שאלה ד

$$\|\underline{X}^{ZS}\|_0 = \text{num of non-zero elements of } \underline{X}^{ZS}$$

(א) נספור את כמות האיברים השונים מאפס ונקבל:

$$\|Z^{ZS}\|_0 = \underline{\underline{7}}$$

(ב) שחור = 1
לבן = 0

(i) לאחר הפעלת מסנן 5x5 מיצוע נקבל ~~שפי~~ הגדלה
ב ~~...~~ $\|\tilde{Z}^{ZS}\|_0$, הסיבה לכך היא שכיוון באובייקטים
הקטנים (כמו כוכבים לבנים בין שערות של מסיפן)
והסכוי להיות שחורים גם כן (בעלי ערך 1).
וכמות של מגוונים רבים לבנים בתוך סביבה שחורה
וכך הגובה ממרכז כפון.

(ii) נעבור ב ניסוח של תיקון גאמא:

$$Out = A\, I_{in}^{\gamma}$$

ערכי התמונה מוגדרים - 1 ; 0.
הם לא יושפעו מתיקון הגאמא, לכן $\|\tilde{Z}^{ZS}\|_0$
לא ישתנה.

(iii) נעבור בניסוח של סגירה:

$$close = (A \oplus B) \ominus B$$

פעולה זאת ~~...~~ מכרת כאמור ש"סוגרת"
חורים, לכן גם כאן $\|\tilde{Z}^{ZS}\|_0$ יגדל.

(iv) $\tilde{w} = \arg\min_{\tilde{w}} \left[\|w-\tilde{w}\|^2 + \lambda\, TV(\tilde{w})\right]$ סכ λ
TV ידוע כמסנן שנוטל לאיבר שחולה, אך אומר
שפות. כאן אין לנו רעש. אך עם λ
מספיק גדול, אנו נקבל שינוי, שקשה להגיד מה הוא.
שינויים מקומיים (באזור בשער של הפוסיב) כנראה יהיו

הבעיה שהמשערך ינסה למתן, כי הוא מוסיף ל-TV בעוד של כמה פיקסלים. כנראה נדבר להגבלה של $\|\tilde{x}\|_0$.

(ג) נתון:

$$\tilde{Y} = \tilde{X} + \tilde{N}$$

$$P(X) = e^{-\lambda \|\tilde{X}\|_0}$$

משמעות: ככל שיש יותר ערכי non-zero, סביר לכן תמונה הינו יותר נמוך.

נמצא משערך MAP:

$$\tilde{X}_{MAP} = \arg\max_{\tilde{X}} P(Y|X)\, P(X)$$

$$(Y-\tilde{X}) \sim N(0; I) \qquad \text{ידוע}$$

נקבל:

$$\tilde{X}_{MAP} = \arg\max \exp\left\{-\frac{1}{2}(Y-X)^T I^{-1}(Y-X)\right\} \exp\left\{-\lambda\|\tilde{X}\|_0\right\}$$

נעבור לבעיית מינימיזציה: (נפעיל log)

$$\tilde{X}_{MAP} = \arg\min \left\{ \frac{1}{2}(Y-X)^T(Y-X) + \lambda\|\tilde{X}\|_0 \right\}$$

נמצא נקודת מינימום:

$$\frac{\partial}{\partial x}\{\ \} = \frac{1}{2}\cdot(-2)(Y-X) + \lambda\frac{\partial}{\partial x}\|\tilde{X}\|_0 = 0$$

$$\tilde{X}_{MAP} - Y + \lambda\frac{\partial}{\partial x}\|\tilde{X}\|_0 = 0$$

$$\boxed{\tilde{X}_{MAP} = Y - \lambda\frac{\partial}{\partial x}\|\tilde{X}\|_0}$$

כתשובה לשאלה:

$$f(Y;X) = \frac{1}{2}(\tilde{Y}-\tilde{X})^T(\tilde{Y}-\tilde{X}) = \frac{1}{2}\|\tilde{Y}-\tilde{X}\|_2$$

$$g(X) = \lambda\|\tilde{X}\|_0$$

(ד) כאשר $\lambda=0$, אין לנו שום מידע שיעזור לשערך תמונה מקורית, ונקבל $\tilde{X}_{MAP} = Y$

כאשר $\lambda\to\infty$, נקבל תמונה הכי "מבוררת" מבחינת מודל ספרסיות, שהיא תמונה לגמרי עם ערכים 0, שהיא לבנה במשולב הרעש. נקבל תמונה לבנה.

(ה) $\lambda = 7$; $Y = Z$

$$\hat{X}_{MAP} = Y - 7\frac{\partial}{\partial x}\|x^{cs}\|_0$$

עלינו להעריך את ערכו של $\frac{\partial}{\partial x}\|x^{cs}\|_0$.

נניח, כי יש תמונה בעלת פיקסל אחד. אזי הנגזרת של ערך הפיקסל ב־1 מתקבלת מתוך $\|x^{cs}\|_0$, $1 = \frac{\partial}{\partial x}$. אחרת $=0$.

לכן:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}x\right) \neq 0 \ ; \ x = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\|x^{cs}\|_0 = 1$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}x\right) = 0 \ ; \ x \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\|x^{cs}\|_0 = 0.$$

~~כלומר, כל ערך הוא יכול~~

בתמונה Z, אם נסתכל את ערכי תמונה ב־1, נקבל הנגזרת ב־$\|z^{cs}\|_0$ ב־5. כלומר $\frac{\partial}{\partial z}\|z^{cs}\|_0$, לכן נקבל

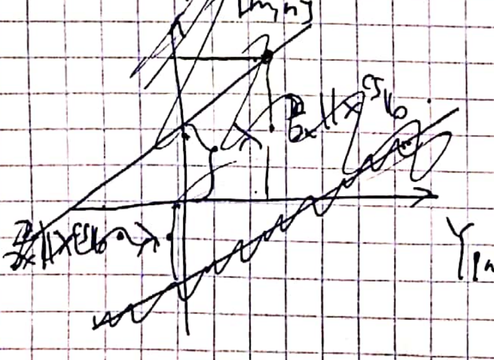
$$\hat{X}_{MAP} = Z - 7\cdot 5 = Z - 35$$

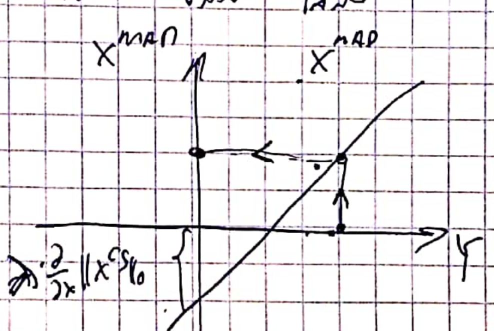
נקבל תמונה Z עם כל הערכים 0.

(ו)

- לא ניתן לבצע פעולה נגזרת, כיוון שעלינו לדעת את הערכים של כל התמונה המקוריים. זוהי פעולה נתונה, אך כן נוכל לבצע זאת, כי פעולה לא תלויה בתמונה.
- אנו מספרים מכל פיקסל את ערכו מוכפל בקבוע, לכן כן, זה אפשרי לבצע את הפעולה כמערכת הינה נגזרת עם פילטר 1x1.

(ז) נקבל הבחנה של ערכו





שאלה 4

(א) נתון: $Y = H(x+1)$

נניח משערך LS פשוט:

$$H^{-1}Y = x+1$$

$$\hat{X}_{LS} = H^{-1}Y - 1$$

במקרה בו H אינה הפיכה:

$$Y = Hx + H$$

$$Y - H = Hx \quad / \cdot H^T$$

$$H^T(Y-H) = H^T H x \quad / \cdot (H^T H)^{-1}$$

$$(H^T H)^{-1}(H^T Y - H^T H) = x$$

$$(H^T H)^{-1} H^T Y - 1 = x$$

$$\boxed{\hat{X}_{LS} = (H^T H)^{-1} H^T Y - 1}$$

(ב) נתון כעת:

$$Y = H(x+1) + 2w$$

כאשר: $w \sim N(\underline{\mu}, \sigma_w^2 I)$

נחלק את המשוואה לנוחות:

$$\frac{1}{2}Y = \frac{1}{2}H(x+1) + w$$

כמו כן ידוע פילוג apriori:

$$B = P_x(x) \propto \exp\left\{-\frac{\|D_x x\|_2^2 + \|D_y x\|_2^2}{2\sigma_s^2}\right\}$$

נמצא את משערך ה- MAP: (של תמונה x בהינתן Y).

$$\hat{X}_{MAP} = \arg\max \underbrace{P_{Y|X}(y|x)}_{A} \underbrace{P_X(x)}_{B}$$

$$A = P_{Y|X}(y|x) = \underbrace{C\exp\left[-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)\right]}_{\text{מהגדרה}} =$$

$$= C\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}Y - \frac{1}{2}H(x+1) - \underline{\mu}_w\right)^T \left[\sigma_w^2 I\right]^{-1} \left(\left(\frac{1}{2}Y - \frac{1}{2}H(x+1) - \mu_w\right)\right)\right] =$$

$$= C\exp\left[-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}(Y-H(x+1))-\mu_w\right)^T\left[\sigma_w^2\Sigma\right]^{-1}\left(\frac{1}{2}(Y-H(x+1))-\mu_w\right)\right]\right] = A$$

נהפוך את הבעיה לבעיית מינימיזציה:

$$P_{(Y|X)}P_{(X)} = C_1 C_2 \exp\left(\left[-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}(Y-H(x+1))-\mu_w\right)^T\left[\sigma_w\Sigma\right]^{-2}\left(\frac{1}{2}(Y-H(x+1))-\mu_w\right)\right]\right]\cdot\right.$$

$$\cdot\exp\left\{-\frac{\|D_x x\|_2^2+\|D_y x\|_2^2}{2\sigma_s^2}\right\}$$

$$\hat{X}_{map} = \arg\min\left\{\left[\frac{1}{2}(Y-H(x+1))-\mu_w\right]^T\left[\sigma_w\Sigma\right]^{-2}\left[\frac{1}{2}(Y-H(x+1))-\mu_w\right] + \frac{\|D_x x\|_2^2+\|D_y x\|_2^2}{\sigma_s^2}\right\} = C$$

כאשר הוצאנו $+\frac{1}{2}$ משנו במיקום המונה.

$$\hat{X}_{map} = \arg\min\left[J(x)\right]$$

נחשב נגזרות B

$$\|D_x X\|_2^2 = (D_x X)^T(D_x X)$$

$$\|D_y X\|_2^2 = (D_y X)^T(D_y X)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\|D_x X\|_2^2+\|D_y X\|_2^2\right] = 2D_x^T D_x X + 2D_y^T D_y X$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[C\right] = -\cancel{2}H^T(\sigma_w\Sigma)^{-2}\left(\frac{1}{\cancel{2}}(Y-H(x+1))-\mu_w\right) + \cancel{2}\left[D_x^T D_x + D_y^T D_y\right]X\cdot\frac{1}{\sigma_s^2} = 0$$

$$-\frac{(\sigma_w\Sigma)^{-2}}{2}H^T(Y-H(x+1)) + \sigma_w\Sigma^{-2}H^T\mu_w + \frac{1}{\sigma_s^2}\left[D_x^T D_x + D_y^T D_y\right]X = 0$$

$$\left[+\frac{(\sigma_w\Sigma)^{-2}}{2}H^T H + \frac{1}{\sigma_s^2}(D_x^T D_x + D_y^T D_y)\right]X =$$

$$= (\sigma_w\Sigma)^{-2}H^T\left[\frac{1}{2}(Y-H)-\mu_w\right]$$

$$\left[\frac{1}{2(\sigma_w\Sigma)^2}H^T H + \frac{1}{\sigma_s^2}(D_x^T D_x + D_y^T D_y)\right]X = \left[\frac{1}{2(\sigma_w\Sigma)^2}H^T(Y-H-2\mu_w)\right]$$

$$\hat{X}_{map} = \left[\frac{1}{2(\sigma_w\Sigma)^2}H^T H + \frac{1}{\sigma_s^2}(D_x^T D_x + D_y^T D_y)\right]^{-1}\left[H^T\left(\frac{1}{2(\sigma_w\Sigma)^2}(Y-H-2\mu_w)\right)\right] \Big/ \cdot 2(\sigma_w\Sigma)^2$$

$$\boxed{\hat{X}_{map} = \left[H^T H + 2\frac{\sigma_w^2}{\sigma_s^2}(D_x^T D_x + D_y^T D_y)\right]^{-1}H^T(Y-H-2\mu_w)}$$

(ג) נראה מקרי קיצון:

(1) כאשר $\sigma_w^2 = 0$, כלומר רעש דטרמיניסטי, נקבל שערך:

$$\hat{x}_{MAP} = (H^T H)^{-1} H^T (y - \mu - z\mu_w)$$

אם הממוצע של הרעש הוא $0 = \mu_w$, נקבל תוצאה מסעיף (א).

כאשר σ_w^2 גדל, ההשפעה של פיזורי הנגזרות יותר גדולה על השערוך.

(2) כאשר σ_x גדול, כלומר Var של פילוג הנגזרות גדול, נקבל שפיזור של הנגזרות יהיה משפיע על השערוך.

כאשר σ_x קטן, כלומר ~~[illegible]~~ אין כמעט נגזרות בתמונה (ממוצע=0), הפיזור של הנגזרות יהיה דומיננטי בשערוך, נרצה לשערך תמונה כמה שיותר "שטוחה" (בלי גרדיאנטים)

(3) נתון: $N \sim (0; \sigma^2 I)$; $Y = NX$

<u>בת"ס</u> - N, X

$$\begin{bmatrix} y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \end{bmatrix} \qquad X \in [K \times h, 1]$$

$$Var(Y|X) = Var(N_{11}X_1 + N_{12}X_2 + \dots N_{K\times h, K\times h} X_{h\times h} | X)$$

בת"ס N, X

$$= Var(N_{11}X_1) + Var(N_{12}X_2) + \dots =$$

$$= X_1^2 \underbrace{Var(N_{11})}_{\sigma^2} + X_2^2 \underbrace{Var(N_{12})}_{\sigma^2} + \dots =$$

$$= \sigma^2 \cdot \sum x_i^2 = \boxed{\sigma^2 \|x\|^2 = Var(Y|X)}$$

באותה דרך נחשב את הממוצע:

$$Mean(Y|X) =$$

$$= Mean(N_{11}X_1) + Mean(N_{12}X_2) + \dots =$$

$$= X_1 \underbrace{Mean(N_{11})}_{0} + X_2 \underbrace{Mean(N_{12})}_{0} = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \boxed{Y|X \sim N(0, \sigma^2 \|x\|_2^2)}$$

ניתן לראות, שפילוג כמצופה דומה לפילוג של N,
אך שונות הוכפלה. שזה הגיוני, כי עכשיו הוכפלו.
~~הממ~~ הממוצע לא השתנה, שזה גם כן הגיוני, כי הוכפלנו
~~במטריצה~~ בפילוג עם ממוצע של 0.

(ה) נמצא מסנן ML:

$$X_{map} = \arg\max_x P(Y|X)$$

$$\to \sim N(0; \sigma^2\|x\|_2^2)$$

$$X_{map} = \arg\max \{\exp(-\tfrac{1}{2}(Y-Nx)^T \Lambda^{-1}(Y-Nx))\} =$$

$$= \arg\min \{\tfrac{1}{2}(Y-Nx)^T \Lambda^{-1}(Y-Nx)\}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \to \tfrac{1}{2}(-2N^T \cancel{\quad} \cdot \Lambda^{-1}(Y-Nx)) = 0$$

$$N^T\Lambda^{-1}Y = N^T\Lambda^{-1}Nx$$

$$X_{map} = [N^T\Lambda^{-1}N]^{-1}[N^T\Lambda^{-1}Y] =$$

$$= [N^T[\sigma^2\|x\|_2^2]^{-1}N]^{-1}[N^T[\sigma^2\|x\|_2^2]^{-1}Y]$$

על מנת לשערך את את התמונה X_{map}, עלינו לדעת את ערך של $\|x\|_2^2$, כלומר נורמה בריבוע של תמונות המקור X. כנראה, שזה מידע שבאופן כן נתון (מלכתחילה בהקשר זה היא הדבר הנחוץ)

על התמונה X להיות עם ערכים שונים מ-$\|x\|$, אחרת נשמור תמונה שחורה. בעצם, גם זה נכון.
לכן, אין שום תנאי על $\underline{X}$.