

### תרגיל בית מס' 3

מועד הגשה: עד 12.5.19 בשעה 23:59. הגשה אלקטרונית דרך moodle.

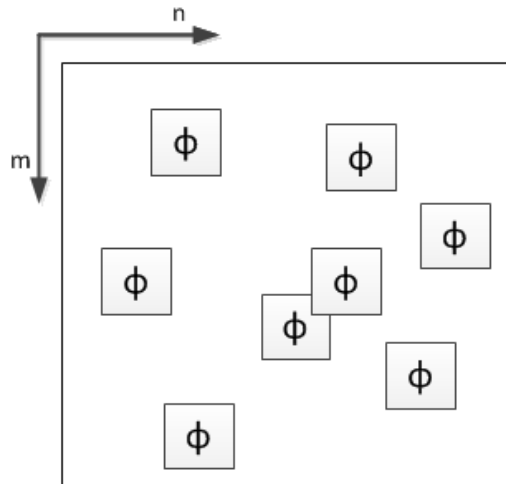
#### שאלה מס' 1

תהי  $\phi[m, n]$  תמונה בגודל  $M \times M$  ( $M$  אי-זוגי) המקיימת

$$\phi[m, n] = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

תהי  $X[m, n]$  תמונה בגודל  $N \times N$ , כאשר  $M \ll N$ .

התמונה  $X[m, n]$  מכילה אך ורק  $P$  העתקים של התמונה  $\phi[m, n]$ , כאשר קואורדינטות המרכזים של העתקי  $\phi[m, n]$  בתמונה  $X[m, n]$  הינם  $\{(m_i, n_i)\}_{i=1}^P$ . ניתן להניח כי ההעתקים של  $\phi[m, n]$  לא נחתכים בקצוות התמונה  $X[m, n]$  (ראה איור לדוגמה). במקרה של חפיפות בין העתקים של  $\phi[m, n]$ , הערך המתאים ב- $X[m, n]$  הוא סכום ההעתקים. ערכם של שאר הפיקסלים בתמונה  $X[m, n]$  הוא 0. נסמן ב- $H$  את הפעולה היוצרת את  $X[m, n]$  מתוך  $\phi[m, n]$ , כלומר:  $X[m, n] = H\{\phi[m, n]\}$ .



איור: דוגמה עבור תמונה אפשרית של  $X[m, n]$ .

א. בטאו את הפעולה  $H$  כמוצא של מערכת קונבולוציה, כלומר: מצאו ביטוי עבור  $h[m, n]$  כך שמתקיים

$$X[m, n] = \phi[m, n] * h[m, n] \quad (\text{אין צורך לרשום את } h[m, n] \text{ בצורה מטריצית}).$$

ב. האם הפעולה  $H$  ספרבילית? נמקו.

כעת נגדיר תמונה חדשה,  $\psi[m, n]$ , בגודל  $M \times M$ , באופן הבא:

$$\psi[m, n] = \begin{cases} 1, & m = \frac{M+1}{2} \\ 0, & m \neq \frac{M+1}{2} \end{cases}$$

נגדיר תמונה חדשה נוספת,  $U[m, n]$ , באופן הבא:  $U[m, n] = H\{\psi[m, n]\}$ , כאשר  $H$  הוגדרה לעיל.

התמונה  $U[m, n]$  נחשפה לרעש שיאים (Salt & Pepper), כך שרק 3% מהפיקסלים מכילים רעש.

**שימו לב:** הקואורדינטות  $\{(m_i, n_i)\}_{i=1}^P$  אינן נתונות.

ג. בהתבסס על המסננים אשר נלמדו בקורס (מסנן חציון, מסנן מיצוע וכן הלאה), הציעו סכמה המבוססת על סינון לשחזור התמונה  $U[m, n]$  באופן כזה שהשגיאה  $|U[m, n] - \hat{U}[m, n]|$  תהיה מינימלית, כאשר  $\hat{U}[m, n]$  הינה התמונה המשוחזרת. אין צורך לפתור אנליטית, אלא רק להציע ולהסביר את הסכמה.

## שאלה מס' 2

ניתוח של מערכת לרכישת תמונות העלה שהיא מפיקה תמונות מטושטשות בשל עוותים של המערכת האופטית. נמצא שמודל טוב לטשטוש הינו סינון ע"י המסנן הלינארי הבא:

$$\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

בכדי לשחזר את התמונות הוצע להשתמש במערכת unsharp masking הבאה:

$$\alpha(1 + K\nabla^2)$$

כאשר את הלפלסיאן מממשים ע"י:

$$\nabla^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

א. מצאו את הגרעין  $\Psi$ , שהוא הסינון הלינארי הכולל שעברה התמונה.

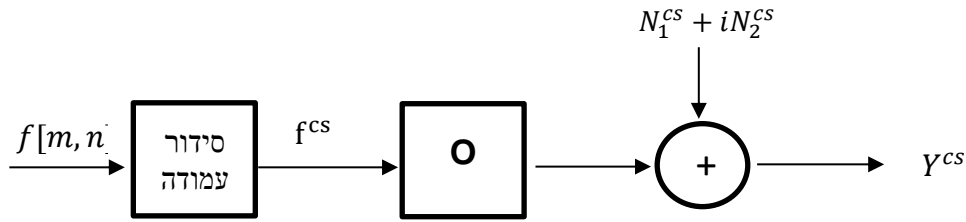
ב. מצאו  $\alpha$  אשר ישמר את ממוצע התמונה המקורית.

ג. עבור  $\alpha = 1$ , מצאו  $K$  אשר ימזער את השגיאה הריבועית:  $\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N |\Psi - \delta|^2$ .

כאשר  $M \times N$  הוא גודל הגרעין  $\Psi$ .

### שאלה מס' 3

נתונה המערכת הבאה



נתון כי

- $O$  היא מערכת אופטית, בעלת מטריצת פעולה  $O$ , אשר בהינתן תמונת עצם  $z[m, n] \in \mathbb{R}^2$  בגודל  $M \times M$  בסידור עמודה בכניסה אליה, יודעת להפיק במוצאה את תמונת התמרת הפורייה הדיסקרטית והקומפלקסית שלו  $Z[k, r] \in \mathbb{C}^2$  בסידור עמודה.
- $f[m, n] \in \mathbb{R}^2$  היא מגודל  $M \times M$ .
- $\underline{N}_1^{cs} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I)$ ,  $\underline{N}_2^{cs} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I)$  כמו כן, בלתי תלויים סטטיסטית זה בזה, כאשר  $I$  היא מטריצת היחידה.
- $i = \sqrt{-1}$ .

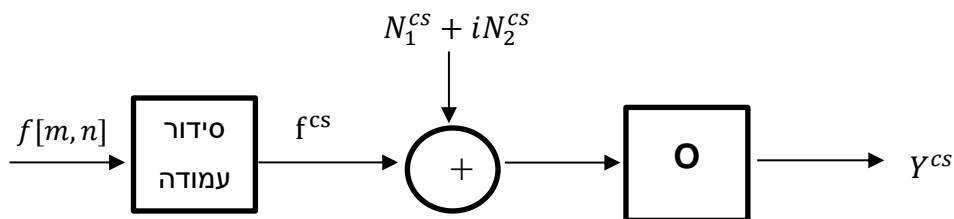
א. מוצע למדל את המערכת לפי

$$\underline{Y}_a^{cs} = H_a \underline{f}^{cs} + \underline{N}_a^{cs} = \underline{F}_a^{cs} + \underline{N}_a^{cs}$$

רשמו ביטויים עבור  $H_a$  ו- $\underline{N}_a^{cs}$ , ומצאו את  $\mu_{N_a}$ ,  $\Gamma_{N_a}$  וקטור התוחלת ומטריצת הקווריאנס של וקטור הרעש,  $\underline{N}_a^{cs}$ .

שימו לב, לצורך החישובים יש להשתמש בצמוד ההרמטי (=שחלוף והצמדה) ולא רק בשחלוף.

מענה, נתונה המערכת הבאה:



המערכת החדשה ממודלת לפי:

$$\underline{Y}_b^{cs} = H_b \underline{f}^{cs} + \underline{N}_b^{cs} = \underline{F}_b^{cs} + \underline{N}_b^{cs}$$

כאשר  $\mu_{N_b}$ ,  $\Gamma_{N_b}$  וקטור התוחלת ומטריצת הקווריאנס של וקטור הרעש,  $\underline{N}_b^{cs}$ , אשר מתפלג גאוסית, הם:

$$\mu_{N_b} = 0, \Gamma_{N_b} = 2\sigma^2 I$$

ב. רשמו ביטויים עבור  $H_b$  ו-  $N_b^{cs}$ .

ג. מצאו את  $\hat{f}_{ML}$ , משערך ה-ML של  $f^{cs}$  מתוך  $\underline{Y}_b^{cs}$ .

לנוחיותכם, בשאלה זו, עבור וקטור אקראי גאוסי מרוכב  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \Gamma)$ , פונקציית צפיפות ההסתברות נתונה על ידי:

$$P_X(x) = C_2 \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x - \mu)^* \Gamma^{-1} (x - \mu) \right\}$$

ד. בסעיף זה בלבד, ידוע כי התמונה בכניסה למערכת,  $f[m, n]$ , היא תמונת עצם סימטרי. האם ניתן להעזר במידע מקדים זה? במידה וכן, מה יהיה משערך ה-ML,  $\hat{f}_{sym}$ , אשר מתחשב בנתון זה? במידה ולא, הסבר מדוע?

מעתה ואילך, ידועים הנתונים הבאים:

- אין רעש במערכת כלל.
- תמונת המוצא היא התמונה הקומפלקסית  $\underline{G}^{cs} = S \underline{F}^{cs} \in \mathbb{C}^2$ , אשר מהווה כשליש מ- $F[k, r]$ , כאשר  $F[k, r] = \mathcal{F}(f[m, n])[k, r]$  היא התמרת פורייה הדיסקרטית ומרוכבת של  $f[m, n]$ .
- $M = 3$ , והמטריצה  $S$  היא מטריצת הדגימה הבאה:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

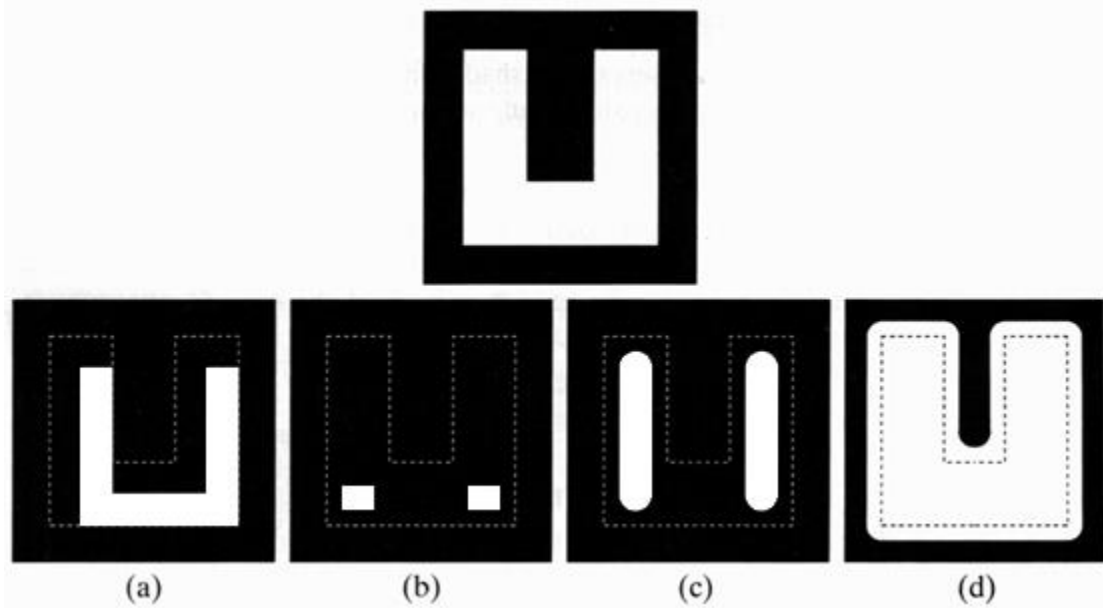
- על המשערך של התמונה  $f[m, n]$  לקיים:  $\hat{f} = \underset{f}{\operatorname{argmin}} \|f\|^2$ , כך ש:  $\underline{G}^{cs} = S \left( \mathcal{F}(\hat{f}) \right)^{cs}$ .
- ה. הסבר במשפט את משמעות הדרישה:

$$\hat{f} = \underset{f}{\operatorname{argmin}} \|f\|^2$$

- ו. מצא את  $\hat{f}$ , משערך התמונה  $f$  על סמך  $\underline{G}$ , המוצלח ביותר, אשר עומד בכל האילוצים לעיל.

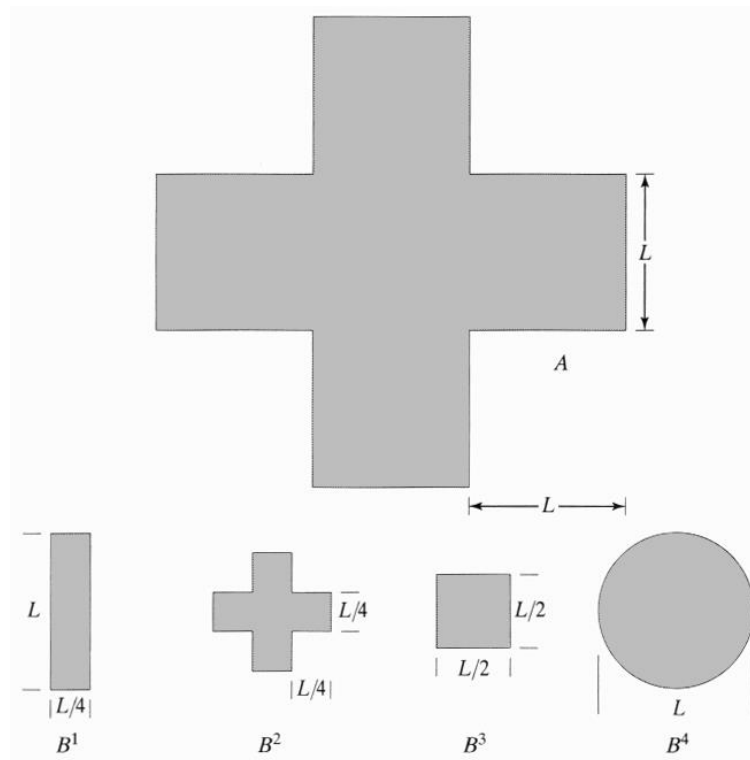
#### שאלה מס' 4

א. נתונה תמונת המקור הבאה ואחריה תמונות התוצאה (a)-(d):



מצאו מהו אלמנט הבנייה המתאים, ומהי הפעולה המורפולוגית שהתבצעה על תמונת המקור עם אלמנט זה, שיצרה כל אחת מארבע תמונות אלו.

ב. נתונה התמונה  $A$  ואחריה ארבעה איברי בנייה  $B^1 - B^4$ :



שרטטו את תוצאות הפעולות המורפולוגיות הבאות באופן איכותי:

1.  $(A \ominus B^4) \oplus B^2$
2.  $(A \ominus B^1) \oplus B^3$
3.  $(A \oplus B^1) \oplus B^3$
4.  $(A \oplus B^3) \ominus B^2$

### שאלה מס' 5

נתונה מצלמה המצלמת תמונה טבעית  $X$  שגודלה  $M \times M$ . עקב תקלה במצלמה חלק מהפיקסלים בתמונה שהתקבלה התאפסו. הפיקסלים התקולים מפוזרים אקראית לאורך התמונה אך מיקומם ידוע. נתון כי אין שני פיקסלים תקולים צמודים. בנוסף, התווסף לתמונה רעש גאوسی לבן  $W$  עם תוחלת 0 ושונות  $\sigma_n^2$ . הרעש  $W$  התווסף לתמונה לפני התאפסות הפיקסלים. נסמן את התוצאה של התהליך ב- $Y$ .

א. הציעו מודל למדידות  $Y$  מהצורה  $Y = HX + N$ , כאשר  $\underline{Y}, \underline{X}$  ו- $\underline{N}$  הינם ווקטורים בסידור עמודה. מהו הפילוג של הווקטור  $\underline{N}$ ? תארו כיצד נראית המטריצה  $H$ .

ב. כעת נתון כי התמונה המקורית  $X$  הינה בגודל  $100 \times 100$  וכי 5% מהפיקסלים התאפסו בתהליך הרכישה. חשבו את  $\det(H)$  ואת  $\text{trace}(H)$ .

בסעיף זה בלבד, הרעש התווסף לתמונה לאחר התאפסות הפיקסלים.

ג. מהנדס הציע לשחזר את הפיקסלים שהתאפסו על ידי שימוש במשעריך ML מהצורה הבאה:

$$\hat{\underline{X}}_{ML} = (H^T \Lambda^{-1} H)^{-1} H^T \Lambda^{-1} \underline{Y}$$

כאשר  $\Lambda$  היא מטריצת הקווריאנס של הרעש:  $I\sigma_n^2$

האם המשעריך מתאים לבעיה? אם כן, חשבו את שגיאת השערוך. אם לא, הסבירו והציעו תיקון.