Image processing - 046200

# Homework #3

***Alexander Shender 328626114***

***Sahar Carmel 305554453***

Technion - Israel Institute of Technology

# שאלה 1.

א. ניתן לראות שהפעולה שאנו מבצעים הינה פעולת קונבולוציה עם דלתא של הזזה שמוגדרת כ: $\delta(m-m_i, n-n_i)$ ולכן אנו נוכל לרשום את התמונה של $X[m,n]$ כסכום של קונבולוציות:

$$X[m,n] = \sum_{x=1}^{P} \phi[m,n] * \delta(m-m_i, n-n_i) \Longrightarrow h[m,n] = \delta(m-m_i, n-n_i)$$

ב. הזזה הינה אכן פעולה ספרבילית, כי ניתן לפרק את התזוזה לציר $X$ וגם לציר $Y$. נרחיב את הביטוי שמצאנו, לפירוק לשני הצירים:

$$X[m,n] = \sum_{x=1}^{P} \phi[m,n] * \delta(m-m_i, n-n_i) = \sum_{x=1}^{P} \phi[m,n] * (\delta(m-m_i)\delta(n-n_i))$$

ג. בדרך כלל, כנגד ה-$salt\&pepper$ השיטה המועילה להתגבר עליה הינה המסנן החציון. אך במקרה שלנו זאת לא השיטה שתניב תוצאה סבירה:

בהנחה שהתמונות $\psi[m,n]$ מפוזרות מספיק רחב בתמונה אנו נקבל שמסנן חציון יאפס לנו את כל התמונה (אלא אם כן יצא מקרה דופק בו נקבל 5 פיקסלים עם ערך 1 בריבוע של 9 פיקסלים, מה שאינו סביר, כי רק $3\%$ מהפיקסלים הם מרועשים).

בהנחה שהתמונות $\psi[m,n]$ מפורזרות מאד צפוף, נקבל שפיקסלים שבמקור היו לבנים, יקבלו עכשיו ערכים. וזה לא רצוי.

השיטה המועילה לדעתינו תהיה השיטה של template matching. כתבנית אנו נשתמש בתמונה $\psi[m,n]$ , ובמקום בו אנו נקבל התאמה מעל סף מסוים שנקבע, נכניס את התמונה $\psi[m,n]$ בתמונה החדשה שנגדיר. ככה נקרב את התנונה $\hat{U}[m,n]$ לתמונה המקורית האמיתית $U[m,n]$

# שאלה 2.

א. נמצא את הסינון הלינארי. נתבונן רק בפילטר של השחזור, ונמצא פילטר בודד:

$$\alpha(1+k\nabla^2) = \alpha\left(\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix} + K\begin{bmatrix}0&1&0\\1&-4&1\\0&1&0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0&K&0\\K&\alpha-4K&K\\0&K&0\end{bmatrix}$$

כעת, על מנת לקבל סינון לינארי שעוברת התמונה, נשתמש גם במודל טשטוש שהוצע. נבצע קונבולוציה:

$$\psi = \frac{1}{8}\cdot\begin{bmatrix}0&K&0\\K&\alpha-4K&K\\0&K&0\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}0&1&0\\1&4&1\\0&1&0\end{bmatrix} = \frac{1}{8}\cdot\begin{bmatrix}0&0&K&0&0\\0&2K&\alpha&2K&0\\K&\alpha&4\alpha-12K&\alpha&K\\0&2K&\alpha&2K&0\\0&0&K&0&0\end{bmatrix}$$

ב. נמצא את $\alpha$ שישמור על הממוצע של התמונה המקורית. לטובת זאת, נשווה את הממוצע של הפילטר ל-1:

$$mean = \frac{1}{8}\cdot(12\cdot K + 8\cdot\alpha - 12K) = 1 \Longrightarrow \alpha = \frac{8}{8} = 1$$

ג. כעת נתון ש-$\alpha$ הינו 1. כמו כן, מצאנו שגרעין $\psi$ הינו $5X5$, כלומר $M = N = 5$ נמצא את K אשר ימזער את השגיאה הריבועית המוגדרת:

$$E = \sum_{m=1}^{M}\sum_{m=1}^{M}|\psi-\delta|^2$$

$$\psi-\delta = \begin{bmatrix}0&0&K&0&0\\0&2K&1&2K&0\\K&1&3-12K&1&K\\0&2K&1&2K&0\\0&0&K&0&0\end{bmatrix}$$

$$E = |\psi-\delta|^2 = 4\cdot K^2 + 4\cdot(2K)^2 + 4 + (3-12K)^2$$

נמצא את המינימום, נגזור, נשווה ל-0

$$\frac{\partial E}{\partial K} = \frac{\partial|\psi-\delta|^2}{\partial K} = 8K + 16K + 2(3-12K) = 24K - 24K + 6 = 0$$

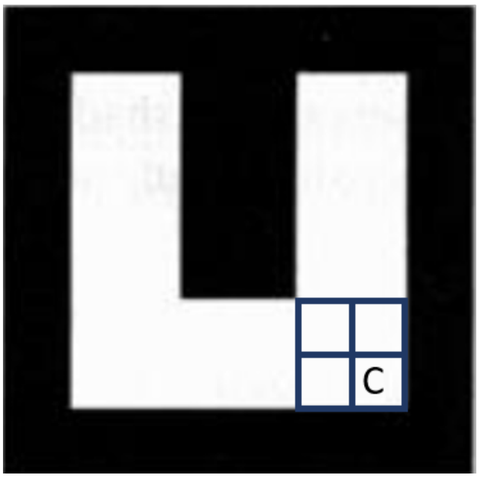
$$\Longrightarrow 6 = 0(???)$$

# שאלה 4.

א. נמצא אלמנט בנייה עבור כל אחת מהתמונות $a - d$:

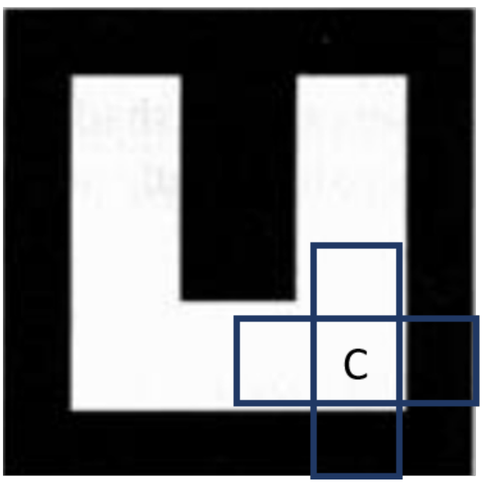
For each case, we put the element onto the original figure to indicate the proportion

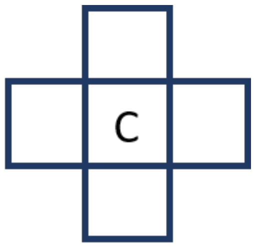
(a.) The operation is **erosion**, the structuring element is the following, where C indicates the center



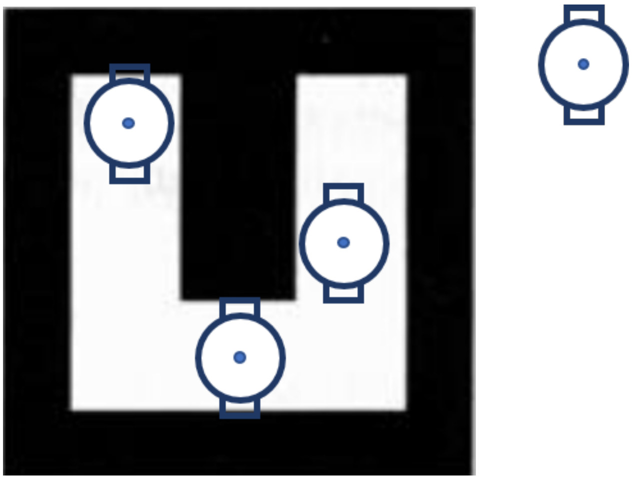


(b.) The operation is **erosion**, the structuring element is the following, where C indicates the center

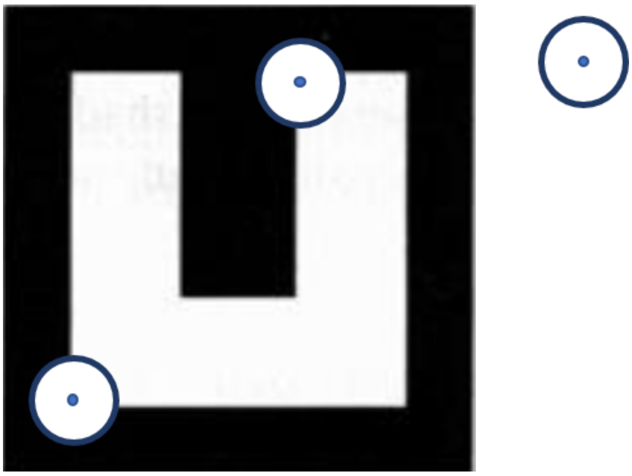



(c.) The operation is **erosion**, the structuring element is the following, where the dot indicates the center. Notice that the upper and lower parts in the structuring element were added so that the "connecting" part in the "U" shape will have overlap with some of surrounding black part, thus resulting in '0'.



(d.) The operation is **dilation**, the structuring element is the following, where the dot indicates the center.



ב. התשובות מופיעות בסוף המסמך על דפים סרוקים.

# שאלה 5.

א. כעת המודל יראה באופן הבא:

$$\underline{Y} = H\underline{X} + \underline{N}$$
$$\underline{X}, \underline{Y}, \underline{N} \in [M^2; 1]$$
$$H \in [M^2; M^2]$$

מטריצה $H$ במקורה הייתה צריכה להכיל 1 בכל איברי האלכסון שלה (מטריצה אלכסונית), ו-0 בכל השאר האתאים.
אך כוון שחלק מהפיקסלים התאפסו, במקומות האלה יהיו גם כן0. נניח, שפיקסל השני התאפס:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

מטריצה $N$ תכיל את הרעש. במקור זהו רעש גאוסי $W \sim N(0, \sigma_n^2)$, אך כעת במקומות בהן הפיקסל התאפס יהיה שם 0. השורות בהן הפיקסל התאפס מתאימות לשורות של $H$ בהן השורה התאפסה. לגבי הפילוג:

- הממוצע של הפילוג לא ישתנה, כוון שהוא שווה ל-0. החלפת חלק מהמספרים ב-0 לא ישפיע על הממוצע.
- השונות של המטריצה תקטן. נזכר במשוואה עבור שונות:

$$Var(N) = \frac{1}{M^2}\sum_{i=1}^{M^2}(n_i - \mu)^2 = Var(N) = \frac{1}{M^2}\sum_{i=1}^{M^2} n_i^2$$

כעת ידוע כי אחוז מסוים מהאיברים הינו 0, אך כמות סה"כ של האיברים נשארה זהה. נעשה הנחה לגיטימית - השונות של האיברים שהתאפסו הינה זהה לשונות של כלל האיברים. נניח כי התאפסו $K\%$ מהפיקסלים. לכן, שונות החדשה הינה:

$$\sigma_n^2(new) = \sigma_n^2 - \frac{1}{M^2}\sum_{zeroed-elements}(n_i)^2 =$$
$$\sigma_n^2 - \frac{1}{M^2}\frac{K\% \cdot M^2}{1}\frac{1}{K\% \cdot M^2}\sum_{zeroed-elements}(n_i)^2 =$$
$$\sigma_n^2 - \frac{M^2 \cdot K\%}{M^2}\sigma_n^2 = (1 - K\%)\sigma_n^2$$

כמובן, שאם למשל $K$ הינו $5\%$, אנחנו נשתמש בערך של 0.05

ב. כעת ידוע:

$$K = 0.05$$
$$M = 100 \Longrightarrow H \in [100, 100]$$

מהגדרתו של $det$, מכוון שכל האיברים שהם לא על האלכסון הם 0, וגם חלק מערכים שעל האלכסון הם 0, נקבל:

$$det(H) = 0$$

מגודל של המטריצה, ומידיעה ש-$5\%$ מתוכם הם 0, ושאר הם 1, נקבל:

$$ttr(H) = 100 - 5 = 95$$