שיטות חישוביות באופטימיזציה - תרגיל בית #4

תרגיל 3

$Q \succ 0$

$a,b \in \mathbb{R}^n$

$c > 0$

$$\min_x \frac{x^TQx}{x^Ta}$$

$$\text{s.t} \quad x^Tb = c$$

$$x^Ta > 0$$

הבעיה מקיימת תנאי slater

$$\alpha = a^TQ^{-1}a$$

$$\beta = b^TQ^{-1}b$$

$$\gamma = a^TQ^{-1}b = b^TQ^{-1}a$$

נסמן משתנה עזר $y = x^Ta$ ולכן נוכל לרשום את בעיית האופטימיזציה כ-

$$(P): \quad \min_x \frac{x^TQx}{y} \qquad \text{s.t} \quad x^Tb = c, \quad y > 0$$

א) על מנת שהבעיה P תהיה בעיה קמורה נדרוש שפונקציית המטרה תהיה קמורה (שהאילוצים יהיו בתחום קמור. נוכל לרשום את הבעיה כ-

$$(P) \quad \min_x \frac{x^TQx}{y} \qquad \text{s.t} \quad x^Tb - c = 0, \quad y > 0, \quad y = x^Ta$$

$$\nabla\left(\frac{x^TQx}{y}\right) = \frac{2Qx}{y}$$

$$\nabla^2\left(\frac{x^TQx}{y}\right) = \frac{2}{y}Q \succ 0 \longrightarrow$$ פונקציית המטרה קמורה.

האילוצים הם על מישור (קמורים ואפינים) וחצי מישור ($y>0$, קמור) ולכן הבעיה (P) הינו בעיה קמורה.

הבעיה הנתונה מקיימת את תנאי slater ולכן תנאי KKT הוא מספיק והכרחי לנקודת מינימום. לכן נרשום את הלגרנז'יאן:

$$(P)\qquad \min_{x,y} \ \frac{x^T Q x}{y}$$
$$\text{s.t.}\quad c - x^T b = 0$$
$$y - x^T a = 0$$
$$y > 0$$

בהינתן y קבוע יש רק אילוץ שוויון כלומר:

$$\ell(x,\mu_1,\mu_2) = \frac{x^T Q x}{y} + \mu_1 (c - x^T b) + \mu_2 (y - x^T a)$$

לפי תנאי KKT:

$$\nabla \ell(x,\mu_1,\mu_2) = \frac{2}{y} Q x - \mu_1 b - \mu_2 a$$

$$\nabla \ell(x^*,\mu_1,\mu_2) = 0 \longrightarrow \frac{2}{y} Q x^* = \mu_1 b + \mu_2 a$$

נשים לב שמכיוון ש- $Q \succ 0$ אז היא הפיכה, כלומר ניתן לבודד את x^*:

$$Q x^* = \frac{1}{2} y (\mu_1 b + \mu_2 a)$$

$$x^* = \frac{1}{2} y Q^{-1} (\mu_1 b + \mu_2 a)$$

הערך האופטימלי נתון ע"י פונקציה $g(y)$

$$g(y) = \frac{x^{*T} Q x^*}{y}$$

נציב את הפתרון האופטימלי רק ב- x^* על מנת שנקבל את הפתרון של הערך האופטימלי באמצעות c ו- y (נקבל מכך את $x^{*T} a$ ו- $x^{*T} b$)

$$g(y) = \frac{x^{*T} Q}{y} \cdot x^* = \frac{x^{*T} Q}{y} \cdot \left(\frac{1}{2} y Q^{-1} (\mu_1 b + \mu_2 a) \right) = \frac{1}{2} x^{*T} Q Q^{-1} (\mu_1 b + \mu_2 a) =$$
$$= \frac{1}{2} x^{*T} I \cdot (\mu_1 b + \mu_2 a) = \frac{1}{2} (\mu_1 x^{*T} b + \mu_2 x^{*T} a) = \frac{1}{2} (\mu_1 c + \mu_2 y)$$

נציב את y ואת c באמצעות μ_1 ו- μ_2 מהאילוצים, כאשר נשים לב לנקודות הבאות:

- $Q \succeq 0 \Rightarrow Q^{-1} \succeq 0$, כלומר, Q^{-1} סימטרית ומתקיים $(Q^{-1})^T = Q^{-1}$
- y הוא סקלר ולכן מתקיים $y^T = y$

$$c = x^{*T} b = \left[\frac{1}{2} y Q^{-1}(\mu_1 b + \mu_2 a)\right]^T b = \frac{1}{2} y (\mu_1 b^T + \mu_2 a^T) Q^{-1} b = \frac{1}{2} y \mu_1 b^T Q^{-1} b + \frac{1}{2} y \mu_2 a^T Q^{-1} b =$$

$$= \frac{1}{2} y (\mu_1 \beta + \mu_2 \gamma)$$

$$y = x^{*T} a = \left[\frac{1}{2} y Q^{-1}(\mu_1 b + \mu_2 a)\right]^T a = \frac{1}{2} y (\mu_1 b^T + \mu_2 a^T) Q^{-1} a = \frac{1}{2} y (\mu_1 \gamma + \mu_2 \delta)$$

כלומר:

$$y = \frac{1}{2} y (\mu_1 \gamma + \mu_2 \delta)$$

$$2 = \mu_1 \gamma + \mu_2 \delta$$

כלומר קיבלנו מערכת משוואות ממנה נוכל לבודד את μ_1 ו- μ_2:

$$\begin{cases} \dfrac{2c}{y} = (\mu_1 \beta + \mu_2 \gamma) \\ 2 = (\mu_1 \gamma + \mu_2 \delta) \end{cases} \longrightarrow \mu_1 = \frac{2 - \mu_2 \delta}{\gamma}$$

$$\frac{2c}{y} = \mu_1 \beta + \mu_2 \gamma = \frac{2 - \mu_2 \delta}{\gamma} \cdot \beta + \mu_2 \gamma$$

$$\left(\frac{2c}{y} - \frac{2\beta}{\gamma}\right) = \mu_2 \left(\gamma - \frac{\delta \beta}{\gamma}\right) \longrightarrow \mu_2 = \frac{\frac{2c}{y} - \frac{2\beta}{\gamma}}{\gamma - \frac{\delta}{\gamma}\beta} = \frac{\frac{2c\gamma}{y} - 2\beta}{\gamma^2 - \delta\beta} =$$

$$= \frac{2c\gamma - 2\beta y}{y(\gamma^2 - \delta\beta)}$$

$$\mu_2 = \frac{2c\gamma - 2\beta y}{y(\gamma^2 - \delta\beta)} \longrightarrow \mu_1 = \frac{2 - \mu_2 \delta}{\gamma} = 2\left(\frac{1 - \frac{c\gamma - \beta y}{y(\gamma^2 - \delta\beta)} \cdot \delta}{\gamma}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{y(\gamma^2 - \delta\beta) + \beta y \delta - c\gamma\delta}{y(\gamma^2 - \delta\beta) \cdot \gamma}\right) = 2 \cdot \left(\frac{y\gamma - c\delta}{y(\gamma^2 - \delta\beta)}\right)$$

נסכם:

$$\mu_1 = \frac{2(y\gamma - c\delta)}{y(\gamma^2 - \delta\beta)}$$

$$\mu_2 = \frac{2(c\gamma - \beta y)}{y(\gamma^2 - \delta\beta)}$$

נציב את הפתרים האלו בערך האופטימלי $g(y)$:

$$g(y)=\frac{x^{*T}Qx^{*}}{y}=\frac{1}{2}(\lambda_1 c+\lambda_2 y)=\frac{1}{2}\left[\frac{2(y\gamma-c\delta)c}{y(\gamma^2-\delta\beta)}+\frac{2(c\gamma-\beta y)}{y(\gamma^2-\delta\beta)}\cdot y\right]=$$

$$=\frac{(y\gamma-c\delta)c+(c\gamma-\beta y)y}{y(\gamma^2-\delta\beta)}=\frac{y\gamma c-c^2\delta+y\gamma c-\beta y^2}{y(\gamma^2-\delta\beta)}=$$

$$=\frac{-\beta y^2+2c\gamma y-c^2\delta}{y(\gamma^2-\delta\beta)}=\frac{\beta y^2-2c\gamma y+c^2\delta}{y(\delta\beta-\gamma^2)}$$

כעת נפתור את בעיית האופטימיזציה החדשה לפי ה- y:

$$\min_{y>0} g(y)$$

$$g(y)=\frac{\beta y}{(\delta\beta-\gamma^2)}+\frac{c^2\delta}{\delta\beta-\gamma^2}\cdot y^{-1}-\frac{2c\gamma}{\delta\beta-\gamma^2}$$

$$\frac{dg(y)}{dy}=\frac{\beta}{\delta\beta-\gamma^2}-\frac{c^2\delta}{y^2(\delta\beta-\gamma^2)}=0$$

$$y^2=\frac{c^2\delta}{\beta}\longrightarrow y=\pm\sqrt{\frac{c^2\delta}{\beta}}=\pm c\sqrt{\frac{\delta}{\beta}}$$

מכיוון שלפי הגדרנו $y>0$ אז: $y=c\sqrt{\frac{\delta}{\beta}}$.

נראה שהפתרון שמצאנו הוא אכן מינימום עבור $g(y)$:

$$\frac{d^2g(y)}{dy^2}=\frac{2c^2\delta}{y^3(\delta\beta-\gamma^2)}$$

נשים לב שמתקיים: $c^2>0$

$\delta=a^TQ^{-1}a>0$ (מכיוון ש- $Q^{-1}>0$)

$\delta\beta>\gamma^2$

$y^3>0$ (מכיוון ש- $y>0$)

כלומר הנגזרת השניה חיובית ולכן הנקודה שמצאנו $y^{*}=c\sqrt{\frac{\delta}{\beta}}$ היא אכן נקודת מינימום.

נציב את y^* על למצוא את הערך האופטימלי :

$$g(y^*) = \frac{\beta \cdot c^2 \cdot \frac{\delta}{\beta} - 2c\gamma \cdot c\sqrt{\frac{\delta}{\beta}} + c^2\delta}{c\sqrt{\frac{\delta}{\beta}}\left(\delta\beta - \gamma^2\right)} =$$

$$= \frac{2c^2\delta - 2c^2\gamma\sqrt{\frac{\delta}{\beta}}}{c\sqrt{\frac{\delta}{\beta}}\left(\delta\beta - \gamma^2\right)} = 2c \cdot \frac{\delta - \gamma\sqrt{\frac{\delta}{\beta}}}{\sqrt{\frac{\delta}{\beta}}\left(\delta\beta - \gamma^2\right)} =$$

$$= 2c \cdot \frac{\delta\sqrt{\beta} - \gamma\sqrt{\delta}}{\sqrt{\delta}\left(\delta\beta - \gamma^2\right)} = 2c \cdot \frac{\sqrt{\delta}\left(\sqrt{\delta\beta} - \gamma\right)}{\sqrt{\delta}\left(\sqrt{\delta\beta} - \gamma\right)\left(\sqrt{\delta\beta} + \gamma\right)} = \frac{2c}{\sqrt{\delta\beta} + \gamma} \,//$$

זהו הערך האופטימלי של הבעיה מכיוון שתנאי Slater מתקיימים עבור הבעיה ולכן נקודת המינימום של הבעיה היא נקודת KKT.

תרגיל 4

$$\min_x \left\{ \frac{1}{3}x^3 - ax \right\} \qquad x>0,\ a>0$$

1. מציאת פתרון הבעיה

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax$$

הפונקציה רציפה וגזירה פעמיים ולכן נחפש את המינימום שלה ע"י גזירה:

$$\frac{df(x)}{dx} = x^2 - a = 0$$

$$x = \pm\sqrt{a}$$

ע"פ נתוני הבעיה x חיובי ולכן נבדוק אם הפתרון $x=\sqrt{a}$ אכן הוא מינימום לפונקציה:

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = 2x$$

$$\frac{d^2f(x=\sqrt{a})}{dx^2} = 2\sqrt{a} > 0 \longrightarrow$$

$x^*=\sqrt{a}$ הוא מינימום לפונקציה ולכן הוא פתרון הבעיה.

2. מציאת האיטרציה ה-k ע"פ שיטת ניוטון כאשר גודל הצעד הוא $t_k=t=1$

האיטרציה ה-k ע"פ אלגוריתם ניוטון היא מהצורה:

$$\boxed{\begin{aligned} x_{t_k} &= x_{t_{k-1}} + t_k d_{k-1}(x_{k-1}) \\ d_{k-1} &= -\nabla^2 f(x_t)^{-1} \nabla f(x_t) \end{aligned}}$$

כאשר האיטרציות יהיו מהצורה:

$$\nabla f(x_k) = x^2 - a$$

$$\nabla^2 f(x_k) = 2x$$

$$d_{k-1} = -\nabla^2 f(x_k)^{-1} \nabla f(x_t) = -\frac{(x^2-a)}{2x} = \frac{a-x^2}{2x}$$

$$x_k = x_{k-1} + \frac{a - x_{k-1}^2}{2x_{k-1}} = x_{k-1} - \frac{1}{2}x_{k-1} + \frac{a}{2x_{k-1}} = \frac{1}{2}\left(x_{k-1} + \frac{a}{x_{k-1}}\right)$$

$$x_k = \frac{1}{2}\left(x_{k-1} + \frac{a}{x_{k-1}}\right)$$

3. הוכחה כי אם $x_{k-1}>\sqrt{a}$ אז מתקיים $x_{k-1}>x_k>\sqrt{a}$

נשים לב ש- $\sqrt{a}$ הוא הפתרון של הסדרה ($x^*=\sqrt{a}$)

נסתכל על הסדרה

$$x_k=\frac{1}{2}\left(x_{k-1}+\frac{a}{x_{k-1}}\right)$$

נוכיח בשני שלבים:

(I) נוכיח כי אם $x_{k-1}>\sqrt{a}$ אז מתקיים $x_k>\sqrt{a}$.

על פי נוסחת הסדרה תמיד מוסיפים ל x_{k-1} מספר חיובי $\frac{a}{x_{k-1}}$ לכן נציב את $x_{k-1}=\sqrt{a}$ כחסם תחתון:

$$x_k=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a}+\frac{a}{\sqrt{a}}\right)=\sqrt{a}$$

הוכחנו כי גם $x_{k-1}>\sqrt{a}$ אז $x_k>\sqrt{a}$

(II) נוכיח כי גם $x_{k-1}>\sqrt{a}$ אז $x_k<x_{k-1}$

מכאן כבר מצוין שהפתרון מתכנס ל- $x^*=\sqrt{a}$ אז $x_k<x_{k-1}$. נוכיח זאת:

$$x_{k-1}-x_k=x_{k-1}-\frac{1}{2}\left(x_{k-1}+\frac{a}{x_{k-1}}\right)=\frac{1}{2}\left(x_{k-1}-\frac{a}{x_{k-1}}\right) \quad (*)$$

מכיוון ש- $x_{k-1}>\sqrt{a}$ אז הביטוי ב- $(*)$ חיובי, כלומר:

$$x_{k-1}-x_k>0$$

$$x_{k-1}>x_k$$

על ידי הוכחת שני השלבים הוכחנו כי אם $x_{k-1}>\sqrt{a}$ אז מתקיימים:

$$\begin{cases} x_k>\sqrt{a} \\ x_k<x_{k-1} \end{cases} \longrightarrow \sqrt{a}<x_k<x_{k-1}$$

4. הוכחה כי מתקיים $\delta_k=\frac{\delta_{k-1}^2}{2(1+\delta_{k-1})}$ כאשר $x_k=(1+\delta_k)\sqrt{a}$

נתון כבר שהגדרנו את x_k:

$$x_k=(1+\delta_k)\sqrt{a}$$

כלומר נוכל לבטא את δ_k באמצעות x_k:

$$x_k=(1+\delta_k)\sqrt{a} \longrightarrow \delta_k=\frac{x_k}{\sqrt{a}}-1$$

נציב את כלל הנוסחה עבור x_k:

$$d_k = \frac{x_k}{\sqrt{a}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{2}\left(x_{k-1} + \frac{a}{x_{k-1}}\right) - 1$$

כאשר: $x_{k-1} = \sqrt{a}(1+d_{k-1})$

$$= \frac{1}{2\sqrt{a}}\left(\sqrt{a}(1+d_{k-1}) + \frac{a}{\sqrt{a}(1+d_{k-1})}\right) - 1 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+d_{k-1} + \frac{1}{1+d_{k-1}}\right) - 1 = \frac{(1+d_{k-1})^2 + 1 - 2(1+d_{k-1})}{2(1+d_{k-1})} =$$

$$= \frac{1+2d_{k-1}+d_{k-1}^2+1-2-2d_{k-1}}{2(1+d_{k-1})} = \frac{d_{k-1}^2}{2(1+d_{k-1})}$$

כלומר הוכחנו שמתקיים:

$$d_k = \frac{d_{k-1}^2}{2(1+d_{k-1})}$$

5. הוכחה כי מתקיים $d_k \le \frac{d_{k-1}}{2}$

$$d_k = \frac{d_{k-1}^2}{2(1+d_{k-1})} = \frac{(1+d_{k-1})^2 - 2d_{k-1} - 1}{2(1+d_{k-1})} = \frac{1+d_{k-1}}{2} - \frac{1+2d_{k-1}}{2(1+d_{k-1})} =$$

$$= \frac{1+d_{k-1}}{2} - \frac{1+d_{k-1}}{2(1+d_{k-1})} - \frac{d_{k-1}}{2(1+d_{k-1})} =$$

$$= \frac{1+d_{k-1}}{2} - \frac{1}{2} - \frac{d_{k-1}}{2(1+d_{k-1})} = \frac{d_{k-1}}{2} - \frac{d_{k-1}}{2(1+d_{k-1})} \quad (**)$$

מכיוון שנתון ש- $x_k \ge \sqrt{a}$ אז מתקיים לפי סעיף 5:

$$x_{k-1} = (1+d_{k-1})\sqrt{a} > x_k = (1+d_k)\sqrt{a} > \sqrt{a}$$

$$(1+d_{k-1})\sqrt{a} > \sqrt{a} \longrightarrow d_{k-1} \ge 0$$

כלומר הביטוי $\left(-\frac{d_{k-1}}{2(1+d_{k-1})}\right) \le 0$ שלילי, ולכן אם נחסיר אותו ב- (**) נשאר עם הביטוי, ולכן

נקבל:

$$d_k = \frac{d_{k-1}}{2} - \frac{d_{k-1}}{2(1+d_{k-1})} \le \frac{d_{k-1}}{2}$$

נוכיח כי האלגוריתם מתכנס ל- $\sqrt{a}$, נשתמש בנוסחה עבור השגיאה:

$$x_k=(1+d_k)\sqrt{a}$$

$$d_k \le \left(\frac{1}{2}\right) d_{k-1} \le \left(\frac{1}{2}\right)^2 d_{k-2} \le \ldots \le \left(\frac{1}{2}\right)^k d_0$$

כלומר עבור k גדול השגיאה מתכנסת לאפס:

$$k \gg 1 \longrightarrow d_k=0 \longrightarrow x_k=(1+0)\sqrt{a}=\sqrt{a}$$

6. הוכחה כי $d_k \le \dfrac{d_{k-1}^2}{2}$

מהסעיף הקודם מתקיים:

$$(1+d_{k-1})\sqrt{a} \ge (1+d_k)\sqrt{a}$$

$$0<d_k<d_{k-1}$$

כלומר על פי נוסחת השגיאה:

$$d_k=\frac{d_{k-1}^2}{2(1+d_{k-1})}$$

כלומר אם נקטין את המכנה ע"י נשמיט את הביטוי לכן מכיוון ש- $0<d_{k-1}$ מתקיים:

$$1+d_{k-1} \ge 1 \longrightarrow d_k=\frac{d_{k-1}^2}{2(1+d_{k-1})} \le \frac{d_{k-1}^2}{2}$$

7. כמה איטרציות צריך בערך כדי להגיע לדיוק של 10 ספרות אחרי הנקודה בכל אחת מהשיטות

מהרצת קוד מלא של שבע ערכים נרצה למצוא את k עבורו מתקיים:

$$a_{k-1}-a_k<\varepsilon$$

$$(1+d_{k-1})\sqrt{a}-(1+d_k)\sqrt{a}<\varepsilon$$

$$(d_{k-1}-d_k)\sqrt{a}<\varepsilon$$

עבור כל אחת מהשיטות מקבלים:

(1) $d_k=\dfrac{d_{k-1}^2}{2(1+d_{k-1})}$ $\longrightarrow$ מתכנס לאחר 7 איטרציות

(2) $d_k=\dfrac{d_{k-1}}{2}$ $\longrightarrow$ מתכנס לאחר 165 איטרציות

(3) $d_k=\dfrac{d_{k-1}^2}{2}$ $\longrightarrow$ מתכנס לאחר 7 איטרציות

תרגיל 5

$$(P_1)\quad \min_{x,y}\left\{ x^2+y^2+5x-10y \;\middle|\; \left|x-\frac{y}{2}-2\right| < 1 \right\}$$

$$(P_2)\quad \min_{x,y}\left\{ (x-3)^2+y^2+3x-2y \;\middle|\; (x-1)^2+(y-2)^2<9,\ x\geq 2,\ y\geq 0 \right\}$$

1. הוכחה כי בעיה P_1 קמורה

נרשום את פונקציית המטרה ואת האילוצים:

$$(P_1)\quad \min_{x,y}\ f_1(x,y)=x^2+y^2+5x-10y$$
$$\text{s.t}\quad x-\frac{y}{2}-2<1$$
$$x-\frac{y}{2}-2>-1$$

$$\longrightarrow \begin{cases} f_1(x,y)=x^2+y^2+5x-10y \\ g_1(x,y)=x-\frac{y}{2}-3 \\ g_2(x,y)=\frac{y}{2}-x+1 \end{cases}$$

פונקציית המטרה $f(x,y)$ גזירה פעמיים ברציפות, לכן ניתן לרשום את ההסיאן שלה:

$$\nabla^2 f_1(x,y)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=2I \longrightarrow \nabla^2 f_1(x,y)\succ 0$$

ההסיאן הוא מטריצה חיובית מוגדרת, לכן פונקציית המטרה קמורה.

נבדוק את האילוצים $g_1(x,y)$ ו- $g_2(x,y)$, האילוצים הם אפיניים לכן קמורים. מכיוון שכל אחד מהאילוצים קמור אז גם החיתוך שלהם קמור.

פונקציית המטרה קמורה והאילוצים קמורים לכן הבעיה P_1 קמורה.

הוכחה כי בעיה P_2 קמורה

נרשום את פונקציית המטרה והאילוצים:

$$(P_2)\quad \min_{x,y}\ f_2(x,y)=(x-3)^2+y^2+3x-2y$$
$$\text{s.t}\quad (x-1)^2+(y-2)^2\leq 9$$
$$x\geq 2$$
$$y\geq 0$$

$$\longrightarrow \begin{cases} f_2(x,y)=(x-3)^2+y^2+3x-2y \\ h_1(x,y)=(x-1)^2+(y-2)^2-9\leq 0 \\ h_2(x,y)=2-x \\ h_3(x,y)=-y \end{cases}$$

פונקצית המטרה גזירה פעמיים ברציפות ולכן נרשום את ההסיאן שלה :

$$\nabla^2 f_2(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I \longrightarrow \nabla^2 f_2(x,y) \succeq 0$$

ההסיאן הוא פונקציה חיובית מוגדרת ולכן

פונקצית המטרה קמורה

נבדוק את האילוצים $h_1(x,y)$, $h_2(x,y)$ ו-$h_3(x,y)$.

- $h_1(x,y)$ באותה צורה כמו פונקצית המטרה, הוא גזירה ברציפות פעמיים ולכן ההסיאן שלה:
$\nabla^2 h_1(x,y) = 2I \succeq 0$

כלומר $h_1(x,y)$ קמורה.

- $h_2(x,y)$ פונקציה אפינית ולכן קמורה.
- $h_3(x,y)$ הוא מישור ולכן קמורה

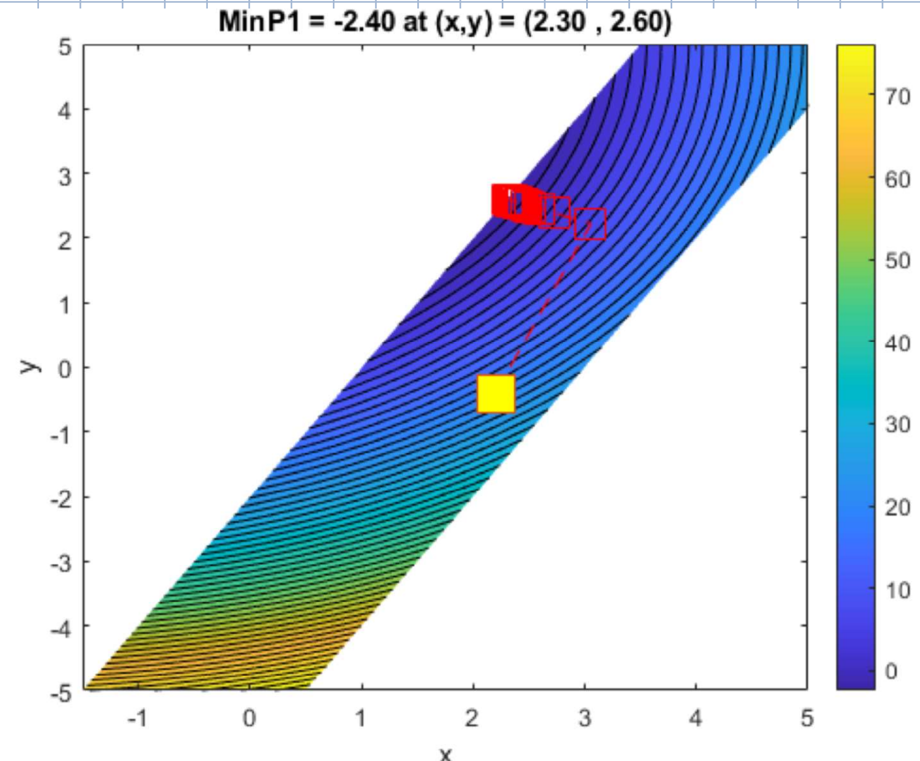
התחום של שלושת האילוצים הוא גם כן קמור כחיתוך פונקציות קמורות ולכן הבעיה

כן קמורה.

2. פתרון הבעיה P_1 באמצעות אלגוריתם barrier עם פונקציית מחסום לוגריתמי

נגדיר P_{1t} בעיית אופטימיזציה חדשה המוגדרת:

$$(P_{1t})\quad \min\left\{ x^2+y^2+5x-10y-\frac{1}{t}\ln\left(\frac{y}{2}-x+3\right)-\frac{1}{t}\ln\left(x-\frac{y}{2}-1\right)\right\}$$



הבעיה הורצה בקוד מטלב וראינו את התנאי התחלה (הריבוע הצהוב) ואת ההתכנסות לאזור המינימום כאשר פתרון הבעיה בנקודה:

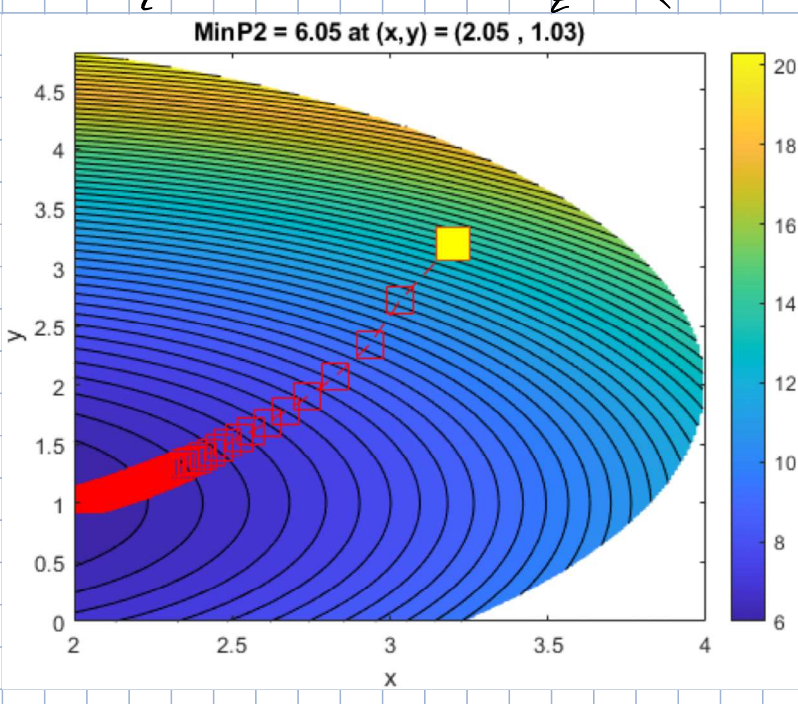
$X_{opt}: (2.3, 2.6)$

min value: -2.4

2. פתרון הבעיה P_2 באמצעות אלגוריתם barrier עם פונקציית מחסום לוגריתמי

נגדיר P_{2t} בעיית אופטימיזציה חדשה המוגדרת:

$$(P_{2t})\quad \min\left\{ (x-3)^2+y^2+3x-2y-\frac{1}{t}\ln\left(9-(x-1)^2-(y-2)^2\right)-\frac{1}{t}\ln(x-2)-\frac{1}{t}\ln(y)\right\}$$



הבעיה הורצה בקוד מטלב וראינו את התנאי התחלה (הריבוע הצהוב) ואת ההתכנסות לאזור המינימום כאשר פתרון הבעיה בנקודה:

$X_{opt}: (2.05, 1.03)$

min value: 6.05