שיטות חישוביות באוטפיטמיזציה 046197  
תרגיל בית מספר 2

Alexander Shender: 328626114

Eliran Cohen: 204187801

# תרגיל מספר 1 :

משפט : קמורה אם ורק אם קמורה לכל

נוכיח את המשפט בשני הכיוונים

## קמורה

נרצה להראות שפונקציה קמורה לפי הגדרה, לכן עבור שתי נקודות ו -

נסמן : ונקבל פונקציה מהצורה : כלומר,

*כלומר הוכחנו שאם קמורה פונקציה קמורה לפי הגדרה*

## קמורה

נרצה להראות שפונקציה קמורה לפי הגדרה, לכן עבור שתי נקודות ו -

*כלומר הוכחנו שאם קמורה פונקציה קמורה לפי הגדרה*

# תרגיל מספר 2 :

## חישוב הגרדיאנט וההיסאן של

## האם קמורה בהינתן ש - אינה קמורה

*אם אינה קמורה אז מתקיים :*

*נראה איך זה משפיע על :*

*כלומר קיימים x,y בהם הפונקציה לא קמורה ולכן f אינה קמורה.*

## הוכחה ש - קמורה אם

*נבדוק אם מטריצת ההיסאן היא אי שלילית מוגדרת לכל x :*

נראה את השפעת כלל הגורמים על ההיסאן :

1. הוא סקלר חיובי לכל x מכיוון ש -
2. היא חיובית מוגדרת מכיוון שזו תוצאה של מכפלת סקלר חיובי במטריצה חיובית מוגדרת
3. היא מטריצה חיובית מוגדרת מכיוון שהיא מכילה את הערכים הריבועיים של
4. היא חיובית מוגדרת מכיוון שזו תוצאה של מכפלת סקלר חיובי במטריצה חיובית מוגדרת
5. היא חיובית מוגדרת מכיוון שהיא סכום של שתי מטריצות חיוביות מוגדרות

כלומר לכל x ולכן קמורה

## בדיקה האם קמורה עבור מטריצות Q ו – R הנתונות

תחילה נראה כי על ידי מציאת הערכים העצמיים של המטריצות :

נבדוק קמירות על ידי ההיסאן :

נבדוק גורם גורם בסכום על ווקטור *:*

המטריצה לא סימטרית ולכן הסכום שלה עם שאר מטריצות סימטריות ב - גם כן לא תהיה סימטרית, ולכן לא אי שלילית מוגדרת , כלומר לא קמורה.

נפריך בדוגמא נגדית עבור :

לא אי שלילית מוגדרת , כלומר לא קמורה.

# תרגיל מספר 3 :

## הוכחה ש - קמורה עבור

נגזור את הפונקציה פעמיים כדי לראות אם היא אי שלילית בתחום הנתון :

*הפונקציה מוגדרת בתחום והנגזרת השניה אי שלילית בתחום :*

*כלומר הפונקציה קמורה בתחום :*

## נראה כי מתקיים עבור

נתבונן בפונקציה המתארת את ההפרש בין הפונקציות :

נראה כי הפונקציה אי שלילית בתחום : .

הנגזרת חיובת בתחום כלומר בתחום זה היא עולה

כמו כן נשים לב ש :

*לכן ההפרש בין הפונקציות מתחיל ב-0 וההפרש גדל בתחום כלומר מתקיים .*

## הראו כי קעורה עבור

*נתבונן בפונקציה :*

*הפונקציה היא פונקציה קמורה ועולה בתחום הנתון*

*הפונקציה היא פונקציה קמורה*

*ולכן הרכבת שתי הפונקציות היא פונקציה קמורה בתחום הנתון.*

*לכן הפונקציה היא פונקציה קמורה כסכום של שתי פונקציות קמורות עם מקדמים חיוביים.*

*לכן , הפוקנציה הנגדית : היא פונקציה קעורה בתחום הנתון.*

## הוכחה כי היא פונקציה קמורה בתחום

נחשב את הנגזרת השניה של הפונקציה כדי להראות שהיא תמיד אי שלילית

נחשב את הנגזרות של

נציב ב -

בסעיף ב' הוכחנו כי מתקיים בתחום :

התחום הוא אותו תחום ולכן נציב ב – כחסם תחתון את :

*הוכחנו כי : בתחום*  ולכן בתחום זה הפונקציה קמורה.

## Question 4.

Prove that the following function is convex for :

We will use the composition statement from the book from Stephen Boyd. (page 86), which says:

If is concave and positive, then is convex.

Indeed: Let’s take concave positive function (). The composition function will be , which is convex (, and decreasing () for . Then:

Showing that its second derivative is positive:

In our case, proving that is convex is equal to proving that is concave.

From the previous statement, since is positive ( and concave, it is equal to proving that is convex. Rewriting. Need to prove:

Is convex.

Using exp and log trick to turn multiplication into sum:

Since is a concave function for positive values, thus is convex. So,

Is the sum of convex functions, thus is also convex.

Further, is also convex, since it is a composition of 2 convex functions, where is convex, and is convex and non-decreasing. Thus, we prove that is convex, thus is also convex.

Another way to prove it is to use the Hessian matrix of the original function, and prove that it’s PSD.

## Question 5.

Need to prove:

Let’s assume there’s a point . Extending:

Thus,

Since the function is convex, the following inequality holds:

Only if the conditions for is met (. And that those coefficients sum to 1.

And indeed:

And:

So we get:

Multiply by :

Which is what is required.

## Question 6.

Given function in . .

### 

### 

*First direction.*

Expressing with the convex combination of :

We can then express and :

The function at point :

It is given that the function is convex, thus the following holds:

Inserting and back:

We multiply by . Since , it is a negative number, so we change the direction of inequality.

Which proves the statement.

*Second direction*

Given some 3 points , which satisfy and satisfy:

Prove that is convex.

Solution:

We will try to use the same characteristic of the convex function. Since , we can express as a combination of , .:

We will use the same derivations that we got from previous direction proof:

From this expression:

Divide both by :

Putting :

And since , it proves that the function is convex.

### 

If is convex and , then this holds:

We can use the expression from previous paragraph, reorganize it, and get:

Add and subtract :

Divide by (which is negative, changing sign):

Which proves the left part of the inequality.

To obtain the second part of the inequality, instead of adding and subtracting , we add and subtract . And follow same steps.

### 

Given:

Function is convex.

Prove:

We use the results from paragraph 3. From the definition of the gradient (approximation):

So we can mark the gradients:

Since: and using the inequation from paragraph 3:

Since and using the inequation from paragraph 3:

Summing all together, we obtain:

Which is what was required.

### 

Prove that if convex, if and only if for all is not decreasing.

Solution:

*Direction 1*

is convex. We will use the previous statement from paragraph 3 again.

*Case 1.*

We assume ; .

Then:

Thus:

Which means that the gradient is not decreasing.

*Case 2.*

We assume ; .

Then:

Thus,

Which means the gradient is not decreasing.

*Case 3.*

We assume ; .

Then:

Thus,

Which means the gradient is not decreasing.

*Direction 2*

is not decreasing.

Let’s take 3 points, s.t.

From the property of not decreasing gradient, we get:

Which means:

We multiply by which is negative. Change sign.

We can express as a convex combination of and :

Then:

Pasting:

We can divide both parts by . Since its negative, we change the sign:

And replace the with the declaration:

Which is the basic characteristic of the convex function.

Thus, is convex.