UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO

Dipartimento di Ingegneria Civile, Ambientale e Meccanica
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Civile

Tecnica delle Costruzioni in C.A. e Acciaio

Progetto e verifica di elementi strutturali per un edificio intelaiato in C.A.

Studente
Matteo Franzoi
matr. 216006

Docenti
Prof. Nadia Baldassino
Ing. Stefano Gasperetti

Anno Accademico 2019 - 2020

Indice

1 Introduzione **1**
1.1 Descrizione dell'edificio . . . 1
1.2 Caratteristiche geometriche . . . 2

2 Piante ed elementi in esame **9**
2.1 Trave . . . 9
2.1.1 Combinazione SLU . . . 11
2.1.2 Combinazione SLE rara . . . 12
2.1.3 Combinazione SLE frequente . . . 16
2.1.4 Combinazione SLE quasi permanente . . . 18
2.2 Solaio . . . 20
2.2.1 Analisi dei carichi . . . 21
2.2.2 Combinazione delle azioni . . . 23
2.3 Pilastri . . . 27
2.3.1 Pilastro $P27$ . . . 27
2.3.2 Pilastro $P36$ . . . 33

3 Normative di riferimento **40**
3.1 Decreto 17 gennaio 2018 - **NTC2018** . . . 40
3.2 Circolare 21 gennaio 2019, n. 7 - **CIRC. N. 7** . . . 41
3.3 EN 1992-1-1 - **EC2** + Decreto 31 luglio 2012 - **NAD** . . . 41

4 Materiali **42**
4.1 Calcestruzzo . . . 42
4.1.1 Legame costitutivo del calcestruzzo . . . 43
4.2 Acciaio . . . 45
4.2.1 Legame costitutivo dell'acciaio . . . 45

5 Trave: progetto e verifica agli SLU per tensioni normali **46**
5.1 Procedimento . . . 46
5.2 Sezione N5 . . . 50
5.2.1 Progetto . . . 50
5.2.2 Verifica . . . 51
5.3 Sezione C1 . . . 53
5.3.1 Progetto . . . 53
5.3.2 Verifica . . . 53
5.4 Sezione N2 . . . 54
5.4.1 Progetto . . . 54
5.4.2 Verifica . . . 54
5.5 Sezione C2 . . . 55
5.5.1 Progetto . . . 55
5.5.2 Verifica . . . 55
5.6 Sezione N3 . . . 56
5.6.1 Progetto . . . 56
5.6.2 Verifica . . . 56
5.7 Sezione C3 . . . 57
5.7.1 Progetto . . . 57
5.7.2 Verifica . . . 57
5.8 Sezione N4 . . . 58

5.8.1 Progetto . . . 58
5.8.2 Verifica . . . 58
5.9 Sezione C4 . . . 59
5.9.1 Progetto . . . 59
5.9.2 Verifica . . . 59
5.10 Sezione C5 . . . 60
5.10.1 Progetto . . . 60
5.10.2 Verifica . . . 60
5.11 Sezione N6 . . . 61
5.11.1 Progetto . . . 61
5.11.2 Verifica . . . 61
5.12 Sezione C6 . . . 62
5.12.1 Progetto . . . 62
5.12.2 Verifica . . . 62
5.13 Verifica sulle armature . . . 63
5.14 Traslazione del diagramma dei momenti flettenti . . . 65
5.15 Lunghezze di ancoraggio . . . 67

6 Trave: progetto e verifica agli SLU per taglio 70
6.1 Calcolo dell'armatura a taglio . . . 72
6.1.1 Resistenza a taglio massima lato calcestruzzo . . . 72
6.1.2 Armatura a taglio in campata . . . 72
6.1.3 Armatura a taglio sugli appoggi . . . 73
6.2 Verifica . . . 74

7 Trave: SLE 78
7.1 Stato limite di limitazione delle tensioni . . . 78
7.1.1 Procedimento . . . 80
7.1.2 Verifica . . . 81
7.2 Stato limite di fessurazione . . . 84
7.2.1 Momento di prima fessurazione . . . 86
7.2.2 Metodo esplicito . . . 86
7.2.3 Metodo semplificato . . . 88
7.3 Stato limite di deformazione . . . 88
7.3.1 Metodo diretto: integrazione delle curvature . . . 91
7.3.2 Metodo semplificato . . . 93

8 Pilastro 94
8.1 Progetto e verifica agli SLU . . . 94
8.2 Verifica di stabilità . . . 97
8.2.1 Snellezza limite . . . 97
8.2.2 Verifica di stabilità per elementi isolati . . . 97

9 Solaio 108
9.1 Progetto e verifica agli SLU per tensioni normali . . . 108
9.1.1 Sezione CS1 . . . 109
9.1.2 Sezione NS2 . . . 110
9.1.3 Sezione CS2 . . . 111
9.2 Verifica sulle armature . . . 113
9.3 Traslazione del diagramma dei momenti flettenti . . . 113

9.4 Lunghezza di ancoraggio 113
9.5 Armatura integrativa superiore agli appoggi esterni 115
9.6 Armatura integrativa inferiore sugli appoggi 116
9.7 Verifica a taglio 117

10 Elaborati grafici **121**

Elenco delle figure

2.1 Elementi strutturali oggetto di studio - piano primo 10
2.2 Rappresentazione statica della trave continua 10
2.3 Confronto dei momenti flettenti sulle campate agli SLU 11
2.4 Diagrammi degli inviluppi delle sollecitazioni per la combinazione agli SLU . . . 13
2.5 Diagrammi degli inviluppi delle sollecitazioni per la combinazione agli SLE rara . 14
2.6 Diagrammi degli inviluppi delle sollecitazioni per la combinazione agli SLE frequente 17
2.7 Diagrammi degli inviluppi delle sollecitazioni per la combinazione agli SLE quasi permanente 19
2.8 Scelta del solaio da progettare e verificare 20
2.9 Rappresentazione statica del solaio continuo a due campate 21
2.10 Soluzione statica della trave continua – metodo delle forze 21
2.11 Diagramma dei momenti flettenti per carichi distribuiti unitari sulle campate . . 22
2.12 Confronto delle tre combinazioni di carico: $MAX-MIN$, $MAX-MAX$, $MIN-MAX$ 25
2.13 Inviluppo dei momenti flettenti del solaio 25
2.14 Inviluppo dei tagli del solaio 26
2.15 Diagramma dell'azione assiale in combinazione SLU sul pilastro $P27$ 28
2.16 Diagramma dell'azione assiale in combinazione SLE rara sul pilastro $P27$ 29
2.17 Diagramma dell'azione assiale in combinazione SLE frequente sul pilastro $P27$. 31
2.18 Diagramma dell'azione assiale in combinazione SLE quasi permanente sul pilastro $P27$ 32
2.19 Diagramma dell'azione assiale in combinazione SLU sul pilastro $P36$ 34
2.20 Diagramma dell'azione assiale in combinazione SLE rara sul pilastro $P36$ 35
2.21 Diagramma dell'azione assiale in combinazione SLE frequente sul pilastro $P36$. 37
2.22 Diagramma dell'azione assiale in combinazione SLE quasi permanente sul pilastro $P36$ 39

4.1 Legame costitutivo parabola esponenzial rettangolo 44
4.2 Legame costitutivo elastico – perfettamente plastico 44

5.1 Rappresentazione del problema di equilibrio della generica sezione 47
5.2 Rapporto tra parabola esponenziale e il rettangolo circoscritto che identifica il parametro ψ 49
5.3 Sovrapposizione momenti sollecitanti e momenti resistenti 64
5.4 Sovrapposizione diagramma dei momenti sollecitanti traslato e momenti resistenti 66
5.5 Disposizione delle armature 66
5.6 Disposizione delle armature e ancoraggio delle barre 68

6.1 Sovrapposizione taglio sollecitante e taglio resistente 76

7.1 Rappresentazione del problema di equilibrio della generica sezione in campo elastico - lineare 79
7.2 Rappresentazione del problema di equilibrio della generica sezione 85
7.3 Tabelle estrapolate dalla **CIRC. N. 7** 89
7.4 Inviluppo dei momenti flettenti in combinazione quasi permanente - campata $C5$ 90
7.5 Sistema delle forze 92

8.1 Dominio di resistenza $M - N$ e sollecitazione agente 96
8.2 Disposizione delle armature nel pilastro 96
8.3 Dominio M – N con gli effetti del secondo ordine 99
8.4 Dominio M – N con gli effetti del secondo ordine con armatura $6\,\Phi\,20$ 101
8.5 Diagramma $M - N$ – metodo della rigidezza nominale con $12\,\Phi\,22\,mm$ 103
8.6 Disposizione delle armature nel pilastro dopo l'analisi di stabilità 103
8.7 Metodo della colonna modello per $N_{Ed} = 1882\,kN$ 107

9.1 Sovrapposizione momento sollecitante e momento resistente – solaio 112
9.2 Diagramma di inviluppo dei momenti flettenti traslato – solaio 113
9.3 Diagramma di inviluppo dei momenti flettenti considerando le lunghezze di ancoraggio – solaio 114
9.4 $V_{Ed} - V_{Rd}$ 119

Elenco delle tabelle

2.1 Riepilogo dei carichi agenti sulla trave 9
2.2 Valori massimi e minimi del momento flettente in combinazione SLU 12
2.3 Valori massimi e minimi del taglio in combinazione SLU 12
2.4 Valori massimi e minimi del momento flettente in combinazione SLE rara 15
2.5 Valori massimi e minimi del taglio in combinazione SLE rara 15
2.6 Valori massimi e minimi del momento flettente in combinazione SLE frequente . 16
2.7 Valori massimi e minimi del taglio in combinazione SLE frequente 16
2.8 Valori massimi e minimi del momento flettente in combinazione SLE quasi permanente 18
2.9 Valori massimi e minimi del taglio in combinazione SLE quasi permanente 18
2.10 Valori dei coefficienti di combinazione 24
2.11 Valori massimi e minimi del momento flettente su $1\,m$ di solaio 24
2.12 Valori massimi e minimi del taglio su $1\,m$ di solaio 26
2.13 Valori massimi e minimi dell'azione assiale di compressione sul pilastro $P27$ in combinazione SLU 27
2.14 Valori massimi e minimi dell'azione assiale di compressione sul pilastro $P27$ in combinazione SLE rara 27
2.15 Valori massimi e minimi dell'azione assiale di compressione sul pilastro $P27$ in combinazione SLE frequente 30
2.16 Valori dell'azione assiale di compressione sul pilastro $P27$ in combinazione SLE quasi permanente 30
2.17 Valori massimi e minimi dell'azione assiale di compressione sul pilastro $P36$ in combinazione SLU 33
2.18 Valori massimi e minimi dell'azione assiale di compressione sul pilastro $P36$ in combinazione SLE rara 36
2.19 Valori massimi e minimi dell'azione assiale di compressione sul pilastro $P36$ in combinazione SLE frequente 38
2.20 Valori dell'azione assiale di compressione sul pilastro $P36$ in combinazione SLE quasi permanente 39

5.1 Riassunto dei valori per i momenti resistenti positivi 63
5.2 Riassunto dei valori dei momenti resistenti per armatura invertita 64

Capitolo 1

Introduzione

Il seguente documento si propone come relazione relativa all'esercitazione di *Tecnica delle Costruzioni in C.A. e Acciaio* del Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Civile presso l'Università degli Studi di Trento, riferita all'anno accademico 2019 - 2020. Di seguito è riportata una breve descrizione del fabbricato.

1.1 Descrizione dell'edificio

L'edificio in esame, che si trova in Provincia di Trento a una altitudine di $788\,m$ sul livello del mare, ha una struttura multipiano, portante, in cemento armato ed è composto da un interrato (garage), un piano terra adibito a negozi, un piano primo in cui sono presenti uffici aperti al pubblico, mentre il piano superiore è destinato ad uso civile residenziale - per un totale di tre piani fuori terra. Il solaio di copertura è piano, non praticabile, accessibile perciò solo dal personale addetto alla manutenzione. Le dimensioni massime in pianta del complesso sono di $43.15\,m \times 28.00\,m$ per un'elevazione totale fuori terra di $9.70\,m$. Le altezze di interpiano sono riportate nell'elaborato presente a pagina 8. In particolare, la superficie, l'altezza e quindi il volume di ogni piano sono:

- piano interrato:

  superficie: $901.60\,m^2$;

  altezza: $2.75\,m$;

  volume: $2479.40\,m^3$

- piano terra:

  superficie: $901.60\,m^2$;

  altezza: $3.50\,m$;

  volume: $3155.60\,m^3$

- piano primo e piano secondo:

  superficie: $468.70\,m^2$;

  altezza: $3.10\,m$;

  volume: $1452.97\,m^3$

Il volume della sola parte fuori terra dell'opera è di circa $6062\,m^3$, mentre considerando il contributo della parte di edificio interrato, il volume totale dell'opera è di circa $8541\,m^3$.

Le piante della carpenteria contengono, oltre alla nomenclatura degli elementi strutturali, anche gli interassi dei pilastri e perciò le luci delle campate di tutte le travi. La luce massima delle travi è di $6.15\,m$, misurata tra i pilastri $P17-P18$ - che coincide peraltro con la luce massima del rispettivo solaio presente al primo impalcato. Il piano primo è organizzato in modo tale che parte della superficie, in particolare la fascia più esterna, sia adibita a terrazza mentre il nucleo centrale - come detto precedentemente - è destinato ad uffici aperti al pubblico. Nonostance ciò, non sono presenti solai a sbalzo.

Per maggior completezza, di seguito vengono descritte le stratigrafie dei principali solai e i pesi specifici dei materiali che compongono gli elementi:

- il solaio tra piano interrato e piano terra e il solaio di copertura sono realizzati con lastre tralicciate di tipo Predalle di spessore $(4 + 16 + 5)$ cm. Il peso strutturale del solaio è di $3.60\,\mathrm{kN}/_{\mathrm{m}^2}$;
- i *solai tra piani intermedi* sono realizzati con travetti tralicciati in *laterocemento* con spessore $(20 + 5)$ cm. Il peso del solaio ultimato è di

$$g_{1k_{solaio}} = 3.20\,\frac{kN}{m^2}$$

- i *solai interni* sono finiti all'*estradosso* con un sottofondo di *cls alleggerito* di spessore pari a 8 cm e peso specifico $16\,kN/_{m^3}$, un *massetto di allettamento* di 6 cm e peso specifico $24\,kN/_{m^3}$ e infine un *pavimento in ceramica* del peso di $0.50\,kN/_{m^2}$. All'*intradosso* è presente 1 cm di intonaco di peso specifico $20\,kN/_{m^3}$;
- il solaio di copertura è finito all'estradosso con uno strato isolante di spessore $20\,cm$ (peso specifico $0.30\,kN/_{m^3}$), un massetto in calcestruzzo alleggerito di spessore medio pari a $6\,cm$ (peso specifico $18\,kN/_{m^3}$), uno strato di impermeabilizzante di peso trascurabile e uno strato di ghiaino di $10\,cm$ (peso specifico $15\,kN/_{m^3}$). All'intradosso è finito con un centimetro di intonaco;
- i solai delle terrazze presenti al piano primo sono finiti all'*estradosso* con uno strato *isolante* di 15 cm e peso specifico $0.50\,kN/_{m^3}$, uno strato di impermeabilizzante di peso trascurabile, un *massetto* in calcestruzzo di spessore medio pari a 6 cm e peso specifico $24\,kN/_{m^3}$ e un *pavimento* di peso $0.50\,kN/_{m^2}$. Il solaio è finito all'*intradosso* con intonaco di spessore 1 cm;
- i tamponamenti perimetrali sono realizzati in muratura di laterizio di spessore 30 cm e peso specifico apparente pari a $10\,kN/_{m^3}$, *cappotto esterno* di spessore 12 cm (peso specifico $0.20\,kN/_{m^3}$) e all'interno 1 cm di *intonaco* (vedi caratteristiche sopra).

1.2 Caratteristiche geometriche

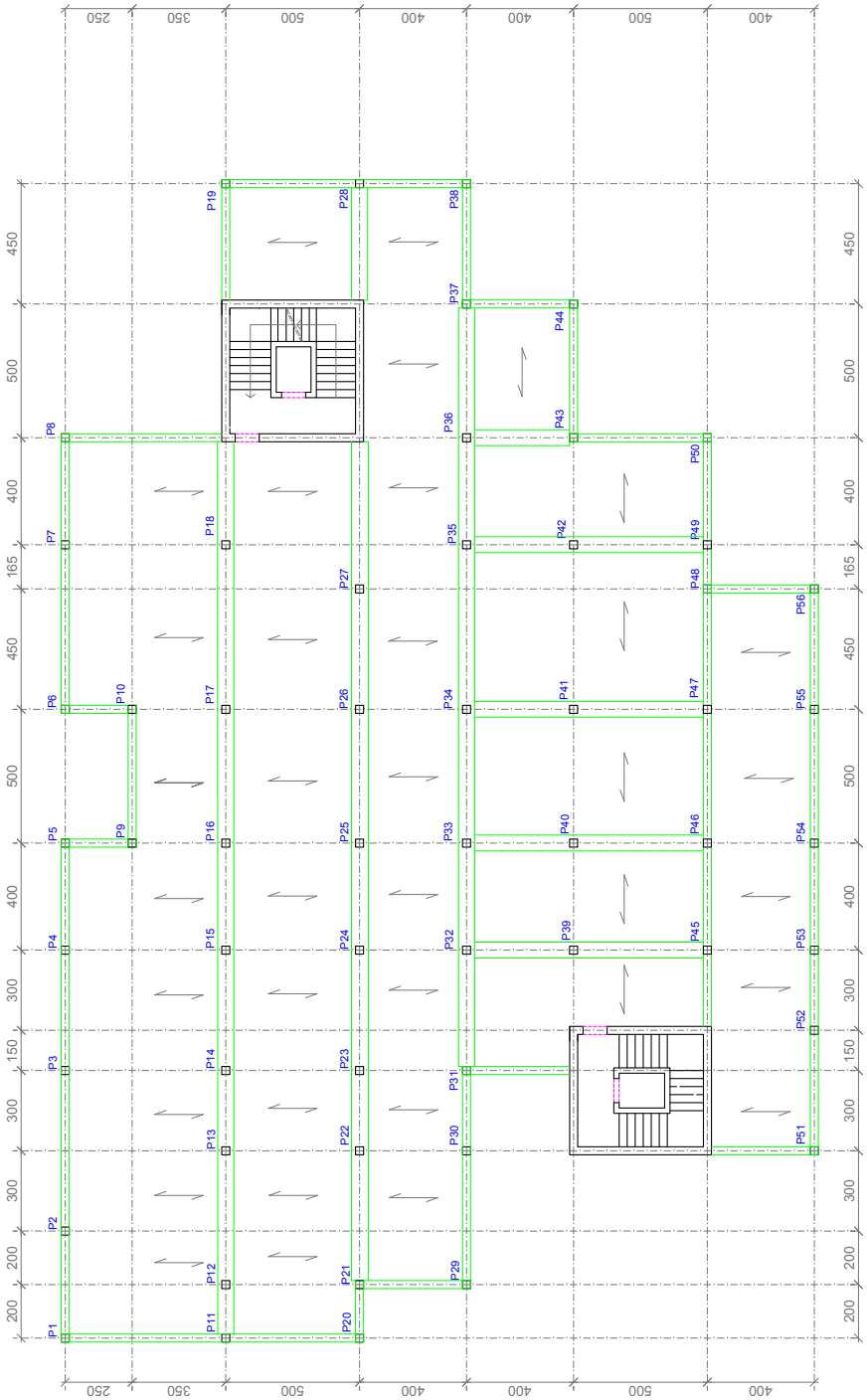
In prima approssimazione, per il calcolo delle azioni interne e delle relative caratteristiche di sollecitazione sull'elemento strutturale - con riferimento alla relazione per il corso di *Sicurezza Strutturale* dell'anno accademico 2019/2020 - sono stati considerati i seguenti valori:

- pilastri a sezione quadrata di dimensioni 30×30 cm;
- travi in spessore di solaio con larghezza pari a 60 cm;

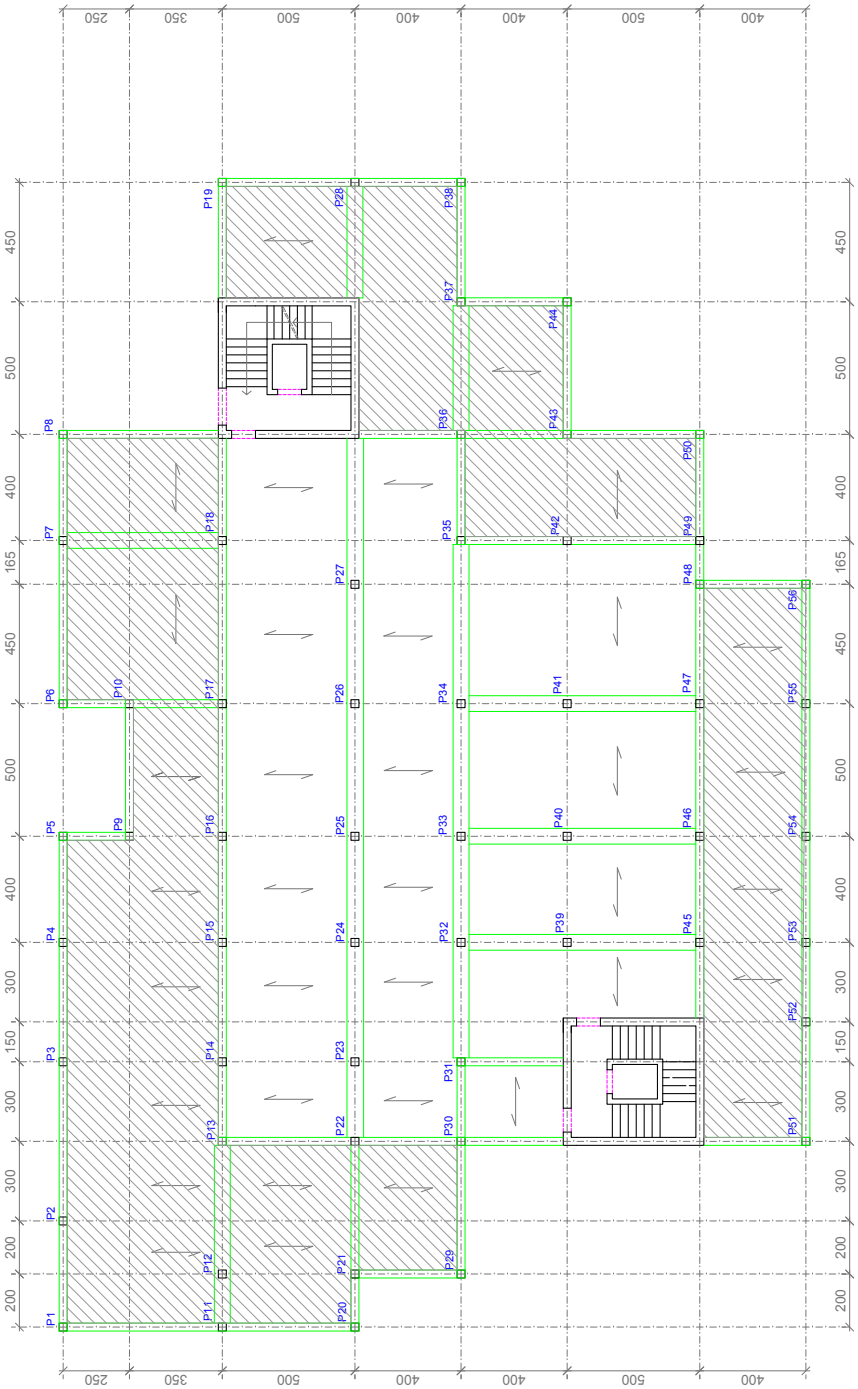
- travi perimetrali di larghezza 30 cm e altezza 50 cm;
- setti di spessore 30 cm.

Nel capitolo successivo sono riportate le piante della carpenteria di ogni piano, con riferimento agli elementi strutturali oggetto di studio.

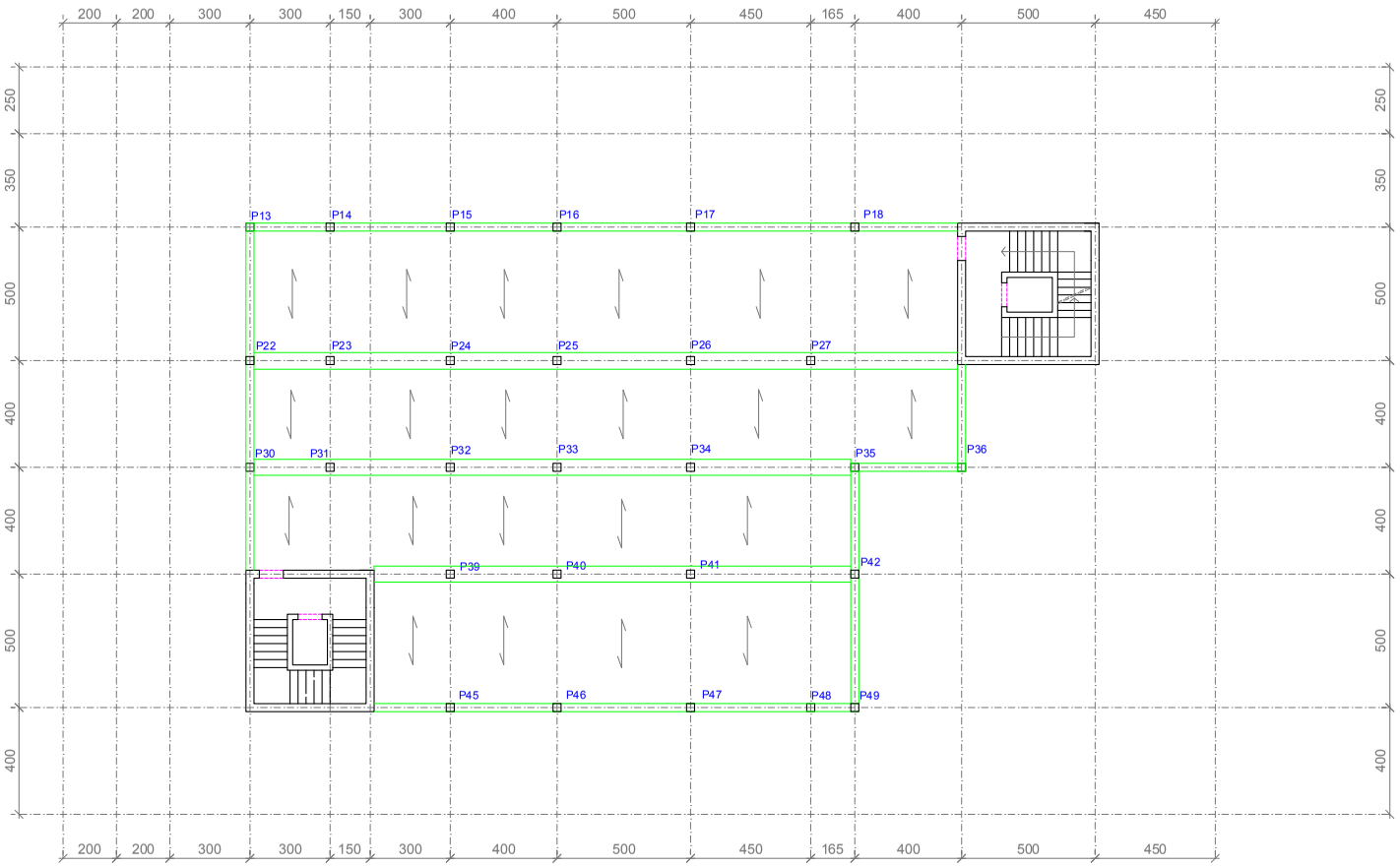
Piano Terra


250
350
500
400
400
500
400
450
500
400
165
450
500
400
300
150
300
300
200
200
P1
P2
P3
P4
P5
P6
P7
P8
P9
P10
P11
P12
P13
P14
P15
P16
P17
P18
P19
P20
P21
P22
P23
P24
P25
P26
P27
P28
P29
P30
P31
P32
P33
P34
P35
P36
P37
P38
P39
P40
P41
P42
P43
P44
P45
P46
P47
P48
P49
P50
P51
P52
P53
P54
P55
P56

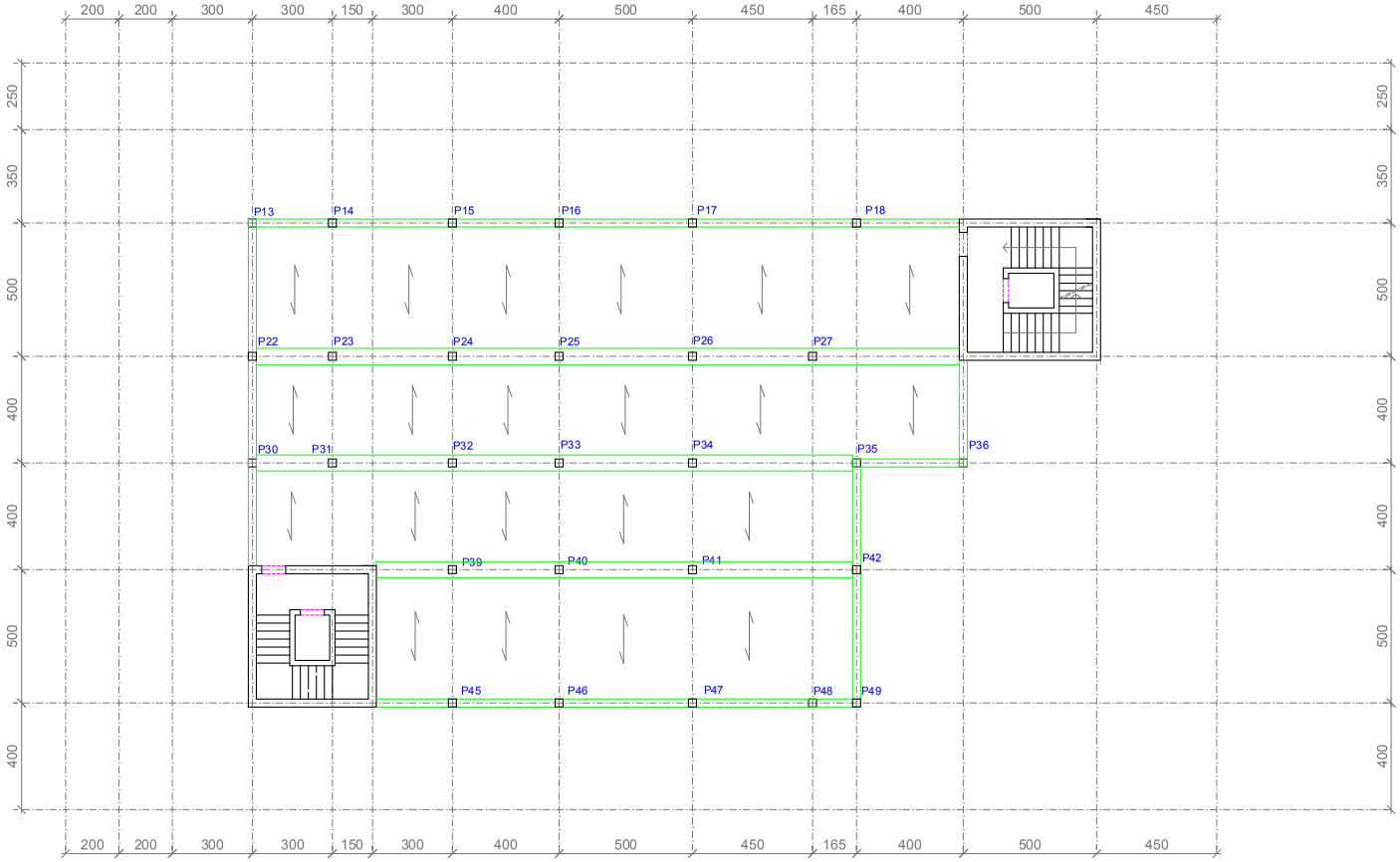
Piano Primo


P1
P2
P3
P4
P5
P6
P7
P8
P9
P10
P11
P12
P13
P14
P15
P16
P17
P18
P19
P20
P21
P22
P23
P24
P25
P26
P27
P28
P29
P30
P31
P32
P33
P34
P35
P36
P37
P38
P39
P40
P41
P42
P43
P44
P45
P46
P47
P48
P49
P50
P51
P52
P53
P54
P55
P56
250
350
500
400
400
500
400
450
500
165
450
500
400
300
150
300
300
200
200

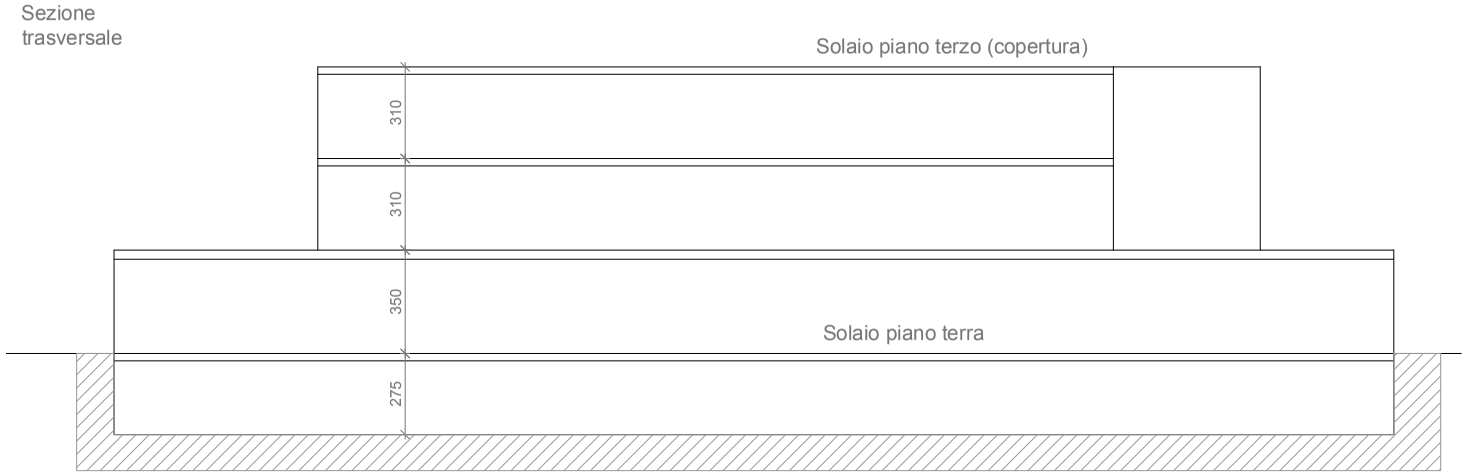
Piano Secondo



Copertura


200 200 300 300 150 300 400 500 450 165 400 500 450
250 350 500 400 400 500 400
P13 P14 P15 P16 P17 P18
P22 P23 P24 P25 P26 P27
P30 P31 P32 P33 P34 P35 P36
P39 P40 P41 P42
P45 P46 P47 P48 P49

Sezione


Sezione
trasversale
Solaio piano terzo (copertura)
310
310
350
Solaio piano terra
275

Capitolo 2

Piante ed elementi in esame

Come introdotto poco sopra, si allegano gli elaborati grafici della carpenteria (pagg. 3÷8) forniti nel testo dell'esercitazione di Sicurezza Strutturale. Nelle seguenti righe verranno, invece, introdotti gli elemeni strutturali oggetto del dimensionamento e della verifica accompagnati dai diagrammi delle azioni interne derivati durante la suddetta esercitazione.

Secondo le indicazioni riportate nel testo, gli elementi strutturali in esame sono la trave al *piano primo* che va dai pilastri $P13 \div P18$ fino al *vano scala*, e i pilastri $P27$ e $P36$, come segnato in figura 2.1 di pagina 10.

2.1 Trave

Come già scritto, la trave parte dal pilastro $P13$ passando per il $P18$ e si interrompe all'intersezione con il vano scala. L'elemento divide l'ambiente interno dall'ambiente esterno e ha una sezione rettangolare tale per cui non è in spessore di solaio. Ai fini del calcolo delle azioni interne, è stata considerata la sezione non armata di base $30\,cm$ e altezza $50\,cm$.

La schematizzazione della struttura ha consentito di rappresentarla come una trave continua su sette appoggi, e dunque composta da sei campate di lunghezze differenti (vedi figura 2.2).

Dall'analisi dei carichi effettuata, considerando le lunghezze di influenza della trave, il valore dei carichi gravanti sull'elemento sono riportati in tabella 2.1.

Come si può osservare in figura 2.2 in via cautelativa è stato assunto, sul nodo $N7$ tra trave e vano scala, un vincolo di carrello in alternativa all'incastro.

Tabella 2.1: Riepilogo dei carichi agenti sulla trave

	Zona [m]	$G_{1k}\,[kN/_m]$	$G_{2k}\,[kN/_m]$	$Q_{CAT.B2}\,[kN/_m]$	$Q_s\,[kN/_m]$	$Q_w\,[kN/_m]$
$P13 \div P16$	Interno (×2.50)	8.00	11.55	7.50	8.68 (min) 15.01 (max)	±0.50
	Esterno (×3.60)	11.52	7.98	14.40		
$P16 \div P17$	Interno (×2.50)	8.00	11.55	7.50	5.06 (min) 10.30 (max)	±0.30
	Esterno (×2.10)	6.72	4.65	8.40		
$P17 - VS$	Interno (×1.875)	6.00	8.66	5.63	2.41 (min) 4.17 (max)	±0.138
	Esterno (×1.00)	3.20	2.215	4.00		
Trave		3.75	9.20			

Piano Primo

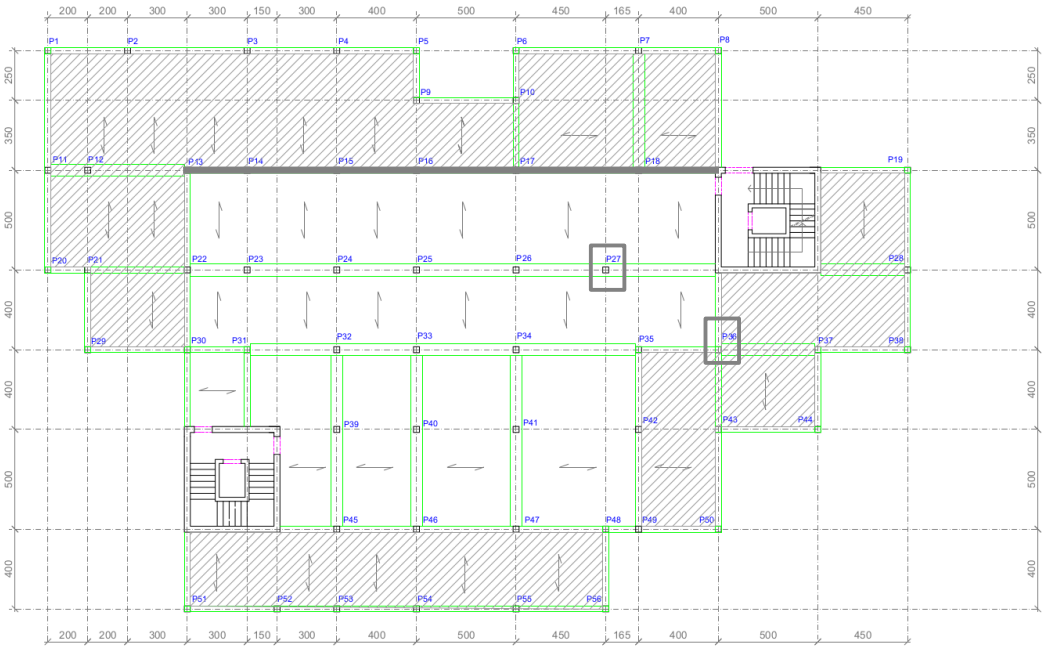
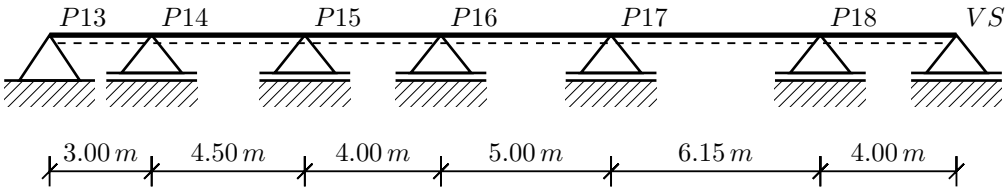
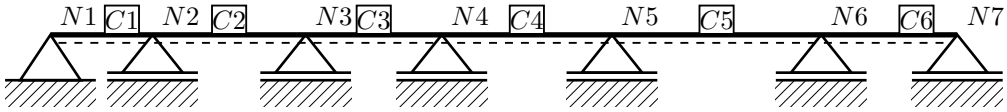


Figura 2.1: Elementi strutturali oggetto di studio - piano primo



(a) *Rappresentazione statica della trave e lunghezza delle campate*



(b) *Nomenclatura utilizzata per gli elementi*

Figura 2.2: Rappresentazione statica della trave continua

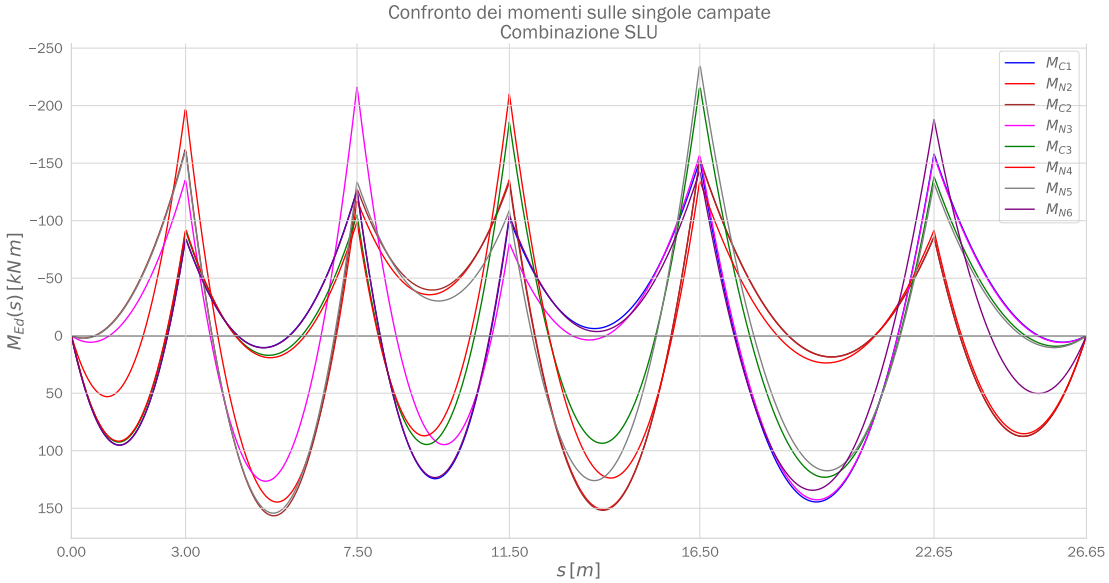


Figura 2.3: Confronto dei momenti flettenti sulle campate agli SLU

Questo fa si che il momento in campata $C6$ sia maggiore ma presuppone che il nodo trave – vano scala non sviluppi un momento flettente.

Le combinazioni delle azioni sono state effettuate secondo la normativa italiana vigente per la combinazione fondamentale agli stati limite ultimi e per le tre combinazioni agli stati limite di esercizio:

- combinazione rara o caratteristica;
- combinazione frequente;
- combinazione quasi permanente.

Di seguito si riportano i diagrammi degli inviluppi delle sollecitazioni di maggior interesse (momento flettente e taglio) per gli stati limite sopra citati.

Osservazione: i diagrammi dell'inviluppo (e.g. l'inviluppo dei momenti flettenti di figura 2.4a) sono stati ricavati dalla sovrapposizione dei diagrammi delle sollecitazioni delle otto combinazioni di carico, come dimostrato in figura 2.3.

2.1.1 Combinazione SLU

Per la combinazione fondamentale, gli inviluppi delle sollecitazioni sono rappresentati in figura 2.4; i valori massimi e minimi delle sollecitazioni sulle sezioni di riferimento per il dimensionamento della trave sono riportati nelle tabelle 2.2 e 2.3 di pagina 12.

Il momento flettente massimo (in modulo) si ha in corrispondenza del nodo $N5$, con un valore di $236.63\,kN\,m$, che verrà impiegato per il primo dimensionamento della sezione. Il valore di momento minimo positivo si ha in campata $C6$, tra il pilatro $P18$ e il vano scala. Dalla figura 2.4a si può osservare che nelle campate centrali ($C3$ e $C4$) il momento che tende le fibre

Tabella 2.2: Valori massimi e minimi del momento flettente in combinazione SLU

Sezione	$M_{Ed}^{+}[kN\,m]$	$s_{max}[m]$	$M_{Ed}^{-}[kN\,m]$	$s_{min}[m]$
C1	95.189448	1.26	NaN	NaN
N2	NaN	NaN	-199.249367	3.00
C2	156.565614	5.32	0.000000	NaN
N3	NaN	NaN	-216.792778	7.50
C3	124.347537	9.55	-39.690612	9.47
N4	NaN	NaN	-210.348968	11.50
C4	151.829401	13.96	-6.190556	13.74
N5	NaN	NaN	-236.629193	16.50
C5	144.511198	19.56	0.000000	NaN
N6	NaN	NaN	-187.959174	22.65
C6	87.580801	25.00	NaN	NaN

Tabella 2.3: Valori massimi e minimi del taglio in combinazione SLU

Sezione	$V_{Ed}^{+}[kN]$	$s_{max}[m]$	$V_{Ed}^{-}[kN]$	$s_{min}[m]$
N1	150.590167	0.00	0.000000	0.00
N2	286.437347	3.00	-245.457255	3.00
N3	272.636139	7.50	-286.334051	7.50
N4	266.790145	11.50	-266.497699	11.50
N5	246.693151	16.50	-261.914745	16.50
N6	208.848422	22.65	-202.221517	22.65
N7	0.000000	26.65	-105.286297	26.65

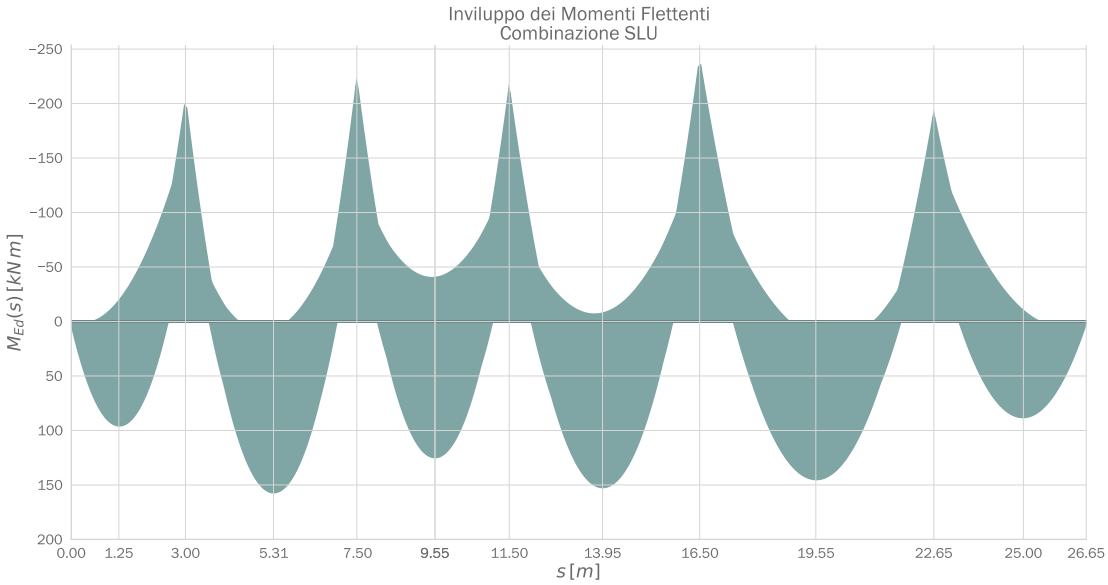
superiori non riesce ad annullarsi, il che implica che in quelle sezioni sarà necessaria una verifica specifica per quei valori di momento flettente negativo.

Per quanto riguarda il taglio, la sezione più sollecitata è in corrispondenza dell'appoggio $N2$ con un valore massimo (positivo) di $286.437\,kN$. Osservando i valori, positivi e negativi, riportati in tabella 2.3 si può intuire che sarà sicuramente necessaria un'armatura a taglio composta da staffe in ogni appoggio.

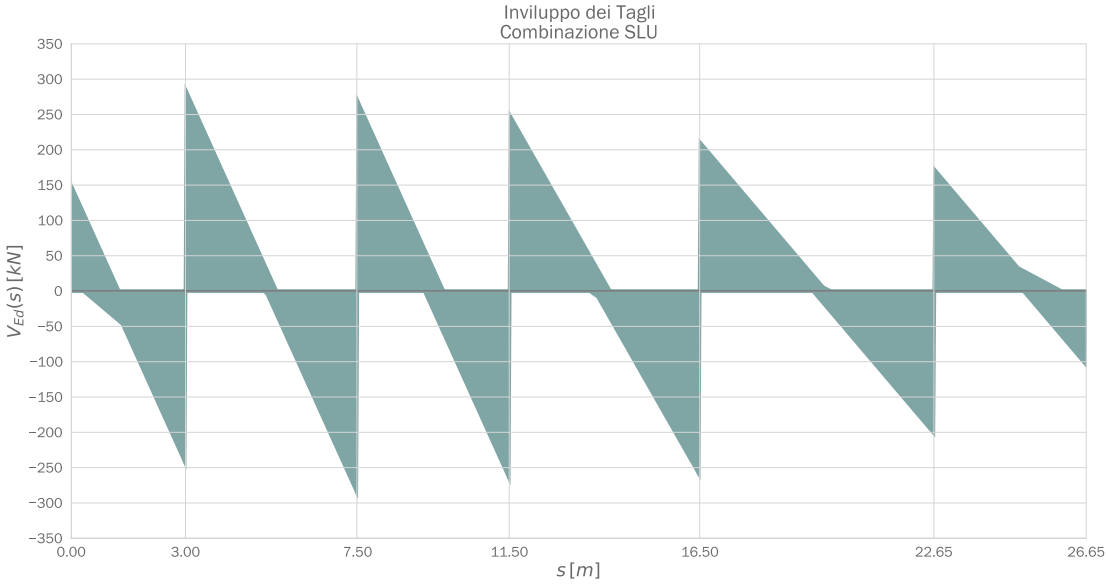
2.1.2 Combinazione SLE rara

Agli stati limite di esercizio, per loro definizione, i valori delle sollecitazioni sono nettamente inferiori rispetto a quanto visto per la combinazione fondamentale. In particolare per quanto riguarda il momento flettente che, secondo quanto riportato in tebella 2.4, ha il massimo di circa $148.80\,kN\,m$ - cioè circa 2/3 il valore del momento agli SLU in corrispondenza del medesimo nodo $N5$. Ad ogni modo, si nota che in questa combinazione delle azioni, l'inviluppo dei momenti flettenti è caratterizzato da una quasi continuità in corrispondenza dell'asse delle ascisse, che fa pensare al fatto che i diagrammi delle varie combinazioni di carico non si discostino poi di molto l'uno dall'altro. Il momento massimo di campata è di $87.16\,kN\,m$, uguagliato in $C2$.

Infine, il taglio massimo lo si raggiunge sul ramo positivo del nodo $N2$, con un valore di $186.10\,kN$.

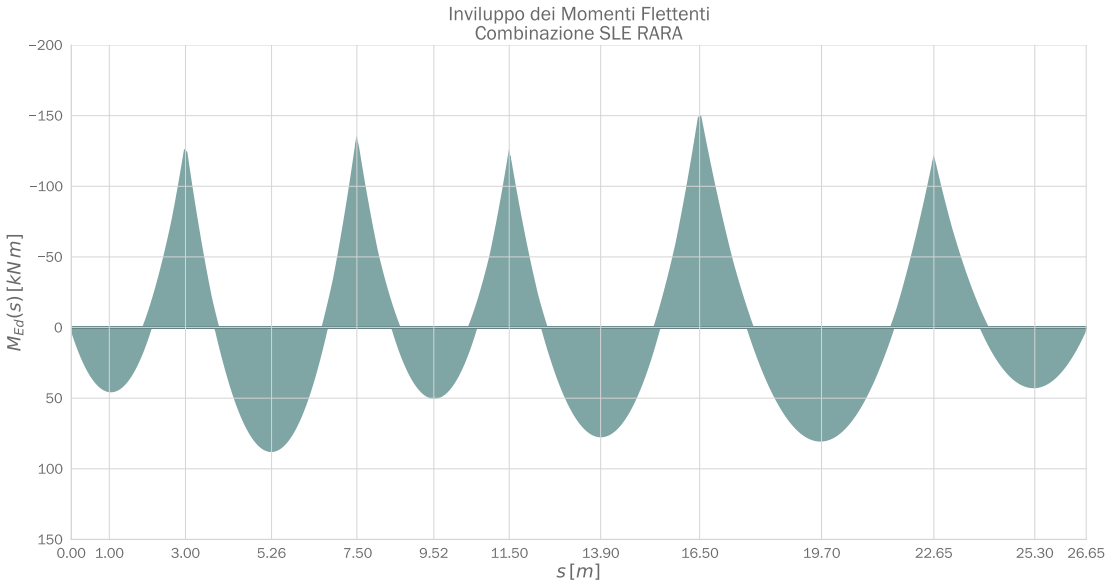


(a) *Diagramma di inviluppo dei momenti flettenti in combinazione SLU*

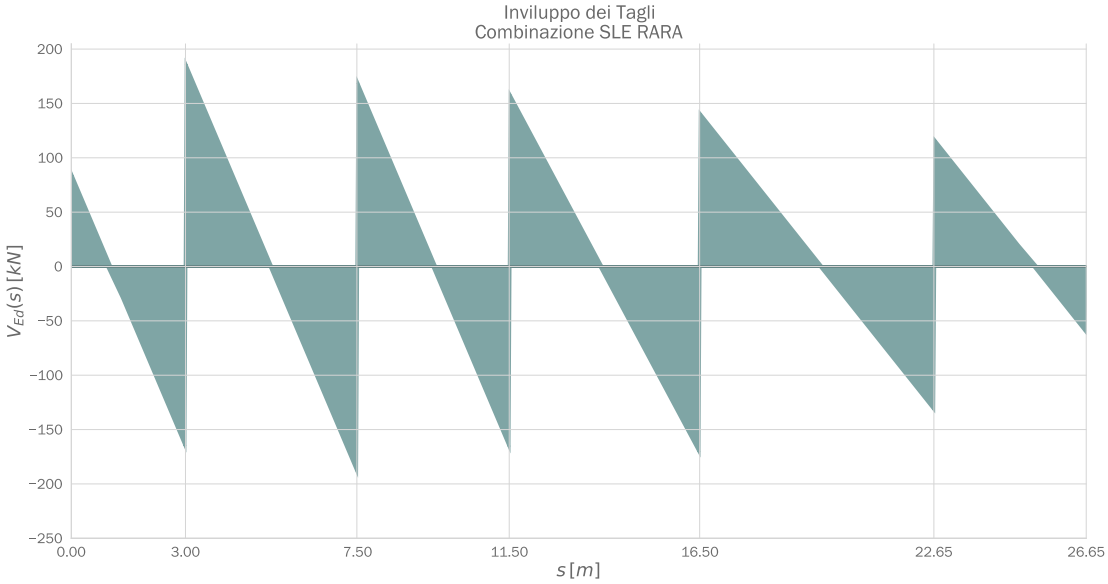


(b) *Diagramma di inviluppo dei tagli in combinazione SLU*

Figura 2.4: Diagrammi degli inviluppi delle sollecitazioni per la combinazione agli SLU



(a) *Diagramma di inviluppo dei momenti flettenti in combinazione SLE rara*



(b) *Diagramma di inviluppo dei tagli in combinazione SLE rara*

Figura 2.5: Diagrammi degli inviluppi delle sollecitazioni per la combinazione agli SLE rara

Tabella 2.4: Valori massimi e minimi del momento flettente in combinazione SLE rara

Sezione	$M_{Ed}^{+}[kN\,m]$	$s_{max}[m]$	$M_{Ed}^{-}[kN\,m]$	$s_{min}[m]$
C1	44.8783	1	NaN	NaN
N2	NaN	NaN	-124.53	3
C2	87.1603	5.26	0	NaN
N3	NaN	NaN	-130.765	7.5
C3	49.5098	9.52	0	NaN
N4	NaN	NaN	-121.154	11.5
C4	76.7491	13.9	0	NaN
N5	NaN	NaN	-148.799	16.5
C5	79.7629	19.7	0	NaN
N6	NaN	NaN	-117.967	22.65
C6	41.9934	25	NaN	NaN

Tabella 2.5: Valori massimi e minimi del taglio in combinazione SLE rara

Sezione	$V_{Ed}^{+}[kN]$	$s_{max}[m]$	$V_{Ed}^{-}[kN]$	$s_{min}[m]$
N1	83.9204	0	0	0
N2	186.094	3	-165.135	3
N3	169.265	7.5	-188.299	7.5
N4	158.119	11.5	-165.893	11.5
N5	140.929	16.5	-170.792	16.5
N6	116.471	22.65	-131.627	22.65
N7	0	26.65	-59.6292	26.65

2.1.3 Combinazione SLE frequente

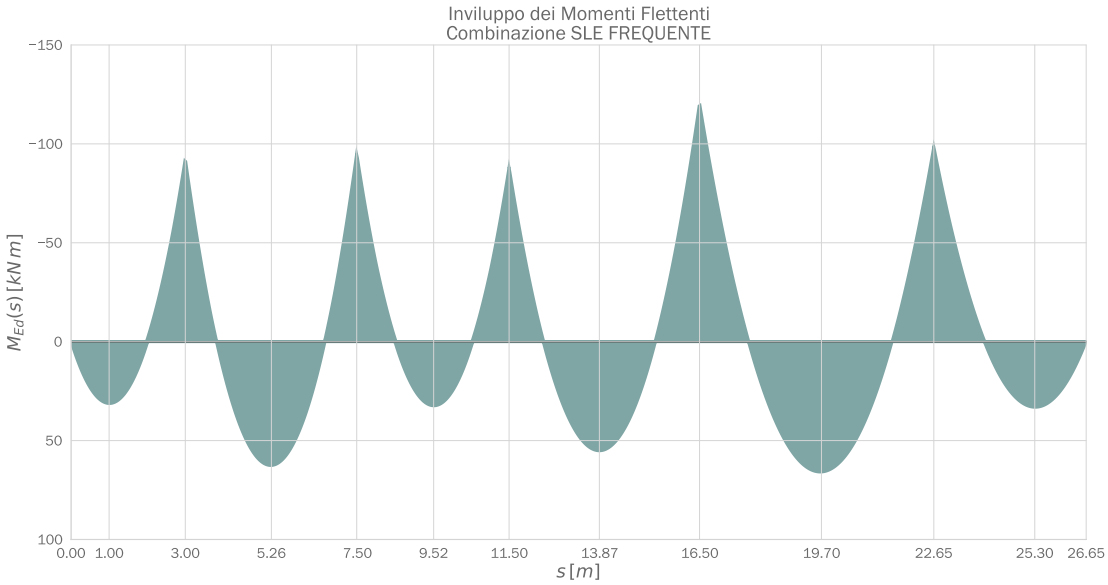
Di seguito si riportano le tabelle e i diagrammi delle sollecitazioni per quanto riguarda la combinazione agli SLE frequente.

Tabella 2.6: Valori massimi e minimi del momento flettente in combinazione SLE frequente

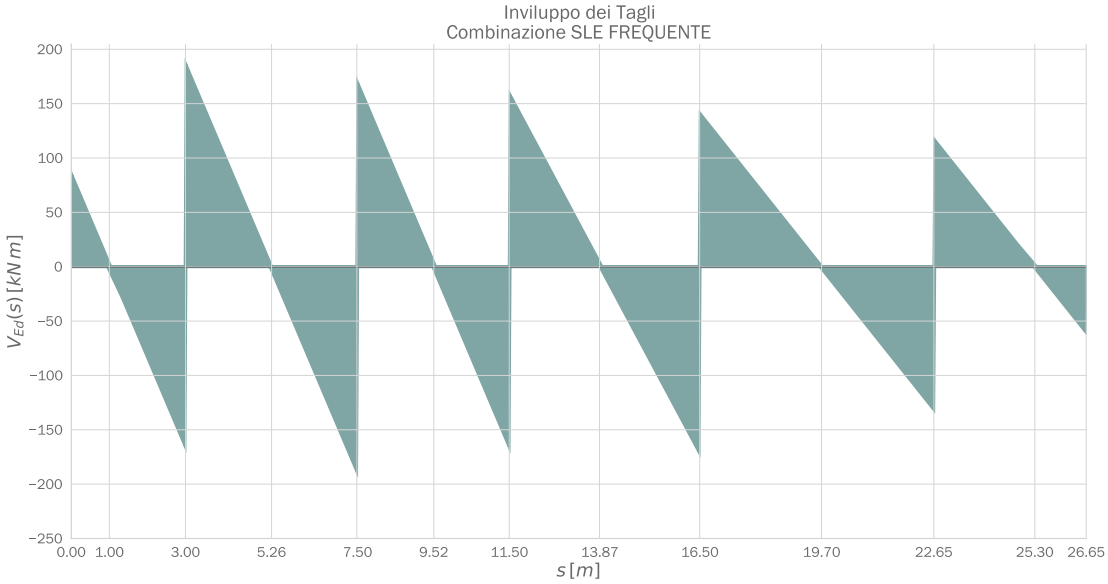
Sezione	$M_{Ed}^{+}[kN\,m]$	$s_{max}[m]$	$M_{Ed}^{-}[kN\,m]$	$s_{min}[m]$
C1	31.3072	1	NaN	NaN
N2	NaN	NaN	-91.5441	3
C2	62.6374	5.26	0	NaN
N3	NaN	NaN	-95.1011	7.5
C3	32.4615	9.52	0	NaN
N4	NaN	NaN	-88.3851	11.5
C4	55.1968	13.87	0	NaN
N5	NaN	NaN	-119.521	16.5
C5	65.9368	19.7	0	NaN
N6	NaN	NaN	-98.8067	22.65
C6	33.2037	25	NaN	NaN

Tabella 2.7: Valori massimi e minimi del taglio in combinazione SLE frequente

Sezione	$V_{Ed}^{+}[kN]$	$s_{max}[m]$	$V_{Ed}^{-}[kN]$	$s_{min}[m]$
N1	147.527	0	0	0
N2	284.831	3	-244	3
N3	270.033	7.5	-285.874	7.5
N4	249.12	11.5	-266.217	11.5
N5	211.204	16.5	-260.609	16.5
N6	172.32	22.65	-202.19	22.65
N7	0	26.65	-103.721	26.65



(a) *Diagramma di inviluppo dei momenti flettenti in combinazione SLE frequente*



(b) *Diagramma di inviluppo dei tagli in combinazione SLE frequente*

Figura 2.6: Diagrammi degli inviluppi delle sollecitazioni per la combinazione agli SLE frequente

2.1.4 Combinazione SLE quasi permanente

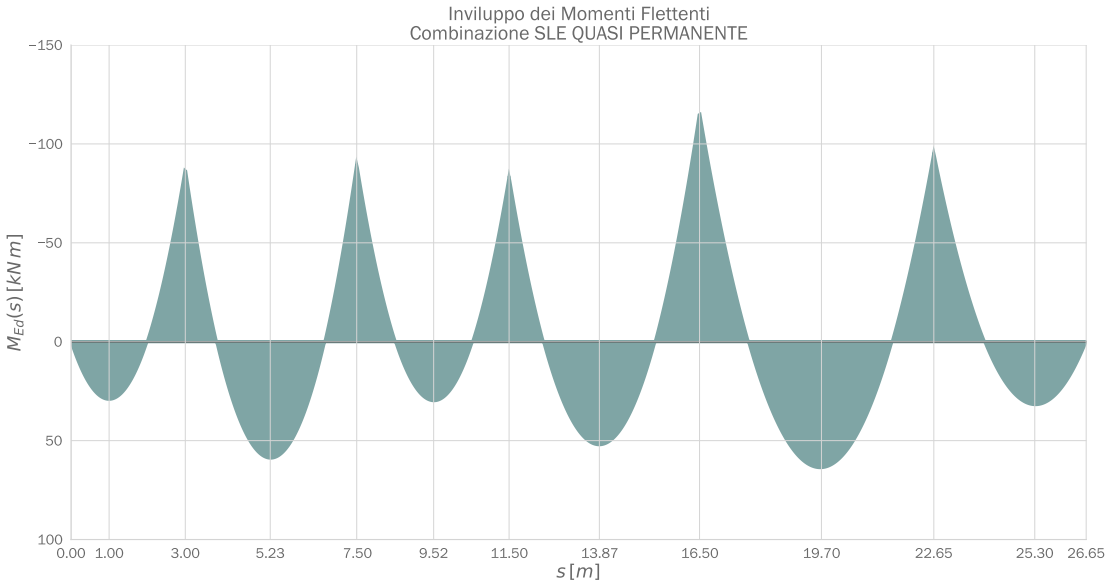
L'ultima combinazione delle azioni richieste dalla normativa italiana è la combinazione quasi permanente. Come fatto in precedenza, si allegano i valori delle sollecitazioni sulle sezioni di riferimento e i diagrammi delle azioni interne.

Tabella 2.8: Valori massimi e minimi del momento flettente in combinazione SLE quasi permanente

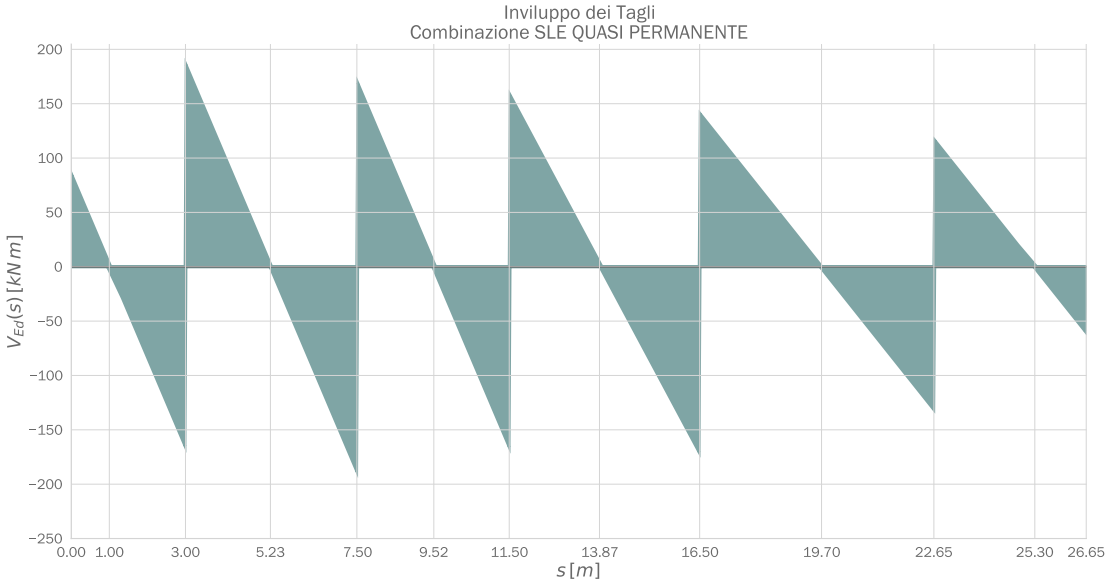
Sezione	$M_{Ed}^{+}[kN\,m]$	$s_{max}[m]$	$M_{Ed}^{-}[kN\,m]$	$s_{min}[m]$
C1	29.1805	1	NaN	NaN
N2	NaN	NaN	-86.7303	3
C2	58.9209	5.23	0	NaN
N3	NaN	NaN	-89.9972	7.5
C3	29.8967	9.52	0	NaN
N4	NaN	NaN	-83.7524	11.5
C4	52.1556	13.87	0	NaN
N5	NaN	NaN	-115.072	16.5
C5	63.7428	19.7	0	NaN
N6	NaN	NaN	-95.7222	22.65
C6	31.8861	25.32	NaN	NaN

Tabella 2.9: Valori massimi e minimi del taglio in combinazione SLE quasi permanente

Sezione	$V_{Ed}^{+}[kN]$	$s_{max}[m]$	$V_{Ed}^{-}[kN]$	$s_{min}[m]$
N1	83.9204	0	0	0
N2	186.094	3	-165.135	3
N3	169.265	7.5	-188.299	7.5
N4	158.119	11.5	-165.893	11.5
N5	140.929	16.5	-170.792	16.5
N6	116.471	22.65	-131.627	22.65
N7	0	26.65	-59.6292	26.65



(a) *Diagramma di inviluppo dei momenti flettenti in combinazione SLE quasi permanente*



(b) *Diagramma di inviluppo dei tagli in combinazione SLE quasi permanente*

Figura 2.7: Diagrammi degli inviluppi delle sollecitazioni per la combinazione agli SLE quasi permanente

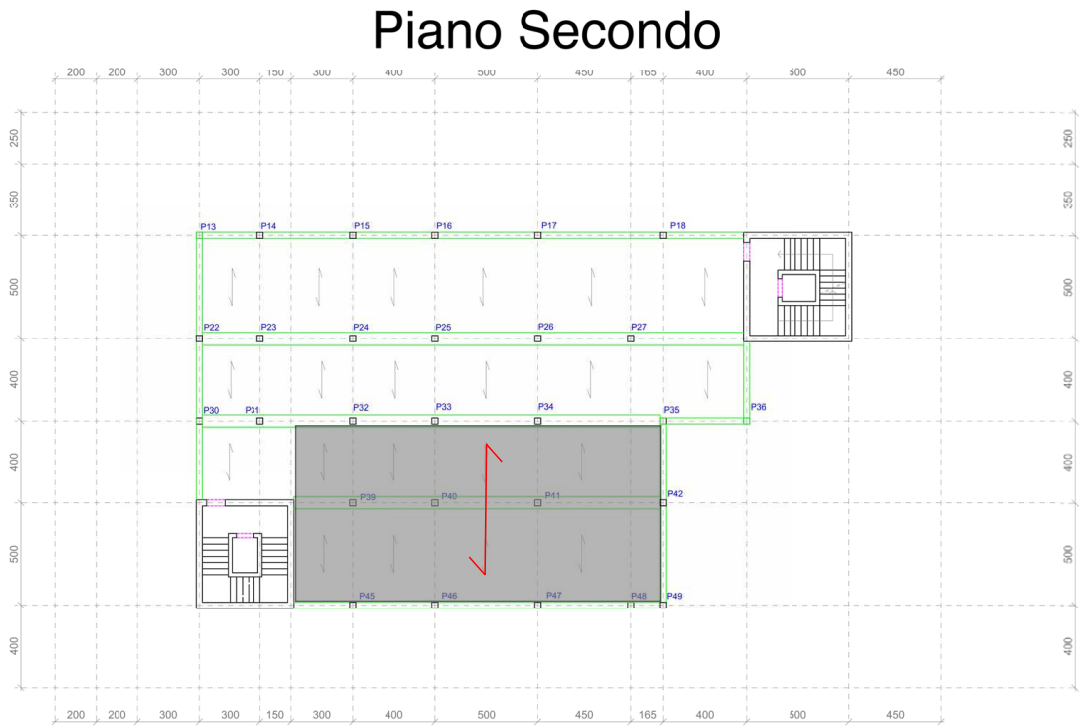


Figura 2.8: Scelta del solaio da progettare e verificare

2.2 Solaio

Il solaio da analizzare è stato scelto in modo tale che fosse un solaio in laterocemento (solai interni), a due campate e, per evitare ripetitività e ridondanze, che non fosse posto allo stesso livello della trave. Per questo si è optato per il solaio al piano secondo rappresentato in figura 2.8. Per ovviare a condizioni di particolare simmetria dei carichi e quindi delle azioni interne, si è preferito scegliere il solaio continuo tra due campate di luce differente: l'orditura del solaio infatti prevede una campata di $4.00\,m$ e una campata di $5.00\,m$.

Procedendo allo stesso modo per quanto fatto per la trave, si risolve la struttura con il metodo delle forze - andando a inserire delle cerniere interne in corrispondenza degli appoggi interni (dove è presente continuità) e applicando il relativo momento concentrato al nodo.

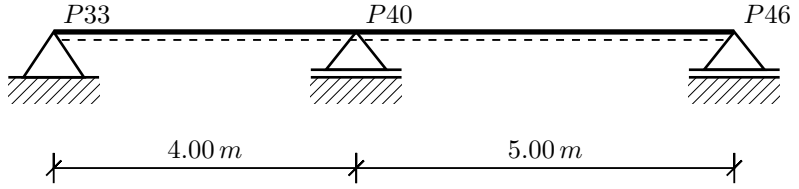
Applicando la condizione di compatibilità sulle rotazioni al nodo centrale ($NS2$) ci si riconduce alla forma matriciale generica

$$\underline{\underline{K}} \cdot \underline{X} = \underline{F}$$

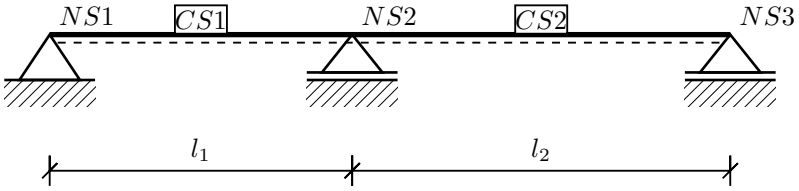
dove $\underline{\underline{K}}$ è la matrice di rigidezza della struttura, $\underline{X}$ è il vettore dei momenti incogniti ai nodi e $\underline{F}$ è il vettore dei carichi esterni applicati. In questo particolare caso, avendo svincolato un solo nodo, il sistema si riconduce a un'unica equazione scalare

$$\frac{2\,l_1 + 2\,l_2}{6\,EJ} \cdot m_2 = -\frac{q_1\,l_1^3 + q_2\,l_2^3}{24\,EJ}$$

A questo punto il sistema sarebbe staticamente determinato se fossero noti i carichi q_1 e q_2. In prima approssimazione si può risolvere il sistema ponendo prima il carico q_1 pari all'unità (e $q_2 =$



(a) *Rappresentazione statica del solaio e lunghezza delle campate*



(b) *Nomenclatura utilizzata per gli elementi*

Figura 2.9: Rappresentazione statica del solaio continuo a due campate

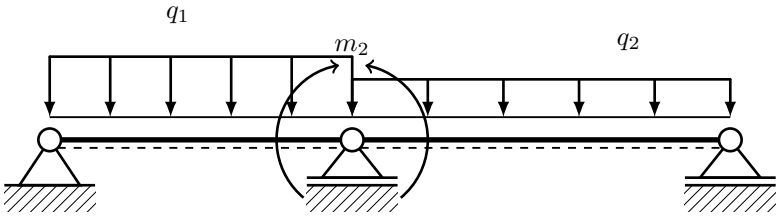


Figura 2.10: Soluzione statica della trave continua – metodo delle forze

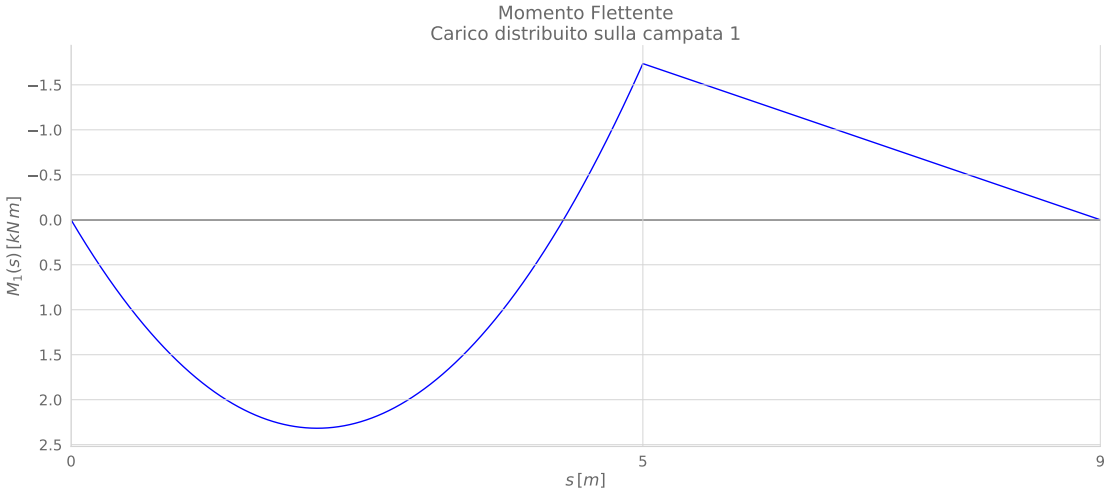
0) e poi il suo duale $q_1 = 0$, $q_2 = 1$. In entrambi i casi, una volta ottenute le reazioni vincolari, si ricava l'andamento del diagramma del momento flettente per il carico unitario considerato; quello che ne consegue è rappresentato in figura 2.11. I diagrammi rappresentati vanno confrontati con il generico diagramma del momento flettente di una trave continua a due campate, da cui si deducono le combinazioni di carico significative, che in questo caso sono tre:

- combinazione `MAX-MIN`;
- combinazione `MAX-MAX`;
- combinazione `MIN-MAX`.

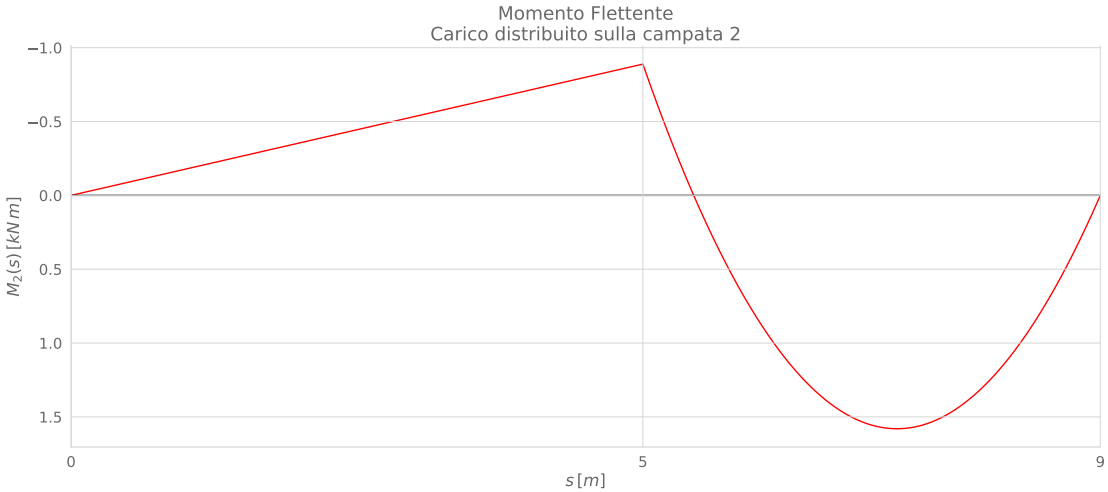
Osservazione: è stato applicato il medesimo procedimento anche per gli sforzi di taglio ma, per una questione di ripetitività, si è deciso di non riportare i passaggi.

2.2.1 Analisi dei carichi

Il solaio oggetto di studio è situato al secondo piano, in cui è prevista una destinazione d'uso di civile abitazione. Nelle righe che seguono verranno calcolati i carichi distribuiti gravanti su un metro quadro di solaio.



(a) *Diagramma del momento flettente con carico unitario applicato sulla prima campata*



(b) *Diagramma del momento flettente con carico unitario applicato sulla seconda campata*

Figura 2.11: Diagramma dei momenti flettenti per carichi distribuiti unitari sulle campate

Carichi permanenti strutturali

Nei carichi permanenti strutturali ricade il peso proprio del solaio che è stato definito nel capitolo 1.

$$g_{1k} = 3.20\,\frac{kN}{m^2}$$

Carichi permanenti non strutturali

Essendo un solaio interno, il contributo dei carichi permanenti non strutturali è dato da

$$
\begin{aligned}
g_{2k,sottofondo} &= \gamma_{cls,all} \cdot s_{sottofondo} = 16\,\frac{kN}{m^3} \cdot 0.08\,\mathrm{m} = 1.28\,\frac{kN}{m^2} \\
g_{2k,massetto} &= \gamma_{massetto} \cdot s_{massetto} = 24\,\frac{kN}{m^3} \cdot 0.06\,\mathrm{m} = 1.44\,\frac{kN}{m^2} \\
g_{2k,pavimento} &= 0.50\,\frac{kN}{m^2} \\
g_{2k,intonaco} &= \gamma_{intonaco} \cdot s_{intonaco} = 20\,\frac{kN}{m^3} \cdot 0.01\,\mathrm{m} = 0.20\,\frac{kN}{m^2}
\end{aligned}
$$

Inoltre, il carico lineare dato dalle tramezze interne può essere calcolato come segue

$$
\begin{aligned}
G_{2,div} &= \gamma_{div} \cdot s_{div} \cdot h_{div} + 2 \cdot \gamma_{intonaco} \cdot s_{intonaco} \cdot h_{div} = \\
&= 8.00\,\frac{kN}{m^3} \cdot 0.08\,\mathrm{m} \cdot (3.10 - 0.25)\,\mathrm{m} + 20\,\frac{kN}{m^3} \cdot 0.01\,\mathrm{m} \cdot (3.10 - 0.25 - 0.01)\,\mathrm{m} = \\
&= 2.96\,\frac{kN}{m}
\end{aligned}
$$

La normativa consente di convertire il carico per unità di lunghezza delle divisorie in un carico uniformemente distribuito su un'area. Per elementi divisori con $2 < G_2 \leq 3\,kN/_m$ si ha

$$
g_{2k,div} = 1.20\,\frac{kN}{m^2}
$$

In definitiva i carichi permanenti non strutturali agenti sul solaio valgono

$$
\begin{aligned}
g_{2k} &= g_{2k,sottofondo} + g_{2k,massetto} + g_{2k,pavimento} + g_{2k,intonaco} + g_{2k,div} = \\
&= (1.28 + 1.44 + 0.50 + 0.20 + 1.20)\,\frac{kN}{m^2} = \\
&= 4.62\,\frac{kN}{m^2}
\end{aligned}
$$

Carichi variabili

Come specificato poco sopra, la destinazione d'uso dell'ambiente è di civile abitazione; nel capitolo 3.1.4 delle $NTC2018$ riferito ai sovraccarichi è presente la Tab. 3.1.II- *Valori dei sovraccarichi per la diverse categorie d'uso delle costruzioni*, da cui si ricava il valore del carico variabile ricadente nella categoria *A-Ambienti ad uso residenziale*, che vale

$$
q_k = 2\,\frac{kN}{m^2}
$$

2.2.2 Combinazione delle azioni

Nel caso del solaio, la combinazione delle azioni interne di riferimento sono quelle agli *Stati Limite Ultimi*. Le *Norme Tecniche per le Costruzioni 2018* nel capitolo 2.5.3 definiscono la combinazione fondamentale come segue:

$$
\gamma_{G1} \cdot G_{1k} + \gamma_{G2} \cdot G_{2k} + \gamma_{Q1} \cdot Q_{1k} + \gamma_{Q2} \cdot \psi_{02} \cdot Q_{2k} + \gamma_{Q3} \cdot \psi_{03} \cdot Q_{3k} + \ldots
$$

Tabella 2.10: Valori dei coefficienti di combinazione

	γ_{SF}	γ_F	ψ_{0i}	ψ_{1i}	ψ_{2i}
G_1	1.3	1.0			
G_2	1.5	0.8			
$Q_{CAT.A}$	1.5	0	0.7	0.5	0.3

Essendo presente un solo carico variabile, la combinazione delle azioni è facilmente calcolata. I coefficienti di combinazione sono stati estrapolati dalla Tab. 2.5.*I* delle *Norme Tecniche per le Costruzioni* del 2018 e sono riportati in tabella 2.10.

Allora, i valori del carico massimo e minimo distribuito sul solaio sono

$$\begin{aligned} q_{max} &= \gamma_{G1,SF}\, g_{1k} + \gamma_{G2,SF}\, g_{2k} + \gamma_{Q,SF}\, q_k = \\ &= 1.3 \cdot 3.2 + 1.5 \cdot 4.62 + 1.5 \cdot 2 = 14.10\, \frac{kN}{m^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{min} &= \gamma_{G1,F}\, g_{1k} + \gamma_{G2,F}\, g_{2k} + \gamma_{Q,F}\, q_k = \\ &= 1.0 \cdot 3.2 + 0.8 \cdot 4.62 + 0 \cdot 2 = 6.90\, \frac{kN}{m^2} \end{aligned}$$

Come si può notare, questi valori sono riferiti ad un carico distribuito su un'area. Supponendo di considerare una striscia di solaio di $1\,m$, i carichi distribuiti su una linea risultano

$$\begin{aligned} Q_{max} &= 14.10\, \frac{kN}{m^2} \cdot 1\,m = 14.10\, \frac{kN}{m} \\ Q_{min} &= 6.90\, \frac{kN}{m^2} \cdot 1\,m = 6.90\, \frac{kN}{m} \end{aligned}$$

Momento flettente

I valori appena trovati vanno moltiplicati per l'andamento dei momenti calcolato in precedenza in modo tale da definire le combinazioni di carico; ad esempio, per la prima combinazione ($MAX - MIN$)

$$Q_{max} \cdot M_1(s) + Q_{min} \cdot M_2(s)$$

da cui si ricava la curva M_{C1} di figura 2.12

Si procede analogamente e si trovano le curve M_{N2} e M_{C2}.

L'inviluppo dei momenti flettenti ricavato è quello di figura 2.13 di pagina 25.

I valori significativi sono riportati nella seguente tabella.

Tabella 2.11: Valori massimi e minimi del momento flettente su $1\,m$ di solaio

Sezione	$M^+_{Ed}[kN\,m]$	$s_{max}[m]$	$M^-_{Ed}[kN\,m]$	$s_{min}[m]$
CS1	30.0855	2.07	NaN	NaN
NS2	NaN	NaN	-36.9699	5
CS2	17.2754	7.44	0	NaN

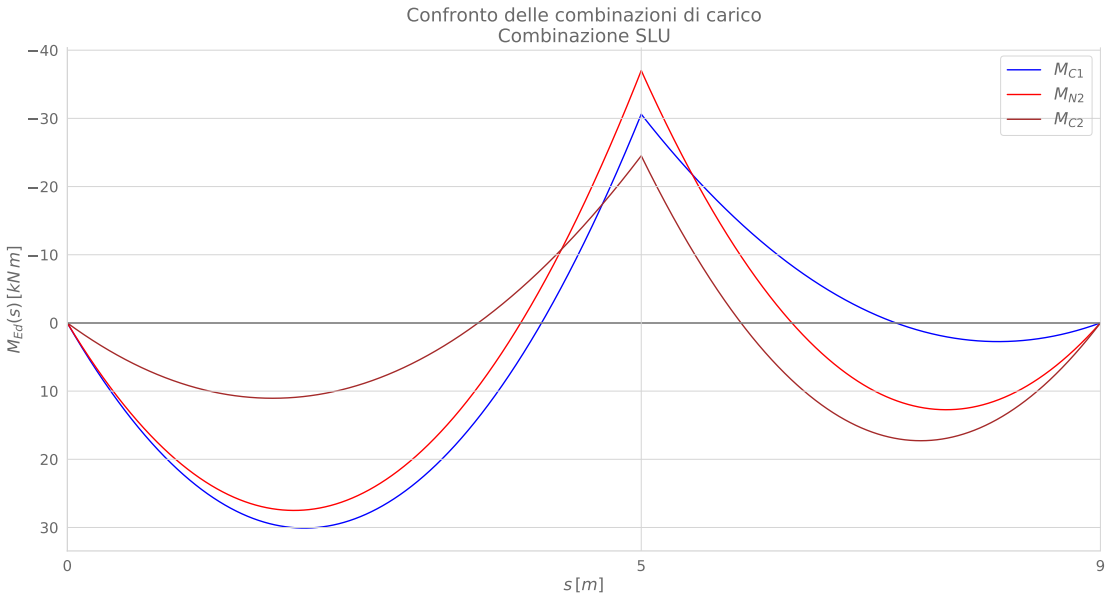


Figura 2.12: Confronto delle tre combinazioni di carico: $MAX - MIN$, $MAX - MAX$, $MIN - MAX$

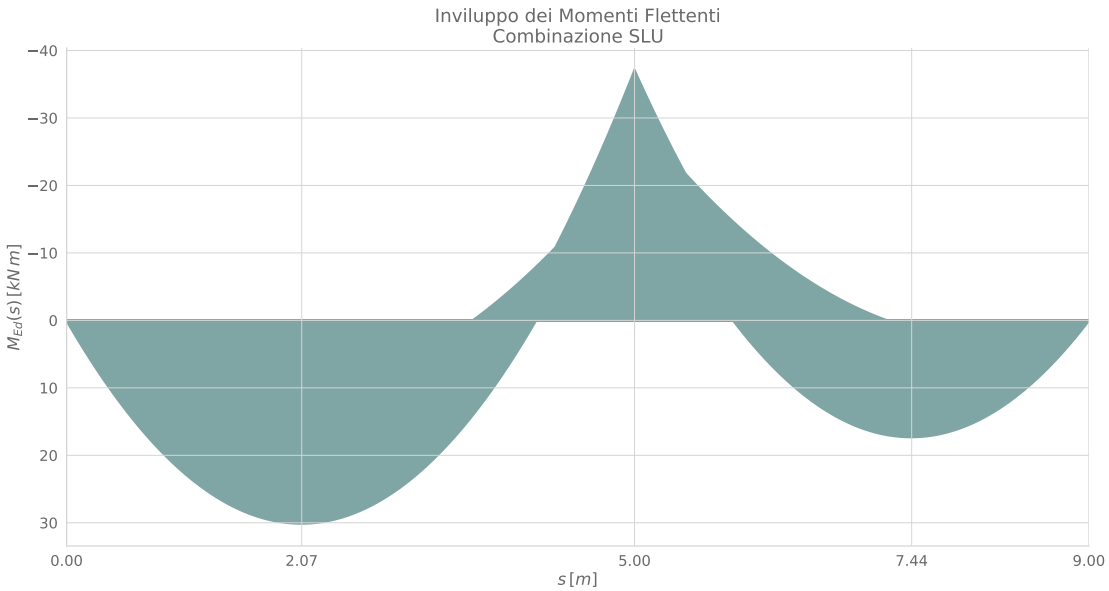


Figura 2.13: Inviluppo dei momenti flettenti del solaio

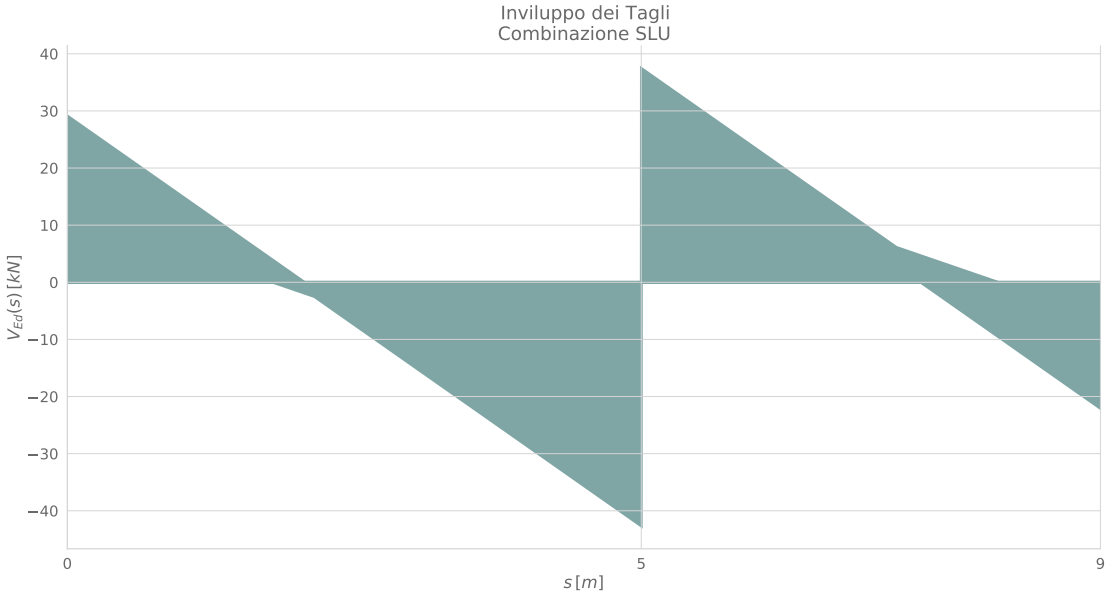


Figura 2.14: Inviluppo dei tagli del solaio

Taglio

Il procedimento deve essere applicato anche per il taglio e fornisce il diagramma di inviluppo di figura 2.14 e la tabella 2.12 dei valori significativi del taglio.

Tabella 2.12: Valori massimi e minimi del taglio su $1\,m$ di solaio

Sezione	$V_{Ed}^{+}[kN]$	$s_{max}[m]$	$V_{Ed}^{-}[kN]$	$s_{min}[m]$
NS1	29.1134	0	0	0
NS2	37.439	5	-42.6525	5
NS3	0	9	-22.0437	9

Tabella 2.13: Valori massimi e minimi dell'azione assiale di compressione sul pilastro $P27$ in combinazione SLU

$s\,[m]$	$N_{max}\,[kN]$	$N_{min}\,[kN]$
0.00	385.05600	180.8920
2.85	393.39225	187.3045
5.95	854.78775	431.0467
9.45	1361.77705	678.8797
12.20	1881.88080	886.7112

Tabella 2.14: Valori massimi e minimi dell'azione assiale di compressione sul pilastro $P27$ in combinazione SLE rara

$s\,[m]$	$N_{max}\,[kN]$	$N_{min}\,[kN]$
0.00	273.0600	232.8400
2.85	279.4725	239.2525
5.95	605.6715	565.4515
9.45	961.0725	937.7725
12.20	1321.9000	1281.6800

2.3 Pilastri

Come riportato in figura 2.1 di pagina 10 i pilastri analizzati durante il corso di Sicurezza Strutturale sono i $P27$ e $P36$. Il primo è un pilastro centrale, mentre il secondo è un pilastro d'angolo che divide l'ambiente interno dall'ambiente esterno. Al piano primo, il pilastro $P36$ divide l'area interna di destinazione ad uffici aperti al pubblico dal terrazzo esterno.

L'analisi delle caratteristiche di sollecitazione sui pilastri è stata eseguita rimuovendo l'ipotesi di presso-flessione e postulando, perciò, la presenza di soli sforzi di compressione. Dai calcoli effettuati sono stati ricavati i diagrammi della sollecitazione di azione assiale massima e minima agente sui pilastri, per ogni stato limite definito dalla normativa tecnica.

2.3.1 Pilastro $P27$

Combinazione agli SLU

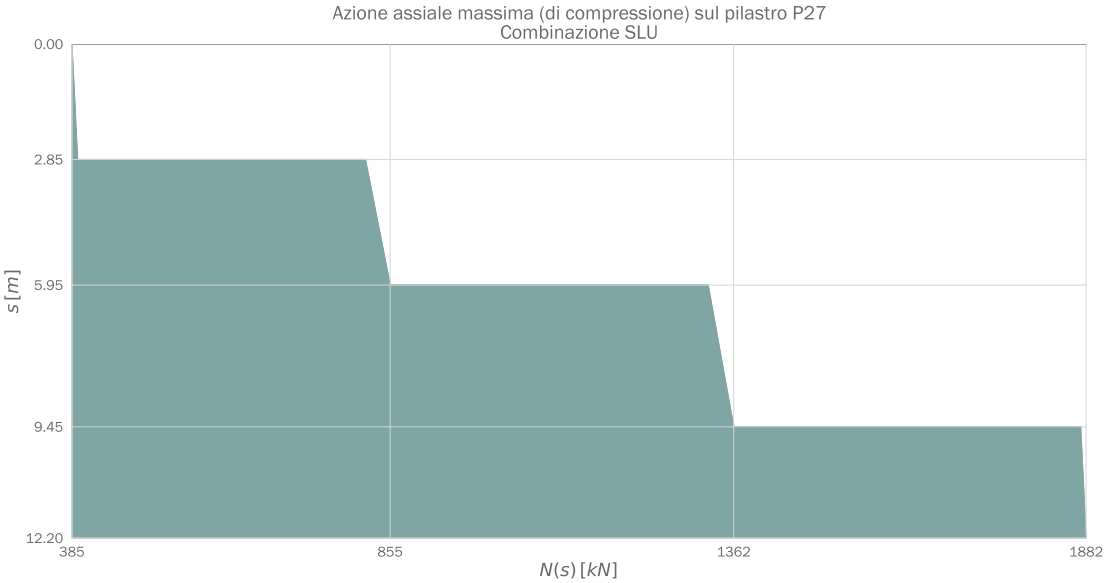
Dalla combinazione agli stati limite ultimi si ricavano i diagrammi di figura 2.15.

Come introdotto nel capitolo 1, i pilastro $P27$ ha sezione iniziale, in prima approssimazione, di dimensioni $30 \times 30\,cm$. Di seguito si riportano i diagrammi per le varie combinazioni delle azioni. I valori massimi di compressione ad ogni livello sono riportati in tabella 2.13

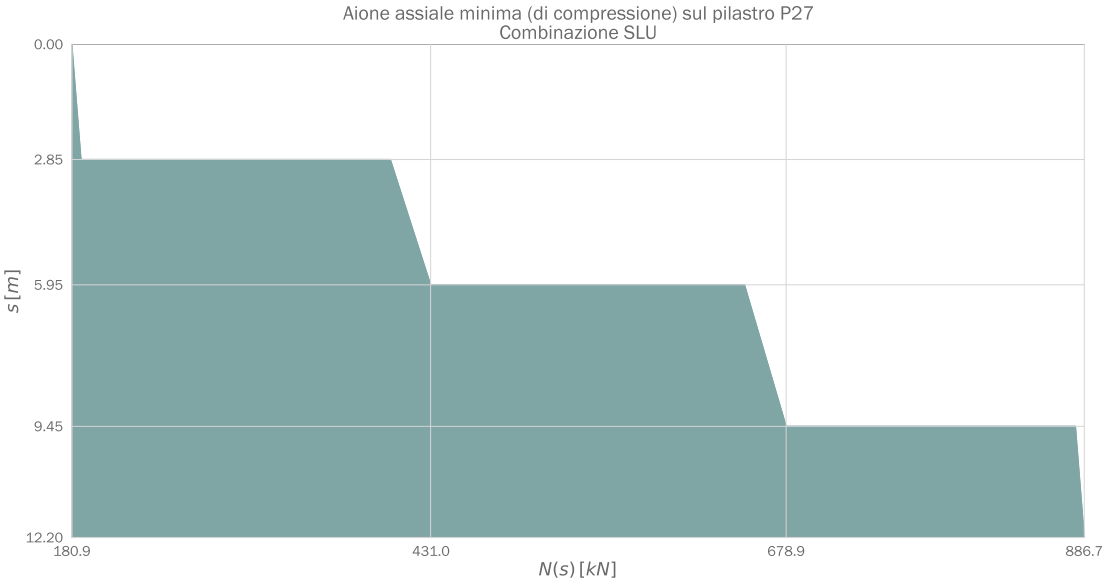
Si riscontra che l'azione massima calcolata per la combinazione fondamentale è in prossimità della base del pilastro e vale circa $1882\,kN$. Considerando invece, per il calcolo dell'azione minima, i coefficienti di sicurezza favorevoli, il valore alla base è di circa $887\,kN$.

Combinazione agli SLE rara

Dalla combinazione caratteristica si ricavano la figura 2.16 e la tabella 2.14. Il massimo alla base vale circa $1322\,kN$ mentre il minimo valore alla base è di circa $1282\,kN$

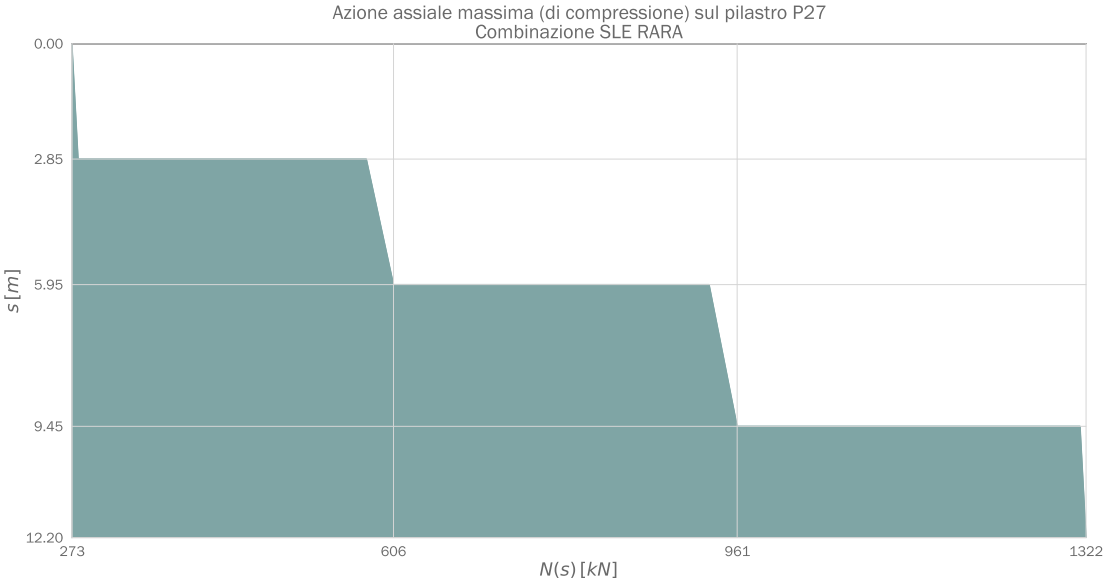


(a) *Azione assiale massima agente sul pilastro P27 in combinazione SLU*

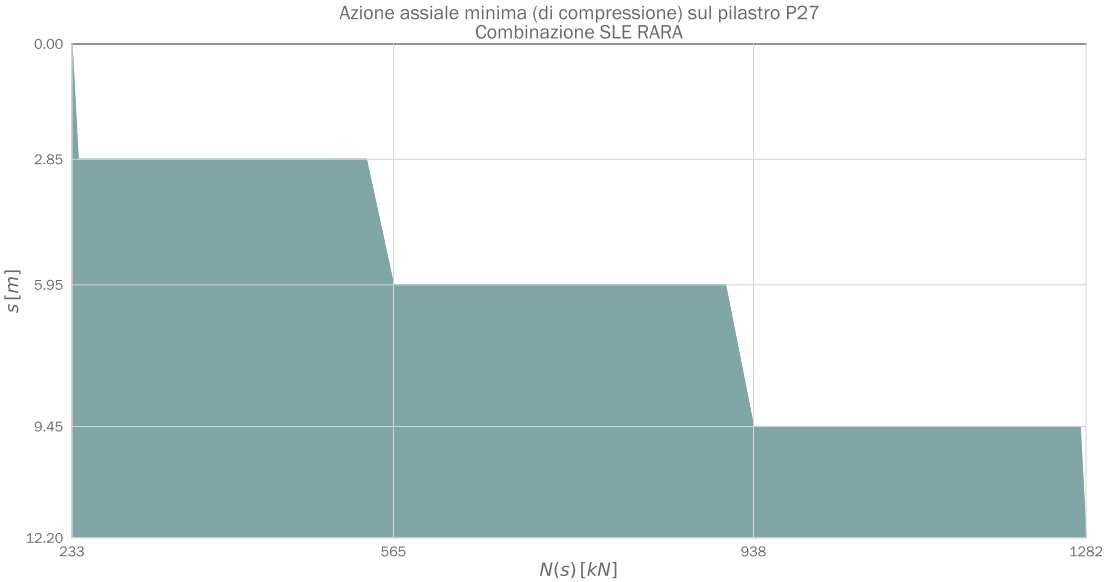


(b) *Azione assiale minima agente sul pilastro P27 in combinazione SLU*

Figura 2.15: Diagramma dell'azione assiale in combinazione SLU sul pilastro $P27$



(a) *Azione assiale massima agente sul pilastro P27 in combinazione SLE rara*



(b) *Azione assiale minima agente sul pilastro P27 in combinazione SLE rara*

Figura 2.16: Diagramma dell'azione assiale in combinazione SLE rara sul pilastro $P27$

Tabella 2.15: Valori massimi e minimi dell'azione assiale di compressione sul pilastro $P27$ in combinazione SLE frequente

$s\,[m]$	$N_{max}\,[kN]$	$N_{min}\,[kN]$
0.00	216.3520	201.9800
2.85	222.7645	208.3925
5.95	520.7635	495.1115
9.45	845.4995	800.8135
12.20	1156.2450	1100.5050

Tabella 2.16: Valori dell'azione assiale di compressione sul pilastro $P27$ in combinazione SLE quasi permanente

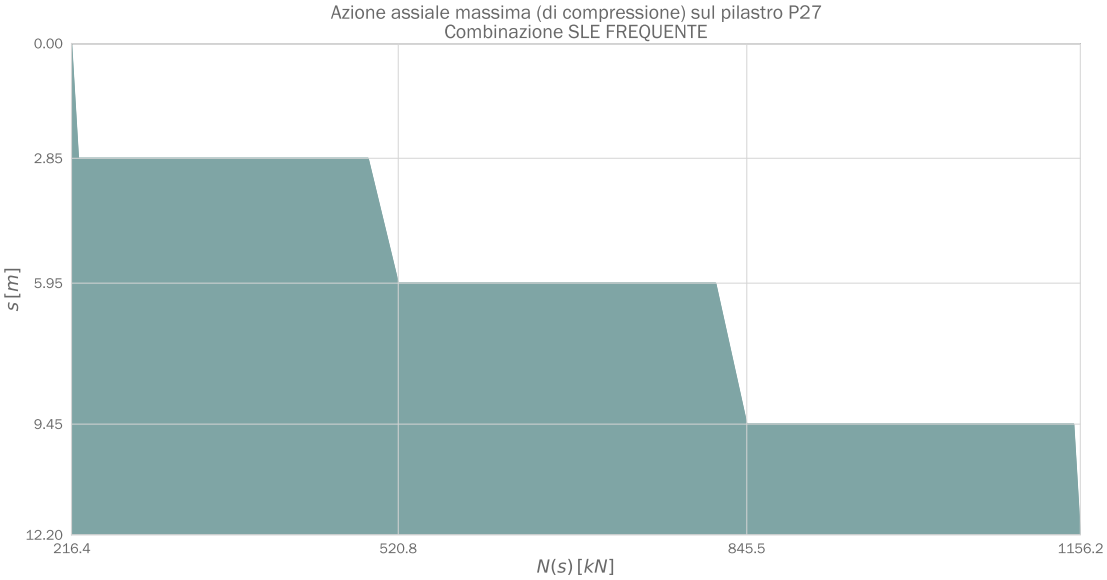
$s\,[m]$	$N\,[kN]$
0.00	202.7600
2.85	209.1725
5.95	495.8915
9.45	801.5935
12.20	1101.2850

Combinazione agli SLE frequente

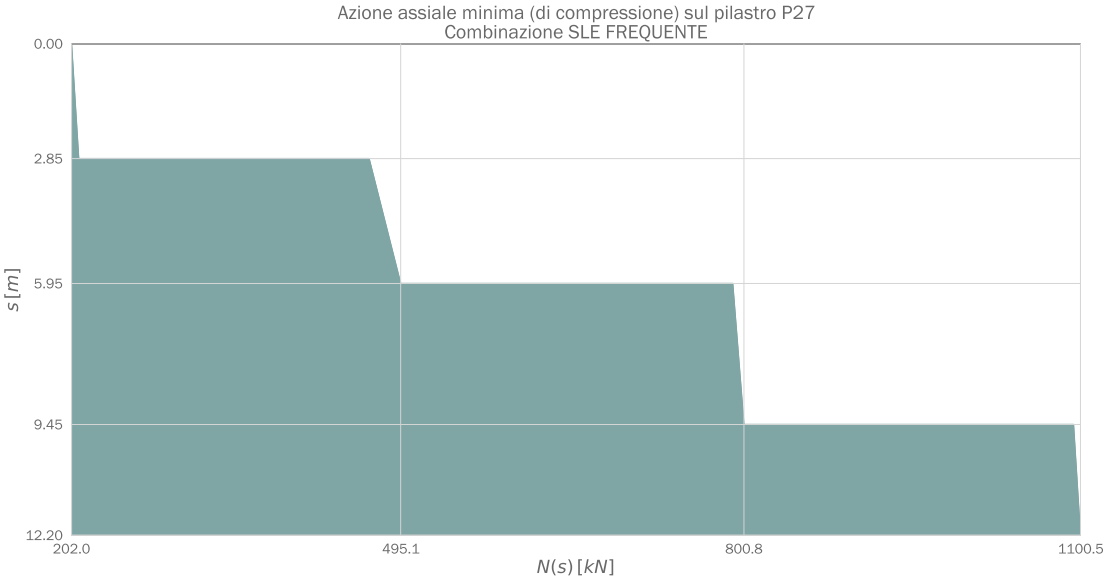
La combinazione delle azioni interne agli SLE frequente genera la figura 2.17 e la tabella 2.15. La massima e la minima azione di compressione alla base del pilastro valgono rispettivamente $1156\,kN$ e $1101\,kN$.

Combinazione agli SLE quasi permanente

Gli SLE quasi permanente hanno un'unica combinazione delle azioni interne, il cui diagramma è rappresentato in figura 2.18. I valori notevoli sono riportati in tabella 2.16. Il valore di maggior interesse è quello alla base che risulta essere di $1101\,kN$.



(a) *Azione assiale massima agente sul pilastro P27 in combinazione SLE frequente*



(b) *Azione assiale minima agente sul pilastro P27 in combinazione SLE frequente*

Figura 2.17: Diagramma dell'azione assiale in combinazione SLE frequente sul pilastro $P27$

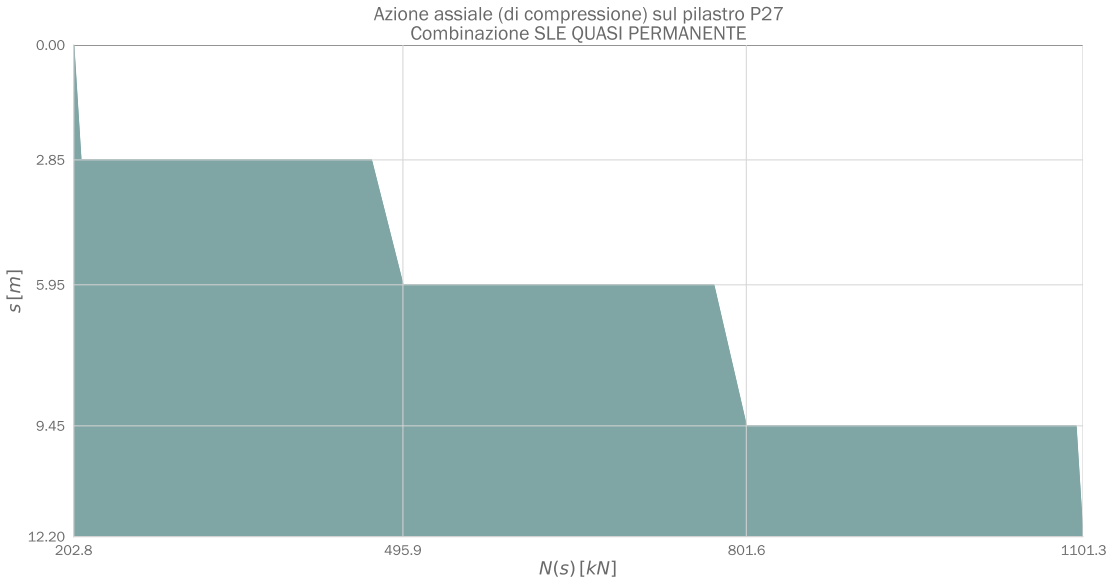


Figura 2.18: Diagramma dell'azione assiale in combinazione SLE quasi permanente sul pilastro $P27$

2.3.2 Pilastro $P36$

Come già introdotto sopra, il pilastro $P36$ è un pilastro d'angolo che divide, al piano primo, l'ambiente interno dal terrazzo. Nonostante ciò, le sollecitazioni assiali risultano di minor rilevanza rispetto al pilastro centrale.

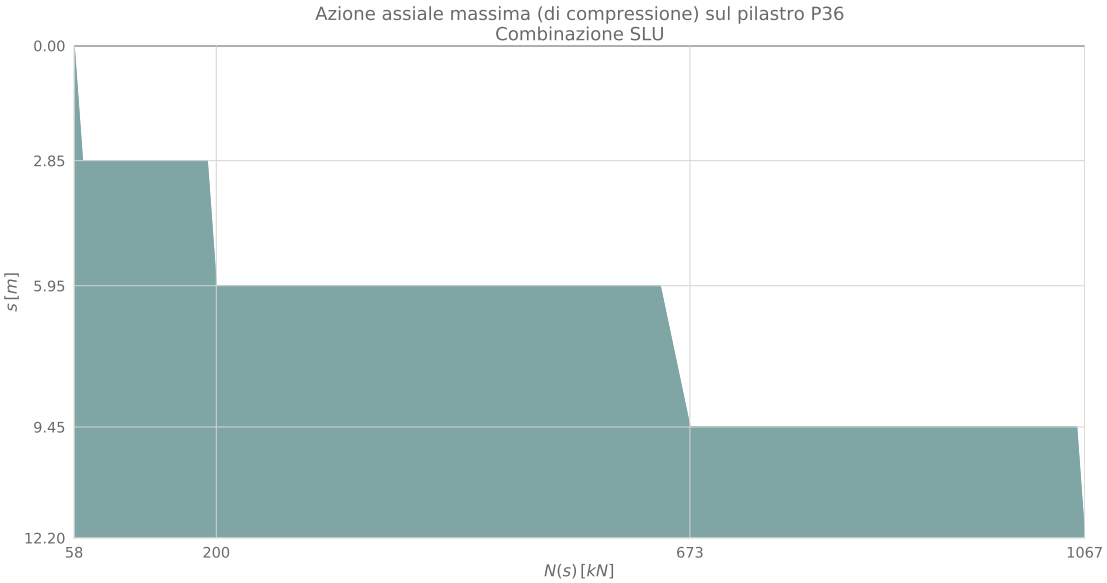
Di seguito si riportano i diagrammi di azione assiale (di compressione) per le varie configurazioni di carichi.

Combinazione agli SLU

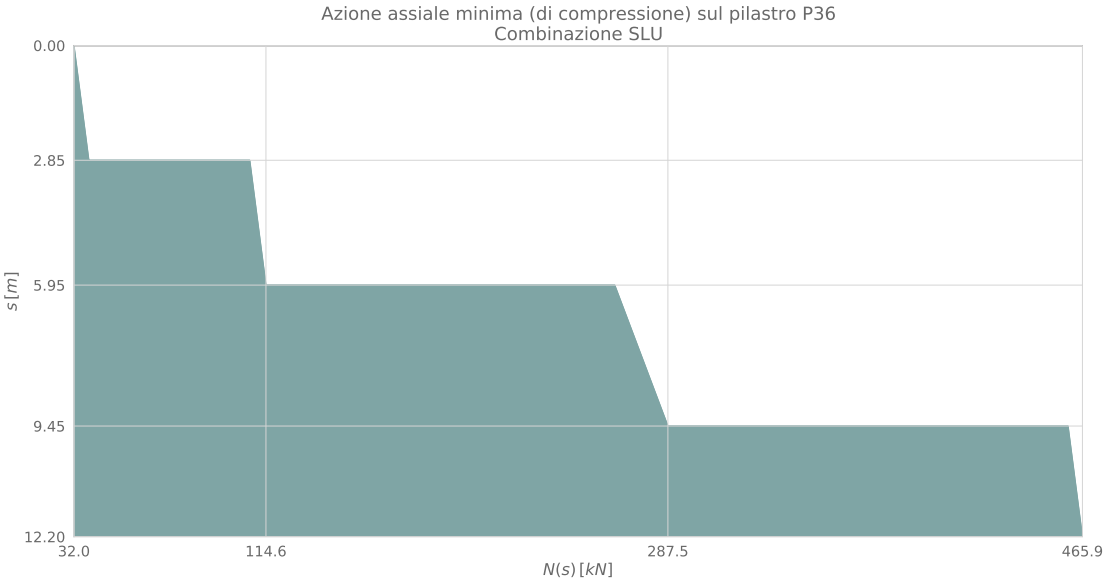
Dalla combinazione agli stati limite ultimi si ricavano i diagrammi di figura 2.19.

Tabella 2.17: Valori massimi e minimi dell'azione assiale di compressione sul pilastro $P36$ in combinazione SLU

$s\,[m]$	$N_{max}\,[kN]$	$N_{min}\,[kN]$
0.00	57.54	32.00
2.85	65.87	38.41
5.95	199.59	114.61
9.45	672.75	287.55
12.20	1067.12	465.91



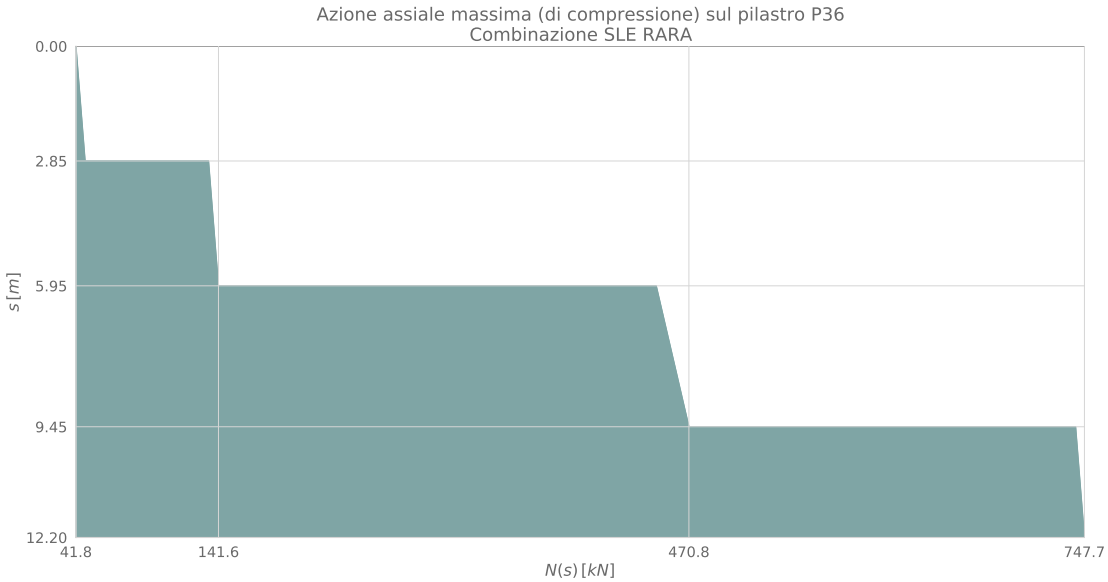
(a) *Azione assiale massima agente sul pilastro $P36$ in combinazione SLU*



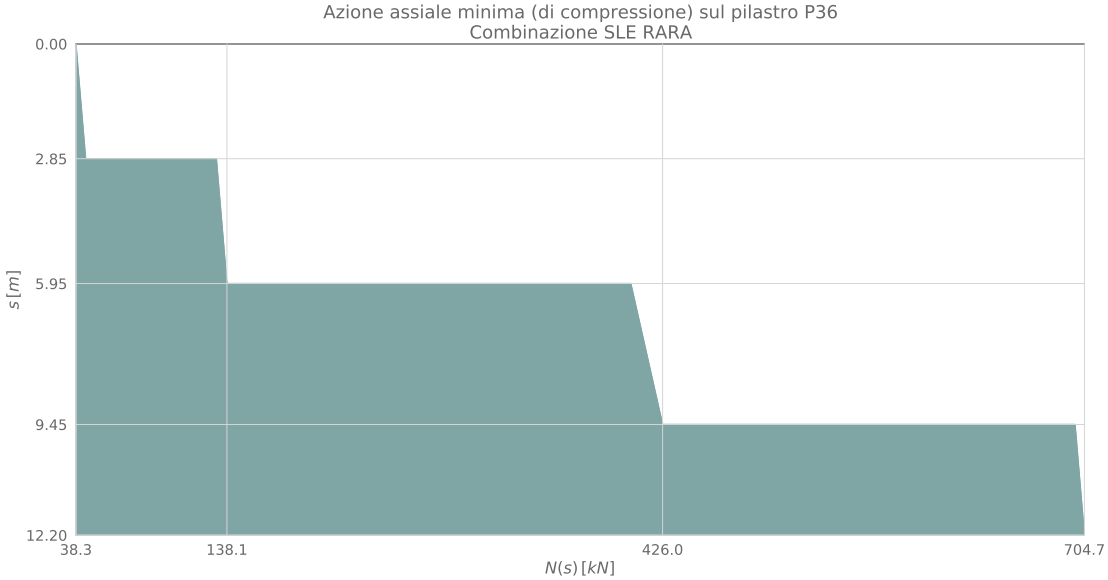
(b) *Azione assiale minima agente sul pilastro $P36$ in combinazione SLU*

Figura 2.19: Diagramma dell'azione assiale in combinazione SLU sul pilastro $P36$

Combinazione agli SLE rara



(a) *Azione assiale massima agente sul pilastro P36 in combinazione SLE rara*



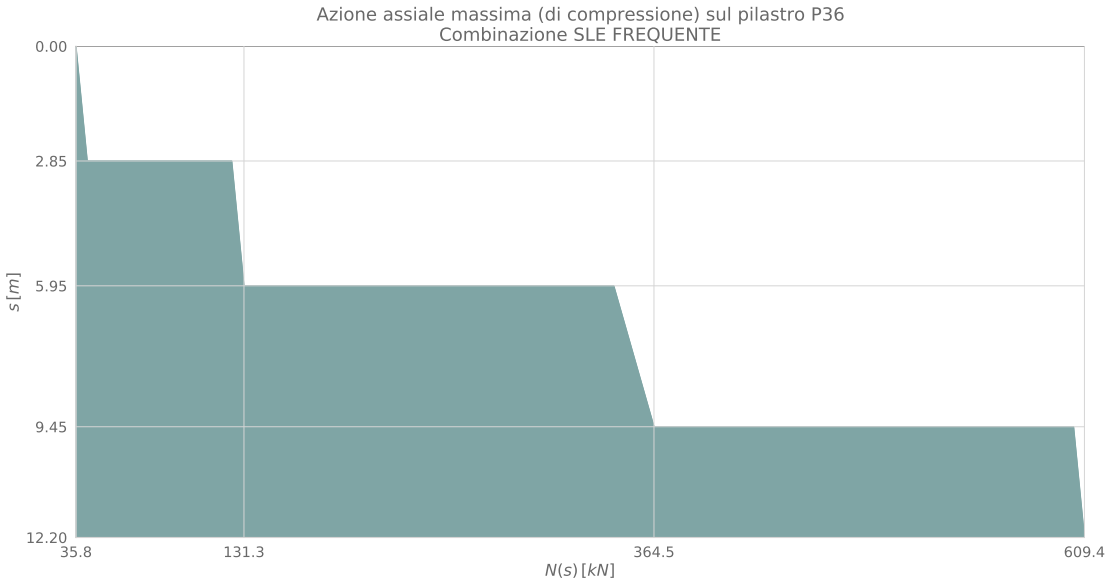
(b) *Azione assiale minima agente sul pilastro P36 in combinazione SLE rara*

Figura 2.20: Diagramma dell'azione assiale in combinazione SLE rara sul pilastro $P36$

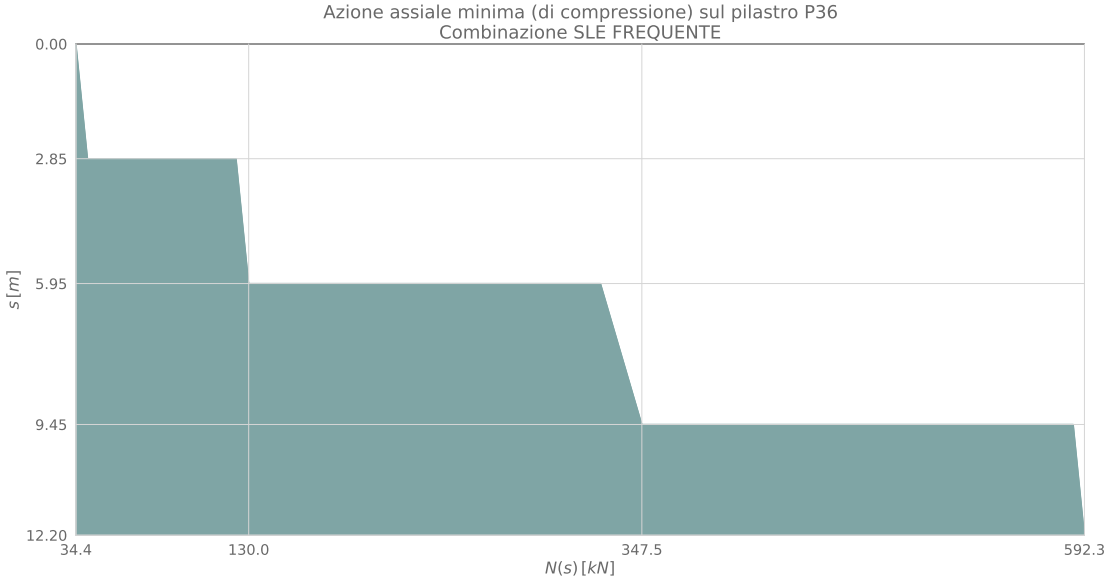
Tabella 2.18: Valori massimi e minimi dell'azione assiale di compressione sul pilastro $P36$ in combinazione SLE rara

$s\,[m]$	$N_{max}\,[kN]$	$N_{min}\,[kN]$
0.00	41.80	38.35
2.85	48.21	44.76
5.95	141.57	138.12
9.45	470.82	425.97
12.20	747.66	704.70

Combinazione agli SLE frequente



(a) *Azione assiale massima agente sul pilastro P36 in combinazione SLE frequente*



(b) *Azione assiale minima agente sul pilastro P36 in combinazione SLE frequente*

Figura 2.21: Diagramma dell'azione assiale in combinazione SLE frequente sul pilastro $P36$

Tabella 2.19: Valori massimi e minimi dell'azione assiale di compressione sul pilastro $P36$ in combinazione SLE frequente

$s\,[m]$	$N_{max}\,[kN]$	$N_{min}\,[kN]$
0.00	35.77	34.40
2.85	42.18	40.82
5.95	131.33	129.97
9.45	364.54	347.47
12.20	609.38	592.30

Combinazione agli SLE quasi permanente

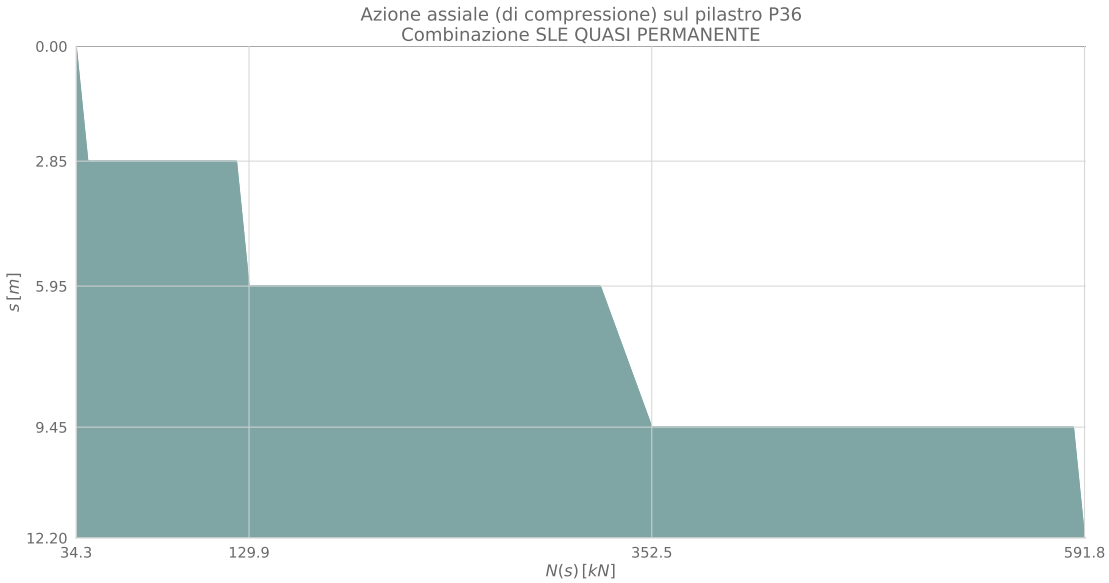


Figura 2.22: Diagramma dell'azione assiale in combinazione SLE quasi permanente sul pilastro $P36$

Tabella 2.20: Valori dell'azione assiale di compressione sul pilastro $P36$ in combinazione SLE quasi permanente

$s\,[m]$	$N\,[kN]$
0.00	34.32
2.85	40.73
5.95	129.89
9.45	352.53
12.20	591.77

Capitolo 3

Normative di riferimento

Le normative tecniche impiegate durante il progetto e la verifica degli elementi oggetto d'esame sono sia quelle nazionali, sia quelle europee corredate dal relativo annesso nazionale, con riferimento al progetto e alla verifica di elementi in cemento armato ordinario.

In particolare sono state utilizzate:

- `Decreto 17 gennaio 2018 - Aggiornamento delle ‘‘Norme tecniche per le costruzioni’’`, a cura del Ministero delle Infrastrutture e dei Trasporti;
- `Circolare 21 gennaio 2019, n. 7 C.S.LL.PP - Istruzioni per l'applicazione dell'«Aggiornamento delle ‘‘Norme tecniche per le costruzioni’’» di cui al decreto ministeriale 17 gennaio 2018` - a cura del Ministero delle Infrastrutture e dei Trasporti;
- `EN 1992-1-1 (2004): Eurocode 2: Design of concrete structures - Part 1-1: General rules and rules for buildings` [Authoruty: The European Union Per Regulation 305/2011, Directive 98/34/EC, Directive 2004/18/EC].
- `Decreto 31 luglio 2012 - Approvazione delle Appendici nazionali recanti i parametri tecnici per l'applicazione degli Eurocodici.`[1]

Di seguito si riportano i capitolo specifici, a grandi linee, utilizzati durante i calcoli. In ogni caso, durante la stesura del seguente testo si farà riferimento a specifici paragrafi e tabelle di notevole rilevanza presenti nelle norme sopra elencate.

3.1 Decreto 17 gennaio 2018 - NTC2018

Delle **NTC2018** sono stati utilizzati i seguenti capitoli:

- **2. Sicurezza e prestazioni attese** per il calcolo delle caratteristiche di sollecitazione del solaio (e precedentemente di trave e pilastri). In particolare le sezioni:
  - **2.5. Azioni sulle costruzioni**, in particolare i paragrafi **2.5.2** e **2.5.3**;
  - **2.6. Azioni nelle verifiche agli stati limite** con riferimento alla **Tab. 2.6.I**;

[1] Per una miglior comporensione del testo e per una questione semplificativa d'ora in poi ci si riferirà al `Decreto 17 gennaio 2018` con l'acronimo **NTC2018** , alla `Circolare 21 gennaio 2019, n. 7` con **CIRC. N. 7** , l'eurocodice `EN 1992-1-1` con **EC2** e infine il `Decreto 31 luglio 2012` con **NAD** .

- **3. Azioni sulle costruzioni** con riferimento alla sezione **3.1. Opere civili e industriali** e quindi alle **Tab. 3.1.I**, **Tab. 3.1.II**;
- **4. Costruzioni civili e industriali**, in particolare tutta la parte **4.1. Costruzioni in calcestruzzo**; **11.2.10. Caratteristiche del calcestruzzo** per alcuni richiami sulle caratteristiche meccaniche del cls.

3.2 Circolare 21 gennaio 2019, n. 7 - CIRC. N. 7

Riguardo alla **CIRC. N. 7** sono state utilizzate le parti richiamete dalle **NTC2018** nel paragrafo precendente, con particolare interesse al **capitolo C4. Costruzioni civili e industriali** parte **C4.1 Costruzioni in calcestruzzo**.

3.3 EN 1992-1-1 - EC2 + Decreto 31 luglio 2012 - NAD

L'eurocodice 2 parte 1–1 verrà pesantemente utilizzato in tutte le sue parti, affiancato dal **NAD**, ogniqualvolta le normative nazionali non danno un sufficiente approfondimento del caso o rimandano alle normative europee.

Capitolo 4

Materiali

Il cemento armato è un materiale composito formato dall'insieme di calcestruzzo e barre d'armatura in acciaio. Le caratteristiche meccaniche del composto saranno perciò funzione di entrambi i materiali.

Durante l'analisi e il progetto delle sezioni si utilizzeranno le seguenti ipotesi:

- resistenza a trazione del calcestruzzo nulla agli SLU;
- perfetta aderenza tra acciaio e calcestruzzo;
- ipotesi di Bernoulli – Navier per cui le sezioni ruotano, traslano e rimangono piane. Ne consegue che viene trascurata la deformabilità a taglio degli elementi (ipotesi di elementi snelli).

4.1 Calcestruzzo

Il calcestruzzo utilizzato per il progetto è il $C25/30$ dove

$$f_{ck} = 25\,MPa, \quad \text{resistenza di un provino cilindrico} \tag{4.1}$$

$$R_{ck} = 30\,MPa, \quad \text{resistenza di un provino cubico} \tag{4.2}$$

Secondo il capitolo **4.1.2.1.1.1 Resistenze di progetto a compressione del calcestruzzo** delle **NTC2018** la resistenza in compressione f_{cd} del calcestruzzo deve essere calcolata come

$$f_{cd} = \frac{\alpha_{cc}\, f_{ck}}{\gamma_c}$$

dove α_{cc} è un coefficiente riduttivo per gli effetti di lunga durata e vale 0.85, f_{ck} è la resistenza caratteristica definita sopra e $\gamma_c = 1.5$ è il coefficiente di sicurezza del materiale. La resistenza di progetto vale

$$f_{cd} = \frac{0.85 \cdot 25}{1.5} = 14.17\,MPa \tag{4.3}$$

Il valore medio della resistenza cilindrica, utile per valutare il valore del modulo di Young medio del calcestuzzo, è definito – secondo la **[11.2.2]** al punto **11.2.10.1** delle **NTC2018** – come segue

$$f_{cm} = f_{ck} + 8\,MPa = 33\,MPa$$

Causa variabilità del modulo di elasticità, il valore istantaneo va definito attraverso un modulo secante; ciò nonostante in fase di progettazione la normativa italiana consente l'utilizzo di un modulo di elasticità medio definito come segue

$$E_{cm} = 22000 \cdot \left(\frac{f_{cm}}{10}\right)^{0.3} = 22000 \cdot \left(\frac{33}{10}\right)^{0.3} \simeq 31476\, MPa = 31.476\, GPa$$

La resistenza di progetto a trazione del calcestruzzo è definita nel **4.1.2.1.1.2** delle **NTC2018** come

$$f_{ctd} = \frac{f_{ctk}}{\gamma_c}$$

dove f_{ctk} è la resistenza caratteristica a trazione del calcestruzzo (**NTC 2018 − 11.2.10.2**)

$$f_{ctm} = 0.30 \cdot f_{ck}^{2/3} = 0.30 \cdot 25^{2/3}\, MPa = 2.57\, MPa \tag{4.4}$$

$$f_{ctk,0.05} = 0.7 \cdot f_{ctm} = 0.7 \cdot 2.57\, MPa = 1.80\, MPa \tag{4.5}$$

che risulta coincidente con la **Table 3.1 − EC2**. La resistenza di progetto a trazione è perciò

$$f_{ctd} = \alpha_{ct}\, \frac{f_{ctk,0.05}}{\gamma_c} = 0.85\, \frac{1.8}{1.5} = 1.02\, MPa \tag{4.6}$$

L'**EC2** , al punto definisce la tensione tangenziale di aderenza tra acciaio e calcestruzzo, che sarà necessaria durante il calcolo delle lunghezze di ancoraggio delle barre. Secondo le definizioni *(8.2)* la tensione di ancoraggio di progetto è

$$f_{bd} = 2.25 \cdot \eta_1\, \eta_2\, f_{ctd} \tag{4.7}$$

dove η_1 dipende dalle condizioni di aderenza (buona o non buona) e η_2 dipende dal diametro delle barre di armatura.

Infine, in prima approssimazione, si sceglie un diametro massimo degli inerti pari a

$$d_g = 20\, mm$$

4.1.1 Legame costitutivo del calcestruzzo

Il legame costitutivo tensione–deformazione del calcestruzzo scelto per il progetto e la verifica agli SLU di tutti gli elementi in esame è il *parabola esponenzial rettangolo*, definito al punto **4.1.2.1.2.1** delle **NTC2018** o in alternativa al punto **3.1.7** del **EC2**. L'equazione che descrive le curva è la seguente

$$\sigma_c = \begin{cases} f_{cd}\left[1 - \left(1 - \dfrac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}}\right)^n\right], & \varepsilon_c \in [0, \varepsilon_{c2}] \\ f_{cd} & \varepsilon_c > \varepsilon_{c2} \end{cases} \tag{4.8}$$

dove $n = 2$ per calcestruzzi di classe minore o tuttalpiù uguale alla $C50/60$. Il diagramma è quello rappresentato in figura 4.1. I valori di ε_{c2} e ε_{cu} dipendono anch'essi dalla classe del calcestruzzo. In particolare, per classi pari o inferiori alla $C50/60$

$$\varepsilon_{c2} = 2‰$$
$$\varepsilon_{cu} = 3.5‰$$

Come accennato sopra, durante il progetto e la verifica agli SLU, verrà considerata nulla la resistenza a trazione del calcestruzzo; al contrario, durante le verifiche di deformazione e fessurazione agli SLE si vede la necessità di introdurre la resistenza a trazione del calcestruzzo, definita nelle (4.4), (4.5) e (4.6).

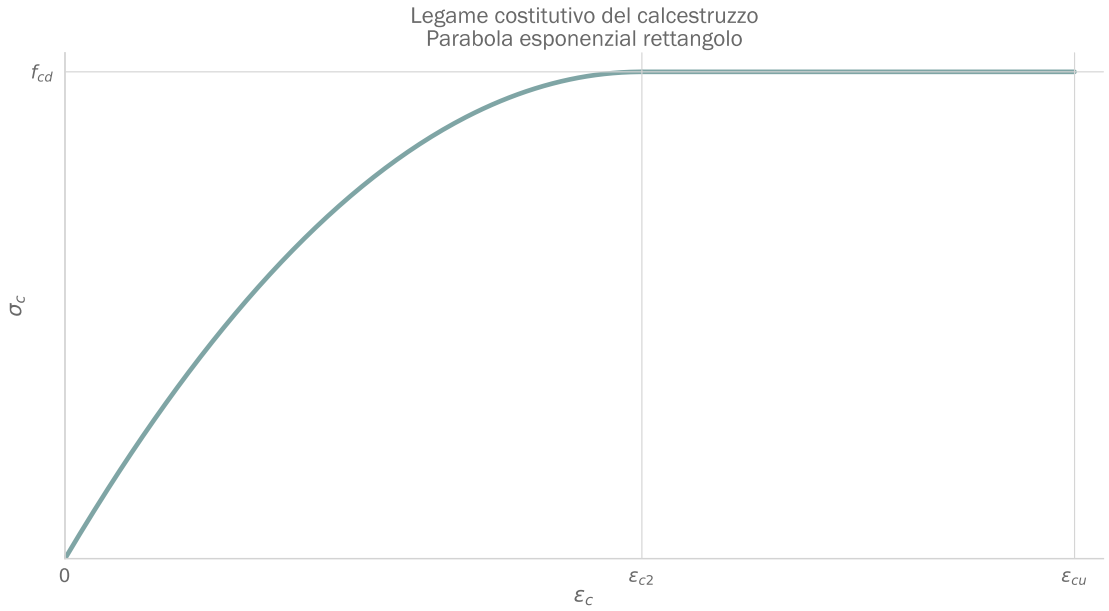


Figura 4.1: Legame costitutivo parabola esponenzial rettangolo

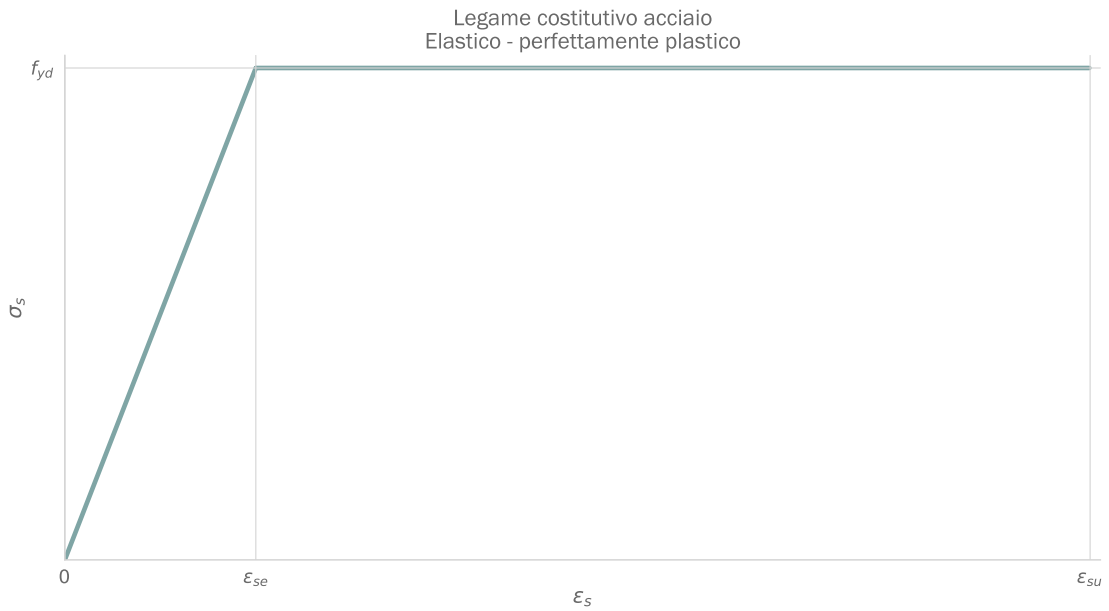


Figura 4.2: Legame costitutivo elastico – perfettamente plastico

4.2 Acciaio

La normativa italiana al punto **11.3.2** ammette un unico acciaio per armatura: **B450C**. Questo acciaio è caratterizzato dall'avere una tensione di snervamento caratteristica

$$f_{yk} = 450\,MPa$$

La resistenza di progetto è valutata come

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = \frac{450}{1.15} = 391.30\,MPa \tag{4.9}$$

dove il coefficiente di sicurezza per l'acciaio d'armatura vale $\gamma_s = 1.15$.

Si assume inoltre un modulo di elasticità pari a

$$E_s = 210 \cdot 10^3 MPa = 210\,GPa \tag{4.10}$$

È quindi banale calcolare la deformazione al limite elastico, cioè la deformazione per cui avviene lo snervamento dell'acciaio

$$\varepsilon_{se} = \frac{f_{yd}}{E_s} = \frac{391.30}{210 \cdot 10^3} = 1.863‰ \tag{4.11}$$

4.2.1 Legame costitutivo dell'acciaio

Il legame tensione – deformazione scelto per l'acciaio è quello di *elastico – perfettamente plastico*, con una deformazione massima a rottura limitata a

$$\varepsilon_{su} = 10‰$$

Fissare un limite alla deformazione a rottura non è un'imposizione della normativa ma una comodità in fase di progettazione delle sezioni.

Capitolo 5

Trave: progetto e verifica agli SLU per tensioni normali

In questo capitolo si andrà a progettare e verificare le sezioni significative – riportate in tabella 2.2 di pagina 12 – per quanto concerne le azioni normali. Queste sono generate prevalentemente dal momento flettente agente sulla trave, il cui diagramma può essere visionato in figura 2.4a di pagina 13. Ulteriore contributo nel calcolo delle tensioni normali è quello dovuto alle azioni orizzontali che agenti sull'edificio in esame (come, ad esempio, l'azione del vento); queste, a causa della complessità del calcolo e del contributo non particolarmente significativo, saranno trascurate.

Infine, non ci si deve dimenticare delle tensioni normali dovute al taglio che verranno inglobate nel problema in maniera adeguata in seguito, attraverso un processo di traslazione del diagramma dei momenti flettenti.

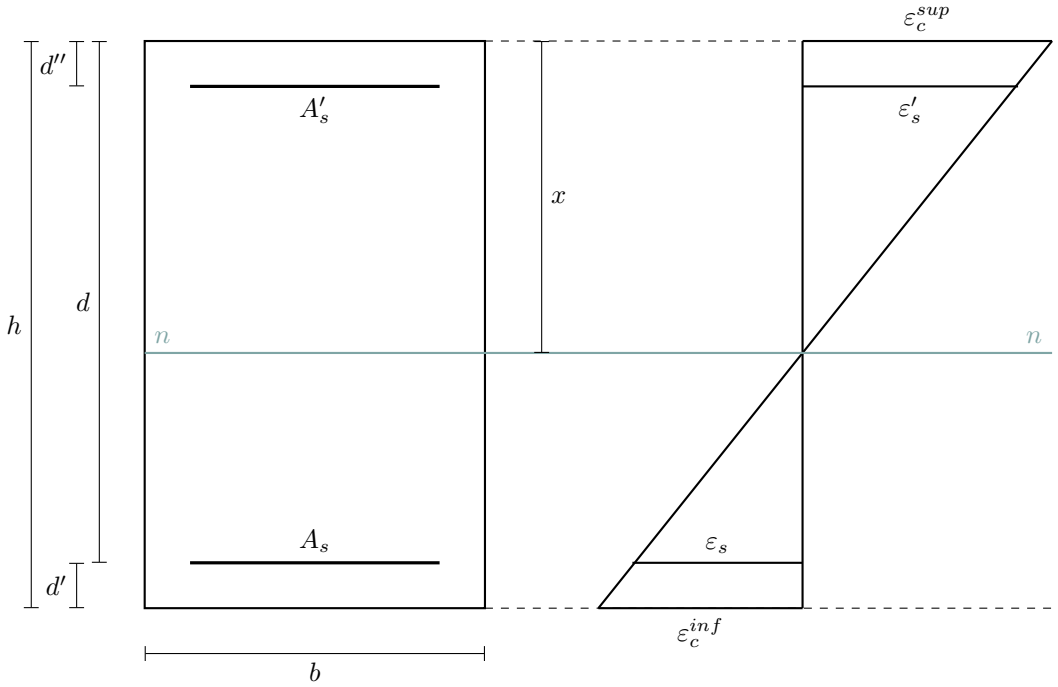
Il problema così come è stato formulato richiede il dimensionamento e della sezione in calcestruzzo (larghezza e altezza) e dell'armatura necessaria a sopportare i carichi gravanti. Se, per una questione sia estetica che funzionale, la sezione in calcestruzzo sarà costante lungo tutta la trave – l'area di armatura dovrà, invece, essere dimensionata per ogni sezione significativa in maniera tale da ottimizzare il più possibile le prestazioni dell'elelemento strutturale.

Questo implica che il progetto della sezione che andrà a definire in maniera univoca la geometria della sezione ricade sulla sezione più sollecitata (in valore assoluto). Il progetto della prima sezione sarà quindi il più complesso da un punto di vista matematico a causa del maggior numero di incognite da calcolare; nelle sezioni successive sarà sufficiente valutare solamente l'area di armatura.

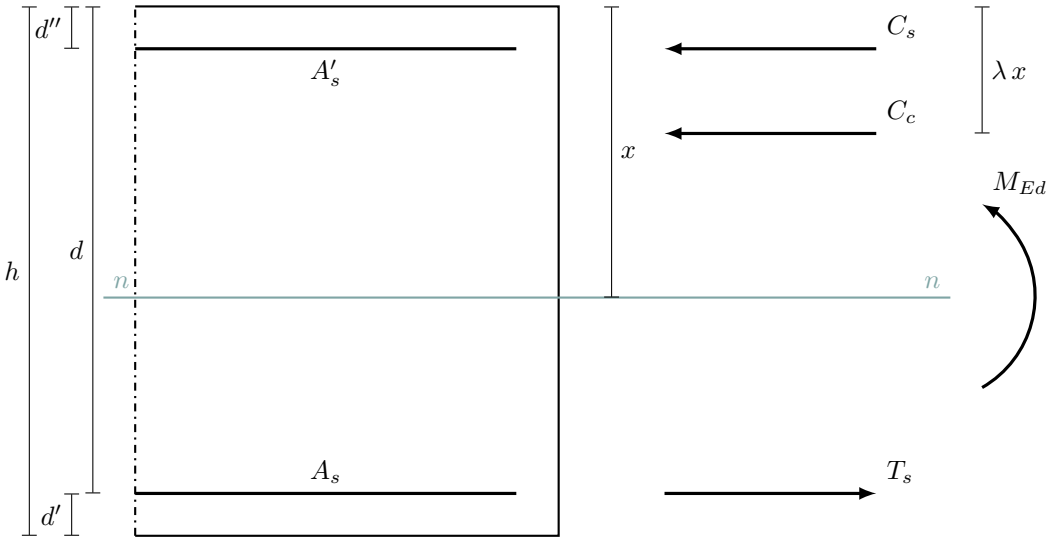
5.1 Procedimento

Il dimensionamento della sezione consiste nella risoluzione dell'equilibrio rappresentato in figura 5.1, dove sono non note la maggior parte delle variabili. In particolare non si conoscono:

- la base b della sezione;
- l'*altezza utilie* della sezione d;
- $h = d + d'$;
- il copriferro inferiore d';



(a) *Andamento del campo deformativo*



(b) *Risultanti delle tensioni*

Figura 5.1: Rappresentazione del problema di equilibrio della generica sezione

- il copriferro superiore d'';
- la risultante dell'armatura tesa $T_s = \sigma_s\, A_s$, con σ_s la tensione delle barre tese e A_s l'area totale delle barre;
- la risultante dell'armatura compressa $C_s = \sigma'_s\, A's$, con σ'_s la tensione delle barre compresse e A'_s l'area totale delle barre;
- la risultante delle tensioni nel calcestruzzo C_c;
- la posizione dell'asse neutro x rispetto alla fibra maggiormente compressa;
- la posizione del punto di applicazione di C_c rispetto alla fibra maggiormente compressa, in funzione della posizione dell'asse neutro $(\lambda\, x)$.

Idealmente le incognite linearmente indipendenti sono nove, mentre le equazioni utili per la risoluzione sono solamente 2: l'equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale e l'equazione di equilibrio alla rotazione rispetto a un polo scelto a piacere. In assenza di azioni assiali e scegliendo come polo per il momento T_s le equazioni sono

$$\begin{cases} C_c + C_s - T_s = 0 \\ C_c\,(d - \lambda\, x) + C_s\,(d - d'') = M_{Ed} \end{cases} \tag{5.1}$$

Si fa notare che le 5.1 non sono vere e proprie equazioni di equilibrio ma del tipo *azione* = *reazione*; il momento flettente di progetto M_{Ed} genera le risultanti a primo membro.

Ci si rende conto che il problema posto in questa maniera non è staticamente determinato ed ha infinite soluzioni.

Per questo motivo si devono fissare alcuni parametri geometrici in modo tale da ridurre il numero di incognite finali.

Per prima cosa si fissa la larghezza della sezione; in questo caso si sta considerando una trave non in spessore di solaio che è connessa a dei pilastri di sezione iniziale quadrata di dimensioni $30 \times 30\, cm$. Si fissa, perciò, la larghezza della sezione pari a quella del pilastro:

$$b = 300\, mm$$

Si fissano, in prima approssimazione, i valori dei copriferri delle armature:

$$d' = d'' = 40\, mm$$

e quindi, nota l'altezza utile della sezione d, è facilmente calcolabile l'altezza totale h. Si è inoltre costretti ad assegnare un rapporto tra l'area delle armature compresse e l'area delle armature tese; si è scelto

$$\beta = \frac{A'_s}{A_s} = 0.3$$

A questo punto è sufficiente fare alcune ipotesi sullo stato tensionale e deformativo dei materiali, e quindi risolvere il set di equazioni di equilibrio. In genere, per il dimensionamento, si sceglie un campo di deformazione del calcestruzzo sulle fibre superiori di tipo 3 e quindi a collasso, in modo tale che il legame costitutivo parabola – esponenzial rettangolo sia completamente sviluppato. La risultante C_c delle tensioni del calcestruzzo compresso può essere scritta come

$$C_c = b\, \psi\, \xi\, d\, f_{cd}$$

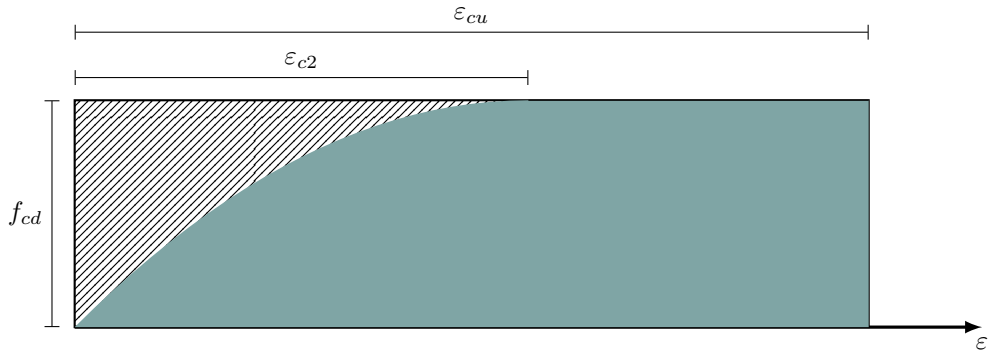


Figura 5.2: Rapporto tra parabola esponenziale e il rettangolo circoscritto che identifica il parametro ψ

dove b è la base della sezione, ψ rappresenta il rapporto tra il rettangolo che circoscrive il parabola – esponenzial rettangolo completamente sviluppato e il legame costitutivo esponenziale riferito allo stato deformativo effettivamente sviluppato, $\xi = \frac{x}{d}$ indica la posizione dell'asse neutro adimensionalizzata rispetto all'altezza utile della sezione d.

Si considera inoltre, ai fini del progetto, le armature sia tese che compresse snervate

$$\begin{aligned} T_s &= A_s\,\sigma_s = A_s\,f_{yd} \\ C'_s &= A'_s\,\sigma'_s = A'_s\,f_{yd} = \beta\,A_s\,f_{yd} \end{aligned}$$

Con le ipotesi effettuate le (5.1) si modificano in

$$\begin{cases} b\,\psi\,\xi\,d\,f_{cd} + \beta\,A_s\,f_{yd} - A_s\,f_{yd} = 0 \\ b\,\psi\,\xi\,d^2\,f_{cd}\,(1-\lambda\,\xi) + \beta\,A_s\,f_{yd}\,(d-d'') = M_{Ed} \end{cases} \tag{5.2}$$

Risolvendo il sistema di equazioni accoppiate si è in grado di calcolare in maniera univoca le incognite d e A_s. Dalla prima risulta

$$A_s = \frac{b\,\psi\,\xi\,d\,f_{cd}}{(1-\beta)\,f_{yd}} \tag{5.3}$$

mentre dalla seconda si ricava d sostituendo $A_s(d)$ appena ricavata. Essendo un'equazione di secondo grado esistono due soluzioni analitiche ma solo una è ingegneristicamente significativa

$$d = \frac{b\,\beta\,d''\,f_{cd}\,\psi\,\xi + \sqrt{b\,f_{cd}\,\psi\,\xi\,\left(-4M_{Ed}\,(\beta^2\,\lambda\,\xi - 2\,\beta\,\lambda\,\xi\,+\beta+\lambda\,\xi\,-1) + b\,\beta^2\,d''^2\,f_{cd}\,\psi\,\xi\right)}}{2\,b\,f_{cd}\,\psi\,\xi\,(\beta\,\lambda\,\xi - \lambda\,\xi + 1)} \tag{5.4}$$

Il valore di d dovrà essere arrotondato in modo tale che l'altezza della sezione della trave $h = d + d''$ sia indicativamente nell'ordine delle centinaia di millimetri.

Nota d, dalla si ricava l'area dell'armatura tesa, mentre l'area dell'armatura compressa è calcolabile dalla definizione di β. Come fatto per l'altezza utile d, anche le aree delle armature devono essere arrotondate a valori commerciali.

Il processo di verifica ha il fine di accertare se le ipotesi fatte precedentemente nel progetto sono coerenti e compatibili con lo stato deformativo dei materiali e quindi di assicurarsi che il momento resistente esplicabile dalla sezione sia maggiore del momento sollecitante. Questo avviene verificando i campi di deformazione dei materiali e quindi aggiustando le equazioni di

equilibrio nel caso i parametri variassero. Una volta determinati i campi corretti in cui i materiali lavorano si passa alla valutazione del momento resistente della sezione, attraverso l'equilibrio alla rotazione attorno a un polo scelto a piacere.

$$M_{Rd} = b\,\psi\,\xi\,d^2\,f_{cd}\,(1-\lambda\,\xi) + A'_s\,\sigma'_s\,(d-d'') \geq M_{Ed} \tag{5.5}$$

I valori di d e A'_s sono quelli 'commerciali', mentre i valori di ψ, ξ, λ, e σ'_s sono quelli determinati durante la verifica e compatibili con lo stato deformativo della sezione.

Nelle sezioni successive il progetto consiste solamente nella valutazione del quantitativo di armatura necessaria, fissando cioè l'altezza utile d con il valore trovato sopra. Non vi sono, invece, variazioni nel procedimento di verifica della resistenza.

5.2 Sezione N5

5.2.1 Progetto

La sezione $N5$ risulta essere quella maggiormente sollecitata (in valore assoluto); il dimensionamento della sezione deve essere eseguito come descritto sopra. Le ipotesi di progetto sono di calcestruzzo superiore a collasso e di acciaio teso a collasso, mentre si ipotizza che le armature compresse siano snervate. Si fissano, perciò, i seguenti parametri, che saranno comuni a tutte le sezioni in fase di progetto:

- $b = 300\,mm$
- $d' = d'' = 40\,mm$
- $\beta = 0.3$
- $\varepsilon_c = \varepsilon_{cu} = 3.5‰$
- $\sigma_c = f_{cd}$
- $\xi = 0.2593$
- $\psi = 0.80952$
- $\lambda = 0.416$
- $\varepsilon_s = \varepsilon_{su} = 10‰$
- $\varepsilon'_s > \varepsilon_{se} = 1.863‰$
- $\sigma_s = \sigma'_s = f_{yd}$

Il momento sollecitante vale, a meno del segno

$$M_{Ed}^{N5} = 236.63\,kN\,m$$

Sostituendo i valori nella (5.4) si ottiene l'altezza utile, pari a

$$d = 454.63\,mm$$

e quindi $A_s = 3.2577\,d = 1481\,mm^2$, $A'_s = \beta\,A_s \simeq 494\,mm^2$.

Si arrotonda l'altezza utile a

$$d = 460\,mm \tag{5.6}$$

in modo tale che $h = d + d' = (460 + 40)\,mm = 500\,mm$ e si sceglie

$$A_s = 6\Phi\,18\,mm = 486\,\pi\,mm^2 = 1526.81\,mm^2 \tag{5.7}$$

$$A'_s = 2\Phi\,18\,mm = 162\,\pi\,mm^2 = 508.94\,mm^2 \tag{5.8}$$

5.2.2 Verifica

Come già anticipato, la verifica consiste nel controllo dello stato deformativo effettivamente attivato e quindi nel calcolo della resistenza della sezione. Come ipotesi iniziale, si può considerare la sezione in **campo 3**, con le armature superiori snervate $\sigma'_s = f_{yd}$. La prima delle (5.2) diventa

$$b\,\psi\,\xi\,d\,f_{cd} + A'_s\,f_{yd} - A_s\,f_{yd} = 0 \tag{5.9}$$

dove l'unica incognita è la posizione dell'asse neutro adimensionalizzata ξ; invertendo

$$\xi = \frac{f_{yd}\,(A_s - A'_s)}{b\,\psi\,d\,f_{cd}} \tag{5.10}$$

sostituendo i valori delle aree di armatura calcolati alle (5.7) e (5.8), nonché il valore di ψ di campo 3 ($\psi = 0.80952$) e le caratteristiche geometriche della sezione e le caratteristiche meccaniche dei materiali, si trova

$$\xi = \frac{391.30 \cdot (486\,\pi - 162\,\pi)}{300 \cdot 0.80952 \cdot 460 \cdot 14.17} = 0.25161 < \xi_{2/3} = 0.2593$$

L'asse neutro cade più in alto rispetto all'asse neutro limite tra i campi 2 e 3. **L'ipotesi di campo 3 è errata!** La sezione si trova sicuramente in campo 2 (essendo soggetta a flessione semplice), ma non si hanno informazioni sullo stato deformativo dell'armatura compressa. Si postula armatura compressa snervata $\sigma'_s = f_{yd}$, quindi sezione in *campo 2b*. In queste condizioni il calcestruzzo compresso non è a collasso, cioè si assume $\varepsilon_c \in [\varepsilon_{c2}, \varepsilon_{cu}]$, e perciò $\psi < 0.80952$

$$\psi = 1 - \frac{1}{3}\,\frac{\varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{su}}\,\frac{1-\xi}{\xi} = \frac{16\,\xi - 1}{15\,\xi}$$

Sostituendo all'interno della (5.9) e risolvendo in ξ si ottiene

$$\xi = 0.25345 < \xi_{2/3} = 0.2593$$

compatibile con l'ipotesi di campo 2b fatta.

Essendo l'asse neutro molto vicino al limite tra il campo 2 e il campo 3, si può intuire che le armature compresse siano effettivamente snervate. Questo può essere verificato utilizzando la compatibilità assicurata dalla linearità del diagramma delle deformazioni.

$$\varepsilon'_s = \varepsilon_{su}\,\frac{\xi - \delta''}{1-\xi} = 10‰\,\frac{0.25345 - 0.089695}{1 - 0.25345} = 2.23‰ > \varepsilon'_{se} = 1.863‰$$

dove δ'' è il copriferro superiore adimensionalizzato. Il campo deformativo è coerente con l'ipotesi di armatura compressa snervata $\sigma'_s = f_{yd}$.

La verifica sulle deformazioni deve essere eseguita anche lato calcestruzzo, per cui

$$\varepsilon_c = \varepsilon_{su}\,\frac{\xi}{1-\xi} = 10‰\,\frac{0.25345}{1 - 0.25345} = 3.395‰ \in [2, 3.5]\,‰$$

L'ipotesi sul campo del cls, e quindi la posizione dell'asse neutro calcolata prima, sono corrette. L'asse neutro si trova a

$$x = \xi\, d = 0.25345 \cdot 460\, mm = 116.60\, mm$$

Allora

$$\psi = \frac{16\xi - 1}{15\,\xi} = 0.80363$$

La posizione della risultante delle compressioni nel calcestruzzo, essendo $\varepsilon_c \in [\varepsilon_{c2}, \varepsilon_{cu}]$ si calcola come

$$\lambda = \frac{6\,\varepsilon_c^2 - 4\,\varepsilon_c\,\varepsilon_{c2} + \varepsilon_{c2}^2}{4\,\varepsilon_c\,(3\,\varepsilon_c - \varepsilon_{c2})} = 0.4138$$

Il momento resistente della sezione considerata ($6\,\Phi\,18\,mm$ lato teso e $2\,\Phi\,18\,mm$ lato compresso) è dato dalla (5.5) di pagina 50

$$M_{Rd}^{+} = 300 \cdot 0.80363 \cdot 0.25345 \cdot 460^2 \cdot 14.17 \cdot (1 - 0.4138 \cdot 0.25345) + 162\,\pi \cdot 391.30 \cdot (460 - 40) =$$
$$= 247.64\, kN\, m > M_{Ed} = 236.63\, kN\, m$$

Invertendo l'armatura ($A_s = 2\,\Phi\,18\,mm$, $A_s' = 6\,\Phi\,18\,mm$) il campo deformativo sarà diverso dal precedente e perciò varierà anche il momento resistente. Nell'ipotesi di **campo 2a**, con armature compresse in campo elastico ($\sigma_s' = E_s\,\varepsilon_s'$) e con $\varepsilon_c \leq \varepsilon_{c2}$, cioè

$$\psi = \frac{\xi}{1-\xi}\,\frac{\varepsilon_{su}}{3\,\varepsilon_{c2}^2}\left(3\,\varepsilon_{c2} - \frac{\xi}{1-\xi}\,\varepsilon_{su}\right)$$

La deformazione ε_s' può essere riscritta in termini di ξ come

$$\varepsilon_s' = \varepsilon_{su}\,\frac{\xi - \delta''}{1-\xi}$$

e sostituendolo nella (5.10) si ottiene una ξ di

$$\xi = 0.11194 < \xi_{2a/2b}$$

dove

$$\xi_{2a/2b} = \frac{\varepsilon_{se}' + \varepsilon_{su}\,\delta''}{\varepsilon_{se}' + \varepsilon_{su}} = 0.23034$$

è il limite tra campo 2a (armatura compressa in fase elastica) e il campo 2b (armatura compressa snervata). L'ipotesi di campo 2 è corretta. La deformazione del calcestruzzo è

$$\varepsilon_c = \varepsilon_{su}\,\frac{\xi}{1-\xi} = 1.27\,‰ < \varepsilon_{c2} = 2‰$$

che è compatibile con le ipotesi effettuate. Inoltre

$$\varepsilon_s' = 0.2813\,‰ < \varepsilon_{se} = 1.863\,‰$$

Tutte le ipotesi sono corrette: la sezione 'rovesciata' si trova in **campo 2a** con $\varepsilon_c < \varepsilon_{c2}$ e armature compresse in campo elastico.

$$\psi = \frac{\xi}{1-\xi}\,\frac{\varepsilon_{su}}{3\,\varepsilon_{c2}^2}\left(3\,\varepsilon_{c2} - \frac{\xi}{1-\xi}\,\varepsilon_{su}\right) = 0.4978$$

$$\lambda = \frac{4\,\varepsilon_{c2} - \dfrac{\varepsilon_{su}\,\xi}{1-\xi}}{4\left(3\,\varepsilon_{c2} - \dfrac{\varepsilon_{su}\,\xi}{1-\xi}\right)} = 0.3555$$

Il momento resistente della sezione invertita è di

$$M_{Rd}^{-} = 86.00\,kN\,m$$

5.3 Sezione C1

Il momento sollecitante in campata $C1$ è di

$$M_{Ed}^{C1} \simeq 95.20\,kN\,m$$

5.3.1 Progetto

Le ipotesi progettuali sono di campo 3, con armature superiori snervate. Dal dimensionamento risultano

$$\begin{cases} A_s = 603.227\,mm^2 & \Longrightarrow\ A_s = 3\,\Phi\,18\,mm = 243\,\pi\,mm^2 = 763.41\,mm^2 \\ A_s' = 180.97\,mm^2 & \Longrightarrow\ A_s' = 2\,\Phi\,18\,mm = 162\,\pi\,mm^2 = 508.94\,mm^2 \end{cases}$$

5.3.2 Verifica

L'ipotesi impiegata è di **campo 2a** con $\varepsilon_c < \varepsilon_{c2}$ e $\sigma_s' = E_s\,\varepsilon_s'$. I risultati ottenuti sono

$$\begin{cases} \xi = 0.1607 \\ \varepsilon_s' = 0.8786\,‰ < \varepsilon_{se} \\ \varepsilon_c = 1.9147\,‰ < \varepsilon_{c2} \\ \psi = \dfrac{\xi}{1-\xi}\,\dfrac{\varepsilon_{su}}{3\,\varepsilon_{c2}^2}\left(3\,\varepsilon_{c2} - \dfrac{\xi}{1-\xi}\,\varepsilon_{su}\right) = 0.651842 \\ \\ \lambda = \dfrac{4\,\varepsilon_{c2} - \dfrac{\varepsilon_{su}\,\xi}{1-\xi}}{4\left(3\,\varepsilon_{c2} - \dfrac{\varepsilon_{su}\,\xi}{1-\xi}\right)} = 0.3724 \end{cases}$$

Il momento resistente della sezione è di

$$M_{Rd}^{+} = 128.02\,kN\,m > 95.20\,kN\,m$$

Nella sezione invertita $A_s = 2\,\Phi\,18\,mm$ e $A_s' = 3\,\Phi\,18\,mm$. Usando le ipotesi precedenti si ricava

$$\begin{cases} \xi = 0.12406 \\ \varepsilon'_s = 0.424\,‰ < \varepsilon_{se} \\ \varepsilon_c = 1.426\,‰ < \varepsilon_{c2} \\ \psi = \dfrac{\xi}{1-\xi}\,\dfrac{\varepsilon_{su}}{3\,\varepsilon_{c2}^2}\left(3\,\varepsilon_{c2} - \dfrac{\xi}{1-\xi}\,\varepsilon_{su}\right) = 0.541 \\ \\ \lambda = \dfrac{4\,\varepsilon_{c2} - \dfrac{\varepsilon_{su}\,\xi}{1-\xi}}{4\left(3\,\varepsilon_{c2} - \dfrac{\varepsilon_{su}\,\xi}{1-\xi}\right)} = 0.3591 \end{cases}$$

Il momento resistente della sezione invertita è

$$M_{Rd}^{-} = 86.20\,kN\,m$$

5.4 Sezione N2

Il momento sollecitante in campata $N2$ è di

$$M_{Ed}^{N2} = 199.25\,kN\,m$$

5.4.1 Progetto

Le ipotesi progettuali sono di campo 3, con armature superiori snervate. Dal dimensionamento risultano

$$\begin{cases} A_s = 1236.40\,mm^2 & \Longrightarrow\ A_s = 5\,\Phi\,18\,mm = 405\,\pi\,mm^2 = 1272.345\,mm^2 \\ A'_s = 370.92\,mm^2 & \Longrightarrow\ A'_s = 2\,\Phi\,18\,mm = 162\,\pi\,mm^2 = 508.94\,mm^2 \end{cases}$$

5.4.2 Verifica

L'ipotesi impiegata è di **campo 2a** con $\varepsilon_c \in [\varepsilon_{c2}, \varepsilon_{cu}]$ e $\sigma'_s = E_s\,\varepsilon'_s$. I risultati ottenuti sono

$$\begin{cases} \xi = 0.21648 \\ \varepsilon'_s = 1.653\,‰ < \varepsilon_{se} \\ \varepsilon_c = 2.763\,‰ \in [\varepsilon_{c2}, \varepsilon_{cu}] \\ \psi = \dfrac{16\xi - 1}{15\,\xi} = 0.7587 \\ \lambda = \dfrac{6\,\varepsilon_c^2 - 4\,\varepsilon_c\,\varepsilon_{c2} + \varepsilon_{c2}^2}{4\,\varepsilon_c\,(3\,\varepsilon_c - \varepsilon_{c2})} = 0.3985 \end{cases}$$

Il momento resistente della sezione è di

$$M_{Rd}^{+} = 209.205\,kN\,m > 199.25\,kN\,m$$

Nella sezione invertita $A_s = 2\,\Phi\,18\,mm$ e $A'_s = 5\,\Phi\,18\,mm$. Usando le ipotesi di $\sigma'_s = E_s\,\varepsilon'_s$ e $\varepsilon_c < \varepsilon_{c2}$ si ottengono

$$
\begin{cases}
\xi = 0.1150 \\
\varepsilon'_s = 0.317\,‰ < \varepsilon_{se} \\
\varepsilon_c = 1.31\,‰ < \varepsilon_{c2} \\
\psi = \dfrac{\xi}{1-\xi}\,\dfrac{\varepsilon_{su}}{3\,\varepsilon_{c2}^2}\left(3\,\varepsilon_{c2} - \dfrac{\xi}{1-\xi}\,\varepsilon_{su}\right) = 0.5090 \\
\\
\lambda = \dfrac{4\,\varepsilon_{c2} - \dfrac{\varepsilon_{su}\,\xi}{1-\xi}}{4\left(3\,\varepsilon_{c2} - \dfrac{\varepsilon_{su}\,\xi}{1-\xi}\right)} = 0.3564
\end{cases}
$$

Il momento resistente della sezione invertita è

$$M_{Rd}^{-} = 86.06\,kN\,m$$

5.5 Sezione C2

Il momento sollecitante in campata $C2$ è di

$$M_{Ed}^{C2} = 156.57\,kN\,m$$

5.5.1 Progetto

Le ipotesi progettuali sono di campo 3, con armature superiori snervate. Dal dimensionamento risultano

$$
\begin{cases}
A_s = 976.68\,mm^2 & \Longrightarrow\ A_s = 4\,\Phi\,18\,mm = 324\,\pi\,mm^2 = 1272.345\,mm^2 \\
A'_s = 293\,mm^2 & \Longrightarrow\ A'_s = 2\,\Phi\,18\,mm = 162\,\pi\,mm^2 = 508.94\,mm^2
\end{cases}
$$

5.5.2 Verifica

L'ipotesi impiegata è di **campo 2a** con $\varepsilon_c \in [\varepsilon_{c2}, \varepsilon_{cu}]$ e $\sigma'_s = E_s\,\varepsilon'_s$. I risultati ottenuti sono

$$
\begin{cases}
\xi = 0.18899 \\
\varepsilon'_s = 1.25\,‰ < \varepsilon_{se} \\
\varepsilon_c = 2.33\,‰ \in [\varepsilon_{c2}, \varepsilon_{cu}] \\
\psi = \dfrac{16\xi - 1}{15\,\xi} = 0.7139 \\
\lambda = \dfrac{6\,\varepsilon_c^2 - 4\,\varepsilon_c\,\varepsilon_{c2} + \varepsilon_{c2}^2}{4\,\varepsilon_c\,(3\,\varepsilon_c - \varepsilon_{c2})} = 0.3856
\end{cases}
$$

Il momento resistente della sezione è di

$$M_{Rd}^{+} = 168.63\,kN\,m > 156.57\,kN\,m$$

Nella sezione invertita $A_s = 2\,\Phi\,18\,mm$ e $A'_s = 4\,\Phi\,18\,mm$. Usando le ipotesi di $\sigma'_s = E_s\,\varepsilon'_s$ e $\varepsilon_c < \varepsilon_{c2}$ si ottengono

$$\begin{cases} \xi = 0.1189 \\ \varepsilon'_s = 0.363\,‰ < \varepsilon_{se} \\ \varepsilon_c = 1.36\,‰ < \varepsilon_{c2} \\ \psi = \dfrac{\xi}{1-\xi}\,\dfrac{\varepsilon_{su}}{3\,\varepsilon_{c2}^2}\left(3\,\varepsilon_{c2} - \dfrac{\xi}{1-\xi}\,\varepsilon_{su}\right) = 0.523 \\ \\ \lambda = \dfrac{4\,\varepsilon_{c2} - \dfrac{\varepsilon_{su}\,\xi}{1-\xi}}{4\left(3\,\varepsilon_{c2} - \dfrac{\varepsilon_{su}\,\xi}{1-\xi}\right)} = 0.3575 \end{cases}$$

Il momento resistente della sezione invertita è

$$M_{Rd}^{-} = 86.128\,kN\,m$$

5.6 Sezione N3

Il momento sollecitante in campata $N3$ è di

$$M_{Ed}^{N3} = 216.80\,kN\,m$$

5.6.1 Progetto

Le ipotesi progettuali sono di campo 3, con armature superiori snervate. Dal dimensionamento risultano

$$\begin{cases} A_s = 1343.15\,mm^2 & \Longrightarrow\ A_s = 6\,\Phi\,18\,mm = 486\,\pi\,mm^2 = 1526.814\,mm^2 \\ A'_s = 402.95\,mm^2 & \Longrightarrow\ A'_s = 2\,\Phi\,18\,mm = 162\,\pi\,mm^2 = 508.94\,mm^2 \end{cases}$$

5.6.2 Verifica

I valori sono analoghi alla sezione $N5$, avendo la medesima armatura; perciò:

$$\begin{cases} \xi = 0.25345 \\ \varepsilon'_s = 2.23\,‰ < \varepsilon_{se} \\ \varepsilon_c = 3.395\,‰ < \varepsilon_{c2} \\ \psi = \dfrac{16\xi - 1}{15\,\xi} = 0.80363 \\ \lambda = \dfrac{6\,\varepsilon_c^2 - 4\,\varepsilon_c\,\varepsilon_{c2} + \varepsilon_{c2}^2}{4\,\varepsilon_c\,(3\,\varepsilon_c - \varepsilon_{c2})} = 0.4138 \end{cases}$$

Il momento resistente della sezione è di

$$M_{Rd}^{+} = 247.64\,kN\,m > 216.80\,kN\,m$$

mentre per la sezione invertita

$$\begin{cases} \xi = 0.11194 \\ \varepsilon'_s = 0.2813\,‰ < \varepsilon_{se} \\ \varepsilon_c = 1.27\,‰ < \varepsilon_{c2} \\ \psi = \dfrac{\xi}{1-\xi}\,\dfrac{\varepsilon_{su}}{3\,\varepsilon_{c2}^2}\left(3\,\varepsilon_{c2} - \dfrac{\xi}{1-\xi}\,\varepsilon_{su}\right) = 0.4978 \\ \\ \lambda = \dfrac{4\,\varepsilon_{c2} - \dfrac{\varepsilon_{su}\,\xi}{1-\xi}}{4\left(3\,\varepsilon_{c2} - \dfrac{\varepsilon_{su}\,\xi}{1-\xi}\right)} = 0.3555 \end{cases}$$

Il momento resistente della sezione invertita è di

$$M_{Rd}^{-} = 86.00\,kN\,m$$

5.7 Sezione C3

Il momento sollecitante in campata $C3$ è di

$$M_{Ed}^{C3} = 124.348\,kN\,m$$

5.7.1 Progetto

Le ipotesi progettuali sono di campo 3, con armature superiori snervate. Dal dimensionamento risultano

$$\begin{cases} A_s = 780.646\,mm^2 & \Longrightarrow\ A_s = 4\,\Phi\,18\,mm = 324\,\pi\,mm^2 = 1272.345\,mm^2 \\ A'_s = 234.19\,mm^2 & \Longrightarrow\ A'_s = 2\,\Phi\,18\,mm = 162\,\pi\,mm^2 = 508.94\,mm^2 \end{cases}$$

5.7.2 Verifica

I risultati sono i medesimi della sezione $C2$

$$\begin{cases} \xi = 0.18899 \\ \varepsilon'_s = 1.25\,‰ < \varepsilon_{se} \\ \varepsilon_c = 2.33\,‰ \in [\varepsilon_{c2}, \varepsilon_{cu}] \\ \psi = \dfrac{16\xi - 1}{15\,\xi} = 0.7139 \\ \lambda = \dfrac{6\,\varepsilon_c^2 - 4\,\varepsilon_c\,\varepsilon_{c2} + \varepsilon_{c2}^2}{4\,\varepsilon_c\,(3\,\varepsilon_c - \varepsilon_{c2})} = 0.3856 \end{cases}$$

Il momento resistente della sezione è di

$$M_{Rd}^{+} = 168.63\,kN\,m > 124.348\,kN\,m$$

Per la sezione invertita, il momento sollecitante è di

$$M_{Ed}^{-} = 39.69\,kN\,m$$

$$\begin{cases} \xi = 0.1189 \\ \varepsilon'_s = 0.363\,‰ < \varepsilon_{se} \\ \varepsilon_c = 1.36\,‰ < \varepsilon_{c2} \\ \psi = \dfrac{\xi}{1-\xi}\,\dfrac{\varepsilon_{su}}{3\,\varepsilon_{c2}^2}\left(3\,\varepsilon_{c2} - \dfrac{\xi}{1-\xi}\,\varepsilon_{su}\right) = 0.523 \\ \\ \lambda = \dfrac{4\,\varepsilon_{c2} - \dfrac{\varepsilon_{su}\,\xi}{1-\xi}}{4\left(3\,\varepsilon_{c2} - \dfrac{\varepsilon_{su}\,\xi}{1-\xi}\right)} = 0.3575 \end{cases}$$

Il momento resistente della sezione invertita è

$$M_{Rd}^{-} = 86.128\,kN\,m > 39.69\,kN\,m$$

5.8 Sezione N4

Il momento sollecitante in campata $N3$ è di

$$M_{Ed}^{N3} = 210.35\,kN\,m$$

5.8.1 Progetto

Le ipotesi progettuali sono di campo 3, con armature superiori snervate. Dal dimensionamento risultano

$$\begin{cases} A_s = 1303.94\,mm^2 & \Longrightarrow\ A_s = 6\,\Phi\,18\,mm = 486\,\pi\,mm^2 = 1526.814\,mm^2 \\ A'_s = 391.18\,mm^2 & \Longrightarrow\ A'_s = 2\,\Phi\,18\,mm = 162\,\pi\,mm^2 = 508.94\,mm^2 \end{cases}$$

5.8.2 Verifica

I valori sono analoghi alle sezioni $N5$ e $N3$:

$$\begin{cases} \xi = 0.25345 \\ \varepsilon'_s = 2.23\,‰ < \varepsilon_{se} \\ \varepsilon_c = 3.395\,‰ < \varepsilon_{c2} \\ \psi = \dfrac{16\xi - 1}{15\,\xi} = 0.80363 \\ \lambda = \dfrac{6\,\varepsilon_c^2 - 4\,\varepsilon_c\,\varepsilon_{c2} + \varepsilon_{c2}^2}{4\,\varepsilon_c\,(3\,\varepsilon_c - \varepsilon_{c2})} = 0.4138 \end{cases}$$

Il momento resistente della sezione è di

$$M_{Rd}^{+} = 247.64\,kN\,m > 210.35\,kN\,m$$

Per la sezione invertita

$$\begin{cases} \xi = 0.11194 \\ \varepsilon'_s = 0.2813\,‰ < \varepsilon_{se} \\ \varepsilon_c = 1.27\,‰ < \varepsilon_{c2} \\ \psi = \dfrac{\xi}{1-\xi}\,\dfrac{\varepsilon_{su}}{3\,\varepsilon_{c2}^2}\left(3\,\varepsilon_{c2} - \dfrac{\xi}{1-\xi}\,\varepsilon_{su}\right) = 0.4978 \\ \\ \lambda = \dfrac{4\,\varepsilon_{c2} - \dfrac{\varepsilon_{su}\,\xi}{1-\xi}}{4\left(3\,\varepsilon_{c2} - \dfrac{\varepsilon_{su}\,\xi}{1-\xi}\right)} = 0.3555 \end{cases}$$

Il momento resistente della sezione invertita è di

$$M_{Rd}^{-} = 86.00\,kN\,m$$

5.9 Sezione C4

Il momento sollecitante in campata $C4$ è di

$$M_{Ed}^{C4} = 151.83\,kN\,m$$

5.9.1 Progetto

Le ipotesi progettuali sono di campo 3, con armature superiori snervate. Dal dimensionamento risultano

$$\begin{cases} A_s = 947.86\,mm^2 \implies A_s = 4\,\Phi\,18\,mm = 324\,\pi\,mm^2 = 1272.345\,mm^2 \\ A'_s = 284.36\,mm^2 \implies A'_s = 2\,\Phi\,18\,mm = 162\,\pi\,mm^2 = 508.94\,mm^2 \end{cases}$$

5.9.2 Verifica

I risultati sono i medesimi delle sezioni $C2$ e $C3$

$$\begin{cases} \xi = 0.18899 \\ \varepsilon'_s = 1.25\,‰ < \varepsilon_{se} \\ \varepsilon_c = 2.33\,‰ \in [\varepsilon_{c2}, \varepsilon_{cu}] \\ \psi = \dfrac{16\xi - 1}{15\,\xi} = 0.7139 \\ \lambda = \dfrac{6\,\varepsilon_c^2 - 4\,\varepsilon_c\,\varepsilon_{c2} + \varepsilon_{c2}^2}{4\,\varepsilon_c\,(3\,\varepsilon_c - \varepsilon_{c2})} = 0.3856 \end{cases}$$

Il momento resistente della sezione è di

$$M_{Rd}^{+} = 168.63\,kN\,m > 151.83\,kN\,m$$

Per la sezione invertita, il momento sollecitante è di

$$M_{Ed}^{-} = 6.20\,kN\,m$$

$$
\begin{cases}
\xi = 0.1189 \\
\varepsilon'_s = 0.363\,‰ < \varepsilon_{se} \\
\varepsilon_c = 1.36\,‰ < \varepsilon_{c2} \\
\psi = \dfrac{\xi}{1-\xi}\,\dfrac{\varepsilon_{su}}{3\,\varepsilon_{c2}^2}\left(3\,\varepsilon_{c2} - \dfrac{\xi}{1-\xi}\,\varepsilon_{su}\right) = 0.523 \\
\\
\lambda = \dfrac{4\,\varepsilon_{c2} - \dfrac{\varepsilon_{su}\,\xi}{1-\xi}}{4\left(3\,\varepsilon_{c2} - \dfrac{\varepsilon_{su}\,\xi}{1-\xi}\right)} = 0.3575
\end{cases}
$$

Il momento resistente della sezione invertita è

$$M_{Rd}^{-} = 86.128\,kN\,m > 6.20\,kN\,m$$

5.10 Sezione C5

Il momento sollecitante in campata $C5$ è di

$$M_{Ed}^{C5} = 144.51\,kN\,m$$

5.10.1 Progetto

Le ipotesi progettuali sono di campo 3, con armature superiori snervate. Dal dimensionamento risultano

$$
\begin{cases}
A_s = 903.34\,mm^2 \implies A_s = 4\,\Phi\,18\,mm = 324\,\pi\,mm^2 = 1272.345\,mm^2 \\
A'_s = 271.00\,mm^2 \implies A'_s = 2\,\Phi\,18\,mm = 162\,\pi\,mm^2 = 508.94\,mm^2
\end{cases}
$$

5.10.2 Verifica

I risultati sono i medesimi delle sezioni $C2$ e $C3$ e $C4$

$$
\begin{cases}
\xi = 0.18899 \\
\varepsilon'_s = 1.25\,‰ < \varepsilon_{se} \\
\varepsilon_c = 2.33\,‰ \in [\varepsilon_{c2}, \varepsilon_{cu}] \\
\psi = \dfrac{16\xi - 1}{15\,\xi} = 0.7139 \\
\lambda = \dfrac{6\,\varepsilon_c^2 - 4\,\varepsilon_c\,\varepsilon_{c2} + \varepsilon_{c2}^2}{4\,\varepsilon_c\,(3\,\varepsilon_c - \varepsilon_{c2})} = 0.3856
\end{cases}
$$

Il momento resistente della sezione è di

$$M_{Rd}^{+} = 168.63\,kN\,m > 144.51\,kN\,m$$

Per la sezione invertita, il momento sollecitante è di

$$
\begin{cases}
\xi = 0.1189 \\
\varepsilon'_s = 0.363\,‰ < \varepsilon_{se} \\
\varepsilon_c = 1.36\,‰ < \varepsilon_{c2} \\
\psi = \dfrac{\xi}{1-\xi}\,\dfrac{\varepsilon_{su}}{3\,\varepsilon_{c2}^2}\left(3\,\varepsilon_{c2} - \dfrac{\xi}{1-\xi}\,\varepsilon_{su}\right) = 0.523 \\
\\
\lambda = \dfrac{4\,\varepsilon_{c2} - \dfrac{\varepsilon_{su}\,\xi}{1-\xi}}{4\left(3\,\varepsilon_{c2} - \dfrac{\varepsilon_{su}\,\xi}{1-\xi}\right)} = 0.3575
\end{cases}
$$

Il momento resistente della sezione invertita è

$$M_{Rd}^{-} = 86.128\,kN\,m$$

5.11 Sezione N6

Il momento sollecitante in campata $N6$ è di

$$M_{Ed}^{N6} = 187.96\,kN\,m$$

5.11.1 Progetto

Le ipotesi progettuali sono di campo 3, con armature superiori snervate. Dal dimensionamento risultano

$$
\begin{cases}
A_s = 1167.71\,mm^2 \implies A_s = 5\,\Phi\,18\,mm = 405\,\pi\,mm^2 = 1272.345\,mm^2 \\
A'_s = 350.31\,mm^2 \implies A'_s = 2\,\Phi\,18\,mm = 162\,\pi\,mm^2 = 508.94\,mm^2
\end{cases}
$$

5.11.2 Verifica

La verifica è la medesima della sezione $N2$

$$
\begin{cases}
\xi = 0.21648 \\
\varepsilon'_s = 1.653\,‰ < \varepsilon_{se} \\
\varepsilon_c = 2.763\,‰ \in [\varepsilon_{c2}, \varepsilon_{cu}] \\
\psi = \dfrac{16\xi - 1}{15\,\xi} = 0.7587 \\
\lambda = \dfrac{6\,\varepsilon_c^2 - 4\,\varepsilon_c\,\varepsilon_{c2} + \varepsilon_{c2}^2}{4\,\varepsilon_c\,(3\,\varepsilon_c - \varepsilon_{c2})} = 0.3985
\end{cases}
$$

Il momento resistente della sezione è di

$$M_{Rd}^{+} = 209.205\,kN\,m > 187.96\,kN\,m$$

La sezione invertita

$$
\begin{cases}
\xi = 0.1150 \\
\varepsilon'_s = 0.317\,‰ < \varepsilon_{se} \\
\varepsilon_c = 1.31\,‰ < \varepsilon_{c2} \\
\psi = \dfrac{\xi}{1-\xi}\,\dfrac{\varepsilon_{su}}{3\,\varepsilon_{c2}^2}\left(3\,\varepsilon_{c2} - \dfrac{\xi}{1-\xi}\,\varepsilon_{su}\right) = 0.5090 \\
\\
\lambda = \dfrac{4\,\varepsilon_{c2} - \dfrac{\varepsilon_{su}\,\xi}{1-\xi}}{4\left(3\,\varepsilon_{c2} - \dfrac{\varepsilon_{su}\,\xi}{1-\xi}\right)} = 0.3564
\end{cases}
$$

Il momento resistente della sezione invertita è

$$M_{Rd}^{-} = 86.06\,kN\,m$$

5.12 Sezione C6

Il momento sollecitante in campata $C6$ è di

$$M_{Ed}^{C6} \simeq 87.58\,kN\,m$$

5.12.1 Progetto

Le ipotesi progettuali sono di campo 3, con armature superiori snervate. Dal dimensionamento risultano

$$
\begin{cases}
A_s = 556.93\,mm^2 \implies A_s = 3\,\Phi\,18\,mm = 243\,\pi\,mm^2 = 763.41\,mm^2 \\
A'_s = 167.08\,mm^2 \implies A'_s = 2\,\Phi\,18\,mm = 162\,\pi\,mm^2 = 508.94\,mm^2
\end{cases}
$$

5.12.2 Verifica

La sezione è uguale alla $C1$, da cui

$$
\begin{cases}
\xi = 0.1607 \\
\varepsilon'_s = 0.8786\,‰ < \varepsilon_{se} \\
\varepsilon_c = 1.9147\,‰ < \varepsilon_{c2} \\
\psi = \dfrac{\xi}{1-\xi}\,\dfrac{\varepsilon_{su}}{3\,\varepsilon_{c2}^2}\left(3\,\varepsilon_{c2} - \dfrac{\xi}{1-\xi}\,\varepsilon_{su}\right) = 0.651842 \\
\\
\lambda = \dfrac{4\,\varepsilon_{c2} - \dfrac{\varepsilon_{su}\,\xi}{1-\xi}}{4\left(3\,\varepsilon_{c2} - \dfrac{\varepsilon_{su}\,\xi}{1-\xi}\right)} = 0.3724
\end{cases}
$$

Il momento resistente della sezione è di

$$M_{Rd}^{+} = 128.02\,kN\,m > 87.58\,kN\,m$$

Tabella 5.1: Riassunto dei valori per i momenti resistenti positivi

Sezione	$M_{Ed}\,[kN\,m]$	$M_{Rd}\,[kN\,m]$	$\xi[-]$	A_s	A'_s	$\varepsilon'_s[‰]$	$\varepsilon_c[‰]$
C1	95.20	128.02	0.1607	$3\Phi\,18$	$2\Phi\,18$	0.8786	1.9147
N2	199.25	209.205	0.21648	$5\Phi\,18$	$2\Phi\,18$	1.653	2.763
C2	156.57	168.63	0.18899	$4\Phi\,18$	$2\Phi\,18$	1.25	2.33
N3	216.80	247.64	0.25345	$6\Phi\,18$	$2\Phi\,18$	2.23	3.395
C3	124.348	168.63	0.18899	$4\Phi\,18$	$2\Phi\,18$	1.25	2.33
N4	210.35	247.64	0.25345	$6\Phi\,18$	$2\Phi\,18$	2.23	3.395
C4	151.83	168.63	0.18899	$4\Phi\,18$	$2\Phi\,18$	1.25	2.33
N5	236.63	247.64	0.25345	$6\Phi\,18$	$2\Phi\,18$	2.23	3.395
C5	144.51	168.63	0.18899	$4\Phi\,18$	$2\Phi\,18$	1.25	2.33
N6	187.96	209.205	0.21648	$5\Phi\,18$	$2\Phi\,18$	1.653	2.763
C6	87.58	128.02	0.1607	$3\Phi\,18$	$2\Phi\,18$	0.8786	1.9147

Nella sezione invertita $A_s = 2\,\Phi\,18\,mm$ e $A'_s = 3\,\Phi\,18\,mm$. Usando le ipotesi precedenti si ricava

$$\begin{cases} \xi = 0.12406 \\ \varepsilon'_s = 0.424\,‰ < \varepsilon_{se} \\ \varepsilon_c = 1.426\,‰ < \varepsilon_{c2} \\ \psi = \dfrac{\xi}{1-\xi}\,\dfrac{\varepsilon_{su}}{3\,\varepsilon_{c2}^2}\left(3\,\varepsilon_{c2} - \dfrac{\xi}{1-\xi}\,\varepsilon_{su}\right) = 0.541 \\ \\ \lambda = \dfrac{4\,\varepsilon_{c2} - \dfrac{\varepsilon_{su}\,\xi}{1-\xi}}{4\left(3\,\varepsilon_{c2} - \dfrac{\varepsilon_{su}\,\xi}{1-\xi}\right)} = 0.3591 \end{cases}$$

Il momento resistente della sezione invertita è

$$M^-_{Rd} = 86.20\,kN\,m$$

I valori principali sono riassunti nelle tabelle 5.1 e 5.2. Inoltre, in figura 5.3 è rappresentata la Sovrapposizione dei momenti flettenti sollecitanti e dei momenti resistenti della sezione, in funzione dell'armatura.

5.13 Verifica sulle armature

È ora necessario fare un controllo geometrico sulla sezione, oltre ai controlli richiesti dalla normativa; si deve, infatti, accertare se il numero di barre d'armatura scelto sta effettivamente nella base $b = 300\,mm$. In particolare, l'**EC2** riporta la seguente relazione per la spaziatura fra le barre

$$s_{min} = \max\{k_1\,\Phi_l; d_g + k_2; 20\,mm\}$$

dove, dal **NAD** $k_1 = 1$ e $k_2 = 5\,mm$. Perciò

$$s_{min} = \max\{18\,mm; 25\,mm; 20\,mm\} = 25\,mm$$

Tabella 5.2: Riassunto dei valori dei momenti resistenti per armatura invertita

Sezione	$M_{Ed}\,[kN\,m]$	$M_{Rd}\,[kN\,m]$	$\xi[-]$	A_s	A'_s	$\varepsilon'_s[‰]$	$\varepsilon_c[‰]$
C1	0	86.20	0.12406	2Φ 18	3Φ 18	0.424	1.426
N2	0	86.06	0.1150	2Φ 18	5Φ 18	0.317	1.31
C2	0	86.128	0.1189	2Φ 18	4Φ 18	0.363	1.36
N3	0	86.20	0.11194	2Φ 18	6Φ 18	0.2813	1.27
C3	39.69	86.128	0.1189	2Φ 18	4Φ 18	0.363	1.36
N4	0	86.20	0.11194	2Φ 18	6Φ 18	0.2813	1.27
C4	6.20	86.128	0.1189	2Φ 18	4Φ 18	0.363	1.36
N5	0	86.20	0.11194	2Φ 18	6Φ 18	0.2813	1.27
C5	0	86.128	0.1189	2Φ 18	4Φ 18	0.363	1.36
N6	0	86.06	0.1150	2Φ 18	5Φ 18	0.317	1.31
C6	0	86.10	0.12406	2Φ 18	3Φ 18	0.424	1.426

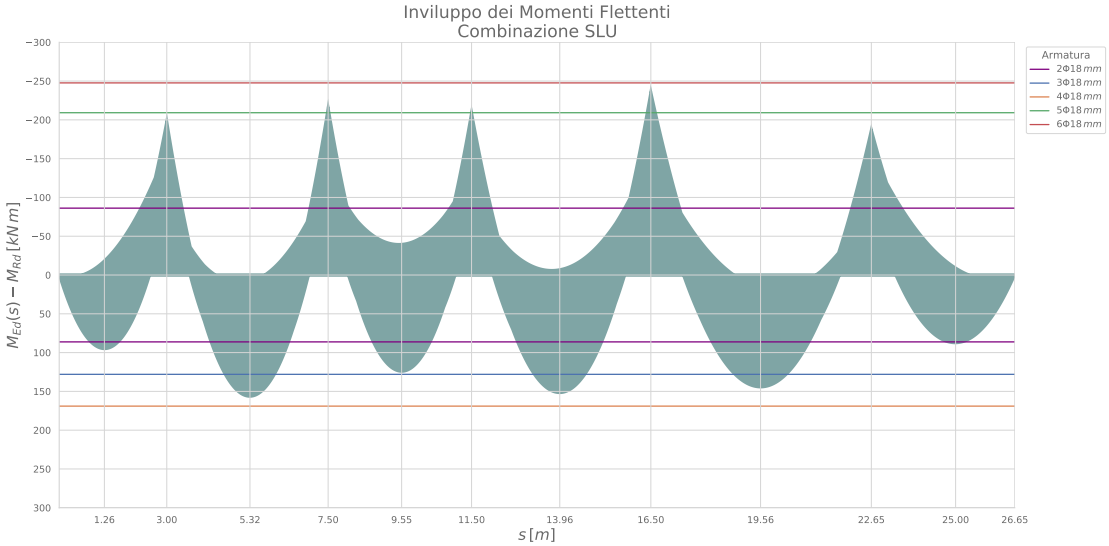


Figura 5.3: Sovrapposizione momenti sollecitanti e momenti resistenti

Considerando un diametro delle staffe $\Phi_{st} = 8\,mm$ e un copriferro laterale di $c = 20\,mm$, la base minima per contenere $6\,\Phi\,18\,mm$ è di

$$b_{min} = 2\,c + n_b\,\Phi_{st} + n\,\Phi_l + (n-1)\,s_{min} = 2 \cdot 20\,mm + 2 \cdot 8\,mm + 6 \cdot 18\,mm + 5 \cdot 25\,mm =$$
$$= 289\,mm < b = 300\,mm$$

dove n_b è il numero di bracci delle staffe ($n_b = 2$) e n è il numero di barre longitudinali.

Le **NTC2018** impongono una verifica sul quantitativo di armatura: in zona tesa si deve avere un minimo di

$$A_{s,min} = \frac{0.26\,f_{ctm}}{f_{yk}}\,b_t\,d = \frac{0.26 \cdot 2.57}{391.30} \cdot 300 \cdot 460 = 235.66\,mm^2 > 0.0013\,b_t\,d = 179.40\,mm^2$$

L'armatura minima in zona tesa è di $3\,\Phi\,18$, cioè

$$A_s = 3\,\Phi\,18 = 763.41\,mm^2 > A_{s,min}$$

Vi è un vincolo anche sul quantitativo massimo di armatura che deve essere inferiore di

$$A_{s,max} = 0.04\,A_c = 0.04 \cdot 300 \cdot 500 = 6000\,mm^2$$

L'armatura massima (in trazione o compressione) è di

$$A_s = 6\,\Phi\,18 = 1526.81\,mm^2 < A_{s,max}$$

Infine la normativa impone un minimo di due barre in ogni zona (tesa e compressa) e almeno una barra per spigolo.

5.14 Traslazione del diagramma dei momenti flettenti

Per via dell'azione assiale di trazione generata dal taglio sulle armature tese quest'ultime saranno sollecitate da uno sforzo assiale maggiore di quello calcolato per la sola azione del momento flettente descritto in precedenza. Per questo motivo è necessario tener conto del contributo dell'azione tagliante, che però risulta essere variabile lungo l'asse della trave. La normativa italiana viene incontro a questo problema nel punto **4.1.2.3.5.2**, dove definisce la formula di traslazione del diagramma dei momenti flettenti sollecitanti. In particolare, la [4.1.30] riporta

$$a_1 = (0.9 \cdot d \cdot \cot\theta)/2$$

dove $0.9 \cdot d$ è il braccio di leva delle forze interne e θ è l'inclinazione dei puntoni compressi in calcestruzzo rispetto all'asse longitudinale della trave. L'angolo θ è limitato inferiormente e superiormente dalla normativa, che impone il seguente intervallo

$$1 \leq \cot\theta \leq 2.5$$

A favore di sicurezza, si sceglie il valore riferito al limite superiore: $\cot\theta = 2.5$; da cui

$$a_1 = (0.9 \cdot 460\,mm \cdot 2.5)/2 = 517.5\,mm \simeq 518\,mm$$

Il diagramma traslato è rappresentato in figura 5.4.

Dalla Sovrapposizione dei momenti resistenti al diagramma dei momenti sollecitanti si può disegnare una prima approssimazione della disposizione delle armature, che risulta essere come in figura 5.5. Partendo da questo, si dovranno calcolare le lunghezze di ancoraggio delle barre che andranno a sovrapporsi le une alle altre.

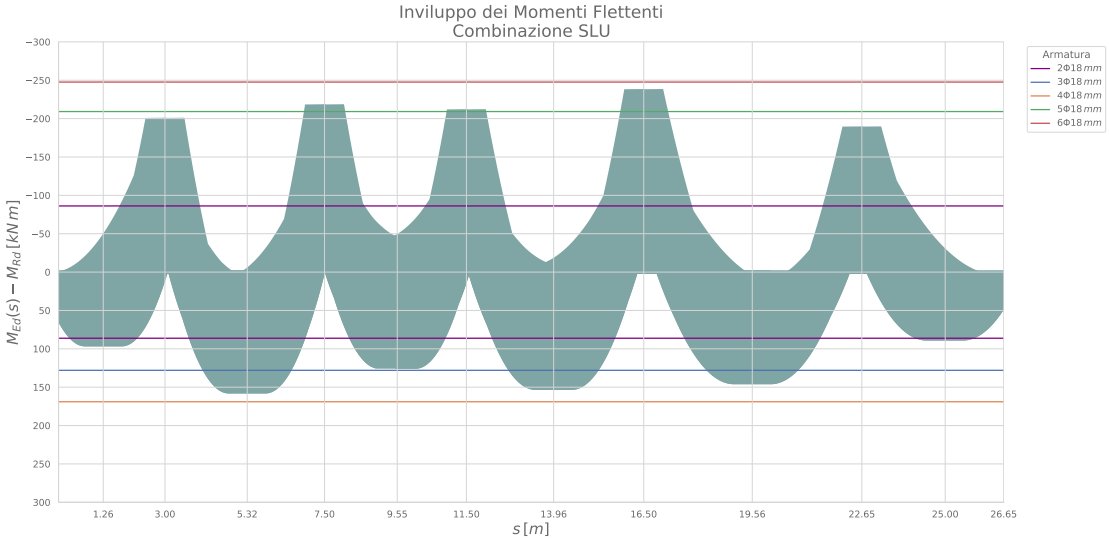


Figura 5.4: Sovrapposizione diagramma dei momenti sollecitanti traslato e momenti resistenti

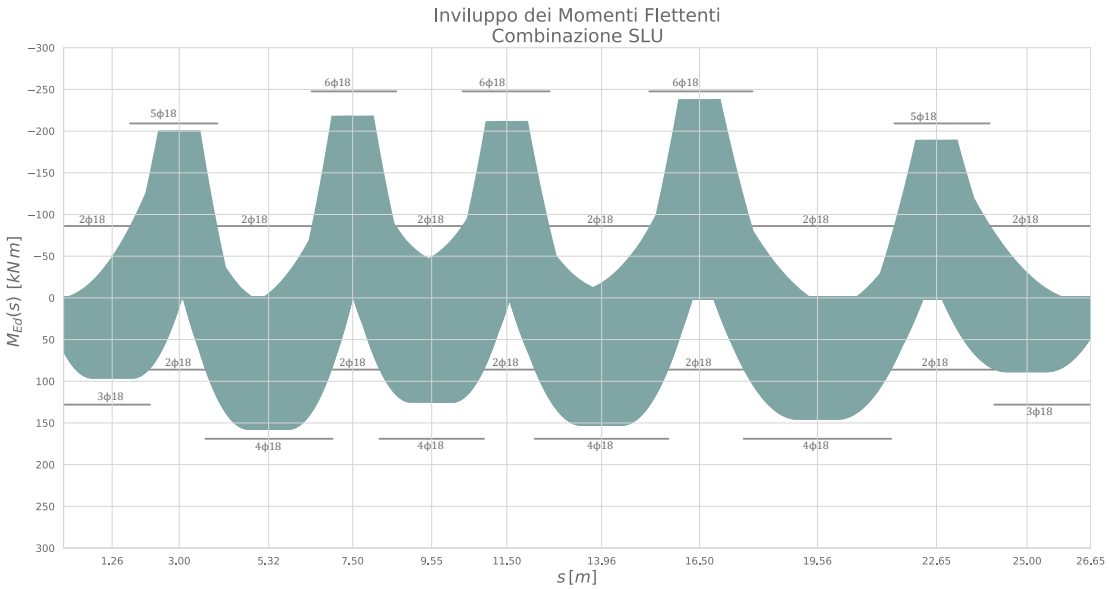


Figura 5.5: Disposizione delle armature

5.15 Lunghezze di ancoraggio

Affinché l'armatura possa lavorare al meglio delle sue prestazioni meccaniche necessita di valutare la lunghezza di ancoraggio delle barre (principalmente tese, ma anche compresse). Idealmente lungo questa lunghezza la tensione nell'armatura deve passare da un valore nullo all'estremità della barra, al valore di tensione di lavoro considerata durante il progetto. Avendo ipotizzato, nel progetto, l'armatura tesa in condizioni di collasso, si sceglie un valore di tensione di lavoro pari alla tensione di snervamento di progetto f_{yd}. Si suppone, inoltre, che la tensione di ancoraggio vari linearmente con la lunghezza.

L'**EC2**, nel punto **8.4.4** descrive il procedimento per il calcolo delle lunghezze di ancoraggio:

$$l_{bd} = \alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3\, \alpha_4\, \alpha_5\, l_{b,rqd} \geq l_{b,min}$$

dove α_1 dipende dalla forma della barra ancorata, α_2 tiene conto del copriferro, α_3 considera l'effetto di confinamento delle staffe, α_4 tiene conto di eventuali barre saldate e infine α_5 tiene in considerazione la pressione trasversale che riduce - anche se di poco - la lunghezza di ancoraggio finale. La lunghezza di ancoraffio richiesta $l_{b,rqd}$ è definita dalla formula (8.3) dell'eurocodice 2:

$$l_{b,rqd} = \frac{\Phi}{4}\,\frac{\sigma_{sd}}{f_{bd}}$$

che dipende, come si può vedere, dal diametro delle barre. La tensione σ_{sd} è la tensione di progetto in cui le barre lavorano alla lunghezza di ancoraggio e, come detto sopra, viene scelta pari a f_{yd}. Il termine f_{bd} è la tensione massima di aderenza del calcestruzzo e si calcola come

$$f_{bd} = 2.25\, \eta_1\, \eta_2\, f_{ctd}$$

Si ipotizza una condizione di *buona aderenza* e perciò $\eta_1 = 1$, mentre impiegando solamente barre d'armatura di diametro $\Phi\,18 < \Phi\,32$, anche il coefficiente η_2 risulta unitario. Il valore della tensione a trazione di progetto del calcestruzzo è stato calcolato alla (4.6) (a pagina 43) e vale $f_{ctd} = 1.02\,MPa$. Allora

$$f_{bd} = 2.25 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1.02\,MPa = 2.295\,MPa \simeq 2.30\,MPa$$

Sostituendo

$$l_{b,rqd} = \frac{18\,mm}{4}\,\frac{391.30\,MPa}{2.30\,MPa} = 765.59\,mm \simeq 766\,mm$$

Il valore minimo di lunghezza di ancoraggio è di

$$l_{b,min} \geq \begin{cases} \max\{0.3\,l_{b,rqd}; 10\,\Phi; 100\,mm\} & = \max\{229.80\,mm; 180\,mm; 100\,mm\} = \\ & = 229.80\,mm \simeq 230\,mm \quad \text{per armature tese} \\ \max\{0.6\,l_{b,rqd}; 10\,\Phi; 100\,mm\} & = \max\{459.60\,mm; 180\,mm; 100\,mm\} = \\ & = 459.60\,mm \simeq 460\,mm \quad \text{per armature compresse} \end{cases}$$

Poiché si considerano ancoraggi con barre rettilinee $\alpha_1 = 1$; mentre, non essendoci barre saldate. $\alpha_3 = \alpha_4 = 1$ Infine, sempre a favore di sicurezza si assume la pressione trasversale sulle barre nulla, da cui $\alpha_5 = 1$. Per il calcolo di α_2, si considera la spaziatura a, calcolata come

$$a = \frac{b - 2\,c - n_b\,\Phi_{st} - n\,\Phi_l}{n-1} = 26.40\,mm$$

Allora

$$c_d = \min\left\{\frac{a}{2}; c_1; c\right\} = 13.20\,mm$$

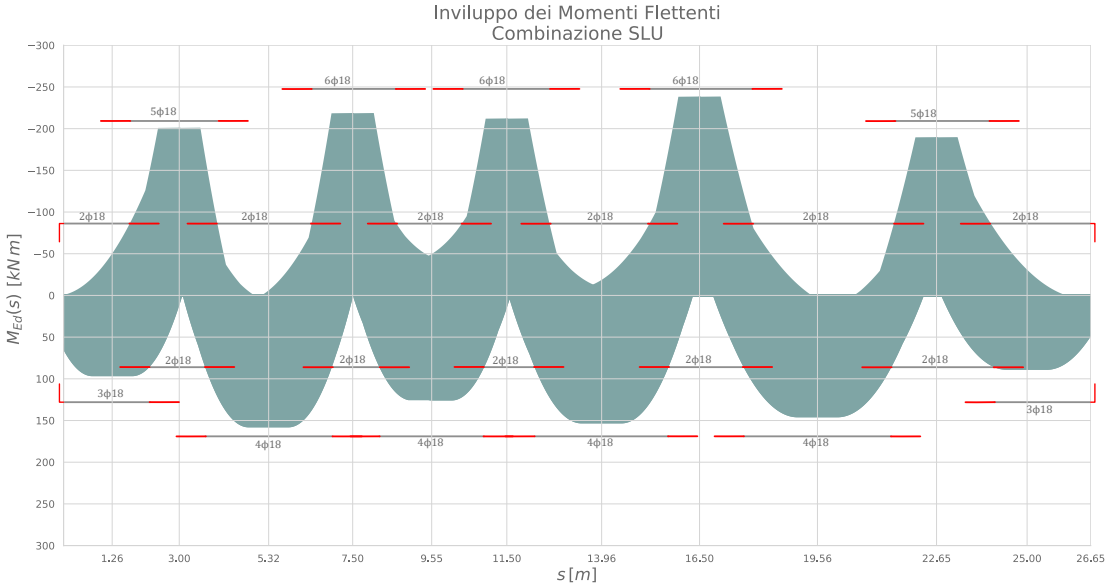


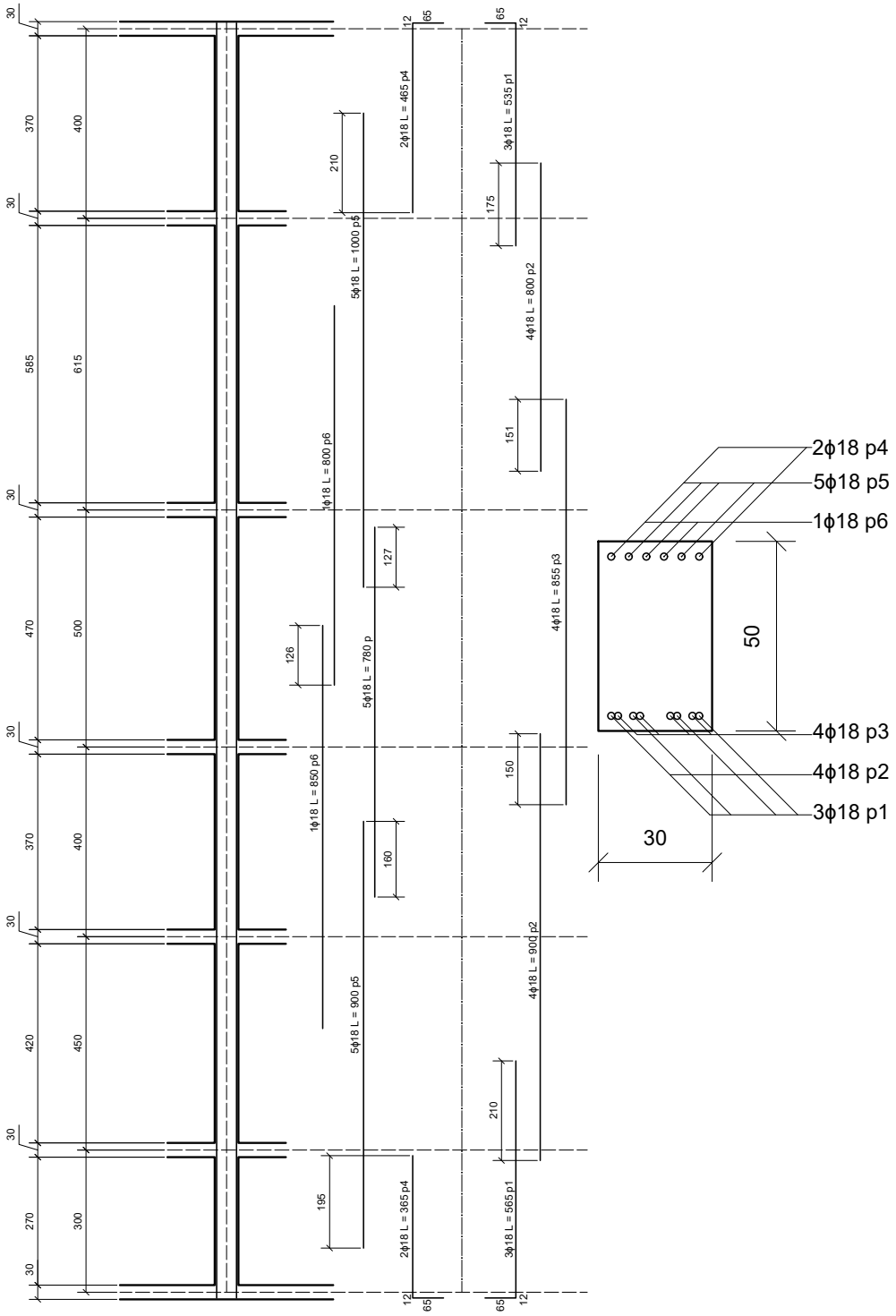
Figura 5.6: Disposizione delle armature e ancoraggio delle barre

e

$$\alpha_2 = 1 - 0.15\,\frac{c_d - \Phi_l}{\Phi_l} = 1.04 \not< 1 \implies \alpha_2 = 1$$

La lunghezza di ancoraggio vale, perciò

$$l_{bd} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 766\,mm = 766\,mm \simeq 770\,mm > \begin{cases} 230\,mm & \text{in tensione} \\ 460\,mm & \text{in compressione} \end{cases}$$


30
370
400
585
615
470
500
370
400
420
450
270
300
12
65
2ϕ18 L = 465 p4
3ϕ18 L = 535 p1
210
175
5ϕ18 L = 1000 p5
4ϕ18 L = 800 p2
1ϕ18 L = 800 p6
151
127
4ϕ18 L = 855 p3
126
5ϕ18 L = 780 p
1ϕ18 L = 850 p6
150
160
4ϕ18 L = 900 p2
5ϕ18 L = 900 p5
210
195
2ϕ18 L = 365 p4
3ϕ18 L = 565 p1
2ϕ18 p4
5ϕ18 p5
1ϕ18 p6
50
4ϕ18 p3
4ϕ18 p2
3ϕ18 p1
30

Capitolo 6

Trave: progetto e verifica agli SLU per taglio

Una volta concluso il progetto e la verifica delle armature longitudinali per effetto dell'azione flessionale, si passa al dimensionamento dell'armatura trasversale. Bisogna comunque assicurarsi che la sezione in calcestruzzo sia in grado di sopportare gli sforzi generati dall'azione tagliante e, in caso contrario, è necessario riprogettarla.

Il diagramma di inviluppo del taglio sulla trave è stato riportato precedentemente in figura 2.4b a pagina 13, mentre i valori sugli appoggi sono presenti nella tabella 2.3 di pagina 12.

Seguendo quando descritto nelle **NTC2018** al capitolo **4.1.2.3.5 Resistenza nei confronti di sollecitazioni taglianti**, anche se non necessaria si deve disporre un'armatura trasversale minima (di staffe)

$$A_{st,min} = 1.5\,b\left[\frac{mm^2}{m}\right] = 1.5 \cdot 300 = 450\,\frac{mm^2}{m}$$

e comunque non minore di *tre staffe al metro*. Il passo massimo delle staffe deve essere di

$$s_{max} = \min\left\{0.8\,d; \frac{1000\,mm}{3}; 15\Phi_l\right\} = \min\{368\,mm; 333.33\,mm; 270\,mm\} = 270\,mm$$

Il calcolo della quantità di staffe da disporre nella trave è preceduto dalla valutazione della resistenza a taglio della trava senza armatura trasversale; se

$$V_{Rd} \geq V_{Ed}$$

è sufficiente l'armatura minima secondo quanto scritto poco sopra. In caso contrario si passa al calcolo esplicito delle staffe.

Per comidità i valori del taglio sollecitante ai nodi sono raggruppati e ordinati nel seguente

vettore (in valore assoluto)

$$\underline{V_{Ed}} = \begin{Bmatrix} V_{N1}^{dx} \\ V_{N2}^{sx} \\ V_{N2}^{dx} \\ V_{N3}^{sx} \\ V_{N3}^{dx} \\ V_{N4}^{sx} \\ V_{N4}^{dx} \\ V_{N5}^{sx} \\ V_{N5}^{dx} \\ V_{N6}^{sx} \\ V_{N6}^{dx} \\ V_{N7}^{sx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 150.59 \\ 245.457 \\ 286.437 \\ 286.33 \\ 272.636 \\ 266.498 \\ 266.79 \\ 261.915 \\ 246.693 \\ 202.222 \\ 208.848 \\ 105.286 \end{Bmatrix} kN$$

Il taglio resistente per una trave fessurata senza armatura trasversale è dato dall'effetto pettine e, secondo le **NTC2018** vale

$$V_{Rd} = \max \left\{ \left[\frac{0.18\, k\, (100\, \rho_1\, f_{ck})^{1/3}}{\gamma_c} + 0.15\, \sigma_{cp} \right] b_w\, d; (\nu_{min} + 0.15\, \sigma_{cp})\, b_w\, d \right\}$$

dove il primo termine deriva dall'effetto pettine, mentre il secondo è conseguenza di prove sperimentali. In particolare

$$\begin{aligned} k &= 1 + \left(\frac{200}{d} \right)^{1/2} \leq 2 \\ \nu_{min} &= 0.035\, k^{3/2}\, f_{ck}^{1/2} \\ \rho_1 &= \frac{A_{sl}}{b_w\, d} \leq 0.02 \\ \sigma_{cp} &= \frac{N_{Ed}}{A_c} \end{aligned}$$

dove A_{sl} è l'area di armatura tesa calcolata nel capitolo 5. Essendo $d = 460\, mm$ costante lungo tutto lo sviluppo della trave, k è uguale per tutte le sezioni e vale

$$k = 1.66 < 2$$

Ne consegue che anche ν_{min} è costante e vale

$$\nu_{min} = 0.3743\, MPa^{1/2}$$

I valori di ρ_1 sono

$$\underline{\rho_1} = \begin{Bmatrix} 0.00553193489001681 \\ 0.00921989148336135 \\ 0.00737591318668908 \\ 0.0110638697800336 \\ 0.00737591318668908 \\ 0.0110638697800336 \\ 0.00737591318668908 \\ 0.0110638697800336 \\ 0.00737591318668908 \\ 0.00921989148336135 \\ 0.00553193489001681 \end{Bmatrix}$$

Infine, $b_w = b = 300\,mm$, $\gamma_c = 1.5$ e $\sigma_{cp} = 0$. La resistenza a taglio della sezione non armata vale

$$\underline{V_{Rd}} = \begin{Bmatrix} 65.95969881495 \\ 78.2038703603589 \\ 72.5980422819886 \\ 83.1040129816814 \\ 72.5980422819886 \\ 83.1040129816814 \\ 72.5980422819886 \\ 83.1040129816814 \\ 72.5980422819886 \\ 78.2038703603589 \\ 65.95969881495 \end{Bmatrix} kN$$

che è nettamente minore del taglio sollecitante. **La trave necessita di un'armatura specifica a taglio**, poiché

$$V_{Rd} \ngeq V_{Ed}$$

6.1 Calcolo dell'armatura a taglio

Il dimensionamento dell'armatura resistente a taglio viene eseguito seguento quanto riportato al punto **4.1.2.3.5.2** delle **NTC2018** e considerando l'armatura trasversale composta da staffe ($\alpha = 90°$). La resistenza a taglio della sezione è pari al minimo valore tra il taglio trazione sulle armature trasversali e il taglio compressione sui puntoni in calcestruzzo inclinati

$$V_{Rd} = \min\{V_{Rsd}; V_{Rcd}\}$$

dove, nell'ipotesi di staffe ($\alpha = 90$, $\cot\alpha = 0$, $\sin\alpha = 1$)

$$V_{Rsd} = 0.9\,d\,\frac{A_{sw}}{s}\,f_{yd}\,(\cot\alpha + \cot\theta)\,\sin\alpha = 0.9\,d\,\frac{A_{sw}}{s}\,f_{yd}\,\cot\theta$$

e

$$V_{Rcd} = 0.9\,d\,b_w\,\alpha_c\,\nu\,f_{cd}\,\frac{\cot\alpha + \cot\theta}{1 + \cot^2\theta} = 0.9\,d\,b_w\,\alpha_c\,\nu\,f_{cd}\,\frac{\cot\theta}{1 + \cot^2\theta}$$

6.1.1 Resistenza a taglio massima lato calcestruzzo

Prima di procedere si deve calcolare la resistenza a taglio massima lato calcestruzzo, che deve essere maggiore del taglio sollecitante. Se così non fosse, sarebbe necessario riprogettare la sezione o tuttalpiù aumentare la classe del calcestruzzo. Il taglio compressione massimo si ha per $\cot\theta = 1$, cioè per $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$V_{Rcd,max} = V_{Rcd}\,(\cot\theta = 1) = 439.875\,kN > \max\left\{\underline{V_{Ed}}\right\} = 286.437\,kN$$

Si deduce che la sezione in calcestruzzo riesce a sopportare il taglio sollecitante.

6.1.2 Armatura a taglio in campata

Si scelgono barre di diametro $8\,mm$ ed essendo delle staffe il numero di bracci è pari a 2; l'area di una staffa è perciò di

$$A_{st} = 2 \cdot \frac{\pi\,8^2}{4} = 32\,\pi\,mm^2 = 100.53\,mm^2$$

Sono necessarie

$$n_{st} = \frac{A_{st,min}}{A_{st}} = \frac{450\,\frac{mm^2}{m}}{100.53\,mm^2} = 4.476 \simeq 5\frac{staffe}{metro}$$

con un passo di

$$s = \frac{1000\,mm}{n_{st}} = \frac{1000\,mm}{4.476} = 223.41\,mm \simeq 220\,mm < s_{max} = 270\,mm$$

Questa armatura verrà disposta nella parte centrale delle campate, dove non è necessaria un'armatura specifica a taglio.

Supponendo una condizione di rottura, cioè per $V_{Rcd} = V_{Rsd}$ con l'armatura appena calcolata e risolvendo in θ, si ottiene l'angolo di inclinazione del puntone di calcestruzzo, pari a

$$\theta = 0.294311 = 16.86^\circ < \theta_{min} = 21.8^\circ$$

Si deve fissare $\theta = \theta_{min} = 21.8^\circ$ e sostituendo si calcolano il taglio trazione e il taglio compressione

$$V_{Rsd}(\theta = 21.8^\circ) = 185.07\,kN$$
$$V_{Rcd}(\theta = 21.8^\circ) = 303.38\,kN$$

il taglio resistente nelle parti centrali delle campate vale

$$V_{Rd} = \min\{V_{Rsd}; V_{Rcd}\} = V_{Rsd} = 185.07\,kN$$

6.1.3 Armatura a taglio sugli appoggi

Sugli appoggi è necessario progettare un'armatura specifica che dipende dal valore del taglio sollecitante. Si intuisce che, a parita di diametro delle staffe, l'armatura dovrà essere infittita. Considerando la condizione limite tale per cui $V_{Rcd} = V_{Ed}$ si può calcolare il valore dell'inclinazione θ dei puntoni in calcestruzzo. Si ottengono i seguenti valori, raggruppati per comodità in un vettore

$$\theta_{Ed}^{(0)} = \begin{Bmatrix} 0.17470699017709382 \\ 0.2959961165631609 \\ 0.35456791598081494 \\ 0.3544076777989241 \\ 0.3342460477177851 \\ 0.325416534901305 \\ 0.32583386351374477 \\ 0.3189007052015158 \\ 0.29769110152969963 \\ 0.2388433511793755 \\ 0.2473623789331834 \\ 0.12085041471779118 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10.01^\circ \\ 16.96^\circ \\ 20.32^\circ \\ 20.31^\circ \\ 19.15^\circ \\ 18.65^\circ \\ 18.67^\circ \\ 18.27^\circ \\ 17.06^\circ \\ 13.68^\circ \\ 14.17^\circ \\ 6.92^\circ \end{Bmatrix} < \theta_{min} = 21.8^\circ$$

Si fissano tutti i valori di θ pari a 21.8°. Con questo valore si può calcolare il passo effettivo delle staffe sugli appoggi, assumendo la condizione limite per cui $V_{Rsd} = V_{Ed}$

$$s_{Ed}^{(0)} = \begin{Bmatrix} 270 \\ 160 \\ 140 \\ 140 \\ 140 \\ 150 \\ 150 \\ 150 \\ 160 \\ 200 \\ 190 \\ 380 \end{Bmatrix} mm \implies s_{Ed} = \begin{Bmatrix} 220 \\ 160 \\ 140 \\ 140 \\ 140 \\ 150 \\ 150 \\ 150 \\ 160 \\ 200 \\ 190 \\ 220 \end{Bmatrix} mm$$

dove si è deciso di fissare i valori maggiori della spaziatura massima al valore di spaziatura di campata $s = 220\,mm$

6.2 Verifica

La verifica va fatta in condizioni di collasso, perciò con

$$V_{Rsd} = V_{Rcd}$$

Risolvendo si possono calcolare gli angoli θ effettivamente originati con i valori di passo appena trovati

$$\theta_{Ed} = \begin{Bmatrix} 16.86° \\ 19.89° \\ 21.32° \\ 21.32° \\ 21.32° \\ 20.57° \\ 20.57° \\ 20.57° \\ 19.89° \\ 17.71° \\ 18.19° \\ 16.86° \end{Bmatrix} \implies \theta_{Ed} = \begin{Bmatrix} 21.8° \\ 21.8° \\ 21.8° \\ 21.8° \\ 21.8° \\ 21.8° \\ 21.8° \\ 21.8° \\ 21.8° \\ 21.8° \\ 21.8° \\ 21.8° \end{Bmatrix}$$

e quindi i valori di taglio trazione e di taglio compressione sono

$$V_{Rsd} = \begin{Bmatrix} 185.08 \\ 254.484 \\ 290.839 \\ 290.839 \\ 290.839 \\ 271.449 \\ 271.449 \\ 271.449 \\ 254.484 \\ 203.587 \\ 214.303 \\ 185.08 \end{Bmatrix} kN \qquad V_{Rcd} = \begin{Bmatrix} 438.667 \\ 438.667 \\ 438.667 \\ 438.667 \\ 438.667 \\ 438.667 \\ 438.667 \\ 438.667 \\ 438.667 \\ 438.667 \\ 438.667 \\ 438.667 \end{Bmatrix} kN$$

Il taglio resistente è quello lato acciaio, cioè

$$V_{Rd} = \begin{Bmatrix} 150.805 \\ 254.484 \\ 290.839 \\ 290.839 \\ 290.839 \\ 271.449 \\ 271.449 \\ 271.449 \\ 254.484 \\ 203.587 \\ 214.303 \\ 150.805 \end{Bmatrix} kN > V_{Ed} = \begin{Bmatrix} 150.59 \\ 245.457 \\ 286.437 \\ 286.33 \\ 272.636 \\ 266.498 \\ 266.79 \\ 261.915 \\ 246.693 \\ 202.222 \\ 208.848 \\ 105.286 \end{Bmatrix} kN$$

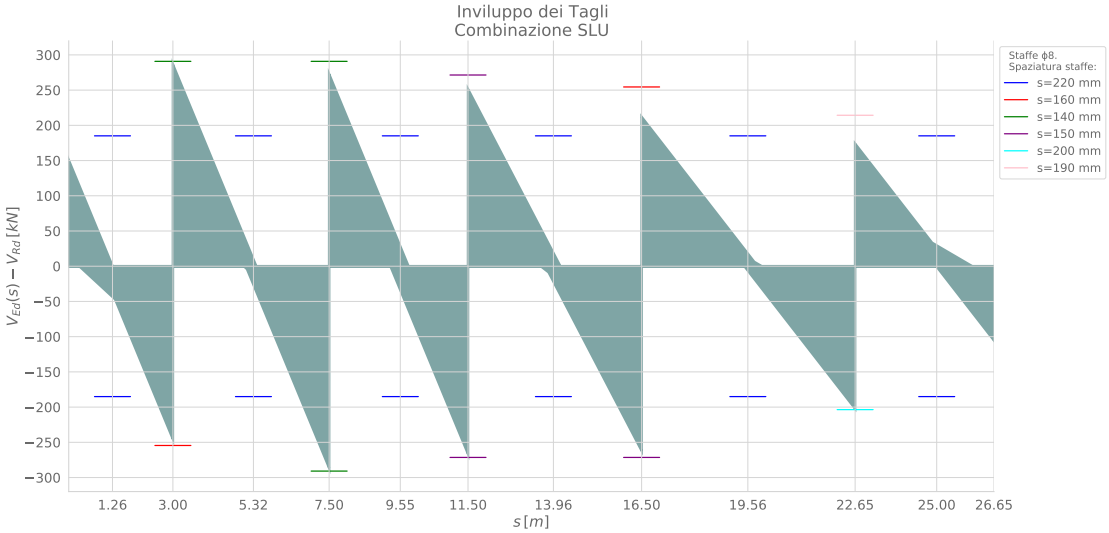
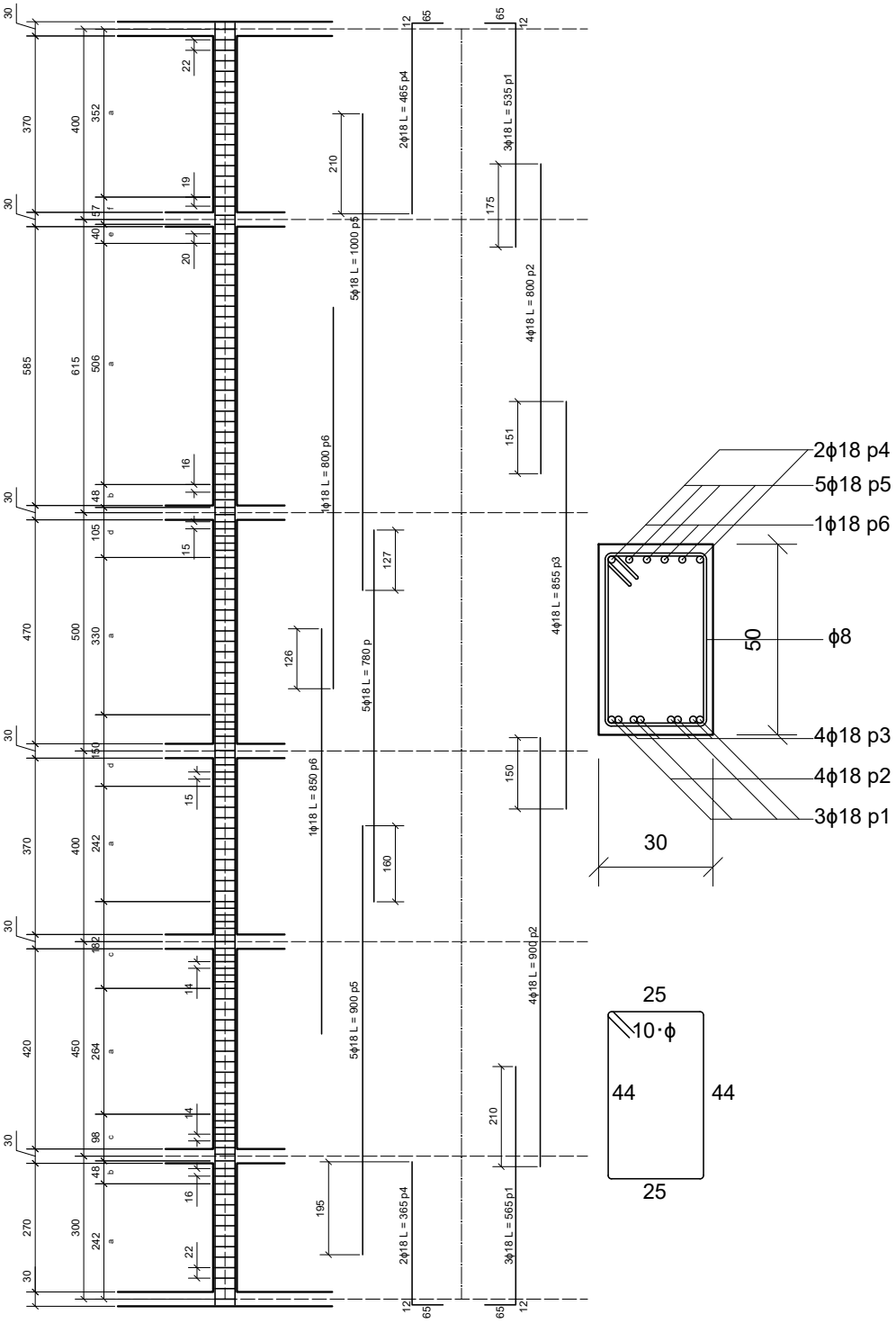


Figura 6.1: Sovrapposizione taglio sollecitante e taglio resistente


2ϕ18 L = 465 p4
3ϕ18 L = 535 p1
5ϕ18 L = 1000 p5
4ϕ18 L = 800 p2
1ϕ18 L = 800 p6
5ϕ18 L = 780 p
4ϕ18 L = 855 p3
1ϕ18 L = 850 p6
5ϕ18 L = 900 p5
4ϕ18 L = 900 p2
2ϕ18 L = 365 p4
3ϕ18 L = 565 p1
2ϕ18 p4
5ϕ18 p5
1ϕ18 p6
ϕ8
4ϕ18 p3
4ϕ18 p2
3ϕ18 p1
50
30
25
10·ϕ
44
44
25

Capitolo 7

Trave: SLE

Gli stati limite di esercizio oggetto di verifica in questo documento si limitano a:

- stato limite di limitazione delle tensioni;
- stato limite di fessurazione;
- stato limite di deformazione.

Tutti gli stati limite sono regolati dalle **NTC2018** e dalla **CIRC. N. 7** con alcuni richiami alle **EC2** in particolar modo per quanto riguarda la classificazione delle condizioni ambientali.

7.1 Stato limite di limitazione delle tensioni

Lo stato limite di limitazione delle tensioni è descritto al punto **4.1.2.2.5** delle **NTC2018** e nel punto **C4.1.2.2.5** della **CIRC. N. 7**. Le ipotesi alla base sono:

- comportamento elastico - lineare dei materiali;
- resistenza a trazione del calcestruzzo trascurabile;
- ipotesi di Bernoulli - Navier per cui le sezioni ruotano, traslano e rimangono piane;
- coefficiente di omogeneizzazione $n = \frac{E_s}{E_c} = 15$ che tiene conto degli effetti della viscosità nel calcestruzzo.

La verifica sulle tensioni va eseguita per le combinazioni delle azioni di tipo *caratteristica* (o combinazione rara) e *quasi permanente*. Per la prima le tensioni nel calcestruzzo devono essere inferiori a

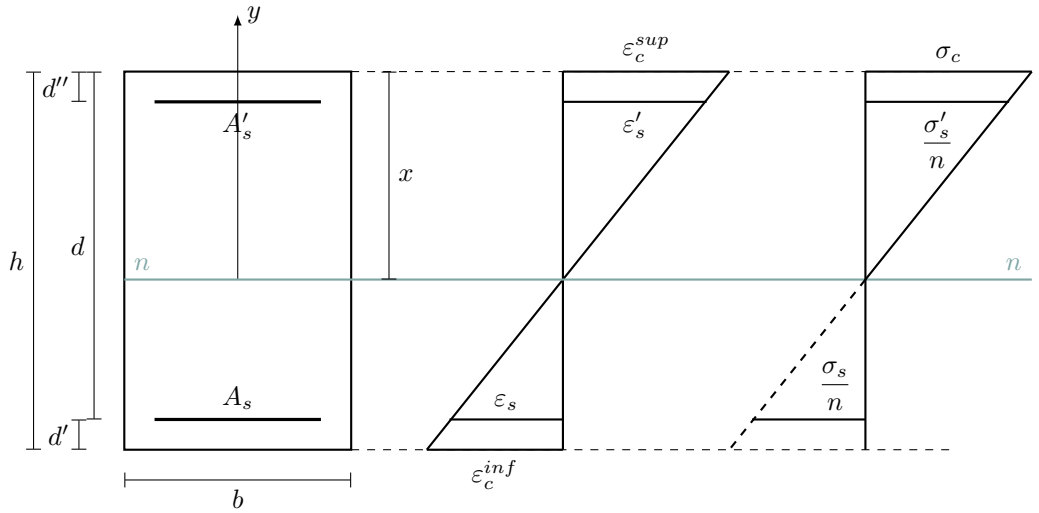
$$\sigma_c^R = 0.60\, f_{ck} = 0.60 \cdot 25\, MPa = 15\, MPa \tag{7.1}$$

mentre per la seconda

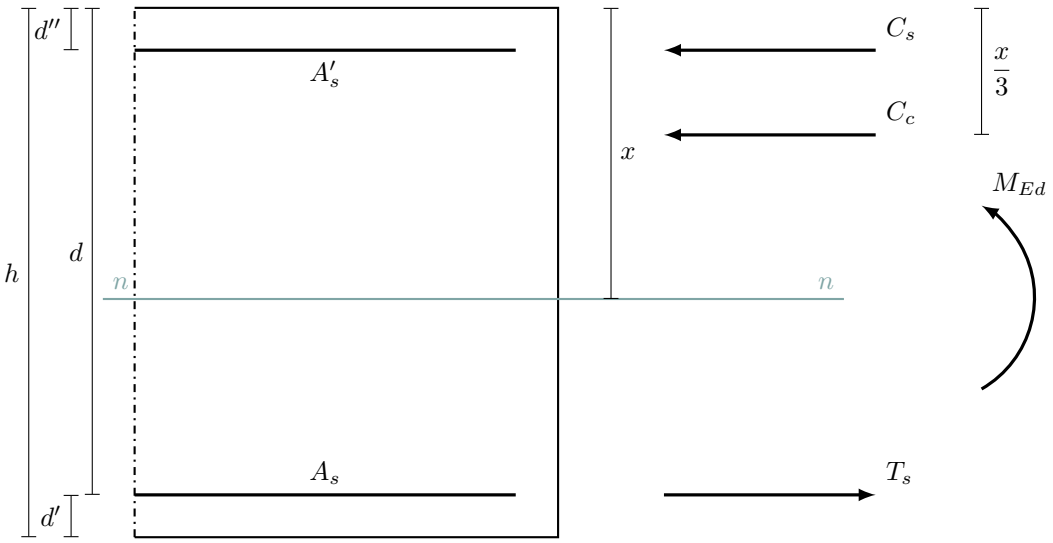
$$\sigma_c^R = 0.45\, f_{ck} = 0.45 \cdot 25\, MPa = 6.75\, MPa \tag{7.2}$$

Per quanto riguarda la tensione massima nell'acciaio, la normativa italiana fissa il limite per la *combinazione caratteristica* pari a

$$\sigma_s^R = 0.8\, f_{yk} = 0.80 \cdot 450\, MPa = 360\, MPa \tag{7.3}$$



(a) *Andamento del campo deformativo e tensionale*



(b) *Risultanti delle tensioni*

Figura 7.1: Rappresentazione del problema di equilibrio della generica sezione in campo elastico - lineare

7.1.1 Procedimento

Poiché la sezione è già stata dimensionata agli SLU, è sufficiente eseguire la verifica agli SLE – ergo calcolare la posizione dell'asse neutro x e le tensioni delle fibre di calcestruzzo maggiormente compresso e delle armature tese e compresse.

Il primo passo è quello di calcolare la posizione dell'asse neutro; il calcolo è puramente geometrico e non dipende dall'entità della sollecitazione applicata. Dipende però dal tipo di sollecitazione: in questo caso, avendo trascurato le azioni assiali sollecitanti la trave, lo sforzo è di flessione pura (e retta, essendo la sezione a doppio asse di simmetria). L'equazione da risolvere è la seguente

$$S_{nn} = 0 \tag{7.4}$$

dove S_{nn} è il momento statico della sezione reagente omogeneizzata rispetto all'asse neutro, che in generale vale

$$S_{nn} = \frac{b\,x^2}{2} + n\,A's\,(x - d'') - n\,A_s\,(d - x)$$

Risolvendo l'equazione di secondo grado e considerando la sola soluzione positiva si trova il valore dell'asse neutro riferito alla sezione di armatura tesa A_s e armatura compressa A'_s

$$x = \frac{-n\,(A_s + A'_s) + \sqrt{n^2\,(A_s + A'_s)^2 + 4\,\frac{b}{2}\,n\,(A_s\,d + A'_s\,d'')}}{b} \tag{7.5}$$

Noto il valore di x è possibile calcolare le tensioni normali in tutta la sezione, grazie all'ipotesi di comportamento elastico - lineare. Le tensioni si calcolano con la formula di *Navier*

$$\sigma_z(y) = \frac{M_{Ed}}{I_{nn}}\,y \tag{7.6}$$

dove $I_{nn} > 0$ è il momento di inerzia della sezione reagente omogeneizzata rispetto all'asse neutro. Essendo riferito alla sezione reagente l'area di calcestruzzo è solo quella compressa mentre le armature sono 'omogeneneizzate' attraverso il coefficiente n. In generale vale

$$I_{nn} = \frac{b\,x^3}{12} + n\,A'_s\,(x - d'')^2 + n\,A_s\,(d - x)^2$$

La tensione del calcestruzzo superiore si calcola come

$$\sigma_c = \sigma_z(y = x) = \frac{M_{Ed}}{I_{nn}}\,x \leq \sigma_c^R \tag{7.7}$$

Le tensioni nelle armature si possono trovare usando la linearità del diagramma delle tensioni, tenendo conto del coefficiente di omogeneizzazione.

$$\frac{\sigma_s}{n\,(d - x)} = \frac{\sigma_c}{x}$$
$$\frac{\sigma'_s}{n\,(x - d'')} = \frac{\sigma_c}{x}$$

da cui

$$\sigma_s = n\,\sigma_c\,\frac{d - x}{x} \leq \sigma_s^R \tag{7.8}$$

$$\sigma'_s = n\,\sigma_c\,\frac{x - d''}{x} \leq \sigma_s^{'R} \tag{7.9}$$

In alternativa alla (7.4) e alla (7.6) si possono utilizzare gli equilibri alla traslazione e alla rotazione

$$\begin{cases} C_c + C_s - T_s = 0 \\ C_c \left(d - \dfrac{x}{3}\right) + C_s \left(d - d''\right) = M_{Ed} \end{cases}$$

dove $C_c = b\,\sigma_c\,\frac{x}{2}$, $C_s = \sigma'_s\,A'_s$ e $T_s = \sigma_s\,A_s$, mentre σ_s e σ'_s si calcolano - in funzione di σ_c - dalle (7.8) e (7.9) rispettivamente.

7.1.2 Verifica

Come per capitolo 6, i calcoli verranno compattati in vettori per una questione di comodità. Si deve comunque suddividere la verifica in base alle combinazioni delle azioni tra *combinazione caratteristica* e *combinazione quasi permanente.*

Combinazione caratteristica

Per la combinazione caratteristica i valori di momento flettente sollecitante sono riportati nella tabella 2.4 di pagina 15; riportandolo in un vettore

$$\underline{M_{Ed}} = \begin{Bmatrix} M_{Ed}^{C1} \\ M_{Ed}^{N2} \\ M_{Ed}^{C2} \\ M_{Ed}^{N3} \\ M_{Ed}^{C3} \\ M_{Ed}^{N4} \\ M_{Ed}^{C4} \\ M_{Ed}^{N5} \\ M_{Ed}^{C5} \\ M_{Ed}^{N6} \\ M_{Ed}^{C6} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 44.88 \\ 124.53 \\ 87.16 \\ 130.77 \\ 49.51 \\ 121.15 \\ 76.75 \\ 148.8 \\ 79.76 \\ 117.97 \\ 41.99 \end{Bmatrix} kN\,m$$

Applicando la (7.5) e sostituendo le aree di armatura calcolate nel capitolo 5 si ottengono i seguenti valori di asse neutro

$$\underline{x} = \begin{Bmatrix} 139.36 \\ 172.65 \\ 157.51 \\ 185.67 \\ 157.51 \\ 185.67 \\ 157.51 \\ 185.67 \\ 157.51 \\ 172.65 \\ 139.36 \end{Bmatrix} mm$$

Calcolati i momenti di inerzia delle varie sezioni si possono valutare le tensioni del calcestruzzo, raggruppate come

$$\underline{\sigma_c} = \begin{Bmatrix} 4.74 \\ 11.69 \\ 8.58 \\ 11.87 \\ 4.87 \\ 10.99 \\ 7.56 \\ 13.51 \\ 7.85 \\ 11.08 \\ 4.43 \end{Bmatrix} MPa < \sigma_c^R = 15\,MPa$$

mentre le tensioni nelle armature tese

$$\underline{\sigma_s} = \begin{Bmatrix} 163.49 \\ 291.90 \\ 247.15 \\ 263.06 \\ 140.39 \\ 243.71 \\ 217.63 \\ 299.33 \\ 226.17 \\ 276.52 \\ 152.96 \end{Bmatrix} MPa < \sigma_s^R = 360\,MPa$$

e in quelle compresse

$$\underline{\sigma_s'} = \begin{Bmatrix} 50.66 \\ 134.75 \\ 96.01 \\ 139.68 \\ 54.54 \\ 129.41 \\ 84.54 \\ 158.94 \\ 87.86 \\ 127.66 \\ 47.40 \end{Bmatrix} MPa < \sigma_s^{'R} = 360\,MPa$$

Le tensioni sono verificate per la combinazione rara.

Combinazione quasi permanente

Per la combinazione quasi permanente si procede in maniere analoga. I valori delle sollecitazioni sono riportati in tabella 2.8 di pagina 18

$$\underline{M_{Ed}} = \begin{Bmatrix} M_{Ed}^{C1} \\ M_{Ed}^{N2} \\ M_{Ed}^{C2} \\ M_{Ed}^{N3} \\ M_{Ed}^{C3} \\ M_{Ed}^{N4} \\ M_{Ed}^{C4} \\ M_{Ed}^{N5} \\ M_{Ed}^{C5} \\ M_{Ed}^{N6} \\ M_{Ed}^{C6} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 29.18 \\ 86.73 \\ 58.92 \\ 90.00 \\ 29.90 \\ 83.75 \\ 52.16 \\ 115.07 \\ 63.74 \\ 95.72 \\ 31.89 \end{Bmatrix} kN\,m$$

I valori di x sono i medesimi del caso precedente, essendo funzione della sola sezione. Le tensioni, al contrario, dipendono dal momento sollecitante

$$\underline{\sigma_c} = \begin{Bmatrix} 3.08 \\ 8.14 \\ 5.80 \\ 8.17 \\ 2.94 \\ 7.60 \\ 5.13 \\ 10.44 \\ 6.27 \\ 8.99 \\ 3.37 \end{Bmatrix} MPa < \sigma_c^R = 11.25\,MPa$$

Le **NTC2018** non fissano un limite alle tensioni nelle armature per la combinazione quasi permantente. Vengono comunque riportati gli sforzi

$$\underline{\sigma_s} = \begin{Bmatrix} 106.30 \\ 203.30 \\ 167.07 \\ 181.05 \\ 84.78 \\ 168.48 \\ 147.90 \\ 231.48 \\ 180.74 \\ 224.37 \\ 116.17 \end{Bmatrix} MPa$$

$$\underline{\sigma_s'} = \begin{Bmatrix} 32.94 \\ 93.85 \\ 64.90 \\ 96.13 \\ 32.94 \\ 89.46 \\ 57.46 \\ 122.91 \\ 70.21 \\ 103.58 \\ 36.00 \end{Bmatrix} MPa$$

Le tensioni nel calcestruzzo sono comunque verificate.

7.2 Stato limite di fessurazione

Le **NTC2018** attraverso gli stati limite di esercizio garantiscono le condizioni di utilizzo durante la vita dell'opera. La verifica di fessurazione è forse una delle più importanti perché coniuga il perfetto funzionamento e la durabilità dell'elemento in cemento armato evitandone il degrado e le esigenze estetiche richieste.

Le normative italiane trattano lo stato limite di fessurazione ai capitoli **4.1.2.2.4** e **C4.1.2.2.4**, mentre l'**EC2** lo tratta al punto **7.3**. Queste consentono il calcolo dell'ampiezza di fessura attraverso due diversi metodi:

- metodo semplificato;
- metodo esplicito.

In questo testo verranno discussi entrambi i procedimenti. Le combinazioni delle azioni da considerare sono quella *quasi permanente* e quella *frequente* (si vedano la tabella 2.8 di pagina 18 e la tabella 2.6 di pagina 16 rispettivamente).

Se si considera la campata maggiormente sollecitata la scelta ricade sulla $C5$, dove

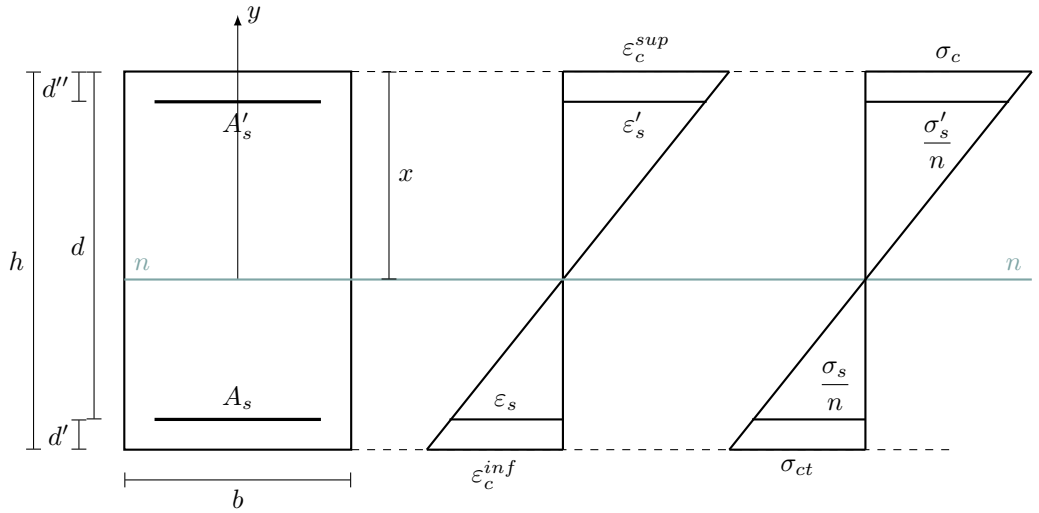
$$M_{Ed}^{freq} = 65.94\, kN\, m$$

$$M_{Ed}^{QP} = 63.74\, kN\, m$$

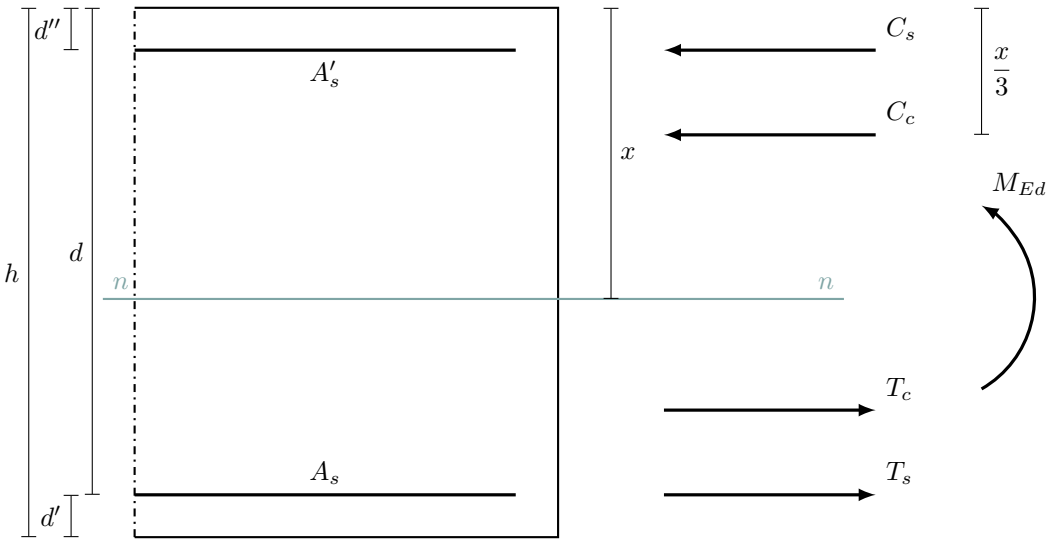
La rappresentazione grafica del problema dell'equilibrio è raffigurate in figura 7.2. Durante l'analisi si terrà conto della resistenza a trazione del calcestruzzo.

Considerando che l'edificio si trova in Provincia di Trento a un'altitudine di $788\, m$ sul livello del mare ed essendo la trave un elemento divisorio tra ambiente esterno ed interno, si sceglie - secondo la tabella 4.1 del **EC2** - come classe di esposozione ambientale la **XC3** (umidità moderata). La classe ricade nelle *condizioni ambientali ordinarie* per cui i limiti imposti dalla normativa italiana sono:

$$\begin{cases} w_k^{freq} \leq w_3 = 0.4 \\ \\ w_k^{QP} \leq w_2 = 0.3 \end{cases}$$



(a) *Andamento del campo deformativo e tensionale con il CLS resistente a trazione*



(b) *Risultanti delle tensioni*

Figura 7.2: Rappresentazione del problema di equilibrio della generica sezione

7.2.1 Momento di prima fessurazione

Per assicurarsi che la trave sia effettivamente fessurata si deve prima calcolare il momento di prima fessurazione, cioè quel momento flettente che genera una tensione di trazione nel calcestruzzo maggiore della resistenza a trazione del materiale. Il momento di prima fessurazione si calcola come segue

$$M_{cr} = \frac{\sigma_{ct}}{h - x} I_{nn} \tag{7.10}$$

dove la $\sigma_{ct} = \frac{f_{ctm}}{1.2} = 2.14\,MPa$, x è la distanza tra l'asse neutro e la fibra maggiormente compressa della sezione e si calcola ponendo nullo ($N_{Ed} = 0$) il momento statico di tutta la sezione reagente, che comprende anche il calcestruzzo teso. Supponendo che il modulo di elasticità del calcestruzzo a trazione sia uguale a quello in compressione $\frac{E_{ct}}{E_c} = n' = 1$, il momento statico risulta

$$S_{nn} = \frac{b\,x^2}{2} - \frac{b\,(h-x)^2}{2} + n\,A'_s\,(x - d'') - n\,A_s\,(d - x) = 0$$

dove $n = \frac{E_s}{E_c} = 15$. Risolvendo in x si trova

$$x = \frac{n\,(A_s\,d + A'_s\,d'') + \frac{b\,h^2}{2}}{n\,(A_s + A'_s) + b\,h}$$

Per la sezione $C5$

$$A_s = 4\,\Phi\,18$$
$$A'_s = 2\,\Phi\,18$$

Sostituendo i valori $b = 300\,mm$, $d = 460\,mm$, $d'' = 40\,mm$, $h = d + d' = 500\,mm$ si ottiene

$$x = 259.27\,mm$$

che è circa metà sezione. Il momento di inerzia di tutta la sezione rispetto all'asse neutro vale

$$I_{nn} = \frac{b\,x^3}{12} + \frac{b\,(h-x)^3}{12} + n\,A'_s\,(x - d'')^2 + n\,A_s\,(d - x)^2 = 1.7667 \cdot 10^9\,mm^4$$

È ora possibile calcolare il momento di prima fessurazione sostituendo i valori numerici nella (7.10).

$$M_{cr} = \frac{2.14\,MPa}{(500 - 259.27)\,mm}\,1.7667 \cdot 10^9\,mm^4 = 15.705\,kN\,m < \begin{cases} M_{Ed}^{freq} = 65.94\,kN\,m \\ \\ M_{Ed}^{QP} = 63.74\,kN\,m \end{cases}$$

La sezione è fessurata!

7.2.2 Metodo esplicito

Il metodo esplicito consiste nel calcolo diretto dell'ampiezza di fessura. Il capitolo **C4.1.2.2.4.5** della **CIRC. N. 7** definice l'ampiezza caratteristica della fessura come

$$w_k = 1.7\,\varepsilon_{sm}\,\Delta_{sm} \tag{7.11}$$

ove ε_{sm} è la deformazione unitaria media delle barre di armatura e Δ_{sm} è la distanza media tra le fessure. Il primo termine è riportato dalla **[C4.1.6]** come

$$\varepsilon_{sm} = \frac{\sigma_s - k_t \dfrac{f_{ctm}}{\rho_{eff}} (1 + \alpha_e \, \rho_{eff})}{E_s} \geq 0.6 \, \frac{\sigma_s}{E_s} \tag{7.12}$$

dove in realtà a primo membro sarebbe $\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}$, cioè la differenza tra la deformazione media dell'acciaio e la deformazione media del calcestruzzo. Il termine σ_s è la tensione nell'armatura per la sezione fessurata e si calcola come

$$\sigma_s = n \, \frac{M_{Ed}}{I_{nn}} \, (d - x)$$

dove I_{nn} è riferito alla sezione reagente omogeneizzata e parzializzata e x è la posizione dell'asse neutro calcolata risolvendo

$$S_{nn} = \frac{b \, x^2}{2} + n \, A'_s \, (x - d'') - n \, A_s \, (d - x) = 0$$

Sia per la *combinazione frequente* che per la *combinazione quasi permanente*

$$x = 157.51 \, mm$$

Sostituendo i valori si trova

$$\sigma_s^{freq} = n \, \frac{M_{Ed}^{freq}}{I_{nn}} \, (d - x) = 186.98 \, MPa \tag{7.13}$$

$$\sigma_s^{QP} = n \, \frac{M_{Ed}^{QP}}{I_{nn}} \, (d - x) = 180.74 \, MPa \tag{7.14}$$

Per quanto riguarda gli altri termini della (7.12):

$$\alpha_e = \frac{E_s}{E_{cm}} = \frac{210000 \, MPa}{31476 \, MPa} = 6.67$$

$$h_{c,eff} = \min \left\{ 2.5 \, (h - d); \frac{h - x}{3}; \frac{h}{2} \right\} = \min \{100 \, mm; 80.24 \, mm; 250 \, mm\} = 80.24 \, mm$$

$$\rho_{eff} = \frac{A_s}{A_{c,eff}} = \frac{A_s}{b \, h_{c,eff}} = \frac{324 \, \pi \, mm^2}{(300 \cdot 80.24) \, mm^2} = 0.4228$$

$$k_t = \begin{cases} 0.6 \text{ per carichi di breve durata (combinazione frequente)} \\ 0.4 \text{ per carichi di lunga durata (combinazione quasi permanente)} \end{cases}$$

e quindi sostituendo si ottiene

$$\varepsilon_{sm}^{freq} = 0.0006681609 \simeq 0.6682‰ > 0.6 \, \frac{186.98}{210000} = 0.534‰ \tag{7.15}$$

$$\varepsilon_{sm}^{QP} = 0.00071253 \simeq 0.713‰ > 0.6 \, \frac{180.74}{210000} = 0.516‰ \tag{7.16}$$

Nel caso in cui l'armatura sia disposta con una spaziatura s non superiore a

$$s_{lim} = 5 \, (c + \frac{\Phi_l}{2}) = 5 \, (20 + 9) = 145 \, mm$$

si può calcolare il Δ_{sm} come

$$\Delta_{sm} = \frac{k_3\, c + k_1\, k_2\, k_4\, \dfrac{\Phi_l}{\rho_{eff}}}{1.7} \tag{7.17}$$

Nel capitolo 6 era stato scelto $c = 20\,mm$, mentre:

- $k_1 = 0.8$ per barre ad aderenza migliorata;
- $k_2 = 0.5$ nel caso di flessione;
- $k_3 = 3.4$;
- $k_4 = 0.425$.

La spaziatura delle barre nella sezione $C5$ con $A_s = 4\,\Phi\,18$ è

$$s = \frac{b - 2\,c - n_b\,\Phi_{st} - n\,\Phi_l}{n-1} = 57.33\,mm < 145\,mm$$

perciò, per la sezione oggetto di studio, la distanza tra le fessure è di

$$\Delta_{sm} = 82.57\,mm$$

L'ampiezza della fessura allora è

$$w_k^{freq} = 1.7\,\varepsilon_{sm}^{freq}\,\Delta_{sm} = 1.7 \cdot 0.6682‰ \cdot 82.57\,mm = 0.0938\,mm < w_3 = 0.4\,mm \tag{7.18}$$

$$w_k^{QP} = 1.7\,\varepsilon_{sm}^{QP}\,\Delta_{sm} = 1.7 \cdot 0.713‰ \cdot 82.57\,mm = 0.1\,mm < w_2 = 0.3\,mm \tag{7.19}$$

La sezione risulta verificata.

7.2.3 Metodo semplificato

Il metodo semplificato consiste nella verifica - senza calcolo diretto dell'ampiezza di fessura - andando a confrontare le tensioni σ_s delle armature nelle compinazioni frequente e quasi pemanente con le tabelle **C4.1.II** e **C4.1.III** della **CIRC. N. 7** (vedi figura 7.3).

La tensioni nelle armature per la sezione fessurata sono quelle calcolate nella (7.13) e nella (7.14), mentre la spaziatura nella sezione in esame è $s = 57.33\,mm$.

Entrando in tabella con i valori delle tensioni nelle armature deduce che il diametro massimo delle barre tese deve essere compreso tra $32\,mm$ e $40\,mm$ per la combinazione frequente e tra $25\,mm$ e $32\,mm$ per la combinazione quasi permanente. Avendo utilizzato delle barre di armature $\Phi\,18\,mm$ il controllo sui diametri è verificato secondo la normativa italiana. La spaziatura tra le barre deve essere inferiore a $300\,mm$ e circa $250\,mm$ per le combinazioni frequente e quasi permanente rispettivamente; anche in questo caso la verifica ha esito positivo, confermando perciò quanto fatto con il metodo diretto.

7.3 Stato limite di deformazione

Per salvaguardare l'aspetto e la funzionalità dell'opera, la normativa richiede una verifica sulla freccia a lungo termine di travi e solai calcolate in *combinazione quasi permanente* delle azioni. Il limite fissato dalle **NTC2018** è di $\frac{l}{250}$, dove l è la luce dell'elemento strutturale. Nel caso in cui fossero presenti pareti divisorie, per garantirne l'integrità il limite è ridotto a $\frac{l}{500}$.

Tabella C4.1.II *Diametri massimi delle barre per il controllo di fessurazione*

Tensione nell'acciaio	Diametro massimo ϕ delle barre (mm)		
σ_s [MPa]	w_3 = 0,4 mm	w_2 = 0,3 mm	w_1 = 0,2 mm
160	40	32	25
200	32	25	16
240	20	16	12
280	16	12	8
320	12	10	6
360	10	8	-

Tabella C4.1.III -*Spaziatura massima delle barre per il controllo di fessurazione*

Tensione nell'acciaio	Spaziatura massima s delle barre (mm)		
σ_s [MPa]	w_3 = 0,4 mm	w_2 = 0,3 mm	w_1 = 0,2 mm
160	300	300	200
200	300	250	150
240	250	200	100
280	200	150	50
320	150	100	-
360	100	50	-

Figura 7.3: Tabelle estrapolate dalla **CIRC. N. 7**

Come per lo stato limite di fessurazione, la verifica allo stato limite di fessurazione può essere eseguite con un metodo diretto - tramite integrazione delle curvature - oppure con un metodo semplificato che limita la snellezza dell'elemento.

La campata su cui ricade la scelta è la medesima della verifica precendente (campata $C5$); l'andamento del momento flettente è quello di figura 7.4

Le caratteristiche della sezione sono:

- $N5$: $A_s = 6\,\Phi\,18$, $A'_s = 2\,\Phi\,18$;
- $C5$: $A_s = 4\,\Phi\,18$, $A'_s = 2\,\Phi\,18$;
- $N6$: $A_s = 5\,\Phi\,18$, $A'_s = 2\,\Phi\,18$;

Il momento di fessurazione per la verifica a deformazione vale

$$M_{cr} = \frac{f_{ctm}}{h-x}\, I_{nn} \tag{7.20}$$

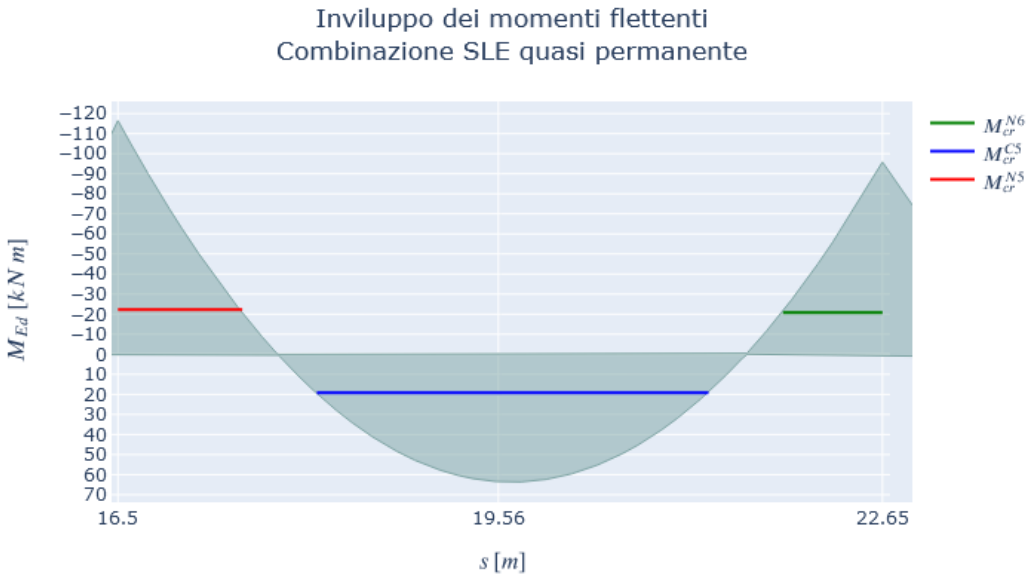


Figura 7.4: Inviluppo dei momenti flettenti in combinazione quasi permanente - campata $C5$

dove x e I_{nn} sono riferiti alla sezione **non fessurata**.

$$N5: \begin{cases} x = 267.76\,mm \\ I_{nn} = 2.0355 \cdot 10^9\,mm^4 \\ M_{cr}^{N5} = 22.32\,kN\,m \end{cases}$$

$$C5: \begin{cases} x = 259.27\,mm \\ I_{nn} = 1.7667 \cdot 10^9\,mm^4 \\ M_{cr}^{C5} = 19.12\,kN\,m \end{cases}$$

$$N6: \begin{cases} x = 263.61\,mm \\ I_{nn} = 1.9060 \cdot 10^9\,mm^4 \\ M_{cr}^{N6} = 20.72\,kN\,m \end{cases}$$

Dalla figura 7.4 si può capire che il tratto compreso in $s \in [16.50, 17.50]\,m$ è fessurato ($M_{Ed}^{N5} > M_{cr}^{N5}$) mentre non lo è tra $s \in [17.50, 17.80]\,m$ essendo $M_{Ed}^{N5} < M_{cr}^{N5}$. In generale si può dividere la campata in zone. Fissando una coordinata ξ che ha origine in $N5$ e corre lungo tutta la campata:

- $N5F:\ s \in [16.50, 17.50]\,m,\ \xi \in [0, 1000]\,mm,\ M_{Ed}^{N5} > M_{cr}^{N5}$, *Fessurata*;
- $N5N:\ s \in [17.50, 17.80]\,m,\ \xi \in [0, 300]\,mm,\ M_{Ed}^{N5} < M_{cr}^{N5}$, *Non fessurata*;
- $C5N1:\ s \in [17.80, 18.10]\,m,\ \xi \in [0, 300]\,mm,\ M_{Ed}^{C5} < M_{cr}^{C5}$, *Non fessurata*;
- $C5F:\ s \in [18.10, 21.25]\,m,\ \xi \in [0, 3150]\,mm,\ M_{Ed}^{C5} > M_{cr}^{C5}$, *Fessurata*;

- $C5N2: \ s \in [21.25, 21.55]\, m, \ \xi \in [0, 300]\, mm, \ M_{Ed}^{C5} < M_{cr}^{C5}$, *Non fessurata*;
- $N6N: \ s \in [21.55, 21.85]\, m, \ \xi \in [0, 300]\, mm, \ M_{Ed}^{N6} < M_{cr}^{N6}$, *Non fessurata*;
- $N6F: \ s \in [21.85, 22.65]\, m, \ \xi \in [0, 800]\, mm, \ M_{Ed}^{N6} > M_{cr}^{N6}$, *Fessurata*;

7.3.1 Metodo diretto: integrazione delle curvature

Come introdotto poco sopra, il metodo diretto consiste nell'intefrazione delle curvature. Il problema che si viene a creare è che la curvatura varia - oltre che con il momento flettente - anche con il momento di inerzia della sezione; quest'ultimo, inoltre, è diverso se la sezione è fessurata oppure non fessurata. I valori di x e I_{nn} in funzione delle zone sono:

$$N5F: \begin{cases} x^{N5F} = 185.67\, mm \\ I_{nn}^{N5F} = 2.0456 \cdot 10^9\, mm^4 \end{cases}$$

$$N5N: \begin{cases} x^{N5N} = 267.76\, mm \\ I_{nn}^{N5N} = 2.0355 \cdot 10^9\, mm^4 \end{cases}$$

$$C5N1 = C5N2: \begin{cases} x^{C5N1} = x^{C5N2} = 259.27\, mm \\ I_{nn}^{C5N1} = I_{nn}^{C5N2} = 1.7667 \cdot 10^9\, mm^4 \end{cases}$$

$$C5F: \begin{cases} x^{C5F} = 157.51\, mm \\ I_{nn}^{C5F} = 1.5237 \cdot 10^9\, mm^4 \end{cases}$$

$$N6N: \begin{cases} x^{N6N} = 263.61\, mm \\ I_{nn}^{N6N} = 1.9060 \cdot 10^9\, mm^4 \end{cases}$$

$$N6F: \begin{cases} x^{N6F} = 172.65\, mm \\ I_{nn}^{N6F} = 1.8388 \cdot 10^9\, mm^4 \end{cases}$$

Mentre nelle zone non fessurate la curvatura può essere calcolata dalla linea elastica

$$\chi(\xi) = \frac{1}{r(\xi)} = \frac{M(\xi)}{E\, I_{nn}} \tag{7.21}$$

nelle zone fessurate questa non può più essere applicata. Al punto **C4.1.2.2.2** della **CIRC. N. 7** e allo stesso modo al capitolo **7.4.3** del **EC2** viene proposta - per il calcolo della curvatura in fase fessurata - la seguente formulazione

$$\chi = \zeta\, \chi_{II} + (1 - \zeta)\chi_I \tag{7.22}$$

dove χ_{II} è la curvatura considerando la sezione completamente fessurata (stato II), χ_I è la curvatura della sezione non fessurata (stato I) mentre $\zeta = 1 - \beta \left(\frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s}\right)^2$ è un coefficiente di distribuzione che tiene conto del tension stiffening ed è nullo per sezione non fessurata. Il termine β è un coefficiente che tiene conto della durata di applicazione dei carichi e vale 1 per carichi di breve durata, mentre vale 0.5 per carichi di lunga durata (combinazione quasi permanente). Infine, la tensione σ_s sulle armature deve essere calcolata sulla base della sezione fessurata, mentre σ_{sr} è la tensione sulle armature generata dal momento M_{cr}. Il coefficiente ζ può essere riscritto anche come

$$\zeta = 1 - \beta \left(\frac{M_{cr}}{M(\xi)}\right)^2$$

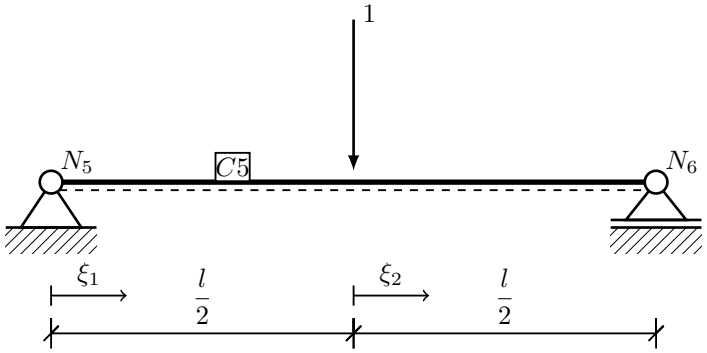


Figura 7.5: Sistema delle forze

Le curvature allora valgono

$$
\begin{aligned}
\chi^{N5F} &= \left(1 - 0.5 \cdot \left(\frac{M_{cr}^{N5}}{M(\xi)}\right)^2\right) \frac{M(\xi)}{E_{cm}\, I_{nn}^{N5F}} + \left[1 - \left(1 - 0.5 \cdot \left(\frac{M_{cr}^{N5}}{M(\xi)}\right)^2\right)\right] \frac{M(\xi)}{E_{cm}\, I_{nn}^{N5N}} \\
\chi^{N5N} &= \frac{M(\xi)}{E_{cm}\, I_{nn}^{N5N}} \\
\chi^{C5N1} &= \chi^{C5N2} = \frac{M(\xi)}{E_{cm}\, I_{nn}^{C5N1}} \\
\chi^{C5F} &= \left(1 - 0.5 \cdot \left(\frac{M_{cr}^{C5}}{M(\xi)}\right)^2\right) \frac{M(\xi)}{E_{cm}\, I_{nn}^{C5F}} + \left[1 - \left(1 - 0.5 \cdot \left(\frac{M_{cr}^{C5}}{M(\xi)}\right)^2\right)\right] \frac{M(\xi)}{E_{cm}\, I_{nn}^{C5N}} \\
\chi^{N6N} &= \frac{M(\xi)}{E_{cm}\, I_{nn}^{N6N}} \\
\chi^{N6F} &= \left(1 - 0.5 \cdot \left(\frac{M_{cr}^{N6}}{M(\xi)}\right)^2\right) \frac{M(\xi)}{E_{cm}\, I_{nn}^{N6F}} + \left[1 - \left(1 - 0.5 \cdot \left(\frac{M_{cr}^{N6}}{M(\xi)}\right)^2\right)\right] \frac{M(\xi)}{E_{cm}\, I_{nn}^{N6N}}
\end{aligned}
$$

Per il calcolo dell'abbassamento si può applicare il *principio dei lavori virtuali* dove il sistema delle deformazioni è quello descritto dalle curvature sopra calcolate, mentre il sistema delle forze è descritto da una trave a doppio appoggio caricata in mezzeria con una forza concentrata di valore unitario. Il momento generato dalla forza unitaria è

$$
\begin{aligned}
M_1^\star(\xi_1) &= \frac{\xi_1}{2}, \quad \xi_1 \in \left[0, \frac{l}{2}\right] \\
M_2^\star(\xi_2) &= \frac{l}{4} - \frac{\xi_2}{2}, \quad \xi_2 \in \left[0, \frac{l}{2}\right]
\end{aligned}
$$

dove $l = 6.15\, m$.

Lo spostamento δ si calcola come

$$
\begin{aligned}
1 \cdot \delta = & \int_{N5F} M_1^\star(\xi_1) \cdot \chi^{N5F}(\xi_1)\, d\xi_1 + \int_{N5N} M_1^\star(\xi_1) \cdot \chi^{N5N}(\xi_1)\, d\xi_1 + \\
& + \int_{C5N1} M_1^\star(\xi_1) \cdot \chi^{C5N1}(\xi_1)\, d\xi_1 + \int_{C5F/_2} M_1^\star(\xi_1) \cdot \chi^{C5F}(\xi_1)\, d\xi_1 + \\
& + \int_{C5F/_2} M_2^\star(\xi_2) \cdot \chi^{C5F}(\xi_2)\, d\xi_2 + \int_{C5N2} M_2^\star(\xi_2) \cdot \chi^{C5N2}(\xi_2)\, d\xi_2 + \\
& + \int_{N6N} M_2^\star(\xi_2) \cdot \chi^{N6N}(\xi_2)\, d\xi_2 \int_{N6F} M_2^\star(\xi_2) \cdot \chi^{N6F}(\xi_2)\, d\xi_2 = \\
& = \left(-1.21 + 1.05 \cdot 10^{-6} + 2.09 \cdot 10^{-6} + 2.13 + 3.19 + 3.32 \cdot 10^{-6} + 3.97 \cdot 10^{-6} - 1.02\right) mm = \\
& = 3.09\, mm
\end{aligned}
$$

Il limite fissato dalla normativa è di

$$
\delta_{max} = \frac{l}{250} = \frac{6150\, mm}{250} = 24.60\, mm
$$

Essendo

$$
\delta < \delta_{max}
$$

la verifica sulla freccia è superata.

7.3.2 Metodo semplificato

Il metodo semplificato definito dalla **CIRC. N. 7** consinste nel confrontare la snellezza $\lambda = \frac{l}{h}$ della trave con un valore limite riportato all'equazione **[C4.1.4]**. La normativa afferma che la verifica può essere omessa per travi o solai di lunghezza inferiore a $10\, m$ e che soddisfi

$$
\lambda = \frac{l}{h} \leq K \left[11 + \frac{0.015\, f_{ck}}{\rho + \rho'}\right] \left[\frac{500\, A_{s,eff}}{f_{yk}\, A_{s,calc}}\right]
$$

K è un coefficiente correttivo che dipende dallo schema strutturale: la **Tabella C4.1.I** della **CIRC. N. 7** definisce - per campate intermedie di travi - $K = 1.5$. I termini ρ e ρ' sono rispettivamente il rapporto geometrico di armatura tesa e compressa, mentre $A_{s,eff}$ è l'area di armatura tesa effettivamente presente nella sezione (valore commerciale) e $A_{s,calc}$ è l'area di armatura tesa derivante dalla soluzione delle equazioni di equilibrio al punto 5.10 (pagina 60).

Sostituendo

$$
\begin{aligned}
\lambda = \frac{6150}{500} = 12.3 < 1.5 & \left[11 + \frac{0.015 \cdot 25\, MPa}{\dfrac{324\, \pi\, mm^2}{(300 \cdot 500)\, mm^2} + \dfrac{162\, \pi\, mm^2}{(300 \cdot 500)\, mm^2}}\right] \left[\frac{500 \cdot 324\, \pi\, mm^2}{450\, MPa \cdot 903.34\, mm^2}\right] = \\
& = 89.85\, mm
\end{aligned}
$$

che risulta soddisfatta.

Capitolo 8

Pilastro

Come descritto nel capitolo 2.3 il pilastro più sollecitato risulta essere il $P27$. L'azione assiame di compressione massima si sviluppa alla base del pilastro e vale - in combinazione agli stati limite ultimi

$$N_{Ed} \simeq 1882\,kN \tag{8.1}$$

8.1 Progetto e verifica agli SLU

Il progetto della sezione di calcestruzzo e del quantitativo di armatura presente nel pilastro viene eseguito seguendo quanto riportato al punto **4.1.6.1.2** delle **NTC 2018**. Per quanto riguarda l'area delle armature, la normativa italiana assume che il 10% dell'azione assiale di progetto deve essere assorbita dalle armature; cioè

$$A_{s,min} = 0.10\,\frac{N_{Ed}}{f_{yd}} = 0.10\,\frac{1882 \cdot 10^3\,N}{391.30\,MPa} = 480.96\,mm^2 \tag{8.2}$$

Il calcestruzzo, perciò, dovrà assorbire la restante aliquota

$$A_{c,min} = 0.9\,\frac{N_{Ed}}{f_{cd}} = 119534.227\,mm^2 \tag{8.3}$$

ed assumendo la sezione del pilastro quadrata, il valore minimo del lato è di

$$b_{min} = \sqrt{A_{c,min}} = 345.74\,mm \tag{8.4}$$

Si sceglie un valore di lato della sezione in calcestruzzo pari a

$$b = h = 350\,mm \tag{8.5}$$

$$A_c = b \cdot h = (350\,mm)^2 = 122500\,mm^2 \tag{8.6}$$

La normativa fissa dei valori minimi e massimi di armatura pari a

$$A_{s,min} = 480.96\,mm^2 > 0.003\,A_c = 367.50\,mm^2$$
$$A_{s,max} = 0.04\,A_c = 4900\,mm^2$$

e comunque non meno di quattro barre (una per spigolo). Il diametro minimo imposto dalle **NTC2018** è di $12\,mm$, da cui si può ricavare un altro limite di area minima che vale

$$A_{s,min} = 4\,\Phi\,12\,mm = 4 \cdot \pi \cdot \frac{4^2}{4} = 144\,\pi\,mm^2 = 452.389\,mm^2$$

L'interasse massimo ammesso tra le barre longitudinali è limitato a $300\,mm$. Avendo una sezione di lato $l = 350\,mm$ il limite posto sull'interasse sarebbe soddisfatto solamente considerando un adeguato copriferro. Cautelativamente si sceglie di inserire delle barre intermedie, dai cui

$$A_{s,tot} = 6\,\Phi\,18\,mm = 486\,\pi\,mm^2 = 1526.81\,mm^2$$

L'armatura trasversale deve essere posizionata con un interasse massimo di

$$s_{max} = \min\{12\,\Phi_{l,min}; 250\,mm\} = \min\{216\,mm; 250\,mm\} = 216\,mm$$

e con un diametro minimo delle staffe di

$$\Phi_{st,min} = \max\left\{\frac{\Phi_{l,max}}{4}; 6\,mm\right\} = \max\{4.5\,mm; 6\,mm\} = 6\,mm$$

Si sceglie, arrotondando i valori appena calcolati

$$s = 210\,mm \tag{8.7}$$

$$\Phi_{st} = 8\,mm \tag{8.8}$$

Definita la sezione e l'armatura si può calcolare il valore di azione assiale resistente. La **CIRC. N. 7** al punto **C4.1.2.3.4.2** definisce la resistenza all'azione assiale dei pilastri - che tiene conto dell'eccentricità minima dei carichi - come

$$N_{Rd} = 0.8 \cdot A_c\,f_{cd} + A_{s,tot}\,f_{yd} = 1986.10\,kN > N_{Ed} = 1882\,kN \tag{8.9}$$

A causa della non perfetta centralità dei carichi agenti sul pilastro, la normativa richiede una ulteriore verifica a flessione sul pilastro, considerando un'eccentricità pari a

$$e = \max\left\{\frac{l_0}{200}; 20\,mm\right\}$$

dove l_0 è la lunghezza di libera inflessione del pilastro e dipende dalle condizioni al contorno. Se si considera $l_0 = l$. Assumendo la struttura come un telaio a nodi fissi si può scegliere - a favore di sicurezza - uno schema statico a doppio appoggio per cui $l_0 = l$, dove per l si sceglie l'altezza di interpiano massima dell'edificio

$$e = \max\left\{\frac{3500\,mm}{200}; 20\,mm\right\} = \max\{17.50; 20\}\ mm = 20\,mm$$

Il momento agente sarà

$$M_{Ed} = e \cdot N_{Ed} = 20 \cdot 10^{-3}\,m \cdot 1882\,kN = 37.64\,kN\,m$$

La verifica viene effettuata calcolando il momento resistente in funzione dell'azione assiale agente

$$M_{Rd} = M_{Rd}(N_{Ed}) \geq M_{Ed}$$

Plottando il dominio di resistenza della sezione appena definita e confrontandolo con le sollecitazioni agenti si riscontra che quest'ultime ricadono all'interno del dominio e perciò la sezione è verificata a flessione.

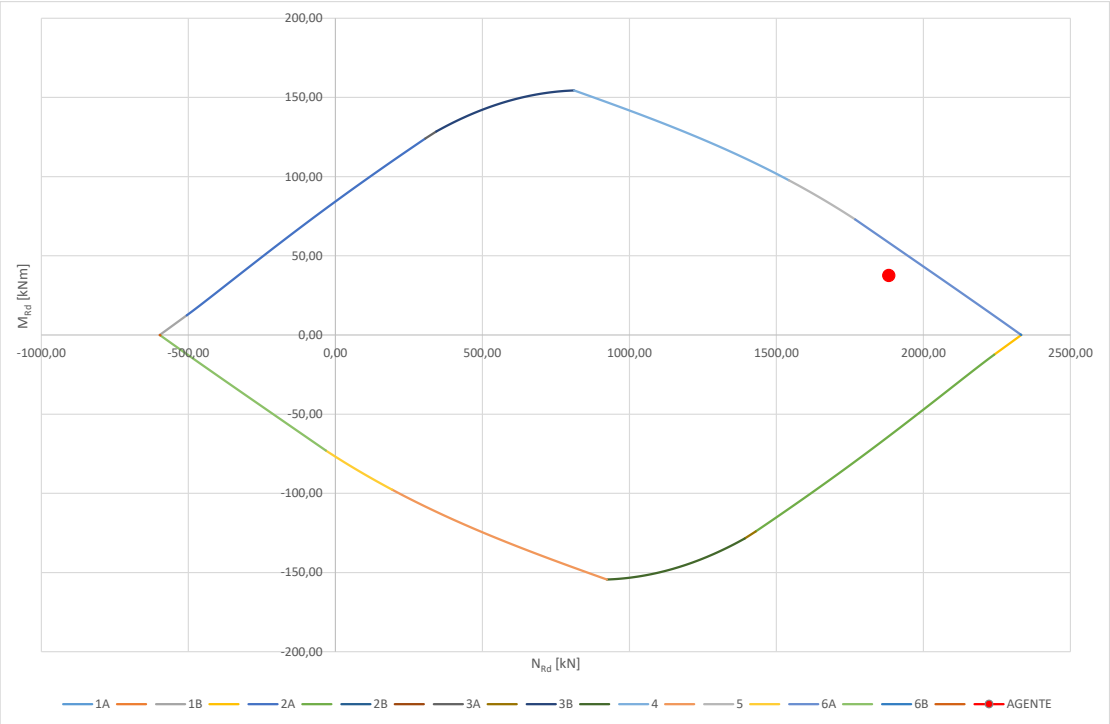


Figura 8.1: Dominio di resistenza $M - N$ e sollecitazione agente

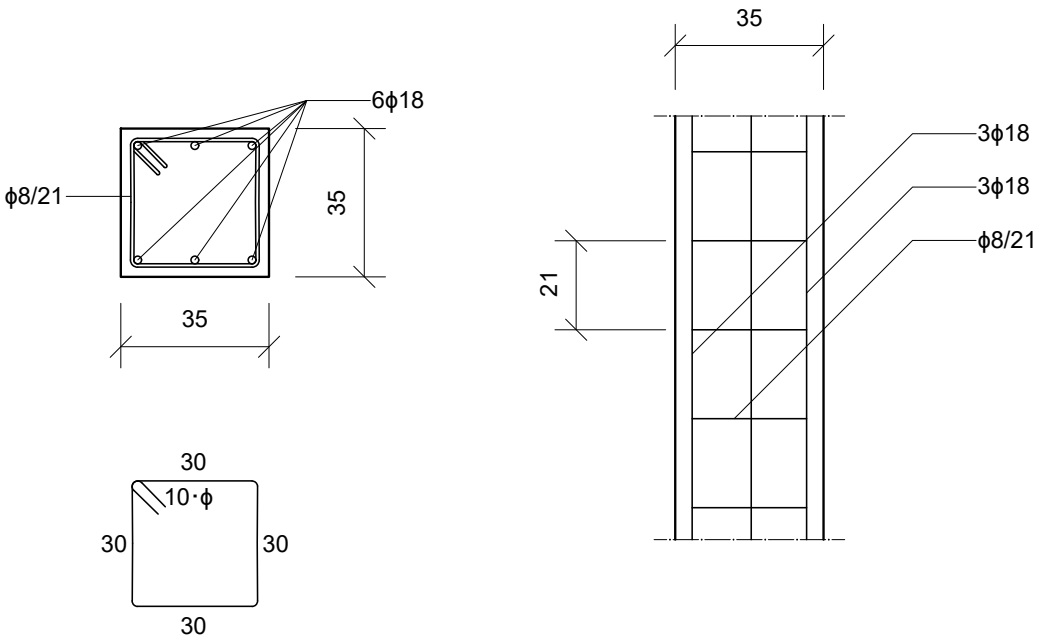


Figura 8.2: Disposizione delle armature nel pilastro

8.2 Verifica di stabilità

Per elementi snelli quali pilastri, la normativa richiede di effettuare la verifica di stabilità. Questa deve tener conto degli effetti flessionali del secondo ordine (instabilità euleriana), ma anche delle imperfezioni geometriche e meccaniche del materiale, nonché degli effetti dovuti alla viscosità del calcestruzzo.

8.2.1 Snellezza limite

Seguendo quanto specificato nelle **NTC2018** - essendo queste più severe nel calcolo della snellezza limite -, per pilastri singoli la verifica di stabilità può essere trascurata se la snellezza $\lambda = \frac{l_0}{i}$ dell'elemento è minore o tuttalpiù uguale alla snellezza limite

$$\lambda_{lim} = \frac{25}{\sqrt{\nu}} = \frac{25}{\sqrt{\dfrac{1882 \cdot 10^3\, N}{(350^2 \cdot 14.17)\, N}}} = 24.01$$

dove $\nu = \frac{N_{Ed}}{A_c\, f_{cd}}$ è l'azione assiale adimensionalizzata. La snellezza del pilastro, supponendo uno schema statico appoggio - appoggio, è

$$\lambda = \frac{l_0}{i} = \frac{l}{\sqrt{\dfrac{J}{A}}} = \frac{l}{\sqrt{\dfrac{\dfrac{b^4}{12}}{b^2}}} = \frac{l}{\dfrac{b}{\sqrt{12}}} = \frac{\sqrt{12} \cdot 3500\, mm}{350\, mm} = 34.641 > \lambda_{lim} = 24.01$$

dove il raggio giratore di inerzia i è riferito alla sezione in calcestruzzo non fessurata (tutta la sezione).

Poiché $\lambda > \lambda_{lim}$ è necessario eseguire la verifica di stabilità.

8.2.2 Verifica di stabilità per elementi isolati

Per quanto riguarda le verifica di stabilità di elementi isolati la normativa italiana rimanda a documenti di comprovata validità come, ad esempio, l'**EC2** che - al capitolo **5.8** descrive i metodi di analisi del secondo ordine. Tra questi è presente il *metodo della curvatura nominale*, basato sul metodo della colonna modello, e il metodo della rigidezza nominale, utilizzabile anche per verifiche su strutture complesse; entrambi sono dei metodi semplificati.

Metodo della curvatura nominale

Questo metodo è applicabile a colonne isolate soggette ad azione assiale costante, di sezione e armatura costante lungo tutta l'altezza. Il metodo consiste nel confrontare il momento sollecitante massimo - tenendo conto degli effetti del secondo ordine - con il momento resistente ultimo della sezione fissato lo sforzo assiale e stimando la curvatura.

L'eccentricità totale è data da

$$e_{tot} = e_0 + e_\alpha + e_{II} \tag{8.10}$$

dove $e_0 = \frac{M_{Ed}}{N_{Ed}}$ è l'eccentricità del primo ordine calcolata precedentemente ($e_0 = 20\, mm$), mentre e_α è l'eccentricità dovuta alle imperfezioni geometriche definita come

$$e_\alpha = \theta_i \frac{l_0}{2} = \frac{l_0}{400} \tag{8.11}$$

essendo θ_i l'eccentricità di montaggio assunta pari a $1/_{200}$. Infine e_{II} è l'eccentricità del secondo ordine e - dal **EC2** - è definita come

$$e_{II} = \frac{1}{r}\,\frac{l_0^2}{c} \tag{8.12}$$

Il termine c dipende dalla distribuzione della curvatura e può essere assunto pari a $\pi^2 \simeq 10$. La curvatura $1/_r$ è definita nell'equazione **(5.34)** come

$$\frac{1}{r} = K_r\,K_\varphi\,\frac{1}{r_0} \tag{8.13}$$

ove K_r è un fattore di correzione che dipende dall'azione assiale

$$\begin{aligned}
K_r &= \frac{n_u - n}{n_u - n_{bal}} \leq 1 \\
n &= \frac{N_{Ed}}{A_c\,f_{cd}} = 1.084 \\
\omega &= \frac{A_{s,tot}\,f_{yd}}{A_c\,f_{cd}} = 0.344 \\
n_u &= 1 + \omega = 1.344 \\
n_{bal} &= 0.4
\end{aligned}$$

da cui

$$K_r = 0.275 < 1$$

mentre K_φ tiene conto degli effetti viscosi del calcestruzzo

$$\begin{aligned}
K_\varphi &= 1 + \beta\,\varphi_{ef} \geq 1 \\
\beta &= 0.35 + \frac{f_{ck}}{200} - \frac{\lambda}{150} = 0.244
\end{aligned}$$

Il coefficiente di viscosità effettivo è definito dalla **EC2** come

$$\varphi_{ef} = \varphi(\infty, t_0)\,\frac{M_{0Eqp}}{M_{0Ed}}$$

$M_{0Ed} = N_{Ed}\,e_0 = 1882\,kN \cdot 0.020\,m = 37.64\,kN\,m$ mentre M_{0Eqp} è riferita alla combinazione quasi permanente. L'azione assiale riferita a questa combinazione si può trovare in tabella 2.16 di pagina 30 e vale $N_{Ed}^{QP} = 1101.30\,kN$; il rispettivo momento vale perciò $M_{0Eqp} = 1101.30\,kN \cdot 0.020\,m = 22.03\,kN\,m$. Il coefficiente di visco a tempo infinito $\varphi(\infty, t_0) = 1$ si ricava dalla tabella **11.2.VI** delle **NTC2018** e supponendo un'umidità relativa del 75%, un tempo di applicazione dei carichi quasi permanente $t_0 \geq 60\,giorni$ e quindi interpolando i valori della tabella richiamata poco sopra si ottiene

$$\varphi(\infty, t_0; h_0 = 350\,mm) = 1.683$$

da cui

$$\varphi_{ef} = 1.863 \cdot \frac{22.03}{37.64} = 1.09$$

e sostituendo

$$K_\varphi = 1 + 0.244 \cdot 1.09 = 1.27 > 1$$

Infine

$$\frac{1}{r_0} = \frac{\varepsilon_{yd}}{0.45\,d} = \frac{\frac{f_{yd}}{E_s}}{0.45\,d} = \frac{1.863 \cdot 10^{-3}}{0.45 \cdot 310\,mm} = 1.3355 \cdot 10^{-5}\,\frac{1}{mm}$$

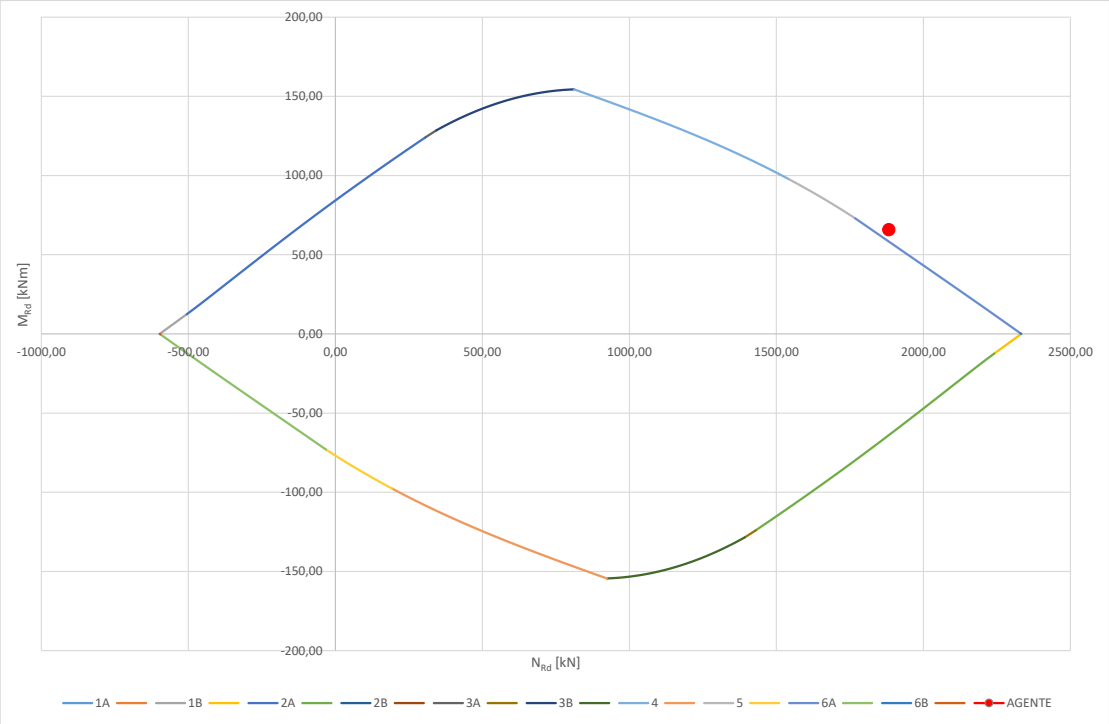


Figura 8.3: Dominio M – N con gli effetti del secondo ordine

dove ε_{yd} è la deformazione a snervamento dell'acciaio. In definitiva, sostituendo i valori numerici nella (8.13) si ottiene

$$\frac{1}{r} = 0.275 \cdot 1.14 \cdot 1.3355 \cdot 10^{-5} \frac{1}{mm} = 4.6642 \cdot 10^{-6} \frac{1}{mm} \tag{8.14}$$

Supponendo uno schema statico tale per cui $l_0 = l = 3500\,mm$ le (8.12) e (8.11) diventano rispettivamente

$$e_{II} = 4.6642 \cdot 10^{-6} \frac{1}{mm} \cdot \frac{3500^2\,mm^2}{10} = 5.71\,mm$$
$$e_{\alpha} = \frac{3500\,mm}{400} = 8.75\,mm$$

L'eccentricità totale è

$$e_{tot} = 20\,mm + 8.75\,mm + 5.71\,mm = 34.46\,mm$$

Il momento di progetto alla base del pilastro - tenendo conto degli effetti del secondo ordine - è

$$M_{Ed} = N_{Ed} \cdot e_{tot} = 1882\,kN \cdot 34.46 \cdot 10^{-3}\,m = 64.85\,kN\,m \tag{8.15}$$

Come si può vedere nel diagramma M – N di figura 8.3 la sezione non è verificata.

Utilizzando come armatura

$$
\begin{aligned}
A_s &= 3\,\Phi\,20\,mm = 300\,\pi\,mm^2 = 942.48\,mm^2 \\
A'_s &= 3\,\Phi\,20\,mm = 300\,\pi\,mm^2 = 942.48\,mm^2 \\
\Phi_{st} &= 8\,mm \\
s &= 240\,mm
\end{aligned}
$$

si ottengono i seguenti valori

$$
\begin{aligned}
N_{Rd} &= 0.8 \cdot A_c\,f_{cd} + A_{s,tot}\,f_{yd} = 2126.24\,kN > N_{Ed} = 1882\,kN \\
\omega &= \frac{A_{s,tot}\,f_{yd}}{A_c\,f_{cd}} = 0.425 \\
n_u &= 1 + \omega = 1.425 \\
K_r &= 0.333 \\
K_\varphi &= 1.27 \\
\frac{1}{r} &= 5.648 \cdot 10^{-6}\,\frac{1}{mm} \\
e_{II} &= 6.92\,mm \\
e_{tot} &= 35.67\,mm \\
M_{Ed} &= 1882\,kN \cdot 35.67 \cdot 10^{-3}\,m = 67.13\,kN\,m
\end{aligned}
$$

Come rappresentato in figura 8.4 con questa configurazione la sezione risulta verificata ad instabilità con il metodo della curvatura nominale.

Metodo della rigidezza nominale

Il metodo della rigidezza nominale consiste nell'analisi non lineare di tipo geometrico ed è applicabile ad elementi di strutture di sezione qualunque; decade, quindi, l'obbligo di avere una sezione costante lungo tutto lo sviluppo dell'elemento che era presente nel metodo della curvatura nominale.

Questo si basa sulla stima delle rigidezza flessionali che secondo l'**EC2** si possono disaccoppiare e riscrivere come

$$E\,I = K_c\,E_{cd}\,I_c + K_s\,E_s\,I_s \tag{8.16}$$

Come anticipato le rigidezze dei materiali sono disaccoppiate. La rigidezza finale è data da un'aliquota riferita al calcestruzzo modulata dal coefficiente K_c che tiene conto di tutti gli effetti di viscosità, fessurazione, etc. del materiale. Il rapporto geometrico di armatura (totale) è di

$$\rho = \frac{A_s + A'_s}{A_c} = 0.0154$$

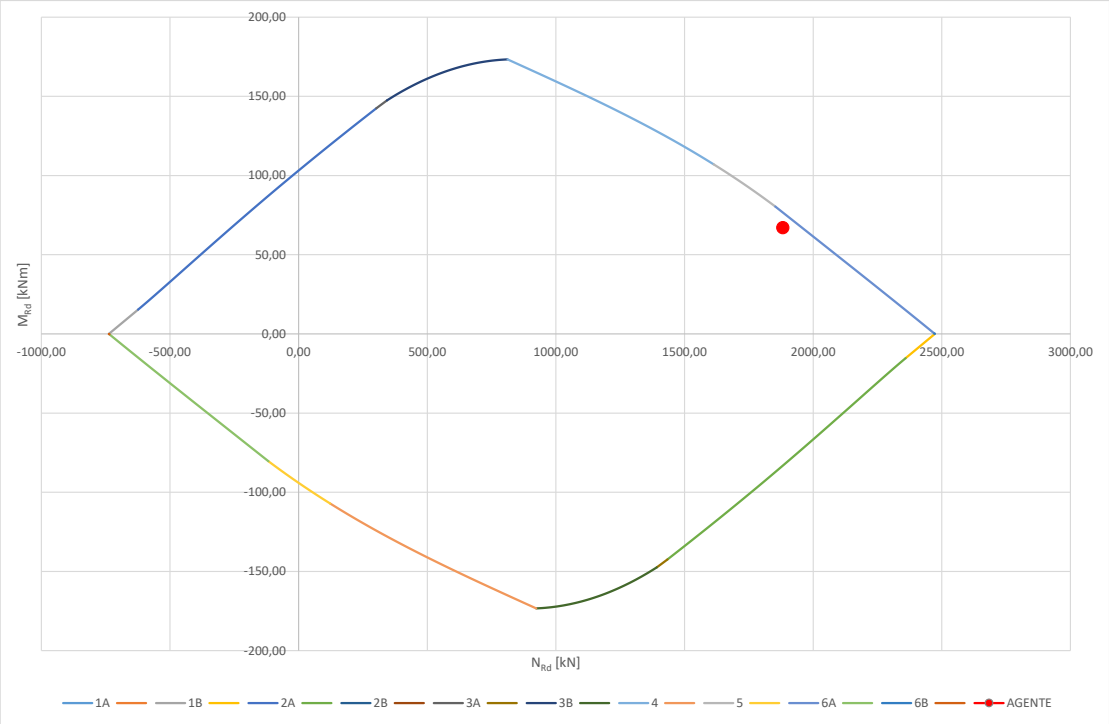


Figura 8.4: Dominio M – N con gli effetti del secondo ordine con armatura 6 Φ 20

Si assume

$$
\begin{aligned}
K_s &= 1 \\
I_s &= A_s \left(d - \frac{h}{2}\right) + A'_s \left(\frac{h}{2} - d''\right) = 254469\, mm^4 \\
E_s &= 210000\, MPa \\
k_1 &= \sqrt{\frac{f_{ck}}{20}} = 1.12 \\
k_2 &= \min\left\{\frac{N_{Ed}}{A_c\, f_{cd}}\, \frac{\lambda}{170}; 0.20\right\} = \min\{0.22; 0.20\} = 0.20 \\
K_c &= \frac{k_1\, k_2}{1 + \varphi_{ef}} = \frac{1.12 \cdot 0.20}{1 + 1.09} = 0.107 \\
E_{cd} &= \frac{E_{cm}}{\gamma_{CE}} = \frac{31476\, MPa}{1.2} = 26230\, MPa \\
I_c &= \frac{b\, h^3}{12} = 1.25052 \cdot 10^9\, mm^4
\end{aligned}
$$

Dal **NAD** si ha che $\gamma_{CE} = 1.2$. La rigidezza stimata vale

$$E\,I = 0.107 \cdot 26230\, MPa \cdot 1.25052 \cdot 10^9\, mm^4 + 1 \cdot 210000\, MPa \cdot 254469\, mm^4 = 3.56 \cdot 10^{12} N\, mm^2$$

L'amplificazione dei momenti è data da

$$M_{Ed} = M_{0Ed} \left[1 + \frac{\beta}{\frac{N_B}{N_{Ed}} - 1} \right] \tag{8.17}$$

dove

$$M_{0Ed} = 1882\,kN \cdot (20 + 8.75) \cdot 10^{-3}\,m = 54.11\,kN\,m$$

mentre $\beta = \frac{\pi^2}{c_0} = \frac{\pi^2}{8} = 1.234$ ($c_0 = 8$ per distribuzioni di momento costanti) e N_B è il carico critico euleriano calcolato con la rigidezza nominale

$$N_B = \frac{E\,I\,\pi^2}{l_0^2} = \frac{3.56 \cdot 10^{12} N\,mm^2\,\pi^2}{3500^2\,mm^2} = 2868.23\,kN$$

Sostituendo

$$M_{Ed} = 54.11\,kN\,m \left[1 + \frac{1.234}{\frac{2868.23\,kN}{1882\,kN} - 1} \right] = 181.53\,kN\,m$$

Con la configurazione scelta sulla base del metodo della curvatura nominale ($6\,\Phi\,20\,mm$) la sezione non è verificata per la stabilità. Perché la sezioni superi la verifica sarebbe necessario inserire $12\,\Phi\,22\,mm$ divisi tra il lato superiore e il lato inferiore in maniera simmetrica. La differenza con il metodo precedentemente esposto è sostanziosa (il momento agente è quasi triplicato) (si veda la figura 8.5).

Considerando un copriferro $c = 25\,mm$ la base minima necessaria è

$$b_{min} = 2\,c + n_b\,\Phi_{st} + n\,\Phi_l + (n-1)\,i = (2 \cdot 25 + 2 \cdot 8 + 6 \cdot 22 + 5 \cdot 25)\,mm = 323\,mm < b = 350\,mm$$

Considerando il modello più sfavorevole, la sezione di progetto ha le seguenti caratteristiche

$$\begin{aligned}
b &= 350\,mm \\
h &= 350\,mm \\
A_s &= 6\,\Phi\,22\,mm \\
A'_s &= 6\,\Phi\,22\,mm \\
A_{s,tot} &= 12\,\Phi\,22\,mm = 4561.60\,mm^2 < A_{s,max} = 4900\,mm^2 \\
s_{max} &= \min\{12\,\Phi_{l,min}; 250\,mm\} = \min\{264\,mm; 250\,mm\} = 250\,mm \\
s &= 250\,mm \\
\Phi_{st,min} &= \max\left\{ \frac{\Phi_{l,max}}{4}; 6\,mm \right\} = \max\{5.5\,mm; 6\,mm\} = 6\,mm \\
\Phi_{st} &= 8\,mm
\end{aligned}$$

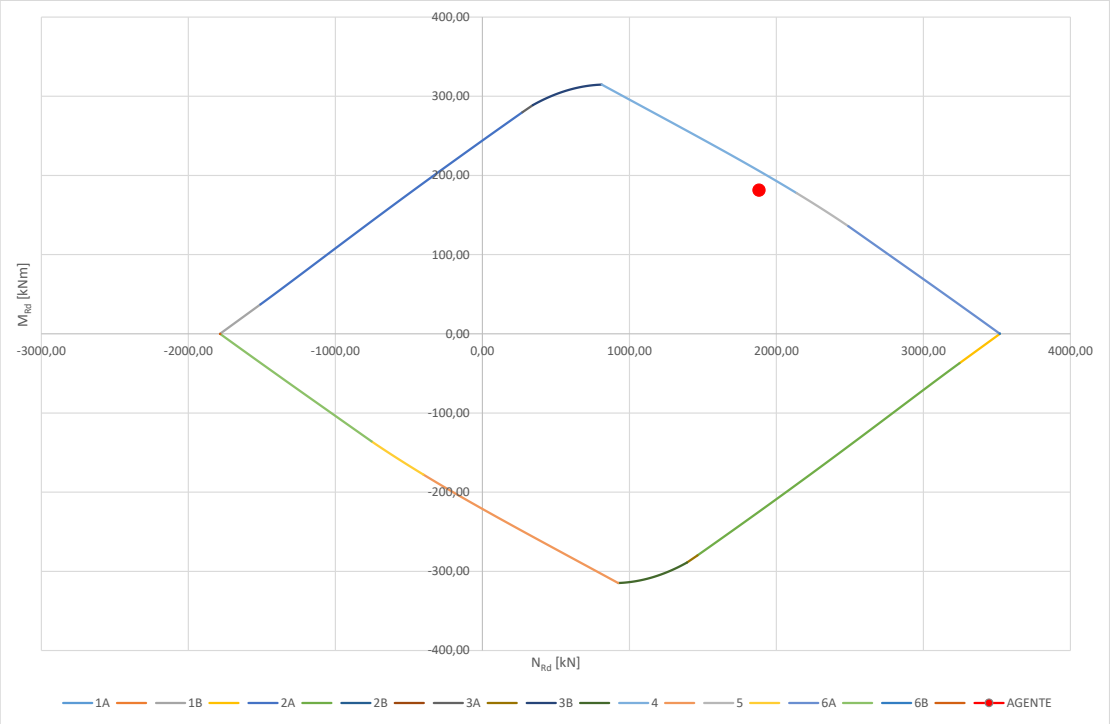


Figura 8.5: Diagramma $M - N$ – metodo della rigidezza nominale con $12\,\Phi\,22\,mm$

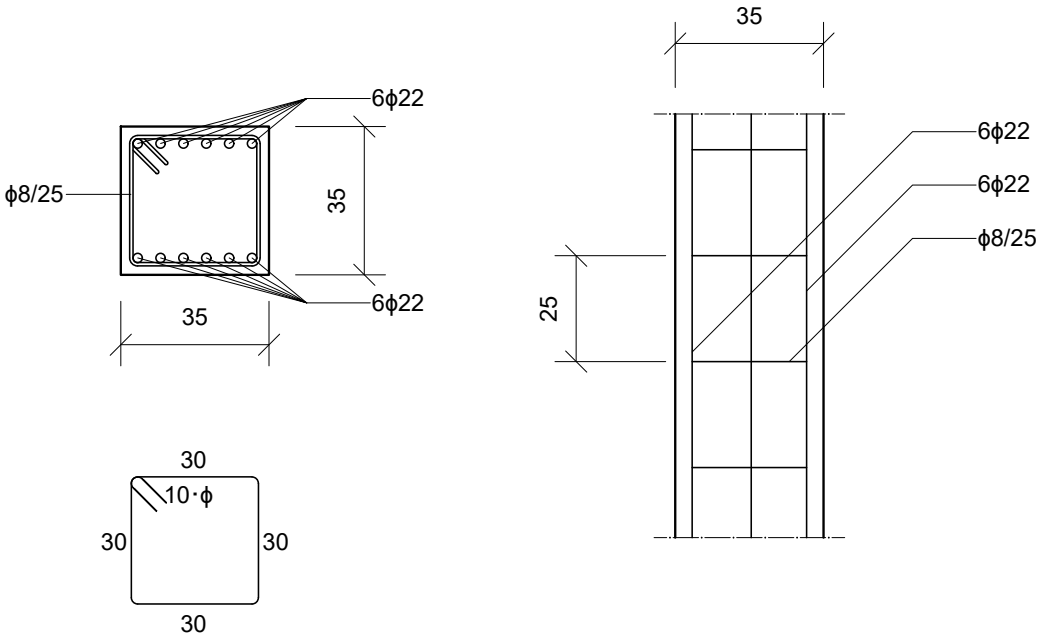


Figura 8.6: Disposizione delle armature nel pilastro dopo l'analisi di stabilità

Metodo della colonna modello

Come ulteriore verifica si tratta il metodo della colonna modello, su cui è basato il metodo della curvatura nominale. Il modello consiste nel verificare l'intersezione tra i momenti di primo e secondo ordine con l'andamento del diagramma momento curvatura $(M - \chi)$ della sezione di figura 8.6. Il diagramma $M-\chi$ (o $M-\frac{1}{r}$) può essere semplificato calcolando tre punti significativi:

- il punto di *prima fessurazione*;
- il punto di *snervamento delle armature* (inferiori o superiori);
- il punto di *collasso*.

Ogni punto è descritto da una coppia (χ, M). Nelle righe seguenti verranno espressi i calcoli per $N_{Ed} = 1882\,kN$.

Prima fessurazione

Prima della fessurazione del calcestruzzo la sezione resistente comprende sia il calcestruzzo compresso che quello teso, in aggiunta alle armature. La fessurazione del calcestruzzo avviene per una deformazione fissata dal *Model Code* di

$$\varepsilon_{ctu} = 0.3\,‰$$

In questa configurazione, applicando la linearità del diagramma delle deformazioni, si possono calcolare le deformazioni delle fibre significative in funzione della posizione dell'asse neutro

$$\begin{aligned}
\varepsilon_c^s &= \frac{\varepsilon_{ctu}}{h-x}\,x \\
\varepsilon_s &= \frac{\varepsilon_{ctu}}{h-x}\,(d-x) \\
\varepsilon_s' &= \frac{\varepsilon_{ctu}}{h-x}\,(x-d'')
\end{aligned}$$

dove x è un'incognita del problema e si calcola dall'equilibrio alla traslazione

$$C_c + C_s - T_s - T_c = N_{Ed}$$

Si applica l'ipotesi di parabola rettangolo non completamente sviluppato, con $\varepsilon_c^s > \varepsilon_{c2}$ con armature superiori compresse, armature inferiori tese ed entrambe in campo elastico; perciò

$$\begin{aligned}
&b\int_0^{x_0(x)} f_{cd}\left(1-\left(1-\frac{\varepsilon_{ctu}}{\varepsilon_{c2}}\,\frac{y}{h-x}\right)^2\right)dy + b\,f_{cd}\,(x-x_0(x)) + A_s'\,E_s\,\varepsilon_s'(x) + \\
&- A_s\,E_s\,\varepsilon_s(x) - b\,f_{ctd}\,\frac{2}{3}\,(h-x) = N_{Ed}
\end{aligned}$$

dove

$$x_0(x) = \frac{\varepsilon_c^s}{\varepsilon_{c2}}\,x$$

Risolvendo risulta

$$x_1 = 306.114\,mm$$

Il controllo sulle deformazioni

$$\varepsilon_c^s = 2.09\,‰ = \varepsilon_{c2}$$
$$\varepsilon_s = 0.0265\,‰ < \varepsilon_{se}$$
$$\varepsilon_s' = 1.819\,‰ < \varepsilon_{se}$$

Inoltre

$$\lambda = \frac{1}{x}\,\frac{b\displaystyle\int_0^{x_0(x)} f_{cd}\left(1-\left(1-\frac{\varepsilon_{ctu}}{\varepsilon_{c2}}\,\frac{y}{h-x}\right)^2\right)(x-y)\,dy + b\displaystyle\int_{x_0(x)}^{x} f_{cd}\,(x-y)\,dy}{b\displaystyle\int_0^{x} f_{cd}\left(1-\left(1-\frac{\varepsilon_{ctu}}{\varepsilon_{c2}}\,\frac{y}{h-x}\right)^2\right)dy + b\,f_{cd}\,(x-x_0(x))} = 0.37332$$

$$\psi = \frac{C_c}{b\,x\,f_{cd}} = \frac{b\displaystyle\int_0^{x_0(x)} f_{cd}\left(1-\left(1-\frac{\varepsilon_{ctu}}{\varepsilon_{c2}}\,\frac{y}{h-x}\right)^2\right)dy + b\,f_{cd}\,(x-x_0(x))}{b\,x\,f_{cd}} = 0.67116$$

La coppia curvatura – momento relativa è

$$\chi_1 = \frac{\varepsilon_c^s(x_1)-\varepsilon_s(x_1)}{d} = 6.66448\cdot 10^{-3}\,\frac{1}{m} \tag{8.18}$$

$$M_1 = C_c\left(\frac{h}{2}-\lambda\,x_1\right) + C_s\left(\frac{h}{2}-d''\right) + T_s\left(d-\frac{h}{2}\right) + T_c\left(\frac{h}{6}+\frac{x_1}{3}\right) = 182.277\,kN\,m \tag{8.19}$$

Snervamento armature

La sezione è già fessurata, perciò il calcestruzzo teso non dà alcun contributo. Si ipotizza che le armature snervate siano quelle superiori

$$\varepsilon_s' = \varepsilon_{se} = 1.863\,‰$$
$$\varepsilon_c^s = \frac{\varepsilon_s'}{x-d''}\,x$$
$$\varepsilon_s = \frac{\varepsilon_s'}{x-d''}\,(d-x)$$

Si considerano le armature inferiori in campo elastico e il calcestruzzo tale per cui $\varepsilon_c^s > \varepsilon_{c2}$

$$b\int_0^{x_0(x)} f_{cd}\left(1-\left(1-\frac{\varepsilon_c^s(x)}{\varepsilon_{c2}}\,\frac{y}{x}\right)^2\right)dy + b\,f_{cd}\,(x-x_0(x)) + A_s'\,f_{yd} - A_s\,E_s\,\varepsilon_s(x) = N_{Ed}$$

dove

$$x_0(x) = \frac{\varepsilon_{c2}}{\varepsilon_c^s(x)}\,x$$

Si ricava

$$x_2 = 277.23\,mm$$

mentre le deformazioni

$$\varepsilon_c^s = 2.18\,‰$$
$$\varepsilon_s = 0.257\,‰$$

che sono compatibili con le ipotesi effettuate. Inoltre

$$\lambda = 0.3807$$
$$\psi = 0.694$$

I valori di curvatura e momento sono

$$\chi_2 = 7.855 \cdot 10^{-3} \, \frac{1}{m} \tag{8.20}$$
$$M_2 = 203.38 \, kN \, m \tag{8.21}$$

Collasso

In condizioni di collasso si assume

$$\varepsilon_c^s = \varepsilon_{cu}$$

con armature inferiori in campo elastico e armature superiori snervate.

$$b \int_0^{x_0(x)} f_{cd} \left(1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{c2}} \, \frac{y}{x} \right)^2 \right) dy + b \, f_{cd} \, (x - x_0(x)) + A_s' \, f_{yd} - A_s \, E_s \, \varepsilon_s(x) = N_{Ed}$$

da cui

$$x_3 = 284.29 \, mm$$

mentre le deformazioni

$$\varepsilon_s = 0.3165 \, ‰ \; < \varepsilon_{se}$$
$$\varepsilon_s' = 3.01 \, ‰ > \varepsilon_{se}$$

I valori di λ e ψ sono quelli per il calcestruzzo a collasso

$$\lambda = 0.415966$$
$$\psi = 0.809524$$

La terna di valori è

$$\chi_3 = 10.2693 \cdot 10^{-3} \, \frac{1}{m} \tag{8.22}$$
$$M_3 = 205.70 \, kN \, m \tag{8.23}$$

Congiungendo i tre punti risulta la trilatera di figura 8.7. L'equazione della retta è tale per cui

$$M_I + M_{II}(\chi) = N_{Ed} \, (e_0 + e_\alpha) + N_{Ed} \, \frac{1}{r} \, \frac{l_0^2}{10} = 1882 \, kN \left(28.75 \cdot 10^{-3} \, m + 1.225 \, m^2 \cdot \frac{1}{r} \right)$$
$$= 54.11 \, kN \, m + 2305.45 \, kN \, m^2 \cdot \frac{1}{r} = 54.11 \, kN \, m + 2305.45 \, kN \, m^2 \cdot \chi$$

dove $\frac{1}{r} = \chi$, con r in metri.

Dalla figura 8.7 si deduce che la sezione non è fessurata per i valori di momento del secondo ordine agenti; si verifica inoltre la stabilità, poiché aumentando l'azione assiale - e perciò la curvatura - l'elemento tende a riportarla a valori di curvatura inferiori.

Si conclude così il progetto del pilastro, che è stato verificato sia agli SLU che all'instabilità.

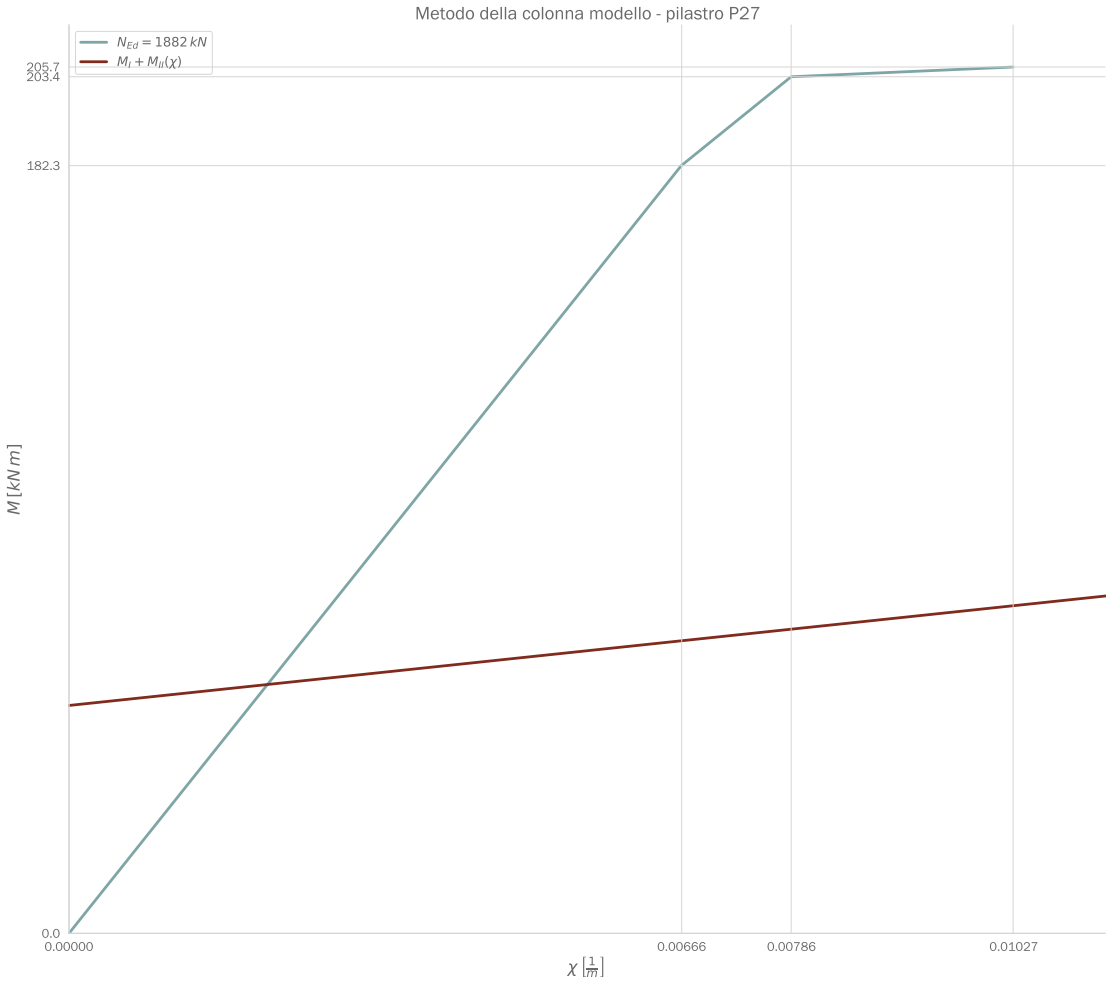


Figura 8.7: Metodo della colonna modello per $N_{Ed} = 1882\,kN$

Capitolo 9

Solaio

Il solaio da progettare è quello rappresentato in figura 2.8 di pagina 20 ed è composto da due campate di luce pari a $4.00\,m$ e $5.00\,m$. Dall'analisi dei carichi effettuata al punto 2.2 di pagina 20 sono stati ricavati i valori delle caratteristiche di sollecitazione sulle sezioni di maggior interesse; le tabelle 2.11 e 2.12 sintetizzano quanto appena detto in riferimento a una striscia di solaio di larghezza pari a $1\,m$.

9.1 Progetto e verifica agli SLU per tensioni normali

La scelta dell'altezza del solaio strutturale può essere effettuata usando una semplice formula approssimativa

$$H = \frac{1}{25}\,\max\{l_i\} = \frac{1}{25}\,\max\{4.00; 5.00\}\,m = \frac{5.00\,m}{25} = 0.20\,m = 200\,mm$$

Si sceglie, a favore di sicurezza, un solaio $20+4\,cm$ costituito da una pignatta di altezza $20\,cm$ e da una soletta gettata in opera di $4\,cm$. L'interassi i dei travetti è costante e pari a $50\,cm$. Ricapitolando, le caratteristiche geometriche del solaio sono

$$\begin{aligned}
H &= 240\,mm \\
s &= 40\,mm \\
B &= i = 500\,mm \\
d' &= d'' = 40\,mm \\
d &= H - d' = 200\,mm \\
b &= 120\,mm
\end{aligned}$$

dove b è la larghezza del travetto. Le caratteristiche dei materiali sono quelle utilizzate per la trave e per il pilastro. Di seguito si riportano il progetto e la verifica agli SLU per tensioni normali sulle sezioni di specifica rilevanza.

In continuità con la notazione usata nel capitolo 2.2 la campata 1 verrà denominata $CS1$, la campata 2 come $CS2$ e l'appoggio che divide le due campate come $NS2$.

9.1.1 Sezione CS1

Progetto

In campata il momento massimo positivo *per un metro di solaio* vale

$$M_{Ed}^{CS1} = 30.06\,kN\,m$$

e si raggiunge all'ascissa $s = 2.07\,m$. Volendo progettare un singolo travetto di interasse $i = 50\,cm$, si deve considerare solo metà del momento flettente sopra riportato; il momento sollecitante di progetto che grava sul travetto vale

$$M_{Ed}^{CS1} = 15.03\,kN\,m$$

Come ipotesi iniziali si assume che l'*asse neutro tagli l'ala* e che $\varepsilon_c \leq \varepsilon_{c2}$. Usando il legame costitutivo parabola rettangolo, nell'ipotesi di essere in campo 2, per il calcestruzzo si ha

$$\psi = \frac{\xi}{1-\xi}\,\frac{\varepsilon_{su}}{3\,\varepsilon_{c2}^2}\left(3\,\varepsilon_{c2} - \frac{\xi}{1-\xi}\,\varepsilon_{su}\right)$$

e

$$\lambda = \frac{4\,\varepsilon_{c2} - \dfrac{\xi}{1-\xi}\,\varepsilon_{su}}{4\left(3\,\varepsilon_{c2} - \dfrac{\xi}{1-\xi}\,\varepsilon_{su}\right)}$$

dove $\xi = \frac{x}{d}$ è la posizione dell'asse neutro adimensionalizzata. Dall'equilibrio alla traslazione si ricava la posizione dell'asse neutro specificata in funzione dell'area di armatura, mentre dall'equilibrio alla rotazione attorno a punto di applicazione delle compressioni nel calcestruzzo si calcola il valore di A_s e quindi di ξ. Il sistema risolvente è perciò

$$\begin{cases} B\,\psi\,\xi\,d\,f_{cd} - A_s\,f_{yd} = 0 \\ A_s\,f_{yd} * (d - \lambda\,xi\,d) = M_{Ed}^{CS1} \end{cases}$$

da cui si ricava

$$\xi = 0.11448 \implies x = \xi\,d = 22.28\,mm < s = 40\,mm$$
$$A_s = 200.79\,mm^2 \implies A_s = 2\,\Phi\,12\,mm = 72\,\pi\,mm^2 = 226.195\,mm^2$$

L'ipotesi di asse neutro che taglia l'ala è corretta; l'ipotesi sul calcestruzzo si verifica come

$$\frac{\varepsilon_{su} + \varepsilon_c}{d} = \frac{\varepsilon_c}{x}$$

Risolvendo si ricava

$$\varepsilon_c = 1.2928\,‰ < \varepsilon_{c2}$$

che è coerente con quanto assunto sopra. Ulteriore verifica è sulla base minima del travetto

$$b_{min} = 2\,c + n\,\Phi + (n-1)\,s_{min} = 2 \cdot 10\,mm + 2 \cdot 12\,mm + 1 \cdot 25\,mm = 69\,mm < b = 120\,mm$$

Verifica

Con le ipotesi fatte in precedenza e utilizzando il quantitativo di armatura scelto sopra, si deve verificare l'effettiva posizione dell'asse neutro; dall'equilibrio alla traslazione

$$B\,\psi\,\xi\,d\,f_{cd} - A_s\,f_{yd} = 0$$

da cui si ricava

$$\xi = 0.1192 \implies x = \xi\,d = 23.84\,mm < s = 40\,mm$$

L'asse neutro taglia l'ala come previsto. La deformazione del calcestruzzo con il valore di ξ appena trovato vale

$$\varepsilon_c = 1.353\,‰$$

che è compatibile con quanto assunto. Si calcolano i valori di ψ e λ che valgono

$$\psi = 0.5240$$

$$\lambda = 0.3576$$

Il momento resistente della sezione vale

$$M_{Rd}^{CS1} = B\,\psi\,\xi\,d\,f_{cd}\,(d - \lambda\,\xi\,d) = 16.95\,kN\,m > M_{Ed}^{CS1} = 15.03\,kN\,m \tag{9.1}$$

9.1.2 Sezione NS2

Progetto

Trovandosi su un appoggio la sezione è ribaltata; questo implica che le ali si trovano in trazione e perciò non danno contributo lato calcestruzzo. Non si pone, quindi, il problema di dove si posizioni l'asse neutro - che taglierà necessariamente l'anima.

Il momento sollecitante sul travetto vale

$$M_{Ed}^{NS2} = 18.47\,kN\,m$$

che coincide con il massimo momento flettente in valore assoluto. Si suppone che il calcestruzzo sia a collasso, per cui

$$\psi = 0.80952$$

e

$$\lambda = 0.416$$

Dall'equilibrio alla rotazione

$$b\,\psi\,\xi\,d\,f_{cd}\,(d - \lambda\,\xi\,d) = M_{Ed}^{NS2}$$

si ricava ξ

$$\xi = 0.4031 \implies x = 80.61\,mm$$

Le armature inferiori hanno deformazione pari a

$$\varepsilon_s = 5.1834\,‰ > \varepsilon_{se}$$

il che garantisce la plasticizzazione delle stesse. L'area di armatura necessaria si calcola dall'equilibrio alla traslazione e risulta

$$A_s = 283.58\,mm^2 \implies A_s = 3\,\Phi\,12\,mm = 108\,\pi\,mm^2 = 339.292\,mm^2$$

La base minima

$$b_{min} = 2 \cdot 10\,mm + 3 \cdot 12\,mm + 2 \cdot 25\,mm = 106\,mm < b = 120\,mm$$

Verifica

Nell'ipotesi che il calcestruzzo compresso si trovi a collasso con ψ e λ costanti e pari a quelli adottati durante il progetto, sviluppando l'equilibrio alla traslazione

$$b\,\psi\,\xi\,d\,f_{cd} - A_s\,f_{yd} = 0$$

e isolando ξ

$$\xi = 0.4823 \implies x = 96.45\,mm$$

da cui si deduce che il calcestruzzo si trova in campo 3 ($\xi \in [0.2593, 0.6526]$). Inoltre, l'asse neutro si trova circa a metà sezione. La deformazione dell'armatura tesa è

$$\varepsilon_s = 3.757\,‰ > \varepsilon_{se}$$

cioè è snervata. Le ipotesi progettuali sono corrette e il momento resistente vale

$$M_{Rd}^{NS2} = b\,\psi\,\xi\,d\,f_{cd}\,(d - \lambda\,\xi\,d) = 21.23\,kN\,m > M_{Ed}^{NS2} = 18.47\,kN\,m \tag{9.2}$$

9.1.3 Sezione CS2

Progetto

In campata 2 la sezione è nuovamente a T e si ripropone il problema di dove si posiziona l'asse neutro. Si assume l'ipotesi tale per cui l'asse neutro taglia l'ala. Il momento sollecitante sul travetto è

$$M_{Ed}^{CS2} = 8.63\,kN\,m$$

e si supponga, come per la campata $CS1$, che il calcestruzzo abbia deformazione

$$\varepsilon_c \leq \varepsilon_{c2}$$

Con questo range di valore di deformazione si hanno

$$\psi = \frac{\xi}{1-\xi}\,\frac{\varepsilon_{su}}{3\,\varepsilon_{c2}^2}\left(3\,\varepsilon_{c2} - \frac{\xi}{1-\xi}\,\varepsilon_{su}\right)$$

$$\lambda = \frac{4\,\varepsilon_{c2} - \dfrac{\xi}{1-\xi}\,\varepsilon_{su}}{4\left(3\,\varepsilon_{c2} - \dfrac{\xi}{1-\xi}\,\varepsilon_{su}\right)}$$

e sostituendole nell'equilibrio alla rotazione e isolando ξ si ottiene

$$\xi = 0.08225 \implies x = 16.45\,mm$$

L'asse neutro si trova molto in alto e perciò taglia necessariamente l'ala del travetto. Trovandosi in campo 2 la crisi dei materiali è lato acciaio (teso). La deformazione del calcestruzzo vale

$$\varepsilon_c = 0.8962\,‰ < \varepsilon_{c2}$$

coerentemente con quanto assunto sopra. Dall'equilibrio alla traslazione si calcola l'area di armatura necessaria

$$A_s = 113.52\,mm^2 \implies A_s = 2\,\Phi\,12\,mm = 72\,\pi\,mm^2 = 226.195\,mm^2$$

Il calcolo della base minima è analogo a quello eseguito per la campata $CS1$.

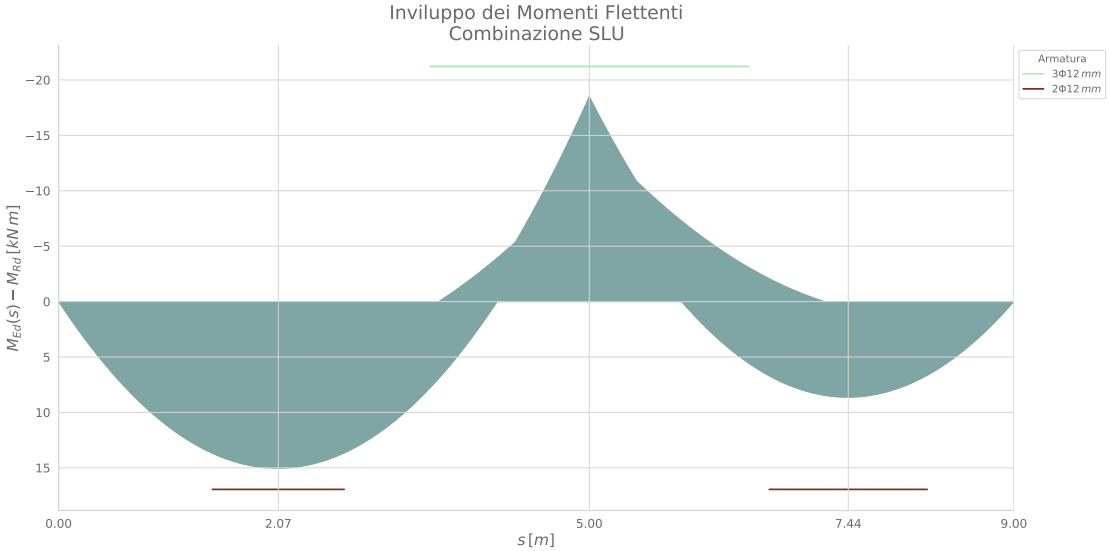


Figura 9.1: Sovrapposizione momento sollecitante e momento resistente – solaio

Verifica

Con i valori di ψ e ξ riportati nel progetto della sezione $CS2$ si calcola la posizione dell'asse neutro effettiva (con riferimento all'armatura realmente inserita), risolvendo l'equilibrio alla traslazione

$$\xi = 0.1192 \implies x = 23.84\,mm < s = 40\,mm$$

L'asse neutro taglia l'ala. La deformazione del calcestruzzo è

$$\varepsilon_c = 1.3533\,‰ < \varepsilon_{c2}$$

che è compatibile con quanto ipotizzato. La sezione si trova in campo 2; i parametri del calcestruzzo hanno i seguenti valori

$$\psi = 0.5240$$
$$\lambda = 0.3576$$

Il momento resistente della sezione è

$$M_{Rd}^{CS2} = B\,\psi\,\xi\,d\,f_{cd}\,(d - \lambda\,\xi\,d) = 16.95\,kN\,m > M_{Ed}^{CS2} = 8.63\,kN\,m \tag{9.3}$$

Come previsto, la sezione ha caratteristiche geometriche e meccaniche pari alla sezione $CS1$.

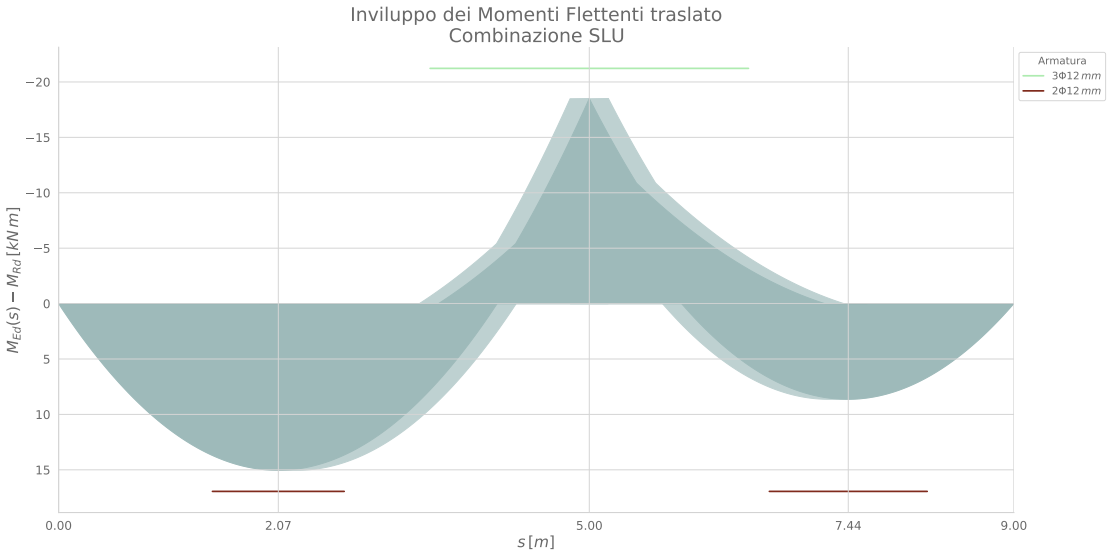


Figura 9.2: Diagramma di inviluppo dei momenti flettenti traslato – solaio

9.2 Verifica sulle armature

La verifica sul quantitativo di armature va eseguita parallelamente a quanto fatto per la trave. L'area minima di armatura da inserire nel travetto è

$$A_{s,min} = \max\left\{0.26\,\frac{fctm}{fyk}\,b_t\,d; 0.0013\,b_t\,d\right\} = 35.57\,mm^2$$

che è soddisfatta, avendo scelto $2\,\Phi\,12\,mm = 226.195\,mm^2$. L'area di armatura massima, invece

$$A_{s,max} = 0.04\,A_c = 1760\,mm^2$$

anch'essa soddisfatta.

9.3 Traslazione del diagramma dei momenti flettenti

Come per la trave, anche per il solaio è necessario traslare il diagramma dei momenti flettenti in modo da assorbire l'azione del taglio. La traslazione avviene secondo quanto applicato per la trave, con la sola differenza che non può essere applicata armatura a taglio; si ha perciò

$$a_1 = 0.9\,d = 0.9 \cdot 200\,mm = 180\,mm$$

Riportandolo sul diagramma si ottiene quanto rappresentato in figura 9.2.

9.4 Lunghezza di ancoraggio

In analogia a quanto effettuato per la trave al punto 5.15, si calcolano le lunghezze di ancoraggio delle barre per i travetti del solaio. La formula che governa il problema è la medesima a quella della trave e deriva dalla normativa europea. Nell'ipotesi di buona aderenza e assumendo, a

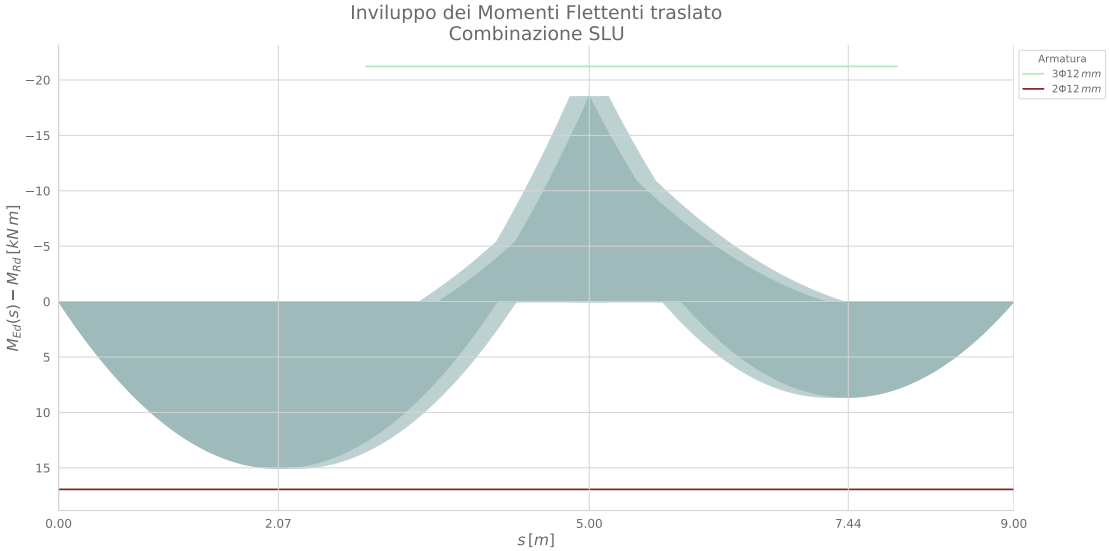


Figura 9.3: Diagramma di inviluppo dei momenti flettenti considerando le lunghezze di ancoraggio – solaio

favore di sicurezza, che la tensione di lavoro dell'armatura sia pari a f_{yd} si ottengono i seguenti valori:

$$
\begin{aligned}
f_{ctd} &= 1.02\,MPa \\
\eta_1 &= \eta_2 = 1 \\
f_{bd} &= 2.25\,\eta_1\,\eta_2\,f_{ctd} = 2.30\,MPa \\
\sigma_{sd} &= f_{yd} \\
l_{b,rqd} &= \frac{\Phi}{4}\,\frac{\sigma_{sd}}{f_{bd}} = \frac{12}{4}\,\frac{391.30}{2.30} \simeq 510\,mm \\
l_{b,min} &\geq \begin{cases} \max\{0.3\,l_{b,rqd}; 10\,\Phi; 100\,mm\} \simeq 155\,mm & \text{per armature tese} \\ \max\{0.6\,l_{b,rqd}; 10\,\Phi; 100\,mm\} \simeq 310\,mm & \text{per armature compresse} \end{cases} \\
\alpha_1 &= \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 1 \\
a &= \frac{b - 2\,c - n\,\Phi}{n-1} = \frac{120 - 20 - 36}{2}\,mm = 32\,mm \\
c_d &= \min\left\{\frac{a}{2}; c_1; c\right\} = 10\,mm \\
\alpha_2 &= 1 - 0.15\,\frac{c_d - \Phi}{\Phi} = 1.01 \not< 1 \implies \alpha_2 = 1 \\
l_{bd} &= \alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4\,\alpha_5\,l_{b,rqd} = 510\,mm > l_{b,min} = \begin{cases} 155\,mm & \text{per armature tese} \\ 310\,mm & \text{per armature compresse} \end{cases}
\end{aligned}
$$

In figura 9.3 le armature inferiori sono state prolungate fino all'appoggio centrale, mentre le barre superiori in prossimità dell'appoggio sono state prolungate della lunghezza di ancoraggio sopra calcolata partendo dal punto di nullo del diagramma di inviluppo dei momenti traslato.

9.5 Armatura integrativa superiore agli appoggi esterni

La schematizzazione effettuata sui vincoli alle estremità – considerati come dei semplici appoggi – può essere utile in prima approssimazione per il progetto a flessione del solaio, ma non rispecchia affatto la realtà; la trave presente al bordo difficilmente si può considerare come una cerniera poiché è caratterizzata da una rigidezza torsionale che genera momento flettente che tende le fibre superiori del solaio. Per ovviare al problema è necessario considerare un momento applicato sui vincoli estremi pari a

$$\frac{Q_{Ed,slu}\, l^2}{16 \div 20}$$

dove $Q_{Ed,slu}$ è il valore di carico di progetto riferito alla campata adiacente all'appoggio considerato. In particolare, i carichi agenti su un travetto valgono

$$Q_{Ed,slu}^{CS1} = Q_{Ed,slu}^{CS2} = 7.05\,\frac{kN}{m}$$

perciò i momenti agenti sul singolo travetto sono

$$M_{Ed,slu}^{NS1} = \frac{Q_{Ed,slu}^{CS1}\, l_{CS1}^2}{16} = 11.02\,kN\,m$$
$$M_{Ed,slu}^{NS3} = \frac{Q_{Ed,slu}^{CS2}\, l_{CS2}^2}{16} = 7.05\,kN\,m$$

tendente le fibre superiori del travetto.

Progetto NS1

Supponendo la crisi lato acciaio e la sezione in campo 2 con $\varepsilon_c \in [\varepsilon_{c2}, \varepsilon_{cu}]$ si ottiene il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} b\,\psi\,\xi\,d\,f_{cd} - A_s\,f_{yd} = 0 \\ \\ b\,\psi\,\xi\,d\,f_{cd}\,(d - \lambda\,\xi\,d) = M_{Ed,slu}^{NS1} \\ \\ \psi = \dfrac{16\xi - 1}{15\xi} \\ \\ \lambda = \dfrac{171\xi^2 - 22\xi + 1}{20\xi\,(16\xi - 1)} \end{cases}$$

e sostituendo i valori numerici $b = 120\,mm$, $d = 200\,mm$, etc., si ottengono i seguenti risultati

$$\begin{cases} \xi = 0.2299 \\ x = \xi\,d = 45.98\,mm \\ \varepsilon_c = \varepsilon_{su}\,\dfrac{\xi}{1-\xi} = 2.985\,‰ \in [\varepsilon_{c2}, \varepsilon_{cu}] \\ A_s = 155.184\,mm^2 \end{cases}$$

da cui si sceglie un'armatura aggiuntiva superiore pari a

$$A_s = 2\,\Phi\,12\,mm = 72\,\pi\,mm^2 = 226.195\,mm^2$$

Progetto NS3

Sull'appoggio estremo a destra si considera la sezione in campo 2 con $\varepsilon_c \leq \varepsilon_{c2}$. Il sistema lineare si riduce a

$$\begin{cases} b\,\psi\,\xi\,d\,f_{cd} - A_s\,f_{yd} = 0 \\ \\ b\,\psi\,\xi\,d\,f_{cd}\,(d - \lambda\,\xi\,d) = M_{Ed,slu}^{NS3} \\ \\ \psi = \dfrac{5\xi\,(3-8\xi)}{3\,(\xi-1)^2} \\ \\ \lambda = \dfrac{9\xi - 4}{4\,(8\xi - 3)} \end{cases}$$

Risolvendo in ξ e A_s si ottiene

$$\begin{cases} \xi = 0.1661 \\ x = \xi\,d = 33.23\,mm \\ \varepsilon_c = \varepsilon_{su}\,\dfrac{\xi}{1-\xi} = 1.993\,‰ < \varepsilon_{c2} \\ A_s = 96.065\,mm^2 \end{cases}$$

Si scelge la seguente armatura

$$A_s = 1\,\Phi\,12\,mm = 36\,\pi\,mm^2 = 113.10\,mm^2$$

9.6 Armatura integrativa inferiore sugli appoggi

L'armatura integrativa inferiori deve essere progettata in modo tale da assorbire il taglio di progetto sugli appoggi.

Progetto NS1

Il taglio di progetto sul primo appoggio è di

$$V_{Ed}^{NS1} = \frac{29.11\,kN}{2} = 14.56\,kN$$

che deve essere assorbito dall'armatura integrativa. Il numero di barre necessarie, supponendo di usare un diametro $12\,mm$ - arrotondando al numero intero superiore - è

$$\lceil n \rceil = \left\lceil \frac{V_{Ed}^{NS1}}{A_s(12\,mm)\,f_{yd}} \right\rceil = 1$$

che ha una resistenza a trazione di

$$n\,A_s\,f_{yd} = 44.26\,kN > V_{Ed}^{NS1}$$

Progetto NS2

Il taglio massimo sull'appoggio centrale vale - in modulo -

$$V_{Ed}^{NS2} = \frac{42.65\,kN}{2} = 21.33\,kN$$

che implica un'armatura aggiuntiva di

$$\lceil n \rceil = \left\lceil \frac{V_{Ed}^{NS2}}{A_s(12\,mm)\,f_{yd}} \right\rceil = 1$$

che generano una resistenza a trazione di $44.26\,kN$.

Progetto NS3

Il taglio agente sull'appoggio estremo di destra vale

$$V_{Ed}^{NS3} = \frac{22.04\,kN}{2} = 11.02\,kN$$

Il numero di barre necessarie è di $1\,\Phi\,12\,mm$ come sugli appoggi precedenti.

9.7 Verifica a taglio

Come anticipato, nel solaio non è possibile inserire armatura resistente a taglio; si deve confidare totalmente sull'effetto pettine sviluppato dalla sezione a $'T'$, che dovrà assorbire il taglio sollecitante di progetto (i cui valori sono riportati nella tabella 2.12). Utilizzando un procedimento 'matriciale' - raggruppando quindi i valori riferiti agli appoggi in un vettore - e seguendo quanto descritto nelle **NTC2018** si calcola il taglio resistente di progetto (dalla **[4.1.22]**) da cui si ottiene

$$\underline{V_{Rd}} = \begin{Bmatrix} 16.51 \\ 18.90 \\ 18.90 \\ 16.51 \end{Bmatrix} kN > \underline{V_{Ed}} = \begin{Bmatrix} 14.55 \\ 21.31 \\ 18.71 \\ 11.01 \end{Bmatrix}$$

La disuguaglianza è verificata ovunque tranne sull'appoggio $NS2$ lato sinistro, dove il taglio resistente è inferiore al taglio sollecitante

$$V_{Rd}^{NS2^{sx}} = 18.90\,kN < \left| V_{Ed}^{NS2^{sx}} \right| = 21.31\,kN$$

In questo caso, non potendo inserire armatura che assorba il taglio necessario si toglie una fila di pignatte (a sinistra dell'appoggio) e si getta un elemento pieno in calcestruzzo. La base da utilizzare durante il calcolo dell'effetto pettine è

$$b_w = B$$

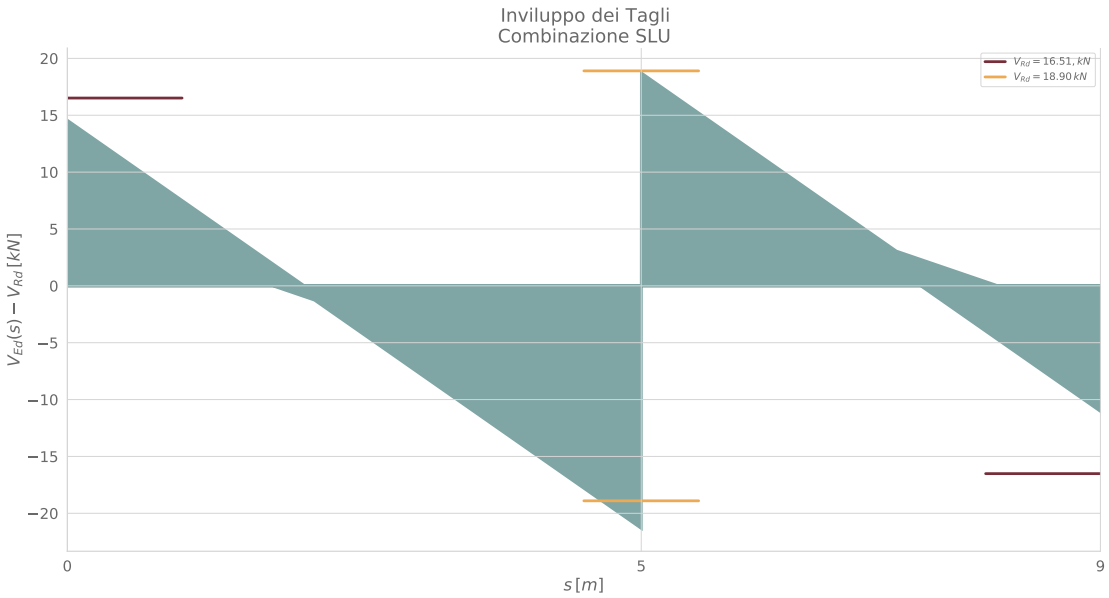
Il taglio resistente riferito all'appoggio $NS2$ lato sinistro con questa configurazione è

$$\begin{cases} V_{Rd}^{NS2^{sx}} = \max\left\{\left[\dfrac{0.18\,k\,(100\,\rho_1\,f_{ck})^{1/3}}{\gamma_c} + 0.15\,\sigma_{cp}\right]\,B\,d; (\nu_{min} + 0.15\,\sigma_{cp})\,B\,d\right\} \\ k = \min\left\{1 + \left(\dfrac{200}{d}\right)^{\frac{1}{2}}; 2\right\} \\ \rho_1 = \min\left\{\dfrac{A_{sl}}{B\,d}; 0.02\right\} \\ \sigma_{cp} = \min\left\{\dfrac{N_{Ed}}{A_c}; 0.2\,f_{cd}\right\} = 0 \\ \nu_{min} = 0.035\,k^{\frac{3}{2}}\,f_{ck}^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

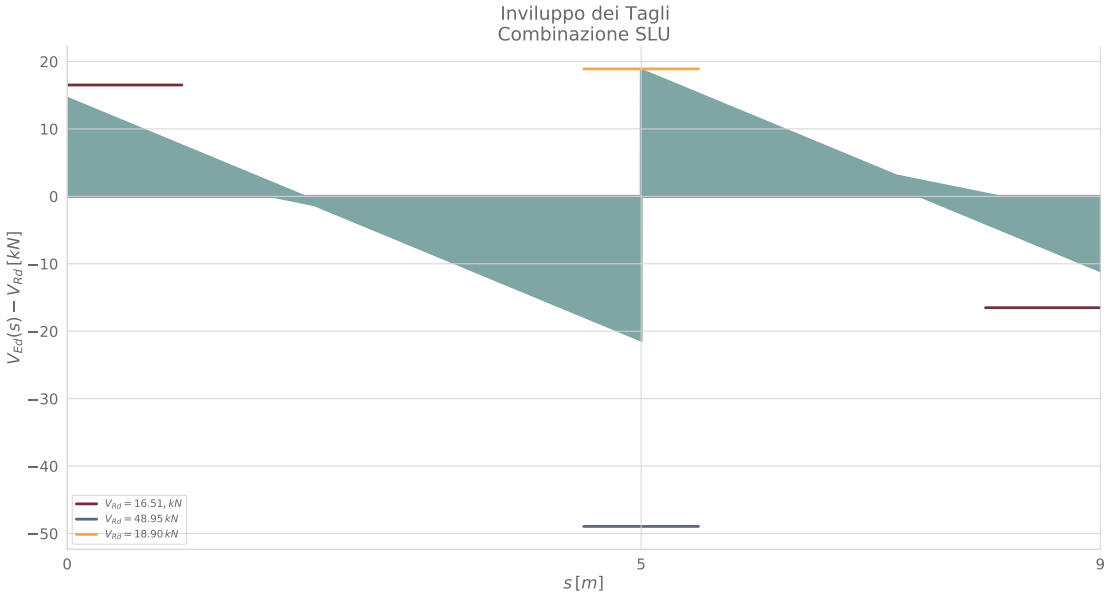
Risolvendo si ottiene

$$V_{Rd}^{NS2^{sx}} = 48.95\,kN > \left|V_{Ed}^{NS2^{sx}}\right| = 21.33\,kN$$

La sovrapposizione tra il diagramma del taglio sollecitante di progetto e il taglio resistente nei due casi è rappresentata nelle figure 9.4a e 9.4b.



(a) *Confronto tra taglio sollecitante e taglio resistente*



(b) *Confronto tra taglio sollecitante e taglio resistente togliendo una fila di pignatte*

Figura 9.4: $V_{Ed} - V_{Rd}$

Bibliografia

[1] Edoardo Cosenza, Gaetano Manfredi e Marisa Pecce. *Strutture in cemento armato. Basi della progettazione*. A cura di Ulrico Hoepli Milano. Seconda edizione. 2015.

[2] Ministero delle Infrastrutture e dei Trasporti. *Decreto 17 gennaio 2018. Aggiornamento delle «Norme tecniche per le costruzioni»*. Roma: Gazzetta Ufficiale.

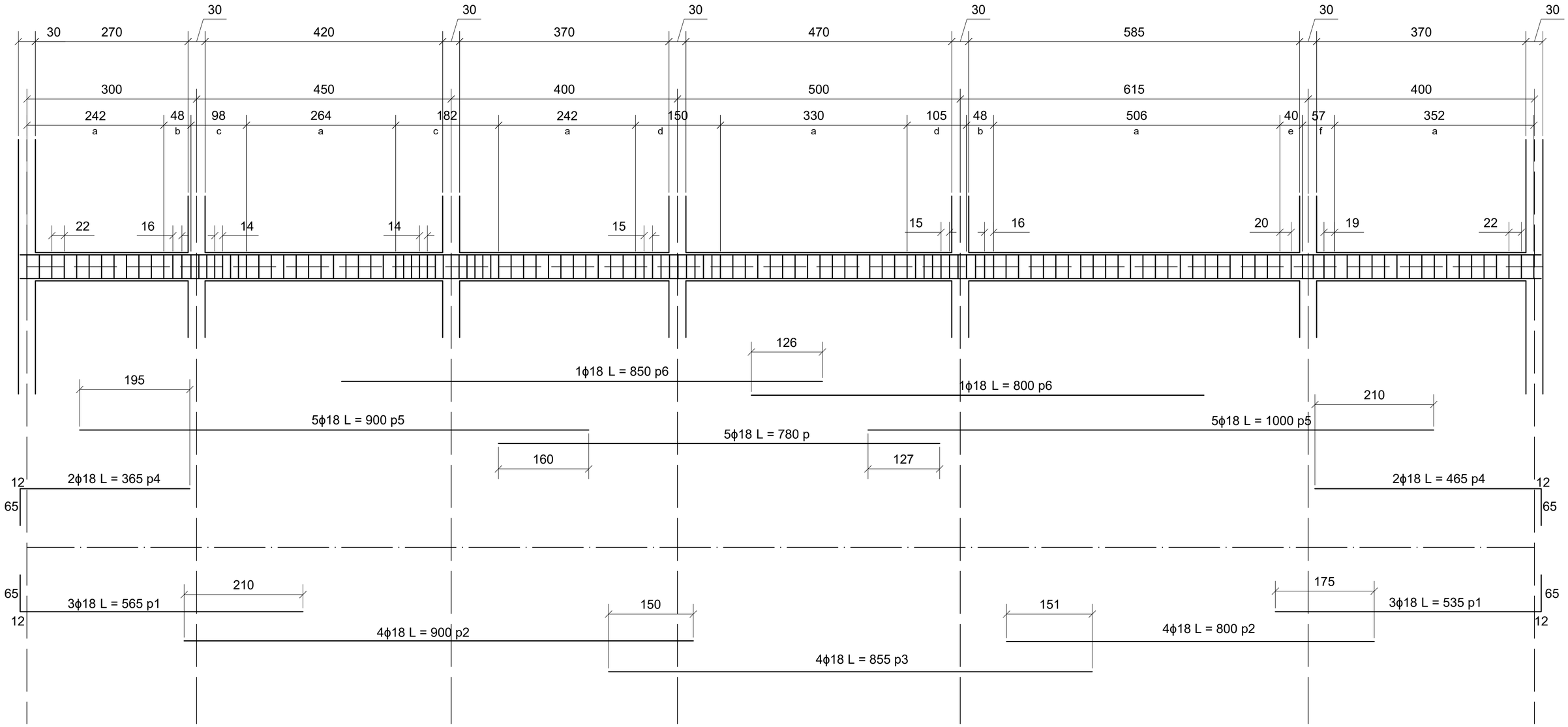
[3] Ministero delle Infrastrutture e dei Trasporti. *Circolare 21 gennaio 2019, n. 7 C.S.LL.PP. Istruzioni per l'applicazione dell'«Aggiornamento delle "Norme tecniche per le costruzioni"» di cui al decreto 17 gennaio 2018*. Roma: Gazzetta Ufficiale.

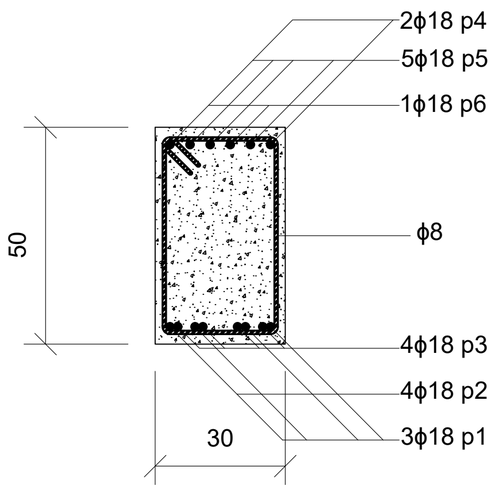
[4] European Committee for Standardization. *Eurocode 2: Design of concrete structures*. The European Union.

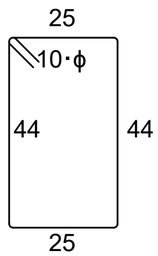
Capitolo 10

Elaborati grafici

Si allegano di seguito le tavole contenente gli elaborati grafici di trave, pilastro e solaio rispettivamente.





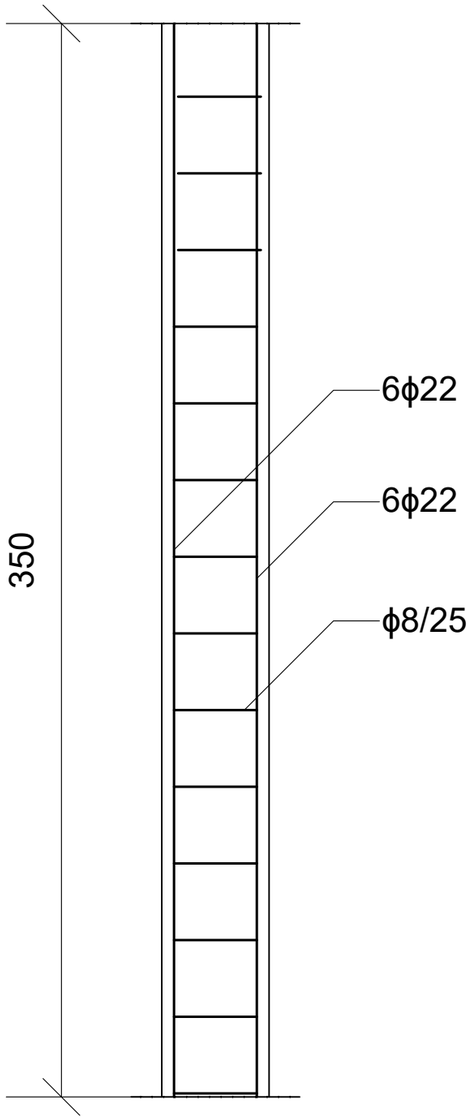


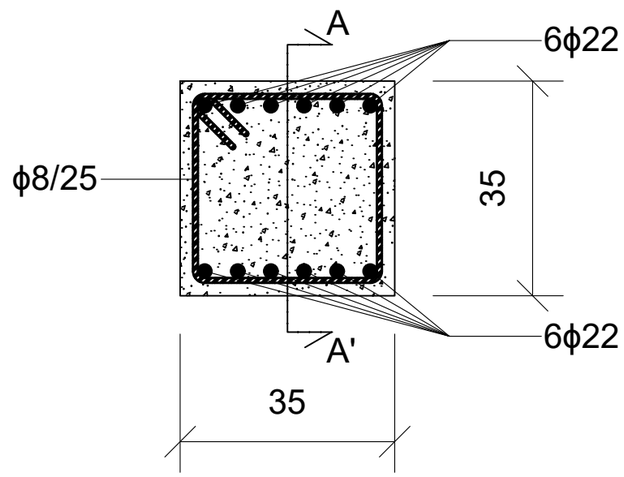
Legenda passo staffe	
Zona	**Passo [cm]**
a	22
b	16
c	14
d	15
e	20
f	19

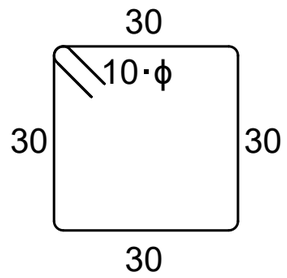
UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI TRENTO
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Civile
Tecnica delle Costruzioni in C.A. e Acciaio - A.A. 2019-2020
Docenti: Prof. Nadia Baldassino - Ing. Stefano Gasperetti

Progetto e verifica di elementi strutturali per un edificio intelaiato in C.A.	Tav. n. 01/T
Oggetto: Profilo longitudinale della trave P13÷P18 - vano scala Particolare della sezione trasversale della trave	Scala: 1:50 1:10
Studente: Matteo Franzoi - matr. 216006	Data: LUGLIO 2020

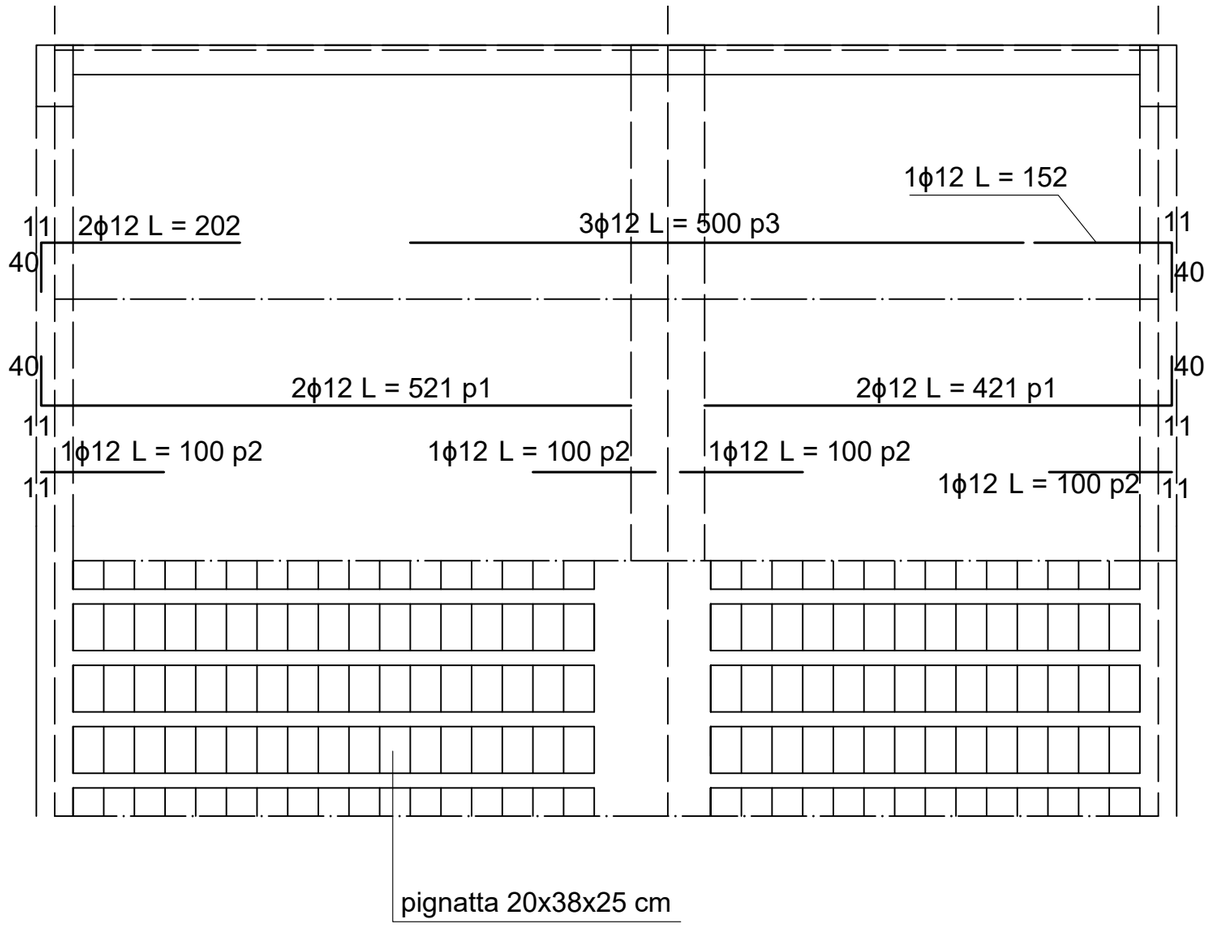
SEZIONE A-A'

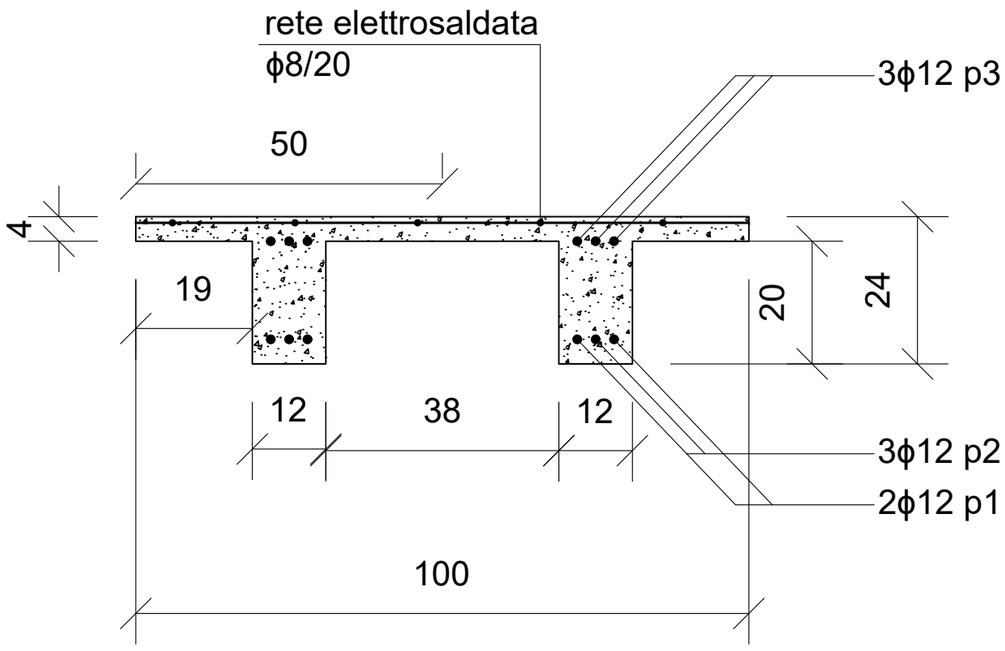






UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI TRENTO **Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Civile** **Tecnica delle Costruzioni in C.A. e Acciaio - A.A. 2019-2020** **Docenti: Prof. Nadia Baldassino - Ing. Stefano Gasperetti**	
Progetto e verifica di elementi strutturali per un edificio intelaiato in C.A.	Tav. n. 02/P
Oggetto: Profilo longitudinale del pilastro P27 Particolare sezione A-A'	Scala: 1:20 1:10
Studente: Matteo Franzoi - matr. 216006	Data: LUGLIO 2020





UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI TRENTO
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Civile
Tecnica delle Costruzioni in C.A. e Acciaio - A.A. 2019-2020
Docenti: Prof. Nadia Baldassino - Ing. Stefano Gasperetti

Progetto e verifica di elementi strutturali per un edificio intelaiato in C.A.	Tav. n. 03/S
Oggetto: Profilo longitudinale del solaio Particolare sezione travetto	Scala: 1:50 1:10
Studente: Matteo Franzoi - matr. 216006	Data: LUGLIO 2020