<u>תרגיל בית מס' 4</u>

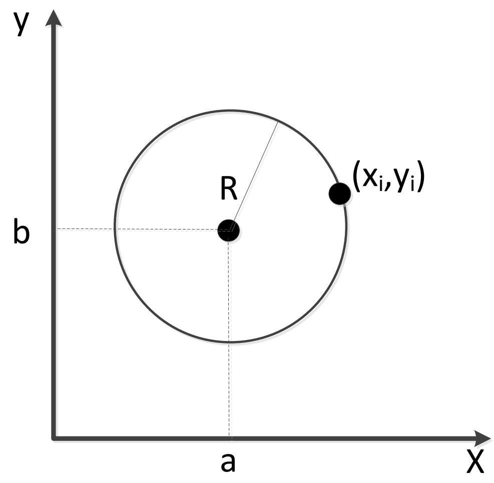
מועד הגשה: עד 26.5.19 בשעה 23:59. הגשה אלקטרונית דרך moodle.

<u>שאלה מס' 1</u>

בשאלה זו נעסוק בהרחבה של התמרת Hough על מנת לזהות מעגלים בתמונות. התמרה זו מכונה התמרת Hough מעגלית. Circular Hough Transform (CHT) כזכור לנו, מעגל במישור x-y (מישור התמונה) ניתן לתאר ע"י:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

כאשר a, b מגדירים את מרכז המעגל (במישור התמונה) ו-R הינו הרדיוס של המעגל. (כמתואר באיור 1).

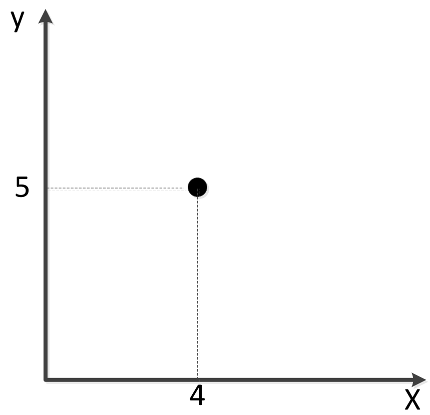


איור 1

בדומה לשיטה שראינו בכיתה, אנו מחפשים מרחב פרמטרים (parameter space) אשר בעזרתו נוכל לזהות כיצד מספר נקודות במישור x-y נמצאות על מעגל.
הניחו שמעוניינים למצוא את הפרמטרים של המעגל אשר עובר בכמה שיותר נקודות בתמונה במישור x-y, עבור מעגלים בעלי רדיוס <u>קבוע וידוע</u> R.

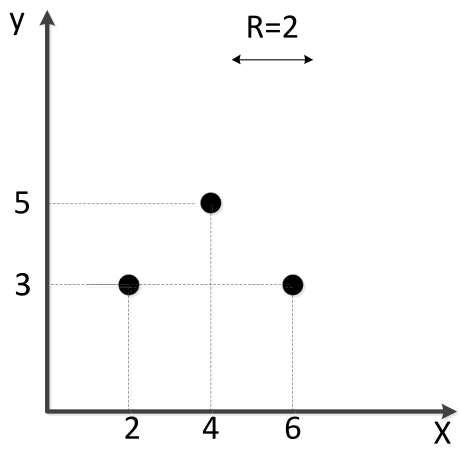
א) מהו מרחב הפרמטרים (הלא ידועים) במקרה של מעגלים בעלי רדיוס R קבוע? מהו מימד המרחב? מהם הפרמטרים?

ב) בסעיף זה ידוע ש- R=4. נתונה התמונה שבאיור 2. מצאו את התמרת CHT עבור תמונה זו. ציירו את פילוג ההצבעות במישור הפרמטרים (מרחב ההתמרה). ציינו נקודות חשובות וממדים חשובים.



איור 2

ג) בסעיף זה ידוע ש- R=2. נתונה התמונה שבאיור 3. מצאו את התמרת CHT עבור תמונה זו. ציירו את פילוג ההצבעות במישור הפרמטרים (מרחב ההתמרה). ציינו נקודות חשובות וממדים חשובים.



איור 3

ד) האם הנקודות שבאיור 3 נמצאות על מעגל? אם כן, חלצו את פרמטרי המעגל מתוך התמרת CHT שבסעיף ג'.

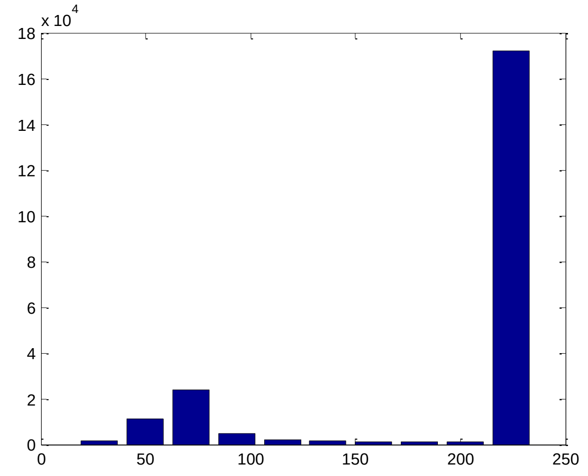
ה) תארו את צעדי האלגוריתם (כפי שנעשה בתרגול) עבור:
1. תהליך מציאת ההתמרה עבור תמונה בינארית כללית המורכבת מ-N נקודות.
2. חילוץ נקודות המקסימום של ההתמרה.

החלקים הבאים של השאלה בלתי תלויים בחלקים הקודמים.

מעוניינים לבנות מערכת אוטומטית היודעת לזהות ולספור מטבעות. המערכת מקבלת תמונות הכוללות מטבעות (כמו התמונה שבאיור 3). לאחר מכן מבוצעים מספר שלבים עיבוד וניתוח על התמונה.

$f[m,n]=$

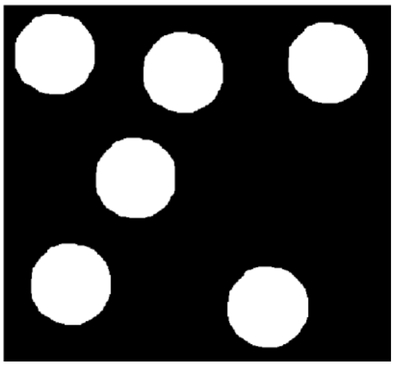
איור 3

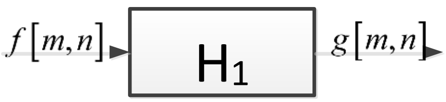


איור 4

בשלב ראשון ממירים את התמונה לתמונה בעלת 2 רמות אפור בלבד (תמונה בינארית). לשם כך מעבירים את התמונה $f[m,n]$ דרך מערכת H_1 ומתקבלת התמונה $g[m,n]$ (ראה איור 5) כפי שמתואר באיור 2.

$g[m,n]=$

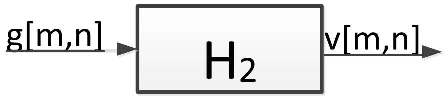




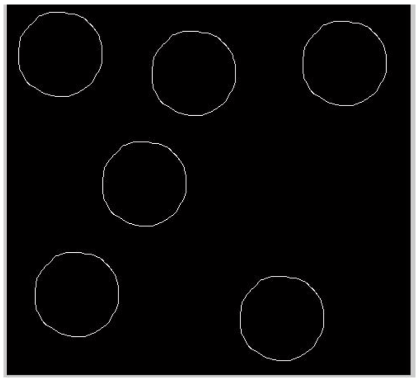
בכל התמונות הבינאריות בשאלה זו, הרקע הוא בעל ערך 0, והנקודות המסומנות הן בעלות ערך 2.

ו) רשום במפורש מערכת H_1 המבצעת את הפעולה הדרושה.(ניתן להיעזר בהיסטוגרמה הנתונה באיור 4) האם המערכת שהתקבלה לינארית?

בשלב שני מעוניינים לבצע סינון נוסף בשביל להכין את התמונה להתמרת CHT, ומעוניינים לקבל תמונת נגזרת כפי שמודגם באיור הבא. לשם כך מעבירים את התמונה $g[m,n]$ דרך מערכת H_2 ומתקבלת התמונה $v[m,n]$ כפי שמתואר באיורים הבאים.



v[m,n]=



ז) רשום במפורש מערכת H_2 המבצעת את הפעולה והסבר את פעולתה.
האם המערכת שמתקבלת לינארית?

בשלב האחרון מפעילים את התמרת CHT (של הסעיפים א'-ה') על התמונה $v[m,n]$. ידוע שרדיוס המטבעות הוא 40 פיקסלים.

ח) צייר איכותית והסבר את התוצאות שמתקבלות בהתמרת CHT של התמונה $v[m,n]$

<u>הערה כללית:</u>
שימו לב שבתרגיל זה ראיתם התמרת Hough דו-ממדית עבור מעגלים עם רדיוס R קבוע. קיימת הרחבה למקרה כללי יותר, ממימד 3 עבור רדיוסים לא יודעים.

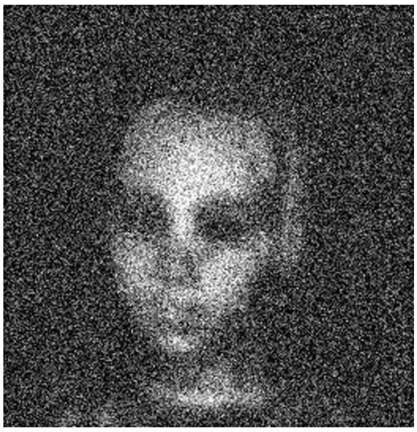
<u>שאלה מס' 2</u>

נתונה תמונת פנים של אנדרואיד, אשר בתנאים אידיאליים תסומן ב- f . תמונות פנים של אנדרואידים יכולות לעבור קלקולים שונים, כגון טשטוש לינארי ע"י מסנן H או הרעשה ע"י רעש N .
נסמן את תוצאת הקלקול ב- g . להלן ארבע תמונות g כאלו:

g_1

g_2

g_3



g_4

נתונות ארבע נוסחאות עבור תהליכי קלקול שונים:

1. $g = Hf + N$ 2. $g = f + N$ 3. $g = Hf$ 4. $g = f$

א. התאימו בין התמונות השונות לתהליכי הקלקול השונים. נמקו בקצרה.
ב. נתונים שני מדדי האיכות הבאים:

$$E_a(g) = \|\nabla g\|_1, \qquad E_b(g) = \|\nabla g\|_2^2$$

דרגו את ארבעת התמונות $g_1 - g_4$ לפי מדד E_a , **למשל** באופן הבא:

$$E_a(g_i) = E_a(g_j) < E_a(g_l) \approx E_a(g_k), \qquad 1 \le i, j, k, l \le 4$$

וכנ"ל עבור מדד E_b . ניתן להסביר או לנמק אם לדעתכם לא ניתן לרשום סימן מדויק.

שאלה מס' 3

בשאלה זו נשתמש במאפיין $\|X^{cs}\|_0$. מאפיין זה מחזיר את מספר האיברים בווקטור X שערכם שונה מאפס.

א. הסתכלו על התמונה הבאה:

$Z =$

0	5	3	0
2	1	0	0
0	2	3	4

ומצאו את $\|Z^{cs}\|_0$.

ב. בסעיף זה התייחסו לתמונת שחור-לבן $W \in \mathbb{R}^{300\times500}$ הבאה, כאשר **פיקסל שחור = 1** ופיקסל לבן = 0:

$W =$

עבור כל אחת מהפעולות הבאות הסבירו מה היחס בין ערך תמונת המקור $\|W^{cs}\|_0$ לבין ערך תוצאת הפעולה $\|\tilde{W}^{cs}\|_0$. במידה ותשובתכם תלויה בפרמטר הסבירו את האפשרויות השונות.

כאשר $\tilde{W}$ הינו:

i. תוצאות הפעלת מסנן מיצוע בגודל 5x5 על התמונה W.

ii. תוצאת הפעלת תיקון גאמא על התמונה W.

iii. תוצאת פעולת סגירה (close) עם אלמנט בנייה בגודל 10x10 על התמונה W.

iv. תוצאת פתרון בעיית השערוך:

$$\tilde{W} = \text{argmin} \left[\|W - \tilde{W}\|^2 + \eta \cdot J_{TV}(\tilde{W})\right]$$

כאשר $J_{TV}(\cdot)$ הינו קריטריון ה-Total Variation ו - $\eta > 0$.

כעת לאחר שהבנו את המאפיין $\|X^{cs}\|_0$, ניגש לבחון כיצד ניתן להשתמש בו לצורך שחזור תמונות.

נתון כי במצלמה שברשותנו מתקבלת תמונה Y^{cs} המכילה את התמונה המקורית X^{cs} בתוספת רעש גאוסי $N^{cs} \sim \mathcal{N}(0, \boldsymbol{I})$, כך ש $Y^{cs} = X^{cs} + N^{cs}$. כמו כן ,נתון כי ערכי התמונה X מתפלגים כך:

$$P(X) = e^{-\lambda \|X^{CS}\|_0}$$

ג. רשמו את הביטוי למציאת משערך MAP לתמונה X מתוך תמונה Y. פשטו ביטוי זה והגיעו לצורה הבאה:

$$\hat{X}^{MAP} = \underset{X}{\operatorname{argmin}} [\, f(Y, X) + g(X) \,]$$

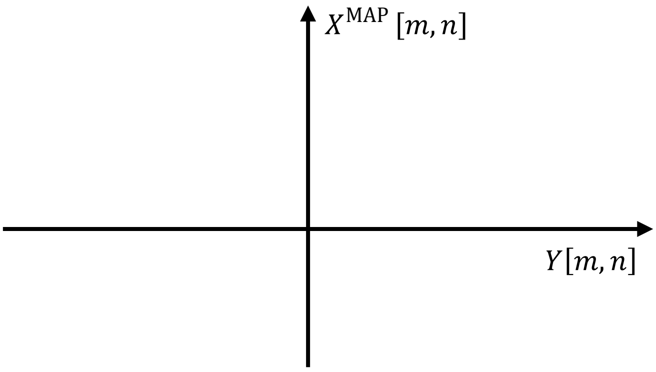
מיהן הפונקציות f ו-g?

ד. הסבירו כיצד יראה $\hat{X}^{MAP}$ כאשר $\lambda = 0$ וכאשר $\lambda \to \infty$.

ה. הניחו כעת כי התמונה Z, המופיעה בתחילת השאלה, התקבלה במצלמה שלנו ומצאו את $\hat{X}^{MAP}$ כאשר $\lambda = 7$.

ו. האם ניתן לבטא את פעולת שערוך $\hat{X}^{MAP}$ כפעולת נקודה? כמערכת קונבולוציה?

ז. השלימו את הגרף הבא המבטא את הפיקסל $\hat{X}^{MAP}[m, n]$ כפונקציה של הפיקסל $Y[m, n]$ בהינתן $\lambda > 0$ מסוים:



שאלה מס' 4

<u>הערה:</u> בשאלה זו נעבוד לפי ייצוג עמודה (CS).

התמונה הבדידה X בגודל $K\times K$ עוברת עיוות בצורה הבאה: $\underline{Y}=H\left(\underline{X}+\underline{\mathbf{1}}\right)$ ומתקבלות המדידות $\underline{Y}$. כאשר H היא מטריצת פעולה ידועה של גרעין טשטוש כלשהו ו-$\underline{\mathbf{1}}$ הוא וקטור של אחדות.

א. מצאו ורשמו משערך של התמונה $\underline{X}$ מתוך תמונת המדידות $\underline{Y}$.

כעת נתבונן על המודל של התמונה בתוספת רעש אדיטיבי כלומר: $\underline{Y}=H\left(\underline{X}+\underline{\mathbf{1}}\right)+2\underline{W}$ כאשר $\underline{W}$ הוא רעש אדיטיבי המפולג לפי $\mathcal{N}\left(\underline{\mu},\sigma_W^2 I\right)$ בת"ס ב-$\underline{X}$.

בנוסף ידוע פילוג מוקדם של התמונה X:

$$p_X\left(\underline{x}\right)\propto\exp\left\{-\frac{\left\|D_x\underline{x}\right\|_2^2+\left\|D_y\underline{x}\right\|_2^2}{2\sigma_S^2}\right\}$$

כאשר D_x ו-D_y הם אופרטורים של נגזרות <u>אחוריות</u>.

ב. מצאו את משערך ה-MAP של התמונה $\underline{X}$ מתוך המדידות $\underline{Y}$.

ג. כיצד משפיע σ_W על אופי השערוך של $\underline{X}$. כיצד משפיע σ_S על אופי השערוך? נמקו.

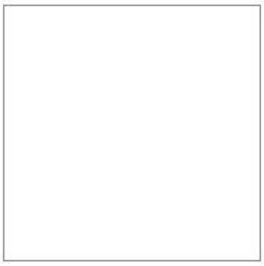
כעת נתבונן על מודל חדש לתמונה: $\underline{Y}=N\underline{X}$, לא נתון ידע מוקדם על $\underline{X}$ ו-N היא מטריצה בת"ס ב-$\underline{X}$ ואיבריה מפולגים i.i.d. לפי $\mathcal{N}\left(\underline{\mathbf{0}},\sigma^2 I\right)$.

ד. מצאו את התוחלת והשונות של $\underline{Y}$ בהינתן $\underline{X}$. הסבירו.

ה. רשמו ביטוי עבור משערך ה-ML של התמונה $\underline{X}$ מתוך המדידות $\underline{Y}$. פתחו את המשערך ככל שניתן ומצאו תנאי על $\underline{X}$ לצורך השערוך. הסבירו את התוצאה שקיבלתם ומשמעותה.

שאלה מס' 5

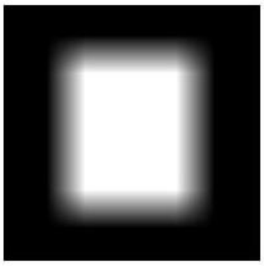
נתונות תמונות רמות האפור A-G הבאות בתחום [0,1] **(לבן=1)**, כאשר עובי כל פס בתמונות הוא פיקסל אחד, ואחריהן הביטויים 1-6 המהווים priors:

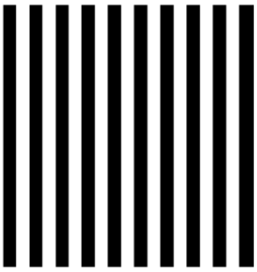

A

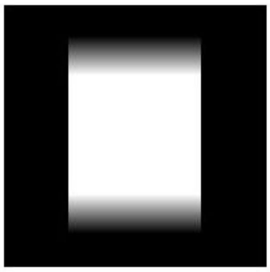

B


C


D


E


F


G

$$\boxed{1}\ \exp\left\{-\left\|D_x\underline{X}\right\|_2^2\right\} \qquad \boxed{2}\ \exp\left\{-\left\|\underline{X}-D_x\underline{X}-D_y\underline{X}\right\|_2^2\right\}$$

$$\boxed{3}\ \exp\left\{-\left\|D_y\underline{X}\right\|_2^2\right\} \qquad \boxed{4}\ \exp\left\{-\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{1}{x_j+\varepsilon}\right)^2\right\}$$

כאשר $\varepsilon<<1$, N הוא מספר הפיקסלים בתמונה, ו- D_x ו- D_y הם אופרטורים של נגזרות אחוריות.

לכל אחת מהפונקציות 1-4, מצאו את התמונה (או התמונות) מתוך A-G שהיא בעלת הסתברות א-פריורית מירבית, ואת התמונה (או התמונות) שהיא בעלת הסתברות א-פריורית הכי נמוכה. נמקו.