046197

Computational Methods in Optimization

HOMEWORK #1

Alexander Shender: 328626114

Eliran Cohen: 204187801

Contents

Question 1.

Part a.

There are 4 conditions that need to hold that define the inner product, as specified in the tutorial no. 1:

1. סימטריה: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$.
2. אדיטיביות: $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$.
3. הומוגניות: $\langle \lambda \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$.
4. חיוביות מוגדרת: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ וכן $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ אם ורק אם $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

In our case, we have $\langle x, y \rangle_M = x^T My$; $M\ is\ a\ general\ matrix \in R^{n \times n}$

Condition 1 holds:

$$\langle x, y \rangle_M = x^T My \underbrace{=}_{it's\ a\ scalar} (x^T My)^T = y^T Mx = \langle y, x \rangle_M$$

Condition 2 holds:

$$\langle x + y, z \rangle_M = (x + y)^T Mz = x^T Mz + y^T Mz = \langle x, z \rangle_M + \langle y, z \rangle_M$$

Condition 3 holds:

$$\langle \lambda x, y \rangle_M = \lambda x^T My = \lambda \langle x, y \rangle_M$$

While conditions 1-3 indeed hold, the condition 4 will hold only if $x^T Mx \geq 0$ and $x \neq 0$. This means M matrix should at least PSD. But we don't have such condition on M.

As basic example let's take M to be a matrix of all zeros. Then $\langle x, x \rangle_M = x^T Mx = 0$, but $x \neq 0$.

So this operation is **NOT AN INNER PRODUCT**

Part b.

The only difference we have here is the new information on the matrix (now denoted Q): $Q \succ 0$

So conditions 1-3 hold as previously in Part a.

Condition 4:

$$\langle x, x\rangle_Q = x^T Q x \geq 0 \quad ; \quad \langle x, x\rangle_Q \; iff \; x = 0$$

Since we know that Q is a PD matrix, this means that for each $x \in R^n$; $x \neq 0$,

$$x^T Q x > 0$$

Which helps us to prove the condition 4.

So this operation **answers all 4 conditions for the inner product.**

Question 2.

Given: A is symmetric, $A \in R^{n\times x}$

Part a.

Given: $A \succ 0$. Prove: A is invertible, $A^{-1} \succ 0$

Invertibility: If A is symmetric, PD, $A \in R^{n\times n}$, then the following hold from the characteristics of the PD matrixes:

$$x^T Ax > 0 \quad \forall x \neq 0$$

Which means:

$$Ax > 0 \quad \forall x \neq 0$$

Thus, A spans over all of its dimensions and has a full rank. **Thus, A is invertible**.

Another way to show this is to remember that all of eigenvalues of A are positive -> A is invertible.

To prove that A^{-1} is PD, we show that all its eigenvalues are strictly positive:

For matrix A, eigenvector $v \neq 0$ and corresponding eigenvalue $\lambda > 0$:

$$Av = \lambda v$$

$$A^{-1}Av = A^{-1}\lambda v \quad ; \quad A^{-1}A = I$$

$$\frac{1}{\lambda}v = A^{-1}v$$

Since $\lambda > 0$, so does $\frac{1}{\lambda} > 0$. Also, $v \neq 0$.

Thus, all the eigenvalues are positive, and $\boldsymbol{A^{-1} \succ 0}$.

Part b.

Given: $A \succcurlyeq 0$, A invertible. Prove: $A \succ 0$

A is invertible -> $\lambda \neq 0 \quad \forall \lambda \in (eigenvalues\ of\ A)$

Invertible matrix has all non-zero eigenvalues.

$A \succcurlyeq 0$ -> $\lambda \geq 0 \quad \forall \lambda \in (eigenvalues\ of\ A)$

Combining two of those constraints together we get:

$$\lambda > 0 \quad \forall \lambda \in (eigenvalues\ of\ A)$$

Which is exactly the property of PD matrix – all its eigenvalues are strictly positive.

Thus, $A \succ 0$

Part c.

Given: $A = B^T B$; $B \in R^{m \times n}$. Prove: $A \succcurlyeq 0$

We try to prove the property of the PDS matrix:

$$x^T A x = x^T B^T B x \underbrace{=}_{C=Bx} C^T C = \|C\|_2^2 \geq 0$$

Which means

$$x^T A x \geq 0$$

Thus, $A \succcurlyeq 0$.

Example for B: m = 1, n = 2.

$$B \neq 0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = B^T B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

We take $x \neq 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$:

$$x^T A x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Part d.

Given: $A_{i,i} < 0 \quad ; \quad 1 \leq i \leq n,$ Prove: $A \ngeq 0$.

It if sufficient to show that for some $x \neq 0$, this holds: $x^T Ax < 0$

Expanding:

$$x^T Ax = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j A_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 A_{i,i} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i}^{n} x_i x_j A_{i,j}$$

If some $A_{i,i} < 0$, this means this whole expression can be negative too, if we choose $x \neq 0$, that has all the values equal 0 except for the $i'th$ value. For example:

$$x^T Ax = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -1 \ngeq 0$$

The condition that A has non-negative diagonal values is **sufficient** to prove it is PSD, Example for the extreme case by having zero values on the diagonals:

$$x^T Ax = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \geq 0$$

By having positive values on a diagonal will still make the inequality hold.

Question 3.

Given:

$f : U \to R$ continuously differentiable. $U \in R^n$. $d \neq 0$ is the downhill direction at point x if there exists T such that for each $0 < t < T$:

$$f(x + td) < f(x)$$

Part a.

Prove: If direction d uphold: $f'(x, d) < 0$ for some x, then d is the downhill direction.

From the definition:

$$f'(x, d) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x + td) - f(x)}{t}$$

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x + td) - f(x)}{t} < 0$$

$$f(x + td) - f(x) < 0$$

$$f(x + td) < f(x)$$

Thus, this is the downhill direction from the definition given in this exercise.

Part b.

Prove: if $\nabla f(x) \neq 0$, then the direction $d = -\nabla f(x)$ is the downhill direction.

From theorem 4 from the tutorial: if f is continuously differentiable, then:

$$f'(x; d) = \nabla f(x)^T d$$

If $d = -\nabla f(x)$, then $\nabla f(x) = -d$, then:

$$f'(x; d) = \nabla f(x)^T d = -d \cdot d = -d^2 < 0$$

Thus,

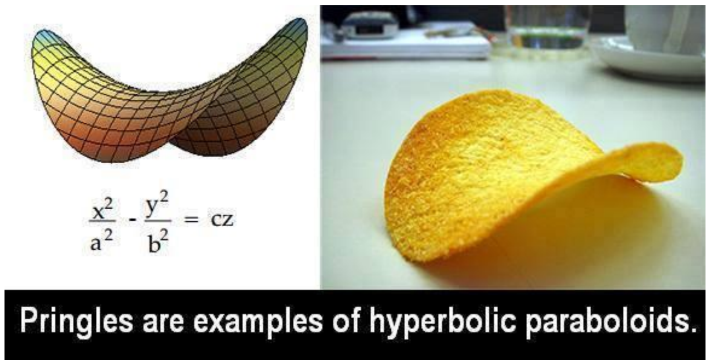
$$f'(x, d) < 0$$

From Part a. of this question we know that if this inequality holds, then d is the downhill direction.

Part c.

Find example of a function $f(x_1, x_2)$, a point $x^0 = [x_1^0 \; x_2^0]^T$, directions d_1, d_2, s.t. d_1 is the downhill direction and d_2 is not.

What came on my mind is Pringles (image source – google images):



Let's take $a = 1; b = 1, c = 1$

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$$

Let's take trivial point $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

Calculating gradient:

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\delta f}{\delta x_1} & \frac{\delta f}{\delta x_2} \end{bmatrix} = [2x_1 \quad -2x_2] = [2 \quad -2]$$

From what we have proven:

$$\begin{cases} d_1 = \nabla f(x_1, x_2) = [2 \quad -2] = UPHILL\ DIRECTION \\ d_2 = -\nabla f(x_1, x_2) = [-2 \quad 2] = DOWNHILL\ \ DIRECTION \end{cases}$$

Question 4-6.

<continue to the next page>

תרגיל 4

נוכיח כי הקבוצות B_1 ו - B_2 , קבוצות קמורות כאשר נתון ש - $C \subseteq \mathbb{R}^m$ תחום קמור, ו - $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

הקבוצה $\mathbf{B}_1$

$$B_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x = A^T z \,,\, z \in C\}$$

נבדוק אם נקודה שהיא צירוף של שתי נקודות השייכות לקבוצה B_1 גם כן שייכת לקבוצה :

$x = A^T z \,,\, x \in \mathbb{R}^n$
$y = A^T z \,,\, y \in \mathbb{R}^n$

נגדיר נקודה k המקיימת :

$$k = \lambda x + (1-\lambda) y \,,\, \lambda \in [0,1]$$

$k = \lambda x + (1-\lambda) y = \lambda A^T z + (1-\lambda) A^T z = (\lambda + 1 - \lambda) A^T z = A^T z \in B_1$

B_1 קמורה על פי הגדרה.

הקבוצה $\mathbf{B}_2$

$$B_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, Ax \ \in C\}$$

נבדוק אם נקודה שהיא צירוף של שתי נקודות השייכות לקבוצה B_2 גם כן שייכת לקבוצה :

$x : Ax \,,\, \in C$
$y : Ay \,,\, \in C$

נגדיר נקודה k המקיימת :

$$k = \lambda x + (1-\lambda) y \,,\, \lambda \in [0,1]$$

$k = \lambda x + (1-\lambda) y = \lambda Ax + (1-\lambda) Ay \in B_2$

סכום של קבוצות קמורות היא קבוצה קמורה ולכן B_2 קמורה על פי הגדרה.

תרגיל 5

1. הוכחה כי עבור קבוצה $S \in \mathbb{R}^n$ ונקודת צבר $x \in \mathbb{R}$, לכל $\epsilon > 0$ הכדור הפתוח $B(x,\epsilon)$ מכיל אינסוף נקודות בקבוצה S.

נוכיח בשלילה

(1) נניח כי עבור נקודת צבר x , קיימות כמות סופית של נקודות ב - S.

(2) עבור נקודת צבר ספציפית x_a . הנקודה בעלת סביבה בגודל מינימלי ϵ_a .

(3) על פי הגדרה של נקודת צבר, עבור כל $\epsilon_a > 0$, נדרשת שתהיה נקודה בסביבה של x_a , הנמצאת ב - S.

(4) נבחן את הסביבה של נקודה x_a , ברדיוס $\epsilon_a/2$.
בסביבת הנקודה x_a , אין נקודה השייכת ל - S. (כי אמרנו שהמרחק המינימלי הוא ϵ_a)

(5) כלומר מתקיימת סתירה על פי ההגדרה שעל **כל** $\epsilon > 0$ חייבת להיות נקודה השייכת ל - S.

(6) על פי הסתירה חייבות להיות נקודות נוספות בסביבה של x, כלומר קיימות אינסוף נקודות .

2. הוכחה שהקבוצה S היא קבוצה סגורה אם ורק אם היא מכילה את כל נקודות הצבר שלה.
נוכיח את הטענה בשני הכיוונים מכיוון שמדובר בטענת **"אם ורק אם"**

קבוצה S היא קבוצה המכילה את כל נקודות הצבר שלה

(1) תהי נקודה x, נקודה במשלים של S (S^c) . x אינה נקודה צבר של S, (כי התחלנו ש - S מכילה את כל נקודות הצבר שלה).

(2) עבור הקבוצה S^c , הנקודה x היא נקודת פנים מכיוון שכל הסביבה שלה מוכלת ב - S^c.

(3) כלומר, הקבוצה S^c, היא קבוצה פתוחה מכיוון שהיא מכילה את כל נקודות הפנים שלה.

(4) לכן על פי הגדרה, אם S^c, היא קבוצה פתוחה אז הקבוצה S היא קבוצה סגורה.

S קבוצה סגורה

(1) מכיוון ש - S, היא קבוצה סגורה, אז הקבוצה S^c היא קבוצה פתוחה (כלומר קבוצה המכילה את כל נקודות הפנים שלה).

(2) נניח שקיימת נקודה x, שהיא נקודת צבר של S. אז קיימת איזושהי נקודה ב- S, בסביבה של x.

(3) מכיוון שהנקודה x לא שייכת ל - S אז היא שייכת ל - S^c.

(4) S^c היא קבוצה פתוחה, ולכן מכילה את כל נקודות הפנים שלה. כלומר כל נקודה ב - S^c היא נקודת פנים.

(5) נוצרה **סתירה** כי הנחנו ש - x היא נקודת צבר של S לכן חייב להיות חיתוך בין הסביבה של x ל - S

הוכחנו בשני הכיוונים ולכן הוכחנו את הטענה

3. הוכחה כי אם הסדרה S סגורה, והסדרה $x_i \in S$ מתכנסת ל־ x : $\lim_{i\to\infty}\|x_i - x\| = 0$, אז $x \in S$

נוכיח בשלילה כי $x \notin S$.

(1) מכיוון ש־ S היא קבוצה סגורה , אז היא מכילה את כל נקודות הצבר שלה. ולכן בהנחת $x \notin S$ נובע ש־ x אינה נקודת צבר של S

(2) אם x לא נקודת צבר של S אז עבור $\epsilon > 0$ הכדור הפתוח $B(x,\epsilon) \notin S$

(3) על פי הנתון, $\lim_{i\to\infty}\|x_i - x\| = 0$, כלומר x צריכה להיות בסביבה של הסדרה x_i.

(4) קיבלנו סתירה בין סעיף (2) ל־ (3) ולכן $x \in S$

תרגיל 6

נניח כי קיימים פתרונות נוספים y_0, z_0 אשר פותרים את בעיית האופטמיזציה :

$$\|y_0 - x_0\|^2 = \|z_0 - x_0\|^2 = (min_{y\in C}\|y - y_0\|)^2 = \delta^2 \tag{1}$$

מכיוון ש־ y הוא פתרון לבעיית האופטימיזציה, וגם $y \in C$ אז גם נקודה k_0 שייכת ל־ C:

$$k_0 = \lambda z_0 + (1-\lambda)y_0 \in C$$

עבור $\lambda = 1/2$ מתקבל כי הנקודה k_0:

$$k_0 = \lambda z_0 + (1-\lambda)y_0 = \frac{z_0 + y_0}{2} \in C$$

הנקודה k_0 היא לא פיתרון של בעיית האופטימיזציה ולכן :

$$\begin{aligned}
&\|k_0 - x_0\|^2 \geq \delta^2\\
&\|\frac{z_0 + y_0}{2} - x_0\|^2 \geq \delta^2\\
&\frac{1}{4}\|z_0 + y_0 - 2x_0\|^2 \geq \delta^2\\
&\frac{1}{4}\|(z_0 - x_0) + (y_0 - x_0)\|^2 \geq \delta^2\\
&\frac{1}{4}\left[\|(z_0 - x_0)\|^2 + 2\langle z_0 - x_0, y_0 - x_0\rangle + \|(y_0 - x_0)\|^2\right] \geq \delta^2 \qquad (2)
\end{aligned}$$

נציב במשוואה (2) את משוואה (1) :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\left[\delta^2 + 2\langle z_0 - x_0, y_0 - x_0\rangle + \delta^2\right] \geq \delta^2\\
&\frac{1}{2}\langle z_0 - x_0, y_0 - x_0\rangle \geq \frac{1}{2}\delta^2\\
&\langle z_0 - x_0, y_0 - x_0\rangle \geq \delta^2\\
&2\langle z_0 - x_0, y_0 - x_0\rangle \geq \|(z_0 - x_0)\|^2 + \|(y_0 - x_0)\|^2\\
&\|(z_0 - x_0)\|^2 + \|(y_0 - x_0)\|^2 - 2\langle z_0 - x_0, y_0 - x_0\rangle \leq 0\\
&\|(z_0 - x_0) - (y_0 - x_0)\|^2 \leq 0\\
&\|z_0 - y_0\|^2 \leq 0
\end{aligned}$$

על פי הגדרת ה $\|\cdot\|$, $\|\cdot\| \geq 0$ ולכן הפתרון היחיד האפשרי לתוצאה שקיבלנו הוא ש :

$$\begin{aligned}
&\|z_0 - y_0\|^2 = 0\\
&z_0 - y_0 = 0\\
&z_0 = y_0
\end{aligned}$$

כלומר הפתרונות שהנחנו שפותרים את בעיית האופטימיזציה זהים, ולכן קיים רק פתרון יחיד שפותר את בעיית האופטימיזציה