Image processing - 046200

Homework #3

Alexander Shender 328626114

Sahar Carmel 305554453

Technion - Israel Institute of Technology

שאלה 1.

א. ניתן לראות שהפעולה שאנו מבצעים הינה פעולת קונבולוציה עם דלתא של הזזה שמוגדרת כ: $\delta(m-m_i, n-n_i)$ ולכן אנו נוכל לרשום את התמונה של $X[m,n]$ כסכום של קונבולוציות:

$$X[m,n] = \sum_{x=1}^{P} \phi[m,n] * \delta(m-m_i, n-n_i) \Longrightarrow h[m,n] = \delta(m-m_i, n-n_i)$$

ב. הזזה הינה אכן פעולה ספרבילית, כי ניתן לפרק את התזוזה לציר X וגם לציר Y. נרחיב את הביטוי שמצאנו, לפירוק לשני הצירים:

$$X[m,n] = \sum_{x=1}^{P} \phi[m,n] * \delta(m-m_i, n-n_i) = \sum_{x=1}^{P} \phi[m,n] * (\delta(m-m_i)\delta(n-n_i))$$

ג. בדרך כלל, כנגד ה-$salt\&pepper$ השיטה המועילה להתגבר עליה הינה המסנן החציון. אך במקרה שלנו זאת לא השיטה שתניב תוצאה סבירה:

בהנחה שהתמונות $\psi[m,n]$ מפוזרות מספיק רחב בתמונה אנו נקבל שמסנן חציון יאפס לנו את כל התמונה (אלא אם כן יצא מקרה דופק בו נקבל 5 פיקסלים עם ערך 1 בריבוע של 9 פיקסלים, מה שאינו סביר, כי רק 3% מהפיקסלים הם מרועשים).

בהנחה שהתמונות $\psi[m,n]$ מפורזרות מאד צפוף, נקבל שפיקסלים שבמקור היו לבנים, יקבלו עכשיו ערכים. וזה לא רצוי.

השיטה המועילה לדעתינו תהיה השיטה של template matching. כתבנית אנו נשתמש בתמונה $\psi[m,n]$, ובמקום בו אנו נקבל התאמה מעל סף מסוים שנקבע, נכניס את התמונה $\psi[m,n]$ בתמונה החדשה שנגדיר. ככה נקרב את התנונה $\hat{U}[m,n]$ לתמונה המקורית האמיתית $U[m,n]$

שאלה 2.

א. נמצא את הסינון הלינארי. נתבונן רק בפילטר של השחזור, ונמצא פילטר בודד:

$$\alpha(1+k\nabla^2)=\alpha\left(\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}+K\begin{bmatrix}0&1&0\\1&-4&1\\0&1&0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0&K&0\\K&\alpha-4K&K\\0&K&0\end{bmatrix}$$

כעת, על מנת לקבל סינון לינארי שעוברת התמונה, נשתמש גם במודל טשטוש שהוצע. נבצע קונבולוציה:

$$\psi=\frac{1}{8}\cdot\begin{bmatrix}0&K&0\\K&\alpha-4K&K\\0&K&0\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}0&1&0\\1&4&1\\0&1&0\end{bmatrix}=\frac{1}{8}\cdot\begin{bmatrix}0&0&K&0&0\\0&2K&\alpha&2K&0\\K&\alpha&4\alpha-12K&\alpha&K\\0&2K&\alpha&2K&0\\0&0&K&0&0\end{bmatrix}$$

ב. נמצא את α שישמור על הממוצע של התמונה המקורית. לטובת זאת, נשווה את הממוצע של הפילטר ל-1:

$$mean=\frac{1}{8}\cdot(12\cdot K+8\cdot\alpha-12K)=1\Longrightarrow\alpha=\frac{8}{8}=1$$

ג. כעת נתון ש-α הינו 1. כמו כן, מצאנו שגרעין ψ הינו $5X5$, כלומר $M=N=5$ נמצא את K אשר ימזער את השגיאה הריבועית המוגדרת:

$$E=\sum_{m=1}^{M}\sum_{m=1}^{M}|\psi-\delta|^2$$

$$\psi-\delta=\frac{1}{8}\cdot\begin{bmatrix}0&0&K&0&0\\0&2K&1&2K&0\\K&1&-4-12K&1&K\\0&2K&1&2K&0\\0&0&K&0&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}E=&|\psi-\delta|^2=\frac{1}{8}\cdot(4\cdot K^2+4\cdot(2K)^2+4+(-4-12K)^2)=\\=&\frac{1}{8}\cdot(164K^2+96K+20)\end{aligned}$$

נמצא את המינימום, נגזור, נשווה ל-0

$$\frac{\partial E}{\partial K}=\frac{\partial|\psi-\delta|^2}{\partial K}=328K+96=0\Longrightarrow K=-\frac{96}{328}=-0.292\approx-0.3$$

שאלה 3.

א. נמצא את הסינון הלינארי. נתבונן רק בפילטר של השחזור, ונמצא פילטר בודד:

.1. a

The expressions for H_a and $\underline{N_a^{cs}}$ are the following:

$$H_\alpha = O$$
$$\underline{N_a^{cs}} = \underline{N_1^{cs}} + i\underline{N_2^{cs}}$$

Finding the mean vector:

$$\mu_{N_\alpha} = [\mu_{\underline{N_1^{cs}}}\mu_{\underline{N_2^{cs}}}] = [0;0]$$

Since $\underline{N_a^{cs}}$ is column vector of a complex-valued random variables, the covariance matrix is the expectation of its product with its conjugate transpose:

$$\begin{aligned}\Gamma_{N_\alpha} &= Cov[\underline{N_a^{cs}}, \underline{N_a^{cs}}] = E[(\underline{N_a^{cs}} - \mu_{\underline{N_a^{cs}}})(\underline{N_a^{cs}} - \mu_{\underline{N_a^{cs}}})^H] = E[(\underline{N_a^{cs}})(\underline{N_a^{cs}})^H] \\ &= E[(\underline{N_1^{cs}} + i\underline{N_2^{cs}})(\underline{N_1^{cs}} + i\underline{N_2^{cs}})^H] = E[(\underline{N_1^{cs}} + i\underline{N_2^{cs}})(\underline{N_1^{csT}} - i\underline{N_2^{csT}})] \\ &= E[(\underline{N_1^{cs}N_1^{csT}}) + (\underline{N_2^{cs}N_2^{csT}})] = 2\cdot\sigma^2 I\end{aligned}$$

ב. נרשום את הביטויים הנדרשים:

$$H_\beta = O$$
$$\underline{N_b^{cs}} = O(\underline{N_1^{cs}} + i\underline{N_2^{cs}})$$

ג. נרשום את הי=פילוג של $\underline{Y_b^{cs}}$, ומשם נוכל לחשב את ה-$\hat{f_{ML}}$

$$\underline{Y_b^{cs}} \sim N(H_b f^{cs}, 2\sigma^2 I)$$
$$P(\underline{Y_b^{cs}}) = C_2 exp\left[-\frac{1}{2}(x-\mu)^H 2\Gamma^{-1}(x-\mu)\right]$$

נכניס את הנתונים שלנו ונקבל:

$$P(\underline{Y_b^{cs}}|f^{cs}) = C_2 exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(\underline{Y_b^{cs}} - H_b f^{cs})^H(\underline{Y_b^{cs}} - H_b f^{cs})}{2\sigma^2 I}\right]$$

נקבל את השיערוך ע"י מקסימיזציה של ההסתברות ע"י מציאת f^{cs} מתאים:

$$\begin{aligned}\hat{f_{ML}} =& argmax_{f^{cs}}\left(P(\underline{Y_b^{cs}}|f^{cs})\right) = \\ =& argmax_{f^{cs}}\left(C_2 exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(\underline{Y_b^{cs}} - H_b f^{cs})^H(\underline{Y_b^{cs}} - H_b f^{cs})}{2\sigma^2 I}\right]\right) = \\ =& argmin_{f^{cs}}\left((\underline{Y_b^{cs}} - H_b f^{cs})^H(\underline{Y_b^{cs}} - H_b f^{cs})\right)\end{aligned}$$

נגזור לקבלת מינימום:

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{\delta f^{cs}}\left((\underline{Y_b^{cs}} - H_b f^{cs})^H(\underline{Y_b^{cs}} - H_b f^{cs})\right) &= 0 \\ -H_b^H(\underline{Y_b^{cs}} - H_b f^{cs}) - H_b^T(\underline{Y_b^{cs}} - H_b f^{cs})^* &= 0 \\ -H_b^H\underline{Y_b^{cs}} + H_b^H H_b f^{cs} - H_b^T\underline{Y_b^{cs*}} + H_b^T H_b^* f^{cs} &= 0 \\ \left(H_b^H H_b + H_b^T H_b^*\right) f^{cs} &= \left(H_b^H\underline{Y_b^{cs}} + H_b^T\underline{Y_b^{cs*}}\right) \\ \left(H_b^H H_b + H_b^T H_b^*\right)^{-1}\left(H_b^H\underline{Y_b^{cs}} + H_b^T\underline{Y_b^{cs*}}\right) &= f^{cs}\end{aligned}$$

נזכר בתכונות של מטריצת DFT: היא אוניטרית וסימטרית. לכן:

$$\begin{aligned}H_b^* H_b = H_b H_b^* &= 1 \\ H_b^T &= H_b\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(I+I)^{-1}\left(H_b^H\underline{Y_b^{cs}} + H_b^T\underline{Y_b^{cs*}}\right) &= f^{cs} \\ (I+I)^{-1}\left(H_b^{-1}\underline{Y_b^{cs}} + (H_b^{-1}\underline{Y_b^{cs}})^*\right) &= f^{cs}\end{aligned}$$

הפוכה: התמרה בעצם שזוהי

$$\begin{aligned}f^{cs} &= \frac{1}{2}\left(y_b^{cs} + (y_b^{cs})^*\right) \\ f^{cs} &= \frac{1}{2}\left(2\cdot real(y_b^{cs})\right) = real(y_b^{cs}) = y_b^{cs}\end{aligned}$$

קיבלנו שמערך המיטבי הינו התמרה הפוכה של פונקציית $\underline{Y_b^{cs}}$, שזה נראה הגיוני, הרי שהשגיאה הינה סביב 0, כי הרעש מפולג סביב 0.

ד. כידוע מסימטריה של התמרת פורייה, אם ההתמרה מתבצעת על הפונקציה שהיא סימטרית (זוגית), אז יהיו לה רק ערכים ממשיים. כלומר, $\underline{Y_b^{cs}}$ אמור להכיל רק מספרים ממשיים. לכן לפני ביצוע של ההתמרה ההפוכה אנו נאפס את האיברים המדומים של $\underline{Y_b^{cs}}$, כי ידוע לנו שהם הגיעו מהרעש. המשערך נשאר זהה, ניתן לרשום אותו פורמלית:

$$f^{cs} = F^{-1}\left(Real(\underline{Y_b^{cs}})\right)$$

ה. הדרישה הנ"ל אומרת שהשערוך יהיה ככל הניתן קרוב ל-0. כלומר, נורמה השניה של הפונקציה (תמונה).

ו. ניתן לראות שלאחר הכפלה של $\underline{F^{CS}}$ במטריצה S, נאבד הרבה מידע. כדי לשחזר את $\hat{f}$, עלינו להשלים את האיברים החסרים במטריצה $\underline{G^{CS}}$, ולאחר מכן לבצע התמרה הפוכה. נבנה מטריצה "משוחזרת" של $\underline{G^{CS}}$, כאשר במקום האיברים החסרים נשים 0:

$$\text{for all j , i in S[i,j]} : \underline{G^{\hat{C}S}} = \begin{cases} 0 & S[i,j] = 0 \\ \underline{G^{CS}}(i) & S[i,j] = 1 \end{cases}$$

כך בעצם גודל של מטריצה $\underline{G^{\hat{C}S}}$ יהיה 9 על 1, כמו של $\underline{F^{CS}}$. מכאן נוכל לשחזר את $\underline{f^{\hat{C}S}}$ מתוך $\underline{G^{\hat{C}S}}$:

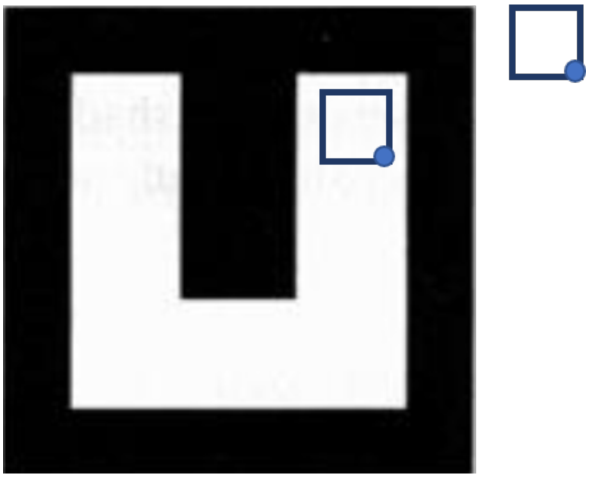
$$\underline{f^{\hat{C}S}} = F^{-1}(\underline{G^{\hat{C}S}})$$

שאלה 4.

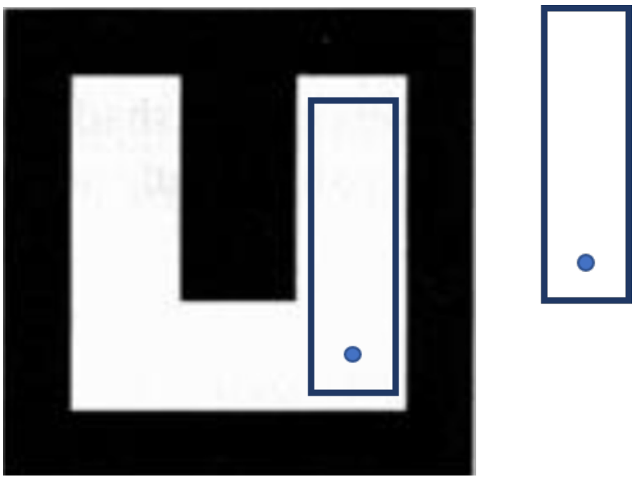
א. נמצא אלמנט בנייה עבור כל אחת מהתמונות $a - d$:

For each case, we put the element onto the original figure to indicate the proportion

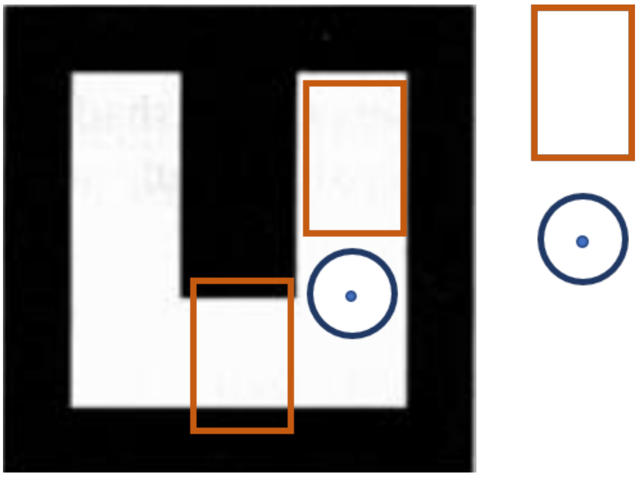
(a.) The operation is **erosion**, the structuring element is the following, where dot indicates the center



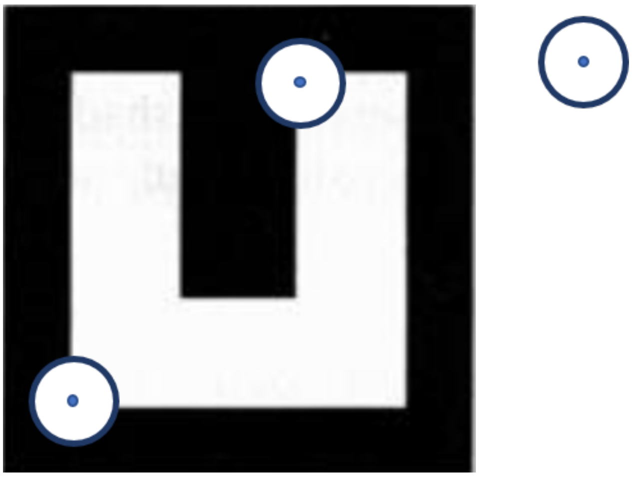
(b.) The operation is **erosion**, the structuring element is the following, where C indicates the center



(c.) First operation is **erosion** with the first element, which is rectangular, which is higher, than the connecting part of 'U' letter. Second operation is dilation, with the structuring element of a circle.



(d.) The operation is **dilation**, the structuring element is the following, where the dot indicates the center.



ב. התשובות מופיעות בסוף המסמך על דפים סרוקים.

שאלה 5.

א. כעת המודל יראה באופן הבא:

$$\underline{Y} = H\underline{X} + \underline{N}$$
$$\underline{X}, \underline{Y}, \underline{N} \in [M^2; 1]$$
$$H \in [M^2; M^2]$$

מטריצה H במקורה הייתה צריכה להכיל 1 בכל איברי האלכסון שלה (מטריצה אלכסונית), ו-0 בכל השאר האתאים. אך כוון שחלק מהפיקסלים התאפסו, במקומות האלה יהיו גם כן0. נניח, שפיקסל השני התאפס:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

מטריצה N תכיל את הרעש. במקור זהו רעש גאוסי $W \sim N(0, \sigma_n^2)$, אך כעת במקומות בהן הפיקסל התאפס יהיה שם 0. השורות בהן הפיקסל התאפס מתאימות לשורות של H בהן השורה התאפסה. לגבי הפילוג:

- הממוצע של הפילוג לא ישתנה, כוון שהוא שווה ל-0. החלפת חלק מהמספרים ב-0 לא ישפיע על הממוצע.
- השונות של המטריצה תקטן. נזכר במשוואה עבור שונות:

$$Var(N) = \frac{1}{M^2}\sum_{i=1}^{M^2}(n_i - \mu)^2 = Var(N) = \frac{1}{M^2}\sum_{i=1}^{M^2} n_i^2$$

כעת ידוע כי אחוז מסוים מהאיברים הינו 0, אך כמות סה"כ של האיברים נשארה זהה. נעשה הנחה לגיטימית - השונות של האיברים שהתאפסו הינה זהה לשונות של כלל האיברים. נניח כי התאפסו $K\%$ מהפיקסלים. לכן, שונות החדשה הינה:

$$\sigma_n^2(new) = \sigma_n^2 - \frac{1}{M^2}\sum_{zeroed-elements}(n_i)^2 =$$
$$\sigma_n^2 - \frac{1}{M^2}\frac{K\% \cdot M^2}{1}\frac{1}{K\% \cdot M^2}\sum_{zeroed-elements}(n_i)^2 =$$
$$\sigma_n^2 - \frac{M^2 \cdot K\%}{M^2}\sigma_n^2 = (1 - K\%)\sigma_n^2$$

כמובן, שאם למשל K הינו 5%, אנחנו נשתמש בערך של 0.05

ב. כעת ידוע:

$$K = 0.05$$
$$M = 100 \Longrightarrow H \in [100, 100]$$

מהגדרתו של det, מכוון שכל האיברים שהם לא על האלכסון הם 0, וגם חלק מערכים שעל האלכסון הם 0, נקבל:

$$det(H) = 0$$

מגודל של המטריצה, ומידיעה ש-5% מתוכם הם 0, ושאר הם 1, נקבל:

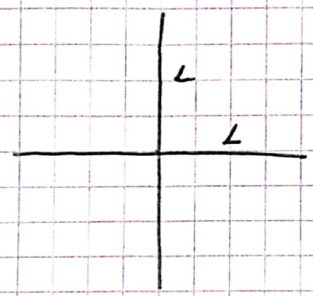
$$tr(H) = 100 - 5 = 95$$

ג. המשערך נראה כמו משערך רגיל של ML, עם קווריאנס ידוע. אך כיוון שמטריצה H אינה הפיכה, לא נוכל להשתמש במשערך הנ"ל. כדי לפתור את הבעיה, אנו נוסיף איבר נוסף שימנע מתרחיש הזה לקרות, ותבטיח את קיום של האינוורס של החלק הראשון של המטריצה, ונקבל:

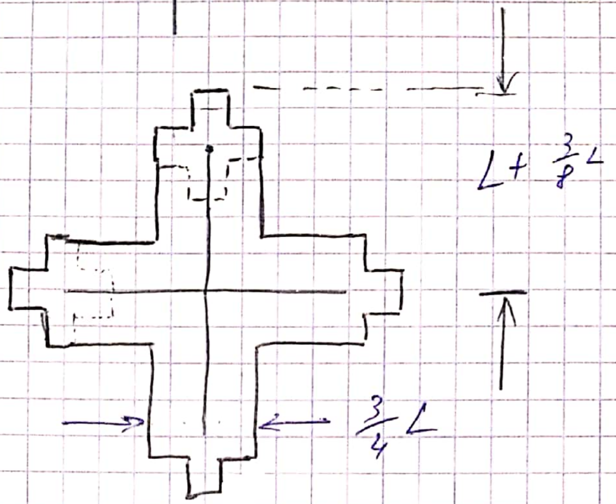
$$\underline{\hat{X}}_{ML} = (H^T\Lambda^{-1}H + \epsilon I)^{-1}H^T\Lambda^{-1}\hat{Y}$$

נקבל שיערוך פחות טוב, אך ישים.

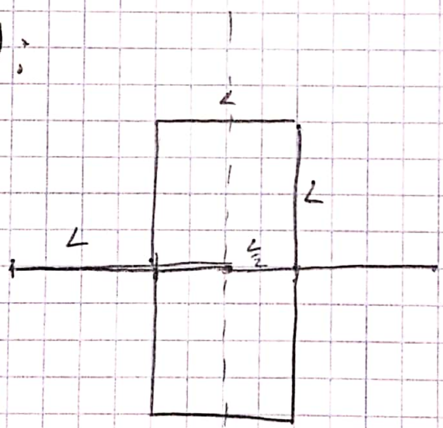
① $A \ominus B^4$:



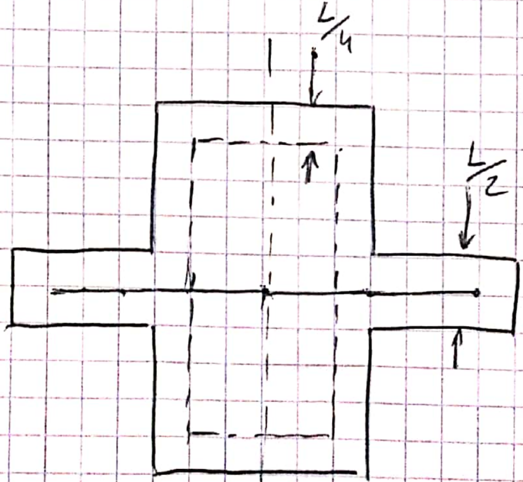
$(A \ominus B^4) \oplus B^2$:



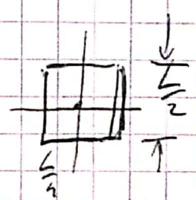
② $(A \ominus B^1)$:



$(A \ominus B_1) \oplus B_3$:

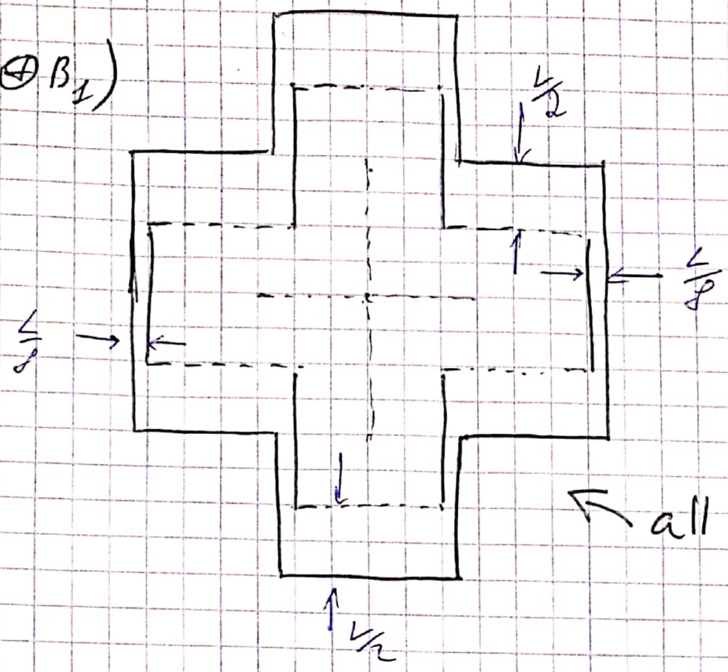


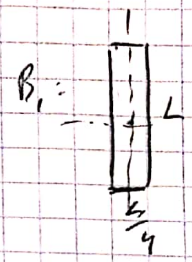
B_3:



3

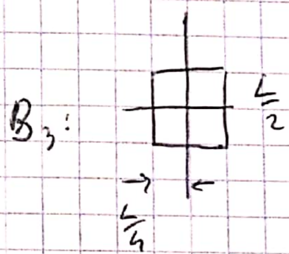
$(A \oplus B_1)$

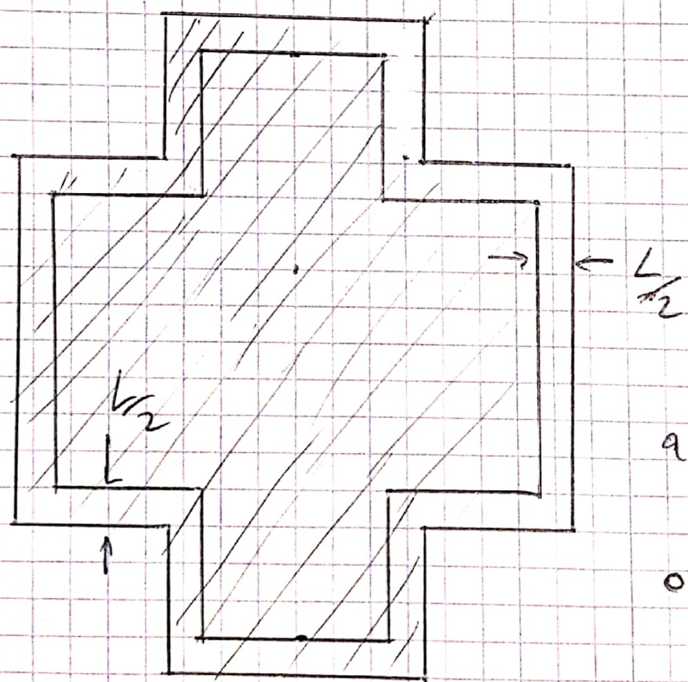




all area inside

$(A \oplus B_1) \oplus B_3$:



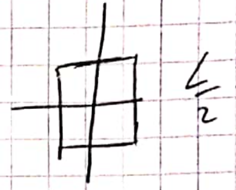


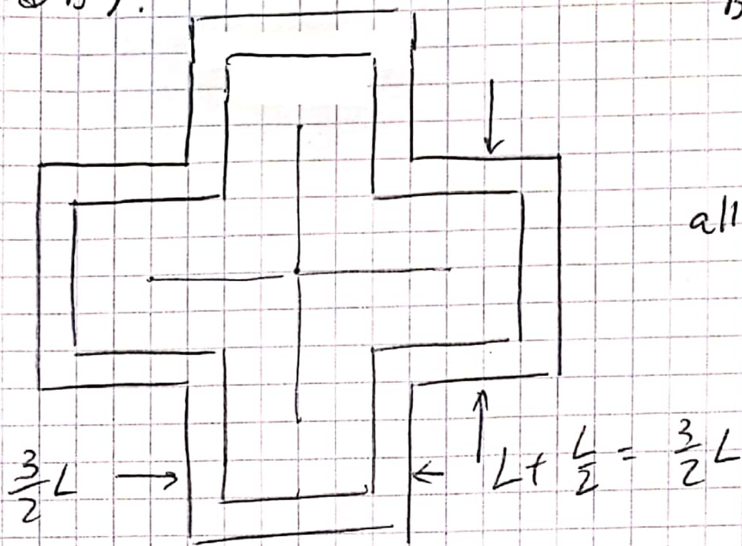
all area inside outer shape

4.

$(A \oplus B^1)$:

B^1:





all inside outer shape

$(A \oplus B^1) \ominus B^2$

B_2: