כעת והבעיה הדואלית היא ניתנת לפיתוח באותו אופן שהצגנו עד כה (כותבים את הפונ' הדואלית ומנסים למקסם את הפונ' הדואלית במקום למזער את הפונ' הפרימלית). בעיית הSVM מקיימת את תכונת הפרימליות החזקה , כלומר $g^*=f^*$.(למה זה נכון?כי הבעיה היא בעיית אופטמזציה קמורה ונראה שהיא מקיימת את תנאי סליידר,קיימים β ו ξ־ים שמיקיימים את אילוצי האי שוויון בתצורה של אי שוויונות החזקים (בלשון העם:מקיימים אותם ממש)).אין לנו בבעיה זו אילוצי שוויון,יש לנו 2 סוגים של אילוצי אי שוויון

נמצא את הבעיי הדואלית של בעיית הSVM .

נציג את המשתנים החדשים $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ כך ש $\mathbb{R}^n\ni\boldsymbol{v}\geq 0,\mathbb{R}^n\ni\boldsymbol{w}\geq 0$ שמתייחסים לכל אחד מאילוצי האי שוויון

- $\boldsymbol{v}$ הוא ווקטור כופלי לגראנג' שמתאים לאילוצים $,i=1,\ldots,n\quad \xi_i\geq 0$ (יש n אילוצים כאלו ולכן $\mathbb{R}^n\ni\boldsymbol{v}$) אילוץ זה הוא אילוץ אי שוויון ולכן $\boldsymbol{v}\geq 0$.
- $\boldsymbol{w}$ הוא ווקטור כופלי לגראנג' שמתאים לאילוצים $,i=1,2,\ldots,n\qquad y_i\left(\boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{\beta}+\beta_0\right)\geq 1-\xi_i$) (יש n אילוצים כאלו ולכן $\mathbb{R}^n\ni\boldsymbol{w}$)אילוץ זה הוא אילוץ אי שוויון ולכן $\boldsymbol{w}\geq 0$.

במקרה הזה הלגאנג'יאן נתון על ידי

$$L\left(\boldsymbol{\beta},\beta_0,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}\right)=\overbrace{\frac{1}{2}\|\boldsymbol{\beta}\|_2^2+C\sum_{i=1}^n\xi_i+\frac{1}{2}\beta_0^2}^{\text{comes from original SVM target fuction}}-\sum_{i=1}^n v_i\xi_i+\sum_{i=1}^n w_i\left(1-\xi_i-y_i\left(\boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{\beta}+\beta_0\right)\right)$$

סימון 33.9 נוסיף את הסימונים הבאים:

$$\mathbf{1}=\begin{pmatrix}1&1&,\ldots,&1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n,\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\vdots\\\xi_n\end{pmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_i=\begin{pmatrix}y_i\boldsymbol{x}_i\\y_i\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{p+1}$$

נבחין כי $\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^n$ ו $\beta_0\in\mathbb{R}$.את שני אלו נאחד לכדי משתנה אחד.

$$\tilde{\beta}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}\\\beta_0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n+1},\tilde{X}=\begin{pmatrix}-\tilde{x}_1-\\-\tilde{x}_2-\\\vdots\\-\tilde{x}_n-\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times(p+1)}$$

$$L\left(\boldsymbol{\beta},\beta_0,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}\right)=\overbrace{\frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{\beta}\right\|_2^2+\frac{1}{2}\beta_0^2}^{\frac{1}{2}\left\|\tilde{\boldsymbol{\beta}}\right\|_2^2}+\overbrace{C\sum_{i=1}^{n}\xi_i}^{C\xi^T\mathbf{1}}-\overbrace{\sum_{i=1}^{n}v_i\xi_i}^{\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{\xi}}+\overbrace{\sum_{i=1}^{n}w_i\left(1-\xi_i-y_i\left(\boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{\beta}+\beta_0\right)\right)}^{\boldsymbol{w}^T\left(1-\boldsymbol{\xi}-\tilde{X}\boldsymbol{\beta}\right)}$$

באמצעות ההגדרות החדשות נוכל לכתוב את הלגראנגזיאן מחדש באופן הבא:

$$L\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}\right)=\frac{1}{2}\left\|\tilde{\boldsymbol{\beta}}\right\|_2^2+C\xi^T\mathbf{1}-\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{w}^T\left(\mathbf{1}-\boldsymbol{\xi}-\tilde{X}\boldsymbol{\beta}\right)$$

נוכל לרשום אותו גם באופן הבא:

$$\begin{aligned}L\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}\right)&=\frac{1}{2}\left\|\tilde{\boldsymbol{\beta}}\right\|_2^2+C\xi^T\mathbf{1}-\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{w}^T\mathbf{1}-\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{w}^T\tilde{X}\boldsymbol{\beta}\\&=\frac{1}{2}\left\|\tilde{\boldsymbol{\beta}}\right\|_2^2+\boldsymbol{w}^T\mathbf{1}-\boldsymbol{w}^T\tilde{X}\boldsymbol{\beta}+C\mathbf{1}^T\xi-\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{\xi}\\&=\frac{1}{2}\left\|\tilde{\boldsymbol{\beta}}\right\|_2^2+\boldsymbol{w}^T\mathbf{1}-\boldsymbol{w}^T\tilde{X}\boldsymbol{\beta}+\left(C\mathbf{1}^T-\boldsymbol{v}^T-\boldsymbol{w}^T\right)\boldsymbol{\xi}\\&=\frac{1}{2}\left\|\tilde{\boldsymbol{\beta}}\right\|_2^2+\boldsymbol{w}^T\mathbf{1}-\boldsymbol{w}^T\tilde{X}\boldsymbol{\beta}+\left(C\mathbf{1}-\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\right)^T\boldsymbol{\xi}\end{aligned}$$

כלומר

$$L\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}\right)=\frac{1}{2}\left\|\tilde{\boldsymbol{\beta}}\right\|_2^2+\boldsymbol{w}^T\mathbf{1}-\boldsymbol{w}^T\tilde{X}\boldsymbol{\beta}+\left(C\mathbf{1}-\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\right)^T\boldsymbol{\xi}$$

נרצה כזכור למצוא את הבעיה הדואלית. נבחין כי הלגראנגזיאן הוא פונ' קמורה ב$\tilde{\boldsymbol{\beta}},\boldsymbol{\xi}$.
מציאת הבעיה הדואלית:
איך נראית הבעיה הדואלית ?

$$g\left(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\right)\triangleq\min_{\tilde{\boldsymbol{\beta}},\boldsymbol{\xi}}L\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}\right)$$

הלגראנגזיאן הוא פונ' קמורה ב$\tilde{\boldsymbol{\beta}},\boldsymbol{\xi}$.ולכן מספיק למצוא $\tilde{\boldsymbol{\beta}},\boldsymbol{\xi}$ כך ש $\left[\nabla L\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}\right)\right]\Big|_{\tilde{\boldsymbol{\beta}},\boldsymbol{\xi}}=0$.

- אם רוצים לעשות מינימזציה בהתייחס ל $\boldsymbol{\xi}$ ובנוסף $\left(C\mathbf{1}-\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\right)^T\neq\mathbf{0}$, אז נקבל כך ש $g\left(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\right)=-\infty$ (כפי שראינו בעבר).
- ולכן , נוסיף **אילוץ שוויון** על הבעיה כך ש $\left(C\mathbf{1}-\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\right)^T=\mathbf{0}$ (ננטרל את ההשפעה של $\boldsymbol{\xi}_i$) (כי אם נבחר את $\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}$ כך שהווקטור $C\mathbf{1}-\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\neq0$ אזי הבעיה הדואלית ערכה יהיה $-\infty$.אנו רוצים למזער את הדואליות ולכן נוסיף את אילוץ השוויון $\left(C\mathbf{1}-\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\right)^T=\mathbf{0}$ לבעיה הדואלית.
- ואז מספיק למצוא א $\tilde{\boldsymbol{\beta}},\boldsymbol{\xi}$ כך ש $\left[\nabla L\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}\right)\right]\Big|_{\tilde{\boldsymbol{\beta}}}=0$.

ולכן מזעור על פני $\tilde{\boldsymbol{\beta}},\boldsymbol{\xi}$ (כלומר על פני $\boldsymbol{\beta},\beta_0,\boldsymbol{\xi}$) יניב את הפונ' הדואלית (פונ' הלגראנג'יאן הדואלית) :

$$g\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)=\begin{cases}-\frac{1}{2}\boldsymbol{w}^T\tilde{X}X\boldsymbol{w}+\mathbf{1}^T\boldsymbol{w} & \text{if}\boldsymbol{w}=C\mathbf{1}-\boldsymbol{v}\\-\infty & \text{else}\end{cases}$$

(היא מתקבלת עבור גזירה לפי $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ והצבה בלגרנז'יאן , כלומר $\left[\nabla L\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}\right)\right]\Big|_{\tilde{\boldsymbol{\beta}}}=0$) .
נרצה להפטר מה$\boldsymbol{v}$ בבטוי .
נזכור כי $0\leq\boldsymbol{v}\leq1$ ולכן אילוץ השוויון $\boldsymbol{w}=C\mathbf{1}-\boldsymbol{v}$ נוכל לרשום כך את

בעיית SVM הדואלית:

$$\begin{array}{c}\max_{\boldsymbol{w}} -\frac{1}{2}\boldsymbol{w}^T\tilde{X}X\boldsymbol{w}+\mathbf{1}^T\boldsymbol{w}\\ \text{s.t:}0\leq\boldsymbol{w}\leq C\mathbf{1}\end{array}$$

בדיקה:

תנאיי סלטר מתקיימים ולכן יש לנו דואליות חזקה.בנוסף , נזכר שהפתרון של SVM מקיים $\boldsymbol{\beta}=\tilde{X}^T\boldsymbol{w}$, זה לא מקרי, כמו שנקרה בהמשך על ידי תנאי KKT .

9.2 תרגול 9

9.2.1 דואליות

נתבונן בבעיית האופטימזציה (נסמנה בעיה (P)):

$$(P):\qquad \begin{aligned}&\min_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x})\\ &\text{s.t.} g_i(\boldsymbol{x})\leq 0, i=1,\ldots,m\\ &\quad h_j(\boldsymbol{x})=0, j=1,\ldots,p\\ &\quad \boldsymbol{x}\in C\end{aligned}$$

סימון 34.9 נסמן את הערך האופטמלי שלה ב P^*.

הגדרה 35.9 הלגראנג'יאן המתאים לבעיה זו הינו

$$L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})=f(\boldsymbol{x})+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(\boldsymbol{x})+\sum_{j=1}^{p}\mu_j h_j(\boldsymbol{x})\qquad ,\boldsymbol{x}\in C,\mathbb{R}^m\ni\boldsymbol{\lambda}\geq\mathbf{0},\boldsymbol{\mu}\in\mathbb{R}^p$$

פונ' המטרה הדואלית נתונה על ידי

$$q(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})=\inf_{\boldsymbol{x}\in C}L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})$$

הערה 36.9 יוכל להיות אינפימום inf מכיוון שהפונ' $q(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})$ יכולה לשאוף ל$-\infty$.בנוסף המינימום עצמו לא חייב להתקבל.(לדוגמא במקרה של C קבוצה פתוחה) ולכן נגדיר את המינמזיציה על ידי inf.

הערה 37.9 לעתים הקבוצה C היא לא להיות מצוינת במפורש, ואז $C=\mathbb{R}^n$.כלומר ין מקבלות נוספות מעבר לאילוצי האי שוויון והשוויון.חשוב להדגיש כי $L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})$ $\inf_{\boxed{\boldsymbol{x}\in C}}$ כלומר **האינפימום מבוצע מעל** C (כלומר כשאנו מחפשים את $\inf_{\boldsymbol{x}\in C}L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})$

לא אכפת לנו כלל מאילוצי השוויון והאי שוויון יותר (כלומר לא אכפת לנו מ $\begin{array}{l}g_i(\boldsymbol{x})\leq 0, i=1,\ldots,m\\ h_j(\boldsymbol{x})=0, j=1,\ldots,p\end{array}$ יותר).

ולכן כאשר אין אילוץ C נוסף ($C=\mathbb{R}^n$), אז המינמזיציה על הלגראנגזיאן תהיה מהצורה $q(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})=\inf_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n}L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})$.

הערה 38.9 בהרצאה ראינו כי $C=\{\boldsymbol{x}\mid\forall i\in\{1,\ldots,m\}:g_i(\boldsymbol{x})\leq 0 \text{ and } j\in\{1,\ldots,p\}\,h_j(\boldsymbol{x})=0\}$ הקורס בהרצאה ובתרגול קצת שונים כי הקורס עבר שנויים ולכן C בתרגול מוגדר אחרת (יכול להיות מוגדר בנפרד מ$(g_i(\boldsymbol{x}),h_j(\boldsymbol{x}))$. כלומר ההגדרה שלומדים כאן שונה מההרצאות וחשוב לשים לב לזה.

באופן כללי,לא כל קבוצת אילוץ C אפשר לבטא על ידי סט אילוצי שוויון ואי שוויון $\forall i\in\{1,\ldots,m\}:g_i(\boldsymbol{x})\leq 0 \text{ and } j\in\{1,\ldots,p\}\,h_j(\boldsymbol{x})=0$ ולכן האופן הכללי ביותר שבו ניתן להביע אילוץ הוא על ידי קבוצה C כלשהיא.

דוגמה 39.9 נניח ויש נו אילוץ $\boldsymbol{x}\geq 0$ אז נוכל לייצג אותו בכמה אפשרויות(אין סתירה בינהם וזה שיקול שעומד בפני פותר התרגיל):

1. בתור פונ' g כלשהיא ואז הוא ייתבטא באיבר של הלגאנג'יאן (מהצורה $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(\boldsymbol{x})$), ואז כשנחפש את הבעיה הדואלית נוכל לבצע מנימזיציה על כל $\mathbb{R}^n$ מציאת הבעיה הדואלית $q(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})=\inf_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n}L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})$.

2. מצד אחר נוכל להכניס אותו לקבוצה C ואז הו אלא ייטבטא כאיבר של הלגאנג'יאן אבל מציאת הבעיה הדואלית $q(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}) = \inf_{\boldsymbol{x}\in C} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})$. תתבצע על ידי מינימזציה מעל התחום של C.

הגדרה 40.9 ייתכן כי ערך פונקציית המטרה הדואלית הוא $-\infty$.נגדיר לפיכך את התחום של פונקציית המטרה הדואלית על ידי

$$\mathrm{dom}q = \{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu} \mid \mathbb{R}^m \ni \boldsymbol{\lambda} \geq 0, \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p, q(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}) > -\infty\}$$

הערה 41.9 נדגיש כי $\mathrm{dom}q > -\infty$ כלומר בתחום ההגדרה של q ישנם רק ערכים שגדולים מ$-\infty$.כלומר q על תחום הגדרתה היא פונ' **סופית**.

משפט 42.9 אם בבעיה (P) כל הפונ' סופיות מעל הקבוצה C, אזי הקבוצה $\mathrm{dom}q$ קמורה והפונ' $q(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})$ קעורה מעל $\mathrm{dom}q$.

הגדרה 43.9 הבעיה הדואלית נתונה על ידי (נסמנה בעיה (D)):

$$\begin{aligned}&\max_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}} q(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})\\ &\text{s.t. } (\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}) \in \mathrm{dom}q\end{aligned}$$

משפט 44.9 הבעיה הדואלית תמיד קמורה (המשפט נכון גם אם הבעיה (P) אינה קמורה).

הערה 45.9 נשים לב כי $(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}) \in \mathrm{dom}q$ ולכן לפי הגדרת $\mathrm{dom}q$ נובע כי $\forall(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}) \in \mathrm{dom}q : q(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}) > -\infty$. לפי המשפט הקודם הקבוצה $\mathrm{dom}q$ קמורה והפונ' $q(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})$ קעורה מעל $\mathrm{dom}q$ ולכן הבעיה D היא בעיית אופטמזציה מסוג מקסמזציה של פונ' קעורה (שקול לבעיית אופטמזציה מסוג מינימזציה קונבקסית) כלומר בעיית האופטמזציה היא בעיית אופטמזציה קמורה.

כלומר יש כאן **משפט מאוד מאוד חזק**,התחלנו מבעיה כללית כלשהיא שלא ידענו עליה כלום (אפילו לא חייב שהבעיה המקורית תהיה בעייה קמורה) וייצרנו מתוכה בעיית אופטמיזציה קמורה חדשה (הבעיה הדואלית) שמפתרונה נוכל להסיק מסקנות (בתקווה) על הבעיה המקורית).ולפתור את הבעיה הדואלית יכול להיות קל יותר מכיוון שזו בעיית אופטמזציה קמורה,ויש לנו לא מעט כלים בארגז לפתור בעיות מסוג כזה.

סימון 46.9 נסמן את הערך האופטמלי של הבעיה הדואלית ב D^*.

כלומר לפי הסימונים

primal problem		dual problem	
$(P):$	$\begin{aligned}&\min_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x})\\ &\text{s.t.} g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0, i=1,\ldots,m\\ &h_j(\boldsymbol{x}) = 0, j=1,\ldots,p\\ &\boldsymbol{x} \in C\end{aligned}$	$(D):$	$\begin{aligned}&\max_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}} q(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})\\ &\text{s.t. } (\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}) \in \mathrm{dom}q\end{aligned}$
solution:	P^*	solution:	D^*

משפט 47.9 (דואליות חלשה) עבור הבעיות (P) ו (D) מתקיים

$$P^* \geq D^*$$

הערה 48.9 המשפט הנ"ל (דואליות חלשה) הנ"ל נכון תמיד.

מסקנה 49.9 בפרט מתקיים

$$P^* \geq q(\boldsymbol{\lambda}_0,\boldsymbol{\mu}_0) \qquad ,\forall(\boldsymbol{\lambda}_0,\boldsymbol{\mu}_0) \in \mathrm{dom}q$$

(זה נכון מכיוון ש $\forall(\boldsymbol{\lambda}_0,\boldsymbol{\mu}_0) \in \mathrm{dom}q : D^* \triangleq \max_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}} q(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}) \geq q(\boldsymbol{\lambda}_0,\boldsymbol{\mu}_0)$) כלומר מכאן נובע כי D^* הוא החסם התחתון ההדוק ביותר שניתן להשיג על בעייה(P) שנולדים מהבעיה הדואלית.

הגדרה 50.9 ההפרש $P^* - D^*$ ייקרא **פער הדואליות** .

הגדרה 51.9 אם פער הדואליות הוא 0, כלומר $P^* = D^*$ אז אנו אומרים כי מתקיימת **דואליות חזקה.**

הגדרה 52.9 אנו אומרים שהבעיה (P) מקיימת את **תנאי סלייטר** אם **קיים** $\hat{\boldsymbol{x}} \in \operatorname{int}(C)$ ($\hat{\boldsymbol{x}}$ שייך לפנים של C כלומר ל Interior של C (כלומא לא על השפה של C)) כך ש $g_i(\hat{\boldsymbol{x}}) < 0$: $\forall i \in \{1, \ldots, m\}$ ובנוסף $h_j(\hat{\boldsymbol{x}}) = 0$: $\forall j \in \{1, \ldots, p\}$.

כלומר , תנאי סלייטר מתקיים אם קיימת נקודה ש"**מקיימת ממש**"את האילוצים. (מקיים את אי השוויונות שבאילוצים גם אילו היו אי שוויונות חזקים ונמצאת בפנים של C)

משפט 53.9 (**דואליות חזקה במקרה הקמור**) אם הבעיה (P) קמורה , מקיימת את תנאי סלייטר וכן $P^* > -\infty$ אזי **מתקיימת דולאיות חזקה**. כלומר

$$P^* = D^*$$

הערך האופטמלי של הבעיה הדואליות,**תמיד** מהווה חסם תחתון לערך האופטמלי של הבעיה המקורית (הפרימאלית) .

כאשר מתקיימת דואליות חזקה , ניתן לעיתים ־ לפתור את הבעיה המקורית באמצעות הבעיה הדואלית).

(כלומר **אם** הבעייה מקיימת 3 תנאים:1.קמורה 2.מקיימת את סלייטר 3.הפתרו והאופטמלי שלה הוא $P^* > -\infty$**אזי מתקיימת דולאיות חזקה**)

הערה 54.9 לעיתים יותר קל לפתור את הבעיה הדואלית בבעיה המקורית אנו צריכים לעשות מינמזציה על ווקטור אחד בגדול $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ (n משתנים) בבעיה הדואלית צריך לעשות מנימזציה על 2 ווקטורים $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}$ (כאשר $\mathbb{R}^m \ni \boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p$) כלומר יש לנו שני ווקטורים וסה"כ אופטמזציה על ($m + p$ משתנים).

ולכן כאשר $m + p < n$ ישנן ייתרונות בפתרון הבעיה הדואלית במקום הבעיה המקורית (פחות משתנים לבצע עליהם מינמזציה ,הסדר של בעיית האופטמזציה קטן).בבעיות פרימליות שלהם יש מימד גבוהה המות משתנים , (n גדול מאוד) ויש מעט אילוצים $m+p$ קטן יחסית ל n) כלומר מתקיים $m + p < n$ייתכן שכדאי לנו לעבור לבעיה הדואלית ולפתור אותה.

הערה 55.9 המעבר לבעיה הדואלית לא מתבצע בפועל על בעיות בlargecscale מכיוון שהמעבר לבעיה הדואלית מבוצע באופן אנליטי שזה דבר שנחשב קשה יחסית בב largecscale (כלומר לבשביל להגיע לבעיה הדואלית צריך לפתור הרבה דברים שקשים לפתור בסדרי גודל גדולים) אבל השיטה הזו רלוונטית לסדרי גודל לא ענקיים (לדוגמא השיטה שימושית כשיש לנו לצורך העניין 10 , 20 ,30 משתנים בבעיה הפרימלית)

מסקנה 56.9 (מסקנה מתרגיל ראשון) הבעיה הדואלית של בעיית LP היא גם בעצמה בעיית LP .

הגדרה 57.9 בהנתן $f(\boldsymbol{x}) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ נגדיר את הפונ' הצמודה של f להיות

$$f^*(\boldsymbol{y}) = \sup_{\boldsymbol{x}} \left\{ \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y} - f(\boldsymbol{x}) \right\}$$

משפט 58.9 משפטים מתורת הקבוצות שהיו בשימוש בתרגיל 3:

Negative of Infimum is Supremum of Negatives :

Let T be set s.t.$\emptyset \neq T \subseteq \mathbb{R}$ than :

$-\inf_{x \in T} x = \sup_{x \in T}(-x)$

Negative of Supremum is Infimum of Negatives:

Let T be set s.t.$\emptyset \neq T \subseteq \mathbb{R}$ than :

$-\sup_{x \in T} x = \inf_{x \in T}(-x)$

https://proofwiki.org/wiki/Negative_of_Supremum_is_Infimum_of_Negatives
https://proofwiki.org/wiki/Negative_of_Infimum_is_Supremum_of_Negatives

10 הרצאה 10 ותרגול 10

10.1 הרצאה 10 תנאי karush kugn tucker KKT

10.1.1 תזכורת מההרצאה הקודמת

נדבר על תנאי קרוש קונטקר (KKT) הם למעשה תנאים שמאפשרים לנו פתרונות אופטמליים לבעיות אופטמזציה ובפרט לבעיות אופטמזציה קונבקסיות עם אילוצים.הם מתקשרים מאוד לנושא הדואליות שראינו בפעם הקודמת.

בפעם שעברה ראינו שבהנתן בעית האופטמזציה הבאה

$$\begin{gathered}\min_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}) \\ \text{subject to:} h_i(\boldsymbol{x}) \leq 0, i=1,2,\ldots,m \\ l_i(\boldsymbol{x})=0, i=1,2,\ldots,r\end{gathered}$$

בעיה זו נקראת **הבעיה הפרימלית**.

אפשר להתאים כופלי לגראנג' $\{u_i\}_{i=0}^{m}, \{v_i\}_{j=1}^{r}$ כאשר u_i הוא סקלר שיותאם לאילוץ אי שוויון הi $(h_i(\boldsymbol{x}) \leq 0, i=0,1,2,\ldots,m)$ ו, v_i הוא סקלר שיותאם לאילוץ השוויון הi $(l_i(\boldsymbol{x})=0, i=0,1,2,\ldots,r)$.

לאחר מכן **הגדרנו את הלגאנג'יאן** באופן הבא

$$L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i h_i(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{r} v_j l_j(\boldsymbol{x})$$

הלגאנג'יאן מוגדר $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ ו$\forall \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^m, \forall \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^r$ ($\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}_+^m$ מסמנים גם $0 \leq \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$).

ואת **הפונ' הדואלית** הגדרנו באופן הבא:

$$g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \triangleq \min_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$$

מה שהראנו בשיעור שעבר זה שמתוך הבעיה המקורית (הבעיה הפרימלית) אפשר להגדיר בעיה דואלית (בעיה שמשתני האופטמזציה שלה הם האילוצים (כופלי הלגראנג' שלה הם האילוצים וכופלי אלו הם משתני האופטמזציה שלה)

ואת **הבעיה הדולאית** הגדרנו באופן הבא

$$\begin{array}{ll}\max_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} & g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \\ \text{subject to} & \boldsymbol{u} \geq 0\end{array}$$

תכונות חשובות של הבעיה דואלית:

- **הבעיה הדואלית תמיד מהווה בעיית אופטמזציה קמורה** (כלומר, הבעיה g היא תמיד קעורה(אפילו אם הבעיה הפרמלית היא לא קמורה) והאילוצים הם תחום קמור).בעיית מקסמזציה קעורה שקולה לבעיית מינמזציה של פונ' קונבקסית.
  - לא משנה מה הייתה הבעיה הפרמלית, תמיד הבעייה הדואלית תהיה מהצורה של בעיית מקסמזציה קעורה (שזו סוג של בעיית אופטמזציה קמורה)
  - כלומר בלי תלות בבעיה הפרימלית המקורית אנו יודעים לפתור בצורה טובה (יש הרבה כלים) לפתרון של הבעיה הדואלית.(כי היא בעיית אופטמזציה ולפתור את זה יש לנו הרבה כלים).
- הערך האופטמלי של הבעיה הפרימלית מסומן f^*,הערך האופטמלי של הבעיה הדואלית מסומן g^*.
- **תמיד מתקיימת תכונת הדואליות החלשה:** $g^* \leq f^*$.
- תנאי סלטר:
  - עבור בעיה פרימלית וקמורה, אם קיים $\boldsymbol{x}$ כך ש כך ש

$$\forall i \in \{1,\ldots,m\} : h_i(\boldsymbol{x}) < 0, \forall j \in \{1,\ldots,r\} : l_1(\boldsymbol{x}) = 0$$

(קרי:אילוצי אי השוויון מתקיימים בשוויון ואילוצי השוויון מתקיימים)

אזי תנאי סלטר מתקיימים .

– קיימת הרחבה לתנאי סלטר

- אם תנאי סלטר מתקיימים אזי מתקיימת **דואליות חזקה** כלומר $g^* = f^*$.
- קיימת הרחבה לתנאי סלייטר : דרישה של נקודה שמקיימת את האילוצים (פיזבילית) ורק עבור פונקציות h_i שאינן אפיניות (שאינן מהצורה $h_j(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}_j^T \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_j$) יש אי שוויון חזק $h_i(\boldsymbol{x}) < 0$.

10.1.2 תנאי KKT

כהתנאים על שם שלושה אנשים קרוש,קרון,קון,טקר karush,kuhn,tucket .,קון וטקר למעשה פרסמו מאמר שמדבר על התנאים האלה בשנת (1951) ובדיעבד התברר שהיה בחור בשם קרוש שגילו שמצא את התנאים האלה עוד לפני קון וטקר , בתזה שלו(1939).כשמצאו את זה נתנו לו את הכבוד ושמו אותו ראשון בראשי תיבות.
בהנתן בעית האופטמזציה הבאה

$$\begin{gathered}\min_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x})\\ \text{subject to:} h_i(\boldsymbol{x}) \leq 0, i = 1,2,\ldots,m\\ l_i(\boldsymbol{x}) = 0, i = 1,2,\ldots,r\end{gathered}$$

נאמר שנקודה $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ מקיימת את תנאי KKT אם כל התנאים הבאים מתקיימים:

1. **stationarity סטציונריות** $0 \in \partial_{\boldsymbol{x}}(L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}))$
2. **Complemenray slackness** $\forall i \in \{1,2,\ldots,m\} : u_i \cdot h_i(\boldsymbol{x}) = 0$.
3. Primal feasibilty $\begin{array}{c}\forall i \in \{1,2,\ldots,m\} : h_i(\boldsymbol{x}) \leq 0\\ \forall j \in \{1,2,\ldots,r\} : l_j(\boldsymbol{x}) = 0\end{array}$
4. dual feasibility $\forall i \in \{1,2,\ldots,m\} : u_i \geq 0$

הערה 1.10 הערות על תנאי KKT :

1. הערות על התנאי של **stationarity.**
   (א) כלומר $0 \in \partial_{\boldsymbol{x}}\left(f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^m u_i h_i(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^r v_j l_j(\boldsymbol{x})\right)$
   (ב) כלומר אם תגזרו את הלגאנג'יאן של הנקודה הזו לפי $\boldsymbol{x}$ **נקבל 0** . מה שכתוב כאן קצת יותר עדין ומתייחס לבעיות שהן לא בהכרח גזירות.בוא נניח שהלגראנגזיאן הוא אינו גזיר אבל כן קמור במשתנה $\boldsymbol{x}$ אזי אפשר להגדיר את המושג של סאב גרדיאנט (בנקודות בהם הפונ' גזירה אם קיימות אז הסאב גרדיאנט שווה לגרדיאנט) במקרה שהפונ' לא גזירה אז אפשר להגדיר סאב גרדיאנט
   (ג) במקרה שהפונ' גזירה בנקודה $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ (סאב גרדינא מתלכד עם הגדרינט) התנאי קובע כי $\nabla_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$.כלומר במקרה שהפונ' גזירה נדרוש התאפסות של הגרדיאנט.
   (ד) במקרה שההפונ' לא גזירה בנקודה $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ (ניתן למצוא סאב גרדיאנטים) נדרוש שהווטור שכולו אפסים $\boldsymbol{0}$ שייך לקבוצת הסאב גרדיאנטים של $L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$. כלומר $0 \in \partial_{\boldsymbol{x}}(L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}))$.
2. התנאים של Primal feasibilty וdual feasibility דורשים שהנקודה $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ תהיה **פיזבילית**.(פיזבילית גם בבעיה הפרימלית (תנאי על $\boldsymbol{x}$) וגם בבעיה הדואלית (תנאי על $\boldsymbol{u}$))
3. התנאי של **Complemenray slackness.**בוא נסתכל על נקודה $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ אזי מהתנאים הקודמים אנו יודעים כי :
   - אנו יודעים כי $\boldsymbol{u} \geq 0$ (כלומר $\forall i \in \{1,2,\ldots,m\} : u_i \geq 0$)
   - וגם $\forall i \in \{1,2,\ldots,m\} : h_i(\boldsymbol{x}) \leq 0$

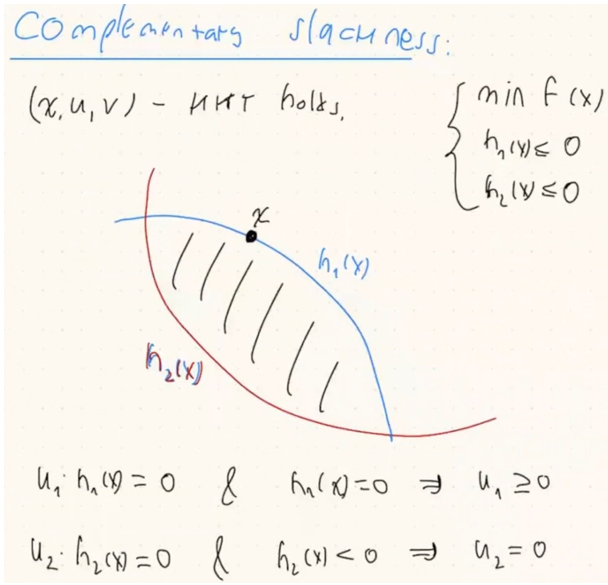
התנאי **Complemenray slackness** קובע כי $\forall i \in \{1,2,\ldots,m\} : u_i \cdot h_i(\boldsymbol{x}) = 0$.**אזי לכל** $i \in \{1,2,\ldots,m\}$ **מתקיים:**

- אזי אם $u_i > 0$ אזי לפי **Complemenray slackness מתקיים כי** $h_i(\boldsymbol{x}) = 0$.
- אזי אם $h_i(\boldsymbol{x}) < 0$ אזי לפי **Complemenray slackness מתקיים כי** $u_i = 0$.
- (או שגם $h_i(\boldsymbol{x}) = 0$ וגם $u_i = 0$)

במילים אחרות:

(א) אם $h_i(x) = 0$ אזי $u_i \geq 0$.(אין דרישה מיוחדת כי $h_i(x) = 0$ מספק את ה**Complemenray slackness**)
(ב) אם $u_i = 0$ אזי $h_i(x) \leq 0$. (אין דרישה מיוחדת כי $u_i = 0$ מספק את ה**Complemenray slackness**)

Complen:



הקו האדום : האילוץ h_2 מתקיים בשוויון.
הקו הכחול : האילוץ h_1 מתקיים בשוויון.
התחום המקוקו - המקום בו שני האילוצים מתקיימים.
עבור נקודה $\boldsymbol{x}$ האילוץ הכחול מתקיים בשוויון כלומר $h_1(\boldsymbol{x}) = 0$ ולכן $u_1 \geq 0$.
עבור נקודה $\boldsymbol{x}$ האילוץ האדום מתקיים באי שוויון כלומר $h_2(\boldsymbol{x}) < 0$ ולכן $u_2 = 0$.

משפטי שקילות של KKT ושל פתרון אופטימלי

טענה 2.10 אם $\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{v}^*, \boldsymbol{u}^*$ הינו פתרון אופטימלי של הבעיה הגדואלית, עם zero duality gap אזי $\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{v}^*, \boldsymbol{u}^*$ מקיימת את תנאי KKT.

הערה 3.10 נשים לב שבטענה הזו הנחנו דבר על על קמירות הבעיה המקורית שלנו או על קמירות תחום האילוץ)

הוכחת הטענה:

יהיו $\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{v}^*, \boldsymbol{u}^*$ פתרון של הבעיה הפרימלית ופתרונות של הבעיה הדואלית
($\boldsymbol{x}^*$ ממזער את $f(\boldsymbol{x})$ **ופיזבלי** (כי הוא **פתרון** לבעיה הפרימלית)
($\boldsymbol{v}^*, \boldsymbol{u}^*$ ממקסמות את $g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ **ופיזבליות** (כי הן **פתרונות** לבעיה הדואלית)

אזי נרצה להראות כי $\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{v}^*, \boldsymbol{u}^*$ מקיימים את תנאי KKT.

אזי מדואליות חזקה $f^* = g^*$:

$$\begin{aligned}
\overbrace{f(\boldsymbol{x}^*)}^{f^*} &= \overbrace{g(u^*, v^*)}^{g^*} \\
&\overbrace{\triangleq}^{\text{definition of } g(u^*,v^*)} \min_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{v}^*) \\
&\overbrace{\triangleq}^{\text{definition of } L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{v}^*)} \min_{\boldsymbol{x}} \left(f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i^* h_i(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{r} v_j^* l_j(\boldsymbol{x}) \right) \\
&\leq f(\boldsymbol{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} u_i^* h_i(\boldsymbol{x}^*) + \sum_{j=1}^{r} v_j^* l_j(\boldsymbol{x}^*) \\
&\overbrace{=}^{\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{x}^* \text{ solution to primal} & u^* \text{ solution to dual} \\ \text{optimaztion problem} & \text{optimaztion problem} \\ \Rightarrow \boldsymbol{x}^* \text{ is feasibil :} & \Rightarrow u_i^* \text{ is feasibil :} \\ \forall j \in \{1,\dots,r\} : l_j(\boldsymbol{x}^*) = 0 & \forall i \in \{1,\dots,m\} : u_i^* \geq 0 \\ \forall i \in \{1,\dots,m\} : h_i(\boldsymbol{x}^*) \leq 0 & \end{array}\right]} f(\boldsymbol{x}^*) + \overbrace{\sum_{i=1}^{m} \overbrace{u_i^*}^{0\leq} \overbrace{h_i(\boldsymbol{x}^*)}^{\leq 0} + \sum_{j=1}^{r} v_j^* \overbrace{l_j(\boldsymbol{x}^*)}^{=0}}^{\leq 0} \\
&\leq f(\boldsymbol{x}^*)
\end{aligned}$$

כלומר הראנו כי

$$\begin{aligned}
\overbrace{f(\boldsymbol{x}^*)}^{f^*} &= \overbrace{g(u^*, v^*)}^{g^*} \\
&= \min_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{v}^*) \\
&= \min_{\boldsymbol{x}} \left(f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i^* h_i(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{r} v_j^* l_j(\boldsymbol{x}) \right) \\
&\leq f(\boldsymbol{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} u_i^* h_i(\boldsymbol{x}^*) + \sum_{j=1}^{r} v_j^* l_j(\boldsymbol{x}^*) \\
&\leq f(\boldsymbol{x}^*)
\end{aligned}$$

ולכן כל מעברי ה $\leq$ הם למעשה מעברי $=$ כלומר

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}^*) &= g(\boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{v}^*) \\
&= \min_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{v}^*) \\
&= \min_{\boldsymbol{x}} \left(f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i^* h_i(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{r} v_j^* l_j(\boldsymbol{x}) \right) \\
&= f(\boldsymbol{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} u_i^* h_i(\boldsymbol{x}^*) + \sum_{j=1}^{r} v_j^* l_j(\boldsymbol{x}^*)
\end{aligned}$$

- מהשוויון $f\left(\boldsymbol{x}^{*}\right)=f\left(\boldsymbol{x}^{*}\right)+\sum_{i=1}^{m} u_{i}^{*} h_{i}\left(\boldsymbol{x}^{*}\right)+\sum_{j=1}^{r} v_{j}^{*} l_{j}\left(\boldsymbol{x}^{*}\right)$ נסיק:

כי $\sum_{i=1}^{m} u_{i}^{*} h_{i}\left(\boldsymbol{x}^{*}\right)+\sum_{j=1}^{r} v_{j}^{*} l_{j}\left(\boldsymbol{x}^{*}\right)=0$. ראינו קודם כי $\sum_{j=1}^{r} v_{j}^{*} \overbrace{l_{j}\left(\boldsymbol{x}^{*}\right)}^{=0}=0$ ולכן מכאן נובע כי $\sum_{i=1}^{m} u_{i}^{*} h_{i}\left(\boldsymbol{x}^{*}\right)=0$

  - מכיוון ש $\sum_{i=1}^{m} u_{i}^{*} h_{i}\left(\boldsymbol{x}^{*}\right)=0$ ומכיוון ש $\boldsymbol{x}^{*}$ ו $\boldsymbol{u}^{*}$ פיזבליות ידוע כי $\sum_{i=1}^{m} \overbrace{\overbrace{u_{i}^{*}}^{0\leq} \overbrace{h_{i}\left(\boldsymbol{x}^{*}\right)}^{\leq 0}}^{\leq 0}=0$ כלומר הסכום הוא סכום של איברים אי חיוביים והסכום הכולל יוצא 0 ולכן הסכום יוצא אפס אם ורק אם הסכום הוא סכום רק של אפסים כלומ מכאן נובע כי $\forall i \in\{1, \ldots, m\}: u_{i}^{*} h_{i}\left(\boldsymbol{x}^{*}\right)=0$.
  - הוכחנו את התנאי של **Complemenray slackness.**
  -

- מהשוויון $\min_{\boldsymbol{x}} \overbrace{L\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^{*}, \boldsymbol{v}^{*}\right)}^{f(\boldsymbol{x})+\sum_{i=1}^{m} u_{i}^{*} h_{i}(\boldsymbol{x})+\sum_{j=1}^{r} v_{j}^{*} l_{j}(\boldsymbol{x})}=f\left(\boldsymbol{x}^{*}\right)+\sum_{i=1}^{m} u_{i}^{*} h_{i}\left(\boldsymbol{x}^{*}\right)+\sum_{j=1}^{r} v_{j}^{*} l_{j}\left(\boldsymbol{x}^{*}\right)$ נסיק כי $L\left(\boldsymbol{x}^{*}, \boldsymbol{u}^{*}, \boldsymbol{v}^{*}\right)=\min_{\boldsymbol{x}} L\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^{*}, \boldsymbol{v}^{*}\right)$.
  - כלומר $\boldsymbol{x}^{*}$ היא מינימום גלובלי של הפונ' $L\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^{*}, \boldsymbol{v}^{*}\right)$ (שימו לב שזו פונ' של $\boldsymbol{x}$) כלומר
    * אם הפונ' $L\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^{*}, \boldsymbol{v}^{*}\right)$ גזירה (לפי $\boldsymbol{x}$) אזי $\left.\left[\nabla_{\boldsymbol{x}} L\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^{*}, \boldsymbol{v}^{*}\right)\right]\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{*}}=\mathbf{0}$ בפונ' גזירות הסאבגרדיאנט מתכלד עם הגרדיאנט ולכן $\mathbf{0} \in \partial L\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^{*}, \boldsymbol{v}^{*}\right)$.
    * אם הפונ' $L\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^{*}, \boldsymbol{v}^{*}\right)$ אינה גזירה אזי המשמעות היא ש $\mathbf{0} \in \partial L\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^{*}, \boldsymbol{v}^{*}\right)$ (הווקטור $\mathbf{0}$ שייך לסאב גרדיאנט של הפונ').
    * **ולכן הראנו את קיום התנאי של stationarity.**

- בנוסף $\boldsymbol{x}^{*}, \boldsymbol{v}^{*}, \boldsymbol{u}^{*}$ ולכן $\boldsymbol{x}^{*}, \boldsymbol{v}^{*}, \boldsymbol{u}^{*}$ הם פיזביליים ולכן מקיימים את התנאים dual feasibility Primal feasibilty

כלומר הראנו כי **אם** $\boldsymbol{x}^{*}, \boldsymbol{v}^{*}, \boldsymbol{u}^{*}$ הינו פתרון אופטמלי של הבעיה הגדואלית, עם zero duality gap אזי $\boldsymbol{x}^{*}, \boldsymbol{v}^{*}, \boldsymbol{u}^{*}$ מקיימת את תנאי KKT.

טענה 4.10 אם קיימים $\boldsymbol{x}^{*}, \boldsymbol{v}^{*}, \boldsymbol{u}^{*}$ שמקיימים את תנאי KKT.אזי $\boldsymbol{x}^{*}$ הוא פתרון של הבעיה הפרמלית ו $\boldsymbol{v}^{*}, \boldsymbol{u}^{*}$ הם פתרונות של הבעיה הדואלית.ובנוסף פער הדואליות duality gap הוא 0.

הוכחת הטענה:
יהיו $\boldsymbol{x}^{*}, \boldsymbol{v}^{*}, \boldsymbol{u}^{*}$ נקודות שמקיימות את תנאי KKT.
כלומר

1. **stationarity סטציונריות** $\mathbf{0} \in \partial_{\boldsymbol{x}}(L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}))$

   (א) מכאן נובע כי בפרט כי עבור $\mathbf{0} \in\left[\partial_{\boldsymbol{x}}\left(L\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}^{*}, \boldsymbol{u}^{*}\right)\right)\right]_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{*}}$ כלומר
   מכאן נובע כי מכיוון ש $L\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}^{*}, \boldsymbol{u}^{*}\right)$ קמורה בא $\boldsymbol{x}$ ו $\mathbf{0} \in\left[\partial_{\boldsymbol{x}}\left(L\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}^{*}, \boldsymbol{u}^{*}\right)\right)\right]_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{*}}$ נובע כי $\boldsymbol{x}^{*}$ נקודת מינימום גלובלי של $L\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}^{*}, \boldsymbol{u}^{*}\right)$ כלומר $g\left(\boldsymbol{u}^{*}, \boldsymbol{v}^{*}\right)=\min_{\boldsymbol{x}} L\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^{*}, \boldsymbol{v}^{*}\right)=L\left(\boldsymbol{x}^{*}, \boldsymbol{u}^{*}, \boldsymbol{v}^{*}\right)$.

2. **Complemenray slackness** $\forall i \in\{1,2, \ldots, m\}: u_{i} \cdot h_{i}(\boldsymbol{x})=0$.

3. Primal feasibilty $\begin{array}{l}\forall i \in\{1,2, \ldots, m\}: h_{i}(\boldsymbol{x}) \leq 0 \\ \forall j \in\{1,2, \ldots, r\}: l_{j}(\boldsymbol{x})=0\end{array}$

4. dual feasibility $\forall i \in\{1,2, \ldots, m\}: y_{i} \leq 0$

אזי

$$
\begin{aligned}
g(\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{v}^*) &\overbrace{\triangleq}^{\text{definition of } g(u^*,v^*)} \min_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{v}^*)\\
&\overbrace{=}^{\text{stationarity}} (\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{v}^*)\\
&\overbrace{\triangleq}^{\text{definition of } L(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{v}^*)} f(\boldsymbol{x}^*)+\sum_{i=1}^{m}u_i^*h_i(\boldsymbol{x}^*)+\sum_{j=1}^{r}v_j^*l_j(\boldsymbol{x}^*)\\
&\overbrace{=}^{\substack{\text{Primal feasibilty}\\ \forall j\in\{1,2,\ldots,r\}:\ l_j(\boldsymbol{x}^*)=0}} f(\boldsymbol{x}^*)+\sum_{i=1}^{m}u_i^*h_i(\boldsymbol{x}^*)\\
&\overbrace{=}^{\substack{\text{Complemenray slackness}\\ \forall i\in\{1,2,\ldots,m\}:\ u_i\cdot h_i(\boldsymbol{x})=0}} f(\boldsymbol{x}^*)
\end{aligned}
$$

כלומר הראנו כי $g(\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{v}^*)=f(\boldsymbol{x}^*)$ ובנוסף אנו יודעים כי $\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{v}^*$, הם פיזביליים כי הם נקודות KKT.ולכן מכיוון ש $g(\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{v}^*)=f(\boldsymbol{x}^*)$ והנקודות פיזבליות, נובע כי ה duality gap הוא אפס (כלומר מתקיימת דואליות חזקה).
הוכחנו כי מתקיימת דואליות חזקה.

- אנחנו יודעים שלכל $\boldsymbol{x}$ פיזבילי ולכל $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ כך ש $\boldsymbol{u}\geq 0$ מתקיים

$$f(\boldsymbol{x})\geq f(\tilde{\boldsymbol{x}}^*)\geq g(\tilde{\boldsymbol{u}}^*,\tilde{\boldsymbol{v}}^*)\geq g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$$

כאשר $\tilde{\boldsymbol{x}}^*,\tilde{\boldsymbol{u}}^*,\tilde{\boldsymbol{v}}^*$ הם פתרונות אופטמליים לבעיות f,g.

לכן אם מצאנו $\boldsymbol{x}$ פיזבילי ו $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ כאשר $\boldsymbol{u}\geq 0$ כשלהם כך ש $g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=f(\boldsymbol{x})$ אזי בהכרח כל האי שוויונות מתקיימים בשוויון כלומר

$$
\begin{gathered}
f(\boldsymbol{x})=g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\\
f(\boldsymbol{x})\geq f(\tilde{\boldsymbol{x}}^*)\geq g(\tilde{\boldsymbol{u}}^*,\tilde{\boldsymbol{v}}^*)\geq g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\\
\Downarrow\\
f(\boldsymbol{x})=f(\tilde{\boldsymbol{x}}^*)=g(\tilde{\boldsymbol{u}}^*,\tilde{\boldsymbol{v}}^*)=g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})
\end{gathered}
$$

כלומר אם מצאנו מצאנו $\boldsymbol{x}$ פיזבילי ו $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ כאשר $\boldsymbol{u}\geq 0$ נובע כי $f(\boldsymbol{x})=f(\tilde{\boldsymbol{x}}^*)$ ו $g(\tilde{\boldsymbol{u}}^*,\tilde{\boldsymbol{v}}^*)=g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ כלומר נובע כי $\boldsymbol{x}$ פתרון אופטמלי לבעיה הפרימלית ו $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$הם פתורנות אופטמליים לבעיה הדואלית.

- הראנו כי שלכל $\boldsymbol{x}$ פיזבילי ולכל $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ כך ש $\boldsymbol{u}\geq 0$ שמקיימים $g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=f(\boldsymbol{x})$ מתקיים כי $\boldsymbol{x}$ פתרון אופטמלי לבעיה הפרימלית ו $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ הם פתורנות אופטמליים לבעיה הדואלית.**בפרט , עבור** הנקודות $\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{v}^*$ הראנו שמתקיים
  - $g(\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{v}^*)=f(\boldsymbol{x}^*)$
  - בנוסף מ dual feasibility $\forall i\in\{1,2,\ldots,m\}:u_i\geq 0$ מתקיים $\boldsymbol{u}\geq 0$

ולכן מכאן נובע כי $\boldsymbol{x}^*$ פתרון אופטמלי לבעיה הפרימלית ו $(\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{v}^*)$הם פתורנות אופטמליים לבעיה הדואלית.

לסיכום: **משפט 5.10** עבור בעיה שבה מתקיימת **דואליות חזקה** :
x^* **הוא פתרון של הבעיה הפרימלית ו** u^*,v^* **הן הפתרונות של הבעיה הדואלית** $\iff$ x^*,u^*,v^* **מקיימות את תנאי KKT.**

הערה 6.10 דואליות חזקה מתקיימת לדוגמא כאשר תנאי סלייטר מתקיימים:בעייה קמורה שבה קיימת נקודה $\boldsymbol{x}$ שעבורה כל אילוצי האי שוויון הלא אפינים מתקיימים ממש.(מתקיימים בסימן אי שוויון חריף).

תנאי KKT הם תנאים מאוד שימושיים :

1. מציאת פתרונות בצורה אנליטית של בעיות אופטזמציה עם אילוצים

2. גם אם אי אפשר למצוא את הפתרונות של בעיות האופטזמציה עם האילוצים בצורה אנליטית נוכל להשתמש בתנאי KKT בשביל לבדוק תכונות של הפתרונות האופטמליות (לבעיות עם האילוצים) .

3. אם אין אילוצים תנאי KKT שקולים לתנאי האופטמליות הרגיל (= הגדריאנט צריך להיות שווה לאפס **stationarity סטציונריות** ($\mathbf{0} \in \partial_{\boldsymbol{x}} \left(L \left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \right) \right)$) בד"כ יותר קל לפתור בעיות אופטמזיציה עם אילוצים על ידי תנאי KKT .

10.1.3 דוגמאות

דוגמא: בעיה ריבועית עם אילוצי שוויון תהא $Q \succeq 0$.נתובנן בבעיית האופטמזציה הבאה:

$$\begin{aligned} &\min_{\boldsymbol{x}} \tfrac{1}{2}\boldsymbol{x}^T Q \boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ &\text{s.t.} A\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

(לדוגמא, זה שקול לצעד ניוטון עבור הבעיה המאולצת $\min_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x})$ שכפופה לאילוץ $\text{s.t} A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$)
הביעה היא בעיה קמורה,ואין בה אילוצי אי שוויון.
רוצים להראות כי:
אזי לפי תנאי KKT $\boldsymbol{x}$ הוא פתרון אופטמלי של בעיית האופטמזציה $\iff$

$$\begin{bmatrix} Q & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{c} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

עבור $\boldsymbol{v}$ כלשהו.
נוכיח מדוע זה נכון:
אין אילוצי אי שוויון ולכן הלגאנג'יאן נתון על ידי

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T Q \boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}^T A \boldsymbol{x}$$

(האילוץ $A\boldsymbol{x} = 0$ הוא מספר אילוצי שוויון: $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ ו $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ אז יש m אילוצי שוויון (כל אילוץ מתאים לשורה אחרת של שוויון הווקטורים $A\boldsymbol{x} = 0$ ולכן יש לנו את ווקטור ^{T}וקטור הכופלי לגראנג')
תנאי KKT גורסים :

$$\begin{cases} \nabla_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) = \mathbf{0} \\ A\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \end{cases}$$

$\boldsymbol{v}$ הוא כופל לגראנג' של אילוצי שוויון ולכן הוא לא מאולץ.
נפתח את התנאים:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \nabla_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) \\ &= \nabla_{\boldsymbol{x}} \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T Q \boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}^T A \boldsymbol{x} \right) \\ &= Q\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c} + A^T \boldsymbol{v} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbf{0} = Q\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c} + A^T \boldsymbol{v}$$

$$\Rightarrow Q\boldsymbol{x} + A^T \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{c}$$

והתנאי השני לא משתנה $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.
ניתן לרשום באופן קומפקטי:

$$\begin{bmatrix} Q & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{c} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

כלומר הראנו כי מציאת נקודה שמקיימת את תנאי KKT שקול למציאת הפתרון של המשוואה הלינארית המטריצית שהצגנו כעת.

דוגמא: דוגמא מתורת האינפורמציה דוגמא מתוך B&W page 245.
נבחין בבעיה הבאה:

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}} \quad & -\sum_{i=1}^{n} \log(\boldsymbol{\alpha}_i + \boldsymbol{x}_i) \\ \text{subject to} \quad & \boldsymbol{x} \geq 0, \mathbf{1}^T \boldsymbol{x} = 1 \end{aligned}$$

המטרה שלנו היא להשתמש בתנאי KKT על מנת לתאר את הפתרון האופטמלי של הבעיה הזו.
מתורת האינפורמציה , ניתן לקבל אינטואציה על הבעיה על ידי דמיון של משדר עם כמות אנרגיה סופית והוא רוצה לנצל את האנרגיה שלו בין כמה ערוצי שידור ובכל ערוץ שידור ישנם רמות רעש שונות.x_i **זה האנרגיה שאנו משקיעים בשידור בערוץ ה** i ו $\boldsymbol{\alpha}_i$ **זה הרעש שיש לנו בערוץ ה** i.(פחות או יותר) אינטואטיבית נרצה להבין כיצד הדרך הכי טובה לחלק את האנרגיה שלנו בשידור בין הערוצים.אינטואטיבית זה ברור לנו שבערוצים יותר רועשים נרצה לשדר פחות ובערוצים פחות רועשים נרצה לשדר יותר. הפורמולציה של הבעיה נתונה מעלה.
נזכיר כי $\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ כלומר משמעות התנאי $\mathbf{1}^T\boldsymbol{x} = 1$היא ש $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ ובנוסף $\forall i \in \{1,\dots,n\} : x_i \geq 0$.

- האם הבעיה היא בעייה קונבקסית?
  - כן, כי פונ' המטרה קונבקסית כי $\forall i \in \{1,\dots,n\} : (-\log(\boldsymbol{\alpha}_i + \boldsymbol{x}_i))$ היא קונבקסית והסכום על $\sum_{i\in\{1,\dots,n\}}$ הוא קונבקסי ושווה לפונ המטרה
  - האילוצים הם קונבקסים :
  - $\boldsymbol{x} \geq 0$ חצי מישור ולכן תחום קמור
  - $\mathbf{1}^T\boldsymbol{x} = 1$ זה למעשה אילוץ שוויון לינארי ולכן קמור.
- האם מתקיימים תנאי סליידר עבור הבעיה הזו?
  - נחפש נקודה **שמקיימת ממש** את האילוצים.קיימת כזו כי $\boldsymbol{x}_s = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ ומתקיימים עבורה שני האילוצים והיא מקיימת $\boldsymbol{x} > 0$.(אילוצי אי השוויון מתקיימים באי שוויון חריף) ולכן $\boldsymbol{x}_s$ היא נקודה כדרוש ולכן תנאי סליידר ולכן יש **דואליות חזקה.**
  - לכן נחפש נקודות KKT.

נרשום קודם כל את הבעיה באופן שבו אנו רגילים לראות אותה לצורך פיתוח הלגראנג'יאן .

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}} \quad & -\sum_{i=1}^{n} \log(\alpha_j + x_i) \\ \text{subject to} \quad & \forall i \in \{1,\dots,n\} : h_i(x) = -x_i \leq 0 \\ & ,\mathbf{1}^T\boldsymbol{x} - 1 = 0 \end{aligned}$$

נרשום את הלגראנג'יאן של הבאיה הנ"ל :

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = -\sum_{i=1}^{n} \log(\alpha_j + x_i) + v\left(\mathbf{1}^T\boldsymbol{x} - 1\right) - \sum_{i=1}^{n} u_i x_i$$

- אנו יודעים כי מתנאיי KKT כל ה־uים ו ה־xים וה v (יחיד)צריך להיות פיזבילי (בפועל יש דרישה רק על ה־uים ו ה־xים כי הבעיה לא מאולצת לפי ה־v).
- אנו יודעים כי סטציונריות צריכה להתקיים $\forall i \in \{1,\dots,n\} : \frac{\partial}{\partial x_i} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, v) = 0$
- בנוסף , צריך להתקיים לנו Complemenray slackness (או בקיצור CS) כלומר $\forall i \in \{1,\dots,n\} : u_i \cdot h_i(\boldsymbol{x}) = 0 \Rightarrow$ $-u_i \cdot x_i = 0 \Rightarrow u_i \cdot x_i = 0$ נשתמש בתנאים האלו למצוא פתרון סגור לבעיה המקורית (הבעיה פרימלית)

1. מסטציונריות ,

$$\frac{\partial}{\partial x_j}L\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},v\right)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[-\sum_{i=1}^{n}\log\left(\alpha_j+x_i\right)+v\left(\mathbf{1}^T\boldsymbol{x}-1\right)-\sum_{i=1}^{n}u_ix_i\right]$$
$$=-\frac{1}{\alpha_j+x_i}+v-u_j=0$$

כלומר

$$\forall i\in\{1,2,\ldots,m\}:-\frac{1}{\alpha_j+x_i}+v-u_i=0$$

אנו יודעים כי $\boldsymbol{x}$ פיזבילי ולכן $\forall i\in\{1,2,\ldots,m\}:x_i\geq 0$.

יהא $i\in\{1,2,\ldots,m\}$ כלשהו נפריד למקרים זרים ומשלימים:

-

- $x_i>0$ נרצה להפטר מ u_i.ולכן נכפול ב x_i את המשוואות ונקבל

$$-\frac{x_i}{\alpha_i+x_i}+x_iv-u_ix_i=0$$

מתנאי הסטציונריות אנו יודעים כי $i\in\{1,2,\ldots,m\}:u_i\cdot x_i=0$ ולכן נקבל כי

$$-\frac{x_i}{\alpha_i+x_i}+x_iv=0$$

נעביר אגפים ונקבל

$$x_iv=\frac{x_i}{\alpha_i+x_i}$$

$x_i>0$בפרט $x_i\neq 0$ ולכן מותר לחלק בx_i נבצע זאת ונקבל

$$v=\frac{1}{\alpha_i+x_i}$$

נבודד את x_i ונקבל

$$v\left(\alpha_i+x_i\right)=1\Rightarrow v\alpha_i+vx_i=1\Rightarrow vx_i=1-v\alpha_i\Rightarrow x_i=1-v\alpha_i$$

נחלק ב v ונקבל

$$x_i=\frac{1}{v}-\alpha_i$$

אנו יודעים שבמקרה הזה מתקיים ש $x_i>0$ ולכן מתקיים גם כי

$$0<x_i=\frac{1}{v}-\alpha_i$$

נעביר אגפים ונקבל:

$$\alpha_i<\frac{1}{v}$$

- המקרה השני הוא ש $x_i=0$.
- לא ייתכנו מקרים נוספים מכיוון ש $x_i\geq 0$ כי $\boldsymbol{x}$היא פיסבלית.

ולכן משימוש ישיר בתנאי הסצטניוריות ו Complemenray slackness קיבלנו כי

$$\forall i\in\{1,2,\ldots,m\}:x_{i}=\begin{cases}\frac{1}{v}-\alpha_{i} & \alpha_{i}<\frac{1}{v}\\ 0 & \alpha_{i}\geq\frac{1}{v}\,(\text{elese})\end{cases}=\max\left\{0,\frac{1}{v}-\alpha_{i}\right\}$$

כלומר מצאנו בטוי של $\boldsymbol{x}=\left(\begin{array}{cccc} x_{1} & x_{2} & \ldots & x_{n}\end{array}\right)^{T}$ כפונ' של v.

עדיין אנו ודורשים ש $\boldsymbol{x}=\left(\begin{array}{cccc} x_{1} & x_{2} & \ldots & x_{n}\end{array}\right)^{T}$ **תהיה פיזבלית** (אילוץ השוויון שטרם ניצלנו שנתון לנו מתוך קיום של נקודת KKT) ולכן נקבל

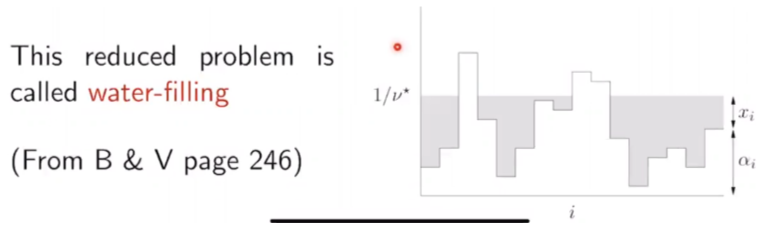
$$1=\sum_{i=1}^{n}x_{i}=\sum_{i=1}^{n}\max\left\{0,\frac{1}{v}-\alpha_{i}\right\}$$

כלומר נקבל

$$1=\sum_{i=1}^{n}\max\left\{0,\frac{1}{v}-\alpha_{i}\right\}$$

זו משוואה חד מימדית שדרכה ניתן למצוא את v.אפשר לסמן $\lambda=\frac{1}{v}$ (הבעיה הזו היא אפילו קונבקסית בλ).כלומר התחלנו עם בעיה קונבקסית רב מימדית ולאחר הפעלת KKT הפכנו אותהלבעיה לבעיה פשוטה יחסית שתלויה רק בפרמטר בודד. לבעיות מהסוג הזה בד"כ נהוג לקרוא watter filling :

אינטואציה גרפית ל watter filling :

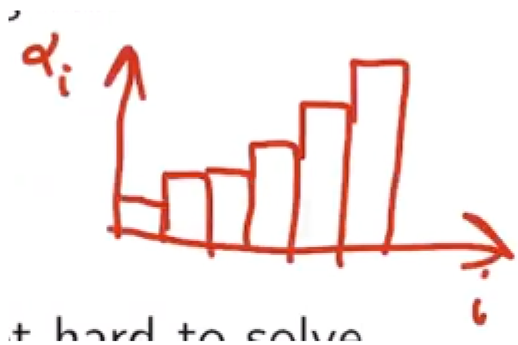


רוצים שהשטח האפור יהיה בסה"כ 1 .כלומר נרצה למזוג בדיוק כמות מסויימת של מים ככה שיהיה אפור ששטחו אחד.(המים הם האפור)

הגבעות הלבנות הם הרעשים בכל ערוץ.ההפרש בין קו המים לבין הרעש הוא x_i כמות התשדורת לערוץ.

איך מוצאים את ה v האופטמלי?

לוקחים את הרעשים , ממיינים אותם לפי גודל α_i מהנמוך לגבוהה(α_i נתונות לנו)



נסמן את הα_i המומוניים בסדר עולה ככה.(אם הם לא ככה אפשר להגדיר משתנה חדש ממויין $\tilde{\alpha}_i$). מסמנים את הערוץ האחרון (עם ה i הכי גדול) שנשדר בו m^*.(כלומר כל הx-ים עד אל m^* כולל אותו הם חיוביים ממש ולאחריו הם מתאפסים)

אילו m^* היה שווה ל1 אזי את ערוץ עם α_2 רעש וגם את הערוצים שאחריו לא נשדר כלומר נבדוק מה ה$\frac{1}{v}$ שמקיים את התנאי

$$1=\sum_{i=1}^{1}\max\left\{0,\frac{1}{v}-\alpha_i\right\}$$

ולאחר מכן נוודא ש$\frac{1}{v}-\alpha_2<0$.אם זה אכן מתקיים אז מצאנו את הפתרון האופטמלי.

אם לא מתקיים:

נניח ש m^* היה שווה ל 2 אזי את ערוץ עם α_3 רעש וגם את הערוצים שאחריו לא נשדר כלומר נבדוק מה ה$\frac{1}{v}$ שמקיים את התנאי

$$1=\sum_{i=1}^{2}\max\left\{0,\frac{1}{v}-\alpha_i\right\}$$

ולאחר מכן נוודא ש$\frac{1}{v}-\alpha_3<0$.אם זה אכן מתקיים אז מצאנו את הפתרון האופטמלי.אם לא מתקיים , נמשיך ונגדיל את m^* ונעשה את אותה הבדיקה.

ככה עד שנמצא את הפתרון האופטמלי.

ולאחר שנמצא את v יהיה לנו בטוי סגור לפתרון האופטמלי של הבעיה:

$$\forall i\in\{1,2,\ldots,m\}:x_i=\max\left\{0,\frac{1}{v}-\alpha_i\right\}$$

דוגמא: ריבועים פחות מאולצים Constrained Least squares נתבונן בבעיה הבאה:

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}} \quad & \|A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\|^2 \\ (\text{CLS})\text{s.t.} \quad & \|\boldsymbol{x}\|^2 \le \alpha \end{aligned}$$

כאשר $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ היא מטריצה מדרגה מלאה, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ הוא וקטור ו$\alpha > 0$ סקלאר חיובי.

- בעיית הCLS היא בעיית אופטמזיציה קמורה שמקיימת את תנאי סלייטר.
  - (מכיוון שהאילוץ היחיד על $\boldsymbol{x}$ הוא $\|\boldsymbol{x}\|^2 \le \alpha$ ומכיוון ש $\alpha > 0$ אנו יודעים כי וקטור האפס $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ מקיים את האילוצים ממש.ולכן תנאי סלייטר מתקיים.
  - תנאי סלייטר מתקיים ולכן יש דואליות חזקה.
- נחשב את הלגראנגיאן:

$$L(\boldsymbol{x},\lambda) = \|A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\|^2 + \lambda\left(\|\boldsymbol{x}\|^2 - \alpha\right) \qquad \lambda > 0$$

- תנאי KKT:
  - מתנאי הComplemenray slackness אנו יודעים כי

$$\lambda\left(\|\boldsymbol{x}\|^2 - \alpha\right) = 0 \qquad \lambda \ge 0$$

  - סטציונריות

$$\nabla_{\boldsymbol{x}} L = 2A^T(A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}) + 2\lambda\boldsymbol{x} = 0$$

  - $\boldsymbol{x}$ פיזבילית ולכן מקיימת את האילוץ

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 \le \alpha, \qquad \alpha \ge 0$$

- λ הוא כופל לגראנג' שנובע מתוך אילוץ אי שוויון ולכן $\lambda \ge 0$.נפריד לשני מקרים זרים ומשלימים .
  - אם $\lambda = 0$ (המשמעות של $\lambda = 0$: שאין אילוצים בבעיה כלומר מתייחסים במקרה הזה למקרה אילו הבעיה היתה בעיה לא מאולצת כלומר אנו נקרה זה מתייחס למקרה שבו שהפתרון הגלובלי לבעיה שלנו מקיים את האילוץ) נציב במשוואה שמתבלת מסטציונריות ונקבל $2A^T(A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0}$נעביר אגפים

$$2A^T(A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0} \Rightarrow A^T(A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0} \Rightarrow$$

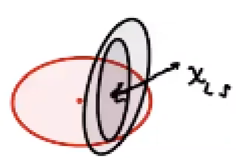
$$A^TA\boldsymbol{x} - A^T\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \Rightarrow A^TA\boldsymbol{x} = A^T\boldsymbol{b}$$

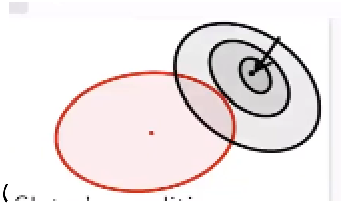
$$\Rightarrow \boldsymbol{x} = \left(A^TA\right)^{-1}A^T\boldsymbol{b}$$

ונקבל

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_{LS} = \left(A^TA\right)^{-1}A^T\boldsymbol{b}$$

כלומר $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_{LS} = \left(A^TA\right)^{-1}A^T\boldsymbol{b}$ הוא פתרון אופטמלי אם ורק אם $\|\boldsymbol{x}_{LS}\|^2 \le \alpha$ (כלומר אם $\boldsymbol{x}_{LS}$ פיזבילי).כלומר

כאשר  (איור להמחשה ,האילוץ באדום $\boldsymbol{x}_{LS}$ נמצאת בתוך האילוץ)



* **אם** $\alpha < \|\boldsymbol{x}_{LS}\|^2$ נבחן את המקרה הבא עבורו $\lambda > 0$.(כלומר $\boldsymbol{x}_{LS}$ לא פיזיבילי: נבחן את המקרה הבא:

– אם $\lambda > 0$ אזי לפי המשוואה של הComplemenray slackness אנו יודעים כי

$$\lambda\left(\|\boldsymbol{x}\|^2 - \alpha\right) = 0$$

מצמצום ב λ (מותר לחלק בוא כי בפרט $\lambda \neq 0$ במקרה זה) והעברת אגף נקבל כי $\|\boldsymbol{x}\|^2 = \alpha$נסמן $\|\boldsymbol{x}_\lambda\|^2 = \alpha$כלומר במקרה הזה הפתרון ייתקבל על השפה של תחום האילוץ.(אי השוויון החלש מתקיים בשוויון)

– עבור מקרה זה אנו יודעים שמתקיים $\|\boldsymbol{x}_{LS}\|^2 > \alpha$

– מסטציונריות

$$\begin{aligned}
&2A^T(A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}) + 2\lambda\boldsymbol{x} = 0\\
\Longleftrightarrow\ &A^T(A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}) + \lambda\boldsymbol{x} = 0\\
\Longleftrightarrow\ &A^TA\boldsymbol{x} - A^T\boldsymbol{b} + \lambda\boldsymbol{x} = 0\\
\Longleftrightarrow\ &\left(A^TA + \lambda I\right)\boldsymbol{x} - A^T\boldsymbol{b} = 0\\
\Longleftrightarrow\ &\left(A^TA + \lambda I\right)\boldsymbol{x} = A^T\boldsymbol{b}\\
\Longleftrightarrow\ &\boldsymbol{x} = \left(A^TA + \lambda I\right)^{-1}A^T\boldsymbol{b}
\end{aligned}$$

נסמן $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_\lambda = \left(A^TA + \lambda I\right)^{-1}A^T\boldsymbol{b}$כלומר מצאנו פתרון עד כדי קבוע λ שאנו לא יודעים מה הוא.נרצה למצוא את λ הנכון.

– ראינו כי $\boldsymbol{x}_\lambda = \left(A^TA + \lambda I\right)^{-1}A^T\boldsymbol{b}$ וגם כי $\|\boldsymbol{x}_\lambda\|^2 = \alpha$ אזי $\left\|\left(A^TA + \lambda I\right)^{-1}A^T\boldsymbol{b}\right\|^2 = \alpha$ נעביר אגף ונקבל $\left\|\left(A^TA + \lambda I\right)^{-1}A^T\boldsymbol{b}\right\|^2 - \alpha = 0$ נסמן

$$f(\lambda) = \left\|\left(A^TA + \lambda I\right)^{-1}A^T\boldsymbol{b}\right\|^2 - \alpha$$

נרצה למצוא λ כך ש $f(\lambda) = 0$.וזו תהיה λ שאנו מחפשים.נבחין כי הבעיה $f(\lambda) = \left\|\left(A^TA + \lambda I\right)^{-1}A^T\boldsymbol{b}\right\|^2 - \alpha$ היא בעיה חד מימדית.ונבחין בערכי הקיצון של $f(\lambda)$ בערכי הקיצון.

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to 0} f(\lambda) = &f(0)\\
&\left[\left\|\left(A^TA + \lambda I\right)^{-1}A^T\boldsymbol{b}\right\|^2 - \alpha\right]_{\lambda=0}\\
&= \left\|\left(A^TA + 0I\right)^{-1}A^T\boldsymbol{b}\right\|^2 - \alpha\\
&= \left\|\left(A^TA\right)^{-1}A^T\boldsymbol{b}\right\|^2 - \alpha\\
&= \|\boldsymbol{x}_{LS}\|^2 - \alpha\\
&\overbrace{>}^{\|\boldsymbol{x}_{LS}\|^2>\alpha}\ 0
\end{aligned}$$

כלומר $f(0) > 0$.

– עבור

$$\lim_{\lambda\to\infty} f(\lambda) = \lim_{\lambda\to\infty}\left[\left\|\left(A^TA+\lambda I\right)^{-1}A^T\boldsymbol{b}\right\|^2-\alpha\right]$$
$$=\left[\overbrace{\left\|\left(A^TA+\lim_{\lambda\to\infty}\lambda I\right)^{-1}A^T\boldsymbol{b}\right\|^2}^{=0}-\alpha\right]$$
$$=-\alpha$$

כלומר $\lim_{\lambda\to\infty} f(\lambda) > \alpha$ ו $\lim_{\lambda\to\infty} f(\lambda) = -\alpha$ ככל שλ גדל ככה $f(\lambda)$ הולך ויורד (לא הוכח בפועל אלא בנפנוף ידיים ש $f(\lambda)$ פונ' מונוטונית יורדת).

– אפשר למצוא את $\lambda > 0$ עבורה $f(\lambda) = 0$ על ידי כל מני טכניקות, לדוגמא על ידי טכניקה של שיטת החציה (מזכירה חיפוש בינארי) יש פה אמירה סמויה על זה ש$f(\lambda)$ היא פונ' רציפה ולכן לפי ערך הבניים יהיה קיים λ שעבורה $f(\lambda) = 0$ וזה λ שמתאים לפתרון הזה.

כלומר הפתרון הוא

$$\boldsymbol{x} = \begin{cases}\boldsymbol{x}_{\text{LS}} & \|\boldsymbol{x}_{\text{LS}}\|^2 \le \alpha\\ \left(A^TA+\lambda I\right)^{-1}A^T\boldsymbol{b} & \|\boldsymbol{x}_{\text{LS}}\|^2 > \alpha\end{cases}$$

כאשר λ היא השורש היחיד (שורש=נקודה שמביאה את הפונ' לאפס) של $f(\lambda) = \left\|\left(A^TA+\lambda I\right)^{-1}A^T\boldsymbol{b}\right\|^2 - \alpha$ בתחום $\lambda \in (0,\infty)$.(הראנו כי קיים λ כזה וניתן למצוא אותו באופן יעיל לפי שיטות שהוצגו).

דוגמא לפתרון KKT בהקשר של SVM

10.1.4 דוגמאות

10.1.5 אילוצי לגראנג'

(דולג בהרצאה אבל אמרו שצריך לדעת)

Example: support vector machines

Given $y \in \{-1,1\}^n$, and $X \in \mathbb{R}^{n\times p}$, the support vector machine problem is:

$$\min_{\beta,\beta_0,\xi} \quad \frac{1}{2}\|\beta\|_2^2 + C\sum_{i=1}^n \xi_i$$
$$\text{subject to} \quad \xi_i \ge 0,\ i=1,\dots,n$$
$$y_i(x_i^T\beta+\beta_0) \ge 1-\xi_i,\ i=1,\dots,n$$

Introduce dual variables $v, w \ge 0$. KKT stationarity condition:

$$0 = \sum_{i=1}^n w_i y_i, \quad \beta = \sum_{i=1}^n w_i y_i x_i, \quad w = C1 - v$$

Complementary slackness:

$$v_i\xi_i = 0,\ w_i\big(1-\xi_i-y_i(x_i^T\beta+\beta_0)\big) = 0, \quad i=1,\dots,n$$

$$L(\beta, \beta_0, \xi, v, w) = \frac{1}{2}\|\beta\|^2 + C\xi^T\mathbf{1} - v^T\xi + \sum_{i=1}^{n} w_i\left(1 - \xi_i - y_i(x_i^T\beta + \beta_0)\right)$$

KKT: $\nabla_{\beta, \beta_0, \xi} L(\beta, \beta_0, \xi, v, w) = 0$

1) $0 = \nabla_\beta L(\beta, \beta_0, \xi, v, w) = \beta - \sum_{i=1}^{n} w_i y_i x_i$

$\Rightarrow$

2) $0 = \nabla_{\beta_0} L = \sum_{i=1}^{n} w_i y_i$

3) $0 = \nabla_\xi L = C \cdot \mathbf{1} - v - w \Rightarrow w_i = C - v_i \quad \forall i$

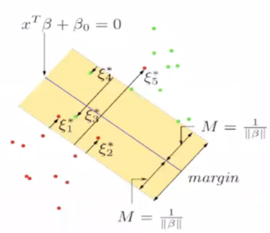
4) $v, w \geq 0$

5) $v_i \xi_i = 0 \quad \forall i$

6) $w_i\left(1 - \xi_i - y_i(x_i^T\beta + \beta_0)\right) = 0 \quad \forall i$

Hence at optimality we have $\beta = \sum_{i=1}^n w_i y_i x_i$, and w_i is nonzero only if $y_i(x_i^T\beta + \beta_0) = 1 - \xi_i$. Such points i are called the support points

- For support point i, if $\xi_i = 0$, then x_i lies on edge of margin, and $w_i \in (0, C]$;
- For support point i, if $\xi_i \neq 0$, then x_i lies on wrong side of margin, and $w_i = C$



KKT conditions do not really give us a way to find solution, but gives a better understanding

In fact, we can use this to screen away non-support points before performing optimization

10.1.6 Constrained an Lagrange forms

בד"כ בסטטסטטקה ובלמידת מכונה נעבור הלוך ושוב בין

- **בעיות מאולצות** עבורם $t \in \mathbb{R}$ הוא פרמטר שניתן לכוונון:

$$(C) \qquad , \min_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}) \ \text{s.t.} h(\boldsymbol{x}) \leq t$$

- בעיות **מצורת לגראנג'** שעבורם $\lambda \geq 0$ הוא פרמטר שניתן לכוונון:

$$(L) \qquad , \min_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}) + \lambda \cdot h(\boldsymbol{x})$$

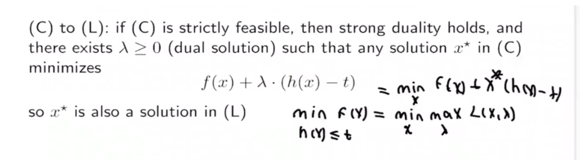
ונטען שהם בעיות שקולות.
כלומר)

1. לכל בעיה מהצורה (C) עבור t נתון קיים $\lambda \geq 0$ עבורו הבעיות $(C), (L)$ שקולות.
2. לכל בעיה מהצורה (L) עבור $\lambda \geq 0$ נתון קיים t עבורו הבעיות $(C), (L)$ שקולות.

נוכיח רק כיוון אחד של הטענה הזו:

הוכחת שקילות בכיוון $(C) \to (L)$:

אם עבור בעיה (C) תנאי סליידר מתקיימים אז יש ב(C) דואליות חזקה ואז מדואליות חזקה אנו יודעים שלכל פתרון אופטמלי של (C) שנסמנו $\boldsymbol{x}^*$ קיים λ^* ככה שהבעיות הם שקולות



בשימושים של למידת מכונה בד"כ מראים את השקילות ואז בוחרים λ כלשהו.(לא בצורה מדויקת ולכן זה לא יהיה הפתרון האופטמלי אבל בצורה שהפתרון המתקבל קשור איכשהו לפתרון האופטמלי (לא הרחיב הרבה))

10.2 תרגול 10

10.2.1 תנאי KKT

נתבונן בבעיית האופטימזציה (נסמנה בעיה (P)):

$$(P): \quad \begin{aligned} & \min_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}) \\ & \text{s.t.}\, g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0, i = 1, \ldots, m \\ & \quad h_j(\boldsymbol{x}) = 0, j = 1, \ldots, p \\ & \quad \boldsymbol{x} \in C \end{aligned}$$

כאשר כל הפונ' דיפרנציביליות ברציפות , הפונקציות $f(\cdot)$ ו $g_i(\cdot)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ קמורות והפונ' $h_j(\cdot) : j = 1, 2, 3, \ldots, p$ אפיניות (כלומר , מהצורה $h_j(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}_j^T \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_j$). הקבוצה C קמורה.

הגדרה 7.10 תהא $\boldsymbol{x}^* \in \operatorname{int}(C)$.אזי:

1. הנקודה $\boldsymbol{x}^*$ נקראת **פיסבילית** אם $\forall i \in \{1, 2, \ldots, m\} : g_i(\boldsymbol{x}^*) \leq 0$ ו $j \in \{1, 2, 3, \ldots, p\} : h_j(\boldsymbol{x}^*) = 0$.
2. הנקודה $\boldsymbol{x}^*$ נקראת נקודת KKT אם היא **פיזבילית** וקיימים $\boldsymbol{\lambda}^* \geq 0$ ו $\boldsymbol{\mu}^* \in \mathbb{R}^p$ כך ש

$$\overbrace{\nabla f(\boldsymbol{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{\lambda}_i^* \nabla g_i(\boldsymbol{x}^*) + \sum_{j=1}^{p} \boldsymbol{\mu}_j^* \nabla h_j(\boldsymbol{x}^*)}^{\nabla_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})} = 0 \tag{1}$$

$$\overbrace{\forall i \in \{1, 2, \ldots, m\} : \boldsymbol{\lambda}_i^* \nabla g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0}^{\text{complementary slackness}} \tag{2}$$

   במקרה זה נאמר כי הנקודה $\boldsymbol{x}^*$ מקיימת תנאי KKT.

   (א) (נקודה היא נקודת KKT $\iff$ סה"כ 4 תנאים עבורה:פיזבליות (2 תנאים) +KKT(2 תנאים)).

   (ב) אם אין אילוצי אי שוויון אין אילוצי complementary slackness.

3. נקודה $\boldsymbol{x}^*$ נקראת **נקודת מינימום** עבור (P) א היא פיזבילית ומתקיים $f(\boldsymbol{x}^*) \leq f(\boldsymbol{x})$ עבור כל נקודה פיזבילית אחרת.משום שהבעיה קמורה,לעיתים נקרא לנקודות המינימום גם "פתרון אופטמלי".

לעיתים מגדירים לגראנג'יאן עבור הבעיה:

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j h_j(\boldsymbol{x})$$

כאשר $\mathbb{R}^m \ni \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$ ו $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p$.אזי התנאי (1) ניתן לכתיב על ידי $\nabla_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = 0$.התנאי (2) נקרא complementary slackness , ומשמעותו: אילוץ שאינו מתקיים בשוויון מקבל כופל לגראנג' 0 .(כלומר, לכל $\forall i \in \{1, \ldots, m\} : \lambda_i \nabla g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0$ כלומר לכל i כזה : או ש $\lambda_i = 0$ או ש $g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0$)

הגדרה 8.10 הבעיה (P) מקיימ תאת תנאי סלייטר Slater אם מקיימת $\boldsymbol{x}_0 \in \operatorname{int}(C)$ המקיימת $\forall i \in \{1,2,\ldots,m\} : g_i(\boldsymbol{x}_0) < 0, \forall j \in \{1,2,3,\ldots,p\} : h_j(\boldsymbol{x}_0) = 0$ (אי שוויון חריף) .

הערה 9.10 קיימת הרחבה עברו תנאי סלייטר Slater .
אם $k \leq m, g_1, g_2, \ldots, g_k$ פונ' אפיניות , אזי נקודה פיזבלית $\boldsymbol{x}_0$ תקרא נקודת Slater אם:

$$\forall i \in \{1,2,\ldots,k\} : g_i(\boldsymbol{x}_0) \leq 0$$
$$\forall i \in \{k+1,k+2,\ldots,m\} : g_i(\boldsymbol{x}_0) < 0$$
$$\forall j \in \{1,2,3,\ldots,p\} : h_j(\boldsymbol{x}_0) = 0$$

במילים אחרות ,תנאי Slater מתקיים אם קיימת נקודה פיזבילית אשר מקיימת בחריפות את אילוצי אי השוויון הלא לינאריים (=הלא אפינים) , ומקיימת את כל האילוצי הלינאריים.

משפט 10.10 תהא (P) הבעיה הקמורה לעיל ותהא $\boldsymbol{x}^* \in \operatorname{int}(C)$ נקודה פיזבלית.אזי:

1. **תנאי מספיק:** אם הנקודה $\boldsymbol{x}^*$ היא נקודת KKT אזי $\boldsymbol{x}^*$ הינה נקודת מינימום של (P).
2. **תנאי הכרחי:**אם הבעיה (P) מקיימת תנאי סלייטר אזי תנאי KKT הם הכרחיים על מנת שהנקודה $\boldsymbol{x}^*$תתהיה נקודת מינימום.

הערה 11.10 מספר הערות לגבי המשפט:

- התנאי המספיק אינו דורש תנאי סלייטר
- אם תנאי סלייטר Slater אינו מתקיים , נקודת המינומום אינה חייבת לקיים תנאי KKT .
- כלומר אם מצאנו שתנאי סלייטר מתקיים , אזי תנאי KKT הוא תנאי מספיק והכרחי לנקודת מינימום.(KKT $\Longleftrightarrow$ מינימום)
- אם הבעיה (P) מכיל הרק אילוצים אפיניים, כלומר $g_i(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_i$ לעל i אזי תנאי סלייטר המורחב מתקיים עבור כלנקודה פיזבילית.לפיכך, במקרה זה בדיקה של קיום תנאי סלייטר שקולה לקים נקודה פיזבלית.
- קיימת הרחבה של התנאי ההכרחי לנקודת מינימום עבור בעיות לא קמורות.במקרה זה , מדובר על תנאי הכרחי לנקודת מינימום מקומי.המשפט כאן דומה אך עם תנאי אחר (שיותר קשה לבדיקה) במקום תנאי סלייטר.נושא זה הוא מעבר להיקף הקורס אך ניתן לקרוא עליו חומר נוסף בספרות , לדוג' בפרק 11.8 בספר

  Linear and Nonlinear Programming by David G. Luenberger

- תנאי סלייטר הוא תכונה של הבעיה (P), נקודת KKT זה נקודה שאנו מחפשים.אין קשר ישיר בינהם.כלומר הנקודה שמוכיחה שבעיה (P) היא בעייה שמקיימת את תנאי סלייטר היא לא בהכרח חייבת להיות נקודת הKKT.

הערה 12.10 טיפ של המתרגל.כשיש לנו בעיה במימדים קטנים $n \in \{1,2,3\}$ לדוגמא , (3 יותר קשה) או בעיה במימד גבוהה שאפשר לפשט למימד נמוך, המתרגל ממליץ לנסות לפרש אותה במונחים שנאו מכירים אם זה אפשרי , להבין גאומטרית מה קורה בבעיה (משוואות מעגלים/אליבסות וכו').

חלק IV
שיטות ואלגוריתמים מסדר שני

עד כה ראינו שיטות מסדר ראשון,שיטות שמשתמשות בנגזרת ראשונה של פונ' המטרה.היום ובמהשך נראה בקורס נראה שיש יתרון להסתכל על נגזרות מסדר שני־ מכאן שמם־ שיטות מסדר שני.בפרט נדבר על שיטת ניוטון (על שם הפיזקאי והמטמטיקאי הנודע) ואנחנו נראה תחת אילו הנחות יש לשיטה הזו ייתרונותעל פני השיטות שראינו עד כה.

11 הרצאה ותרגול 11

11.1 הרצאה 11

הגדרה 1.11 עבור פונ' חד מימדית $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ נאמר שנקודה $x \in \mathbb{R}$ היא שורש של f אם $f(x) = 0$.

11.1.1 שיטת ניוטון

המקרה החד מימדי ־ שיטת ניוטון רפסון נתחיל ונתבונן על בעיות חד מימדיות $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ שהן לאו דווקא בעיות אופטמזיציה.

נניח ויש לנו פונ' $f\left(x\right)$ ואנו רוצים למצוא מתי $f\left(x\right)$ מתאפסת (עבור איזה x $f\left(x\right)$ מתאפסת=מה השורשים של $f\left(x\right)$).

מה שצריך להיות לנו לכל הזמן בראש ש$f\left(x\right)$ בהמשך תהיה הנגזרת של הפונ' שעליה אנו עושים את האופטמזיציה ולכן אנחנו רוצים למצוא מתי הנגזרת מתאפסת (אבל זה רק ברקע בנתיים).

בכל אופן יש לנו פונ' $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ ורוצים למצוא עבור אילו x־ים היא מתאפסת.

במאה ה17 ניוטון ורפסון (ניוטון קודם ואז רפסון) שני מתמתקאים,המציאו את השיטה הזו.

שיטת ניוטון רפסון היא איטרטיבית ועיקר השיטה היא להתחיל בנקודה כלשהיא ונבצע לינארזציה של הפונ' , ניקח את המשיק לפונ' f בנקודה x_t ונראה איפה הוא מתאפס,וזו תהיה הנקודה x_{t+1}.וככה נמשיך באופן איטרטיבי.ובכך השאיפה היא שנלך ותקרב לנקודה שבה $f\left(x\right)$ מתאפסת.

המטרה: מציאת **אפס** של הפונ' הגזירה $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$.

שיטה:

$$x_{t+1}=x_t-\frac{f\left(x_t\right)}{f'\left(x_t\right)}\qquad ,t\geq0$$

כאשר $x=x_{t+1}$ פותר את

$$f\left(x_t\right)+f'\left(x_t\right)\left(x-x_t\right)=0$$

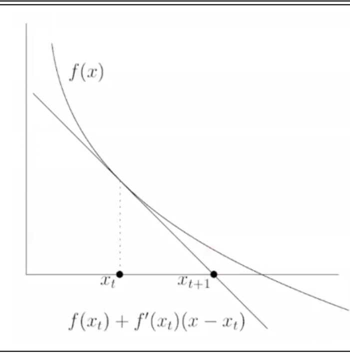
אפשר להראות זאת :

$$f\left(x_t\right)+f'\left(x_t\right)\left(x-x_t\right)=0$$

$$f\left(x_t\right)=f'\left(x_t\right)\left(x_t-x\right)$$

$$\frac{f\left(x_t\right)}{f'\left(x_t\right)}=\left(x_t-x\right)$$

$$x=x_t-\frac{f\left(x_t\right)}{f'\left(x_t\right)}$$



הערה 2.11 המשוואה $f\left(x_t\right)+f'\left(x_t\right)\left(x-x_t\right)$ היא משוואת המשיק לפונ' בנקודה x_t.

The Babylonian method השיטה הבבלית. ניוטון ורפסון הכלילו את השיטה הבבלית עבור פונ' ככליות אבל הבבלים דרך השיטה הנ"ל מצאו דרך למצוא דרך השיטה הנ"ל שורש ריבועי של מספרים.כלומר השיטה הנ"ל למציאת שורש ריבועי הייתה ידועה לאנושות עוד בשנת 1500 לפנה"ס.

חישוב שורש קיבועי:

נניח שיש ל נו סקלאר $R\in\mathbb{R}$ כלשהו ואנו רוצים למצוא את $\sqrt{R}$.

הבעיה הנ"ל שקולה לבעיה הבאה.
מציאת שורשים לפונ' $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ מהצורה הבאה $f(x)=x^2-R$.הנקודה שבה $f(x)$ מתאפסת הוא $\sqrt{R}$. כלומר

$$f(x^*)=0\Rightarrow x^*=\sqrt{R}$$

כלומר רוצים את $\sqrt{R}$ דרך מציאת שורש לפונק' $f(x)=x^2-R$.
נסתכל על כלל העדכון של שיטת ניוטון רפסון עבור הפונ' $f(x)=x^2-R$.
צעד ניוטון רפסון:

$$x_{t+1}=x_t-\frac{f(x_t)}{f'(x_t)}=x_t-\frac{x_t^2-R}{(x_t^2-R)'}=x_t-\frac{x_t^2-R}{2x_t}=\frac{1}{2}\left(x_t+\frac{R}{x_t}\right)$$

הערה 3.11 נשים לב שאם $x_t=\sqrt{R}$ אזי מתקיים כי $x_{t+1}=x_t=\sqrt{R}$.וזו למעשה נקודת שבת (נקודה שלא משתנה) בכלל העדכון הזה.

ננסה לבצע אנליזה של השיטה הנ"ל.
נניח שאנו מתחילים את השיטה ממספר חיובי כלשהו $x_0>0$ נקבל

$$x_{t+1}=\frac{1}{2}\left(x_t+\frac{R}{x_t}\right)\geq\frac{x_t}{2},x_{t+1}\geq\sqrt{R},\forall t\geq 1$$

אפשר להראות (לא נוכיח בקורס)שאם מתחילים את השיטה ב $x_0=R+1$ (R הוא מספר ידוע) אזי ייקח $\mathcal{O}(\log R)$ צעדים (זה למעשה מספר קבוע של איטרציות) לקבל פתרון $x_t-\sqrt{R}<\frac{1}{2}$.כלומר המרחק שבין הפתרון האופטמלי $\sqrt{R}$ לבין הפתרון המתקבל x_t יהיה קטן מחצי.
אנחנו הולכים להראות ש**החל מהנקודה שבה הפתרון מקיים** $x_t-\sqrt{R}<\frac{1}{2}$ (הפתרון קרוב עד כדי חצי לפתרון האופטמלי) **ההתכנסות הולכת להיות מאוד מהירה** כלומר כדי להגיע לפתרון שהוא ϵ קרוב לפתרון האופטמלי $\sqrt{R}$ נרצה לשאול כמה איטרציות נחוצות.כלומר נשאל כמה איטרציות נחוצות לקבלת $x_t-\sqrt{R}<\epsilon$ עבור ϵ קטן כרצוננו.(לודמגא 10^{-9})
השיטה הבבלית : ניתוח
נניח כי $x_0-\sqrt{R}<\frac{1}{2}$ (אפשרי להשיג x_t שמקיים זאת לאחר $\mathcal{O}(\log R)$ צעדים (לא נוכיח זאת)).
אזי:

$$\begin{aligned}x_{t+1}-\sqrt{R}&=\frac{1}{2}\left(x_t+\frac{R}{x_t}\right)-\sqrt{R}\\&=\frac{x_t}{2}+\frac{R}{2x_t}-\sqrt{R}\\&=\frac{1}{2x_t}\left(x_t^2+R-2x_t\sqrt{R}\right)\\&=\frac{1}{2x_t}\left(x_t^2-2x_t\sqrt{R}+\sqrt{R}^2\right)\\&=\frac{1}{2x_t}\left(x_t-\sqrt{R}\right)^2\end{aligned}$$

בפרט

$$x_{t+1}-\sqrt{R}=\frac{1}{2x_t}\left(x_t-\sqrt{R}\right)^2$$

נבחין כי $x_{t+1}-\sqrt{R}$ היא למעשה השגיאה בסיבוב ה $t+1$ ו $x_t-\sqrt{R}$ היא השיגאה בסיבוב הt.כלומר קיבלנו כאן מקרה עבורו השגיאה בסיבוב ה $t+1$ שווה ל$\frac{1}{2x_t}$ כפול השגיאה בסיבוב הקודם בריבוע.
כדי לסבר את האוזן , נניח לרגע כי $\frac{1}{2x_t}$ שווה בערך לאחד לצורך המחשה של הקשר הזה.אם השגיאה בסיבוב ה$t+1$ היא 10^{-6} אז השגיאה בסיבוב הבא (ה $t+1$) היא $\left(10^{-6}\right)^2=10^{-12}$.והשגיאה בסיבוב הבאה היא 10^{-24}.

כלומר אם משתמשים בשיטת ניוטון רפסון והגענו למצב בו $x_0-\sqrt{R}<\frac{1}{2}$ מנקודה זו והלאה ההתכנסות תהיה מאוד מהירה (אפילו על אקפוננסצאלית(=יותר מהירה מאקפוננצאלית)) וזה תכונה מאוד מאוד מרשימה של ניוטון רפסון.
אבל $\frac{1}{2x_t}$ אינו קבוע.
נעשה **הנחה נוספת** נניח כי $R\geq\frac{1}{4}$
נזכר בכלל העדכון

$$\star: x_{t+1}-\sqrt{R}=\frac{1}{2x_t}\left(x_t-\sqrt{R}\right)^2$$

הגודל באגף שמאל $\frac{1}{2x_t}\left(x_t-\sqrt{R}\right)^2$ תמיד חיובי ולכן

$$x_{t+1}=\overbrace{\frac{1}{2x_t}\left(x_t-\sqrt{R}\right)^2}^{>0}+\sqrt{R}\geq\sqrt{R}$$

כלומר $x_{t+1}\geq\sqrt{R}$.
אם נניח כי $R\geq\frac{1}{4}$ אזי נקבל כי

$$x_t\geq\sqrt{R}\geq\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}\Rightarrow x_t\geq\sqrt{R}\geq\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{x_t}\leq 2\Rightarrow ✡:\frac{1}{2x_t}\leq 1$$

ואז מ$\star$ נקבל

$$\left(x_{t+1}-\sqrt{R}\right)\overbrace{=}^{\star}\frac{1}{2x_t}\left(x_t-\sqrt{R}\right)^2\overbrace{\leq}^{✡}\left(x_t-\sqrt{R}\right)^2$$

ובפרט קבלנו כי

$$\left(x_{t+1}-\sqrt{R}\right)\leq\left(x_t-\sqrt{R}\right)^2$$

כלומר

$$\left(x_{t+1}-\sqrt{R}\right)\leq\left(x_t-\sqrt{R}\right)^{2^1}\leq\left(\left(x_{t-1}-\sqrt{R}\right)^2\right)^2\leq\ldots\leq\left(x_0-\sqrt{R}\right)^{2^t}$$

כלומר (נזכור כי אנו הנחנו בהתחלה כי נניח כי $x_0-\sqrt{R}<\frac{1}{2}$)

$$x_T-\sqrt{R}\leq\left(x_0-\sqrt{R}\right)^{2^T}\overbrace{<}^{x_0-\sqrt{R}<\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{2^T}\qquad ,T\geq 0$$

כלומר

$$x_T-\sqrt{R}\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{2^T}\qquad ,T\geq$$

אזי כדי לקבל פתרון ϵ תת אופטמלי (=השגיאה $x_T-\sqrt{R}$ מקיימת כי $x_T-\sqrt{R}\leq\epsilon$) אנו צריכים רק $T=\log\log\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$ צעדים.(שזה מעט מאוד!)

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2^T} \le \epsilon \iff$$
$$\iff \frac{1}{2^{2^T}} \le \epsilon$$
$$\iff 2^{\left(2^T\right)} \ge \frac{1}{\epsilon}$$
$$\iff 2^T \ge \log\frac{1}{\epsilon}$$
$$\iff T \ge \log\log\frac{1}{\epsilon}$$

כלומר לקבת פתרון ϵ תת אופטמלי אנו צריכים רק $T = \log\log\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$ צעדים.

וזה נותן לנו את ההתכנסות הסופר מהירה שעליה דיברנו.
כלומר בהנתן ש $x_0 - \sqrt{R} < \frac{1}{2}$ מנקודה זו ואילך השגיאה בצעד הקודם תהיה ריבוע השגיאה בצעד הנוכחי.לא ראינו בקורס עוד שיטות שמתכנסות בקצב כזה מהר.
אז מה ראינו?

- ראינו שיטת ניוטון רפסון למציאת שורש לפונ' חד מימדית $f(x)$.
- ראינו כי אם מפעילים את הישטה הזו עבור בעיה של מציאת שורש אז החל מנקודה מסויימת ההתכנסות היא על־אקפוננצאלית (המרצה אמר "סופר אקפוננצאלית") למציאת פתרון ϵ תת אופטמלי אנו צריכים $\mathcal{O}\left(\log\log\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right)$ צעדים.

11.1.2 שיטת ניוטון לאופטמזציה

נזכר במשפט שראינו בעבר:
משפט: תהא $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ גזירה וקמורה.אזי: $\nabla f(\boldsymbol{x}) = 0 \iff \boldsymbol{x}$ היא נקודת מינימום גלובלי של f.
במקרה החד מימדי:
רוצים למצוא נקודת מינימום גלובלי x^* של פונ' גזירה וקמורה $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
מסקנה מהמשפט מעלה היא כי $\min_x f(x) \iff f'(x) = 0$ (כלומר עבור נקודת מינמום הגלובלי הנגזרת של הפונ' מתאפסת).
בהנחה ש $f'(x)$ פונ' גזירה (=כלומר ש $f(x)$ גזירה פעמיים) ולכן נוכל לחפש במקום נקודת מינימום של $\min_x f(x)$ נוכל לחפש את השורשים של הפונ' $f'(x)$ (הנגזרת של $f(x)$). את השורש הזה נוכל למצוא על ידי שיטת ניוטון רפסון שיופעל על הפונ' $f'(x)$.
צעד העדכון במקרה הזה נתון על ידי

$$x_{t+1} = x_t - \frac{f'(x_t)}{f''(x_t)} = x_t - f''(x_t)^{-1} f'(x_t)$$

שיטה זו נקראת **שיטת ניוטון במימד אחד**
כלומר:

שם	שיטה
שיטת ניטון רפסון	שיטה למציאת שורשים של פונ'
שיטת ניוטון	שיטה למציאת מינימום גלובלי

במקרה ה d מימדי רוצים למצוא נקודת מינימום גלובלי x^* של פונ' גזירה וקמורה $f:\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$.
מסקנה מהמשפט מעלה היא כי $\min_x f(\boldsymbol{x}) \iff \nabla f(\boldsymbol{x}) = 0$ (כלומר עבור נקודת מינמום הגלובלי של הפונ' $f(\boldsymbol{x})$ שקול למציאת התאפסות הגרדיאנט של הפונ' $(\nabla f(\boldsymbol{x})$).
כלומר נרצה להשתמש בשיטה של ניוטון רפסון למציאת $\boldsymbol{x}$ עבורו $f(\boldsymbol{x}) = 0$.
שיטת ניוטון רפסון עד כה הוגדרה למימד אחד.
ההכללה הטבעית לשיטת ניוטון רפסון לפונ' במראה הרב מימדי $f:\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ היא כלל העדכון הבא:

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \boldsymbol{x}_t - \left(\nabla^2 f(\boldsymbol{x}_t)\right)^{-1} \nabla f(\boldsymbol{x}_t)$$

ולכן שיטה זו נקראת שיטה מסדר שני מכיוון שהיא משתמשת בכלל עדכון שמכיל בתוכו גם את בטוי שתלוי בהאסיאן של f.

הערה 4.11 שיטת ניוטון רפסון לפונ' במראה הרב מימדי מוגדרת היטב $\iff$ ההאסיאן $\nabla^2 f(\boldsymbol{x}_t)$ הפיכה בנקודה $\boldsymbol{x}_t$.אנחנו נראה בהמשך הנחות שנעשה שייאפשרו לנו לומר שהשיטה אכן מוגדרת היטב וההאסיאן באמת הפיך.

11.1.3 אינרפטציות (דרכי הסתכלות) שונות על שיטת ניוטון

שיטת ניוטון = adaptive gradient descent אחת האפשרויות לשחוב על שיטת ניוטון היא בתור הכללה של שיטת הגרדיאנט.
פונ' עדכון כללית

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \boldsymbol{x}_t - H(\boldsymbol{x}_t) \nabla f(\boldsymbol{x}_t)$$

כאשר $H(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^{d\times d}$ הוא מטריצה.

- בשיטת ניוטון $H = \left(\nabla^2 f(\boldsymbol{x}_t)\right)^{-1}$
- בשיטת gradient descent : $H = \eta I_{d\times d}$.

בשיטת ניוטון: adaptive gradient descent היא אדפטציה לפי הגאומטריה הלוקלית של הפונ' בנקודה $\boldsymbol{x}_t$.(תכף נראה את המשמעות של זה)

Newton's method: "adaptive gradient descent", adaptation is w.r.t. the local geometry of the function at $\mathbf{x}_t$.

שיטות ניוטון - קירובים מסדר שני

- נזכר כי המוטבציה ל gradient descent step בנקודה $\boldsymbol{x}$: היתה למזער את הקירוב מסדר ראשון (של הנקודה $\boldsymbol{x}$ שאנו נמצאים בה כעת) + רכיב ריבועי.(ראינו את ההסתכלות הזו בעבר)

$$f(\boldsymbol{y}) \approx f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x})^T (\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2\eta}\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|_2^2$$

מעל $\boldsymbol{y}$, וכאשר זה יניב את צעד העדכון $\boldsymbol{x}^+ = \boldsymbol{x}_t - \eta\nabla f(\boldsymbol{x})$.

  – בשיטה זו "היינו זהירים" והוספנו בשיטה זו איבר $\frac{1}{2\eta}\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|_2^2$ שדואג שלא נתרחק יותר מדי בכל עדכון מה $\boldsymbol{x}$ המקורי.

- בצורה אנלוגית שיטת ניוטון משתמשת בקירוב מסדר ראשון ועוד קירוב מסדר שני (זה פשוט קירוב טוב יותר)

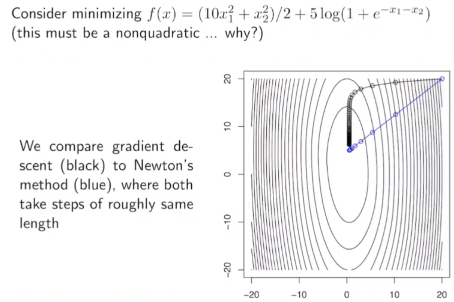
$$f(\boldsymbol{y}) \approx f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x})^T (\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})^T \nabla^2 f(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})$$

וממזערים מעל $\boldsymbol{y}$ כדי לקבל את צעד העדכון $\boldsymbol{x}^+ = \boldsymbol{x} - \left(\nabla^2 f(\boldsymbol{x})\right)^{-1}\nabla f(\boldsymbol{x})$

  – בשיטה זו אנו לא"זהירים" כלל כי אנו לא מוספים איבר נוסף לקירוב מסדר שני ואנו "מאמינים " רק לקירוב מסדר שני של הפונ' וזו אחד מהדברים שהופכים את שיטת ניוטון לבעייתית.
  – הדבר הזה יוביל לקצבים מאוד מהירים כשהאיטרנטים של השיטה מאוד קרובים לאופטמימום (תחת הנחות מוסיימות שנראה) ויוביל לקבצהים מאוד רחוקים כשאנחנו רחוקים מהאופטמימום הקירוב מסדר שני פחות אמין כקירוב לפונ' ולכן שיטות מסדר שני ייתכנסו בד"כ יותר לאט.
  – מה שעושים בפועל:הדבר הזה ייגרום לנו לרצות להשתמש ב GD כשאנו רחוקים מהאופטימום ומעבר לנקודה מסוימת שנאו חושבים שנאו קרובים מספיק לפתרון האופטמלי נשתמש בשיטת Newton.(להתקדם על ידי שיטת ניוטון).
  – ישנן משפחה של פונ' (לדוגמא רגרסיה לוגסטית) שיש משפט שתמיד מבטיח שההתכנסות של שיטתניוטון תהיה מהירה יותר משיטת GD ולכן בפתרון בעיות אלו בד"כ משתמשים מההתחלה בשיטת ניוטון.(נדבר על זה בהרצאה הבאה)

דוגמאות:

דוגמא -פונ' ריבועית עם איבר לא ריבועי:
נסתכל על הפונ' הבאה, שמכילה איבר ריבועי ואיבר לא ריבועי

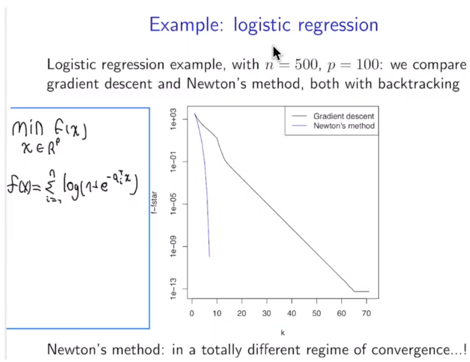


שיטת ניוטון מופיעה בכחול.
ושיטת GD מופיעה בשחור.
נבחין כי הבעיה היא פחוסה (x_1,x_2 בסקאלות שונות) ראינו כבר כי במקרים ביצועי GD נפגעים מאוד אבל ביצועי שיטת ניוטון לא נפגעים מההפרשים בסקאלות הנ"ל.

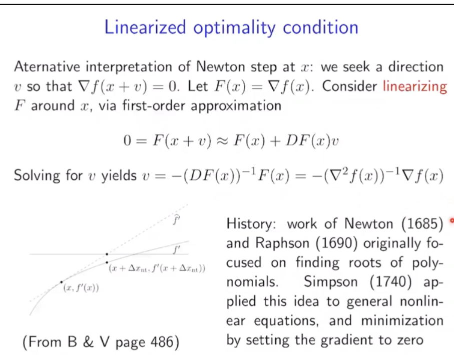
הערה 5.11 אם f היתה מכילה רק איברים ריבועיים כלומר $f(x)=\frac{10x_1^2+x_2^2}{2}$ אזי תהיה לשיטת ניוטון התכנסות תוך איטרציה אחת כי צעד העדכון מוצא מינימום לקירוב הריבועי של הפונ'.(ניוטון ממזער את הקירוב הריבועי של הפונ',ואם הפונ' היא ריבועית אז הקירוב שלה זה היא עצמה). ולכן לפונ' הוסיפו את הרכיב הריבועי כדי שיהיה מעניין ולא נתכנס תוך סיבוב אחד.

דוגמא -רגרסיה לוגיסטית:

רגרסיה לוגיסטית עם $n=500,p=100$ נשווה את שיטת הGD לשיטת ניוטון שניהם עם backtracking (לא פירט על זה ולא פירט על הבעיה/ הפונ' הלוגסטית)



אינרפטציה לשיטת ניוטון רפסון



11.1.4 תכונות של שיטת ניוטון

אינוואריאנטיות לטרנספורמציה אפינית affine invarince(תכונה של שיטת ניוטון) הזכרנו את הנושא הזה גם בתרגול.GD יכול להכשל במידה והקורדנטות הם בסדרי גודל שונים.הפרש הסקאלות מגולם בגודל condition number וכאשר הגדול הזה גדול מאוד (כלומר קיים הפרש סקאלות גדול מאוד) ביצועי GD **נפגעים מאוד.**

ניתן להראות כי שיטת נוטון אינווריאנטית להפרשי סקאלות affine invarince.כלומר הביצועים שלה לא תלויים בהפרשי הסקאלות שבבעיה.

תזכורת: (למשפט שראינו)

משפט: אם f גזירה ברציפות , $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times m}$ ו $g(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{A}x)$ אזי

$$\star: \begin{array}{c}\nabla g(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}^T\nabla f(\boldsymbol{Ax})\\ \nabla^2 g(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}^T\nabla^2 f(\boldsymbol{Ax})\boldsymbol{A}\end{array}$$

תכונה חשובה של שיטת ניוטון היא אינוואריאנטיות לטרנספורמציה אפינית (affine invariance). בהנתן f , מטריצה הפיכה $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, יהא $\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{y}$ ו $g(\boldsymbol{y})=f(A\boldsymbol{y})$. צעד ניוטון על g נתון על ידי

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}^+&=\boldsymbol{y}-\left(\nabla^2 g(\boldsymbol{y})\right)^{-1}\nabla g(\boldsymbol{y})\\ &\overbrace{=}^{g(\boldsymbol{y})=f(A\boldsymbol{y})}\boldsymbol{y}-\left(\nabla^2 f(A\boldsymbol{y})\right)^{-1}\nabla f(A\boldsymbol{y})\\ &\overbrace{=}^{\star}\boldsymbol{y}-\left(\boldsymbol{A}^T\nabla^2 f(\boldsymbol{Ay})\boldsymbol{A}\right)^{-1}\boldsymbol{A}^T\nabla f(\boldsymbol{Ay})\\ &=\boldsymbol{y}-(\boldsymbol{A})^{-1}\left(\nabla^2 f(\boldsymbol{Ay})\right)^{-1}\left(\boldsymbol{A}^T\right)^{-1}\boldsymbol{A}^T\nabla f(\boldsymbol{Ay})\\ &=\boldsymbol{y}-\boldsymbol{A}^{-1}\nabla^2 f(\boldsymbol{Ay})^{-1}\nabla f(\boldsymbol{Ay})\end{aligned}$$

כלומר צעד העדכון עבור $\boldsymbol{y}$ הוא:

$$\boldsymbol{y}^+=\boldsymbol{y}-\boldsymbol{A}^{-1}\nabla^2 f(\boldsymbol{Ay})^{-1}\nabla f(\boldsymbol{Ay})$$

נכפיל ב A משמאל ונקבל

$$A\boldsymbol{y}^+=A\boldsymbol{y}-\nabla^2 f(\boldsymbol{Ay})^{-1}\nabla f(\boldsymbol{Ay})$$

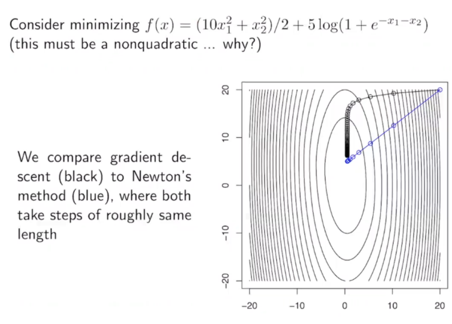
נציב $\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{y}$ (נסמן $\boldsymbol{x}^+=A\boldsymbol{y}$) ונקבל בדיוק את ככל העדכון של ניוטון:

$$\boldsymbol{x}^+=\boldsymbol{x}-\nabla^2 f(\boldsymbol{x})^{-1}\nabla f(\boldsymbol{x})$$

אזי ההתקדמות האלג' אינה תלויה בסקיילינג של הבעיה (אינווראנטית לטרנס' אפינית) .

במילים אחרות , אם נפעיל את השיטה על $\boldsymbol{x}$ ועל $\boldsymbol{y}$ כך ש $\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{y}$ נקבל את אותם האיטרנטים (כך שהקשר בינהם יהיה הכפלה ב A).

ולכן אם שמים את המשקפיים של שיטת ניוטון לפחיסות של הבעיה (הפרשי סקאלות) אין משמעות להתקדמות הקצב של האלג' (מאינוורנטיות יכולנו להציע טרנס A שתקטין את הפחיסות (תתקטין את היחס בין x_1,x_2) ושימוש באלג' של שיטת ניוטון יניב את אותם הביצועים בדיוק).



התכנסות לוקלית Local convergence(תכונה של שיטת ניוטון) נוכיח כי מעל תנאים מסוימים וכאשר אנו מתחילים את השיטה בx_0 שקרוב מספיק לנקודת המינימום הגלובלי, הקצב של שיטת ניוטון להשגת פתרון ϵ אופטמלי הוא תוך $\log\log\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$ צעדים.

הערה 6.11 זה למעשרה הרבה יותר מהיר מכל שיטה אחרת שראינו עד כה..אבל החסרון הוא שאנו צרייכם להתחיל מראש בנקודה שמספיק קרובה למינימום.

לתכונה זו נקרא **תוצאת התכנסות לוקלית**.

הגדרה 7.11 בהנתן מטריצה סמטרית $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (שייכת למרחב המט' הסמטריות ממימד $n\times n$ שמסומן $\mathbb{S}^n$ כלומר $A \in \mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$) נגדיר את **הנורמה הספקטרלית Spectral norm** באופן הבאה $\|A\|_L \triangleq \max_{\boldsymbol{x}\neq \boldsymbol{0}} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2}$.נבחין כי **הנו**רמה הספקטרלית היא נורמה על מטריצה.כלומר $\|\cdot\|_L : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

הערה 8.11 הקשר בין הנורמה הספקטרלית הוא כדלכמן: $\|A\|_L = \lambda_{\max}$ כלומר הנורמה הספקטרלית של מטריצה סמטרית $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ הוא הע"ע הגדול ביותר של A.

משפט 9.11 מתקיים: $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n\times n} : \|A\boldsymbol{x}\|_2 \leq \|A\|_L \cdot \|\boldsymbol{x}\|_2$ (נובע ישירות מההגדרה)

סימון 10.11 מעכשיו כל פעם שנרשום $\|\cdot\|$ על ווקטור נתכוון לנורמה האוקלידית (נורמת l_2) כלומר ל $\|\cdot\|_2$.

סימון 11.11 מעכשיו כל פעם שנרשום $\|\cdot\|$ על מטריצה נתכוון לנורמה הספקטרליתכלומר ל $\|\cdot\|_L$.

כשאתה מתקרב מספיק,אתה כבר שם...

משפט 12.11 תהא $f : \mathrm{dom}\,(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ פונ' קמורה עם מינימום גלובלי יחיד $\boldsymbol{x}^*$.
אם
קיים כדור $X \subseteq \mathrm{dom}\,(f)$ שמרכזו בנקודה $\boldsymbol{x}_t$ כך ש:

1. inverse hessians exists (קיום הופכי להסיאן): מתקיים כי ההסיאן הפיך בכל X כלומר $\forall \boldsymbol{x} \in X$ קיים $\left(\nabla^2 f(\boldsymbol{x})\right)^{-1}$.
2. **Bounded inverse hessians**(הופכי להסיאן חסום)**:** קיים מספר $\mathbb{R} \ni \mu > 0$ כך ש:
$$\forall \boldsymbol{x} \in X : \left\|\nabla^2 f(\boldsymbol{x})^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\mu} \Rightarrow \nabla^2 f(\boldsymbol{x}) \geq \mu I$$

(א) אפשר לומר שהתכונה $\forall \boldsymbol{x} \in X : \left\|\nabla^2 f(\boldsymbol{x})^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\mu}$ המשמעות היא $\nabla^2 f(\boldsymbol{x}) \geq \mu I$ כלומר, שהע"ע הכי נמוך של ההסיאן בכל נקודה $\forall \boldsymbol{x} \in X$ גדול מ μ.לתכונה הזו קראנו בשם:strongly convex.כלומר התכונה הזו שקולה לאמירה שקיים מספר $\mathbb{R} \ni \mu > 0$ שלכל $\forall \boldsymbol{x} \in X$ f היא strongly convex μ מעל תחום X.

3. Lipschitz continuis hessians(רציפות לפשצית של ההסיאן):קיים מספר $\mathbb{R} \ni B > 0$ כך ש
$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X : \left\|\nabla^2 f(\boldsymbol{x}) - \nabla^2 f(\boldsymbol{y})\right\| \leq B \cdot \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$$

אזי:
לכל $\boldsymbol{x}_t \in X$ ו$\boldsymbol{x}_{t+1}$ שנוצר מצעד ניוטון בנקודה $\boldsymbol{x}_t$ נקבל
$$\|\boldsymbol{x}_{t+1} - \boldsymbol{x}^*\| \leq \frac{B}{2\mu} \|\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}^*\|^2$$

הערה 13.11 הבטוי $\|\boldsymbol{x}_{t+1} - \boldsymbol{x}^*\| \leq \frac{B}{2\mu} \|\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}^*\|^2$ שוב מרמז לנו על התכנסות על אקפוננצאלית כפי שריאנו קודם.

התכנסות סופר אקפוננסצאלית (על־אקפוננצאלית)

מסקנה 14.11 עם ההנחות והטרמינולוגיה שהוזכרה קודם , ואם $\|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}^*\| \leq \frac{\mu}{B}$ **אזי** שימוש בשיטת ניוטון יניב
$$\|\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}^*\| \leq \frac{\mu}{B}\left(\frac{1}{2}\right)^{2^T-1}, T \geq 0$$

כלומר אם נתחיל להשתמש בשיטת ניוטון כשאנו קרובים מספיק למינימום גלובלי, נגיע לפתרון ϵ תת אופטמלי תוך $\mathcal{O}\left(\log\log\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right)$ צעדים.

(החסם מאוד דומה לחסם שהראנו בשיטה הבבלית).

אינטואציה לגבי ההתכנסות הסופר אקפסוננלית

- אם הפונקציה המקורית היא ריבועית אז שיטת ניוטון מוצאת את הפתרון בצעד אחד (ראינו את זה)
- קרוב לאופטימום ההסיאנים קרובים להסיאן ב$\boldsymbol{x}^*$.לפי Lipschitz continuis hessians

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X : \left\|\nabla^2 f(\boldsymbol{x}) - \nabla^2 f(\boldsymbol{y})\right\| \leq B \cdot \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$$

אזי בפרט $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_t, \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^*$ ונקבל

$$\left\|\nabla^2 f(\boldsymbol{x}_t) - \nabla^2 f(\boldsymbol{x}^*)\right\| \leq B \cdot \|\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}^*\|$$

כלומר כאשר $\|\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}^*\|$ קטן אזי $\left\|\nabla^2 f(\boldsymbol{x}_t) - \nabla^2 f(\boldsymbol{x}^*)\right\|$ קטן.כלומר באזור קרוב ל$\boldsymbol{x}^*$ הפונ' היא בקירוב ריבועית (ההסיאן של f בנקודה $\boldsymbol{x}_t$ מתקרב להסיאן של f בנקודה $\boldsymbol{x}^*$) .

הוכחה של משפט ההתכנסות נסמן את ההסאן באות H כלומר $\forall \boldsymbol{x} : H(\boldsymbol{x}) \triangleq \nabla^2 f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_t, \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}_{t+1}$.
נתבונן בצעד ניוטון :

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \boldsymbol{x}_t - \left(\nabla^2 f(\boldsymbol{x}_t)\right)^{-1} \nabla f(\boldsymbol{x}_t)$$

נסמן לפי הסימונים ונקבל

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} - (H(\boldsymbol{x}))^{-1} \nabla f(\boldsymbol{x})$$

נחסר $\boldsymbol{x}^*$ משני האגפים

$$\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^* - (H(\boldsymbol{x}))^{-1} \nabla f(\boldsymbol{x})$$

כלומר

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}^* &= \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^* - (H(\boldsymbol{x}))^{-1} \nabla f(\boldsymbol{x}) \\
&\overbrace{=}^{(\nabla f(\boldsymbol{x}^*)=0)} \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^* + (H(\boldsymbol{x}))^{-1} \left(\overbrace{\nabla f(\boldsymbol{x}^*)}^{=0} - \nabla f(\boldsymbol{x})\right) \\
&= \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^* + (H(\boldsymbol{x}))^{-1} \int_0^1 H(\boldsymbol{x} + t(\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}))[\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}]\, dt
\end{aligned}$$

כאשר המעבר האחרון מוצדק על ידי המשפט הבא מחדווא

$$\int_a^b h'(t)\, dt = h(b) - h(a)$$

עבור

$$h(t) = \nabla f(\boldsymbol{x} + t(\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x})) \Rightarrow \begin{array}{c} h(0) = \nabla f(\boldsymbol{x}) \\ h(1) = \nabla f(\boldsymbol{x}^*) \\ h(1) - h(0) = \nabla f(\boldsymbol{x}^*) - \nabla f(\boldsymbol{x}) \end{array}$$

$$h'(t) = \nabla^2 f(\boldsymbol{x} + t(\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}))[\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}]$$

ולכן

$$\nabla f\left(\boldsymbol{x}^*\right) - \nabla f(\boldsymbol{x}) = h(1) - h(0) = \int_0^1 h'(t)\, dt = \int_0^1 \left(\nabla^2 f\left(\boldsymbol{x} + t\left(\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}\right)\right)\left[\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}\right]\right) dt$$

כלומר קיבלנו כי

$$\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^* + (H(\boldsymbol{x}))^{-1} \int_0^1 H(\boldsymbol{x} + t(\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}))[\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}]\, dt$$

בנוסף נזכיר כי הנחנו כי ההסיאן הוא הפיך:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{*} &= I\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{*}\right)\\
&= \left[H\left(\boldsymbol{x}\right)\right]^{-1}\overbrace{\left[H\left(\boldsymbol{x}\right)\right]\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{*}\right)}^{\not\propto t}\\
&\overbrace{=}^{\star}\left[H\left(\boldsymbol{x}\right)\right]^{-1}\int_{0}^{1}\left[H\left(\boldsymbol{x}\right)\right]\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{*}\right)dt\\
&= \left[H\left(\boldsymbol{x}\right)\right]^{-1}\int_{0}^{1}\left[-H\left(\boldsymbol{x}\right)\right]\left(\boldsymbol{x}^{*}-\boldsymbol{x}\right)dt
\end{aligned}$$

($\star$:הבטוי לא תלוי ב t ולכן מותר לעשות אינטגרל על פני t)
כלומר הראו כי

$$(I)\qquad \boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}^{*}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{*}+\left(H\left(\boldsymbol{x}\right)\right)^{-1}\int_{0}^{1}H\left(\boldsymbol{x}+t\left(\boldsymbol{x}^{*}-\boldsymbol{x}\right)\right)\left[\boldsymbol{x}^{*}-\boldsymbol{x}\right]dt$$

$$(II)\qquad \boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{*}=\left[H\left(\boldsymbol{x}\right)\right]^{-1}\int_{0}^{1}\left[-H\left(\boldsymbol{x}\right)\right]\left(\boldsymbol{x}^{*}-\boldsymbol{x}\right)dt$$

נציב את (II) בתוך (I) ונקבל

$$\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}^{*}=\overbrace{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{*}}^{\left[H(\boldsymbol{x})\right]^{-1}\int_{0}^{1}\left[-H(\boldsymbol{x})\right](\boldsymbol{x}^{*}-\boldsymbol{x})dt}+\left(H\left(\boldsymbol{x}\right)\right)^{-1}\int_{0}^{1}H\left(\boldsymbol{x}+t\left(\boldsymbol{x}^{*}-\boldsymbol{x}\right)\right)\left[\boldsymbol{x}^{*}-\boldsymbol{x}\right]dt$$

כלומר

$$\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}^{*}=\left[H\left(\boldsymbol{x}\right)\right]^{-1}\int_{0}^{1}\left[-H\left(\boldsymbol{x}\right)\right]\left(\boldsymbol{x}^{*}-\boldsymbol{x}\right)dt+\left(H\left(\boldsymbol{x}\right)\right)^{-1}\int_{0}^{1}H\left(\boldsymbol{x}+t\left(\boldsymbol{x}^{*}-\boldsymbol{x}\right)\right)\left[\boldsymbol{x}^{*}-\boldsymbol{x}\right]dt$$

$$\overbrace{\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}^{*}}^{\text{vector}}=\overbrace{\left[H\left(\boldsymbol{x}\right)\right]^{-1}}^{\text{matrix}}\overbrace{\left(\int_{0}^{1}\left[H\left(\boldsymbol{x}+t\left(\boldsymbol{x}^{*}-\boldsymbol{x}\right)\right)-H\left(\boldsymbol{x}\right)\right]\left(\boldsymbol{x}^{*}-\boldsymbol{x}\right)dt\right)}^{\text{vector}}$$

ראינו כי לפי ההערה בתחילת השיעור כי $\forall A,\forall\boldsymbol{y}:\|A\boldsymbol{y}\|\leq\|A\|\cdot\|\boldsymbol{y}\|$ ניקח נורמה משני האגפים ונקבל

$$\|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}^{*}\|\leq\left\|\left[H\left(\boldsymbol{x}\right)\right]^{-1}\right\|\left\|\int_{0}^{1}\left[H\left(\boldsymbol{x}+t\left(\boldsymbol{x}^{*}-\boldsymbol{x}\right)\right)-H\left(\boldsymbol{x}\right)\right]\left(\boldsymbol{x}^{*}-\boldsymbol{x}\right)dt\right\|$$

(אפשר להראות שהנורמה על האינטגרל קטנה שווה לאינרטל על הנורמה(לא נראה זאת אבל זה נכון אבל זה נובע מאי שוויון ינסן על פונ' הנורמה $\|\cdot\|$ שהיא פונ' קונבקסית)) ולכן:

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}^{*}\| &\leq\left\|\left[H\left(\boldsymbol{x}\right)\right]^{-1}\right\|\left\|\int_{0}^{1}\left[H\left(\boldsymbol{x}+t\left(\boldsymbol{x}^{*}-\boldsymbol{x}\right)\right)-H\left(\boldsymbol{x}\right)\right]\left(\boldsymbol{x}^{*}-\boldsymbol{x}\right)dt\right\|\\
&\leq\left\|\left[H\left(\boldsymbol{x}\right)\right]^{-1}\right\|\int_{0}^{1}\left\|\left[H\left(\boldsymbol{x}+t\left(\boldsymbol{x}^{*}-\boldsymbol{x}\right)\right)-H\left(\boldsymbol{x}\right)\right]\left(\boldsymbol{x}^{*}-\boldsymbol{x}\right)\right\|dt\\
&\leq\left\|\left[H\left(\boldsymbol{x}\right)\right]^{-1}\right\|\int_{0}^{1}\left\|\left[H\left(\boldsymbol{x}+t\left(\boldsymbol{x}^{*}-\boldsymbol{x}\right)\right)-H\left(\boldsymbol{x}\right)\right]\right\|\cdot\left\|\left(\boldsymbol{x}^{*}-\boldsymbol{x}\right)\right\|dt\\
&\leq\left\|\left[H\left(\boldsymbol{x}\right)\right]^{-1}\right\|\left\|\left(\boldsymbol{x}^{*}-\boldsymbol{x}\right)\right\|\int_{0}^{1}\left\|\left[H\left(\boldsymbol{x}+t\left(\boldsymbol{x}^{*}-\boldsymbol{x}\right)\right)-H\left(\boldsymbol{x}\right)\right]\right\|dt
\end{aligned}$$

נשתמש בתכונות **Bounded inverse hessians** Lipschitz continuis hessians ונקבל כי

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}^*\| &\le \left\|[H(\boldsymbol{x})]^{-1}\right\| \|(\boldsymbol{x}^*-\boldsymbol{x})\| \int_0^1 \|[H(\boldsymbol{x}+t(\boldsymbol{x}^*-\boldsymbol{x}))-H(\boldsymbol{x})]\|\,dt \\
&\overbrace{\le}^{\text{Bounded inverse hessians}} \frac{1}{\mu}\|(\boldsymbol{x}^*-\boldsymbol{x})\| \int_0^1 \|[H(\boldsymbol{x}+t(\boldsymbol{x}^*-\boldsymbol{x}))-H(\boldsymbol{x})]\|\,dt \\
&\overbrace{\le}^{\text{Lipschitz continuis hessians}} \frac{1}{\mu}\|(\boldsymbol{x}^*-\boldsymbol{x})\| \int_0^1 B\cdot\|\boldsymbol{x}+t(\boldsymbol{x}^*-\boldsymbol{x})-\boldsymbol{x}\|\,dt \\
&= \frac{1}{\mu}\|(\boldsymbol{x}^*-\boldsymbol{x})\| \int_0^1 B\cdot\|t(\boldsymbol{x}^*-\boldsymbol{x})\|\,dt \\
&= \frac{B}{\mu}\|(\boldsymbol{x}^*-\boldsymbol{x})\|^2 \overbrace{\int_0^1 t dt}^{=\frac{1}{2}} \\
&= \frac{B}{2\mu}\|(\boldsymbol{x}^*-\boldsymbol{x})\|^2
\end{aligned}
$$

כלומר הראנו כי

$$\|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}^*\| \le \frac{B}{2\mu}\|(\boldsymbol{x}^*-\boldsymbol{x})\|^2$$

נציב בחזרה

$$\|\boldsymbol{x}_{t+1}-\boldsymbol{x}^*\| \le \frac{B}{2\mu}\|(\boldsymbol{x}^*-\boldsymbol{x}_t)\|^2$$

ולכן סיימו.

■

קמירות ממש $\Leftarrow$ ההופכי של ההסיאן חזסום Bounded inverse hessians דרך אחת להבטיח שייתקיים Bounded inverse hessians הו אלדרוש קמירות חזקה מעל X.

למה 15.11 תהא $f:\mathrm{dom}(f)\longrightarrow\mathbb{R}$ גזירה פעמיים וקמורהחזק עם פרמטר μ מעל תחום פתוח וקמור $X\subseteq\mathrm{dom}(f)$ כלומר

$$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in X: f(\boldsymbol{y})\ge f(\boldsymbol{x})+\nabla f(\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})+\frac{\mu}{2}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2$$

אזי $\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$ היא הפיכה וגם $\left\|\nabla^2 f(\boldsymbol{x})^{-1}\right\|\le\frac{1}{\mu}$ לכל $x\in X$.כאשר $\|\cdot\|$ היא הנורמה הספקטרלית.

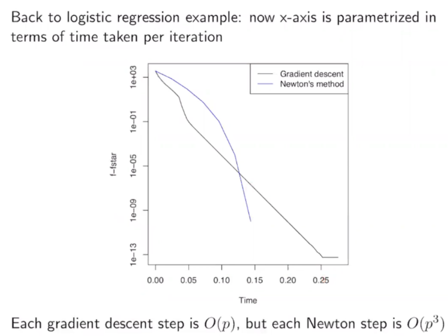
הערה 16.11 נבחין כי $\left\|\nabla^2 f(\boldsymbol{x})^{-1}\right\|\le\frac{1}{\mu}$ שקול להנחה כי $\nabla^2 f(\boldsymbol{x})\ge\mu$.

הערה 17.11 יש פרטים בהוכחה שלא התמקדנו בו ,לא התמדנו בשאלה האם האירנטים של ניוטון נשארים בתוך התחום X שבו כל הדברים והתכונות מתקיימות.וההוכחה נכונה תחת ההנחה ש$\boldsymbol{x}_t$ לכל t תמיד נשאר בתחום X.מדוע לכל $\boldsymbol{x}_t$ נשאר ב X? אפשר להראות את הדבר הזה ש$\forall\boldsymbol{x}_t$ אנו ככל שמתקדמים בt־ים בכל איטרנט אנו תמיד הולכים ומתקרבים ל $\boldsymbol{x}^*$ (לדוגמא אפשר להראות באינדוקציה בסיס עבור $\boldsymbol{x}_0\in X$ ולהראות באינדוקציה שלכל $\boldsymbol{x}$ כאיטרנט הבא רק מתקרבים ל $\boldsymbol{x}^*$ (ולא מתרחקים ממנו)).לא התעסקנו עם החלק הזה בהוכחה אבל חשוב להכיר שגם את זה צריך להראות אם וכחים את שיטת ניוטון

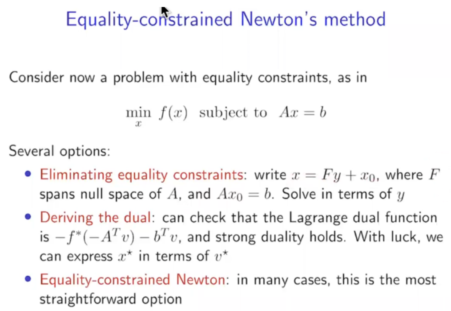
השוואה לשיטות מסדר ראשון

- **זכרון:**
  - newton: כל איטרציה של שיטת ניוטון דורשת $\mathcal{O}\left(n^2\right)$ מקום (מט' הסיאן במימדי $n \times n$)
  - GD: כל איטרציה של שיטת GD דורשת $\mathcal{O}\left(n\right)$ מקום (ווקטור גרדיאנט במימד n)
- **סבוכיות חישובית:**
  - newton: כל איטרציה של שיטת ניוטון דורשת $\mathcal{O}\left(n^3\right)$ flops(floating points operations) (פתרון של מע' משוואות $n \times n$: היפוך מט' במימדי $n \times n$ דורשת $\mathcal{O}\left(n^3\right)$ חישובים)
  - GD כל איטרציה דורשת $\mathcal{O}\left(n\right)$ flops(floating points operations) (scaling/adding n-dimensional vectors)
- **conditioning:**
  - newton: אינווראנטי לטרנסופמציה אפיניות.כלומר Newton's method is not affected by a problem's conditioninig
  - GD:מאוד מושפע מהconditioninig של הבעיה ובעיה עם סדרי גודל שונים (conditioninig גבוהה) יכול להוביל לירידה משמעותית בביצועים.

הערה 18.11 ייתרון נוסף של שיטות מסדר שני הוא קצב התכנסות סופר אקפוננסצאלי קרוב לאופטימום.



כעת מסתכלים על הבדלי הביצועים בין GD לבין ניוטון בהתחשב בזמן.וההיתרון של שיטה אחת על האחרת נראה פחות ברור.ככל שמימד הבעיה גדול יותר כך שימוש בשיטת ניוטון יהיה פחות כדאי כי המאמץ החישובי לכל צעד בה מאוד גדול.



עם אילוצים

פחות התעקבנו על השקף הנ"ל.

- בדרך הראשונה פותרים לפי הבעיה הלא מאולצת שנוצרה לפי y שהוא ווקטור לא מאולץ.(ואז נוכל להשתמש בשיטת ניוטיון)
- הדרך השניה מתעסקת בבעיה הדואלית של הבעיה.(לא דיברנו על החומר הזה)
- הדרך הישירה היא לעשות ניוטון עם אילוצי שוויון

אלג' ניוטון עם אילוצי שוויון (הכללה של שיטת ניוטון):

In equality-constrained Newton's method, we start with $x^{(0)}$ such that $Ax^{(0)} = b$. Then we repeat the updates

$$x^+ = x + tv, \quad \text{where}$$
$$v = \underset{Az=0}{\operatorname{argmin}} \ \nabla f(x)^T(z-x) + \frac{1}{2}(z-x)^T \nabla^2 f(x)(z-x)$$

This keeps x^+ in feasible set, since $Ax^+ = Ax + tAv = b + 0 = b$

Furthermore, v is the solution to minimizing a quadratic subject to equality constraints. We know from KKT conditions that v satisfies

$$\begin{bmatrix} \nabla^2 f(x) & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla f(x) \\ 0 \end{bmatrix}$$

for some w. Hence Newton direction v is again given by solving a linear system in the Hessian (albeit a bigger one)

שיטות קוואזי ניוטון:

Quasi-Newton methods

If the Hessian is too expensive (or singular), then a quasi-Newton method can be used to approximate $\nabla^2 f(x)$ with $H \succ 0$, and we update according to

$$x^+ = x - tH^{-1}\nabla f(x)$$

- Approximate Hessian H is recomputed at each step. Goal is to make H^{-1} cheap to apply (possibly, cheap storage too)
- Convergence is fast: superlinear, but not the same as Newton. Roughly n steps of quasi-Newton make same progress as one Newton step
- Very wide variety of quasi-Newton methods; common theme is to "propogate" computation of H across iterations

משערכות את ההסיאן(לא מחשבות אותו במדויק) ומבצעות כלל עדכון שמזכריר מאוד את הכלל של ניוטון).במטרה לחסוך את החישוב של ההסיאן בכל איטרציה.

11.2 תרגול 11

11.2.1 אלג' ניוטון

נתבונן בבעיית אופטמזציה מהצרוה

$$(P) \min_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x})$$

כאשר הפונ' f גזירה פעמיים ברציפות.נניח כי ברשותנו ניחוש $\boldsymbol{x}_t$ עבור נקודת המינימום וברצוננו למצוא ניחוש טוב יותר.לשם כך נבצע קירוב טיילור מסדר שני לפונ' סביב $\boldsymbol{x}_t$:

$$f(\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{d}_t) \approx f(\boldsymbol{x}_t) + \boldsymbol{d}_t^T \nabla f(\boldsymbol{x}_t) + \frac{1}{2}\boldsymbol{d}_t^T \nabla^2 f(\boldsymbol{x}_t) \boldsymbol{d}_t$$

נבחר $\boldsymbol{x}_{t+1} = \boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{d}_t$ כאשר $\boldsymbol{d}_t$ הוא הממזער של הקירוב טיילור לעיל.לשם כך נגזור את הבטוי ונשווה לאפס ונקבל את מע' המשוואות

$$\left(\nabla^2 f(\boldsymbol{x}_t)\right) \boldsymbol{d}_t = -\nabla f(\boldsymbol{x}_t)$$

אם $\nabla^2 f(\boldsymbol{x}_t) \succ 0$ הרי שפטרטון מע' המשוואות הוא המינימום (היחיד) של קירוב הטיילור והוא נתון על ידי

$$\boldsymbol{d}_t = -\left(\nabla^2 f(\boldsymbol{x}_t)\right)^{-1} \nabla f(\boldsymbol{x}_t)$$

משום שהקירוב הריבועי הוא רק קירוב ,בפועל בשיטת ניוטון הכיוון d_t מחושב על פי הבטוי לעיל אך מחושב בנפרד גודל צעד שיבטיח ירידה.

אלגוריתם 8 שיטת ניוטון

Algorithm A: Newton's Method

```
Data: Initial guess, x_0
Result: An estimate x_{t+1} of the minimizer
t ← 0
while t ≤ t_max do
    /* Solve the system (∇²f(x_t))d_t = −∇f(x_t):                        */
    d_t ← SolveNewtonSystem(∇²f(x_t), ∇f(x_t))
    η_t ← ComputeStepSize(x_t, d_t)                  // exact / backtracking
    x_{t+1} ← x_t + η_t d_t
    if StoppingCondition(x_{t+1}) == true then
        return x_{t+1}
    else
        t ← t + 1
    end
end
```

הערה 19.11

1. למה בוחרים גודל עצד η ולא מתקדמים פשוט לפי הממזערd_t?כי הפונ' הזו היא בסה"כ קירוב.(קירוב ריבועי לפונ' המקורית)ולא בטוח שd_t שממזער את הקירוב ממזער גם את הפונ' המקורית.
2. באופן כללי אם הניוחוש ההתחלתיקרוב מספיק לנקודת המינימום והפונ' חלקה דיה אזי אלג' ניוטון מתכנס לנקודת המינימום מהר.
3. על מנת להפעיל את אלג' ניוטון עלינו לחשב הן את הגרדיאנט והן את ההסיאן של הפונ' וכן לפתור מע' משוואות לינארית
4. השיטה מוגדרת היטב כאשר f בעלת הסיאן חיובי מוגדר.אם הפונ' f קמורה אזי מובטח כי ההסיאן שלה הוא אי שלילי מוגדר.אך הוא אינו בהכרח הפיך.במקרה כזה האלג' לעיל אינו מוגדר היטב.

11.2.2 אלג' גאוס־ניוטון לבעיית איבועים פחותים

בעיית הריבועים הפחותים Least squares הינה בעיה מהצורה

$$\min_{\boldsymbol{x}} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} f_i^2\left(\boldsymbol{x}\right)$$

כאשר הפונ' $f_1, f_2, \ldots, f_N$ נתונות וגזירות ברציפות.בעיה מסוג זה נפוצה מאוד בהנדסה.לדוג' בעיות של שערוך פרמרטירם או התאמת פרמטרי מודל.שימו לב בעיית אופטמיזציה זו אינה קמורה.

נסמן:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) & f_2(\mathbf{x}) & \cdots & f_N(\mathbf{x}) \end{bmatrix}^T$$
$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\left\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\right\|_2^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} f_i^2(\mathbf{x}).$$

הרעיון באלגוריתם גאוס ניוטון הוא לבצע קירוב מסדר שני לפונקציה $F(\mathbf{x})$ סביב הניחוש הנוכחי, לפשט את הקירוב, ולבצע צעד ניוטון באותה נקודה. לשם כך, נגדיר את מטריצת היעקוביאן (Jacobian) של הפונקציה הוקטורית $\mathbf{f}(\mathbf{x})$:

$$J(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \nabla f_1(\mathbf{x})^T \\ \nabla f_2(\mathbf{x})^T \\ \vdots \\ \nabla f_N(\mathbf{x})^T \end{bmatrix}.$$

זוהי מטריצה שבה השורה ה־i הוא שחלוף של הגרדיאנט של הפונקציה f_i. באמצעות היעקוביאן ניתן לקבל ביטויים עבור הגרדיאנט וההסיאן של $F(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned}
\nabla F(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \nabla(f_i^2(\mathbf{x})) = \sum_{i=1}^{N} f_i(\mathbf{x})\nabla f_i(\mathbf{x}) \\
&= J(\mathbf{x})^T \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\
\nabla^2 F(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^{N} \nabla f_i(\mathbf{x})\nabla f_i(\mathbf{x})^T + \sum_{i=1}^{N} f_i(\mathbf{x})\nabla^2 f_i(\mathbf{x}) \\
&= J(\mathbf{x})^T J(\mathbf{x}) + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} f_i(\mathbf{x})\nabla^2 f_i(\mathbf{x})}_{\text{את האיבר הזה נזניח}} \\
&\approx J(\mathbf{x})^T J(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

צעד מרכזי באלגוריתם הוא פישוט הביטוי ל־$\nabla^2 F(\mathbf{x})$, כפי שצויין לעיל. במקרה בו הפונקציות $f_i(\mathbf{x})$ אפיניות, אין צורך לבצע קירוב, כי אז $\nabla^2 f_i(\mathbf{x}) = 0$.

Algorithm B: Gauss Newton Algorithm

Data: Initial guess, $\mathbf{x}_0$

Result: An estimate $\mathbf{x}_{t+1}$ of the minimizer

```
t ← 0
while t ≤ t_max do
    J ← ComputeJacobian(x_t)
    f ← [f_1(x_t)  f_2(x_t)  ···  f_N(x_t)]^T
    /* Solve the system  J^T J d_t = −J^T f:                          */
    d_t ← SolveNewtonSystem(J^T J, J^T f)
    η_t ← ComputeStepSize(x_t, d_t)             // exact / backtracking
    x_{t+1} ← x_t + η_t d_t
    if StoppingCondition(x_{t+1}) == true then
        return x_{t+1}
    else
        t ← t + 1
    end
end
```

הערה 2 1. תנאי עצירה פופולרי: $|F(\mathbf{x}_{t+1}) - F(\mathbf{x}_t)| < \epsilon$, עבור פרמטר ϵ כלשהו.

2. אם המטריצה J^TJ הפיכה, אזי כיוון גאוס ניוטון הוא כיוון ירידה (מדוע?).

3. אם המטריצה J^TJ אינה הפיכה, אזי יש "לתקן" אותה על ידי הוספת מטריצה אלכסונית (ואז השיטה נקראת שיטת Levenberg-Marquardt).

4. ביצועי אלגוריתם זה תלויים מאד בנקודת ההתחלה, לכן צריך להתחיל מניחוש "טוב".

5. ההזנחה שביצענו בחישוב ההסיאן מניחה שבקרבת נקודת המינימום האיבר שהוזנח קטן יחסית. הנחה זו הגיונית כאשר הפונקציות $f_i(\mathbf{x})$ הן בקירוב אפיניות באזור נקודת המינימום.

6. מטרתנו למזער את $F(\mathbf{x})$ ולכן הגיוני לנחש שרכיבי $\mathbf{f}$ יהיו קטנים בקרבת הפתרון.

12 הרצאה ותרגול 12

12.1 הרצאה 12

12.1.1 חזרה על שיעור קודם

שבוע שעבר : שיטת ניוטון התבוננו בבעיה $\min_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x})$ עבור f קמורה וגזירה פעמיים עם $\mathrm{dom}(f)=\mathbb{R}^n$, אזי שיטת ניוטון היתה כדלקמן:בחר $\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}^n$ התחלתי ובצע את צעד העדכון

$$\boldsymbol{x}_{t+1}=\boldsymbol{x}_t-H(\boldsymbol{x}_t)^{-1}\nabla f(\boldsymbol{x}_t)$$
$$H(\boldsymbol{x}_t)=\nabla^2 f(\boldsymbol{x}_t)$$

עד להתכנסות.

חסרונות:

- דורש הפיכה של מט' בגודל $n\times n$ (חישוב של ההופכי של $H(\boldsymbol{x}_t)=\nabla^2 f(\boldsymbol{x}_t)$) ←(פתרון לבעיה זו:) שימוש בשיטות קוואזי ניוטון (שיערוך $H(\boldsymbol{x}_t)^{-1}$ במקום חישוב מפורש שלה)
- שיטת ניוטון יכולה להתמודד רק אם אילוצי שוויון.(יש הרבה בעיות עם אילוצי אי שוויון אותם נקצה לפתור)← (נראה פתרון לבעיה זו בהרצאה הנוכחית).

ראינו שלשיטת ניוטון יש שני מצבים של התכנסות :

1. כשאנו רחוקים מהפתרון האופטמלי (ואז קצב השיפור של השגיאה בכל איטרנט) הוא עד כדי קבוע .
2. כשנאו קרובים לפתרון האופטמלי ואז השגיאה דועכת באופן סופר אקפוננצאלית.(ומכאן הכח הגדול של שיטת ניוטון).

ראינו שניתן להרחיב את שיטת ניוטון עבור אילוצי שוויון

$$\begin{cases}\min f(x)\\ Ax=b\end{cases}$$

An important variant is equality-constrained Newton: start with $x^{(0)}$ such that $Ax^{(0)}=b$. Then we repeat the updates

$$x^+=x+tv,\quad \text{where}$$
$$v=\underset{Az=0}{\operatorname{argmin}}\ \nabla f(x)^T(z-x)+\frac{1}{2}(z-x)^T\nabla^2 f(x)(z-x)$$

which keep x^+ in feasible set $Ax=b$

Here v is characterized by KKT system

$$\begin{bmatrix}\nabla^2 f(x) & A^T\\ A & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v\\ w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\nabla f(x)\\ 0\end{bmatrix}$$

for some w. Hence Newton direction v is again given by solving a linear system in the Hessian (albeit a bigger one)

הירכיה של שיטות מסדר שני היררכיה=כמה קל לפתור את הבעיות האלו בעזרת שיטת ניוטון.
נניח שכל הבעיות הינם קמורות, נוכל לחשוב כמה קל לפתור את הבעיות הללו על ידי שימוש בשיטות ניוטון.

1. בעיות ריבועיות Quadratic problems : הם הקלות ביותר- יש להם פתרון סגור.(הקירוב הריבוע של פונ' המטרה היא פונ' המטרה, ובאיטרציה אחת פותרים את הקירוב הריבועי הנ"ל ולכן פותרים את בעיית המינמזיצה באיטרציה אחת)
2. Equality constained:בעיות ריבועיות עם אילוצי שוויון עדיין קלות.משתמשים בתנאי KKT על מנת להגיע לפתרון סגור של הבעיה.

3. Equality constained smoot problems ובעיות L-חלקות (ההאסיאן שלהם חלק - רציף לשפיץ)ובנוסף הבעיות קמורות חזק משתמשים בשיטת ניוטון לפתרון.

4. Inequality constained (and also equality consrtained) and smooth problems את החלק הזה נכסה כעת.נשתמש בשיטות של נקודות פנים לפתרון.נראה זאת בהרצאה היום.

12.1.2 Barrier Method

log barrier function נתבונן בבעית האופטמזציה הקמורה הבאה:

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}} \quad & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} \quad & h_i(\boldsymbol{x}) \le 0, i = 1, 2, \ldots, m \\ & A\boldsymbol{x} = b \end{aligned}$$

נניח כי $f, h_1, \ldots, h_m$ הם קמורות, גזירות פעמיים כל אחת מעל התחום $\mathbb{R}^n$.

הגדרה 1.12 נגדיר את הפונ' log barrier של הבעיה מעלה להיות$\phi(\boldsymbol{x}) = -\sum_{i=1}^{m} \log(-h_i(\boldsymbol{x}))$.התחום של $\phi(\cdot)$ הוא תחום כל הנקודות הפנים של האילוץ (כל הנקודות שמקיימות ממש את האילוץ) כל $\text{dom}\{\phi\} = \{\boldsymbol{x} \mid \forall i \in \{1, \ldots, m\} : h_i(\boldsymbol{x}) < 0\}$.כאשר אנ ומניחים $\text{dom}\{\phi\} \neq \emptyset$.(שים לב כי ההנחה הזו היא למעשה הנחה סמויה שדואליות חזקה מתקיימת).

הערה 2.12 ההסיאן של $\phi(\cdot)$ מתפוצץ (הולכת לאיסנוף) כאשר $h_i(\boldsymbol{x}) \to 0$.כלומר שכנמצאים בגבול האילוצים הפונ' ϕ הולכת לאיסנוף אבל כשנמצאים בתוך האילוץ ל ϕ יש ערך סופי.ϕ הולכת לאינסוף אבל לא כל כך מהר.היא הולכת לשם כמו log.ההתפוצצות באינסוף היא בקצב יחסית איטי.

דוגמה 3.12 נניח שיש לנו בעיה חד מימדית

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}} \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & x \in [0, 1] \end{aligned}$$

כלורמר האילוצים נראים מהצורה

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}} \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & -x \le 0 \\ & x \le 1 \end{aligned}$$

כלומר

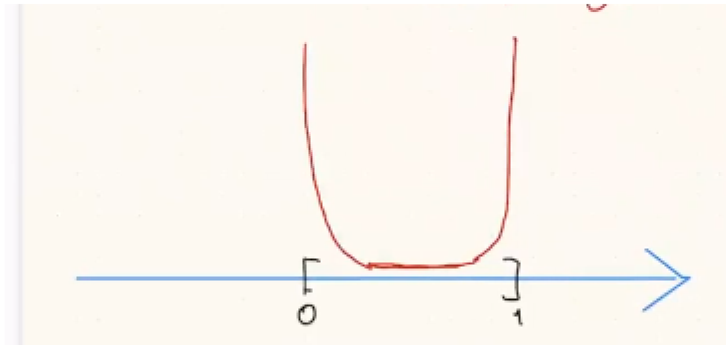
$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}} \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & -x \le 0 \\ & x - 1 \le 0 \end{aligned}$$

$$h_! = -x, h_2(x) = x - 1$$

דולכן

$$\begin{aligned} \phi(x) &= -\log(-h_1(x)) - \log(-h_2(x)) \\ &= -\log(-(-x)) - \log(-(x-1)) \\ &= -\log(x) - \log(-(x-1)) \end{aligned}$$

הפונק' נראית ככה (ברצף בין $0, 1$ היא משתנית ואין את זה בשרטוט) בקצוות האילוץ היא מתפופצצת



כלומר ככל שאנו קרובים לתחום האילוץ ככה הפונ' מתפוצצת יותר.ולכן מכאן שמה של השיטה - Barrier Method (שיטת המחסום).
זה היה במקרה החד מימדי.במקרה הרב מימדי דאפשר לדמיין משהו דומה (בקצוות האילוץ ϕ מתפופצצת).

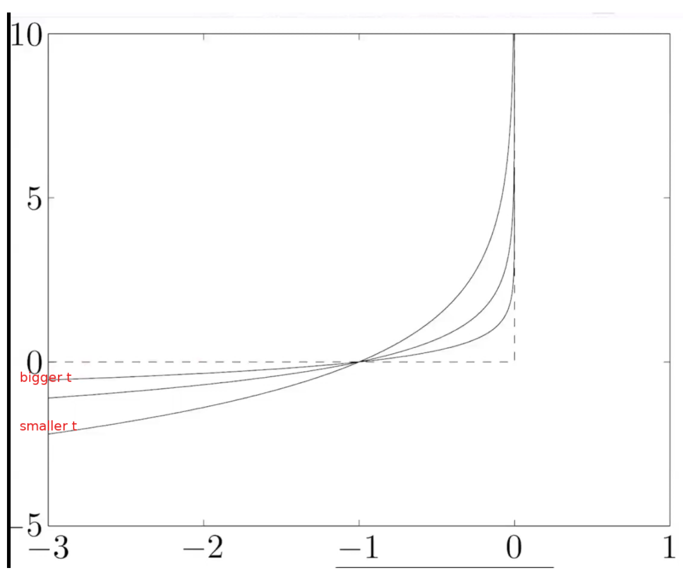
מאיפה נולד הlog הזה?
נתעלם לרגע מאילוצי השוויון.הבעיה המאולצת שלנו יכולה להכתב כך

$$\min_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} \mathbb{I}_{\{h_i(\boldsymbol{x})\le 0\}}(x) \qquad \forall i \in \{1,\ldots,m\} : \mathbb{I}_{\{h_i(\boldsymbol{x})\le 0\}}(x) = \begin{cases} \infty & h_i(\boldsymbol{x}) > 0 \\ 0 & h_i(\boldsymbol{x}) \le 0 \end{cases}$$

נבחין כי עם פונ' אינקטורים מאוד לא נוח לעבוד (לא רציפות,לא גזירות) וכו' ולכן נרצה לחפש פונ' דומה מספיק שנוכל לעבוד איתו.
לכן נוכל לנסות לקרב את הפונ' הנ"ל על ידי סכום של הlog barriers(כלומר ננסה לחכות את הbarrier האידאלי).

$$\min_{\boldsymbol{x}} \qquad f(\boldsymbol{x}) - \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{m} \log(-h_i(\boldsymbol{x}))$$

כאשר $t > 0$ הוא קבוע, מספר גדול מאוד.



- המקווקו זה ה barirer האידאלי (עם האינדיקטור)
- הקו הרציף מתאים לt־ים שאנו בוחרים.

הקירוב הזה הוא יותר מדויק ככל שt הוא מספר גדול יותר.אבל לכל ערך של $t > 0$ אנו יודעים כי log barriers שואף לאינסוף ∞ במידה וכל אילוץ שואף לאפס.כלומר אם $\exists i \in \{1, \ldots, m\} : h_i(\boldsymbol{x}) \to 0 \Rightarrow \text{log barriers} \to \infty$.הפרמטר t קובע כמה משקל אנו נותנים לאילוץ.

- כאשר $t \to \infty$ אז מקטינים את ההשפעה של האילוץ ונותנים יותר משקל לפונ' המטרה(וככה מתקרבים יות רלפונ' המטרה המקורית שלנו)
- כאשר $t \to 0$ אזי מקטינים את ההשפעה של פונ' המטרה וונותנים יותר משקל לאילוץ.

12.1.3 Self-concordant

חזרה קצרה לשיטות ניוטון נרצה להבין כיצד שיטות ניוטון מתמודדת עם המקרה של פונ' מהצורה של log barriers כלומר של $f(\boldsymbol{x}) - \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{m}\log(-h_i(\boldsymbol{x}))$.

Self-concordance

shortcomings of classical convergence analysis

- depends on unknown constants $(\mu, B, \ldots)$
- bound is not affinely invariant, although Newton's method is

μ : strong-convexity
B : smoothness of Hessians

convergence analysis via self-concordance (Nesterov and Nemirovski)

- does not depend on any unknown constants
- gives affine-invariant bound
- applies to special class of convex functions ('self-concordant' functions)
- developed to analyze polynomial-time interior-point methods for convex optimization

חסרונות של ניתוח התכנסות (= האנליזה הקלאסית) של שיטת ניוטון

- תלויה בפרמטרים לא ידועים $(\mu, B, \ldots)$:
  - μ- קמירות חזק.strong convexity
  - B- חלקות של ההסיאן.smoothness of hessians
- חסומה
  - אם ניקח את הקורדינטות של הבעיה המקורית ונעשה שנוי קורדינטות הקבועים בחסם $(\mu, B, \ldots)$ הולכים להשתנות.(משפיעים על קצב ההתכנסות).זה לא ממש איטואנטיבי כי בכל זאת ראינו שהשיטה היא affine invarient.
  - הפונ' הטבעיות לנתח עבורם את שיטת ניוטון יש להם תכונה שנראת Self concordance.(נדבר עליה בהמשך)

ניתוח התכנסות עבור פונ' שיש להם את תכונת self-concordance.(תכונה שהוגדרה על ידי Nesterov and nemirosvski)

- לא תלויה באף פרמטרים לא ידועים.
- נותנת חסם שהוא affine invariant bound (חסם שאינוורינאנטי לשנוי קורדינטות-לאחר שנוי קורדינטות החסם לא יישנתנה)
- רלוונטי רק למשפחה של פונ' קמורות שמקיימות את תכונת ה self-concordance

תכונות ה-Self-concordant

הגדרה 4.12 (במקרה החד מימדי) פונ' קמורה $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ תקרא Self-concordant אם $|f'''(x)|\leq 2\left[(f''(x))^{\frac{3}{2}}\right]$.

דוגמה 5.12 דוגמאות למקרה החד מימדי:

- פונ' לינאריות ופונ' ריבועיות.(נגזרת שלישית מתאפסת) לכן מקיימות Self-concordant.
- לוגריתם שלילי

$$f(x)=-\log(x)\Rightarrow\begin{array}{c}f'(x)=\frac{1}{x}\\ f''(x)=\frac{1}{x^2}\\ f'''(x)=-\frac{2}{x^3}\end{array}\Rightarrow\begin{array}{c}|f'''(x)|\leq 2\left[(f''(x))^{\frac{3}{2}}\right]\iff\\ \left|-\frac{2}{x^3}\right|\leq 2\left[\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right]\iff\\ \left|\frac{2}{x^3}\right|\leq 2\left[\left(\frac{1}{x^3}\right)\right]\text{ and that's coerect}\end{array}$$

  כלומר פונ' זו היא מקיימת Self-concordant.
- אנטרופי שלילית ועוד לוגריתם שלילי: $f(x)=x\log x-\log x$.

הגדרה 6.12 (במקרה הרב מימדי) פונ' קמורה $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ תקרא Self-concordant אם $g(t)=f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{v})$ היא פונ' Self-concordant במקרה החד מימדי לכל $\boldsymbol{x}\in\mathrm{dom}f,v\in\mathbb{R}^n$.

הערה 7.12 המשמעות של $g(t)=f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{v})$ היא להתבונן בחתך חד מימדי של f בכל כיוון.כלומר ההגדרה של Self-concordant היא שהפונ' הרב מימדית היא Self-concordant אם הפונ' לאורך כל החתכים האפשריים (קיבלנו פונ' חד מימדית) היא Self-concordant במקרה החד מימדי.

הגדרה 8.12 פונ' קמורה $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ שהינה Self-concordant הינה Afifine invarianve כלומר לכל מפוי לנארי של הקור' המקריות $\forall a,b\in\mathbb{R}:\tilde{f}(y)=f(ay+b)$ היא גם Self-concordant.כלומר מתקיים:

$$\begin{array}{c}\tilde{f}'''(y)=a^3f'''(ay+b)\\ \tilde{f}''(y)=a^2f''(ay+b)\end{array}$$

תכונות של פונ' Self-concordant

1. סגירות לחיבור.(סכום של שני פונ' Self-concordant מניב פונ' Self-concordant)
2. סיגרות לכפל בסקלאר $\alpha\geq 1$.(מכפלה של פונ' Self-concordant בסקלר $\alpha\geq 1$ מניב פונ' Self-concordant)
3. סגירות להתמרה אפינית ועוד קבוע (זה בדיוק מה שריאנו : התכונה Self-concordant היא Afifine invarianve)
4. אם g פונ' חד מימדית קמורה עבורה $\mathrm{dom}g=\mathbb{R}_{++}$ (התחום שלה הוא עבור ערכים חיוביים ממש כלומר $\mathrm{dom}g=\{x\mid x>0\}$) וגם $|g'''(x)|\leq 2\left[(g''(x))^{\frac{3}{2}}\right]$ אזי

$$f(x)=\log(-g(x))-\log(x)$$

היא Self-concordant

דוגמאות נוספות לפונקציות Self-concordant באמצעות התכונות הללו ניתן להוכיח שהפונ' הבאות מקיימות את תכונת ה-Self-concordant.

.1

$$f(x)=-\sum_{i=1}^{m}\log\left(b_i-\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{x}\right)\text{ on }\left\{x\mid\forall i\in\{1,\ldots,m\}:\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{x}<b_i\right\}$$

ה-barriers האלו הם למעשה log barriers של אוסף של אי שוויונות לינארים.(=פוליטופ).(זה Self-concordant כי זה התמרה לינארית של הפונ' $-\log(x)$ שראינו כבר שהיא Self-concordant)

.2

$$f(x)=-\log\left(y^2-\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}\right)\ \text{ on }\ \{(\boldsymbol{x},y)\mid\|\boldsymbol{x}\|_2<y\}$$

זה מתאים לאילוץ של כדור.נזכור כי $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}=\|\boldsymbol{x}\|_2^2$.(הכתיבה של פונ' המטרה ככה $y^2-\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}$ היא על מנת להמחיש ש$\boldsymbol{x}$ הוא ווקטור) ולכן עבור אילוץ של הדור הlog barriers שמתאים לו הוא log barriers שנראה ככה).

.3

$$f(X)=-\log(\det(X))\ \text{ on }\ \mathbb{S}_{++}^n$$

ישנם בעיות אופטמציזה שמשתנה החלטה שלנו הוא מט' X.אחד מהאילוצים הנפוצים הוא ש X היא מט' positive semi deifinti כלומר שייכת ל$\mathbb{S}_{++}^n$.(כל הע"ע שלה גדולים שווים לאפס) הlog barriers שמתאים לה הוא $f(X)=-\log(\det(X))$.נזכור כי אם יש לנו מט' שהיא PSD אז הדטרמיננטה שלה $\det(X)$ שווה למכפלת כל הע"ע שלה.ולכן נקבל מינוס סכום לוג של כל הע"ע.

לא נבצע שום הוכחות.(הם מסובכות מדי לזמן שנותר לנו לקורס) והם מאוד דומות להוכחות שראינו בהוכחה של ניווטן.

אנליזת התכנסות עבור פונ' Self-concordant בשיטת ניוטון כמו קודם ישנם 2 מצבים של התכנסות.כאשר אנו קרובים לנקודת המינימום $\boldsymbol{x}^*$ וכאשר אנו רחוקים ממנה.

סיכום:

עבור פונ' f קמורה ו Self-concordant קיימים 2 קבועים $\eta\in\left(0,\frac{1}{4}\right]$ ו $\gamma>0$ כך ש

- אם $f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}^*)\geq\eta$ אז:

$$f(\boldsymbol{x}_{t+1})-f(\boldsymbol{x}_t)\leq-\gamma$$

(מוד התכנסות איטית).כלומר השגיאה הולכת וקטנה לכל הפחות בערך קבוע γ.

- אם $f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}^*)\leq\eta$ אז:

$$2\left(f(\boldsymbol{x}_{t+1})-f(\boldsymbol{x}_t)\right)\leq\left(2\left(f(\boldsymbol{x}_t)-f(\boldsymbol{x}_t)\right)\right)^2$$

(מוד התכנסות סופר אקפוננצלית).כלומר השגיאה באיטרציה הבאה הוא קטן מריבוע השגיאה הנוכחית.

חסם על הסיבוכיות Complexity bound אם מתרגמים את התוצאות הנ"ל לשפת אפסילון אזי:

כדי לקבל פתרון ϵ אופטמלי נצטרך

$$\frac{f\left(x^{(0)}\right)-p^*}{\gamma}+\log_2\log_2\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$$

צעדים.

12.1.4 שיטת הbarrier - השיטה עצמה

הנחות:נזכיר כי אנו מניחים כי לכל $\forall i\in\{1,\ldots,m\}$ אנו יודעים כי h_i גזירה שלוש פעמים.ובנוסף כי ϕ היא Self-concordant .

עבור ה log barrier function

$$\phi(x)=-\sum_{i=1}^{m}\log(-h_i(x))$$

יש לנו את הגרדיאנט שלה:

$$\nabla\phi(x)=-\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{h_i(x)}\nabla h_i(x)$$

ואת ההסיאן שלה:

$$\nabla^2\phi(x)=-\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{(h_i(x))^2}\left(\nabla h_i(x)\right)\left(\nabla h_i(x)\right)^T-\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{h_i(x)}\nabla^2 h_i(x)$$

שיטת הCentral Path נזכר בבעיה המקוריתמ

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}} \quad & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & h_i(\boldsymbol{x}) \le 0, \forall i \in \{1, \dots, m\} \end{aligned}$$

נתבונן בבעיה הבאה:

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}} \quad & tf(\boldsymbol{x}) + \phi(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

- שיטת הCentral Path מוגדרת על ידי הפתרון $\boldsymbol{x}^*(t)$ עבור $t > 0$.ל$\boldsymbol{x}^*(t)$ קוראים central path־הנתיב הראשי/המרכזי)
- בעצם לקחנו את אילוצי האי שוויון והחלפנו אותם בlog barrier function.והביע הזו היא לא הבעיה המקורית,אבל היא שואפת לבעיה המקורית כאשר $t \to \infty$.כלומר אנו נקבע t ולכל t כזה נמצא את הפתרון של הבעיה הזו (שתלויה ב t) את הפתרון הזה נסמן $\boldsymbol{x}^*(t)$ (הפתרון האופטמלי עבור t מסויים) והתקווה שלנו היא שכש $t \to \infty$ הפתרון האופטמלי עבור הt המסויים יישאף לפתרון האופטמלי עבור הבעיה המקורית (=הפתרון שאנו מחפשים) כלומר

$$\text{as } t \to \infty \text{ we will have} \boldsymbol{x}^*(t) \xrightarrow{t\to\infty} \boldsymbol{x}^*$$

- למה שלא נבחר מראש פשוט t עם ערך מאוד גדול ונפתור את הבעיה מעלה?מסתבר שזה רעיון לא טוב (מאוד לא ייעיל בפועל), ושהרעיון הטוב והנכון הוא להתחיל בt קטן ולהתחיל להגדיל אותו מעד לצעד the central path **traverse** כמו שנראה בהמשך.
- לכל $t > 0$ פוטרים את הבעיה $\min_{\boldsymbol{x}} tf(\boldsymbol{x}) + \phi(\boldsymbol{x}) \, \text{s.t.} A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ על ידי שיטת ניוטון.ואז מגדילים את t.
- ככל שמגידלים את t השיטה נוסעת על הנתיב המרכזי (אוסף הפתרונות שמתאימות לכל t) עד שכש$t \to \infty$ הנתיב שואף ל$\boldsymbol{x}^*$.

אופן הפתרון Master plan:

- רוצים לפתור את

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}} \quad & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & h_i(\boldsymbol{x}) \le 0, \forall i \in \{1, \dots, m\} \end{aligned}$$

- נתשמש בIntirior point method (IPM) approach:
  - נתחיל עם $t = t^{(0)} > 0$.
  - נפתור את הבעיה הבאה באמצעות שיטת ניוטון

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}} \quad & tf(\boldsymbol{x}) + \phi(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

  ונסמן את הפתרון של הבעיה $\boldsymbol{x}^*(t)$

- נגדיל את t ונפתרון $\boldsymbol{x}^*(t-1)$.הפתרון שבו מצאנו באיטרציה הקודמת יהיה נקודת ההתחלה של הפתרון של האיטרציה הנוכחית.

איך בוחרים כמה להגדיל את t?

$$\boldsymbol{x}^*\left(t_1\right) \xrightarrow{\text{choose } t_2:} \left\|\boldsymbol{x}^*\left(t_1\right)-\boldsymbol{x}^*\left(t_2\right)\right\| \text{ is small}$$

כמה קטן? קטן בגדול שבו מוד ההתכנסות של שיטת ניטון תהיה עדיין בקצב סופר אקפוננסצאלי.(וזה הרעיון)

בכל פעם ניקח t מסויים ונמצא את $\boldsymbol{x}^*\left(t\right)$ואז נגדיר את t ככה שהפתרון באיטרציה הקודמת הוא פתרון שמספיק קרוב לפתרון באיטרציה החדשה (שאנו לא יודעים מה הוא אבל אנו כן יכולים לוודא שהוא מספיק קרוב לפתרון של האיטרציה הנוכחית) ככה שאם מפעילים את שיטת ניוטון החל מ $\boldsymbol{x}^*\left(t\right)$ (הפתרון באיטרציה הוקדמת) אז ההתכנסות באיטרציה הנוכחית של שיטת ניוטון תהיה סופר אקפוננצלית ל $\boldsymbol{x}^*\left(t_{\text{new}}\right)$ (הפתרון של שיטת ניוטון של האיטרציה הנוכיחית) .

- התאוריה אומרת לנו איך כמה להגדיל את t ככה שנשאר במצב של ההתכנסות הסופר אקפוננסצאלית.

מקרה של בעיית LP מקרה חשוב:שיטת barrier עבור בעיית תכנות לינארי LP.

הביעה המקורית:

$$\min_{\boldsymbol{x}} \quad \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$$
$$D\boldsymbol{x} \le e$$

רוצים למזער בעיה תחת אילוצים לינאריים.(פוליטופ)

הבעיה כפי שפותרים על ידי barrier

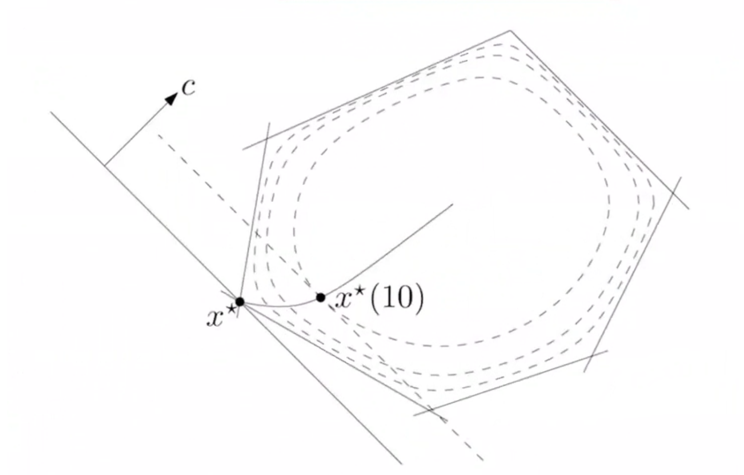
$$\min_{\boldsymbol{x}} \quad t\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}-\sum_{i=1}^{m}\log\left(e_i-\boldsymbol{d}_i^T\boldsymbol{x}\right)$$

(נבחין כי

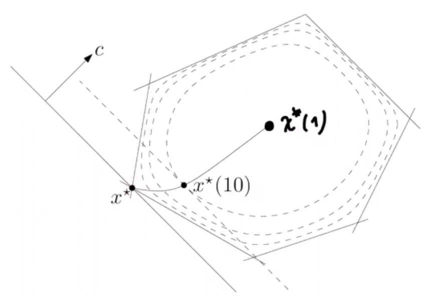
$$\min_{\boldsymbol{x}} \overbrace{t\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}-\sum_{i=1}^{m}\log\left(e_i-\boldsymbol{d}_i^T\boldsymbol{x}\right)}^{t\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}+\phi(\boldsymbol{x})}$$

הlog barrier מתאים למעשה לאילוצים שלנו בבעיה (לפוליטופ).הbarrier הולך ומתפוצץ ככל שמתקדמים לקצוות.

Central path:



פונ' מטרה לינארית ⇐המינימום נמצא בקצוות התחום.
הcentral path הולך לאורך המסלול הבא (כאשר אנחנו הולכים ומגדילים את t).



צועדים לעבר $\boldsymbol{x}^*$ לאורך הcentral path

בגלל שהבעיה מתפוצצת בקצוות התחום המינימום שלה נמצא בתוך התחום.ולכן המינימום מתקבל כאשר גרדיאנט פונ' המטרה שווה לאפס כלומר כאשר

$$0=\nabla\left(t\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}+\phi\left(\boldsymbol{x}\right)\right)=t\boldsymbol{c}-\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{e_i-\boldsymbol{d}_i^T\boldsymbol{x}^*\left(t\right)}\boldsymbol{d}_i$$

כלומר המשמעות היא שהגדריאנט $\nabla\phi\left(\boldsymbol{x}^*\left(t\right)\right)$ חייב להיות **מקביל** ל$-\boldsymbol{c}$.
(כלומר העל מישור $\left\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^*\left(t\right)\right\}$ משיק לקונטור (קונטור = קווי הגובה) של ϕ בנקודה $\boldsymbol{x}^*\left(t\right)$).

נוסיף בחזרה את אילוצי השוויון לבעיה נזכר כי הבעיה המקורית היא.

-

$$\begin{aligned}\min_{\boldsymbol{x}}\quad & f\left(\boldsymbol{x}\right)\\ \text{s.t.}\quad & A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\\ & h_i\left(\boldsymbol{x}\right)\leq 0,\forall i\in\left\{1,\ldots,m\right\}\end{aligned}$$

לאחר שמוש בbarrier נתובנן בבעיה הבאה:

$$\min_{\boldsymbol{x}} \quad t\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}-\sum_{i=1}^{m}\log\left(e_i-\boldsymbol{d}_i^T\boldsymbol{x}\right)$$
$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$$

נסמן את $\boldsymbol{w}$ בתור כופלי הלגראנג' שמתאימים לאילוצי השוויון.אזי הלגראנג'יאן נתון על ידי:

$$L\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}\right)=tf\left(\boldsymbol{x}\right)-\sum_{i=1}^{m}\log\left(-h_i\left(\boldsymbol{x}\right)\right)+\boldsymbol{w}^T\left(A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\right)$$

ופטרון הבעיה נתון על ידי $\star$:

$$\overbrace{\boldsymbol{x}_t^*}^{\equiv\boldsymbol{x}^*(t)}=\arg\min_{A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}}\left\{tf\left(\boldsymbol{x}\right)-\sum_{i=1}^{m}\log\left(-h_i\left(\boldsymbol{x}\right)\right)\right\}$$

תנאי KKT ודואליות נניח שקיימת נקודה שמקיימת את תנאי KKT (ולכן היא גם פיזבלית)
אזי ה central path מאופיינת על ידי תנאי KKT. הנקודה האופטמלית מקיימת את התנאים הבאים(תאני KKT):

$$t\nabla f\left(\boldsymbol{x}^*\left(t\right)\right)-\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{h_i\left(\boldsymbol{x}^*\left(t\right)\right)}\nabla h_i\left(\boldsymbol{x}^*\left(t\right)\right)+A^t\boldsymbol{w}=0$$

(לגראנג'יאן מתאפס־סטציונריות)

$$A\boldsymbol{x}^*\left(t\right)=b \qquad ,h_i\left(\boldsymbol{x}^*\left(t\right)\right)<0 \qquad ,i=1,2,\ldots,m$$

הערה 9.12 נבחין כי אין שימוש בתנאי הComplementry slackness כי כאן אילוצי האי שוויון יתקיימו ממש כי אחרת הbarirer ייצפוצץ.כלומר מכיוון שיש לנו את ה barirer ניתן להיות בטוח כי אילוצי האי שוויון יהיו קטנים ממש מאפס (יתקיימו ממש)

(פיזבליות,וקיום אילוצי האי שוויון).
עבור $\boldsymbol{w}\in\mathbb{R}^m$ (אבל אנו לאמתעניינים באמת עבור המשתנים של בהבעיה הדואלית של בעיית הbarirer)
מ$\boldsymbol{x}^*\left(t\right)$ שמקיים את תנאי KKT אפשר למצוא פתרונות דואליים לבעיה המקורית.
מCenreal path pointss נוכל למצוא נקודות פיזבליות דואליות עבור הבעיה המקורית. בהנתן $\boldsymbol{x}^*\left(t\right)$ ו$\boldsymbol{w}$ המתאים.נגדיר

$$\boldsymbol{u}_i^*\left(t\right)=-\frac{1}{th_i\left(\boldsymbol{x}^*\left(t\right)\right)} \qquad ,i=1,\ldots,m \qquad ,\boldsymbol{v}^*\left(t\right)=\frac{w}{t}$$

למה נגדיר את זה?כי ניקח את המשוואה של הסטציונריות מתאני KKT :

$$t\nabla f\left(\boldsymbol{x}^*\left(t\right)\right)-\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{h_i\left(\boldsymbol{x}^*\left(t\right)\right)}\nabla h_i\left(\boldsymbol{x}^*\left(t\right)\right)+A^t\boldsymbol{w}=0$$

ונציב שם את $\boldsymbol{u}_i^*\left(t\right),\boldsymbol{v}_i^*\left(t\right)$ ונקבל

$$L\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)=f\left(\boldsymbol{x}\right)+\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{u}_ih_i\left(\boldsymbol{x}\right)+\boldsymbol{v}^T\left(A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\right)$$

נטען כי $\boldsymbol{u}^*\left(t\right),\boldsymbol{v}^*\left(t\right)$ הם נקודות דואליות ופיזבליות לבעיה המקורית.
למה?

- $\boldsymbol{u}_i^*(t) > 0$ מכיוון ש $h_i(\boldsymbol{x}^*(t)) < 0$ לכל $i \in \{1,\dots,m\}$ ו $t > 0$(כי האילוצי אי השוויון החלש מתקיימים באי שוויון חריף בגלל הbarrier (אחרת הפונ' תתפוצץ)).
בנוסף לכל הנקודה $(\boldsymbol{u}^*(t), \boldsymbol{v}^*(t))$ נמצאת בתחום של בעיית לגראנג' הדואלית מכיוון שלפי הגדרה

$$\left[\nabla_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^*(t), \boldsymbol{v}^*(t))\right]_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*(t)} = 0$$

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^*(t)) + \sum_{i=1}^{m} u_i(\boldsymbol{x}^*(t)) \nabla h_i(\boldsymbol{x}^*(t)) + A^T \boldsymbol{v}^*(t) = 0$$

כך ש $\boldsymbol{x}^*(t)$ ממזער את הלגראנגזיאן $L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^*(t), \boldsymbol{v}^*(t))$ מעל $\boldsymbol{x}$. $\Leftarrow$(כלומר $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}^*(t), \boldsymbol{v}^*(t)) = L(\boldsymbol{x}^*(t), \boldsymbol{u}^*(t), \boldsymbol{v}^*(t))$).נזכור כי זה נובע מהגדרת $g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \min_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$.

פער הדואליות Duality gap זה מאפשר לנו לחסום את הסאב אופטמליות של $f(\boldsymbol{x}^*(t))$ לפי הבעיה מקורית דרך **פער הדואליות** נחשב:

$$f^* \geq g(\boldsymbol{u}^*(t), \boldsymbol{v}^*(t)) = f(\boldsymbol{x}^*(t)) + \left[\sum_{i=1}^{m} \overbrace{\boldsymbol{u}_i^*(t)}^{-\frac{1}{t h_i(\boldsymbol{x}^*(t))}} h_i(\boldsymbol{x}^*(t))\right] + \overbrace{\boldsymbol{v}^*(t)^T (A\boldsymbol{x}^*(t) - \boldsymbol{b})}^{\boldsymbol{x}^*(t)\text{feasble } : A\boldsymbol{x}^*(t)=\boldsymbol{b}} = f(\boldsymbol{x}^*(t)) - \frac{m}{t}$$

א ומכאן נסיק כי:

$$\boxed{f(\boldsymbol{x}^*(t)) - f^* \leq \frac{m}{t}}$$

(וזה הדבר היפה בbarriers)
זה הלך להיות אי שוויון מאוד ימושי בתור תנאי עצירה.הוא גם מאשר את התקווה שלנו כי

$$\boldsymbol{x}^*(t) \xrightarrow{t \longrightarrow \infty} \boldsymbol{x}^*$$

כומר ככל שמגדילים את t הפתרון הולך ושוף לפתרון של הבעיה המקורית.

Perturbed KKT conditions

We can now reinterpret central path $(x^\star(t), u^\star(t), v^\star(t))$ as solving the perturbed KKT conditions:

$$\nabla f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i \nabla h_i(x) + A^T v = 0$$
$$u_i \cdot h_i(x) = -1/t, \quad i = 1, \ldots, m$$
$$h_i(x) \le 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad Ax = b$$
$$u_i \ge 0, \quad i = 1, \ldots, m$$

Only difference between these and actual KKT conditions for our original problem is second line: these are replaced by

$$u_i \cdot h_i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, m$$

i.e., complementary slackness, in actual KKT conditions

אפשר לחשוב על $\boldsymbol{x}^*(t)$ בתור פתרון שמקיים בקירוב את תנאי KKT. (מקיימים אותם עד כדי הcomplementry slackness)
אפשר לחשוב עליהם בתור כאלו שמקיימים גרסא מקורבת של תנאי KKT.
ככל שt גדל ככה הם יילכו ויהיו פתרון שעונה על KKT בצורה יותר מדוייקת (הcomplementry slackness ילך וייתקרב לאפס)

Barrier method

The barrier method solves a sequence of problems

$$\begin{aligned} \min_x \quad & tf(x) + \phi(x) \\ \text{subject to} \quad & Ax = b \end{aligned}$$

for increasing values of $t > 0$, until duality gap satisfies $m/t \le \epsilon$. We fix $t^{(0)} > 0$, $\mu > 1$. We use Newton to compute $x^{(0)} = x^\star(t)$, solution to barrier problem at $t = t^{(0)}$. For $k = 1, 2, 3, \ldots$

- Solve the barrier problem at $t = t^{(k)}$, using Newton initialized at $x^{(k-1)}$, to yield $x^{(k)} = x^\star(t)$
- Stop if $m/t \le \epsilon$, else update $t^{(k+1)} = \mu t$

The first step above is called a centering step (since it brings $x^{(k)}$ onto the central path)

עצמה barri

Considerations:

- Choice of μ: if μ is too small, then many outer iterations might be needed; if μ is too big, then Newton's method (each centering step) might take many iterations
- Choice of $t^{(0)}$: if $t^{(0)}$ is too small, then many outer iterations might be needed; if $t^{(0)}$ is too big, then the first Newton solve (first centering step) might require many iterations

Fortunately, the performance of the barrier method is often quite robust to the choice of μ and $t^{(0)}$ in practice

(However, note that the appropriate range for these parameters is scale dependent)

1 שיטת המחסום לאופטימיזציה עם אילוצי אי־שוויון

נתבונן בבעית האופטימיזציה

$$(P) \qquad \begin{array}{ll} \min\limits_{\mathbf{x}} & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.} & g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \ i = 1, \ldots, m, \\ & A\mathbf{x} = \mathbf{b} \end{array}$$

כאשר הפונקציות $f, g_1, \ldots, g_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ קמורות וגזירות פעמיים ברציפות, המטריצה $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$ מדרגה מלאה p (וכן $p < n$). נניח כי הבעיה מקיימת תנאי Slater. כלומר, קיימת נקודה פיזיבילית המקיימת את כל אילוצי אי־השוויון בחריפות. כמו כן, נניח כי הבעיה פתירה. בפרט, קיים פתרון אופטימלי $\mathbf{x}^*$ וניתן להתקרב אליו כרצוננו מתוך הפנים היחסי (relint) של התחום הפיזיבילי (למשל, אם התחום הפיזיבילי חסום).

נתבונן במשפחה של אלגוריתמי אופטימיזציה שנקראים אלגוריתמי שיטות פנים (interior-point methods). אלגוריתמים אלה מחפשים את נקודת המינימום מבפנים. קרי, כל איטרציה שלהם מייצרת ניחוש חדש לנקודת המינימום המקיים את האילוצים. האלגוריתמים האלה פותרים בכל איטרציה בעיית אופטימיזציה עם אילוצי שוויון. הפתרון של כל בעיה כזו מתקרב לפתרון של הבעיה המקורית. בשיטה זו, מחליפים את אילוצי אי־השוויון בתוספת של פונקציות מחסום לפונקצית המטרה.

פונקצית מחסום (barrier) $B(\mathbf{x})$ היא פונקציה קמורה ואי־שלילית שמקבלת את הערך ∞ כאשר מתקרבים לשפה של תחום האילוץ. (כאן רלוונטיים רק אילוצי אי־השוויון, כי אנו מניחים שאילוצי השוויון תמיד מתקיימים.) דוגמאות:

$$B(\mathbf{x}) = -\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{g_i(\mathbf{x})}$$

$$B(\mathbf{x}) = -\sum_{i=1}^{m} \ln(-g_i(\mathbf{x}))$$

ואז נחליף את בעית האופטימיזציה בבעיה

$$(P_t) \qquad \begin{array}{ll} \min\limits_{\mathbf{x}} & f(\mathbf{x}) + \frac{1}{t} B(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.} & A\mathbf{x} = \mathbf{b} \end{array}$$

הבעיה החדשה תלויה בפרמטר $t > 0$, אך היא נשארת קמורה בתחום האילוץ (מדוע?) לדוגמה, אם האילוצים הם $x \leq 2$, $x \geq 1$ נקבל פונקציות מחסום המופיעות באיור להלן. כאשר מגדילים את t, פונקצית המחסום מקרבת את האילוצים טוב יותר. נדגים זאת באיור עבור $B(x) = -1/(x-2) - 1/(1-x)$.

לפיכך, בכל איטרציה של האלגוריתם נפתור את הבעיה (P_t) לקבלת נקודה חדשה $(\mathbf{x}_t)$, ואז נגדיל את t. כאשר $t \to \infty$, פתרון הבעיה (P_t) מקרב היטב את פתרון הבעיה המאולצת (P). כלומר, נגדיר סדרה $0 < t_1 < t_2 < \cdots$, ובאיטרציה ה־k נפתור את בעית האופטימיזציה (P_{t_k}). סדרת הנקודות $\mathbf{x}_{t_1}, \mathbf{x}_{t_2}, \ldots$ נקראת ה"מסלול המרכזי". הוא, כאמור, מתכנס לעבר הפתרון האופטימלי של הבעיה.

13 הרצאה ותרגול 13

תכורת מהשיעור הקודם:

היום בהרצאה נסיים את הדיון על שיטות barrier ונתין הרצאת העשרה על הקשר של חומר הקורס לmachine learning (העשרה - לכן לא סיכמתי ☺) .

נזכר כי שיטת barrier method מתמודדת עם בעיית אופטמזציה עם אילוצים.

$$\begin{aligned}\min f(x)\\ \forall i\in\{1,\ldots,m\}: h_i(\boldsymbol{x})\le 0\\ A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

רוצים למזער פונ' מטרה $f(\boldsymbol{x})$ תחת אילוצי אי שוויון $\forall i\in\{1,\ldots,m\}: h_i(\boldsymbol{x})\le 0$.היינו רוצים להשתמש בשיטת ניוטון לפתרון של הבעיות הללו.הבעיה היא שיטת ניוטון יודעת רק להתמודד עם אילוצי שוויון.ולכן אופן הפתרון (הרעיון של שיטת barrier) הוא לקחת את אילוצי האי שוויון ולשלב אותם בתוך פונ' המטרה , בתוך $\phi(\boldsymbol{x})$ שמוגדרת להיות $\phi(\boldsymbol{x})=-\sum_{i=1}^{m}\log(-h_i(\boldsymbol{x}))$ והיא בעצם הbarrier.ההגיון מאחורי זה הפונ' של הbarrier (כלומר $\phi(\boldsymbol{x})$) מנסה **לחקות** את הבעיה עם האילוצים , שיכולה להכתב באופן הבא עם פונ' אידיקטור:

$$\min_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x})+\sum_{i=1}^{m}\mathbb{I}_{\{h_i(\boldsymbol{x})\le 0\}}(x)\qquad \forall i\in\{1,\ldots,m\}:\mathbb{I}_{\{h_i(\boldsymbol{x})\le 0\}}(x)=\begin{cases}\infty & h_i(\boldsymbol{x})>0\\ 0 & h_i(\boldsymbol{x})\le 0\end{cases}$$

נבחין כי עם פונ' אינקטורים מאוד לא נוח לעבור (לא רציפות,לא גזירות).

כלומר לאחר ההמרה נקבל בעיית אופטמזציה קמורה מהצורה:

$$\begin{aligned}\min_{\boldsymbol{x}}\quad & tf(\boldsymbol{x})+\phi(\boldsymbol{x})\\ \text{s.t.}\quad & A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

כאשר $t>0$ הוא קבוע ,מספר גדול מאוד.

בכל אירטציה נגדיל את המשקל של פונ' המטרה $f(\boldsymbol{x})$ לעומת הbarrier $\phi(\boldsymbol{x})$ כלומר בכל איטרציה אנו מגדילים את t.

אנו מסמנים את הפתרון של הבעיה עבור t מסויים להיות $\boldsymbol{x}^*(t)$.ככל שנגדיל את t נראה ש $\boldsymbol{x}^*(t)\xrightarrow{t\to\infty}\boldsymbol{x}^*$.(בכל פעם נגדיל את t בפקטור קבוע - בפקטור μ בכל פעם שיטת ניוטון תקבל כקלט ראשוני את הנקודה האופטמלית מהסיבוב הקודם).אם קובעים את t וμ באופן נכון אז באתחלים מהסיבובים הקודם ההתכנסות תהיה בקצב סופר אקספוננצאלי.(אחרת אם לא הגענו לשלב הזה נאלץ לחכות כיוון שההתכנסות איטית יחסית עד שמגיעים לשלב הזה) .

כבנוסף אנו יודעים כי $f(\boldsymbol{x}^*(t))-f^*\le\frac{m}{t}$ כלמר ערך התת אופטמליות של הפתרון הולכת כמו $\frac{m}{t}$.השגיאה הולכת כמו $\frac{m}{t}$.

ולכן אם נרצה פתרון ϵ תת אופטמלי נריץ את האלג' עד אשר $\frac{m}{t}\le\epsilon$.

אז למה צריך לשחק אם t?

- אם נתחיל בt מואד גדול מראש (=משקל גדול לפונ' המטרה) אז הרבה מהזמן נבלה בשיטת ניוטון במוד ההתכנסות האיטי.
- כשמגדלים את t בצורה הדרגתית אנו בעצם מבטיחים שרוב הזמן שהאלג' יבוצע השימוש בשיטת ניוטון יבוצע במוד ההתכנסות הסופר אקפוננצאלי.

אנליזה מלאה של שיטת הbarrier היא מורכבת יחסית ולכן לא נספיק לעשות אותה בקורס הנ"ל כיוון שאין לנו מספיק זמן לביצוע אנליזה זו.

בחירת הפרמטרים $\mu, t^{(0)}$ **:**

לעיתים כשמשתמים בsolver מוכן (לדוגמא חבילת קוד חיצונית) היא יכולה לבחור באופן אוטומטי את μ.חשוב להבין את המשמעות של בחירת הפרמרטים.(על מה כל אחד משפיע)

שיקולים בבחירת הפרמרטים:

μ הוא הפרמטר שדרכו מגדילים את t.כלומר בכל איטרציה $t_{\text{new}}\leftarrow t_{\text{old}}\mu$.

נזכור כי השגיאה הולכת כמו $\frac{m}{t}$.כלומר t גדול משמעותו שגיאה נמוכה יותר.

ולכן אם μ גדול אז t יגדל מסיבוב לסיבוב בגודל גדול יותר.

- **שיקולים בבחירת** μ:

1. אם μ מאוד קטן אז נבלה יותר זמן בלולאה החיצונית זמן ארוך יותר (נפעיל יותר פעמים את שיטת ניוטון אבל כל שיטת ניוטון תתכנס מהר יותר).

   כלומר μ קטן מדי $\leftarrow$ ייקח יותר זמן (יותר הפעולת של שיטת ניוטון) עד שנגיע לt שייניב שגיאה נמוכה יותר.

2. אם μ מאוד גדול אז נבלה יותר זמן בלולאה הפנימית זמן ארוך יותר (נפעיל פחות פעמים את שיטת ניוטון אבל כל שיטת ניוטון תתכנס לאט יותר = עלולים לצאת מהמוד של התכנסות סופר אקפוננצאלית).

   μ גדול מדי $\leftarrow$ הפער בין $t_{\text{new}}, t_{\text{old}}$ גדול מאוד ויכול להיות שהפתרון של הסיבוב הקודם והפתרון של הסיבוב הנוכחי רחוקים מדי וההנחה שהם קורבים מספיק ככה שההתכנסות תהיה סופר אקפוסננצאלית , תישבר.ואז מה שאומר ששיטת ניוטון בסיבוב הזה תצטרך יותר איטרציות על מנת להתכנס לסיבוב הנוכחי (כי ייתכן שכבר לא תתרחש התכנסות סופר אקפוסננצלאית).

- **שיקולים בבחירת** $t^{(0)}$:

שיקולים מאוד דומים.אפשר לבטא את t_{new} (נסמן $t^{(T)}$ כלומר t באירטציה הT) על ידי הקשר הבא:$t^{(T)} = t^{(T-1)}\mu =: t^{(T-2)}\mu^2 = t^{(0)}\mu^T$כלומר על ידי הקשר

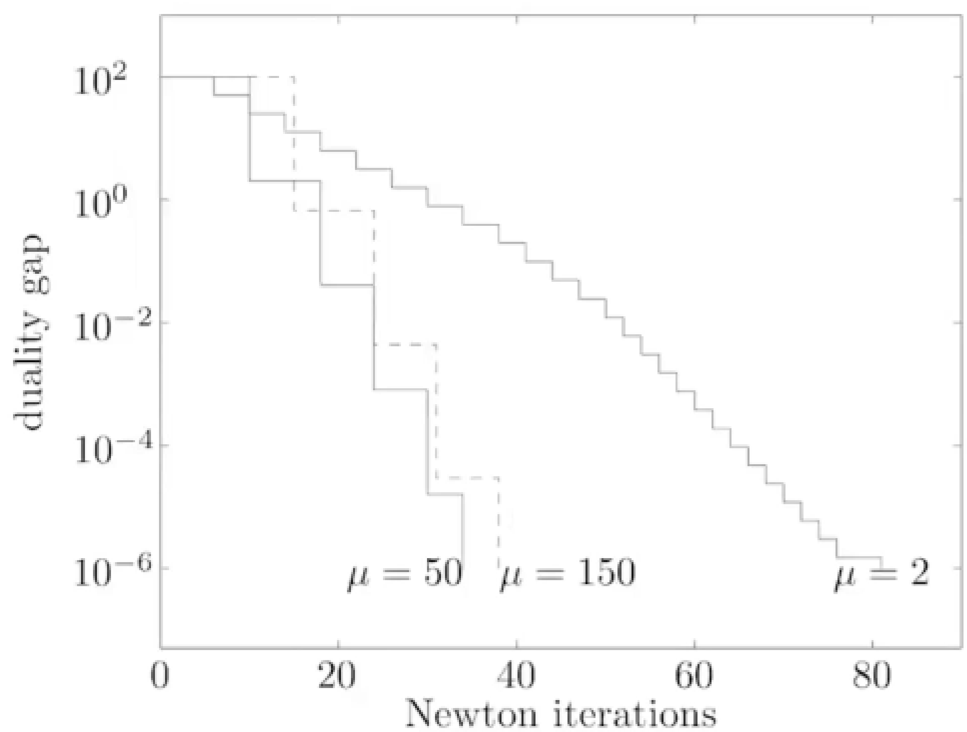
$$t^{(T)} = t^{(0)}\mu^T$$

1. אם $t^{(0)}$ מאוד קטן אזי ייקח יותר איטרציות חיצוניות להגיע לt מספיק טוב שייניב שגיאה נמוכה יותר.(בדיוק כמו השיקול של בחירת μ קטן מדי)
2. אם $t^{(0)}$ גדול מדי אנו עלולים להיות במצב שבאיטרציה הראשונה לשיטת ניוטון ייקח המון המון זמן להתכנס לפתרון הטוב .

אלו הtradeoffs בבחירת $\mu, t^{(0)}$.למזלנו שבפועל שיטת barrier לא כל כך רגישה לבחירת הפרמטרים $\mu, t^{(0)}$.
(אם זאת חשוב לשים לב שהבחירה של הפרמטרים הללו תלויה מושפעת מסדר גודל).
דוגמא מהספר של Boyd להשפעה של בחירת μ:

הערות:הבעיות הנ"ל בגרף הן בעיות תכנות לינארי LP.

Example of a small LP in $n = 50$ dimensions, $m = 100$ inequality constraints (from B & V page 571):



נבחין כי הביצועים עבור $\mu = 50$ ו $\mu = 2$ מניבים הבדל של פי 2 וקצת בערך בקצב ההתכנסות למרות שההפרש בין הμ־ים הוא 25.כלומר הפרש גדול בין הμ לא מניב הפרש גדול במיוחד בביצועים.
מכאן שהשיטה עמידה יחסית לבחירת הפרמטרים.μ לא משפיעה בהרבה.כלומר שיטת barrier דיי חסינה לבחירת μ.

ניתוח התכנסות של שיטת barrier נציין שלא נבצע את הניתוח המלא כאן אלא נסתפק בניתוח חלקי בלבד.באנליזה שלנו נתייחס רק לאיטרציות החיצוניות (כמות הפעלות של שיטת ניוטון) ולא לאירציות הפנימיות(=כמות אירטציות בתוך כל הפעלה של שיטת ניוטון) .נמצא את מספר האיטרציות החיוצניות שאנו זוקיקים להפעיל על מנת לגיע לפתרון מסויים.

נניח שאנו יודעים לפתור את הcentering steps באופן מדויק (כלומר , שהפלט של שיטת ניוטון בכל איטרציה מניב בדיוק את הפתרון האופטמלי בכל הפעלה שלו) אזי התוצאה הבאה היא מיידית:

משפט 1.13 שיטת barrier לאחר k centering steps (k הפעלות של שיטת ניוטון) מניבה את התוצאה הבאה:

$$f\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right) - f^* \leq \frac{m}{\mu^k t^{(0)}}$$

במילים אחרות , על מנת להגיע לפתרון ϵ תת אופטמלי נדרש להפעיל

$$\frac{\log\left(\frac{m}{(t^0 \epsilon)}\right)}{\log\left(\mu\right)}$$

centering steps (איטרציות חיצוניות = קריאות לפתון על ידי שיטת ניוטון) במהלך השימוש בשיטת barrier. (ועוד הcentering step הראשוני)

הוכחה:

- ראינו כי t לאחר k centering steps הוא $t^{(k)}=t^{(0)}\mu^k$.
- ראינו כי $f\left(\boldsymbol{x}^*\left(t\right)\right)-f^*\leq\frac{m}{t}$ כלומר ערך התת אופטמליות של הפתרון הולכת כמו $\frac{m}{t}$.
- לכן משילוב שני העובודות נקבל כי

$$f\left(\boldsymbol{x}^*\left(t^{(k)}\right)\right)-f^*\leq\frac{m}{t^{(k)}}=\frac{m}{t^{(0)}\mu^k}$$

כלומר נקבל כי הערך של התת אופטמליות הולך כמו $f\left(\boldsymbol{x}^*\left(t^{(k)}\right)\right)-f^*\leq\frac{m}{t^{(0)}\mu^k}$.

- נרצה למצוא את k (מספר הcentering steps) הדרורש לפתרון ϵ תת אופטמלי כלומר נבודד את k מתוך המשוואה $\frac{m}{t^{(0)}\mu^k}\leq\epsilon$.

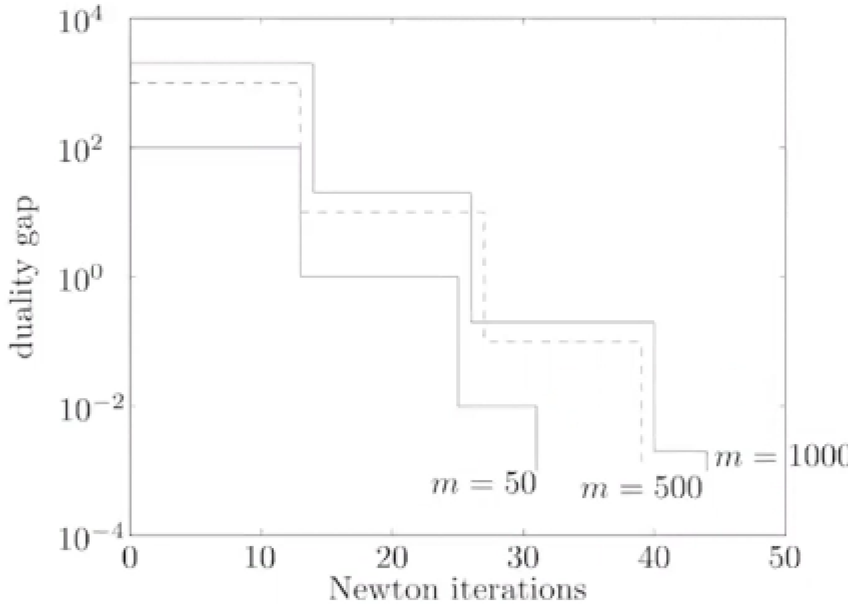
$$\begin{aligned}
&\frac{m}{t^{(0)}\mu^k}\leq\epsilon\\
\iff&\frac{m}{\epsilon}\leq t^{(0)}\mu^k\\
\iff&\frac{m}{t^{(0)}\epsilon}\leq\mu^k\\
\iff&\log\left(\frac{m}{t^{(0)}\epsilon}\right)\leq\log\left(\mu^k\right)\\
\iff&\log\left(\frac{m}{t^{(0)}\epsilon}\right)\leq k\log\left(\mu\right)\\
\iff&\frac{\log\left(\frac{m}{t^{(0)}\epsilon}\right)}{\log\left(\mu\right)}\leq k
\end{aligned}$$

כלומר $k\leq\frac{\log\left(\frac{m}{t^{(0)}\epsilon}\right)}{\log(\mu)}$.נבחין כי הדרישה לפתרון ϵ תת אופטמלי היא הוא **לוגרתמי** ב $\frac{1}{\epsilon}$.ובנוסף היא לוגרתמית בכמות האילוצים m (=לא מושפעת מאוד מכמות האילוצים) .ניתן לראות זאת בגרף הבא (השפעה של m על כמות האיטרציות החיוציות לצרוך התכנסות).

הערות:הבעיות הנ"ל בגרף הן בעיות תכנות לינארי LP.

Example of barrier method progress for an LP with m constraints (from B & V page 575):

$n = 2m$



Can see roughly linear convergence in each case, and logarithmic scaling with m

עלות חישובית בפועל של שיטת barrier (כמה איטרציות בשיטות ניוטון) נציין במבט מלמעלה את כמות האירציות הפנימיות (כמות האירטציות של איטרציות ניוטון) במהלך הפעלת האלג'.שוב,זו אנליזה חלקית.

אם הפרמטרים μ ו$t^{(0)}$ נבחרים בצורה נכונה אז סך כל האיטרציות של ניוטון אזי **כמות האיטרציות הכוללת של ניוטון** היא עדיין $\mathcal{O}\left(\log\left(\frac{m}{t^{(0)}\epsilon}\right)\right)$.

המסכנה היא שסך כל העלות החישובית של הbarrier הוא לגורתמי בm ולוגרתמים ב $\frac{1}{\epsilon}$.בפועל זו נחשבת עלות חישובית יחסית נמוכה.

עוד כותרת על barrier אחד מהקלטית לשיטת barrier הוא $\boldsymbol{x}_0$ שהוא פיזבלי (=מקיים את האילוצים) (בין הית על מנת ש$\phi(\boldsymbol{x}_0)$ תהיה מוגדרת היטב).בבעיות בחד מימד לעיתים קל לנחש $\boldsymbol{x}_0$ פיזבלי כזה.בבעיות רב מימדיות מציאה של $\boldsymbol{x}_0$ פיזבלי הופכת להיות משימה לא טרוואלית.

איך עלינו למצוא $\boldsymbol{x}$ פיזבלי כזה?

עלינו לפתור **בעיית פיסבליות**.נזכור כי במקור אנו רוצים למצוא נקודה $\boldsymbol{x}$ עבורה $\forall i \in \{1,\ldots,m\} : h_i(\boldsymbol{x}) \leq 0$ ובנוסף $A\boldsymbol{x} = b$ וזו בעצם תהיה נקודה פיזבלית .

איך פותרים בעיית פיסבליות? עלינו להוסיף עוד משתנה לבעיה ,נקרא לו s. נשכח לרגע מפונ' המטרה ונתמקד רק במציאה נקודה פיזבלית (=נקודה שמקיימת את האילוצים) .

כלומר , על ידי פתרון של המשוואה:

$$(F): \quad \begin{array}{ll} \min_{x,s} & s \\ \text{subject to} & h_i(x) \leq s, i = 1,\ldots,m \\ & Ax = b \end{array}$$

בעצם אנו מבצעים "ריכוך" של הדרישה של האילוץ המקורי $\forall i \in \{1, \ldots, m\} : h_i(\boldsymbol{x}) \leq 0$ על ידי הוספת המשתנה s.
איך פותרים את בעיית הפיסבליות הנ"ל ? משתמשים בשיטת barrier.

- אבל רגע,לא נוצר פה טיעון מעגלי (/ביצה ותרנגולת)? **לא.**

כי פתרון של בעיית הפיסבליות על ידי barrier הוא נחשב קל.
איך מוצאים נקודה התחלתית s_0 לפתרון בעיית הפיסבליות (F)?

- ניקח $\boldsymbol{x}$ כלשהו שמקיים את איחוצי השוויון $A\boldsymbol{x} = b$.(זה בד"כ נחשב משימה קלה למצוא $\boldsymbol{x}$ שמקיימת את הדרישה הזו - לא ניכנס לזה).נסמנה $\boldsymbol{x}_0$.כלומר מתקיים $A\boldsymbol{x}_0 = b$.
- נבחר $s_0 = \max_{i=1,\ldots,m} h_i(\boldsymbol{x}_0)$.
- אזי הנקודה $(\boldsymbol{x}_0, s_0)$ היא נקודה פיסבלית ל**בעיית הפיסבליות** (F)**.**

משלב זה כשיש לנו את הנקודה $(\boldsymbol{x}_0, s_0)$ שהיא נקודה פיסבלית לבעיית הפיסבליות (F).נוכל לפתור את בעיית הפיסבליות (F) בשיטת barrier עם אתחול $(\boldsymbol{x}_0, s_0)$.
ובכך למצוא נקודה התחלתית פיסבלית לבעיה המקורית שאנו רוצים לפתור על ידי שיטת barrier.
נדגיש כי אין צורך לפתור את בעיית הפיזבליות (F) בדיוק מאוד מאוד גדול כיוון שמספיק למצוא x, s עבורם $s < 0$.ואז במצב כזה הx המתאים לו יהיה פיסבלי בבעיה המקורית.
כלומר אפשר לעצור את שיטת barrier על בעיית הפיסבליות מהשלב שבו $s < 0$.
פה הסתיים הדיון על שיטות barrier.

סוף הסיכום.