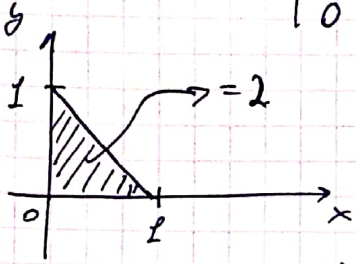
שאלה 1

$$f(x;y) = \begin{cases} 2 & 0 \le x \le 1 \quad 0 \le y \le 1-x \\ 0 & else \end{cases}$$



נצייר להמחשה!

תחום צבוע $=2$.

אחר $=0$.

התמרת פורייה לפי הגדרה! (2D)

$$F(u,v) = \mathcal{F}\{f(x,y)\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, e^{-2\pi j(ux+vy)}\, dx\, dy = \int_0^1\int_0^{1-x} 2\cdot e^{-2\pi j(ux+vy)}\, dx dy =$$

$$= 2\int_0^1 e^{-2\pi jux}\left[\int_0^{1-x} e^{-2\pi jvy}\, dy\right] dx = 2\int_0^1 e^{-2\pi jux}\cdot\left[\frac{j}{2\pi v} e^{-2\pi jvy}\Big|_0^{1-x}\right] dx =$$

$$= 2\int_0^1 e^{-2\pi jux}\cdot\frac{j}{2\pi v}\cdot\left[e^{-2\pi v(1-x)j} - 1\right] dx = \int_0^1 \frac{j}{\pi v}\left(e^{-2\pi j(ux+v-vx)} - e^{-2\pi jux}\right) dx =$$

$$= \frac{j}{\pi v}\left[\left[e^{-2\pi j(ux+v-vx)}\cdot\frac{j}{2\pi(u-v)}\Big|_0^1\right] - \left[e^{-2\pi jux}\cdot\frac{j}{2\pi u}\cdot\Big|_0^1\right]\right] =$$

$$= \frac{j}{\pi v}\left[\left(e^{-2\pi j(u+v-v)} - e^{-2\pi jv}\right)\cdot\frac{j}{2\pi(u-v)} - \frac{j}{2\pi u}\left[e^{-2\pi ju} - 1\right]\right] = A$$

$$\cancel{= \frac{j}{\pi v}\left[\frac{j}{2\pi(u-v)}\left(e^{-2\pi ju} - e^{-2\pi jv}\right)\cdot + \frac{j}{2\pi u} - \frac{j}{2\pi u} e^{-2\pi ju}\right] =}$$

$$\cancel{= e^{-2\pi ju}\left(\frac{-1}{2\pi^2(u-v)v} + \frac{1}{2\pi^2 uv}\right) + e^{-2\pi jv}\left(\frac{1}{2\pi^2(u-v)v}\right) - \frac{1}{2\pi^2 uv}}$$

נפתח ביטויים עבור $sinc(u)$ $sinc(u-v)$

$$sinc(u) = \frac{\sin\pi u}{\pi u} = \frac{\cos\pi u + j\sin\pi u - \cos\pi u + j\sin\pi u}{\pi u\cdot 2j} = \frac{e^{j\pi u} - e^{-j\pi u}}{2\pi u j}$$

$$sinc(u-v) = \frac{\sin\pi(u-v)}{\pi(u-v)} = \frac{e^{j\pi(u-v)} - e^{-j\pi(u-v)}}{\pi(u-v)\cdot 2j}$$

נגיע לביטוי הנ"ל וזה מונק תרגיל.

שאלה 1 - המשך.

$$① = \frac{j}{\pi v}\left[\frac{j}{2\pi(u-v)}\cdot e^{-2\pi jv}\left[e^{-2\pi j(u-v)}-1\right]-\frac{j}{2\pi u}\cdot e^{-\pi ju}\left[e^{-\pi ju}-e^{+\pi ju}\right]\right]=$$

$$=\frac{j}{\pi v}\left[\frac{-1}{2\pi j(u-v)}\cdot e^{-2\pi jv}\cdot e^{-\pi j(u-v)}\left[e^{-\pi j(u-v)}-e^{\pi j(u-v)}\right]+\frac{j}{2\pi u}\cdot e^{-\pi ju}\left[e^{\pi ju}-e^{-\pi ju}\right]\right]=$$

$$=\frac{j}{\pi v}\left[-e^{-2\pi jv}e^{-\pi j(u-v)}\cdot\underbrace{\frac{e^{\pi j(u-v)}-e^{-\pi j(u-v)}}{2\pi j(u-v)}}_{sinc(u-v)}+e^{-\pi ju}\underbrace{\frac{e^{\pi ju}-e^{-\pi ju}}{2\pi uj}}_{sinc(u)}\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi vj}\cdot e^{-2\pi u}\left[e^{-j\pi v}sinc(u-v)+sinc(u)\right]$$

שאלה 3

עבור תמונה כללית לוג ספקטרום מוגדר:

$X[m,n]$ - תמונה.

log-spector: $X_s(u,v) = \log\left(1 + \left|DTFT\{X[m,n]\}\right|\right)$

יש לנו 2 קונבולוציות מרכזיות:

1) עבור I, K:

$$I,K = W*h*\tilde{h} = W*(h*\tilde{h})$$

כאשר

$$h = [\boxed{\alpha}\ \ 1-\alpha]$$
$$\tilde{h} = [1-\alpha\ \ \boxed{\alpha}]$$

עבור $\alpha = 0.5$ נקבל:

$$K[m,n] = (W*[0.25\ \ 0.5\ \ 0.25])$$

עבור $\alpha = 0.1$ נקבל:

$$I[m,n] = (W*[0.09\ \ 0.81\ \ 0.09])$$

כלומר, יש לנו פילטר מיצוע שמרכך את התדרים הגבוהים, בציר אופקי. עבור $\alpha=0.5$ הריכוך יהיה יותר גדול מאשר עבור $\alpha=0.1$.

לכן, נייחס:

$$\boxed{\begin{array}{l} B_s(u,v) \Leftrightarrow I[m,n] \\ A_s(u,v) \Leftrightarrow K[m,n] \end{array}}$$

באנלוגיה דומה, עבור L, J, נקבל:

$$\alpha = 0.1;\quad J[m,n] = \left(W * \begin{bmatrix} 0.09 \\ 0.81 \\ 0.09 \end{bmatrix}\right)$$

$$\alpha = 0.5\quad L[m,n] = \left(W * \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.5 \\ 0.25 \end{bmatrix}\right)$$

כלומר, ל-L הפילטר מיצוע יותר חזק, ריכוך תדרים גבוהים יותר משמעותי, בכיוון האנכי. כלומר, נייחס:

$$\boxed{\begin{array}{l} C_s \Leftrightarrow L[m,n] \\ D_s \Leftrightarrow J[m,n] \end{array}}$$

שאלה 4

סוגי אותיות ר ד ל □

(א) נשתמש במבנים לאות: $T_{ד} = \begin{bmatrix}1 & \boxed{1}\\ & 1\end{bmatrix}$

~~נשתמש~~ נבצע פעולה לאחר המבנים. המטריצה (תמונה) תגדל בפיקסל אחד ימינה ולמעלה. התוצאה היא:

$T_{ד}$ =

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
-1											
1			1	1							
2			2	2	1			1			
3			1					2	2		
4								1	2		
5											
6			1	1			1	1	1		
7			1	$\boxed{3}$	1		2	2	$\boxed{3}$	1	
8				1	1		2	2	2	1	
9							1	2	2	1	
10											

(ב) 1. נבחר סף של 2.5. כך שרק האות הרצויה תעבור, סף מינימלי ככל האפשר.

מיקומים של אות ד' הינו: [7,3] הפיקסלים שעברו: [7;3] [7;9]

2. נכון. יש אותיות שמכילות האות שלי. דוגמא: האות □, שיש בה יש מבנים "ד" בפנים. רואים זאת כי גם פיקסל [7;9] יעבור את הסף.

(ג) נבצע אותה פעולה עבור $T_{□} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \square & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$

(3) נבחר סף של 7.5.

פיקסל היחיד שעבר הינו [8,8]

תמונה תגדל בפיקסל כיוון בפיקסל אחד

$T_{□}$ =

	-1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
-1												
1			1	2	2	1						
2			2	2	2	1		1	1	1		
3			2	2	3	1		2	2	3	1	
4			1	1	1			2	2	2	1	
5								1	2	2	1	
6		1	2	2	1		1	2	3	2	1	
7		1	2	2	2		2	2	4	2	2	
8 →		1	3	2	2		3	4	$\boxed{8}$	4	3	
9			1	1	1		2	2	4	2	2	
10							1	2	3	2	1	
11												

(ה) עלינו לכתוב אלגוריתם לזיהוי תמונה בינארית המכילה רק את הפיקסלים בצורת האות ד.

אני לא אשתמש בתבניות הקיימות, אלא אגדיר תבניות חדשה, שלדעתי תהיה יותר יעילה:

$$T_{72} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

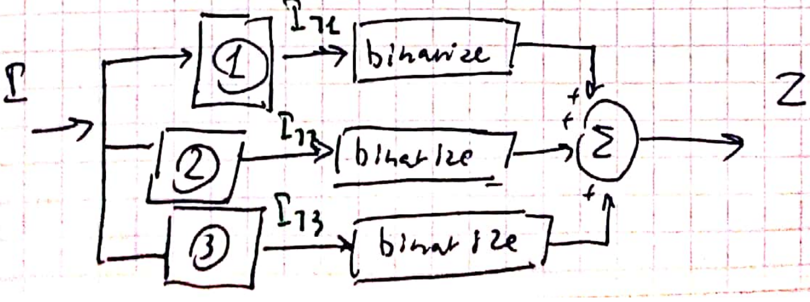
- נתון כי פיקסלים הם 1 או 0.
- לכן, על מנת לגלות את ; עליו לא להיות דומה לשום אות.
- מקרה היחידי בו $I_{T2}(x,y)$ יקבל ערך 3 היינו כאשר המגלה את "ד" בלבד, עם אפסים ליד.
- נפעיל מסנן 3 פעמים, עם מרכזי קונבולוציה במיקום שונה כל פעם, כל פעם במקום אחר בו מופיע "1".

① $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & \boxed{1} & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Algorithm

1. Do correlation between Image I and 3 of the templates ①; ②; ③. Call the results I_{T1}; I_{T2}; I_{T3};
2. Put the threshold of 3 on I_{T1}; I_{T2}; I_{T3}
3. ~~Add all~~ Binarize all 3 of resulting matrixes
4. Add all 3 binarized images.

can be done in reversed.



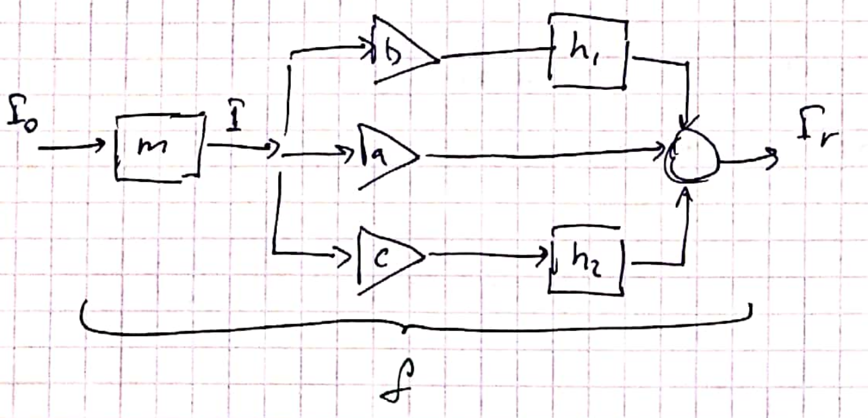
שאלה 5

(ב) נמצא את מסנן f המודל את המערכת כולה.

$$I_r = f * I_0 = f *$$

$I = m * I_0$ - תמונה מטושטשת

f כולל גם את הטשטוש, מכוון שמדובר על המערכת כולה.



$m = \frac{1}{3}[1\ 1\ 1]$

$h_1 = \frac{1}{4}[1\ -2\ 1]$

$h_2 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$

$$f = m*\left[b h_1 + a + c h_2\right] = b\, m*h_1 + a m + c\, m*h_2 =$$

$$= b\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}[1\ 1\ 1]*[1\ -2\ 1] + a\cdot\frac{1}{3}[1\ 1\ 1] + c\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\begin{bmatrix}0&0&0\\1&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}0&1&0\\0&-2&0\\0&1&0\end{bmatrix} =$$

$$= \frac{a}{3}\begin{bmatrix}0&0&0\\1&1&1\\0&0&0\end{bmatrix} + \frac{b}{12}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\1&-1&0&-1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} + \frac{c}{12}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&1&1&1&0\\0&-2&-2&-2&0\\0&1&1&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{12}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&c&c&c&0\\b&4a-b-2c&4a-2c&4a-b-2c&b\\0&c&c&c&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} = f$$

(ב.) בהירות הממוצעת נמדדת בסכום כל המקדמים של המטריצת הקונבולוציה. נחשב אותה

$$\sum f_{i,j} = \frac{1}{12}\left(6c + 2b + 2(4a - b - 2c) + 4a - 2c \right) =$$

$$= \frac{1}{12}\left(\cancel{6c} + \cancel{2b} + 8a \cancel{-2b} \cancel{-4c} + 4a \cancel{-2c} \right) = a .$$

נרצה שסכום של המקדמים ~~שסה~~ יהיה 1, כך הבהירות של התמונה לא תשתנה. לכן, נדרוש $\boxed{a=1}$

(ג.) נתונה הגדרה של שגיאות ריבועית ממוצעת:

$$\|e^2\| = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} |e[m,n]|^2$$

כאשר שגיאה נתונה ע"י:

$$e = I_r - I_o = I_o * f - I_o = I_o * (f - \delta(m,n))$$

נגדיר:

$$\tilde{f} = f + \delta(m,n)$$

$$\Rightarrow e = I_o * \tilde{f} \quad ; \quad \mathcal{F}(e) = E = I_o \cdot \tilde{F}(\theta_1;\theta_2)$$

נשתמש במשפט פרסבל:

$$\|e\|^2 = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} |e[m,n]|^2 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |E(\theta_1,\theta_2)|^2 d\theta_1 d\theta_2 =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\underbrace{I_o}_{const} \cdot \tilde{F}(\theta_1;\theta_2)|^2 d\theta_1 d\theta_2 = \frac{const}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{F}(\theta_1;\theta_2)|^2 d\theta_1 d\theta_2 =$$

נחזור חזרה לזמן

לפי Parseval

$$= \frac{const}{4\pi^2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} |f - \delta(m,n)|^2[m,n]$$

שאלה 5 המשך.

(3) נתון: $a=1$.

ע"מ למצוא את השגיאה המינימלית, עלינו למצוא את ערכי ה-f. נגזור נגזרת של $\|e\|^2$ לפי ונמצא מינימום לערכי b ו-c שונים.

$$f \overset{a=1}{=} \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & c & c & 0 \\ b & 4-b-2c & 4-2c & 4-b-2c & b \\ 0 & c & c & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\nabla\|e\|^2 = \left(\frac{\partial\|e\|^2}{\partial b} ; \frac{\partial\|e\|^2}{\partial c}\right)$$

נמצא מתי שני הערכים של הגרדיאנט הם 0, זוהי נקודת מינימום.

$$\frac{\partial\|e\|^2}{\partial b} = \frac{\partial\{6c^2+2(4-b-2c)^2+(4-2c)^2+2b^2\}}{\partial b} =$$

$$= 4b-4(4-b-2c) = 8b+8c-16 = b+c-2=0 \quad ①$$

$$\frac{\partial\|e\|^2}{\partial c} = 12c+4(4-b-2c)(-2)+2(-2)(4-2c) =$$

$$= 12c-32+8b+16c-16+8c =$$

$$= 36c+8b-48=0$$

$$② \quad 9c+2b-12=0$$

$$① \to ② \quad 9(2-b)+2b-12=0$$

$$18-9b+2b-12=0$$

$$-7b=-6$$

$$b=6/7 \Longrightarrow c=2-b=8/7$$

$$\begin{cases} b=6/7 \\ c=8/7 \end{cases} \Leftarrow$$ עבורם נקבל שגיאה מינימלית.