תרגיל 4

נוכיח כי הקבוצות B_1 ו ־ B_2 , קבוצות קמורות כאשר נתון ש ־ $C \subseteq \mathbb{R}^m$ תחום קמור, ו ־ $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

הקבוצה $\mathbf{B}_1$

$$B_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x = A^T z\,,\, z \in C\}$$

נבדוק אם נקודה שהיא צירוף של שתי נקודות השייכות לקבוצה B_1 גם כן שייכת לקבוצה :

$x = A^T z\,,\, x \in \mathbb{R}^n$
$y = A^T z\,,\, y \in \mathbb{R}^n$

נגדיר נקודה k המקיימת :

$$k = \lambda x + (1-\lambda)y\,,\, \lambda \in [0,1]$$

$k = \lambda x + (1-\lambda)y = \lambda A^T z + (1-\lambda)A^T z = (\lambda + 1 - \lambda)A^T z = A^T z \in B_1$

B_1 קמורה על פי הגדרה.

הקבוצה $\mathbf{B}_2$

$$B_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, Ax \,\in C\}$$

נבדוק אם נקודה שהיא צירוף של שתי נקודות השייכות לקבוצה B_2 גם כן שייכת לקבוצה :

$x : Ax\,, \in C$
$y : Ay\,, \in C$

נגדיר נקודה k המקיימת :

$$k = \lambda x + (1-\lambda)y\,,\, \lambda \in [0,1]$$

$k = \lambda x + (1-\lambda)y = \lambda Ax + (1-\lambda)Ay \in B_2$

סכום של קבוצות קמורות היא קבוצה קמורה ולכן B_2 קמורה על פי הגדרה.

תרגיל 5

1. הוכחה כי עבור קבוצה $S \in \mathbb{R}^n$ ונקודת צבר $x \in \mathbb{R}$, לכל $\epsilon > 0$ הכדור הפתוח $B(x, \epsilon)$ מכיל אינסוף נקודות בקבוצה S.

נוכיח בשלילה

(1) נניח כי עבור נקודת צבר x , קיימות כמות סופית של נקודות ב - S.

(2) עבור נקודת צבר ספציפית x_a . הנקודה בעלת סביבה בגודל מינימלי ϵ_a .

(3) על פי הגדרה של נקודת צבר, עבור כל $\epsilon_a > 0$, נדרשת שתהיה נקודה בסביבה של x_a , הנמצאת ב - S.

(4) נבחן את הסביבה של נקודה x_a , ברדיוס $\epsilon_a/2$.
בסביבת הנקודה x_a , אין נקודה השייכת ל - S. (כי אמרנו שהמרחק המינימלי הוא ϵ_a)

(5) כלומר מתקיימת סתירה על פי ההגדרה שעל **כל** $\epsilon > 0$ חייבת להיות נקודה השייכת ל - S.

(6) על פי הסתירה חייבות להיות נקודות נוספות בסביבה של x, כלומר קיימות אינסוף נקודות .

2. הוכחה שהקבוצה S היא קבוצה סגורה אם ורק אם היא מכילה את כל נקודות הצבר שלה.
נוכיח את הטענה בשני הכיוונים מכיוון שמדובר בטענת **"אם ורק אם"**

קבוצה S היא קבוצה המכילה את כל נקודות הצבר שלה

(1) תהי נקודה x, נקודה במשלים של S (S^c) . x אינה נקודה צבר של S, (כי התחלנו ש - S מכילה את כל נקודות הצבר שלה).

(2) עבור הקבוצה S^c , הנקודה x היא נקודת פנים מכיוון שכל הסביבה שלה מוכלת ב - S^c.

(3) כלומר, הקבוצה S^c, היא קבוצה פתוחה מכיוון שהיא מכילה את כל נקודות הפנים שלה.

(4) לכן על פי הגדרה, אם S^c, היא קבוצה פתוחה אז הקבוצה S היא קבוצה סגורה.

S קבוצה סגורה

(1) מכיוון ש - S, היא קבוצה סגורה, אז הקבוצה S^c היא קבוצה פתוחה (כלומר קבוצה המכילה את כל נקודות הפנים שלה).

(2) נניח שקיימת נקודה x, שהיא נקודת צבר של S. אז קיימת איזושהי נקודה ב- S, בסביבה של x.

(3) מכיוון שהנקודה x לא שייכת ל - S אז היא שייכת ל - S^c.

(4) S^c היא קבוצה פתוחה, ולכן מכילה את כל נקודות הפנים שלה. כלומר כל נקודה ב - S^c היא נקודת פנים.

(5) נוצרה **סתירה** כי הנחנו ש - x היא נקודת צבר של S לכן חייב להיות חיתוך בין הסביבה של x ל - S

הוכחנו בשני הכיוונים ולכן הוכחנו את הטענה

3. הוכחה כי אם הסדרה S סגורה, והסדרה $x_i \in S$ מתכנסת ל ־ x : $\lim_{i\to\infty}\|x_i - x\| = 0$, אז $x \in S$

נוכיח בשלילה כי $x \notin S$.

(1) מכיוון ש ־ S היא קבוצה סגורה , אז היא מכילה את כל נקודות הצבר שלה. ולכן בהנחת $x \notin S$ נובע ש ־ x אינה נקודת צבר של S

(2) אם x לא נקודת צבר של S אז עבור $\epsilon > 0$ הכדור הפתוח $B(x,\epsilon) \notin S$

(3) על פי הנתון, $\lim_{i\to\infty}\|x_i - x\| = 0$, כלומר x צריכה להיות בסביבה של הסדרה x_i.

(4) קיבלנו סתירה בין סעיף (2) ל ־ (3) ולכן $x \in S$

תרגיל 6

נניח כי קיימים פתרונות נוספים y_0, z_0 אשר פותרים את בעיית האופטמיזציה :

$$\|y_0 - x_0\|^2 = \|z_0 - x_0\|^2 = (min_{y\in C}\|y - y_0\|)^2 = \delta^2 \quad (1)$$

מכיוון ש־ y הוא פתרון לבעיית האופטימיזציה, וגם $y \in C$ אז גם נקודה k_0 שייכת ל־ C:

$$k_0 = \lambda z_0 + (1-\lambda)y_0 \in C$$

עבור $\lambda = 1/2$ מתקבל כי הנקודה k_0:

$$k_0 = \lambda z_0 + (1-\lambda)y_0 = \frac{z_0 + y_0}{2} \in C$$

הנקודה k_0 היא לא פיתרון של בעיית האופטימיזציה ולכן :

$$\begin{aligned}
&\|k_0 - x_0\|^2 \geq \delta^2\\
&\|\frac{z_0 + y_0}{2} - x_0\|^2 \geq \delta^2\\
&\frac{1}{4}\|z_0 + y_0 - 2x_0\|^2 \geq \delta^2\\
&\frac{1}{4}\|(z_0 - x_0) + (y_0 - x_0)\|^2 \geq \delta^2\\
&\frac{1}{4}\left[\|(z_0 - x_0)\|^2 + 2\langle z_0 - x_0, y_0 - x_0\rangle + \|(y_0 - x_0)\|^2\right] \geq \delta^2 \quad (2)
\end{aligned}$$

נציב במשוואה (2) את משוואה (1) :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\left[\delta^2 + 2\langle z_0 - x_0, y_0 - x_0\rangle + \delta^2\right] \geq \delta^2\\
&\frac{1}{2}\langle z_0 - x_0, y_0 - x_0\rangle \geq \frac{1}{2}\delta^2\\
&\langle z_0 - x_0, y_0 - x_0\rangle \geq \delta^2\\
&2\langle z_0 - x_0, y_0 - x_0\rangle \geq \|(z_0 - x_0)\|^2 + \|(y_0 - x_0)\|^2\\
&\|(z_0 - x_0)\|^2 + \|(y_0 - x_0)\|^2 - 2\langle z_0 - x_0, y_0 - x_0\rangle \leq 0\\
&\|(z_0 - x_0) - (y_0 - x_0)\|^2 \leq 0\\
&\|z_0 - y_0\|^2 \leq 0
\end{aligned}$$

על פי הגדרת ה $\|\cdot\|$, $0 \geq \|\cdot\|$ ולכן הפתרון היחיד האפשרי לתוצאה שקיבלנו הוא ש :

$$\begin{aligned}
&\|z_0 - y_0\|^2 = 0\\
&z_0 - y_0 = 0\\
&z_0 = y_0
\end{aligned}$$

כלומר הפתרונות שהנחנו שפותרים את בעיית האופטימיזציה זהים, ולכן קיים רק פתרון יחיד שפותר את בעיית האופטימיזציה