Capítulo 1
Matemática Básica

Neste capítulo, faremos uma breve revisão de alguns tópicos de Matemática Básica necessários nas disciplinas de cálculo diferencial e integral. Os tópicos revisados neste capítulo são: conjuntos numéricos e intervalos, operações com frações, regras de potenciação e radiação e simplificação de expressões algébricas fracionárias. Ao começarmos nossos estudos é importante estabelecer um conjunto de ferramentas com as quais desenvolveremos conceitos mais elaborados. Na matemática, um conceito leva a outro; um conceito pressupõe outro mais elementar. Assim, descreveremos um conjunto básico de ferramentas que nos permitirá chegar ao nosso objetivo: entender as funções.

1.1 Conjuntos

Podemos classificar um número de acordo com os seguintes conjuntos:

Conjunto dos números naturais: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Um asterisco colocado junto à letra que simboliza um conjunto significa que o zero foi excluído de tal conjunto. Desse modo, $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Conjunto dos números inteiros[1]: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Alguns subconjuntos de $\mathbb{Z}$ bastante úteis são:

- $\mathbb{Z}^* = \{\ldots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{Z} - \{0\}$, o conjunto dos números inteiros não nulos.
- $\mathbb{Z}^*_+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$, o conjunto dos números inteiros positivos.
- $\mathbb{Z}^*_- = \{\ldots, -3, -2, -1\}$, o conjunto dos números inteiros negativos.
- $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, o conjunto dos números inteiros não negativos.
- $\mathbb{Z}_- = \{\ldots, -3, -2, -1, 0\}$, o conjunto dos números inteiros não positivos.

O conjunto dos números naturais está contido no conjunto dos números inteiros. Simbolicamente: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

[1] Os símbolos $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ derivam do alemão *Zahl* (número) e *Quotient* (quociente). Aparentemente, foram usados pela primeira vez no livro *Éléments de mathématique: Algèbre,* de Nicolas Bourbaki, pseudônimo coletivo de um grupo de matemáticos franceses criado em 1935. Adaptado de Weisstein (2014).

Conjunto dos números racionais: conjunto de números que podem ser representados por uma razão entre dois números inteiros $\mathbb{Q} = \{x \mid x = \frac{m}{n},$ com $m,\ n \in \mathbb{Z}$ e $n \neq 0\}$. Exemplos de números racionais são os números $8/5$, $5/12$ e $-4/3$. O conjunto dos números inteiros está contido no conjunto dos números racionais. Simbolicamente: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Conjunto dos números irracionais: conjunto de números que *não* podem ser representados na forma racional. Números tais como $\sqrt{3} = 1{,}7321\ldots$, o número de Euler, $e = 2{,}7183\ldots$, e o número pi, $\pi = 3{,}1416\ldots$ pertencem ao conjunto dos números irracionais. Esse conjunto é representado por $\mathbb{Q}'$.

Conjunto dos números reais: representado por $\mathbb{R}$, consiste de todos os números positivos e negativos racionais e irracionais, e também do zero. Assim, são subconjuntos dos números reais o conjunto dos **números naturais**, o conjunto dos **números inteiros**, o conjunto dos **números racionais** e o conjunto dos **números irracionais**.

A Figura 1.1 mostra como os conjuntos são inclusos.

Exemplo 1.1 *Determine se os números* $a = 1{,}75$; $b = 3{,}72727272727272\ldots$ *e* $c = \sqrt{2} = 1{,}414213562373095\ldots$ *são racionais ou irracionais.*

Solução: O número a é racional, pois sua representação decimal é finita ($a = 7/4$). O número b é racional, pois sua representação decimal, embora infinita, é periódica ($b = 41/11$). Já c é irracional, pois sua representação decimal é infinita e não periódica. Todos esses números também são números reais.

Exemplo 1.2 *A quais conjuntos pertencem os números* $a = \sqrt{49}$, $b = \sqrt{50} = 7{,}0711\ldots$, $c = 7{,}0711$, $x = \dfrac{-33}{3}$, $y = 4{,}131313\ldots$, $z = 0{,}12$?

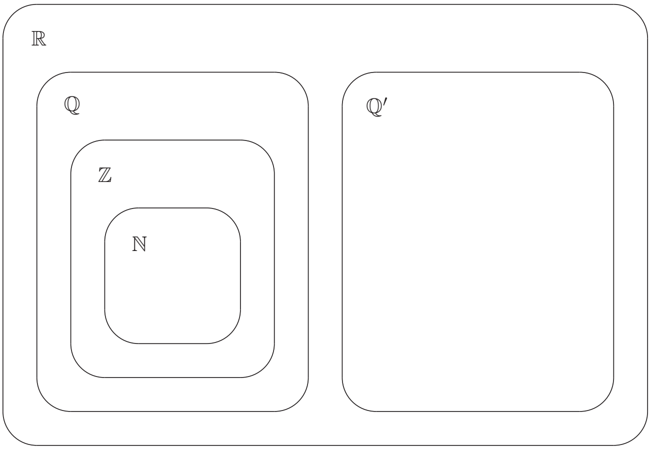


Figura 1.1 Os conjuntos numéricos.

Solução: O número $a = 7$ é inteiro, logo $a \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. O número b é irracional, logo $b \in \mathbb{Q}' \subset \mathbb{R}$. O número $c = \frac{70711}{10000}$ é racional, logo $c \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. O número $x = -11$ é um inteiro negativo, logo $x \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. O número $y = \frac{409}{99}$ é racional, logo $y \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. O número $z = \frac{12}{100}$ é racional, logo $z \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

1.2 Desigualdades e intervalos

O conjunto dos números reais é ordenado. Isso significa que podemos comparar a magnitude de quaisquer dois números reais que não são iguais usando desigualdades. As desigualdades também podem ser usadas para descrever intervalos de números reais. Os símbolos $<$, $>$, $\geq$ e $\leq$ são símbolos de desigualdade, e seu uso segue a notação mostrada na tabela a seguir, onde a e b são números reais.

Notação	Leitura
$a < b$	a é menor que b
$a > b$	a é maior que b
$a \leq b$	a é menor ou igual a b
$a \geq b$	a é maior ou igual a b

O eixo, ou reta real, é uma reta horizontal usada para representar números reais, onde o número zero define a origem e os números reais positivos ficam à direita da origem, enquanto os números reais negativos ficam à esquerda da origem, como mostra a Figura 1.2.
Geometricamente:

- $a > b$ significa que a está à direita de b ou que b está à esquerda de a no eixo real.
- $a < b$ significa que a está à esquerda de b ou que b está à direita de a no eixo real.

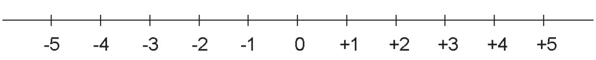


Figura 1.2 O eixo real.

Exemplo 1.3 *Descreva os números reais que pertencem a cada uma das desigualdades a seguir:*

(a) $x < 2$;

(b) $-1 < x \leq 3$;

(c) $0 < x < 2$;

(d) $-2 \leq x \leq 2$.

Solução:

(a) A desigualdade $x < 2$ descreve todos os números reais menores que 2.

(b) A dupla desigualdade $-1 < x \leq 3$ representa todos os números reais entre -1 e 3, excluindo -1 e incluindo 3.

(c) A dupla desigualdade $0 < x < 2$ representa todos os números reais entre 0 e 2, excluindo 0 e excluindo 2.

(d) A dupla desigualdade $-2 \leq x \leq 2$ representa todos os números reais entre -2 e 2, incluindo -2 e incluindo 2.

A seguir, listaremos tipos de intervalos com a notação usual para indicá-los. As letras a e b designam números reais, fixados com $a < b$, denominados extremos do intervalo. Serão utilizados os símbolos $+\infty$ (lê-se "infinito" ou "mais infinito") e $-\infty$ (lê-se "menos infinito"). Esses símbolos não representam números reais. Eles são usados para representar intervalos não limitados. Relembramos que as chaves $\{\}$ são utilizadas para descrever conjuntos com seus elementos, o símbolo $\in$ lê-se "pertence a" e a barra vertical $|$ lê-se "tal que" ou "com a propriedade de".

1.3 Intervalos limitados e ilimitados de números reais

Nesta seção, definiremos a notação e os tipos de intervalos usados quando trabalhamos com intervalos limitados de números reais. A Tabela 1.1 apresenta os tipos de intervalo numéricos limitados e a Tabela 1.2 lista os tipos de intervalo numérico não limitados. O intervalo $(-\infty, +\infty)$ representa o conjunto dos números reais; isto é, $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Exemplo 1.4 *Classifique cada sentença abaixo como* Verdadeira *ou* Falsa:

(a) ∞ não é um número real;

(b) $[4, 6)$ é um intervalo aberto;

(c) $(-\infty, -1]$ é um intervalo aberto;

(d) $(-\infty, 1)$ é um intervalo aberto;

(e) $2 \in (2, 4]$;

(f) $-3 \in (-\infty, -1)$;

(g) $[-20, 4)$ está contido em $(-21, 4]$.

Solução:

(a) Verdadeira. O símbolo é utilizado na representação de intervalos não limitados.

(b) Falsa. O intervalo $[4, 6)$ é um intervalo fechado à esquerda e aberto à direita.

(c) Falsa. O intervalo $(-\infty, -1]$ não é limitado e é fechado.

(d) Verdadeira.

(e) Falsa. O intervalo $(2, 4]$ representa todos os números reais entre -2 e 4, excluindo 2 e incluindo 4.

(f) Verdadeira. O intervalo $(-\infty, -1)$ representa todos os números reais menores que -1. Como $-3 < -1$, ele pertence ao intervalo.

(g) Verdadeira.

Tabela 1.1 Tipos de intervalos numéricos limitados na reta real

Notação	Tipo	Conjunto	Representação gráfica
$[a, b]$	fechado	$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$	
(a, b)	aberto	$\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$	
$[a, b)$	fechado à esquerda, aberto à direita	$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$	
$(a, b]$	aberto à esquerda, fechado à direita	$\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$	

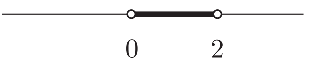
Tabela 1.2 Tipos de intervalos numéricos não limitados na reta real

Notação	Tipo	Conjunto	Representação gráfica
$[a, +\infty)$	fechado	$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$	
$(a, +\infty)$	aberto	$\{x \in \mathbb{R} : a < x\}$	
$(-\infty, b]$	fechado	$\{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$	
$(-\infty, b)$	aberto	$\{x \in \mathbb{R} : x < b\}$	

Exemplo 1.5 *Para cada item do Exemplo 1.3, reescreva as desigualdades usando a notação de intervalo e de conjunto. Desenhe também sua representação gráfica.*

Solução: A Tabela 1.3 mostra cada desigualdade e seus respectivos intervalos, conjuntos numéricos e representação gráfica.

Tabela 1.3 Desigualdades do Exemplo 1.3

Desigualdade	Intervalo	Conjunto	Representação gráfica
$x < 2$	$(-\infty, 2)$	$\{x \in \mathbb{R}: x < 2\}$	
$-1 < x \leq 3$	$(-1, 3]$	$\{x \in \mathbb{R}: -1 < x \leq 3\}$	
$0 < x < 2$	$(0, 2)$	$\{x \in \mathbb{R}: 0 < x < 2\}$	
$-2 \leq x \leq 2$	$[-2, 2]$	$\{x \in \mathbb{R}: -2 \leq x \leq 2\}$	

1.4 Operações com frações

Nesta seção, revisaremos as técnicas para efetuar operações com frações.

1.4.1 Adição e subtração de frações

A chave para o cálculo da soma ou da diferença entre frações (que resultará sempre em outra fração) está em seus denominadores.

- **Frações com denominadores iguais:** Adicionamos ou subtraímos os numeradores e mantemos o denominador comum, simplificando o resultado final sempre que possível.

Exemplo 1.6 *Resolva as seguintes operações:*

(a) $\frac{3}{5} + \frac{1}{5}$;

(b) $\frac{4}{9} + \frac{8}{9}$;

(c) $\frac{7}{6} - \frac{3}{6}$.

Solução:

(a) $\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3+1}{5} = \frac{4}{5}$;

(b) $\frac{4}{9} + \frac{8}{9} = \frac{4+8}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$;

(c) $\frac{7}{6} - \frac{3}{6} = \frac{7-3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

- **Frações com denominadores diferentes:** Reduzimos as frações ao mesmo denominador por meio do mínimo múltiplo comum. O **mínimo múltiplo comum** é o produto de todos os fatores primos nos denominadores, em que cada fator está elevado ao maior expoente encontrado em qualquer um dos denominadores.

Exemplo 1.7 *Resolva as seguintes operações:*

(a) $\frac{1}{3} + \frac{2}{4}$;

(b) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$;

(c) $\frac{7}{10} - \frac{2}{5}$;

(d) $\frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2}$.

Solução:

(a) $\frac{1}{3} + \frac{2}{4} = \frac{4+6}{12} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$;

(b) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6}$;

(c) $\frac{7}{10} - \frac{2}{5} = \frac{7-4}{10} = \frac{3}{10}$;

(d) $\frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{18+20+3+12}{24} = \frac{53}{24}$.

1.4.2 Multiplicação

Para esta operação, basta multiplicarmos numerador por numerador e denominador por denominador, simplificando o resultado quando possível.

Exemplo 1.8 *Resolva as seguintes operações:*

(a) $\frac{2}{3} \times \frac{5}{7}$;

(b) $-\frac{6}{11} \times \frac{9}{5}$;

(c) $\frac{13}{5} \times \frac{7}{2}$.

Solução:

(a) $\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{2\times5}{3\times7} = \frac{10}{21}$;

(b) $-\frac{6}{11} \times \frac{9}{5} = \frac{-6\times9}{11\times5} = -\frac{54}{55}$;

(c) $\frac{13}{5} \times \frac{7}{2} = \frac{13\times7}{5\times2} = \frac{91}{10}$.

1.4.3 Divisão

A divisão de frações deve ser efetuada aplicando uma regra prática e de fácil assimilação, que diz: repetir a fração no numerador e multiplicar pela fração do denominador, invertendo seu numerador e seu denominador.

Exemplo 1.9 *Resolva as seguintes operações:*

(a) $\frac{9}{2} \div \frac{7}{3}$;

(b) $-\frac{8}{3} \div \left(-\frac{5}{9}\right)$;

(c) $-\frac{12}{5} \div \frac{6}{7}$;

(d) $\frac{4}{\frac{3}{9}}$.

Solução:

(a) $\frac{9}{2} \div \frac{7}{3} = \frac{9}{2} \times \frac{3}{7} = \frac{9\times3}{2\times7} = \frac{27}{14}$;

(b) $-\frac{8}{3} \div \left(-\frac{5}{9}\right) = -\frac{8}{3} \times \left(-\frac{9}{5}\right) = \frac{8\times9}{3\times5} = \frac{72}{15}$;

(c) $-\frac{12}{5} \div \frac{6}{7} = -\frac{12}{5} \times \frac{7}{6} = \frac{-12\times7}{5\times6} = -\frac{84}{30}$;

(d) Considerando que o número real 4 pode ser reescrito como $\frac{4}{1}$, temos: $\frac{4}{\frac{3}{9}} = \frac{4}{1} \times \frac{9}{3} = \frac{4\times9}{1\times3} = \frac{36}{3} = 12$.

1.5 Potenciação

A notação de potência é usada para "encurtar" produtos de fatores que se repetem. Sejam a um número real e n um número real inteiro positivo. Então, denomina-se potência de base a e expoente n o número a^n, que é igual ao produto de n fatores iguais a a da forma:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ fatores}}$$

Exemplo 1.10 *Desenvolva as potências* 2^5, $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ *e* $(-1)^4$.

Solução:

(a) $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$;

(b) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$;

(c) $(-1)^4 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = 1$.

A seguir, são apresentadas as regras de potenciação. Sejam a e b dois números reais, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$, e m e n números racionais.

Regra 1 *Multiplicação de potências de mesma base.* Ao multiplicarmos duas ou mais potências de mesma base, conservamos a base e somamos os expoentes:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

Regra 2 *Divisão de potências de mesma base.* Ao dividirmos duas potências de mesma base, conservamos a base e subtraímos os expoentes:

$$a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Regra 3 *Potência de potência.* Neste caso, conservamos a base e multiplicamos os expoentes:

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

Regra 4 *Potência de expoente nulo com base $a \neq 0$.* Temos que $\frac{a^n}{a^n} = 1$ e também que $a^n \div a^n = a^{n-n} = a^0$. Então,

$$a^0 = 1$$

Regra 5 *Potência de expoente negativo.* Uma potência com expoente negativo a^{-n} indica o recíproco de a^n. Ou seja,

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Regra 6 *Potência com expoente fracionário.* Uma potência com expoente fracionário $a^{\frac{m}{n}}$ é uma forma alternativa para representar radicais:

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

Assim, combinando as Regras 5 e 6, temos que

$$a^{-m/n} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

Regra 7 *Potência de produto.*

$$(ab)^n = a^n \times b^n$$

Regra 8 *Potência de divisão.*

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Essas regras estão resumidas na Seção A.3.

Exemplo 1.11 *Simplifique as seguintes expressões utilizando as regras de potenciação:*

(a) $2^2 \times 2^3 \times 2^5$;
(b) $3^3 \times 3^{-1}$;
(c) $\frac{2^5}{2^2}$;
(d) $a^5 \div a^7$;
(e) $8^{1/3}$;
(f) $2^{4/2}$;
(g) $7^{3/4}$;
(h) $9^{0,5}$;
(i) $(2x)^2$;
(j) $(3xy)^4$;
(k) $\left(\frac{3}{x}\right)^3$;
(l) $\left(\frac{4}{5}\right)^2$;
(m) $125^{2/3}$.

Solução:

(a) $2^2 \times 2^3 \times 2^5 = 2^{2+3+5} = 2^{10} = 1024$;
(b) $3^3 \times 3^{-1} = 3^{3+(-1)} = 3^{3-1} = 3^2 = 9$;
(c) $\frac{2^5}{2^2} = 2^{5-2} = 2^3 = 8$;
(d) $a^5 \div a^7 = a^{5-7} = a^{-2}$;
(e) $8^{1/3} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2^{3/3} = 2$;
(f) $2^{4/2} = \sqrt[2]{2^4} = 2^{4/2} = 2^2 = 4$;
(g) $7^{3/4} = \sqrt[4]{7^3}$;
(h) $9^{0,5} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$;
(i) $(2x)^2 = 2^2 \times x^2 = 4x^2$;
(j) $(3xy)^4 = 3^4 \times x^4 \times y^4 = 81x^4y^4$;
(k) $\left(\frac{3}{x}\right)^3 = \frac{3^3}{x^3} = \frac{27}{x^3}$;
(l) $\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{4^2}{5^2} = \frac{16}{25}$;
(m) $125^{2/3} = (5^3)^{2/3} = 5^2 = 25$.

1.6 Radiciação

Sejam a e b dois números reais e n um número inteiro maior que 1. Então, define-se:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a,$$

onde $\sqrt[n]{a}$ a é o radical, n é o índice e a é o radicando.

Exemplo 1.12 *Obtenha o valor dos radicais a seguir:*

(a) $\sqrt[3]{8}$;
(b) $\sqrt{9}$;
(c) $\sqrt[5]{0}$;
(d) $\sqrt[3]{-8}$;
(e) $\sqrt[5]{-1}$.

Solução:

(a) $\sqrt[3]{8} = 2$, pois $2^3 = 8$;

(b) $\sqrt{9} = 3$, pois $3^2 = 9$;

(c) $\sqrt[5]{0} = 0$, pois $0^5 = 0$;

(d) $\sqrt[3]{-8} = -2$, pois $(-2)^3 = -8$;

(e) $\sqrt[5]{-1} = -1$, pois $(-1)^5 = -1$.

A seguir, são apresentadas as regras da radiciação. Sejam a e b dois números reais, com a e b não negativos e $b \neq 0$, e m e n números inteiros maiores que 1.

Regra 1 *Multiplicação de radicais de mesmo índice.* Ao multiplicarmos dois ou mais radicais de mesmo índice, conservamos o índice e multiplicamos os radicandos:

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

Regra 2 *Divisão de radicais de mesmo índice.* Ao dividirmos dois radicais de mesmo índice, conservamos o índice e dividimos os radicandos:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Regra 3 *Radical de radical.* Ao extrair raiz de raiz, conservamos o radicando e multiplicamos os índices:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

Regra 4 *Radical de potência.* Ao extrairmos uma raiz de uma potência, podemos dividir o índice e o expoente por um divisor comum. Suponha que $n = n' \times d$ e que $m = m' \times d$, então:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n'd]{a^{m'd}} = \sqrt[n']{a^{m'}}$$

Regra 5 *Radical de potência com índice e expoente iguais.* Neste caso, é possível simplificar a expressão, observando a paridade do índice e do expoente:

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ |a|, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Exemplo 1.13 *Utilizando as regras de radiciação, simplifique as seguintes expressões:*

(a) $\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{2}$;

(b) $\frac{\sqrt[5]{8}}{\sqrt[5]{2}}$;

(c) $\sqrt[6]{5^4}$;

(d) $\sqrt[3]{8^5}$;

(e) $\sqrt[3]{\sqrt{7}}$;

(f) $\sqrt[3]{(-2)^3}$;

(g) $\sqrt[4]{(-2)^4}$;

(h) $\sqrt[3]{2^3}$.

Solução:

(a) $\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{5 \times 2} = \sqrt[3]{10}$;

(b) $\frac{\sqrt[5]{8}}{\sqrt[5]{2}} = \sqrt[5]{\frac{8}{2}} = \sqrt[5]{4}$;

(c) $\sqrt[6]{5^4} = \sqrt[3]{5^2}$;

(d) $\sqrt[3]{8^5} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^5 = 2^5 = 32$;

(e) $\sqrt[3]{\sqrt{7}} = \sqrt[3\times 2]{7} = \sqrt[6]{7}$;

(f) $\sqrt[3]{(-2)^3} = \sqrt[3]{-8} = -2$;

(g) $\sqrt[4]{(-2)^4} = \sqrt[4]{(2)^4} = 2$;

(h) $\sqrt[3]{2^3} = 2$.

1.6.1 Simplificação

Algumas vezes, é possível simplificar um radical decompondo o radicando. Por exemplo:

$$\sqrt{50} = \sqrt{5^2 \times 2} = \sqrt{5^2} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}.$$

E também

$$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{2^3 \times 2} = 2\sqrt[3]{2}.$$

Ou, ainda,

$$\sqrt{160} = \sqrt{2^5 \times 5} = \sqrt{2^4 \times 2 \times 5} = 2^2\sqrt{10} = 4\sqrt{10}.$$

1.6.2 Operações

Nesta seção, revisaremos as técnicas para efetuar operações com radicais.

Soma e subtração. Somamos ou subtraímos os radicais de mesmo índice e mesmo radicando. Por exemplo:

$$6\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 7\sqrt{5}.$$

ou

$$4\sqrt{18} + 3\sqrt{8} = 4\sqrt{2 \times 3^2} + 3\sqrt{2^3} = 4 \times 3\sqrt{2} + 3 \times 2\sqrt{2} = 12\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 18\sqrt{2}.$$

Multiplicação. O produto de dois ou mais radicais de mesmo índice é um radical com o mesmo índice dos fatores e cujo radicando é igual ao produto dos radicando dos fatores. Por exemplo:

$$\sqrt{2} \times \sqrt{7} = \sqrt{14}.$$

E também

$$\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{5 \times 6} = \sqrt[3]{30}.$$

Ou, ainda,

$$2\sqrt{6} \times 5\sqrt{2} = 10\sqrt{2 \times 6} = 10\sqrt{12} = 10\sqrt{2^2 \times 3} = 10 \times 2\sqrt{3} = 20\sqrt{3}.$$

Divisão. O quociente de dois radicais de mesmo índice é um radical com o mesmo índice dos termos e cujo radicando é igual ao radicando dos termos. Por exemplo:

$$\sqrt{40} \div \sqrt{2} = \frac{\sqrt{40}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{40}{2}} = \sqrt{20} = \sqrt{2^2 \times 5} = 2\sqrt{5}.$$

E, ainda,

$$\sqrt[3]{96} \div \sqrt[3]{2} = \frac{\sqrt[3]{96}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{96}{2}} = \sqrt[3]{48} = \sqrt[3]{2^3 \times 2 \times 3} = 2\sqrt[3]{6}.$$

Exemplo 1.14 *Utilizando as regras de radiciação, simplifique as seguintes expressões:*

(a) $2\sqrt{5} + 8\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 8\sqrt{5} - 2\sqrt{2}$;

(b) $\sqrt{50} + \sqrt{18}$;

(c) $\sqrt[5]{a^3 b} \times \sqrt[5]{a^2 b}$;

(d) $\frac{\sqrt{162}}{\sqrt{3}}$;

(e) $\frac{\sqrt[7]{x^{11}}}{\sqrt[7]{x^3}}$;

(f) $\frac{\sqrt{12}+\sqrt{75}}{2\sqrt{147}}$.

Solução:

(a) $2\sqrt{5} + 8\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 8\sqrt{5} - 2\sqrt{2} = 10\sqrt{5} + 8\sqrt{2} - 8\sqrt{2} = 10\sqrt{5}$;

(b) $\sqrt{50} + \sqrt{18} = \sqrt{2 \times 5^2} + \sqrt{2 \times 3^2} = 5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$;

(c) $\sqrt[5]{a^3 b} \times \sqrt[5]{a^2 b} = \sqrt[5]{a^3} \times \sqrt[5]{b} \times \sqrt[5]{a^2} \times \sqrt[5]{b} = a^{3/5} \times a^{2/5} \times b^{1/5} \times b^{1/5} = a\sqrt[5]{b^2}$;

(d) $\frac{\sqrt{162}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2\times 3^4}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\times\sqrt{3^4}}{\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{6}}{\sqrt{9}} = \frac{9\sqrt{6}}{3} = 3\sqrt{6}$;

(e) $\frac{\sqrt[7]{x^{11}}}{\sqrt[7]{x^3}} = \frac{\sqrt[7]{x^7 \times x^4}}{\sqrt[7]{x^3}} = \frac{x\sqrt[7]{x^4}}{\sqrt[7]{x^3}} = x\sqrt[7]{\frac{x^4}{x^3}} = x\sqrt[7]{x}$;

(f) $\frac{\sqrt{12}+\sqrt{75}}{2\sqrt{147}} = \frac{\sqrt{2^2\times 3}+\sqrt{3\times 5^2}}{2\sqrt{3\times 7^2}} = \frac{2\sqrt{3}+5\sqrt{3}}{17\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{14\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$.

1.7 Simplificação de expressões algébricas fracionárias

A simplificação de expressões algébricas fracionárias ocorre com frequência no Cálculo Diferencial e Integral. As regras que você utilizou na Seção 1.4 para operar com frações também podem ser utilizadas para simplificar expressões algébricas fracionárias. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.15 *Simplifique a expressão* $\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}}$.

Solução: Resolvendo a subtração de expressões algébricas fracionárias que aparece no numerador e também no denominador, temos:

$$\frac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}}{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}}=\frac{\frac{y-x}{xy}}{\frac{y^2-x^2}{x^2y^2}}$$

Agora, resolvemos a divisão de expressões algébricas fracionárias e simplificamos, obtendo:

$$\frac{\frac{y-x}{xy}}{\frac{y^2-x^2}{x^2y^2}}=\left(\frac{y-x}{xy}\right)\left(\frac{x^2y^2}{y^2-x^2}\right).$$

Os termos x^2y^2 e xy podem ser simplificados. Além disso, a expressão y^2-x^2 (que é uma diferença de dois termos ao quadrado) pode ser fatorada como $y^2-x^2=(y-x)(y+x)$, de forma que a expressão fica

$$\left(\frac{y-x}{xy}\right)\left(\frac{x^2y^2}{y^2-x^2}\right)=\left(\frac{y-x}{xy}\right)\left(\frac{x^2y^2}{(y-x)(y+x)}\right)=\frac{xy}{y+x}.$$

Caso você tenha dificuldades em fatorar expressões, isto é, em como escrever uma expressão como um produto, reveja esse tópico na Seção 5.2.

Exemplo 1.16 *Simplifique as seguintes expressões algébricas fracionárias:*

(a) $3x^{-2}y^4+6x^{-4}$;

(b) $3x^{-1/2}+4x^{1/2}$;

(c) $\frac{a^2+ab+(b+a)(b-a)}{3a+3b}$;

(d) $\frac{(x+y)(x+y)-y^2}{x+2y}$;

(e) $\frac{2x+14}{x^2-49}$;

(f) $\frac{2x^2-18}{4x^2-24x+36}$;

(g) $\frac{a^2-x^2}{a^2-2ax+x^2}$;

(h) $\frac{x-1}{x+1}+\frac{x+1}{x-1}$;

(i) $\left(\frac{3x-9}{8x-4}\right)\left(\frac{10x-5}{5x-15}\right)$;

(j) $\dfrac{\frac{7}{x^2-4}}{\frac{xy}{x+2}}$.

Solução:

(a) $3x^{-2}y^4 + 6x^{-4} = \frac{3y^4}{x^2} + \frac{6}{x^4} = \frac{3x^2y^4+6}{x^4}$;

(b) $3x^{-1/2} + 4x^{1/2} = \frac{3}{\sqrt{x}} + 4\sqrt{x} = \frac{3+4\sqrt{x}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{3+4x}{\sqrt{x}}$;

(c) $\frac{a^2+ab+(b+a)(b-a)}{3a+3b} = \frac{a^2+ab+b^2-ba+ab-a^2}{3(a+b)} = \frac{ab+b^2}{3(a+b)} = \frac{b(a+b)}{3(a+b)} = \frac{b}{3}$;

(d) $\frac{(x+y)(x+y)-y^2}{x+2y} = \frac{x^2+xy+yx+y^2-y^2}{x+2y} = \frac{x^2+2xy}{x+2y} = \frac{x(x+2y)}{x+2y} = x$;

(e) $\frac{2x+14}{x^2-49} = \frac{2(x+7)}{(x+7)(x-7)} = \frac{2}{x-7}$;

(f) $\frac{2x^2-18}{4x^2-24x+36} = \frac{2(x^2-9)}{4(x^2-6x+9)} = \frac{2(x+3)(x-3)}{4(x-3)(x-3)} = \frac{2(x+3)}{4(x-3)} = \frac{x+3}{2(x-3)}$;

(g) $\frac{a^2-x^2}{a^2-2ax+x^2} = \frac{(a-x)(a+x)}{(a-x)^2} = \frac{a+x}{a-x}$;

(h) $\frac{x-1}{x+1} + \frac{x+1}{x-1} = \frac{(x-1)(x-1)+(x+1)(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{(x-1)^2+(x-1)^2}{x^2-1} =$
$\frac{x^2-2x+1+x^2+2x+1}{x^2-1} = \frac{2x^2+2}{x^2-1} = \frac{2(x^2+1)}{x^2-1}$

(i) $\left(\frac{3x-9}{8x-4}\right)\left(\frac{10x-5}{5x-15}\right) = \frac{3(x-3)}{4(2x-1)} \times \frac{5(2x-1)}{5(x-3)} = \frac{3}{4}$;

(j) $\frac{\frac{7}{x^2-4}}{\frac{xy}{x+2}} = \frac{7}{(x-2)(x+2)} \times \frac{x+2}{xy} = \frac{7}{(x-2)xy}$.

Neste capítulo, fizemos uma breve revisão de vários assuntos de Matemática Básica necessários ao estudo do cálculo. Sugerimos que você realize os exercícios propostos antes de começar a estudar o capítulo seguinte.

1.8 Problemas

Conjunto A: Básico

1.1 Reescreva os seguintes subconjuntos dos conjuntos dos números reais utilizando a notação de intervalo:

(a) $\mathbb{R}^*$;

(b) $\mathbb{R}^*_+$;

(c) $\mathbb{R}^*_-$;

(d) $\mathbb{R}_+$;

(e) $\mathbb{R}_-$.

1.2 Descreva e represente graficamente o intervalo de números reais:

(a) $x \leq 3$;

(b) $-2 \leq x < 4$;

(c) $(-\infty, 5]$;

(d) $(-3, +\infty)$;

(e) x é positivo;

(f) x é maior ou igual a 0 e menor ou igual a 3.

1.3 Use a notação de conjunto para descrever:

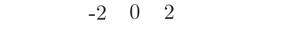
(a) $[-2, 2]$;

(b) $[5, +\infty)$;

(c) x é negativo;

(d) x é maior que 2 e menor ou igual a 6;

(e) o intervalo:



1.4 Reescreva os seguintes números conforme o solicitado:

(a) 0,7 como uma fração;

(b) $-\frac{10}{20}$ como um número decimal;

(c) a expressão "90% de 400" como um número inteiro;

(d) a expressão "180% de 400" como um número inteiro.

1.5 Resolva as seguintes operações:

(a) $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}$;

(b) $\frac{3}{7}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}$;

(c) $\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{2}{8}$;

(d) $\frac{4}{5}+\frac{9}{5}+\frac{2}{8}-\frac{1}{4}+\frac{2}{10}$;

(e) $\frac{12/5}{7}\times 4$;

(f) $4+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}$;

(g) $\dfrac{\frac{1}{7}}{\frac{3}{7}}\times\dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{2}}$;

(h) $\dfrac{4}{5}\div\dfrac{3}{2}$;

(i) $\dfrac{7}{3}\div 21$

1.6 Identifique a base da potência:

(a) -4^2

(b) $(-3)^5$

1.7 Determine o valor de x:

(a) $\left(\frac{1}{3}\right)^x\cdot 3^{-1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x$

(b) $\dfrac{3}{3^x}\cdot 3^{1+x}=-8$

1.8 Para $a=1$ e $b=-2$, calcule:

(a) $\frac{a+b}{3}+\frac{2b}{5}$;

(b) $\frac{a^2-b^3}{2}$;

(c) $\frac{a}{2}+\frac{b^{-1}}{2}$;

(d) $\frac{1}{2}b+3b$.

1.9 Simplifique as expressões a seguir:

(a) $\left(-\frac{mn}{3}\right)\cdot\left(\frac{n}{5}\right)$;

(b) $\left(\frac{4a^2b^2}{9}\right)\cdot\left(-\frac{9m^2b}{4}\right)$;

(c) $-6am\cdot\left(\frac{2}{3}m^2n\right)\cdot\left(\frac{5}{2}an\right)$;

(d) $\left(-\frac{1}{2}am^6\right)\div\left(-\frac{1}{4}an^3\right)$;

(e) $\left(a^4m^3n^{-1}\right)\div\left(a^2m^2n\right)$.

1.10 Simplifique as seguintes expressões:

(a) $x^{12}x^5+x$;

(b) $4x^4x^8$;

(c) $\frac{7x^{18}}{2x^{11}}$;

(d) $(3x)^3$;

(e) $\frac{(-x)^5}{(-x)^4}$;

(f) $\frac{\sqrt[3]{a^{10}b^6}}{\sqrt[4]{a^2b^5}}$;

(g) $\left(\frac{-1}{3}\right)^3+\left[3^{-1}-(-3)^{-1}\right]^{-2}$;

(h) $\frac{2^{-2}+2^2-2^{-1}}{2^{-2}-2^{-1}}$.

1.11 Reescreva as expressões sem utilizar expoentes negativos:

(a) $\left(x+y^{-1}\right)^{-1}$;

(b) $\left(\frac{a^{-2}}{b^{-3}}\right)^{-2}$;

(c) $\left(7x^{-3}y^5\right)^{-2}$;

(d) $\left(5x^7y^{-8}\right)^{-3}$.

1.12 Converta os radicais em forma de potência e vice-versa:

(a) $\sqrt[3]{x^2}$;

(b) $\sqrt{(x+y)^5}$;

(c) $x^{2/5}y^{1/5}$;

(d) $2x\sqrt[5]{x^3}$;

(e) $5x^{-2/3}$.

1.13 Simplifique as seguintes expressões:

(a) $\sqrt[3]{-512}$;

(b) $\sqrt[4]{\frac{81}{16}}$;

(c) $\frac{\sqrt[3]{-16}}{\sqrt[3]{-2}}$;

(d) $5\sqrt{12}+3\sqrt{75}$.

1.14 Escreva usando somente um radical:

(a) $\sqrt{\sqrt[3]{2x}}$;

(b) $\sqrt[5]{\sqrt{ab}}$;

(c) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[5]{x}}$;

(d) $\sqrt{a^3}\,\sqrt[3]{a^2}$.

1.15 Calcule os seguintes produtos:

(a) $\sqrt{x}\left(\sqrt{2x}-\sqrt{x}\right)$;

(b) $\left(\sqrt{x}-2\sqrt{y}\right)\left(2\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$.

1.16 Se $a = 3 + \sqrt[3]{5}$ e $b = 3 - \sqrt[3]{5}$, calcule o valor de $(a - b)^3$.

1.17 Simplifique as seguintes expressões algébricas fracionárias:

(a) $\frac{10x^3y^3+3xy^2}{2xy^2}$;

(b) $\frac{6x^2y^3-9x^3y^2}{3x^2y}$;

(c) $\frac{x^2+5}{x^3+5x}$;

(d) $\frac{5x+25}{x^2+10x+25}$;

(e) $\frac{2x^2+8x+8}{x^2-4}$;

(f) $\frac{16x^2y}{10xy^2}$;

(g) $\frac{2xy+2}{x^2y^2-1}$.

1.18 Efetue as operações indicadas no numerador e no denominador das frações a seguir e, então, simplifique:

(a) $\frac{2x^2+(x+y)(x-y)-2y^2}{2x^2-2y^2}$;

(b) $\frac{x(x-4)-4(y^2-x)}{(x-y)^2-y^2}$;

(c) $\frac{2x+2y}{x^2+(y+x)(x+y)+xy}$.

Conjunto B: Além do básico

1.19 Simplifique a expressão

$$\frac{ab^{-2}(a^{-1}b^2)^4(ab^{-1})^2}{a^{-3}b(a^2b^{-1})(a^{-1}b)},$$

e, a seguir, determine seu valor quando $a = 10^{-3}$ e $b = 10^{-2}$.

1.20 Calcule o valor de

$$\left(\sqrt{7+\sqrt{13}}+\sqrt{7-\sqrt{13}}\right)^2.$$