Appunti di Teoria e Dinamica delle Strutture

Università degli Studi di Trento
Dipartimento di Ingegneria Civile, Ambientale e Meccanica
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Civile

Matteo Franzoi
matteo.franzoi-1@studenti.unitn.it

Ultimo aggiornamento: 21 settembre 2020

I seguenti appunti sono stati scritti durante il corso di Teoria e Dinamica delle Strutture tenuto dal Professore Francesco Dal Corso durante l'anno accademico 2019/2020. Gli appunti possono contenere errori; nel caso il lettore ne riscontrasse è invitato a comunicarli inviando una mail all'indirizzo sopra riportato.

Indice

1 Introduzione **1**

2 Teoria della plasticità **5**

2.1 Plasticità 1D - legame costitutivo monodimensionale 10
2.2 Criteri di resistenza per materiali isotropi 16
2.3 Plasticità 3D 18
2.4 Equazione di Prandtl - Reuss (Flow theory of plasticity - 1921) 22
2.5 Postulato di Drucker (o di massima dissipazione) 24
2.6 Problema al contorno 27
2.7 Collasso plastico 28
2.8 Analisi limite 29
2.8.1 Teorema zero 30
2.8.2 Teorema statico (o del limite inferiore) 31
2.8.3 Teorema cinematico (o del limite superiore) 33
2.9 Azione assiale plastica 35
2.10 Flessione plastica 53
2.10.1 Sezione a doppio asse di simmetria 53
2.10.2 Sezione rettangolare 57
2.10.3 Sezione a doppio 'T' 59
2.10.4 Sezione a un asse di simmetria 60
2.10.5 Sezione a triangolo isoscele 60
2.10.6 Sezione a 'T' sottile 61
2.10.7 Sezione a 'T' spessa 63
2.11 Cerniera plastica 64
2.11.1 Sistemi a una campata - esercizi 67
2.11.2 Sistemi a più campate - esercizi 81
2.12 Collasso e deformabilità 103
2.13 Domini di interazione 105
2.13.1 Dominio M-N 106
2.13.2 Dominio M-T 110
2.14 Cerniera plastica mobile 111

3 Dinamica delle Strutture **114**

3.1 Oscillatore semplice a 1 gdl 118
3.1.1 Moto impresso 121
3.1.2 Oscillazioni libere ($F(t) = 0$) 122
3.1.3 Forzante costante a gradino 125
3.1.4 Forzante sinusoidale 127
3.1.5 Oscillatore semplice smorzato (viscosamente) 130

3.1.6 I° metodo di valutazine di ν_{eq} 133
3.1.7 Smorzamento per attrito (Coulomb) 133
3.1.8 Oscillazioni smorzate con forzante a gradino 135
3.1.9 Oscillazioni smorzate con forzante sinusoidale 136
3.1.10 II° metodo di valutazine di ν_{eq} (sperimentalmente) . . . 139
3.1.11 Ciclo di isteresi dinamica 139
3.1.12 Forzante periodica 141
3.1.13 Forzante onda quadra 141
3.1.14 Vibrometro e accelerometro 147
3.1.15 Forzante generica 149
3.1.16 Forzante lineare nel tempo 153
3.1.17 Forzante a gradino con crescita lineare 155
3.2 Sistemi a N gdl 161
3.2.1 Equazioni di Lagrange 161
3.2.2 Condensazione statica 165
3.2.3 Oscillazioni libere non smorzate 172
3.2.4 Normalizzazione degli autovalori 174
3.2.5 Ortogonalità dei modi di vibrare 175
3.2.6 Coordinate principali 181
3.2.7 Risposta forzata 183
3.2.8 Forze equivalenti a moto impresso 184
3.2.9 Smorzamento in sistemi a N gdl 200
3.2.10 Smorzamento classico 201
3.2.11 Smorzamento di Rayleigh (o semplice) 201
3.2.12 Smorzamento di Caughey 203
3.2.13 Combinazione delle azioni in dinamica 204
3.2.14 Costruzioni simmetriche e costruzioni con pianta non simmetrica 223
3.2.15 Trascurabilità dell'inerzia torsionale propria 230
3.2.16 Analisi dinamica di aste inclinate 231
3.2.17 Principi di isolamento 235
3.3 Sistemi continui 238
3.3.1 Vibrazioni flessionali di travi 238
3.3.2 Oscillazioni libere 239
3.3.3 Smorzamento in sistemi continui 249
3.3.4 Sistemi a più campate 255
3.3.5 Influenza dell'inerzia rotazionale 258
3.3.6 Influenza dell'azione assiale 259
3.3.7 Oscillazioni smorzate 260
3.3.8 Smorzamento classico 261
3.3.9 Carico concentrato con modulo dinamico 263

3.3.10 Carico mobile su ponte 265
3.4 Sistemi a 1 gdl generalizzato 267

TEORIA e DINAMICA DELLE STRUTTURE

16/9

1

- DOCENTI: – FRANCESCO DAL CORSO (90 h)
  – LUCA DESERI (30 h)

↳ PLASTICITÀ 35h] DAL CORSO
↳ DINAMICA DELLE STRUTTURE 55h]
↳ TEORIA DELLE STRUTTURE 30 h] DESERI

TEORIA DELLE STRUTTURE

↳ ELEMENTI BIDIMENSIONALI e IL LORO COMPORTAMENTO ELASTICO

MONODIMENSIONALE se

$\{b_x, b_y\} \ll \ell \rightarrow$ (1D)
↓
VARIABILE
z

BIDIMENSIONALE se

$t \ll \{\ell_x, \ell_y\} \rightarrow$ 2D
↓
VARIABILI
$\{x, y\}$

t ≪ 1/10

SI RIMUOVE L'IPOTESI DI MONODIMENSIONALITÀ

COMPORTAMENTO A LASTRA CON CARICHI NEL PIANO

COMPORTAMENTO A PIASTRA CON CARICHI ORTOGONALI AL PIANO (SIMILE ALLE TRAVI)

CUPOLA — TUBO

DINAMICA DELLE STRUTTURE

SI RIMUOVE L'IPOTESI DI QUASI STATICITÀ. IL CARICO NON È PIÙ APPLICATO QUASI STATICAMENTE MA PUÒ ESSERE APPLICATO VELOCEMENTE.

QUESTO IMPLICA CONSIDERARE L'EQUAZIONE DEL MOTO

$$\sum \underline{F} = \cancel{0}\, m \ddot{x}$$

VERRÀ STUDIATO PER SISTEMI:

1 gdl

MONODIMENSIONALI SEMPLICI

k RIGIDEZZA DEI ELASTICI EQUIVALENTE

TORRINO PIEZOMETRICO

ITEA S.P.A. VIA GUARDINI, 22 38121 TRENTO C.F. P.I

N gdl ODE

$$\underline{\underline{M}}\,\ddot{\underline{q}}(t) + \underline{\underline{K}}\,q(t) = \underline{F}(t)$$

Sistemi continui

PDE EQUAZIONI DIFFERENZIALI ALLE DERIVATE PARZIALI.

IL FATTO CHE IL CARICO VENGA APPLICATO VELOCEMENTE CREA L'EFFETTO DELLA RISONANZA.

MA QUANDO VALE L'IPOTESI DI Q-S?

MODALITÀ DI ESAME

VEDI FOGLIO STAMPATO

→ SCRITTI SU Plasticità e Dinamica

	Scritti	Orali
INV	3	3
EST	2 (Giu Lugl)	3

PLASTICITÀ

SI RINUNCIA L'IPOTESI DI LEGAME COSTITUTIVO ELASTICO LINEARE

PLASTICITÀ

16/9

5

- LEGAME COSTITUTIVO (1D, 3D)
- PROBLEMA AL CONTORNO
  - ANALISI EVOLUTIVA
  - ANALISI LIMITE
- PLASTICITÀ DELLE STRUTTURE
  - RESISTENZA SEZIONALE (N, M, $M-N$)
  - RESISTENZA STRUTTURALE (STRUTT. RETICOLARI, TELAIO)

COMPORTAMENTO ANELASTICO

TUTTO CIÒ CHE NON È ELASTICO, OVVERO SE NON RITORNA IN CONFIGURAZIONE INDEFORMATA QUANDO SI SCARICA IMMEDIATAMENTE

CI SONO 2 GRANDI PILASTRI:

→ COMPORTAMENTO DEFINITO DALLA PLASTICITÀ

→ COMPORTAMENTO DEFINITO DALLA VISCOSITÀ

PLASTICITÀ

- NON DIPENDE DAL TEMPO
- HA RESIDUALITÀ DI DEFORMAZIONE E TENSIONI

VISCOSITÀ

- DIPENDE DAL TEMPO
- NO RESIDUALITÀ

IL COMPORTAMENTO PUÒ COMPRENDERE TUTTI O SOLO I COMPORTAMENTI (ELASTICO, PLASTICO O VISCOSO) O ALCUNE CONFIGURAZIONI INTERMEDIE.

VISCOSITÀ

C'È UN'EVOLUZIONE TEMPORALE

↳ C'È SENSIBILITÀ ALLA VELOCITÀ DI CARICO. VELOCITÀ DIVERSE CREANO COMPORTAMENTI DIVERSI

↳ A CARICO COSTANTE LA DEFORMAZIONE AUMENTA (CREEP)

→ FUNZIONE DEL TEMPO

↳ A DEFORMAZIONE COSTANTE LA TENSIONE SI RIDUCE (RILASSAMENTO)

ITEA S.P.A. VIA GUARDINI, 22 38124 TRENTO C.F. P.IVA

ITEA S.P.A. VIA GUARDINI, 22 38121 TRENTO C.F. P.I

PLASTICITÀ

NON DIPENDE DAL TEMPO IN SENSO FISICO

ESISTE UN TEMPO NELLA PLASTICITÀ? SÌ, MA HA SOLO SIGNIFICATO DI PARAMETRO ORDINATORE DI EVENTI.

DATO UN PERCORSO

$O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow O$

1 sec	1 anno	1 sec
10 anni	1 mese	1 ora

NON CAMBIA L'EFFETTO VARIANDO IL TEMPO DEL PERCORSO.

ACCIAIO:

σ_N (NOMINALE): $\sigma_N(t) = \frac{F(t)}{A_0}$ Tensione nominale o ingegneristica

ε_c (CONVENZIONALE) $\varepsilon_c(t) = \frac{l(t) - l_0}{l_0}$ Deformazione convenzionale

$d\varepsilon = \frac{dl}{l} \rightarrow \int d\varepsilon = \int \frac{dl}{l} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_t(t) = \ln\left(\frac{l(t)}{l_0}\right)}$

DEFORMAZIONE VERA (TRUE)

$\boxed{\sigma_t(t) = \frac{F(t)}{A_t}}$ TENSIONE VERA (TRUE)

$\varepsilon_t(t) = \ln[1 + \varepsilon_c(t)]$

REALIZZANDO IL GRAFICO:

4 COMPORTAMENTI DIVERSI

1) ELASTICO → σ_y TENSIONE DI SNERVAMENTO (YIELDING)

2) PLASTICITÀ PERFETTA: IL PROVINO SI DEFORMA SENZA AUMENTARE LA TENSIONE. HA RIGIDEZZA NULLA

SUL RAMO PLASTICO HO 2 OPZIONI:
- CONTINUARE A PLASTICIZZARE
- SCARICARE ELASTICAMENTE

$$\varepsilon_t(t) = \ln \frac{l(t)}{l_0} = \ln(1 + \varepsilon_c(t))$$

$$\sigma_t(t) = \frac{F(t)}{A(t)}$$

$A_0, l_0, l(t)$ NOTE $\longrightarrow A(t)$???

$$\Delta V(t) = \Delta V_{el}(t) + \Delta V_{pl}(t) = 0$$

$\simeq 0$ deformazioni piccole

$\simeq 0$ ISOCORICA → SPERIMENTALMENTE NEI METALLI DURANTE LA DEFORMAZIONE PLASTICA NON CI SONO VARIAZIONI DI VOLUME

$$A_0 l_0 = A(t)\, l(t) \rightarrow A(t) = A_0 \frac{l_0}{l(t)}$$

$$\sigma_t(t) = \frac{F(t)}{A_0} \frac{l(t)}{l_0} = \sigma_n(t)\left[1 + \varepsilon_c(t)\right]$$

RIMODELLANDO LA CURVA DEL GRAFICO PRECEDENTE IN COMPORTAMENTO VERO (TRUE) LOCALMENTE NEL PUNTO (VEDI GRAFICO PRECEDENTE)

Date . . . . . .

NOI TRATTEREMO SOLO I PRIMI 2 TRATTI CHE IN REALTÀ SONO DI QUESTO TIPO

SCHEMATIZZATO COSÌ

COMPORTAMENTO ELASTICO - PERFETTAMENTE PLASTICO

UN ESEMPIO SEMPLICE

QUANDO $F > \mu P$ SI È IN CAMPO PLASTICO

PERFETTAMENTE PLASTICO (NON SERVE AUMENTARE LA FORZA PER DEFORMARSI)

CONSIDERANDO UNA ε^*, NON È È UNIVOCITÀ TRA σ e ε IN CAMPO PLASTICO.

DIPENDE DAL PERCORSO DI CARICO

UNA VOLTA SPECIFICATO IL PERCORSO DI CARICO (ORDINE DI EVENTI) SI RITORNA A UN LEGAME UNIVOCO TRA σ e ε.

ALLORA, IN PLASTICITÀ

$$\cancel{\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\varepsilon}})}$$ NO! $\forall\, \underline{\underline{\varepsilon}}\ \exists$ PIÙ DI UNA $\underline{\underline{\sigma}}$

$$\underline{\underline{\sigma}}(t) = \int_0^t \dot{\sigma}(\tau)\, d\tau$$

↳ INCREMENTO DI TENSIONE

IL TEMPO È UN TEMPO ORDINATORE e NON FISICO

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(t) = \int_0^t \dot{\varepsilon}(\tau)\, d\tau$$

↳ INCREMENTO DI DEFORMAZIONE

$$\boxed{\dot{\underline{\underline{\sigma}}}(t) = \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}(K(t))\ \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}(t)}$$

LEGAME COSTITUTIVO INCREMENTALE TENSIONE - DEFORMAZIONE

PARAMETRO EVOLUTIVO → CONTIENE LA STORIA DELLI EVENTI

TENSORE COSTITUTIVO TANGENTE

COME SI OTTIENE $\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}$?

Per un Legame Costitutivo monodimensionale

PLASTICITÀ 1D

IL TENSORE SI RIDUCE AD UNO SCALARE

GRAFICANDO:

DOVE σ : TENSIONE

ε : DEFORMAZIONE TOTALE

ε_{el} : DEFORMAZIONE ELASTICA

ε_{pl} : DEFORMAZIONE PLASTICA

Date

LE EQUAZIONI SONO:

$$\begin{cases} \sigma = E\,\varepsilon_{el} & \text{LEGAME ELASTICO} \\ \varepsilon = \varepsilon_{el} + \varepsilon_{pe} & \text{DECOMPOSIZIONE ADDITIVA DELLA DEFORMAZIONE} \\ f(\sigma, K) = |\sigma| - \sigma_y(K) \leq 0 & \text{CRITERIO DI SNERVAMENTO} \end{cases}$$

sono in A

sono in B

IN CAMPO PLASTICO AUMENTA ANCHE LA TENSIONE DI SNERVAMENTO

DOVE

$$K(t) = \int_0^t |\dot{\varepsilon}_{pe}(\tau)|\, d\tau$$

parametro di HARDENING

LE ULTIME EQUAZIONI SONO

$$\underbrace{-\frac{\partial f}{\partial K}\dot{K}}_{\dot{\sigma}_y} \overset{def}{=} \dot{\lambda}\, h$$

LEGGE DI INCRUDIMENTO

"TEMPO"

moltiplicatore plastico

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_{pl} = \dot{\lambda}\, \mathrm{sign}(\sigma) \end{cases}$$

LEGGE DI FLUSSO PLASTICO

$\dot{\lambda} \geq 0$ non negativo

ALLORA, CONSIDERANDO GLI INCREMENTI

$$\dot{\sigma} = (E\,\varepsilon_{el})^{\cdot} = \cancel{\dot{E}\,\varepsilon_{el}} + E\,\dot{\varepsilon}_{el}$$

0

$$\begin{cases} \dot{\sigma} = E\,\dot{\varepsilon}_{el} \\ \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_{el} + \dot{\varepsilon}_{pl} \end{cases}$$

NO PLASTICITÀ

IN (A) $f(\sigma,K) < 0$ $\Rightarrow$ $\dot{\lambda} = 0 \Rightarrow \dot{\varepsilon}_{pl} = 0$

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_{el} + \dot{\varepsilon}_{pl} = \dot{\varepsilon}_{el}$$

$$\underline{\dot{\sigma}} = E\,\dot{\varepsilon}_{el} = \underline{E\,\dot{\varepsilon}}$$

DERIVANDO f RISPETTO A K

$$\dot{K}\left(\frac{\partial f}{\partial K}(\sigma,K)\right) = \frac{d\sigma_y}{dK}\dot{K} = \dot{\lambda}\,h$$

$\sigma_y(K)$

Se K VALESSE

$$K(t) = \int_0^t |\dot{\varepsilon}_{pl}(\tau)|\,d\tau$$

e QUINDI

$$\dot{K}(t) = |\dot{\varepsilon}_{pl}(t)| = \dot{\lambda}$$

ALLORA

$$\boxed{h = \frac{d\sigma_y}{dK}}$$

IN (B) $\underline{f(\sigma,K)} = |\sigma| - \sigma_y(K) = 0$

SCARICO ELASTICO (B1)

$$\begin{cases} f(\sigma,K) = 0 \\ \dot{f} < 0 \end{cases}$$

f PARTE CON VALORE 0 e SUBITO DOPO DECRESCE e HA VALORE NEGATIVO

IL SUO INCREMENTO

$$f(\sigma+\dot{\sigma}) \simeq \cancel{f(\sigma)} + \underbrace{\dot{f}(\sigma)}_{<0}\Delta t < 0$$

SSE $\dot{f}(\sigma) < 0$

$\dot{\lambda} = 0 \rightarrow \underline{\dot{\sigma} = E\,\dot{\varepsilon}}$ come in (A)

CARICO PLASTICO (B2)

INCREMENTO DI f

$$\begin{cases} \dot{f} = 0 \rightarrow \dot{\lambda} \neq 0 \\ f(\sigma,K) = 0 \end{cases}$$

ma quanto vale?

$$f(\sigma+\dot{\sigma}) \simeq \underbrace{\cancel{f(\sigma)}}_{=0} + \dot{f}(\sigma)\Delta t = 0 \text{ SSE}$$

$$\boxed{\dot{f}(\sigma) = 0}$$

$$\begin{cases} \dot{f} = \mathrm{sign}(\sigma)\,\dot{\sigma} - \dot{\sigma}_y(K) = 0 \\ \dot{\sigma} \overset{E\dot{\varepsilon}_{el} =}{=} E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_{pl}) = E(\dot{\varepsilon} - \dot{\lambda}\,\mathrm{sign}(\sigma)) \\ \dot{\sigma}_y = \dot{\lambda}\,h \end{cases}$$

SOSTITUISCO

$$\mathrm{sign}(\sigma)\,E(\dot{\varepsilon} - \dot{\lambda}\,\mathrm{sign}(\sigma)) = \dot{\lambda}\,h$$

DA CUI

$$\mathrm{sign}\,\sigma\,E\,\dot{\varepsilon} - \dot{\lambda}\,E = \dot{\lambda}\,h$$

$$\boxed{\dot{\lambda} = \text{sign}(\sigma)\,\frac{E}{h+E}\,\dot{\varepsilon}} \quad (B_2)$$

COME COLLEGO B_1 e B_2 IN UNA UNICA FORMULA?
CON LE ~~FORMULA~~ PARENTESI DI MACAULEY

$$\boxed{\dot{\lambda} = \langle \text{sign}(\sigma)\,\dot{\varepsilon} \rangle\,\frac{E}{h+E}} \qquad \forall\ h+E>0 \ !!!$$

PARENTESI DI MACAULEY

IN (B_1) $\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon}$, $\dot{\lambda}=0$, $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_{ee}$, $\boxed{\text{sign}(\sigma)\,\dot{\varepsilon}<0}$

COSA È LA PARENTESI DI MACAULEY?

Se $\sigma>0$ e $\dot{\varepsilon}<0$ (scarico elastico)
Se $\sigma<0$ e scarico elastico ~~ha~~ $\dot{\varepsilon}>0$

$$\langle x \rangle = \frac{x+|x|}{2}$$

Se $x<0$ $\quad \langle x \rangle = 0$

Se $x>0$ $\quad \langle x \rangle = x$

$$\begin{cases} \dot{\sigma} = E\,\dot{\varepsilon}_{ee} \\ \dot{\varepsilon}_{ee} = (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_{pl}) = \dot{\varepsilon} - \dot{\lambda}\,\text{sign}(\sigma) \end{cases}$$

* CLAMS DIRETTO

SOSTITUENDO ANCHE $\dot{\lambda}$ TROVATO PRIMA *

Se $f(\sigma,K)=0$

$$\boxed{\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon} - \text{sign}(\sigma)\,\langle \text{sign}(\sigma)\,\dot{\varepsilon} \rangle\,\frac{E^2}{h+E}} \qquad h+E>0$$

$$\dot{\sigma} = E\,\dot{\varepsilon} \qquad \text{se } f(\sigma,K)<0$$

TIEMPO

SE HO UN CARICO PLASTICO, COME B_2

$$\text{sign}(\sigma) < \text{sign}(\sigma)\,\dot{\varepsilon} > = \dot{\varepsilon}$$

ALLORA $\dot{\sigma}$ SI SEMPLIFICA COME

$$\dot{\sigma} = E\,\dot{\varepsilon} - \frac{E^2}{h+E}\,\dot{\varepsilon} = \frac{Eh}{h+E}\,\dot{\varepsilon} = E_{pl}\,\dot{\varepsilon}$$

MODULO DI RIGIDEZZA PLASTICA (MODULO TANGENTE PLASTICO)

LEGAME INVERSO

SIA PER A CHE PER B_1

$$\boxed{\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E}}$$ LEGAME INVERSO

PER B_2 INVECE

$$\dot{f} = 0 \quad , \quad \text{sign}(\sigma)\,\dot{\sigma} = \dot{\lambda} h$$

$$\dot{\lambda} = \frac{\text{sign}(\sigma)\,\dot{\sigma}}{h}$$

USANDO LA PARENTESI DI MACAULEY

$$\boxed{\dot{\lambda} = \frac{<\text{sign}(\sigma)\,\dot{\sigma}>}{h}} \quad , \quad \forall\, h > 0$$

$$\dot{\sigma} = E\,(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_{pl})$$

CIOÈ

$$\boxed{\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \dot{\varepsilon}_{pl} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \text{sign}(\sigma)\,\frac{<\text{sign}(\sigma)\,\dot{\sigma}>}{h}}$$ LEGAME INVERSO $\forall\, h > 0$

IN CASO DI CARICO PLASTICO

$$\dot{\varepsilon} = \frac{h+E}{Eh}\,\dot{\sigma} = \frac{1}{E_{pl}}\,\dot{\sigma} \qquad \forall\, h > 0$$

- CAMPO DI VALIDITÀ DEL LEGAME INVERSO $(h > 0)$
- CAMPO DI VALIDITÀ DEL LEGAME DIRETTO $(h + E > 0)$

$h > -E$

$\downarrow$

Se $h > 0$ VALE SIA PER IL DIRETTO CHE PER L'INVERSO.

Se $h < 0$ SI PUÒ AGIRE SOLO CON LEGAME DIRETTO POICHÉ INSERENDO $\dot{\sigma}$ ~~[illegible]~~ SI PERDE L'UNICITÀ DI

CRITERI DI RESISTENZA (o di SNERVAMENTO) PER MATERIALI ISOTROPI

$$f(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{K}) \leq 0$$

Se c'è ISOTROPIA

$$f(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{K}) = f(I_1(\underline{\underline{\sigma}}), I_2(\underline{\underline{\sigma}}), I_3(\underline{\underline{\sigma}}), \underline{K}) =$$

$$= f(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}, \underline{K})$$

SI PUÒ INTRODURRE UNO SPAZIO CHE HA COME ASSI LE TENSIONI PRINCIPALI. QUESTO È LO SPAZIO DI HAIGH - WESTERGAARD

NELLO SPAZIO DI H-W SI PUÒ RAPPRESENTARE IL TENSORE DEGLI STRESS COME UN VETTORE

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \longrightarrow \underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_I \\ \sigma_{II} \\ \sigma_{III} \end{bmatrix}$$

L'ASSE IDROSTATICO È LA TRISETTRICE DELLO SPAZIO

LO SFORZO $\underline{\underline{\sigma}}$ PUÒ ESSERE SCOMPOSTO IN UNA COMPONENTE IDROSTATICA $p\underline{\underline{I}}$ E UNA DEVIATORICA $\underline{\underline{S}}$

IL PIANO GENERATO È DETTO PIANO DEVIATORICO π

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}} = \frac{tr\,\underline{\underline{\sigma}}}{3}\,\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{S}}}$$

SFORZO DEVIATORICO

CRITERIO DI VON MISES

$$f(J_2, \sigma_0) = \sqrt{J_2} - \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}$$

σ_0 → RESISTENZA A TRAZIONE MONOASSIALE

UTILIZZATO PER MATERIALI DUTTILI

$$J_2 = \frac{1}{2}\,tr(\underline{\underline{S}}^2)$$

PLOTTANDO VON MISES SI OTTIENE UN CILINDRO CHE HA COME ASSE L'ASSE IDROSTATICO.

VON MISES NON È SUSCETTIBILE ALLA PRESSIONE!

NOTARE $\underline{\underline{S}} \perp \underline{\underline{I}}$: $\underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{I}} = 0$!

CRITERIO DI DRUCKER – PRAGER (MATERIALI FRAGILI)

$$\begin{cases} f(I_1, J_2, \sigma_c, \sigma_T) = \sqrt{J_2} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,\dfrac{\sigma_c - \sigma_T}{\sigma_c + \sigma_T}\,I_1 - \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,\dfrac{\sigma_c\,\sigma_T}{\sigma_c + \sigma_T} \\ I_1 = tr(\underline{\underline{\sigma}}) \end{cases}$$

σ_c e σ_T SONO LE RESISTENZE A COMPRESSIONE E TRAZIONE MISURATE SU UN PROVINO.

RAPPRESENTANDO SI OTTIENE UN CONO QUESTO FA SI CHE IL MATERIALE NON SI ROMPA "TEMPO" A COMPRESSIONE (POSSO CARICARE

QUANTO VOGLIO) MA SI ROMPA A TRAZIONE (PUNTA DEL CONO)

AL CONTRARIO, VON MISES POSSO CARICARE QUANTO VOGLIO SIA A TRAZIONE CHE A COMPRESSIONE PERCHÉ IL CILINDRO NON VIENE TOCCATO.

PLASTICITÀ 3D

SI HA CHE, ANALOGAMENTE AL CASO 1D

$$\begin{cases} f(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{K}) \leq 0 \\ \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{ee} + \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{pe} \\ \dot{\underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{\underline{\underline{E}}}} \; \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{ee} \\ \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{pe} = \dot{\lambda} \underline{\underline{P}} \\ \dot{\lambda} h = -\dfrac{\partial f}{\partial \underline{K}} \dot{\underline{K}} \end{cases}$$

LEGGE DI FLUSSO PLASTICA NON ASSOCIATA

DIREZIONE DELLA PLASTICITÀ

$\dot{\lambda} \geq 0$

LEGGE DI INCRUDIMENTO

CONSIDERANDO SOLO LA SEZIONE, IN UN CONTESTO PIANO

ALL'INTERNO DELLA SEZIONE SIAMO IN CAMPO ELASTICO

(A) $f(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{K}) < 0 \Rightarrow$

$\dot{\lambda} = 0 \rightarrow \boxed{\dot{\underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{\underline{\underline{E}}}} \; \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}}$

$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{pe} = 0$

IN (B) SONO IN CAMPO PLASTICO $\rightarrow f(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{K}) = 0$

(B1) RIENTRO IN CAMPO ELASTICO (SCARICO ELASTICO)

$\dot{f}(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{K}) < 0 \qquad \dot{\underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{\underline{\underline{E}}}} \; \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}$

(B2) $f(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{K}) = 0$

(B2a) $\dot{\underline{K}} = \underline{\underline{0}}$ CARICO NEUTRO LA SUPERFICIE DI SNERVAMENTO NON SI MODIFICA

(B2B) $\dot{\underline{K}} \neq \underline{\underline{0}}$ CARICO PLASTICO LA SUPERFICIE DI SNERVAMENTO SI MODIFICA

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \cdot \dot{\underline{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \underline{K}} \dot{\underline{K}}$$

$$- \dot{\lambda} h$$

DA LEGGE INCRUDIMENTO

$$= \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \cdot \dot{\underline{\sigma}} - \dot{\lambda} h$$

B_1 $\dot{f} < 0, \dot{\lambda} = 0 \rightarrow \boxed{\underline{Q} \cdot \dot{\underline{\sigma}} < 0}$

$B_{2\alpha}$ $\dot{f} = 0, \dot{\lambda} = 0 \Rightarrow \boxed{\underline{Q} \cdot \dot{\underline{\sigma}} = 0}$

$B_{2\beta}$ $\dot{f} = 0 \Rightarrow \boxed{\underline{Q} \cdot \dot{\underline{\sigma}} = \dot{\lambda} h}$

DOVE

$$\underline{Q} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}$$

GRADIENTE ALLA SUPERFICIE DI SNERVAMENTO

B_1

$$\underline{Q} \cdot \dot{\underline{\sigma}} < 0$$

$B_{2\alpha}$

$$\underline{Q} \cdot \dot{\underline{\sigma}} = 0 \rightarrow \underline{Q} \perp \dot{\underline{\sigma}}$$

$B_{2\beta}$

$$\underline{Q} \cdot \dot{\underline{\sigma}} = \dot{\lambda} h$$

Se $h > 0$ LA SUPERFICIE SI ESPANDE

Se $h < 0$ LA SUPERFICIE SI CONTRAE

"TEMPO"

Se $\dot{f} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{Q}} \cdot \dot{\underline{\underline{\sigma}}} = \dot{\lambda} h$

$$\dot{\underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{\underline{\underline{E}}}} (\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} - \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{pl}) = \underline{\underline{\underline{\underline{E}}}} (\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} - \dot{\lambda} \underline{\underline{P}})$$

SOSTITUENDO

$$\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{\underline{\underline{E}}}}\, \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \dot{\lambda} (h + \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{\underline{\underline{E}}}}\, \underline{\underline{P}})$$

DA CUI

$$\boxed{\dot{\lambda} = \frac{\langle \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{\underline{\underline{E}}}}\, \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} \rangle}{h + \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{\underline{\underline{E}}}}\, \underline{\underline{P}}}} \qquad \forall\ h + \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{\underline{\underline{E}}}}\, \underline{\underline{P}} > 0$$

Se $\dot{\lambda} = 0 \rightarrow \underline{\underline{Q}} \cdot \dot{\underline{\underline{\sigma}}} \leq 0$ e cioè

$\dot{\underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{\underline{\underline{E}}}}\, \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}$ e quindi

$\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{\underline{\underline{E}}}}\, \dot{\varepsilon} \leq 0 \rightarrow$ è necessario mettere le parentesi di Macaulay per generalizzare in tutti i casi

B

IL LEGAME DIRETTO è

$$\boxed{\dot{\underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{\underline{\underline{E}}}}\, \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} - \underline{\underline{\underline{\underline{E}}}}\, \underline{\underline{P}} \frac{\langle \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{\underline{\underline{E}}}}\, \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} \rangle}{h + \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{\underline{\underline{E}}}}\, \underline{\underline{P}}}}$$

LEGAME DIRETTO

$\underline{\underline{\varepsilon}}_{tot} - \underline{\underline{P}}_{plastico}$ INCREMENTALE

$f(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{K}}) = 0$

$\forall\ h + \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{\underline{\underline{E}}}}\, \underline{\underline{P}} > 0$

PER IL LEGAME INVERSO

$$\dot{\lambda} = \frac{\langle \underline{\underline{Q}} \cdot \dot{\underline{\underline{\sigma}}} \rangle}{h}, \quad h > 0 \quad \text{ALLORA}$$

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{el} = \underline{\underline{\underline{\underline{E}}}}^{-1}\, \dot{\underline{\underline{\sigma}}},$$

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} - \dot{\lambda}\,\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{\underline{\underline{E}}}}^{-1}\,\dot{\underline{\underline{\sigma}}}$$

ALLORA

$$\boxed{\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\underline{\underline{E}}}}^{-1}\,\dot{\underline{\underline{\sigma}}} + \underbrace{\frac{\langle \underline{\underline{Q}} \cdot \dot{\underline{\underline{\sigma}}} \rangle}{h}}_{=\dot{\lambda}}\,\underline{\underline{P}}} \quad , \; h > 0$$

LEGAME INVERSO

COSA È $\underline{\underline{P}}$?

IDENTIFICA LA DIREZIONE DEL FLUSSO PLASTICO PER UN MATERIALE DUTTILE:

$$\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{Q}}$$ FLUSSO PLASTICO ASSOCIATO

ALLORA $\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{pl} = \dot{\lambda}\,\underline{\underline{Q}}$

Se f è insensibile della pressione idrostatica

e quindi $\mathrm{tr}\,\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{pl} = \dot{\lambda}\,\mathrm{tr}\,\underline{\underline{Q}} = 0$

NELLO SPAZIO DI H-W CON VON MISES $\underline{\underline{Q}}$ È PARALLELO ALLO SFORZO DEVIATORICO $\underline{\underline{S}}$ e QUINDI ORTOGONALE ALLA PRESSIONE IDROSTATICA.

QUESTO IMPLICA VARIAZIONI VOLUMETRICHE PLASTICHE NULLE!

SE IL MATERIALE È FRAGILE SI SCEGLIE

$$\underline{\underline{P}} \neq \underline{\underline{Q}}$$ FLUSSO PLASTICO NON ASSOCIATO

SE $\underline{\underline{P}}$ FOSSE UGUALE A $\underline{\underline{Q}}$ LA COMPONENTE DI $\underline{\underline{Q}}$ LUNGO L'ASSE IDROSTATICO SAREBBE TROPPO "TEMPO" GRANDE RISPETTO A QUANTO MISURATO NELLA REALTÀ.

$$\mathrm{tr}\ \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{pl} = \dot{\lambda}\ \mathrm{tr}\ \underline{\underline{P}} < \dot{\lambda}\ \mathrm{tr}\ \underline{\underline{Q}}$$

SI PRENDE $\underline{\underline{P}}$ MENO INCLINATA RISPETTO ALL'ASSE IDROSTATICA DI $\underline{\underline{Q}}$ PER AVERE MENO DEFORMAZIONI VOLUMETRICA PLASTICA IN MODO CHE SIA COERENTE CON LA REALTÀ.

EQUAZIONI DI PRANDTL REUSS
(J2 - flow Theory of plasticity - 1924)

AP:
- FLUSSO PLASTICO ASSOCIATO $\quad \underline{\underline{P}} = \underline{\underline{Q}}$
- HARDENING NULLO $\quad h = 0$
- SUPERFICIE DI VON MISES $\quad f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sqrt{\dfrac{\underline{\underline{s}} \cdot \underline{\underline{s}}}{2}} - \dfrac{\sigma_0}{\sqrt{3}}$

SOSTITUENDO LE IPOTESI NEL LEGAME DIRETTO

$$\dot{\underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{\underline{\underline{E}}}}\ \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} - \underline{\underline{\underline{\underline{E}}}}\ \underline{\underline{Q}}\ \frac{\langle \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{\underline{\underline{E}}}}\ \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} \rangle}{\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{\underline{\underline{E}}}}\ \underline{\underline{Q}}}$$

DALLA TERZA IPOTESI

$$\underline{\underline{Q}} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \dots = \frac{\underline{\underline{s}}}{\sqrt{2\ \underline{\underline{s}} \cdot \underline{\underline{s}}}} \qquad \text{e QUINDI}$$

$$\dot{\underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{\underline{\underline{E}}}}\ \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} - \frac{\langle \underline{\underline{s}} \cdot \underline{\underline{\underline{\underline{E}}}}\ \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} \rangle}{\underline{\underline{s}} \cdot \underline{\underline{\underline{\underline{E}}}}\ \underline{\underline{s}}}\ \underline{\underline{\underline{\underline{E}}}}\ \underline{\underline{s}}$$

SE INOLTRE IL LEGAME ELASTICO È ISOTROPO

$$\mathbb{E}\,\underline{\underline{S}} = 2\mu\,\underline{\underline{S}}$$

$$\mathbb{E}\,\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \lambda(\mathrm{tr}\,\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}})\,\underline{\underline{I}} + 2\mu\,\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}$$

e QUINDI

ANISOTROPIZZAZIONE PLASTICA → SE $f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0$

$$\dot{\underline{\underline{\sigma}}} = \lambda(\mathrm{tr}\,\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}})\,\underline{\underline{I}} + 2\mu\,\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} - \mu\,\frac{\langle \underline{\underline{S}} \cdot \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} \rangle}{\sqrt{\underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{S}}/2}}\,\underline{\underline{S}}$$

↳ UN MATERIALE CON UN LEGAME ELASTICO ISOTROPO PLASTICIZZATO PERDE L'ISOTROPIA

ANISOTROPIZZAZIONE MEDIANTE STORIA DI CARICO MONOASSIALE

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sigma^*, \quad |\sigma^*| = \sigma_0$$

$$\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{\sigma^*}{3}$$

$$J_2 = \frac{\underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{S}}}{2} = \frac{\sigma_0^2}{3}$$

SOSTITUENDO SOPRA, ESPLICITANDO IL LEGAME NELLE 3 DIMENSIONI

Se ho carico plastico

$$\begin{Bmatrix} \dot{\sigma}_{11} \\ \dot{\sigma}_{22} \\ \dot{\sigma}_{33} \\ \dot{\sigma}_{23} \\ \dot{\sigma}_{13} \\ \dot{\sigma}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + \frac{2\mu}{3} & \lambda + \frac{2}{3}\mu & \lambda + \frac{2}{3}\mu & & & \\ \lambda + \frac{2}{3}\mu & \lambda + \frac{5\mu}{3} & \lambda - \frac{\mu}{3} & & & \times \\ \lambda + \frac{2}{3}\mu & \lambda - \frac{\mu}{3} & \lambda + \frac{5}{3}\mu & & & \\ & & & \mu & & \\ & \times & & & \mu & \\ & & & & & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_{11} \\ \dot{\varepsilon}_{22} \\ \dot{\varepsilon}_{33} \\ \dot{\varepsilon}_{23} \\ \dot{\varepsilon}_{13} \\ \dot{\varepsilon}_{12} \end{Bmatrix}$$

TEMPO

TRASVERSALMENTE ISOTROPO.

LA MATRICE NON DESCRIVE PIÙ UN COMPORTAMENTO ISOTROPO ~~(NON È SIMMETRICA)~~ (GLI ELEMENTI SULLA DIAGONALE NON SONO UGUALI) O MEGLIO, LO SONO LUNGO 2 DIREZIONI E NON SULLA TERZA

ESISTE UN PIANO DI ISOTROPIA INSENSIBILE RISPETTO A ~~UNA~~ 2 DIREZIONI

C'È UNA ISOTROPIA TRASVERSALE PERCHÉ NON È STATO CARICATO IN MANIERA ISOTROPA

POSTULATO DI DRUCKER (o di massima dissipazione)

SE UN MATERIALE ELASTO-PLASTICO SODDISFA

$$\left(\underline{\underline{\sigma}}^A - \underline{\underline{\sigma}}^B\right) \cdot \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^A_{pl} \geq 0 \quad , \quad f(\underline{\underline{\sigma}}^A, \underline{K}) \leq 0 \quad f(\underline{\underline{\sigma}}^B, \underline{K}) \leq 0$$

NB: TENSIONI TOTALI

ALLORA IL MATERIALE È STABILE SECONDO DRUCKER.

STIAMO PENSANDO A 2 STATI TENSIONALI $\underline{\underline{\sigma}}^A$ e $\underline{\underline{\sigma}}^B$

- SE $f(\underline{\underline{\sigma}}^A, \underline{K}) < 0 \Rightarrow \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^A_{pl} = \underline{\underline{0}}$ → disequaz. banalmente soddisfatta
- SE $f(\underline{\underline{\sigma}}^A, \underline{K}) = 0 \Rightarrow$ SI HANNO CONSEGUENZE SUL MODELLO E-P

NOTA: DRUCKER $\xRightarrow{\text{implica}}$ STABILITÀ

$\not\Leftarrow$

EQUIVALENZA DEL POSTULATO

$$(\underline{\sigma}^A - \underline{\sigma}^B) \cdot \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^A_{pe} \geq 0 \iff \begin{cases} (i) & \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{pe} = \dot{\lambda}\, \underline{\underline{Q}} \\ (ii) & f(\underline{\sigma}) \text{ è convessa} \end{cases}$$

QUASI SEMPRE SODDISFATTA

DIM [$\Rightarrow$ (i) + (ii)] | IL POSTULATO IMPLICA (i) e (ii)

(a) SIA $f(\underline{\sigma})$ CONVESSA

$\forall\ \underline{\sigma}^B$ SI HANNO DIVERSI VETTORI $(\underline{\sigma}^A - \underline{\sigma}^B)$

PERCHÈ $\forall\ \underline{\sigma}^B$ SIA SODDISFATTO DRUCKER SI DEVE AVERE

$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^A_{pe}$ ORTOGONALE ALLA SUPERFICIE

(POICHÈ IL PRODOTTO SCALARE DEVE ESSERE NON NEGATIVO)

(b) SIA $f(\underline{\sigma})$ NON CONVESSA

IL PRODOTTO SCALARE SAREBBE POSITIVO LUNGO UNA DIREZIONE (AD ES DESTRA) E NEGATIVO IN QUELLA CONIUGATA (CON $\underline{\sigma}^B$ A SINISTRA)

IL POSTULATO NON È SODDISFATTO PER NESSUNA DIREZIONE

(i) e (ii) IMPLICANO IL POSTULATO

DIM [$\Leftarrow$ (ii) + (i)] | SIA LA $f(\underline{\sigma})$ CONVESSA e $\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{pe} = \dot{\lambda}\, \underline{\underline{Q}}$

ALLORA È SEMPRE SODDISFATTA

$\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{Q}} \Rightarrow$ OK POSTULATO

(iii) $\begin{cases} \dot{\underline{\underline{\sigma}}}^A \cdot \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^A_{pl} \geq 0 & \text{se } h > 0 \\ \dot{\underline{\underline{\sigma}}}^A \cdot \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^A_{pl} = 0 & \text{se } h = 0 \end{cases}$

DIM

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^A_{pl} = \dot{\lambda}\, \underline{\underline{Q}}^A$$

$$\dot{\underline{\underline{\sigma}}}^A \cdot \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^A_{pl} = \dot{\lambda}\, \underbrace{\dot{\underline{\underline{\sigma}}}^A \underline{\underline{Q}}^A}_{\text{LEGGE INCRUDIMENTO}} = \dot{\lambda}^2 h \quad \begin{cases} > 0 & \text{se } h > 0 \text{ e } \dot{\lambda} > 0 \\ = 0 & \text{se } \begin{cases} h > 0 \text{ e } \dot{\lambda} = 0 \\ h = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\overset{\dot{\lambda} h}{\shortparallel} \rightarrow \dot{f} = 0 = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}}_{\underline{\underline{Q}}} \dot{\underline{\underline{\sigma}}} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{K}}} \dot{\underline{\underline{K}}}}_{-\dot{\lambda} h} \rightarrow \dot{\underline{\underline{\sigma}}}\, \underline{\underline{Q}} = \dot{\lambda} h$$

$\square$

(iv) $\dot{\underline{\underline{\sigma}}}^A \cdot \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^A > 0$ se $h \geq 0$

DIM$_1$ [$h > 0$]

$$\dot{\underline{\underline{\sigma}}}^A \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^A = \dot{\underline{\underline{\sigma}}}^A \left(\overbrace{\underline{\underline{\underline{\underline{E}}}}^{-1} \dot{\underline{\underline{\sigma}}}^A}^{\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^A_{el}} + \overbrace{\frac{\langle \underline{\underline{Q}}^A \cdot \dot{\underline{\underline{\sigma}}}^A \rangle}{h\, \dot{\lambda} h} \dot{\underline{\underline{Q}}}^A}^{\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^A_{pl}} \right)$$

$$= \underbrace{\dot{\underline{\underline{\sigma}}}^A \cdot \underline{\underline{\underline{\underline{E}}}}^{-1} \dot{\underline{\underline{\sigma}}}^A}_{>0} + \underbrace{\frac{\langle \overbrace{\underline{\underline{Q}}^A \cdot \dot{\underline{\underline{\sigma}}}^A}^{\dot{\lambda} h} \rangle \underline{\underline{Q}}^A \cdot \dot{\underline{\underline{\sigma}}}^A}{h}}_{\dot{\lambda}^2 h > 0,\ \forall h > 0} \quad \underline{\underline{> 0}}$$

$\square$

DIM$_2$ [$h = 0$]

$$\dot{\underline{\underline{\sigma}}}^A \cdot \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^A = \dot{\underline{\underline{\sigma}}}^A \left(\underline{\underline{\underline{\underline{E}}}}^{-1} \dot{\underline{\underline{\sigma}}}^A + \dot{\lambda}\, \underline{\underline{Q}}^A \right)$$

$$= \underbrace{\dot{\underline{\underline{\sigma}}}^A \underline{\underline{\underline{\underline{E}}}}^{-1} \dot{\underline{\underline{\sigma}}}^A}_{>0} + \underbrace{\dot{\lambda}\, \overbrace{\dot{\underline{\underline{\sigma}}}^A \underline{\underline{Q}}^A}^{\dot{\lambda} h}}_{=0 \text{ per } h = 0} \quad \underline{\underline{> 0}}$$

$\square$

PROBLEMA AL CONTORNO

$$\begin{cases} \underline{u}(\underline{x},t) = \bar{\underline{u}}(\underline{x},t), & \underline{x} \in \partial B_u(t) \\ \underline{p}(\underline{x},t) = \bar{\underline{p}}(\underline{x},t), & \underline{x} \in \partial B_p(t) \\ \underline{b}(\underline{x},t) = \bar{\underline{b}}(\underline{x},t), & \underline{x} \in B \end{cases}$$

CONSIDERIAMO GLI INCREMENTI

$$\begin{cases} \dot{\underline{u}}(\underline{x},t) = \dot{\bar{\underline{u}}}(\underline{x},t) \\ \dot{\underline{p}}(\underline{x},t) = \dot{\bar{\underline{p}}}(\underline{x},t) \\ \dot{\underline{b}}(\underline{x},t) = \dot{\bar{\underline{b}}}(\underline{x},t) \end{cases}$$

e QUINDI

$$\begin{cases} \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \dfrac{\nabla \dot{\underline{u}} + \nabla \dot{\underline{u}}^T}{2} \\ \operatorname{div} \dot{\underline{\underline{\sigma}}} + \dot{\underline{b}} = \underline{0} \\ \dot{\underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{\mathbb{C}}}\, \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}, \quad \underline{\underline{\mathbb{C}}}[\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{K}}] \text{ NON UNIFORME} \\ \dot{\underline{\underline{\sigma}}}\, \underline{n} = \dot{\underline{p}} \end{cases}$$

SI PUÒ FARE L'IPOTESI DI CRESCITA PROPORZIONALE E MONOTONA DEI DIVERSI CARICHI (NEL TEMPO)

→ CONOSCO CIÒ CHE SUCCEDE ISTANTE PER ISTANTE

SI PARLA ALLORA DI **ANALISI EVOLUTIVA**, CIOÈ INTEGRAZIONE PASSO-PASSO DEI SINGOLI INCREMENTI DI CARICO

PARTO DA

Introduco il Dominio
B
t

storia di carico → A.E.

SE PERÒ $h = 0$:

→ A.E.

CI SI ASPETTA CHE LA RISPOSTA ARRIVI MA NON SUPERI UNA SOGLIA LIMITE DETTA **COLLASSO**

COLLASSO PLASTICO

CONDIZIONE PER CUI IL "CARICO" ESTERNO NON PUÒ ESSERE ULTERIORMENTE INCREMENTATO.

OVVERO $\dot{\underline{p}}_u = \dot{\underline{b}}_u = \underline{0}$

A QUESTA CONDIZIONE SI ASSOCIANO COMUNQUE DEFORMAZIONI NON NULLE $\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_u \neq \underline{\underline{0}}$

PERCHÈ SI HA MECCANISMO DI COLLASSO.

LA STRUTTURA SI DEFORMA "GRATUITAMENTE", SENZA AUMENTARE IL CARICO.

IL MECCANISMO DI COLLASSO PUÒ ESSERE:

- 1D: CERNIERA PLASTICA
- 2D o 3D: SUPERFICI DI SCIVOLAMENTO

SI PUÒ CALCOLARE DIRETTAMENTE IL VALORE DI COLLASSO SENZA INTEGRARE LA STORIA DI CARICO?

SÍ, ATTRAVERSO L'ANALISI LIMITE! → SOLO $h=0$

↳ HO SOLO UNA FOTOGRAFIA DEL COLLASSO, NON CONOSCO CIÒ CHE È SUCCESSO PRIMA

ANALISI LIMITE

AL FINE DI OTTENERE STIME SUPERIORI E INFERIORI DEL CARICO DI COLLASSO MEDIANTE CAMPI CINEMATICAMENTE AMMISSIBILI (K) E STATICAMENTE AMMISSIBILI (S)

SE FACCIO SOLO LA STIMA K SO CHE IL CARICO MASSIMO È P_{K_1} (AMMISSIBILE).

SE FACCIO ANCHE LA STIMA S SO CHE IL CARICO DI COLLASSO SI TROVA TRA P_{S_1} E P_{K_1}

FACENDO ALTRE STIME SI TROVA CHE

$$\min\{P_K\} = \max\{P_S\} = P_u$$

È UNA PROCEDURA ITERATIVA. SI ITERA FINTANTOCHÉ NON CONVERGONO P_K E P_S

ANALISI LIMITE ($h=0$, $\underline{p}=\underline{0}$)

MA PRIMA:

CAMPI STATICAMENTE AMMISSIBILI $\rightarrow \begin{cases} \operatorname{div} \underline{\sigma}^A + \underline{b}^A = \underline{0} \\ \underline{\sigma}^A \underline{n} = \underline{p}^A \\ f(\underline{\sigma}^A) \le 0 \end{cases}$ NUOVA CONDIZIONE (PLASTICITÀ)

PLV

$$\int_B \underline{\sigma}^A \cdot \underline{\varepsilon}^B \, dV = \int_B \underline{b}^A \cdot \underline{u}^B \, dV + \int_{\partial B} \underline{p}^A \cdot \underline{u}^B \, dS$$

IL PLV NON HA NESSUNA PRECISAZIONE SUL LEGAME COSTITUTIVO.
VALE PER OGNI LEGAME COSTITUTIVO (ANCHE PER QUELLO PLASTICO)

CAMPI CINEMATICAMENTE AMMISSIBILI

$$\begin{cases} \underline{\underline{\varepsilon}}^B = \dfrac{\nabla \underline{u}^B + \nabla^T \underline{u}^B}{2} \\ \underline{u}^B = \bar{\underline{u}}^B \end{cases}$$

TEOREMA ZERO

A COLLASSO, GLI INCREMENTI DI TENSIONE E DEFORMAZIONE ELASTICA SONO NULLI.

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{el,u} = \underline{\underline{0}} \,, \quad \dot{\underline{\underline{\sigma}}}_u = \underline{\underline{0}} \quad \forall \underline{x}$$

ultimo → collasso

DIM: PLV ($A \rightarrow \dot{u}$, $B \rightarrow \dot{u}$) → SOSTITUISCO IL CAMPO DI COLLASSO INCREMENTALE

$$\int_B \dot{\underline{\underline{\sigma}}}_u \cdot \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_u \, dV = \int_B \cancel{\dot{\underline{b}}_u}^{\,0} \cdot \dot{\underline{u}}_u \, dV + \int_{\partial B} \cancel{\dot{\underline{p}}_u}^{\,0} \cdot \dot{\underline{u}}_u \, dS = 0$$

DA DEF. COLLASSO — DA DEF. COLLASSO

$$\int_B \dot{\underline{\underline{\sigma}}}_u \cdot \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_u \, dV = 0 \qquad \text{cioè}$$

$$\int \dot{\underline{\underline{\sigma}}}_u \cdot \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{el,u} + \int \dot{\underline{\underline{\sigma}}}_u \cdot \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{pl,u} = 0 \qquad \text{SOSTITUISCO } \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{el} \text{ e } \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{pl}$$

$$\int \dot{\underline{\underline{\sigma}}}_u \cdot \underline{\underline{\mathbb{E}}}^{-1} \dot{\underline{\underline{\sigma}}}_u + \underbrace{\int \dot{\underline{\underline{\sigma}}}_u \cdot \cancel{\dot{\lambda}}^{\,0} \underline{\underline{Q}}_u}_{=0 \ (h=0)} = 0 \qquad \text{DA CUI}$$

$$\int \dot{\underline{\underline{\sigma}}}_u \, \underline{\underline{\mathbb{E}}}^{-1} \dot{\underline{\underline{\sigma}}}_u = 0$$

ESSENDO $\mathbb{E}$ DEFINITO POSITIVO ANCHE LA SUA INVERSA È DEFINITA POSITIVA

ALLORA

$$\int \underbrace{\dot{\underline{\sigma}}_u \, \mathbb{E}^{-1} \, \dot{\underline{\sigma}}_u}_{>0 \;\forall\, \dot{\underline{\sigma}}_u \neq \underline{0}} = 0 \quad \text{SSE} \quad \dot{\underline{\sigma}}_u = \underline{0}$$

E SICCOME

$$\dot{\underline{\varepsilon}}_{el,u} = \mathbb{E}^{-1} \, \dot{\underline{\sigma}}_u = \underline{0} \qquad \square$$

TEOREMA STATICO (limite inferiore)

"UNA SOLUZIONE STATICAMENTE AMMISSIBILE È IN EQUILIBRIO CON UN CARICO INFERIORE O TUT'ALPIÙ UGUALE A QUELLO DI COLLASSO"

$$\underline{b}_u = \alpha_u \, \bar{\underline{b}} \qquad \underline{P}_u = \alpha_u \, \bar{\underline{P}}$$

$$\underline{b}_s = \alpha_s \, \bar{\underline{b}} \qquad \underline{P}_s = \alpha_s \, \bar{\underline{P}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\alpha_s \leq \alpha_u}$$

STATICAMENTE AMMISSIBILE SE

$$\begin{cases} \operatorname{div} \underline{\sigma}_s + \underline{b}_s = \underline{0} \\ \underline{\sigma}_s \underline{n} = \underline{P}_s \\ f(\underline{\sigma}_s) \leq 0 \end{cases}$$

DIM | PLV ($A \to \underset{\text{STATICI}}{s}$, $B \to \underset{\text{COLLASSO}}{\dot{u}}$)

$$\int \underline{\underline{\sigma}}_s \cdot \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_u = \int \underline{b}_s \cdot \dot{\underline{u}}_u + \int \underline{p}_s \cdot \dot{\underline{u}}_u$$

$$= \frac{\alpha_s}{\alpha_u}\Big[\underbrace{\int \underline{b}_u \cdot \dot{\underline{u}}_u + \int \underline{p}_u \cdot \dot{\underline{u}}_u}_{\int \underline{\underline{\sigma}}_u \cdot \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_u}\Big] =$$

$\underline{b}_s = \alpha_s \underline{b} = \alpha_s \frac{\underline{b}_u}{\alpha_u}$

$$= \frac{\alpha_s}{\alpha_u} \int \underline{\underline{\sigma}}_u \cdot \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_u$$

MA

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_u = \cancel{\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{el,u}} + \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{pl,u} = \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{pl,u}$$

0 (TH. ZERO)

ALLORA, PORTANDO A SINISTRA IL SECONDO MEMBRO

$$\int \left(\underline{\underline{\sigma}}_s - \frac{\alpha_s}{\alpha_u} \underline{\underline{\sigma}}_u\right) \cdot \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{pl,u} = 0$$

SCRIVIAMO IL POSTULATO DI DRUCKER CON ($A \to u$, $B \to s$)

$$(\underline{\underline{\sigma}}_u - \underline{\underline{\sigma}}_s) \cdot \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{pl,u} \geq 0$$

PER CUI, RISCRIVENDOLO

$$\int \underline{\underline{\sigma}}_s \cdot \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{pl,u} = \frac{\alpha_s}{\alpha_u} \int \underline{\underline{\sigma}}_u \cdot \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{pl,u}$$

POSSO INSERIRE L'INTEGRALE ED È COMUNQUE VERA

$$\int \underline{\underline{\sigma}}_s \cdot \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{pl,u} \leq \int \underline{\underline{\sigma}}_u \cdot \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{pl,u}$$

→ SOSTITUISCO LA PRIMA NELLA SECONDA

$$\frac{\alpha_s}{\alpha_u} \underbrace{\int \underline{\underline{\sigma}}_u \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{pl,u}}_{>0\,?} \leq \underbrace{\int \underline{\underline{\sigma}}_u \cdot \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{pl,u}}_{>0\,?}$$

UTILIZZIAMO IL POSTULATO DI DRUCKER CON ($A \to u$, $B \to 0$)

$$(\underline{\underline{\sigma}}_u - \underline{0}) \cdot \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{pl,u} \geq 0 \iff$$

OK! POSSO DIVIDERE SENZA CAMBIARE IL SEGNO DELLA DISEQUAZIONE

ALLORA $\boxed{\alpha_s \leq \alpha_u}$

TEOREMA CINEMATICO (limite superiore)

"UN MECCANISMO DI COLLASSO CINEMATICAMENTE AMMISSIBILE È IN EQUILIBRIO CON UN CARICO SUPERIORE O TUTTALPIÙ UGUALE A QUELLO DI COLLASSO."

$$\underline{b}_u = \alpha_u \bar{\underline{b}} \quad , \quad \underline{p}_u = \alpha_u \bar{\underline{p}}$$

$$\underline{b}_K = \alpha_K \bar{\underline{b}} \quad , \quad \underline{p}_K = \alpha_K \bar{\underline{p}}$$

$$\boxed{\alpha_K \geq \alpha_u}$$

MECCANISMO DI COLLASSO CINEMATICAMENTE AMMISSIBILE

$$\begin{cases} \dot{\underline{u}}_K = \dot{\bar{\underline{u}}}_u \\ \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_K = \dfrac{\nabla \dot{\underline{u}}_K + \nabla^T \dot{\underline{u}}_K}{2} \\ \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{el,K} = \underline{\underline{0}} \end{cases}$$

DIM) PLV $(A \to K \; ; \; B \to K)$

$$\int \underline{\underline{\sigma}}_K \cdot \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_K = \int \underline{b}_K \, \dot{\underline{u}}_K + \int \underline{p}_K \cdot \dot{\underline{u}}_K$$

DA b_K A b_u :

$$\int \underline{\underline{\sigma}}_K \cdot \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_K = \frac{\alpha_K}{\alpha_u} \left[\int \underline{b}_u \cdot \dot{\underline{u}}_K + \int \underline{p}_u \cdot \dot{\underline{u}}_K \right] = \frac{\alpha_K}{\alpha_u} \int \underline{\underline{\sigma}}_u \cdot \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_K$$

DOVE

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_K = \cancel{\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{el,K}} + \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{pl,K} = \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{pl,K} \quad \text{ALLORA}$$

$$\int \underline{\underline{\sigma}}_K \cdot \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{pl,K} = \frac{\alpha_K}{\alpha_u} \int \underline{\underline{\sigma}}_u \cdot \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{pl,K} \quad (*)$$

"TEMPO"

P. DRUCKER CON $(A \to K,\ B \to u)$

$$(\underline{\underline{\sigma}}_K - \underline{\underline{\sigma}}_u) \cdot \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{pl,K} \geq 0$$

$$\int \underline{\underline{\sigma}}_K \cdot \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{pl,K} \geq \int \underline{\underline{\sigma}}_u \cdot \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{pl,K} \longrightarrow \text{SOSTITUISCO IN } (*)$$

ALLORA

$$\frac{\alpha_K}{\alpha_u} \int \underbrace{\underline{\underline{\sigma}}_u \cdot \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{pl,K}}_{\geq 0\,?} \geq \int \underline{\underline{\sigma}}_u \cdot \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{pl,K}$$

NON POSSO PROCEDERE POICHÉ ENTRAMBI HANNO $\underline{\underline{\sigma}}_u$

↳ POST. DRUCKER $(A \to K,\ B \to 0)$ → NO

$$(\underline{\underline{\sigma}}_u - 0) \cdot \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{pl,K} \geq 0$$

ALLORA SCRIVO, PORTANDO IL RAPPORTO A PRIMO MEMBRO (DELLA $(*)$)

$$\frac{\alpha_u}{\alpha_K} \int \underline{\underline{\sigma}}_K \cdot \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{pl,K} = \int \underline{\underline{\sigma}}_u \cdot \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{pl,K}$$

SOSTITUISCO NEL POSTULATO DI DRUCKER CALCOLATO SOPRA

$$\int \underline{\underline{\sigma}}_K \cdot \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{pl,K} \geq \frac{\alpha_u}{\alpha_K} \int \underline{\underline{\sigma}}_K \cdot \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{pl,K}$$

↳ DRUCKER CON $(A \to K,\ B \to 0)$

$$\int (\underline{\underline{\sigma}}_K \cdot \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{pl,K}) \geq 0 \to \text{SI ELIDONO}$$

ALLORA

$$\boxed{\alpha_K \geq \alpha_u}$$

AZIONE ASSIALE PLASTICA

CONSIDERANDO UN ELEMENTO CARICATO ASSIALMENTE.

$$N(\varepsilon) = \begin{cases} N_{el}(\varepsilon) = EA\varepsilon & \text{se } \varepsilon < \varepsilon_y \\ N_{pl} = EA\varepsilon_y = \sigma_y A = N_y = \\ \quad = N_u = N_{pl} & \text{se } \varepsilon > \varepsilon_y \end{cases}$$

Per $\varepsilon > \varepsilon_y \rightarrow \sigma = \sigma_y$

DATO CHE

$\frac{N_u}{N_y} = 1$ LA PLASTICITÀ NON DÀ AUMENTO DI RESISTENZA ASSIALE SEZIONALE

MA SE INSERISCO L'ELEMENTO E-P IN UNA STRUTTURA IPERSTATICA AVRÒ CHE

$$\boxed{P_y < P_u}$$

IN UNA STRUTTURA LO SNERVAMENTO E IL COLLASSO DI UN ELEMENTO NON VUOL DIRE IL COLLASSO DI UNA STRUTTURA!

"TEMPO"

$$\frac{N_u}{N_y} = 1$$

$$\frac{P_u}{P_y} > 1$$

LA STRUTTURA è IPERSTATICA

ISOSTATICA

ESEMPIO:

N_p = SOGLIA MASSIMA CHE PUÒ ESSERE SOPPORTATA DAI 3 ELEMENTI

LA STRUTTURA è IPERSTATICA (BASTEREBBERO 2 ASTE ANZICHÈ 3)

IL PRIMO SNERVAMENTO NON COINCIDE CON IL CARICO DI COLLASSO

CON L'ANALISI LIMITE POSSO ANALIZZARE LA STRUTTURA

ANALISI EVOLUTIVA: PARTO CON P NULLO e LO AUMENTO GRADUALMENTE

ANALISI LIMITE: MOLTO PIÙ COMPLESSA

ANALISI EVOLUTIVA OTTENGO TUTTO IL GRAFICO DI P-δ

DURANTE L'AUMENTO DEL CARICO, CAMBIERÀ IL LEGAME COSTITUTIVO ELASTICO

EQUILIBRIO

$$\begin{cases} N_1 + N_2 + N_3 = P \\ N_2 \, a + N_3 \cdot 2a = 0 \end{cases}$$

NON TENGO CONTO SE SONO IN FASE ELASTICA O PLASTICA.

SI MUOVE DI ROTOTRASLAZIONE

$$\frac{\delta_1 - \delta_2}{a} = \frac{\delta_2 - \delta_3}{a}$$

$$\boxed{\delta_1 + \delta_3 - 2\delta_2 = 0}$$

ANALISI EVOLUTIVA

DEVO TENERE CONTO DI ENTRAMBE LE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO

FASE 1

TUTTE LE 3 ASTE SONO ELASTICHE $\left(|N_i| \leq N_P, \ \forall i = 1,2,3\right)$

Legame Costitutivo

$$\begin{cases} N_1 = \dfrac{EA}{\ell} \delta_1 \\ N_2 = \dfrac{EA}{3\ell/2} \delta_2 \\ N_3 = \dfrac{EA}{3\frac{\ell}{2}} \delta_3 \end{cases}$$

CONSIDERANDO LE EQUAZIONI DI EQUILIBRIO SONO 6 EQ. IN 6 INCOGNITE, DA CUI SI RICAVA

$$\begin{cases} N_1 = \dfrac{15}{17} P \qquad N_2 = \dfrac{4}{17} P \\ N_3 = -\dfrac{2}{17} P \\ \delta_1 = \dfrac{15}{17} \dfrac{P\ell}{EA}, \quad \delta_2 = \dfrac{6}{17} \dfrac{P\ell}{EA} \\ \delta_3 = -\dfrac{3}{17} \dfrac{P\ell}{EA} \end{cases}$$

QUESTO VALE PER

$0 < P < P_y$

VALORE DI 1 SNERVAMENTO

L'ASTA PIÙ SOLLECITATA È LA PIÙ CORTA PERCHÉ

$N_1 \gg N_2, N_3 \rightarrow$

"TEMPO"

LA ASTA 1 SNERVA PER PRIMA PER

$$P = P_y = \frac{17}{15} N_p$$

(INVERTO LA $N_1 = \dots$) TALE CHE $N_1 = N_p$

CIOÈ:

$$N_1^* = N_p \qquad \delta_1^* = \frac{N_p \ell}{EA}$$

$$N_2^* = \frac{4}{15} N_p \qquad \delta_2^* = \frac{2}{5}\frac{N_p \ell}{EA}$$

$$N_3^* = -\frac{2}{15} N_p \qquad \delta_3^* = -\frac{1}{5}\frac{N_p \ell}{EA}$$

HO ANCORA RISORSA PLASTICA PRIMA DI ARRIVARE A ROTTURA (COLLASSO)

FASE 2

L'ASTA 1 È SNERVATA, MENTRE LE 2 e 3 SONO IN CAMPO ELASTICO

$$N_1 = N_p \quad , \quad |N_i| < N_p \quad , \quad \forall i = 2,3$$

$$P_y < P$$

STO STUDIANDO QUESTA FASE COME AGGIUNTA RISPETTO ALLA FASE 1

$$N_i = \underbrace{N_i^*}_{\text{DA FASE 1}} + \underbrace{\Delta N_i^*}_{?} \quad , \quad \delta_i = \delta_i^* + \Delta\delta_i^* \quad , \quad P = P_y + \Delta P^*$$

L'ASTA SI DEFORMA SENZA AUMENTARE IL CARICO

Legame Costitutivo

$$\begin{cases} N_1 = N_p \\ N_2 = \dfrac{EA}{3\frac{\ell}{2}} \delta_2 \\ N_3 = \dfrac{EA}{3\frac{\ell}{2}} \delta_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta N_1^* = 0 \rightarrow \text{NON PUÒ DARE PIÙ DI } N_p \\ \Delta N_2^* = \dfrac{EA}{3\frac{\ell}{2}} \Delta\delta_2^* \\ \Delta N_3^* = \dfrac{EA}{3\frac{\ell}{2}} \Delta\delta_3^* \end{cases}$$

Equilibrio

$$\begin{cases} \Delta N_1^* + \Delta N_2^* + \Delta N_3^* = \Delta P^* \\ \Delta N_2^* + 2\Delta N_3^* = 0 \end{cases}$$

Congruenza

$$\Delta\delta_1^* + \Delta\delta_3^* - 2\Delta\delta_2^* = 0$$

LE EQUAZIONI SCRITTE INIZIALMENTE SONO STATE RISCRITTE IN FUNZIONE DELLA FASE 2

CI SONO 6 EQ.NI IN 6 INCOGNITE $\rightarrow$ ΔN_1^* IN REALTÀ È NOTA

NELL'INCREMENTO DELLA FASE 2 LA STRUTTURA DIVENTA ISOSTATICA

SI DEVE RISOLVERE

$$\begin{cases} \Delta N_1^* = 0 \\ \Delta N_2^* = 2\Delta P^* \\ \Delta N_3^* = -\Delta P^* \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta \delta_1^* = \frac{15}{2}\frac{\Delta P^* \ell}{EA} \\ \Delta \delta_2^* = 3\frac{\Delta P^* \ell}{EA} \\ \Delta \delta_3^* = -\frac{3}{2}\frac{\Delta P^* \ell}{EA} \end{cases}$$

FINTANTOCHÉ LA PRIMA ASTA È PLASTICIZZATA e LE ALTRE 2 ELASTICHE LA FASE ② VA AVANTI

$$\begin{cases} N_1 = N_p \\ N_2 = \frac{4}{15}N_p + \overbrace{2\Delta P^*}^{\Delta N_2^*} \\ N_3 = -\frac{2}{15}N_p - \underbrace{\Delta P^*}_{\Delta N_3^*} \end{cases}$$

QUAL È IL LIMITE PER CUI LE ASTE 2 e 3 RIMANGANO IN CAMPO ELASTICO?

LA SECONDA A SNERVARE SARÀ LA ②

RICAVO ΔP^*_{**} PONENDO $N_2 = N_p$

$$N_2 = \frac{4}{15}N_p + 2\Delta P^* \rightarrow \Delta P^*_{**} = \frac{11}{30}N_p$$

PERCIÓ

2 aste snervate

$$P^{**} = P_y + \Delta P^*_{**} = \frac{45}{30}N_p$$

$$\delta_1^{**} = \frac{15}{4}\frac{N_p \ell}{EA}$$

SE AVESSI AVUTO TANTE ASTE AVREI SEMPRE MENO RIGIDEZZA.
A RIGIDEZZA DELLE ASTE NULLA LA LABILITÀ INCREMENTA

FASE 3

A QUESTO PUNTO SI SNERVA ANCHE L'ASTA 2

EQUILIBRIO:

$$\begin{cases} +\uparrow: N_p + N_p + N_3 = P \\ \circlearrowleft A \quad N_p + 2N_3 = 0 \end{cases}$$

SE P È NOTA, SI HANNO 2 EQUAZIONI IN 1 INCOGNITA.
IL SISTEMA È LABILE. SI HA UNA LABILITÀ INCREMENTALE:

FASE 1 IPERSTATICO
FASE 2 ISOSTATICO
FASE 3 LABILE

IL CARICO DI COLLASSO VALE

$$P = P^{**} = P_u$$

QUANDO HO LABILITÀ INCREMENTALE, LA RIGIDEZZA DELLE ASTE RISULTA NULLA

SARÀ MIO INTERESSE CAPIRE COME RISOLVERE, MEDIANTE L'ANALISI LIMITE, IL VALORE DEL CARICO CRITICO

$$P^* = P_u = \frac{3}{2} N_p$$

L'ULTIMA ASTA NON SNERVA! POICHÉ LE ALTRE 2 ASTE SONO GIÀ SNERVATE PORTANO A ROTTURA (COLLASSO) LA STRUTTURA e IL CARICO NON PUÒ PIÙ AUMENTARE.

ANALISI LIMITE STATICA: CAMPO STATICAMENTE AMMISSIBILE

Equilibrio:

$$\begin{cases} N_1 + N_2 + N_3 = P \\ N_2 \cancel{a} + N_3 2 \cancel{a} = 0 \end{cases}$$

INIZIALMENTE LE 3 ASTE SI TROVANO IN CAMPO ELASTICO $|N_i| \leq N_p$

STATICO STIMA 1

FISSIAMO

S_1: $N_1 = N_P \Rightarrow \begin{cases} N_2 = 2(P - N_P) \\ N_3 = -P + N_P \end{cases}$

IL VALORE MASSIMO OTTENIBILE NEL DOMINIO STATICO è

$$P_{S_1} = \frac{3}{2} N_P$$

Stima statica

DEVE AVVICINARSI IL PIÙ POSSIBILE A P_u

PER AVERE UNA STIMA ANCORA MIGLIORE, INVENTO UN ALTRO CAMPO STATICAMENTE AMMISSIBILE

STATICO STIMA 2

S_2: FISSO $N_2 = N_P$

DALL'EQUILIBRIO OTTENGO

$$\begin{cases} N_1 = P - \frac{N_P}{2} \\ N_3 = -\frac{N_P}{2} \end{cases}$$

IL VALORE MASSIMO È SEMPRE A $\frac{P}{N_P} = \frac{3}{2}$ e VALE

$$P_{S_2} = \frac{3}{2} N_P$$

STATICO STIMA 3

S_3: IMPONGO $N_3 = -N_p \Rightarrow N_2 = 2N_p$

APPLICO IL TH DEI LIMITI (STATICO)

IL CAMPO NON È STATICAMENTE AMMISSIBILE POICHÉ NON È VERIFICATA LA $|N_i| \leq N_p \quad \forall i = 1,2,3$

ANALISI LIMITE CINEMATICA

DEVO CONSIDERARE IL MECCANISMO DI COLLASSO:

QUANDO HO LABILITÀ INCREMENTALE

$h_0 \geq 2$ (aste snervate)

L'APPROCCIO CINEMATICO FORNISCE UN CARICO SIA LA POTENZA

$P = 0 \rightarrow P_{interna} = P_{esterna}$

LA POTENZA FORNITA DALL'ESTERNO VIENE DISSIPATA INTERNAMENTE

STIMA CINEMATICA 1

K_1: LE ASTE $\boxed{1}$ e $\boxed{2}$ SONO SNERVATE IN TRAZIONE.

A COLLASSO SI HA DEFORMAZIONE INCREMENTALE ELASTICA NULLA

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_{el,u} = 0 \\ \dot{\varepsilon}_{pl,u} \neq 0 \end{cases}$$

IL MECCANISMO DI COLLASSO È RIGIDO

ESSENDO $|N_3| < N_p$ e APPLICANDO IL TEOREMA ZERO PER CUI

$\dot{\varepsilon}_{el,u} = 0$

SI RICAVA CHE $\dot{\delta}_3 = 0$.

L'ASTA 3 È ANCORA IN CAMPO ELASTICO

LE ASTE 1 e 2 CONTINUANO A PLASTICIZZARE. SI HA ALLORA:

$\dot{\varepsilon}_{pl,u} \neq 0$

GLI SPOSTAMENTI DEVONO COMUNQUE SODDISFARE LA CONDIZIONE DI CONGRUENZA PER CUI

$$\delta_1 + \delta_3 - 2\delta_2 = 0$$

(RICAVATA INIZIALMENTE).

LA RELAZIONE VALE ANCHE PER GLI INCREMENTI

$$\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_3 - 2\dot{\delta}_2 = 0$$

ED ESSENDO $\dot{\delta}_3 = 0$

$$\dot{\delta}_1 = 2\dot{\delta}_2$$

N_p e $\dot{\delta}_1$ HANNO VERSI OPPOSTI

$\uparrow N_p$
$\downarrow \dot{\delta}_1, \dot{\delta}_2$

LA POTENZA P

$$P = P_{K_1} \cdot \dot{\delta}_1 - N_p \dot{\delta}_1 - N_p \dot{\delta}_2 = 0$$

CARICO P ASSOCIATO AL CINEMATISMO (1)

$\dot{\delta}_3$ NON DÀ CONTRIBUTO

SI RICAVA CHE, ESSENDO INOLTRE $\dot{\delta}_1 = 2\dot{\delta}_2$

$$\boxed{P_{K_1} = \frac{3}{2} N_p}$$

$P_{S_1} < P_u < P_{K_1}$ MA POICHÉ $P_{S_1} = P_{K_1}$

$$\boxed{P_u = \frac{3}{2} N_p}$$ CARICO DI COLLASSO

POTREI INTERROMPERE L'ANALISI, MA PROSEGUO PER CAPIRE COME FUNZIONA.

STIMA CINEMATICA (2)

(K_2): SUPPONIAMO CHE LE ASTE [1] e [3] SIANO SOLLECITATE RISPETTIVAMENTE IN TRAZIONE e COMPRESSIONE (MIA DISCREZIONE) e CHE LA [2] SIA ELASTICA.

DALLA CONGRUENZA

$$\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_3 - \cancel{2\dot{\delta}_2}^{\,0} = 0$$

$$|\dot{\delta}_3| = |\dot{\delta}_1|$$

IMPONGO POTENZA NULLA

$$P = P_{K_2} \cdot \dot{\delta}_1 - N_p \dot{\delta}_1 - (-N_p)\dot{\delta}_3 = 0$$

STIMA 2

$$= P_{K_2} \cdot \cancel{\dot{\delta}_1} - N_p \cancel{\dot{\delta}_1} - N_p \cancel{\dot{\delta}_1} = 0$$

$\dot{\delta}_3 = -\dot{\delta}_1$

$$\boxed{P_{K_2} = 2 N_p}$$ → QUESTO CINEMATISMO DÀ UN RISULTATO PEGGIORE PERCHÉ

$P_{K_2} > P_{K_1}$

DEVO SCEGLIERE IL VALORE PIÙ PICCOLO

STIMA CINEMATICA 3

K_3: IMPONGO CHE TUTTE LE AREE SIANO PLASTICIZZATE A TRAZIONE

POICHÉ IL NODO 2 SI TROVA A METÀ

$$\dot{\delta}_2 = \frac{\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_3}{2}$$

LA POTENZA

$$P = P_{K_3} \cdot \dot{\delta}_1 - N_p \dot{\delta}_1 - N_p \dot{\delta}_2 - N_p \dot{\delta}_3 = 0$$

SOSTITUENDO $\dot{\delta}_2$

$$P = P_{K_3} \dot{\delta}_1 - N_p \dot{\delta}_1 - N_p \frac{\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_3}{2} - N_p \dot{\delta}_3 = 0$$

OTTENGO P_{K_3} IN FUNZIONE DI $\dot{\delta}_1$ e $\dot{\delta}_3$

$$P_{K_3} = N_p \left[\frac{3}{2} + \frac{3}{2} \underbrace{\frac{\dot{\delta}_3}{\dot{\delta}_1}}_{>0} \right]$$

IL MINIMO VALORE DI P_{K_3} È

$$\min_{\frac{\dot{\delta}_3}{\dot{\delta}_1} > 0} \{P_{K_3}\} = \frac{3}{2}$$

CORRISPONDENTE A $\dot{\delta}_3 = 0$ CHE CORRISPONDE AL CINEMATISMO K_1

RICAPITOLANDO: L'ANALISI EVOLUTIVA DÀ TUTTO IL GRAFICO MENTRE L'ANALISI LIMITE DÀ IL VALORE DEL COLLASSO. DA ENTRAMBI OTTENGO IL CARICO DI COLLASSO CON HARDENING NULLO ($h=0$)

ESEMPIO → ANALISI EVOLUTIVA

LE 2 FORZE POSSONO ESSERE VISTE COME UN'UNICA FORZA CON ANGOLO FISSATO E MODULO CHE VARIA PROPORZIONALMENTE.

Equilibrio

$$\begin{cases} (N_1+N_3)\frac{\sqrt{2}}{2}+N_2=F \\ (N_1-N_3)\frac{\sqrt{2}}{2}=H \end{cases}$$

3 ~~AZIONI~~ INTERNE IN 2 EQUAZIONI ↓ 1 VOLTA IPERSTATICA

LA CONDIZIONE DI COLLASSO NON COINCIDE CON IL SNERVAMENTO PRIMO

$$P_u > P_y$$

Congruenza

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \dfrac{(\delta_v+\delta_h)\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}\,\ell} \\ \varepsilon_2 = \dfrac{\delta_v}{\ell} \\ \varepsilon_3 = \dfrac{(\delta_v-\delta_h)\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}\,\ell} \end{cases}$$

→ AUMENTANDO δ_v e δ_h LA ASTA 1 SI ALLUNGA

FASE $\boxed{0}$: TUTTO ELASTICO

$$\begin{cases} N_1 = EA\,\varepsilon_1 = EA\,\dfrac{(\delta_v+\delta_h)}{2\ell} \\ N_2 = EA\,\varepsilon_2 = EA\,\dfrac{\delta_v}{\ell} \\ N_3 = EA\,\varepsilon_3 = EA\,\dfrac{(\delta_v-\delta_h)}{2\ell} \end{cases}$$

5 EQUAZIONI IN 5 INCOGNITE

Soluzione elastica

$$\delta_v = \frac{F\ell}{EA}(2-\sqrt{2}), \quad \delta_h = \frac{H\ell}{EA}\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\begin{cases} N_1 = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}F + \dfrac{\sqrt{2}}{2}H \\ N_2 = (2-\sqrt{2})F \\ N_3 = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}F - \dfrac{\sqrt{2}}{2}H \end{cases}$$

Se $\{|N_1|, |N_2|, |N_3|\} \le N_p$

Se $F=0$

$$\begin{cases} N_1 = -N_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} H \\ N_2 = 0 \end{cases}$$

Se $|N_1| = N_p \rightarrow H = \sqrt{2}\, N_p \rightarrow N_3 = -N_p$

LA STRUTTURA È ISOSTATICA MA, ALLO SNERVAMENTO DI (1) SNERVA ANCHE (3) e LA STRUTTURA DIVENTA LABILE. PERCIÒ

$$\boxed{H_u = \sqrt{2}\, N_p}$$

Se $H=0$

$$\begin{cases} N_1 = N_3 = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2} F \\ N_2 = (2-\sqrt{2}) F \end{cases}$$

SNERVA PRIMA L'ASTA ② PER

$$F^* = N_p \left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Longrightarrow \begin{cases} N_2 = N_p \\ N_1 = N_3 = \dfrac{N_p}{2} \end{cases}$$

DI QUANTO PUÒ AUMENTARE F PER FAR COLLASSARE ① e ③?

SUCCESSIVAMENTE:

$$(\Delta N_1 + \Delta N_3)\frac{\sqrt{2}}{2} = \Delta F$$

$$(\Delta N_1 - \Delta N_3)\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\rightarrow \Delta N_1 = \Delta N_3 = \frac{\Delta F}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{\Delta F_*^{**} = \sqrt{2}\,\frac{N_p}{2}}$$

$$\boxed{F^{**} = F^* + \Delta F_*^{**} = (1+\sqrt{2})N_p}$$

VALORE IN CUI SI PLASTICIZZA LA SECONDA ASTA

POICHÉ PLASTICIZZANO SIA ① CHE ③ LA STRUTTURA È LABILE E HA COLLASSO.

IL COMPORTAMENTO IN QUESTO CASO È

$$\begin{cases} F = R\sin\alpha \\ H = R\cos\alpha \end{cases}, \quad \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \{F, H\} \geq 0$$

SE $\{F, H\} > 0$ LA ③ È QUELLA MENO CARICATA E QUINDI NON SNERVERÀ MAI PER PRIMA.

CASO $\boxed{I}$: SNERVA ① PER PRIMA

$$N_1 = \boxed{\frac{2-\sqrt{2}}{2} F + \frac{\sqrt{2}}{2} H = N_p}$$

CONDIZIONE DI SNERVAMENTO PER L'ASTA ①

↳ RAPPRESENTANDOLA COME UNA RETTA

$$\frac{F}{N_p} + (1+\sqrt{2})\frac{H}{N_p} = (2-\sqrt{2})$$

RAPPRESENTIAMOLA NEL GRAFICO DI PAG 46

CASO $\boxed{II}$: SNERVA PRIMA ②

$$N_2 = (2-\sqrt{2})F = N_p \longrightarrow \frac{F}{N_p} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

COSA SUCCEDE NEL DOMINIO PLASTICO?
SUPPONIAMO DIVERSE INCLINAZIONI DI R. IN FUNZIONE A CHE TRATTO PLASTICO INTERSECA SNERVERÀ PRIMA L'ASTA INTERSECATA

$\boxed{I}$: DOPO LO SNERVAMENTO DI $\boxed{1}$

$$\begin{cases} (N_p + N_3)\frac{\sqrt{2}}{2} + N_2 = F \\ (N_p - N_3)\frac{\sqrt{2}}{2} = H \end{cases}$$

LA STRUTTURA È ISOSTATICA

$$\begin{cases} N_2 = H + F - \sqrt{2}\,N_p \\ N_3 = N_p - \sqrt{2}\,H \end{cases}$$

$\boxed{I.I}$: DOPO $\boxed{1}$ SNERVA $\boxed{2}$

$$N_2 = N_p \longrightarrow \frac{H+F}{N_p} = 1+\sqrt{2}$$

$\boxed{I.II}$: DOPO $\boxed{1}$ SNERVA $\boxed{3}$

$$N_3 = -N_p \longrightarrow \frac{H}{N_p} = \sqrt{2}$$

AUMENTANDO H N_3 CALA FINO A $-N_p$

RIPORTANDOLE NEL GRAFICO DI PAG. 46;

$\boxed{II}$: DOPO LO SNERVAMENTO DI $\boxed{2}$

$$\begin{cases} (N_1 + N_3)\frac{\sqrt{2}}{2} + N_p = F \\ (N_1 - N_3)\frac{\sqrt{2}}{2} = H \end{cases}$$

$$N_1 = \frac{F + H - N_p}{\sqrt{2}}$$

$$N_3 = \frac{F - H - N_p}{\sqrt{2}}$$

$\boxed{II.I}$ DOPO $\boxed{2}$ SNERVA $\boxed{1}$

$$N_1 = N_p \longrightarrow \frac{H}{N_p} + \frac{F}{N_p} = 1 + \sqrt{2}$$

coincide con $\boxed{I.I}$

$\boxed{II.II}$ DOPO $\boxed{2}$ SNERVA $\boxed{3}$

NON SI È CERTI PER CHE SECONDO SNERVA $\boxed{3}$

$$|N_3| = N_p$$

(A) Se $F - H - N_p > 0 \Rightarrow N_3 = +N_p \rightarrow \frac{F - H}{N_p} = 1 + \sqrt{2}$

(B) Se $F - H - N_p < 0 \Rightarrow N_3 = -N_p \rightarrow \frac{H - F}{N_p} = \sqrt{2} - 1$

QUESTE RETTE NON DANNO NESSUN INTERVALLO SIGNIFICATIVO

RICORDANDO CHE LA $\boxed{3}$ SNERVA PER ULTIMA.

"TEMPO"

ANALISI LIMITE

STUDIAMO LO STESSO PROBLEMA CON L'ANALISI LIMITE.

METODO STATICO

SAPPIAMO

$$\begin{cases} (N_1+N_3)\dfrac{\sqrt{2}}{2} + N_2 = F \\ (N_1-N_3)\dfrac{\sqrt{2}}{2} = H \\ |N_i| \le N_p \end{cases}$$

S_1 $\boxed{N_1 = N_p}$

$$\begin{cases} N_2 = H + F - \sqrt{2}\,N_p \\ N_3 = N_p - \sqrt{2}\,H \end{cases}$$

$$\begin{cases} |N_2| = |H+F-\sqrt{2}\,N_p| \le N_p \\ |N_3| = |N_p - \sqrt{2}\,H| \le N_p \end{cases} \longrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2}-1 \le \dfrac{H+F}{N_p} \le \sqrt{2}+1 \\ 0 < \dfrac{H}{N_p} < \sqrt{2} \end{array} \right.$$

→ ABBIAMO TROVATO LA FRONTIERA DI ~~INSERVIMENTO~~ COLLASSO GIÀ IN S_1

S_2 $\boxed{N_2 = N_p}$

$$\begin{cases} N_1 = \dfrac{F+H-N_p}{\sqrt{2}} \\ N_3 = \dfrac{F-H-N_p}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \begin{cases} |N_1| = \left|\dfrac{F+H-N_p}{\sqrt{2}}\right| \le N_p \\ |N_3| = \left|\dfrac{F-H-N_p}{\sqrt{2}}\right| \le N_p \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 1-\sqrt{2} \le \dfrac{F+H}{N_p} \le 1+\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} \le \dfrac{F-H}{N_p} \le 1+\sqrt{2} \end{cases}$$

→ COINCIDE CON IL CASO S_1

S_2 È PIÙ VASTO DI S_1

METODO CINEMATICO

AFFINCHÉ CI SIA COLLASSO DEVO AVERE ALMENO 2 ASTE PLASTICIZZATE.

K_1 $N_1 = N_p$ $N_3 = -N_p$

(1) SCELGO LA DIREZIONE DI $\dot{\delta}$

(2) CONSIDERO LA PLASTICIZZAZIONE DI CONSEGUENZA.

POICHÉ L'ASTA 2 È ELASTICA IL PUNTO (NODO) SOPRA NON PUÒ SPOSTARSI IN VERTICALE, PERCHÉ L'ASTA 2 SI DEFORMEREBBE ELASTICAMENTE IN MODO INCREMENTALE.

LO SPOSTAMENTO SARÀ SOLO IN DIREZIONE ORIZZONTALE.

PER AUMENTARE IL CARICO PLASTICO DEVO MUOVERMI SOLO VERSO DESTRA, ALTRIMENTI SCARICHEREI ELASTICAMENTE.

LA POTENZA:

$$P = F \cdot \cancel{0} + H \cdot \cancel{\dot{\delta}} - N_p \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{\delta} - N_p \frac{\sqrt{2}}{2} \cancel{\dot{\delta}} = 0$$

DA CUI $\boxed{H = \sqrt{2} N_p}$

K_2 3 ASTE PLASTICIZZATE CON VERSO POSITIVO

$N_1 = N_2 = N_3 = N_p$

ORIZZONTALMENTE N_p SI ELIDE (ALTRIMENTI AVREBBE DEFORMAZIONE PLASTICA E NON È POSSIBILE).

$\dot{\delta}$ È VERTICALE

$$P = F \cdot \cancel{\dot{\delta}} + \cancel{H \cdot 0} - N_p \cancel{\dot{\delta}} - 2 N_p \frac{\sqrt{2}}{2} \cancel{\dot{\delta}} = 0 \quad \boxed{F = (1+\sqrt{2}) N_p}$$

K3

Se $\beta \in [0, \frac{\pi}{4}]$

$$P = H\dot{\delta}\cos\beta + F\dot{\delta}\sin\beta - \sqrt{2}N_p\dot{\delta}\cos\beta - N_p\dot{\delta}\sin\beta = 0$$

$$\boxed{H + F\tan\beta = N_p[\sqrt{2} + \tan\beta]}$$

Se $\beta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$

$$P = H\dot{\delta}\cos\beta + F\dot{\delta}\sin\beta - \dot{\delta}\sin\beta(1+\sqrt{2})N_p = 0$$

$$\boxed{\frac{H}{\tan\beta} + F = N_p(1+\sqrt{2})}$$

Date 23/09/2019

FLESSIONE PLASTICA

ANCHE A LIVELLO SEZIONALE ABBIAMO

$$\frac{M_u}{M_y} \geq 1$$

→ se TELAIO ISOSTATICO

$$\frac{P_u}{P_y} = \frac{M_u}{M_y} > 1$$

↓

NELLA RETICOLARE POTEVO ESSERE LIMITATO A 1

L'IPOTESI DI NAVIER RIMANE VALIDA: LE SEZIONI RIMANGONO PIANE:

$$\varepsilon(y) = \chi \cdot y \quad \forall \chi$$

SEZIONI A DOPPIO ASSE DI SIMMETRIA

SUPPONIAMO CHE LA SEZIONE SIA SOLLECITATA A CURVATURA CRESCENTE.

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E}$$

se $\chi = \chi_y \rightarrow \varepsilon\left(\pm\frac{h}{2}\right) = \chi_y\left(\pm\frac{h}{2}\right) = \pm\varepsilon_y$

$$\boxed{\chi_y = \frac{2\varepsilon_y}{h}}$$

$$M = \int_A \sigma y \, dA = \int_{A_{el}} \overbrace{E \cdot \varepsilon(y)}^{\sigma = E\varepsilon} y \, dA + \underbrace{\int_{A_{pl}^+} \sigma_y \cdot y \, dA}_{\text{compressione}} + \underbrace{\int_{A_{pl}^-} -\sigma_y \, y \, dA}_{\text{trazione}} =$$

$-y$ coordinate negative

$$= \int_{A_{el}} E \cdot \varepsilon(y) y \, dA + 2 \int_{A_{pl}^+} \sigma_y \cdot y \, dA =$$

$$= \int_{A_{el}} E \chi y^2 \, dA + 2 \int_{A_{pl}^+} \sigma_y \cdot y \, dA =$$

$$= E\chi \underbrace{\int_{A_{el}} y^2 \, dA}_{J_{el}} + 2\sigma_y \underbrace{\int_{A_{pl}^+} y \, dA}_{S_{pl}^+}$$

$$M = E J_{el} \chi + 2 \sigma_y S_{pl}^+$$

BISOGNEREBBE SCRIVERE

$$M(\chi) = E J_{el}(\chi) \chi + 2 \sigma_y S_{pl}^+(\chi)$$

ALL'AUMENTARE DI χ CAMBIANO LE REGIONI PLASTICHE ed ELASTICHE e QUINDI $\bar{y}$

SAPPIAMO CHE

$$\varepsilon(\pm \bar{y}) = \pm \chi \cdot \bar{y} = \pm \varepsilon_y$$

$$\bar{y} = \frac{\varepsilon_y}{\chi} \leq \frac{h}{2}$$

CIOÈ

$$\boxed{\bar{y} = \begin{cases} \frac{h}{2} & \text{se } \chi \leq \chi_y = \frac{2\varepsilon_y}{h} \\ \frac{h}{2}\frac{\chi_y}{\chi} & \text{se } \chi > \chi_y \end{cases}}$$

IL LEGAME $M-\chi$

$$M(\chi) = E J_{ee}(\chi)\chi + 2\sigma_y S^+_{pe}(\chi)$$

È NON LINEARE

⊙ LIMITE ELASTICO

$$\chi = \chi_y \rightarrow \varepsilon\left(\pm \frac{h}{2}\right) = \pm \varepsilon_y \rightarrow \bar{y} = \frac{h}{2}$$

$$\begin{cases} E J_{ee}(\chi) = E J & \text{(dell'intera sezione)} \\ S^+_{pe}(\chi) = 0 \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \boxed{M(\chi = \chi_y) = E J \chi_y} = W \sigma_y$$

MODULO DI RESISTENZA ELASTICO DELLA SEZIONE

$$\boxed{W = \frac{M_y}{\sigma_y} = \frac{J}{\frac{h}{2}}}$$

⊙ COLLASSO PLASTICO

$$\chi \rightarrow \infty; \quad \bar{y} \rightarrow 0;$$

$$\begin{cases} E J_{ee}(\chi) = 0 \\ S^+_{pe}(\chi) = S^+_x \end{cases} \rightarrow \boxed{M(\chi \rightarrow \infty) = 2\sigma_y S^+_x = Z \sigma_y}$$

$$\boxed{Z = 2 S^+_x}$$

MODULO DI RESISTENZA PLASTICO DELLA SEZIONE

$+\sigma_y$

$$\boxed{\frac{M_{pl}}{M_y} = \frac{Z\,\sigma_y}{W\,\sigma_y} = \frac{Z}{W} = \frac{\cancel{2}\,S_x^{+}}{S}\,\frac{h}{\cancel{2}} = \underbrace{\alpha}_{\text{FATTORE DI FORMA}} \geq 1}$$

AUMENTANDO LA CURVATURA LA PLASTICITÀ SI DIFFONDE (NON TUTTA LA SEZIONE È PLASTICIZZATA COME NEL CARICO ASSIALE) e QUINDI AUMENTA LA RESISTENZA.

ALLORA

$$\frac{M(\chi)}{M_y} = \alpha\left[1 - f\left(\frac{\chi_y}{\chi}\right)\right], \quad \chi \geq \chi_y$$

?

SEZIONE RETTANGOLARE

Fase Elastica

$$M(x) = EJ\,x = \frac{bh^3}{12}\,x$$

$$W = \frac{2J}{h} = \frac{bh^2}{6}$$

Fase Elasto - Plastica

$$\begin{cases} M = R_e\, d_e + R_p\, d_p \\ R_e = b\,\sigma_y\,\frac{\bar{y}}{2} \\ R_p = b\,\sigma_y\left(\frac{h}{2}-\bar{y}\right) \\ d_e = 2\cdot\frac{2\bar{y}}{3} \\ d_p = h - 2\,\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}-\bar{y}\right) \overset{!}{=} \frac{h}{2}+\bar{y} \end{cases}$$

$$M(\bar{y}) = b\,\sigma_y\,\frac{\bar{y}}{2}\cdot\frac{4\bar{y}}{3} + b\,\sigma_y\left(\frac{h}{2}-\bar{y}\right)\left(\frac{h}{2}+\bar{y}\right)$$

$$= b\,\sigma_y\left[\frac{2\bar{y}^2}{3}+\frac{h^2}{4}-\bar{y}^2\right] = \frac{bh^2}{4}\,\sigma_y\left[1-\frac{4}{3}\left(\frac{\bar{y}}{h}\right)^2\right],\quad \bar{y}\in\left[0,\frac{h}{2}\right]$$

$$x : \frac{h}{2} = x_y : \bar{y} \longrightarrow \bar{y} = \frac{x_y}{x}\,\frac{h}{2}$$

$$\frac{\bar{y}}{h} = \frac{x_y}{2x} \longrightarrow \boxed{M(x) = \sigma_y\,\frac{bh^2}{4}\left[1-\frac{1}{3}\left(\frac{x_y}{x}\right)^2\right]}$$

Se $x = x_y$ $\quad M(x_y) = \underbrace{\frac{bh^2}{6}}_{W}\,\sigma_y = M_y$

Se $x \to \infty$ $\quad M_{pl} = \sigma_y\,\frac{bh^2}{4}$ $\quad \frac{3}{2}$

$$\alpha = \frac{M_{pl}}{M_y} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

SEZIONE CIRCOLARE

$$W = \frac{\pi d^3}{32}$$

$$Z = 2 \underbrace{\frac{\pi d^2}{8}}_{\frac{A}{2}} \underbrace{\frac{2d}{3\pi}}_{d_G}$$

$$\alpha = \frac{Z_1}{W} = \frac{16}{3\pi} \simeq 1.70$$

SEZIONE ROMBOIDALE

$$\frac{A}{2} = \frac{bh}{4}$$

$$W = \frac{bh^2}{24}$$

$$Z = 2 \underbrace{\frac{bh}{4}}_{\frac{A}{2}} \underbrace{\frac{h}{6}}_{d_G}$$

$$\alpha = \frac{Z}{W} = 2$$

Date

SEZIONE A DOPPIA T

$h_w = \gamma h$

$b_w = \beta b$ $\quad \{\beta, \gamma\} \in [0,1]$

$$J_x = \frac{bh^3}{12} - \left(\frac{(b-b_w)h_w^3}{12}\right) = \frac{bh^3}{12}\left[1-(1-\beta)\gamma^3\right]$$

$$W_x = 2\frac{J_x}{h} = \frac{bh^2}{6}\left[1-(1-\beta)\gamma^3\right]$$

$$Z_x = 2S_x^+ = \frac{bh^2}{4}\left[1-(1-\beta)\gamma^2\right]$$

$$S_x^+ = \frac{bh}{2}\cdot\frac{h}{4} - (b-b_w)\frac{h_w}{2}\frac{h_w}{4} = \frac{bh^2}{8}\left[1-(1-\beta)\gamma^2\right]$$

$$\boxed{\alpha_x = \frac{Z_x}{W_x} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1-(1-\beta)\gamma^2}{1-(1-\beta)\gamma^3}} \leq \frac{3}{2}$$

$\leq 1 \quad \forall \beta, \gamma$

MA MENO RISERVA PLASTICA RISPETTO ALLA SEZIONE RETTANGOLARE

(*) Spessore sottile per anima e ali

$\gamma = 1-\varepsilon$

$\beta = \varepsilon$

$\varepsilon \to 0$

$$\alpha_x = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{3}{2}\,\frac{1-(1-\varepsilon)^3}{1-(1-\varepsilon)^4} = \frac{9}{8} = 1.125$$

(*) Anima molto più sottile delle ali

$\gamma = 1-\varepsilon$

$\beta = \varepsilon^2$ $\quad \alpha_x = \lim_{\varepsilon\to 0} \dots = 1$

$\varepsilon \to 0$

(*) Ali molto più sottile dell'anima

$\gamma = (1-\varepsilon)^2$

$\beta = \varepsilon$

$\varepsilon \to 0$

$\alpha_x = \lim_{\varepsilon\to 0} \dots = \frac{3}{2} \rightarrow$ RETTANGOLO

"TEMPO"

SEZIONE A UN ASSE DI SIMMETRIA

$\chi < \chi_y$
n-n è baricentrico in campo elastico

$\chi \to \infty$

IN CAMPO PLASTICO L'ASSE NEUTRO SI SPOSTA DAL BARICENTRO

$$R_c - R_T = 0 \rightarrow \boxed{R_c = R_T}$$

$$R_c = \sigma_y \cdot A_c$$
$$R_T = \sigma_y \cdot A_T \rightarrow \boxed{A_c = A_T}$$

A COLLASSO PLASTICO
n è ASSE DI EQUISUPERFICIE

IL MOMENTO DI COLLASSO

$$M_{pl} = R_c d_c + R_T \cdot d_T = \sigma_y \frac{A}{2}\left(|d_c| + |d_T|\right)$$

$$Z_1 = \frac{M_{pl}}{\sigma_y} = \frac{A}{2}\left(|d_c| + |d_T|\right)$$

Se doppia simmetria

$$|d_c| = |d_T| \rightarrow \underline{Z_1 = 2\, S_x^+}$$

SEZIONE A TRIANGOLO ISOSCELE

$$J_x = \frac{bh^3}{36}$$

$$W_{x,inf} = \frac{J_x}{h/3} = \frac{bh^2}{12}$$

$$W_{x,sup} = \frac{J_x}{2/3\, h} = \frac{bh^2}{24} < W_{x,inf}$$

SNERVA PRIMA LA PARTE INFERIORE.

$$\frac{b\left(1-\frac{d}{h}\right)\cdot d}{2} = \frac{b\left(1-\frac{d}{h}\right)(h-d)}{2}$$

$$\frac{d}{h}\left(2-\frac{d}{h}\right) = \left(1-\frac{d}{h}\right)^2$$

$$\frac{d_{1/2}}{h} = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{4} = 1 \mp \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{\frac{d}{h} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0.793 < \frac{1}{3}}$$

Date

$$d_T = \frac{b_1 d \frac{d}{2} + (b_2 - b_1)\frac{d}{2}\,\frac{2d}{3}}{(b_1+b_2)\frac{d}{2}} =$$

$$= \frac{b_1 + 2b_2}{b_1+b_2}\,\frac{d}{3} = \frac{8-5\sqrt{2}}{6}\,h = 0.154\,h$$

$$\begin{cases} b_1 = b\left(1-\frac{d}{h}\right) = \frac{b}{\sqrt{2}} \\ b_2 = b \\ d = \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)h \end{cases}$$

$$d_c = \frac{1}{3}\,\frac{h}{\sqrt{2}}$$

$$A_c = A_T = \frac{A}{2} = \frac{bh}{4}$$

$$Z_x = \frac{A}{2}\left(|d_c| + |d_T|\right) = \frac{bh}{4}\left[\frac{8-5\sqrt{2}}{6}h + \frac{1}{3}\,\frac{h}{\sqrt{2}}\right] = \frac{2-\sqrt{2}}{6}\,bh^2$$

$$\boxed{\alpha_x = \frac{Z_x}{W_{x\,sup}} = 4(2-\sqrt{2}) \simeq 2.343}$$

SEZIONE A T SOTTILE

$$A = b\cdot t + b\cdot t = 2bt$$

$$y_G = \frac{b\cdot t\cdot\frac{b}{2} + b\cdot t\cdot b}{2bt} = \frac{3}{4}\,b$$

$$J_x = \frac{t b^3}{12} + bt\left(\frac{b}{2}-\frac{3}{4}b\right)^2 + \frac{bt^3}{12} + bt\left(b-\frac{3}{4}b\right)^2$$

0 ($t \ll b$)

$$= \frac{5}{24}\,b^3 t$$

"TEMPO"

$$W_{x,inf} = \frac{J_x}{\frac{3}{4}b} = \frac{5}{18} b^2 t < W_{x,sup}$$

$$W_{x,sup} = \frac{J_x}{\frac{b}{4}} = \frac{5}{6} b^2 t > W_{x,inf} \rightarrow \text{SCHERA PRIMA}$$

$$Z_x = \frac{A}{2}\left(|d_C| + |d_T|\right)$$

$$d_C = 0$$

$$d_T = \frac{b}{2}$$

$$Z_x = \frac{A}{2} \cdot \frac{b}{2} = b t \frac{b}{2} = \frac{b^2 t}{2}$$

$$\alpha_x = \frac{Z_x}{W_{x,inf}} = \frac{9}{5} = 1.8$$

RICORDANDO CHE PER UNA SEZIONE RETTANGOLARE SI HA

$$M(x) = M_{pe}\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{x_y}\right)^2\right]$$

Se $x = 3x_y \rightarrow M(3x_y) = M_{pe}\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2\right] = \frac{26}{27} M_{pe} \simeq 0.963 M_{pe}$

ALL'AUMENTARE DI $x \rightarrow M(x) \rightarrow M_{pe}$

Date 24/9/2019

SEZIONE A T SPESSA

$$A = 7a \cdot 4a - 6a \cdot 3a = 10a^2$$

$$d_A = \frac{7a \cdot 4a \cdot 2a - 6a \cdot 3a \cdot \frac{3a}{2}}{10a^2} = \frac{29}{10}a < 3a$$

$$J_x = \frac{7a \cdot (4a)^3}{12} + 7a \cdot 4a \cdot \left(2a - \frac{29}{10}a\right)^2 - \left[\frac{6a \cdot (3a)^3}{12} + 6a \cdot 3a \cdot \left(\frac{3a}{2} - \frac{29}{10}a\right)^2\right] = \frac{337}{30}a^4$$

$$W_{x,inf} = \frac{J_x}{\frac{29}{10}a} = \frac{337}{87}a^3, \quad W_{x,sup} = \frac{J_x}{\frac{21}{10}a} = \frac{337}{63}a^3$$

$$\underbrace{a \cdot d_A = \frac{A}{2} = 5a^2}_{\text{VALE SE } d_A < 3a} \rightarrow d_A = 5a \rightarrow \text{IMPOSSIBILE}$$

$\rightarrow$ NON POSSO USARE QUESTA FORMULA

CONSIDERO $d_A > 3a$

$$a \cdot 3a + 7a(d_A - 3a) = \frac{A}{2} = 5a^2$$

$$3a^2 + 7a\,d_A - 21a^2 = 5a^2 \longrightarrow d_A = \frac{23}{7}a \in [3a, 4a]$$

SI OTTIENE:

$$d_C = \frac{4a - d_A}{2} = \frac{5}{14}a$$

$$d_T = \frac{a \cdot 3a \cdot \left(\frac{3a}{2} + \frac{2}{7}a\right) + 7a \cdot \frac{2}{7}a \cdot \frac{1}{7}a}{5a^2} = \frac{79}{70}a$$

$$Z_x = 5a^2\left(\frac{5}{14}a + \frac{79}{70}a\right) = \frac{52}{7}a^3$$

$$\alpha = \frac{Z_x}{W_{x,inf}} = 1.918$$

"TEMPO"

CERNIERA PLASTICA

LA STRUTTURA È SIMMETRICA e ISOSTATICA

$$M(s) = \frac{Ps}{2}, \quad \forall s \in \left[0, \frac{\ell}{2}\right]$$

LA SOLUZIONE NON DIPENDE DALLA RIGIDEZZA

IL DIAGRAMMA DEL MOMENTO È INSERITO ALL'INTERNO DEL DOMINIO PER CUI $|M| \le M_{p\ell}$, SOGLIA PLASTICA ed SOGLIA ELASTICA.

MENTRE VICINO AGLI APPOGGI LE SEZIONI SONO ELASTICHE.

AUMENTANDO IL CARICO

$$P_y = \frac{4M_y}{\ell}$$

SI TANGE M_y

AUMENTANDO ANCORA, PER

$$P_u = \frac{4M_{p\ell}}{\ell}$$

PARTE DELLA TRAVE, ATTORNO ALLA MEZZERIA, LE SEZIONI SONO PLASTICIZZATE

$$\frac{P_u}{P_y} = \frac{M_{p\ell}}{M_y} = \lambda$$

QUANTO È PLASTICIZZATO?

$$M(s^*) = \frac{P_u s^*}{2} = M_y \rightarrow s^* = \frac{2M_y}{P_u} = \frac{2M_y}{4M_{p\ell}} = \frac{1}{\lambda}\frac{\ell}{2}$$

$$\Delta_{p\ell} = \ell - 2s^* = \ell - \frac{\ell}{\lambda} = \ell\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) = \begin{cases} \blacksquare \rightarrow \lambda = \frac{3}{2},\ \Delta_{p\ell} = \frac{\ell}{3} \\ \text{I} \rightarrow \lambda = 1.125,\ \Delta_{p\ell} = 0.12\ell \end{cases}$$

LA SEZIONE PERÒ PUÒ ESSERE PLASTICIZZATA IN MANIERA DIVERSA

COME SI DIFFONDE LA PLASTICITÀ NELLA SEZIONE?

CONOSCIAMO

$$M(s) = \dots$$

SE CONOSCESSIMO ANCHE $M(\bar{y})$ POTREMMO DESCRIVERE COME SI DIFFONDE LA PLASTICITÀ.

$$\begin{cases} M(s) \\ M(\bar{y}) \end{cases} \Rightarrow \bar{y}(s)$$

PER UNA SEZIONE RETTANGOLARE

$$\begin{cases} M(\bar{y}) = M_{pl}\left[1 - \frac{4}{3}\left(\frac{\bar{y}}{h}\right)^2\right] \\ M(s) = \frac{P_u s}{2} = \frac{4 M_{pl} s}{2\ell} = 2 M_{pl} \frac{s}{\ell} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{y}(s) = \frac{h}{2}\sqrt{3\left(+1 - \frac{2s}{\ell}\right)} \quad \forall s \in \left[\frac{\ell}{3}, \frac{\ell}{2}\right]$$

IN E-P LA CURVATURA VARIA NON LINEARMENTE

SAPPIAMO CHE

$$\varphi(s_2) - \varphi(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} \chi(s)\, ds$$

MA

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\left[\varphi\left(\frac{\ell}{2}+\varepsilon\right) - \varphi\left(\frac{\ell}{2}-\varepsilon\right)\right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\frac{\ell}{2}-\varepsilon}^{\frac{\ell}{2}+\varepsilon} \chi(s)\, ds \neq 0$$

l'integrale di una funzione che tende a ∞ su un intervallo piccolo è finito

$$= \Delta\varphi \neq 0$$

NEL PUNTO DI MEZZERIA SI STA SVILUPPANDO UNA Δ DI ROTAZIONE NON NULLA

QUESTO SUCCEDE SOLO SE SI STA SVILUPPANDO UNA CERNIERA, DETTA CERNIERA PLASTICA

COME SI GENERA IL MECCANISMO DI COLLASSO?
SE $P = P_u$ SI CREA UNA CERNIERA CHE HA COME CINEMATISMO

E SI DEFORMA SENZA AUMENTARE IL CARICO.
LA CERNIERA PLASTICA RIMANE VINCOLATA IN UN PUNTO.

LA CERNIERA PLASTICA

- È CERNIERA INCREMENTALE
  - (•) CONSENTE SOLO ROTAZIONI CONCORDI AL CARICO PLASTICO DELLA SEZIONE (CERNIERA UNIDIMENSIONALE)
  - (•) È UNA CERNIERA CHE TRASMETTE MOMENTO (M_{pl}) → NON PUÒ PORTARE MOMENTO AGGIUNTIVO.

IN QUESTA MANIERA, L'ESEMPIO PRECEDENTE SI SEMPLIFICA COME:

SISTEMI A 1 CAMPATA

SCHEMI ISOSTATICI

($P_u \equiv P_I$) → FORMAZIONE DELLA PRIMA CERNIERA PLASTICA.

$$\frac{P_u}{P_y} = \frac{P_I}{P_y} = \frac{M_{pl}}{M_y} = \alpha \qquad \frac{l P_u}{4} = M_{pl}$$

SCHEMI IPERSTATICI ($P_u \geq P_I$)

SOLITAMENTE LA FORMAZIONE DELLA PRIMA C.P. NON COMPORTA IL MECCANISMO DI COLLASSO.

Analisi evolutiva

$\boxed{0}$ Fase elastica ($0 < q < q_I$)

Se $\varphi_{AB} = 0 \xrightarrow[\text{calcolo}]{} M_A$

$$\varphi_{AB} = \frac{M_A l}{3EJ} + \frac{M_B l}{6EJ} + \frac{q l^3}{24EJ} = 0 \longrightarrow M_A = -\frac{q l^2}{12}$$

$$M(s) = -\frac{q l^2}{12} + \frac{q l}{2} s - \frac{q s^2}{2}$$

$$M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{q l^2}{24}$$

$q_I = q_{II}$: $M_A = M_B = -M_{pl} \Rightarrow$

$$q_I = q_{II} = \frac{12 \cdot M_{pl}}{l^2}$$

$$y''(s) = -\frac{M(s)}{EJ}$$

LINEA ELASTICA

$$y''(s) = \pm \frac{M(s)}{EJ}$$

$M > 0$

$y'' > 0$ (da analisi)

$y''(s) = -\frac{M(s)}{EJ}$

$M > 0$

$y'' > 0$

$y''(s) = +\frac{M(s)}{EJ}$

NOTO $M(s)$ CALCOLO

$$y(s) = \frac{q l^4}{24EJ}\left[\left(\frac{s}{l}\right)^4 - 2\left(\frac{s}{l}\right)^3 + \left(\frac{s}{l}\right)^2\right]$$

$$y\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{q l^4}{384EJ}$$

Se $q = q_I$

$$\begin{cases} y^I(s) = \dfrac{M_{pl}\, l^2}{2\,EJ}\left[\left(\dfrac{s}{l}\right)^4 - 2\left(\dfrac{s}{l}\right)^3 + \left(\dfrac{s}{l}\right)^2\right] \\ y^I\left(\dfrac{l}{2}\right) = \dfrac{M_{pl}\, l^2}{32\,EJ} \end{cases}$$

$\boxed{\text{I}}$ $q > q_I = q_{II}$ Fase elasto - plastica

$q = q_I + \Delta q$

$$M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{M_{pl}}{2} + \frac{\Delta q_u\, l^2}{8} = M_{pl}$$

$$\Delta q_u = \frac{4 M_{pl}}{l^2} \Rightarrow \boxed{q_u = q_I + \Delta q = \frac{16 M_{pl}}{l^2}} \qquad \underline{q_u > q_I}$$

$$\frac{q_u}{q_I} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3} \qquad \boxed{\frac{q_u}{q_I} = \frac{4}{3}\alpha}$$

LE CERNIERE PLASTICHE <u>HANNO VERSO ALTERNO</u> → SI SVILUPPA IL CINEMATISMO

MENTRE LE DEFORMATE

"TEMPO"

$$\Delta y_u(s) = \frac{M_{pl}\, \ell^2}{6EJ}\left[\left(\frac{s}{\ell}\right)^4 - 2\left(\frac{s}{\ell}\right)^3 + \frac{s}{\ell}\right]$$

LA DEFORMATA FINALE

$$y_u(s) = \frac{M_{pl}\, \ell^2}{2EJ}\left[\frac{2}{3}\left(\frac{s}{\ell}\right)^4 - \frac{4}{3}\left(\frac{s}{\ell}\right)^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{\ell}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{s}{\ell}\right)\right] =$$

$$= \Delta y_u(s) + y_u^{I}(s)$$

$$y_u\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{M_{pl}\, \ell^2}{12EJ}$$

$$q_u = \frac{16\, M_{pl}}{\ell^2}$$

$$q_I = 12\, \frac{M_{pl}}{\ell^2}$$

Date 25/09/2019

ESERCIZI

Analisi Evolutiva

FASE $\boxed{0}$ STRUTTURA ELASTICA

per evitare il cinematismo

$$\begin{cases} \varphi_{AC} = 0 = \dfrac{M_A \ell/2}{3EJ} + \dfrac{M_C \ell/2}{6EJ} + \varphi \\ \varphi_{CA} = \varphi_{CB} \\ PLV_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_{CA} = -\dfrac{M_A \frac{\ell}{2}}{6EJ} - \dfrac{M_C \ell/2}{3EJ} + \varphi = \varphi_{CB} = \dfrac{M_C \frac{\ell}{2}}{3EJ} + \varphi \\ M_A \cancel{\varphi} - M_C \cancel{\varphi} - M_C \cancel{\varphi} + F \cancel{\varphi} \dfrac{\ell}{2} = 0 \\ \dfrac{M_A \ell/2}{3EJ} + \dfrac{M_C \ell/2}{6EJ} + \varphi = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_A = -\dfrac{3}{16} F\ell \\ M_C = \dfrac{5}{32} F\ell \\ \varphi = \dfrac{7}{384} \dfrac{F\ell^2}{EJ} \end{cases}$$

$$M_A = -M_p \Rightarrow -\frac{3 F_I \ell}{16} = -M_p \rightarrow \boxed{F_I = \frac{16 M_p}{3\ell}} \rightarrow \text{C.P. IN } (A)$$

$$\boxed{M_C = \frac{5}{6} M_p}$$

FASE $\boxed{I}$: $F \in [F_I, F_u]$

$$\frac{5}{6}M_p + \frac{\Delta F_u \ell}{4} = M_p \rightarrow \Delta F_u = \frac{2}{3}\frac{M_p}{\ell}$$

$$F_u = F_I + \Delta F_u = \frac{6M_p}{\ell}$$

$$\frac{F_u}{F_I} = \frac{18}{16} = 1.125$$

$$\frac{F_u}{F_y} = \frac{18}{16}\alpha$$

Analisi Limite

Metodo Statico

$$\begin{cases} M_A = V_B \ell - \frac{F\ell}{2} \\ V_A = F - V_B \end{cases}$$

$$|M(s)| < M_p \rightarrow \begin{cases} |M_A| \le M_p \\ |M_C| \le M_p \end{cases}$$

$$\begin{cases} M(s_1) = M_A + V_A s_1 \quad , \quad s_1 \in [0, \frac{\ell}{2}] \\ M(s_2) = V_B s_2 \quad , \quad s_2 \in [0, \frac{\ell}{2}] \end{cases}$$

(S1) $V_B = 0$

$$\max\{F_{S_1}\} = \frac{2M_p}{\ell} : M_A = M_p$$

(S2) $M_A = 0$

$$\max\{F_{S_2}\} = \frac{4M_p}{\ell} : M_C = M_p$$

MIGLIORE DI (S1) PERCHÉ PIÙ ALTO!

S_3 $V_A = 0$

$\max\{F_{S_3}\} = \frac{2M_p}{\ell}$: $M_A = M_C = M_p$

PEGGIORE DI S_2

S_4 $M_A = -M_p$, $M_C = +M_p$

$$\begin{cases} M_C = V_B \frac{\ell}{2} = M_p \Rightarrow \underline{V_B = \frac{2M_p}{\ell}} \\ M_A = -M_p \\ F_{S_4} \underset{\text{DA } M_A}{=} 2V_B - \frac{2M_A}{\ell} = 4\frac{M_p}{\ell} + 2\frac{M_p}{\ell} = \underline{\underline{6\frac{M_p}{\ell}}} > S_1, S_2, S_3 \\ V_A = F_{S_4} - V_B = 4\frac{M_p}{\ell} \end{cases}$$

Metodo Cinematico : Devo avere 3 cerniere allineate)

INSERISCO 3 C.P. e SCELGO IL MECCANISMO DI COLLASSO

K_1

$$P = -M_p \cdot \frac{\dot\delta}{a} \cdot 2 - 2M_p \frac{\dot\delta}{b} + F\dot\delta = 0$$

$$F_{K_1} = 2M_p\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right) = F_{K_1}(a,b)$$

$$\{a,b\} \in \left[0, \frac{\ell}{2}\right]$$

$$\min_{\{a,b\}\in[0,\frac{\ell}{2}]} \{F_{K_1}\} = \frac{8M_p}{\ell} \quad \text{per } a=b=\frac{\ell}{2}$$

minimizzo F_{K_1} massimizzando a e b $\left(a=b=\frac{\ell}{2}\right)$

K_2

$$P = F\dot\theta\frac{\ell}{2} - 2M_p\frac{\dot\theta\ell}{2a} - M_p\dot\theta = 0$$

$$F_{K_2} = \frac{2M_p}{\ell}\left(1 + \frac{\ell}{a}\right), \quad a \in \left[0, \frac{\ell}{2}\right]$$

$$\min_{a\in[0,\frac{\ell}{2}]} \{F_{K_2}\} = F_{K_2}\left(a = \frac{\ell}{2}\right) = \boxed{\frac{6M_p}{\ell} \equiv F_{S_1}}$$

$= F_u$

$$P = P\dot\varphi\ell - 2M_p\dot\varphi = 0$$

$$P_{K_1} = \frac{2M_p}{\ell}$$

K_1

S_1

$$\begin{cases} M_A = -M_p \\ M_B = +M_p \\ P\cdot\ell - M_B + M_A = 0 \end{cases} \rightarrow P_{S_1} = \frac{M_B - M_A}{\ell} = \frac{2M_p}{\ell}$$

$$P_{S_1} = P_{K_1} = P_u$$

$\beta \in [0,1]$

K1

$$P = F\,\cancel{\theta}(1-\beta)\ell - 2M_p\,\frac{1-\beta}{\beta}\cancel{\theta} - 2M_p\cancel{\theta} = 0$$

$$F_{u1} = \frac{2M_p}{\beta(1-\beta)\ell}$$

S1

IMPONGO:

$$\begin{cases} M_A = -M_p \\ M_B = -M_p \\ M_C = V_A\beta\ell + M_A = M_p \end{cases}$$

EQUILIBRIO:

$$\begin{cases} V_A + V_B = F \\ F\beta\ell - V_B\ell + M_A - M_B = 0 \end{cases}$$

$$F_{s1} = \frac{2M_p}{\beta(1-\beta)\ell} \equiv F_{u1} = F_u(\beta)$$

$$\frac{F_u(\beta)\cdot\ell}{M_p} = \frac{2}{\beta(1-\beta)}$$

$$\min_{\beta\in[0,1]} F_u(\beta) = F_u\left(\beta = \frac{1}{2}\right) = \frac{8M_p}{\ell}$$

SI HA COLLASSO PRIMA SE IL CARICO È IN MEZZERIA! ($\beta = 1/2$)

$$\lim_{\substack{\beta\to 0\\ \beta\to 1}} F_u(\beta) \to +\infty$$ → LA ROTTURA SUL VINCOLO SARÀ A TAGLIO! "IN TEMPO"

ESERCIZI | 30/08/2019

NON SIMMETRICO → NON SAPPIAMO DOVE SI CREA LA CERNIERA PLASTICA

Teorema Statico

$$\begin{cases} V_A + V_B = q\ell \\ M_A + \dfrac{q\ell^2}{2} - V_B\,\ell = 0 \end{cases} \rightarrow$$

2 PARAMETRI LIBERI DA VARIARE FINTANTO CHÉ

$|M(s)| \le M_p$

$|M(s)| \le M_p$

(S1) $M_A = -M_p \rightarrow \begin{cases} V_A = q\ell/2 + \dfrac{M_p}{\ell} \\ V_B = q\ell/2 - \dfrac{M_p}{\ell} \end{cases}$

$$M(s) = -M_p + \frac{q\ell}{2}s + \frac{M_p}{\ell}s - \frac{qs^2}{2}$$

$$\frac{dM}{ds} = \frac{q\ell}{2} + \frac{M_p}{\ell} - qs \rightarrow \left.\frac{dM}{ds}(s)\right|_{s=d} = 0 \Rightarrow \boxed{d(q) = \frac{\ell}{2} + \frac{M_p}{q\ell}}$$

$$M(s = d(q_u)) = +M_p \Rightarrow -M_p + \frac{q_u\ell}{2}\left(\frac{\ell}{2} + \frac{M_p}{q_u\ell}\right) + \frac{M_p}{\ell}\left(\frac{\ell}{2} + \frac{M_p}{q_u\ell}\right) - \frac{q_u}{\ell}\left(\frac{\ell}{2} + \frac{M_p}{q_u\ell}\right)^2 = +M_p$$

RISCRIVENDO

$$\boxed{q_u^2 - 12\frac{M_p}{\ell^2}q_u + \frac{4M_p^2}{\ell^4} = 0} \rightarrow \boxed{\begin{aligned} q_u &= \frac{(6 \mp 4\sqrt{2})M_p}{\ell^2} = \begin{cases} \cancel{0.343\frac{M_p}{\ell^2}} \\ 11.66\frac{M_p}{\ell^2} \end{cases} \\ d(q_u) &= (2 \mp \sqrt{2})\ell = \begin{cases} \cancel{3.414\ell} \\ 0.586\ell \end{cases} \end{aligned}}$$

massimo al di fuori della campata

$d > \ell$

$$\boxed{\begin{aligned} q_u &= 11.66\frac{M_p}{\ell^2} \\ d(q_u) &= (2 - \sqrt{2})\ell \end{aligned}}$$

30/03/2019

Teorema Cinematico

$$\dot\theta_S\, d = \dot\theta_D\,(\ell - d)$$

POTENZA DI UN CARICO ESTERNO

$$\underline{P} = \int_0^d q\cdot \dot y(s)\,ds = q\underbrace{\int_0^d \dot y(s)\,ds}_{d\,\dot y(\frac{d}{2})} = \underline{q\,d\,\dot y\left(\tfrac{d}{2}\right)}$$

$$\begin{cases} P = q\cdot d\cdot \dot\theta_S \dfrac{d}{2} + q(\ell-d)\cdot\dot\theta_D\dfrac{(\ell-d)}{2} + \\ \quad + (-M_p)\,\dot\theta_S\, 2 - M_p\,\dot\theta_D = 0 \\ \dot\theta_D = \dfrac{d}{\ell-d}\,\dot\theta_S \end{cases}$$

$$P = \left[q\cdot\frac{d^2}{2} + q\,d\,\frac{\ell-d}{2} - 2M_p - M_p\frac{d}{(\ell-d)}\right]\cancel{\dot\theta_S} = 0$$

$$\boxed{q(d) = \frac{2M_p}{d\ell}\,\frac{2\ell-d}{\ell-d}}$$

FAMIGLIA DI VALORI DI COLLASSO DI q

$d \in [0, \ell]$

$$\frac{\partial q(d)}{\partial d} = 0 \Rightarrow d = (2 \mp \sqrt{2})\,\ell$$

$$\boxed{q_{K_1} = (6 \mp 4\sqrt{2})\,\frac{M_p}{\ell^2} \equiv q_u}$$

Analisi Evolutiva

Esercizio

Teorema Cinematico

K_1

$$P = p \cdot 2\dot\theta \frac{l}{3} + \beta P\, \dot\theta \frac{l}{3} - 2M_p 2\dot\theta - M_p \dot\theta = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{K_1} = \frac{15\, M_p}{(2+\beta)\, l}}$$

K_2

$$P = p \cdot \dot\theta \frac{l}{3} + \beta P \cdot \dot\theta \frac{2}{3} l - M_p \dot\theta - M_p(\dot\theta + 2\dot\theta) = 0$$

$$\hookrightarrow \boxed{P_{K_2} = \frac{12\, M_p}{(1+2\beta)\, l}}$$

K_3

$$P = P\cdot\dot\theta\frac{\ell}{3} - 2M_p\dot\theta - 2M_p\dot\theta = 0$$

$$\boxed{P_{K_3} = \frac{12\,M_p}{\ell}}$$

K_4

$$P = -M_p - 2\dot\theta - M_p\dot\theta + \beta P\,\dot\theta\frac{\ell}{3} = 0$$

$$\boxed{P_{K_4} = \frac{9\,M_p}{\beta\ell}}$$

Teorema statico

CONSIDERIAMO SOLO I CINEMATISMI ① e ②

$$\begin{cases} V_A = P(1+\beta) - V_B \\ M_A = -\left[P(1+2\beta) - 3V_B\right]\frac{\ell}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} M(s_1) = M_A + V_A\, s_1 \\ M(s_i) = M_A + V_A\frac{\ell}{3} - P\,s_2 + V_A\, s_2 \quad \forall s_i \in \left[0, \frac{\ell}{3}\right] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall i = 1,2,3 \\ M(s_3) = V_B\, s_3 \end{cases}$$

$$|M(s_i)| \le M_p \quad \forall i = 1,2,3$$

S_1 duale di K_1 $\longrightarrow$ $M_A = -M_p$; $M(s_1 = \frac{\ell}{3}) = +M_p$

Dall'equilibrio + i 2 valori di momento fissati ottengo "tutto" e

$$P_{S_1} = \frac{15}{(2+\beta)\ell} = P_{K_1}$$

Se $M_A = -M_p$

$$M_C = M\left(s_1 = \frac{\ell}{3}\right) = -M_p + V_A \frac{\ell}{3} = +M_p$$

$$\underline{V_A = 6\frac{M_p}{\ell}}$$

$$\begin{cases} 6\frac{M_p}{\ell} = P(1+\beta) - V_B \longrightarrow V_B = P(1+\beta) - \frac{6M_p}{\ell} \\ +M_p = +\left[P(1+2\beta) - 3V_B\right]\frac{\ell}{3} \rightarrow \frac{3M_p}{\ell} = P(1+2\beta) - 3P(1+\beta) + 18\frac{M_p}{\ell} \end{cases}$$

$$\left[3(1+\beta) - 1 - 2\beta\right]P = \frac{15M_p}{\ell}$$

$$\left[3 + 3\beta - 1 - 2\beta\right]P = \frac{15M_p}{\ell} \rightarrow (2+\beta)P = \frac{15M_p}{\ell}$$

$$P_{s_1} = \frac{15M_p}{(2+\beta)\ell}$$

DA VERIFICARE SE $|M_D| \leq M_p$

$$\underline{M_D = \frac{1+3\beta}{2+\beta} M_p} \longrightarrow -1 < \frac{1+3\beta}{2+\beta} < 1$$

$$-2-\beta < 1+3\beta < 2+\beta$$

$$\beta > 0 \Rightarrow \underline{\beta \in \left[0, \frac{1}{2}\right]}$$

$$\underline{P_{k_1} = P_{s_1} = P_k \quad \text{se } \beta \in \left[0, \frac{1}{2}\right]}$$

S_2 duale a K_2 $\rightarrow$ $M_A = -M_p$; $M_D = +M_p$

$$P_{S_2} = \frac{12 M_p}{(1+2\beta)\ell} = P_{K_2}$$

$$\begin{cases} M_c = \dfrac{2}{1+2\beta} M_p \\ |M_c| \le M_p \end{cases} \Rightarrow \beta \geq \frac{1}{2}$$

$$P_{S_2} = P_{K_2} = P_u \quad \text{se } \beta \geq \frac{1}{2}$$

SISTEMI A PIÙ CAMPATE

$C_p = n+1$ cerniere plastiche $\rightarrow$ collasso completo

IL COLLASSO COMPLETO È RARO NEI SISTEMI A PIÙ CAMPATE. QUI È PROBABILE AVERE $C_p < n+1$ $\rightarrow$ collasso parziale

$n=3$

$C_p = 3$

$C_p > n+1$ $\rightarrow$ collasso più che completo (particolare simmetria)

$n=3$

$C_p = 5$

tutte le sezioni dove è possibile raggiungere momento massimo

IL NUMERO DI MECCANISMI INDIPENDENTI $= \underbrace{C_r}_{\text{n° sezioni critiche}} - \overset{\text{n° iperstaticità}}{n}$

IL MECCANISMO DI COLLASSO PER SISTEMI A PIÙ CAMPATE È GENERALE e DATO DALLA SOVRAPPOSIZIONE DI MECCANISMI INDIPENDENTI.

$$\left.\begin{array}{l} n=1 \\ C_r=3 \end{array}\right\} \text{2 meccanismi indipendenti}$$

M_1

K_1

$$P = P\dot\theta_1 \beta l + P\dot\theta_2 \beta l - M_p\left[\dot\theta_1 + 2\dot\theta_1 \frac{\beta}{1-\beta} + \dot\theta_2 + 2\dot\theta_2 \frac{\beta}{1-\beta}\right] = 0$$

$$= P\beta l(\cancel{\dot\theta_1 + \dot\theta_2}) - M_p\left[1 + 2\frac{\beta}{1-\beta}\right](\cancel{\dot\theta_1 + \dot\theta_2}) =$$

$$\boxed{P_{K_1} = \frac{\beta+1}{\beta(1-\beta)}\frac{M_p}{l}}$$ indipendente da $\dot\theta_1 \neq \dot\theta_2$

P_{K_1} è UNICO MA IL MECCANISMO DI COLLASSO PUÒ NON ESSERE UNICO! (non dipende dal rapporto fra $\dot\theta_1$ e $\dot\theta_2$)

M_2

K generico

S_1

$$\begin{cases} V_A + V_B + V_C = 2P \\ (V_A - V_C)\,l = 0 \end{cases}$$

$M_D = V_A \beta l$

$M_E = V_C \beta l$

$M_B = V_A l - (1-\beta) P l$

POSTO $M_D = M_p$; $M_B = -M_p$;

$$\boxed{P_{S_1} = \frac{\beta+1}{\beta(1-\beta)}\frac{M_p}{l} = P_{K_1}}$$

$$\left.\begin{array}{l} n = 1 \\ Cr = 3 \end{array}\right\} \text{2 meccanismi indipendenti}$$

M_1

M_2

, $\dot{\theta}_1 > \dot{\varphi}_2$

K_1 $\dot{\theta}_2 = -\dot{\theta}_1$ $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}$

$$P = p\,\dot{\theta}\frac{l}{2}(1+\beta) - 4M_p\dot{\theta} = 0$$

$$\boxed{P_{K1} = \frac{8M_p}{(1+\beta)l}}$$

K_2 $\dot{\theta}_2 = 0$ $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}$

$$P = p\,\dot{\theta}\frac{l}{2} - 3M_p\dot{\theta} = 0$$

$$P_{K2} = \frac{6M_p}{l}$$

K_3 $\dot{\theta}_1 = 0$; $\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}$

$$P = \beta p\,\dot{\theta}\,l - 3M_p\dot{\theta} = 0$$

$$\boxed{P_{K3} = \frac{6M_p}{\beta l}}$$

K_1 MECCANISMO GLOBALE

K_2, K_3 MECCANISMI PARZIALI

CONSIDERIAMO UN

K_4 $\quad \dot{\varphi}_2 = -\dot{\theta}_2 \; ; \; \dot{\theta}_1 = \gamma \dot{\varphi}_2 \quad ; \; \gamma \in [0,1]$

$$\dot{\varphi}_2 - \dot{\theta}_1 = \dot{\varphi}_2 (1-\gamma) \geq 0$$

$\downarrow$

cerniera plastica con fibre tese inferiori! (≥ 0)

$$P = P\dot{\theta}_1 \frac{\ell}{2} + \beta P \dot{\varphi}_2 \frac{\ell}{2} - M_p \cdot 2\dot{\theta}_1 - 2M_p \dot{\varphi}_2 - M_p(\dot{\varphi}_2 - \dot{\theta}_1) = 0$$

$$= \left\{ \frac{P\ell}{2} [\gamma + \beta] - M_p [\gamma + 3] \right\} \cancel{\dot{\varphi}_2} = 0$$

$$\boxed{P_{K_4}(\gamma) = \frac{2M_p}{\ell} \frac{\gamma+3}{\gamma+\beta}} \rightarrow \frac{\partial P_{K_4}(\gamma)}{\partial \gamma} = \frac{2M_p}{\ell} \frac{\beta+3}{(\gamma+\beta)^2} \begin{cases} > 0 & \text{se } \beta > 3 \\ < 0 & \text{se } \beta < 3 \end{cases}$$

01/10/2019

Se $\beta > 3 \Rightarrow \min_{\gamma\in[0,1]}\{P_{K4}(\gamma)\} = P_{K4}(\gamma=0) = \boxed{\frac{6M_p}{\beta\ell}}$

essendo $\frac{\partial P_{K4}}{\partial\gamma} > 0$

LA FUNZIONE È CRESCENTE ALLORA IL MINIMO SI HA PER $\gamma=0$

Se $\beta < 3 \Rightarrow \min_{\gamma\in[0,1]}\{P_{K4}(\gamma)\} = P_{K4}(\gamma=1) = \boxed{\frac{8M_p}{(1+\beta)\ell}}$

P_{K4} DECRESCENTE

(K5) $\dot\varphi_2 = -\dot\theta_2$; $\dot\varphi_2 = \gamma\dot\theta_1$

$$P = P\dot\theta_1\frac{\ell}{2} + \beta P\dot\varphi_2\frac{\ell}{2} - M_p 2\dot\theta_1 - 2M_p\dot\varphi_2 + -2M_p(\dot\theta_1 - \dot\varphi_2) = 0$$

$$= \left\{P\frac{\ell}{2}\left[1+\beta\right] - M_p\left[3+\gamma\right]\right\}\dot\theta_1 = 0$$

$$\boxed{P_{K5}(\gamma) = \frac{2M_p}{\ell}\frac{3+\gamma}{1+\beta\gamma}}$$

$$\frac{\partial P_{K5}}{\partial\gamma}(\gamma) = \frac{2M_p}{\ell}\frac{1-3\beta}{(1+\gamma\beta)^2}\begin{cases} >0 & \text{se } \beta < \frac{1}{3} \\ <0 & \text{se } \beta > \frac{1}{3}\end{cases}$$

Se $\beta > \frac{1}{3} \Rightarrow \min_{\gamma\in[0,1]}\{P_{K5}(\gamma)\} = P_{K5}(\gamma=1) = \frac{8M_p}{\ell(1+\beta)}$ come K_4 $(\beta<3)$

Se $\beta < \frac{1}{3} \Rightarrow \min_{\gamma\in[0,1]}\{P_{K5}(\gamma)\} = P_{K5}(\gamma=0) = \underline{\frac{6M_p}{\ell}}$

LE CONFIGURAZIONI PER CUI SI HANNO ANGOLI $\dot\theta_1$ e $\dot\theta_2$ DIVERSI DA $\emptyset$ e DIVERSI TRA LORO È POCO PROBABILE (PER $\beta = \frac{1}{3}$, $\beta = 3$) MENTRE IN TUTTI GLI ALTRI CASI SI HANNO PARTICOLARI CONFIGURAZIONI PER CUI SI HANNO MENO C.P.

Analisi Limite Statica

$$\begin{cases} V_A + V_B + V_C = (1-\beta)P \\ V_B \ell + \beta P \frac{3}{2}\ell + V_C 2\ell = \frac{P\ell}{2} \end{cases}$$

$$M_D = V_A \frac{\ell}{2}$$

$$M_E = V_C \frac{\ell}{2}$$

$$M_B = V_A \frac{\ell}{2} - P\frac{\ell}{2}$$

$$\{|M_B|, |M_E|, |M_D|\} \le M_p$$

S_1 duale a K_1

FISSO, IN CONCORDO CON K_1

$$\begin{cases} M_D = +M_p \\ M_E = -M_p \end{cases}$$

DA CUI

$$\begin{cases} V_A = 2\frac{M_p}{\ell} \\ V_C = -2\frac{M_p}{\ell} \\ V_B = \frac{2M_p}{2\ell} - P\frac{\ell}{2} \end{cases}$$

$$V_B = (1-\beta)P = 8\frac{(1-\beta)}{1+\beta}\frac{M_p}{\ell}$$

$$\boxed{P_{S_1} = \frac{8M_p}{1+\beta}\ell}$$

$$M_B = \frac{\beta-1}{\beta+1} 2M_p$$

$$|M_B| \le M_p \rightarrow \left|\frac{\beta-1}{\beta+1}\right| 2\cancel{M_p} \le \cancel{M_p} \rightarrow \left|\frac{\beta-1}{\beta+1}\right| \le \frac{1}{2}$$

$$|\beta-1| \le \frac{\beta+1}{2} \rightarrow \boxed{-\frac{\beta+1}{2} \le \beta-1 \le \frac{\beta+1}{2}}$$ cioè

$$\boxed{\beta \in [1/3, 3]}$$

ESERCIZI | RESISTENZE DELLA TRAVE DIVERSE

HP: CP A SX (M_p)

$$P = P\theta \frac{l}{2} - 2M_p\theta - M_p\theta = 0 \rightarrow \boxed{P_{K_1} = \frac{6M_p}{l}}$$ K_1 CP SX

HP: CP A DX (βM_p)

$$P = P\theta \frac{l}{2} - 2M_p\theta - \beta M_p\theta = 0 \rightarrow \boxed{P_{K_1} = \frac{2(2+\beta)M_p}{l}}$$ K_1 CP DX

K_2

• Cp a sx (M_p)

$$P = P\dot{\theta}\frac{\ell}{2} - 2\beta M_p\dot{\theta} - M_p\dot{\theta} = 0$$

$$P_{K_2}^{sx} = \frac{2(1+2\beta)M_p}{\ell} = P_{K_1}^{dx}$$

• Cp a dx (βM_p)

$$P = P\dot{\theta}\frac{\ell}{2} - 2\beta M_p\dot{\theta} - \beta M_p\dot{\theta} = 0$$

$$\boxed{P_{K_2}^{dx} = \frac{6\beta M_p}{\ell}}$$

K_3

$$P = P\dot{\theta}\frac{\ell}{2} - P\dot{\theta}\frac{\ell}{2} - M_p 2\dot{\theta} - \beta M_p 2\dot{\theta} = 0$$

$$= 2M_p(1+\beta)\dot{\theta} = 0 \Rightarrow \underline{\dot{\theta} = 0}$$

Analisi Limite Statica

$$\begin{cases} V_A + V_B + V_C = 2P \\ P\frac{\ell}{2} + P\frac{3}{2}\ell = V_B\ell + V_C\ell \cdot 2 \end{cases}$$

$$M_D = V_A\frac{\ell}{2}$$

$$M_B = V_A\ell - P\frac{\ell}{2}$$

$$M_C = V_C\frac{\ell}{2}$$

S_2 duale a K_1

$\beta > 1$

$\beta < 1$

IL MOMENTO DEVE SODDISFARE LA RESISTENZA MINIMA!

$\beta > 1$

$$M_D = V_A \frac{\ell}{2} = +M_p$$

$$V_A = \frac{2M_p}{\ell}$$

$$M_B = \frac{2M_p}{\ell}\ell - \frac{P\ell}{2} = -M_p$$

$$P_{S1}(\beta > 1) = \frac{6M_p}{\ell} = P_{K1}^{dk}$$

$$V_C = V_A = \frac{2M_p}{\ell}$$

$$V_B = 2\left(6\frac{M_p}{\ell} - 2\frac{M_p}{\ell}\right) = 8\frac{M_p}{\ell}$$

$$M_E = M_p$$

$\beta < 1$

$$V_A = \frac{2M_p}{\ell}$$

$$M_B = 2M_p - \frac{P\ell}{2} = -\beta M_p$$

$$P_{S1}(\beta < 1) = \frac{2(2+\beta)M_p}{\ell} = P_{K1}^{SK}$$

$$V_C = 2M_p\ell$$

$$V_B = 4(1+\beta)\frac{M_p}{\ell}$$

$$M_E = M_p$$

Se $\beta > 1$ $\quad |M_E| \leq \beta M_p \longrightarrow$ LA RESISTENZA È SODDISFATTA

Se $\beta < 1$ $\quad |M_p| \geq \beta M_p \longrightarrow$ NON SODDISFA LA RESISTENZA!

TELAIO INCERNIERATO

$\begin{cases} C_p = 3 & \text{(2 nodi e sotto il carico)} \\ n = 1 \end{cases}$

↳ 2 meccanismi indipendenti

Meccanismo di trave

Meccanismo di parete

Meccanismo Generale = Trave + Parete

$\Delta\dot{\varphi}_{AC} = \dot{\theta}_2 \qquad \Delta\dot{\varphi}_{CD} = \dot{\theta}_1 \qquad \Delta\dot{\varphi}_{DE} = -\dot{\theta}_1 \qquad \Delta\dot{\varphi}_{EB} = \dot{\theta}_2$

$\Delta\dot{\varphi}_{CA} = \dot{\theta}_2 \qquad \Delta\dot{\varphi}_{DC} = \dot{\theta}_1 \qquad \Delta\dot{\varphi}_{ED} = -\dot{\theta}_1 \qquad \Delta\dot{\varphi}_{BE} = \dot{\theta}_2$

Se $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = \dot{\theta} \rightarrow$ CERNIERA PLASTICA IN C NON SI ATTIVA

Meccanismo di trave

$$P = V\dot{\theta}_1 \frac{\ell}{2} - 4M_p\dot{\theta} = 0$$

$$\boxed{V_{K_1} = \frac{8M_p}{\ell}}$$

Meccanismo di parete

$$P = 4h\dot{\theta}_2 - 2M_p\dot{\theta}_2 = 0$$

$$\boxed{H_{K_2} = \frac{2M_p}{h}}$$

Meccanismo globale

$$P = V\frac{\ell}{2}\dot{\theta} + 4h\dot{\theta} - 4M_p\dot{\theta} = 0$$

$$\boxed{H_{K_3}h + V_{K_3}\frac{\ell}{2} = 4M_p}$$

Teorema Statico

$$\begin{cases} V_A = \frac{V}{2} - H\frac{\ell}{2} \\ V_B = \frac{V}{2} + \frac{Hh}{\ell} \\ H_A = H_A = H \end{cases}$$

S_2 duale di K_2

$M_C = +M_p$

$M_E = -M_p$

$$\begin{cases} M_C = (H-H_B)h = +M_p \\ -H_B h = -M_p \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow H_B = \frac{M_p}{h}, \quad \boxed{H_{S_2} = \frac{2M_p}{h} = H_{K_2}}$$

$$M(s_1) = (H-H_B)h + \frac{V}{2}s_1 - \frac{Hh}{\ell}s_1, \quad s_1 \in [0, \frac{\ell}{2}]$$

$$\Leftarrow H_B = \frac{M_p}{h}, \quad H = H_{S_2}$$

$$M_D = M\left(s_1 = \frac{\ell}{2}\right) = \frac{V\ell}{4}, \quad |M_D| \le M_p \Leftrightarrow \boxed{|V_{S_2}| \le \frac{4M_p}{\ell}}$$

Meccanismo di trave

Meccanismo di parete

Meccanismo combinato

Meccanismo
di trave

Meccanismo
di parete

Meccanismo
combinato

esercizi

$$\begin{cases} Cr = 5 \\ n = 3 \end{cases}$$

2 mecc. indipendenti

↓

gli stessi di partenza

Trave

$$P = V\dot{\theta}\frac{l}{2} - 4M_p\dot{\theta}_1 = 0$$

$$\boxed{V_{K1} = \frac{8M_p}{l}}$$

Parete

$$P = H h \dot{\theta}_2 - 4 M_p \dot{\theta}_2 = 0$$

$$\boxed{H_{K2} = \frac{4 M_p}{h}}$$

Globale

$$P = V\dot{\theta}\frac{l}{2} + H h\dot{\theta} - 6M_p\dot{\theta} = 0$$

$$\boxed{H_{K3}\, h + V_{K3}\frac{l}{2} = 6 M_p}$$

Analisi Statica

Eq. di equilibrio:

$$\begin{cases} H_A + H_B = H \\ V_A + V_B = V \\ Hh + V\frac{l}{2} - V_B l - M_B + M_A = 0 \end{cases}$$

5 parametri liberi

$$\begin{cases} M_C = M_A + H_A h \\ M_D = M_A + H_A h + V_A \frac{l}{2} \\ M_E = M_B - H_B h \end{cases}$$

S_3 duale a K_3

$$\begin{cases} M_A = -M_p \\ M_B = +M_p \\ M_E = -M_p \\ M_D = +M_p \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} H_B &= \frac{2M_p}{h} \\ V_B &= \frac{4M_p}{l} \\ H_A &= H - \frac{2M_p}{h} \\ V_A &= V - \frac{4M_p}{l} \end{aligned}$$

$K_3 \equiv \boxed{H_{S_3} h + V_{S_3} \frac{l}{2} = 6M_p}$

IN (C) DEVO AVERE $|M_C| \le M_p$ PER SODDISFARE LA RESISTENZA

$$M_C = M_A + H_A h \Rightarrow \left| -M_p + Hh - \frac{2M_p}{\cancel{h}}\cancel{h} \right| \le M_p$$

$$|-3M_p + Hh| \le M_p \longrightarrow -M_p \le -3M_p + Hh \le M_p$$

$$\left| \begin{array}{l} H \ge \dfrac{2M_p}{h} \\ H \le \dfrac{4M_p}{h} \end{array} \right. \longrightarrow \frac{Hh}{M_p} \in [2,4]$$

ESERCIZIO | RESISTENZA DIFFERENTE TRA PILASTRI e TRAVI!

$\left.\begin{array}{l} r=5 \\ n=3 \end{array}\right]$ 2 meccanismi indipendenti

(K1)

$$L = 3P\,\dot{\theta}\,l - 2M_p\,\dot{\theta} - 2 - 3M_p \cdot 2\dot{\theta} = 0$$

$$\boxed{P_{K_1} = \frac{10}{3}\frac{M_p}{l}}$$

K_2

$$\mathbb{P} = 2P \cdot 2\ell\dot{\theta} - 2M_p \cdot 4\dot{\theta} = 0$$

$$\boxed{P_{K_2} = \frac{2M_p}{\ell}} < P_{K_1}$$

K_3 MECCANISMO GLOBALE

$$\mathbb{P} = 3P\,\dot{\theta}\ell + 2P\,\ell\dot{\theta} - 2M_p \cdot 4\dot{\theta} + -3M_p \cdot 2\dot{\theta} = 0$$

$$P_{K_3} = \frac{2M_p}{\ell} = P_{K_2}$$

$$\boxed{P_u = \frac{2M_p}{\ell}}$$ → IL MECCANISMO PUÒ ESSERE IL K_2 O IL K_3

Metodo Statico

$$\begin{cases} V_A + V_B = 3P \\ H_A + H_B = 2P \\ M_A - M_B + 3P\ell + 2P\ell - V_B 2\ell = 0 \end{cases}$$

4 parametri liberi

$$M_C = M_A + H_A 2\ell$$

$$M_D = M_A + H_A 2\ell + V_A \ell$$

$$M_E = M_B - H_B 2\ell$$

S_2 dovute a K_2

$$\left.\begin{aligned} M_A &= -2M_p \\ M_C &= 2M_p \\ M_E &= -2M_p \\ M_B &= 2M_p \end{aligned}\right\} \quad |M_D| \le 3M_p \ ?$$

$$M_D = \dots = 3M_p$$

ESERCIZIO 1

$$\left.\begin{aligned} Cr &= 3 \\ n &= 1 \end{aligned}\right\} \text{ 2 meccanismi indipendenti}$$

Meccanismo di Trave (M_1)

(M_2) Parete

$\Delta\dot{\varphi}_{AC} = \dot{\theta}_2$

$\Delta\dot{\varphi}_{CA} = \dot{\theta}_2$

$\Delta\dot{\varphi}_{CD} = (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$

$\Delta\dot{\varphi}_{DC} = (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$

$\Delta\dot{\varphi}_{DE} = -\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2$

$\Delta\dot{\varphi}_{ED} = -\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2$

$\Delta\dot{\varphi}_{EB} = \dot{\theta}_2$

$\xrightarrow{+} \Delta\dot{u}_C = \dot{\theta}_2 l$

$+\downarrow \Delta\dot{v}_D = \dot{\theta}_1 \frac{l}{2} + \dot{\theta}_2 \frac{l}{2}$

$K_1 \equiv \mu_1$

$$P = V\dot\theta_1 \frac{\ell}{2} - 4\mu_p\dot\theta_1 = 0$$

$$\boxed{V_{K1} = \frac{8\mu_p}{\ell}}$$

$K_2 \equiv \mu_2$

$$P = H\ell\dot\theta_2 + V\ell\frac{\dot\theta_2}{2} - 4\mu_p\dot\theta_2 = 0$$

$$\boxed{\frac{V_{K2}}{2} + H_{K2} = \frac{4\mu_p}{\ell}}$$

(K4)

$$(l+h):2l = h:l/2 \Rightarrow h = l/3$$

$$\dot\theta \cdot l = \dot\varphi h \Rightarrow \dot\varphi = \frac{l}{h}\dot\theta = 3\dot\theta$$

$$\dot\varphi \cdot h = \dot\psi l \Rightarrow \dot\psi = \frac{h}{l}\dot\varphi = \dot\theta$$

$$P = H \cdot l\dot\theta - V\frac{l}{2}\dot\theta - M_{pl}(4\dot\theta + 4\dot\theta) = 0$$

$$\boxed{H_{ks} - \frac{V_{ks}}{2} = \frac{8M_{pl}}{l}}$$

K_3 che NON sviluppi CP in C ma solo in D ed E

Si ha PSR $\quad \Delta\dot{\varphi}_{CA} = \Delta\dot{\varphi}_{CD} \longrightarrow \dot{\theta}_1 = 2\dot{\theta}_2$

$$x : \frac{\ell}{2} = (\ell + x) : 2\ell$$

$$x = \frac{\ell}{3}$$

$$P = H\,\ell\dot{\varphi} + V\cdot\frac{\ell}{2}\,3\dot{\varphi} - M_p(\dot{\varphi} + 3\dot{\varphi} + 3\dot{\varphi} + \dot{\varphi}) = 0$$

$$\boxed{H_{K_3} + \frac{3}{2}V_{K_3} = \frac{8M_p}{\ell}}$$

K_4 NO CP in E, SÌ CP in C e D

Si ha PSR $\quad \Delta\dot{\varphi}_{CD} = \Delta\dot{\varphi}_{EB} \longrightarrow \dot{\theta}_1 = -2\dot{\theta}_2$

Analisi statica

$$\begin{cases} V_A + V_B = V \\ H_A + H_B = H \\ V_B\,2\ell = H\ell + \frac{3}{2}V\ell \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_C = (V_A + H_A)\ell \\ M_D = -H_B\ell + V_B\frac{\ell}{2} \\ M_E = -H_B\ell \end{cases} \qquad \{|M_C|;\ |M_D|;\ |M_E|\} \le M_p$$

S_2 dovuto a K_2

$M_C = +M_p$

$M_E = -M_p$

$$\boxed{H_{S2} = \frac{4M_p}{\ell} - \frac{V_{S2}}{2}} \equiv K_2$$

$$\begin{cases} V_B = 2\dfrac{M_p}{\ell} + \dfrac{V_{S2}}{2} \\ V_A = -2\dfrac{M_p}{\ell} + \dfrac{V_{S2}}{2} \\ H_A = \dfrac{3M_p}{\ell} - \dfrac{V_{S2}}{2} \\ H_B = \dfrac{M_p}{\ell} \end{cases}$$

$$M_D = -\frac{M_p}{\ell}\ell + \left(2\frac{M_p}{\ell} - \frac{V_{S2}}{2}\right)\frac{\ell}{2} =$$

$$= -\cancel{M_p} + \cancel{M_p} + \frac{V_{S2}}{4}\ell$$

$$|M_D| \le M_p \iff \underline{V_{S2} \in \left[0, \frac{4M_p}{\ell}\right]}$$

↳ sul grafico V deve essere minore di 4

ESERCIZIO 1

$$\left.\begin{array}{l} cr = 4 \\ n = 1 \end{array}\right] \text{3 meccanismi indipendenti}$$

$\mathcal{M}_1$ Parete

$\mathcal{M}_2$ Trave

$\mathcal{M}_3$

$\mathcal{M}_1$ associato a $\mathcal{M}_1$

$$\underbrace{\mathcal{P}}_{=0} = P \cdot \frac{l}{2} 2\dot\theta_1 - P\frac{l}{2}\dot\theta_1 - M_p 2\dot\theta_1 - M_p\dot\theta_1$$

$$\boxed{P_{\mathcal{M}_1} = \frac{6M_p}{l}}$$

K_1 associato a M_2

$$\mathbb{P} = 2P\,\dot\theta_2\,2\frac{\ell}{3} - M_p\,6\dot\theta_2 = 0$$

$$\boxed{P_{K_2} = \frac{9}{2}\frac{M_p}{\ell}} < P_{K_1} \Rightarrow \text{MIGLIORE}$$

K_3 associato a M_3

$$\mathbb{P} = P\,\dot\theta_3\,\frac{\ell}{2} - M_p\,3\dot\theta_3 = 0$$

$$\boxed{P_{K_3} = \frac{6\,M_p}{\ell}} = P_{K_1} < P_{K_2}$$

K_4

PERCHÉ IN C NON SI SVILUPPI LA C.P. SI DEVE AVERE $2\varphi_1 = \varphi_2$, $\varphi_3 = 0$

$\Downarrow$

$2\dot\theta_1 = \dot\theta_2 = \dot\theta_4$, $\dot\theta_3 = 0$

$d : \frac{\ell}{3} = \frac{\ell}{2} + d : \ell$

$3d = \frac{\ell}{2} + d$

$d = \frac{\ell}{4}$

$$\mathbb{P} = P\,\cancel{\dot\theta_4}\,\frac{\ell}{2} + 2P\,\cancel{\dot\theta_4}\,\frac{2\ell}{3} - P\,\frac{\cancel{\dot\theta_4}}{2}\,\frac{\ell}{2} - M_p\,\frac{11}{2}\,\cancel{\dot\theta_4} =$$

$$\boxed{P_{K_4} = \frac{66}{19}\frac{M_1}{\ell} \simeq 3.473\,\frac{M_1}{\ell}} < P_{K_2}$$

$= P_4$

COLLASSO e DEFORMABILITÀ

• Se $\beta \to 0$ $K \to \infty$

• Se $\beta \to \infty \to K \to 0$

$$P = P\frac{l}{2}\theta - M_p\theta \cdot 2$$

$$P_u = \frac{4M_p}{l}$$

PARADOSSO DI STUSSI e KOLLBRUNNER

IL CINEMATISMO SI PUÒ RICONDURRE ALL'ARCO A 3 CERNIERE ALLINEATE

$$P = P_u \cdot \frac{l}{2}\theta - 2M_p\theta$$

$$P_u = \frac{8M_p}{l}$$

COME MAI C'È QUESTA INCONGRUENZA?

QUALE IL CARICO DI COLLASSO VERO?

Analisi Evolutiva

SI OTTIENE CHE:

$$P_I = \frac{8M_p}{l}\,\frac{2\beta+3}{4\beta+3} \longrightarrow \delta_I = \frac{M_p l^2}{24EJ}\,\frac{8\beta+3}{4\beta+3}$$

$$P_{II} = P_u = \frac{8M_p}{l} \longrightarrow \delta_u = \frac{M_p l^2}{24EJ}(4\beta+1)$$

È SBAGLIATO $P_u = \frac{4M_p}{l}$?

INGEGNERISTICAMENTE PARLANDO È CORRETTO $P_u = 8\frac{M_p}{l}$ ($\beta \to \infty$) PERCHÉ PER $\beta \to \infty$ PER ARRIVARE A $8\frac{M_p}{l}$ SI DOVREBBE AVERE DEFORMAZIONE INFINITA (IMPOSSIBILE) PER CREARE LA TERZA CP

7/10/2019

DOMINI DI INTERAZIONE

ABBIAMO INTRODOTTO

solo sforzo assiale — solo momento flettente

SUPPONIAMO CHE LA STRUTTURA SIA SOTTOPOSTA A 2 SOLLECITAZIONI S_1 e S_2 NELLA SEZIONE DI ESAME

$$S_j \begin{cases} \text{Azione Assiale} \\ \text{Momento flettente } (z;\ x \text{ e } y) \\ \text{Taglio } (2) \\ \text{Torsione} \end{cases}$$

LA FRONTIERA È SEMPRE CONVESSA!

IN QUESTO MODO SI PUÒ CAPIRE COME SI COMPORTA LA SEZIONE CON PIÙ SOLLECITAZIONI. IN CASO DI 3 SOLLECITAZIONI IL DOMINIO SAREBBE UN SOLIDO.

PRESSO (TENSO)-FLESSIONE

ENTRAMBE LE SOLLECITAZIONI PRODUCONO σ_z

SEZIONI A DOPPIO ASSE DI SIMMETRIA

Dominio Elastico

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M}{J} y$$

$$\max\{|\sigma_z|\} \equiv \sigma_y$$

IL MASSIMO TENSIONALE, ESSENDO σ_z UNA FUNZIONE LINEARE IN y, SI HA PER

$$y = \pm \frac{h}{2}$$

$$\sigma_z\left(y = \pm \frac{h}{2}\right) = \left| \frac{N}{A} \pm \frac{M}{J}\frac{h}{2} \right| \leq \sigma_y$$

DIVIDO PER σ_y

$$\left| \underbrace{\frac{N}{A\sigma_y}}_{N_y} \pm \underbrace{\frac{M}{J}\frac{h}{2}\frac{1}{\sigma_y}}_{\frac{1}{W}\frac{1}{\sigma_y} = \frac{1}{M_y}} \right| \leq 1 \longrightarrow \left| \frac{N}{N_y} \pm \frac{M}{M_y} \right| \leq 1$$

RICORDANDO CHE $N_y = N_p$,

A COLLASSO:

$$|\sigma_z(y)| = \sigma_y \quad , \forall y \in \left[-\frac{h}{2}, +\frac{h}{2}\right]$$

POSSO AVERE UNA DISTRIBUZIONE A BLOCCHI

$$\begin{cases} M = \sigma_y Z_f(d) \\ N = \sigma_y A_N(d) \end{cases}$$

$$\frac{M}{M_p} = \frac{\cancel{\sigma_y}\, Z_f(d)}{\cancel{\sigma_y}\, Z} = \frac{M}{M_p}\left(\frac{N}{N_p}\right)$$

$$\frac{N}{N_p} = \frac{\cancel{\sigma_y}\, A_N(d)}{\cancel{\sigma_y}\, A} \xrightarrow{\text{inverto}} d = d\left(\frac{N}{N_p}\right)$$

specificabile una volta definita la sezione

SEZIONE RETTANGOLARE

$$M = \sigma_y\, b\left[\frac{h}{2}-d\right]\left[2d + \cancel{2}\left(\frac{h}{2}-d\right)\frac{1}{\cancel{2}}\right] = \sigma_y\, \underbrace{b\left(\frac{h}{2}-d\right)\left(\frac{h}{2}+d\right)}_{Z_f(d)}$$

$$N = \sigma_y\, \underbrace{b\, 2d}_{A_N(d)}$$

$$M(d=0) = \sigma_y\, \underbrace{b\,\frac{h^2}{4}}_{Z \text{ per la sez. rettangolare}} = M_p$$

$$N\left(d = \pm\frac{h}{2}\right) = \sigma_y\, b h = N_p$$

$$\begin{cases} \dfrac{M}{M_p} = \dfrac{h^2/4 - d^2}{\frac{h^2}{4}} = 1 - \left(\dfrac{2d}{h}\right)^2 \\ \dfrac{N}{N_p} = \dfrac{2d}{h} \end{cases} \rightarrow \boxed{\frac{M}{M_p} = 1 - \left(\frac{N}{N_p}\right)^2}$$

COLLASSO PER L'INTERAZIONE DI FLESSIONE E AZIONE ASSIALE

Se $\frac{N}{N_p} = \varepsilon$, piccolo $\Rightarrow$ $\frac{M}{M_p} = 1 - \varepsilon^2$

PLOTTANDO NEL GRAFICO DI PAG. 107:

SEZIONE A DOPPIO T

SEZIONE A T (1 ASSE DI SIMMETRIA)

FLESSIONE e TAGLIO

SEZIONE RETTANGOLARE

PER VON MISES:

$$\sqrt{\sigma_z^2(y) + 3\,\tau^2(y)} \le \sigma_y$$

O SCEGLIERE PER FLESSIONE O SCEGLIERE PER TAGLIO POICHÉ IL MASSIMO SI HA PER Y DIFFERENTI

$$T_p = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}}\, bh \longrightarrow$$

ESERCIZIO 1

Cerniera plastica mobile

Teorema Cinematico

$$P = q\beta l\left(\dot\theta\frac{\beta l}{2}\right) + q(1-\beta)l\left(\dot\theta\frac{\beta}{(1-\beta)}(1-\beta)l\right)\frac{1}{2} - M_p\dot\theta - 2M_p\frac{\dot\theta\beta}{1-\beta} = 0$$

$$q_K = \frac{2M_p}{l^2}\,\frac{1+\beta}{\beta(1-\beta)} = q_K(\beta)$$

$$\min_{\beta\in[0,1]}\{q_K(\beta)\} = q_K(\beta=\sqrt{2}-1) = \frac{2(3+2\sqrt{2})}{l^2}M_p \simeq 11.657\,\frac{M_p}{l^2}$$

Analisi Evolutiva

0 Fase Elastica

$$\frac{M_B l}{3EJ} = -\frac{M_B l}{6EJ} - \frac{ql^3}{24EJ}$$

$$\downarrow$$

$$M_B = -\frac{ql^2}{16} \simeq -0.063\,ql^2$$

$$M(s) = \frac{7}{16}ql\,s - q\frac{s^2}{2}$$

$$\max_{s\in[0,l]}\{M(s)\} = M\left(s=\frac{7l}{16}\right) = \frac{49}{512}ql^2 \simeq 0.096\,ql^2 > |M_B|$$

$$q_{II} = \frac{512}{49} \frac{M_p}{\ell^2}$$

10.449

PORCHÈ IN B SI INSTAURI UNA CP, LA CERNIERA PLASTICA GIÀ CREATA SI SPOSTA.

$\boxed{I}$ Fase post creazione I CP:

BLOCCANDO LA CP NEL PUNTO DI I° CREAZIONE SI OTTERREBBE UN Δq CHE AUMENTA IL CARICO, MA ANDREBBE FUORI RESISTENZA.

DEVO RILASCIARE LA POSIZIONE DELLA CP IN CAMPATA, ALTRIMENTI IL GRAFICO DI MOMENTO NON SODDISFA LA RESISTENZA (E NON ARRIVA A CREARE MECCANISMO DI COLLASSO).

$M(s) = M_I(s) + \Delta M(s)$ dipende da Δq e d

d si ottiene imponendo

$$\max_{s=s^*(d)} \{M(s)\} = M_p$$

$$\Delta q \rightarrow d(\Delta q) \longrightarrow s^*(d(\Delta q))$$

$$\begin{cases} \dfrac{d(\Delta q)}{\ell} = \dfrac{-64 + 2\sqrt{1024 + 98\,\Delta q\,\ell^2/M_p}}{7\,\Delta q\,\ell^2/M_p} \\[2ex] \dfrac{s^*}{\ell}(d(\Delta q)) = \dfrac{\frac{32}{7} + \frac{d}{\ell}\,\Delta q\,\ell^2/M_p}{\frac{512}{49} + \frac{\Delta q\,\ell^2}{M_p}} \end{cases}$$

$$\Delta q_u \Rightarrow M_B = -M_p \longrightarrow \Delta q_u \Rightarrow q_u = (6 + 4\sqrt{2})\,\frac{M_p}{\ell^2}$$

DINAMICA DELLE STRUTTURE

- ANALISI DINAMICA DI SISTEMI DISCRETI
  - 1 gdl
  - N gdl
- ANALISI DINAMICA DI SISTEMI CONTINUI

---

1. Comportamento elastico - lineare ✗ plasticità
2. Spostamenti infinitesimi
3. Applicazione quasi statica dei carichi ✗ dinamica

DALLA II LEGGE DI NEWTON:

$$\sum_i \underline{F}_i(t) = m\,\ddot{\underline{x}}(t)$$

IN SdC: $\ddot{\underline{x}}(t) = 0 \longrightarrow \sum_i \underline{F}_i(t) = \underline{0}$ ← RISOLVERE L'EQUILIBRIO

SE $\underline{x}$ VARIA IN MANIERA CONSISTENTE SI RICAVA, DALL'EQUAZIONE DEL MOTO, E ASSEGNATE LE CONDIZIONI INIZIALI, LA SOLUZIONE

$$\text{C.I.} \left| \begin{array}{l} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \end{array} \right. \longrightarrow x(t) = \dots$$

NEL MODELLO SOLIDO CONTINUO ELASTICO:

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) + \underline{b}(\underline{x}, t) = \underbrace{\rho(\underline{x})\,\ddot{\underline{x}}(t)}_{=0 \text{ se } \ddot{\underline{x}}(t)=0 \iff \text{Q.S.}}$$

COSA SIGNIFICA QUASI STATICO?

SI RIFERISCE A UN RAPPORTO DI TEMPO CARATTERISTICO DELLA FORZA E TEMPO CARATTERISTICO DELLA STRUTTURA

FORZANTE SINUSOIDALE

$$F(t) = \bar{F} \sin \omega t = \bar{F} \sin \frac{2\pi t}{t_r} \quad , \quad t_r = \frac{2\pi}{\omega}$$

LA Q-S SI HA QUANDO

Caratteristica della struttura $\frac{T_1}{t_r} \to 0$

caratter. della forzante

Se $\frac{T_1}{t_r} \to 0 \Rightarrow$ Q.S

Se $\frac{T_1}{t_r} >> 0 \Rightarrow$ effetti dinamici

PROBLEMA DINAMICO

SI INTRODUCE ANCHE UNA VARIABILE TEMPORALE OLTRE CHE SPAZIALE.

PER SEMPLIFICARE LA REALTÀ SI UTILIZZANO MODELLI SEMPLIFICATI

1D e 2D

s, t $\qquad$ x_1, x_2, t

MODELLO SEMPLIFICATO
$\rightarrow \infty$ gde nel tempo t
(PDE)

$y(s,t) \simeq y(\underline{q}(t))$, $\dim(\underline{q}) = N$

∞ gde $\rightarrow$ N gde in t

MODELLO DISCRETO

$$m_1 \ddot{q}_1(t) + k_1 q_1(t) = F_1(t)$$

(ODE)

$N = 1$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1(t) \\ \ddot{q}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{bmatrix}$$

$N = 2$

$m_i = \gamma l / N+1$

N

$$\underline{\underline{M}}\,\ddot{\underline{q}}(t) + \underline{\underline{K}}\,\underline{q}(t) = \underline{F}(t)$$

↳ SISTEMA DI N ODE

SI DISCRETIZZANO SOLO LE MASSE

↓

CONCENTRATE NEI NODI

CAUSE CHE PRODUCONO EFFETTI DINAMICI

- VARIAZIONI DI FORZA NEL TEMPO
  - MODULO VARIABILE (ma punto di applicazione costante)

  - FORZE ROTANTI (p.to di applicazione costante)

$\bar{F}$ riconducibile a quella a modulo variabile

  - FORZA MOBILE (modulo costante ma p.to di applicazione variabile)

- MOTO IMPRESSO → HA UN EFFETTO EQUIVALENTE DINAMICO

↳ PRODUCE UNA FORZANTE EQUIVALENTE CHE VARIA NEL TEMPO.

STUDIEREMO **PICCOLE OSCILLAZIONI DI SISTEMI DINAMICI ELASTICI**

$\sin\theta \simeq \theta$

$\cos\theta \simeq 1$

$x \simeq y''$

$$F(\Delta x) = \underbrace{\cancel{F(0)}}_{\text{equilibrio}} + \underbrace{F'(0)}_{K}\Delta x + \frac{1}{2}F''(0)\Delta x^2 + \dots$$

Se il legame è ELASTICO

$\Downarrow$

ELASTICO LINEARE

PICCOLI SPOSTAMENTI + ELASTICITÀ $\Rightarrow$ ODE LINEARE A COEFFICIENTI COSTANTI

$\downarrow$

OTTENIAMO SOLUZIONI IN FORMA CHIUSA!

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = 0$$

OSCILLATORE SEMPLICE ($N=1$) NON SMORZATO

Diagramma di Corpo libero

II Legge di Newton

$$F(t) - Kx(t) = m\ddot{x}(t)$$

PRINCIPIO DI D'ALAMBERT

SCRIVI L'EQUAZIONE DI EQUILIBRIO DINAMICO AGGIUNGENDO ALLE FORZE ESISTENTI LE FORZE DI INERZIA PERSE

$$-m\ddot{x}(t) + F(t) - Kx(t) = 0$$

$$F_I(t) + F_{el}(t) = F_{ext}(t)$$

CIOÈ

$$\boxed{m\ddot{x}(t) + Kx(t) = F(t)}$$

PER N gdl:

$$\underbrace{\underline{\underline{M}}\,\ddot{\underline{q}}(t)}_{\underline{F}_I(t)} + \underbrace{\underline{\underline{K}}\,\underline{q}(t)}_{\underline{F}_{el}(t)} = \underline{F}(t)$$

PER MODELLO CONTINUO DI TRAVE:

$$\underbrace{\gamma(s)\,\ddot{y}(s,t)}_{F_{Inerzia}} + \underbrace{\left[EJ(s)\,y''(s,t)\right]''}_{F_{el}} = \underbrace{q(s,t)}_{F_{ext}} \qquad (PDE)$$

SISTEMI EQUIVALENTI A 1 gdl

Teorema di Castigliano

$$M(s) = F(h-s) \qquad \chi(s) = \frac{M(s)}{EJ}$$

$$\frac{1}{2}F\delta = \frac{1}{2}\int_0^h M(s)\,\chi(s)\,ds = \frac{F^2}{2EJ}\int_0^h (h-s)^2\,ds =$$

$$= \frac{F^2}{2EJ}\,\frac{1}{3}\left[-(h-s)^3\right]_0^h = \frac{F^2}{\cancel{6}_{3}EJ}(h^3-0) = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{F}\delta$$

$$\delta = \frac{Fh^3}{3EJ} \Longrightarrow \boxed{K = \frac{F}{\delta} = \frac{3EJ}{h^3}}$$

ALLORA, L'EQUAZIONE DEL MOTO DEL TORRINO PIEZOMETRICO:

$$\boxed{m\ddot{x}(t) + \frac{3EJ}{h^3}\,x(t) = F(t)}$$

⓪ Telaio a 1 piano

$m = m_1 + m_2$

$K = ?$

SISTEMA 5×5

$M_A, M_B, M_C, M_D, \varphi \longrightarrow \boxed{\delta = \varphi h}$

$$\delta = \frac{3 + 2\,K_p/K_t}{6 + K_p/K_t}\,\frac{F h^3}{12 E J_p}$$

$$K_p = \frac{6 E J_p}{h}, \qquad K_t = \frac{6 E J_t}{\ell}$$

$$K = \frac{F}{\delta} = \frac{12 E J_p}{h^3}\,\frac{6 + K_p/K_t}{3 + 2\,K_p/K_t}$$

$$(m_1 + m_2)\,\ddot{x}(t) + \frac{12 E J_p}{h^3}\,\frac{6 + K_p/K_t}{3 + 2\,K_p/K_t}\,x(t) = F(t)$$

$$\lim_{\frac{K_p}{K_t} \to 0} K = \frac{24\,EJ_p}{h^3}$$

$$\lim_{\frac{K_p}{K_t} \to \infty} K = \frac{6EJ_p}{h^3}$$

MOTO IMPRESSO

$u_g(t)$ = SPOSTAMENTO TERRENO

$x(t)$ = SPOSTAMENTO RELATIVO DEL TERRENO IN MOVIMENTO

$U(t)$ = SPOSTAMENTO ASSOLUTO (RISPETTO ALLO STESSO FISSO)

Allungamento della molla: $x(t) = U(t) - u_g(t) - \Delta$

Accelerazione (assoluta) della massa: $\ddot{U}(t) = \ddot{u}_g(t) + \cancel{\ddot{\Delta}}^{\,0} + \ddot{x}(t)$

$$m\ddot{U}(t) + K\,x(t) = 0$$

$\to$ $m\ddot{U}(t) + K\,U(t) = K\,u_g(t) + \Delta$ nel sistema assoluto

$\to$ $m\ddot{x}(t) + K\,x(t) = \underbrace{-m\ddot{u}_g(t)}_{F(t)}$ nel sistema relativo

OSCILLAZIONI LIBERE ($F(t)=0$)

$$m\ddot{x}(t) + k\,x(t) = 0 \qquad \{m, k\} > 0$$

$$\ddot{x} + \omega_1^2\, x(t) = 0 \quad , \quad \omega_1^2 = \frac{k}{m} > 0$$

$$x(t) = e^{\lambda t} \; ; \quad \dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t} \; ; \quad \ddot{x}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

$$\underbrace{(\lambda^2 + \omega_1^2)}_{=0} e^{\lambda t} = 0 \quad , \quad \forall t \longrightarrow \lambda^2 = -\omega_1^2 < 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i\,\omega_1 \longrightarrow \boxed{x(t) = C_1 e^{+i\omega_1 t} + C_2 e^{-i\lambda_1 t}}$$

Formula di Eulero

$$e^{\pm i\omega_1 t} = \cos(\omega_1 t) \pm i \sin(\omega_1 t)$$

$$x(t) = \underbrace{(C_1 + C_2)}_{A} \cos \omega_1 t + \underbrace{i\,(C_1 - C_2)}_{B} \sin \omega_1 t$$

$$\boxed{x(t) = A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t} \quad , \quad \{A, B\} \in \mathbb{R}$$

C_1 e C_2 COMPLESSI CONIUGATI!

ω_1 = PULSAZIONE DEL SISTEMA = numero di radianti per unità di tempo

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\left[\frac{F/L}{F/L\; t^2}\right]} = \left[\frac{1}{t}\right]$$

$T_1 = \dfrac{2\pi}{\omega_1}$ = PERIODO PROPRIO DEL SISTEMA $= [t] = [s]$ { tempo necessario per compiere un'oscillazione completa

$f_1 = \dfrac{1}{T_1}$ = FREQUENZA PROPRIA $= \left[\dfrac{1}{s}\right] = [Hz]$ = numero di oscillazioni completate nell'unità di tempo.

SI PUÒ RISCRIVERE COME

$$x(t) = R\sin(\omega_1 t + \phi) = \underbrace{R\cos\phi}_{B}\sin\omega_1 t + \underbrace{R\sin\phi}_{A}\cos\omega_1 t$$

$$\begin{cases} R = \sqrt{A^2+B^2} \\ \tan\phi = A/B \end{cases} \iff \begin{array}{l} A = R\sin\phi \\ B = R\cos\phi \end{array}$$

PER DEFINIRE I 2 PARAMETRI LIBERI R, ϕ (o A, B) IMPONGO LE CONDIZIONI INIZIALI

$$\begin{cases} x(t=0) = x_0 \\ \dot{x}(t=0) = \dot{x}_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = A\cos\omega_1 t + B\sin\omega_1 t \\ \dot{x}(t) = -\omega_1 A\sin\omega_1 t + B\omega_1\cos\omega_1 t \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = A = x_0 \\ \dot{x}(0) = \omega_1 B = \dot{x}_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = x_0 \\ B = \dfrac{\dot{x}_0}{\omega_1} \end{cases} \longrightarrow \boxed{x(t) = x_0\cos\omega_1 t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_1}\sin\omega_1 t}$$

AFFINCHÉ CI SIA MOTO DEVO AVERE $x_0 \neq 0$ o $\dot{x}_0 \neq 0$ (o ENTRAMBE)

Se $x_0 = \dot{x}_0 = 0 \Longrightarrow x(t) = 0$

EQUIVALENTEMENTE:

$$\begin{cases} R = \sqrt{x_0^2 + \left(\dfrac{\dot{x}_0}{\omega_1}\right)^2} \\ \tan\phi = \dfrac{x_0\omega_1}{\dot{x}_0} \end{cases}$$

PLOTTANDOLA:

8/10/2019 $|x_0 \neq 0|$

$x(t+sT_1) = x(t) \quad \forall\, t,\ \forall\, s \in \mathbb{R}$

$\dot{x}_0 = 0$ tangente orizzontale

$\dot{x}_0 > 0$ tangente verso l'alto

L'ENERGIA ELASTICA E QUELLA CINETICA SONO RISPETTIVAMENTE:

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} K x^2(t) = \frac{1}{2} K R^2 \sin^2(\omega_1 t + \phi)$$

$$T(t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) = \frac{1}{2} m \left[\omega_1 R \cos(\omega_1 t + \phi)\right]^2 = \frac{1}{2} \underbrace{m \omega_1^2}_{K} R^2 \cos^2(\omega_1 t + \phi)$$

L'ENERGIA TOTALE

$$\mathcal{E}(t) + T(t) = \frac{1}{2} K R^2 \left[\sin^2(\omega_1 t + \phi) + \cos^2(\omega_1 t + \phi)\right] = \underbrace{\frac{1}{2} K R^2}_{= \text{cost}}, \quad \forall t$$

L'ENERGIA SI CONSERVA. IL MASSIMO SI HA QUANDO $\dot{x}(t) = 0$

$$\text{Se } \dot{x}(t^*) = 0 \Rightarrow T(t^*) = 0 \Rightarrow \mathcal{E}(t^*) = \max_t \{\mathcal{E}(t)\} = \frac{1}{2} K R^2$$

$$= \frac{1}{2} K \max_t \{|x(t)|\}^2$$

CIOÈ QUANDO

$$R = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_1}\right)^2}$$

$$x(t) = R \sin(\omega_1 t + \phi)$$

$$\text{Se } \dot{x}_0 = \frac{2\pi x_0}{T_1} \longrightarrow R = x_0 \sqrt{2}$$

Free Undamped Oscillation $x_0 \neq 0$

Free Undamped Oscillation $x_0=0$ $\rightarrow x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t$

SE L'ENERGIA È COSTANTE:

$$\frac{d}{dt}\left[\mathcal{E}(t) + T(t)\right] = 0 \qquad \text{cioè}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2} k\, x^2(t) + \frac{1}{2} m\, \dot{x}(t)\right] = \cancel{\frac{1}{2}} k\, \cancel{2}\, x(t)\, \dot{x}(t) + \cancel{\frac{1}{2}} m \cdot \cancel{2}\, \dot{x}(t)\, \ddot{x}(t) =$$

$$= \dot{x}(t)\left[k\, x(t) + m\, \ddot{x}(t)\right] = 0 \qquad \forall\, t$$

FORZANTE COSTANTE A GRADINO

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \bar{F} & t \geq 0 \end{cases}$$

se $\frac{t_r}{T_1} \to 0$ → IL TEMPO CHE CI SI METTE AD ARRIVARE A FORZA COSTANTE È MOLTO PIÙ PICCOLO DEL PERIODO CARATTERISTICO DELLA STRUTTURA.

L'EQUAZIONE DA RISOLVERE È:

$$m\ddot{x}(t) + k\, x(t) = \bar{F} \qquad \forall\, t \geq 0$$

$$x(t) = x_{omogenea}(t) + x_{particolare}(t)$$

$$x_{omogenea}(t) = A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t$$

$$x_p(t) = \frac{\bar{F}}{K} = x_{st} \to x \text{ STATICO}$$ → SPOSTAMENTO SE LA FORZA FOSSE STATA APPLICATA IN MANIERA Q-S

$$\begin{cases} x(t) = A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 (t) + \dfrac{\bar{F}}{K} \\ \left.\begin{matrix} x_0 = 0 \\ \dot{x}_0 = 0 \end{matrix}\right] \text{ sistema inizialmente in quiete} \end{cases}$$

$$x(0) = \frac{\bar{F}}{k} + A = 0 \rightarrow A = -\frac{\bar{F}}{k}$$

$$\dot{x}(0) = \omega_1 B = 0 \rightarrow B = 0$$

$$\boxed{x(t) = \frac{\bar{F}}{k}\left(1 - \cos \omega_1 t\right) = x_{st}\left(1 - \cos \omega_1 t\right)} \quad \forall\, t \geq 0$$

IN SdC AVREMMO FATTO

$$\cancel{m\ddot{x}(t)} + k\,x(t) = \bar{F} \rightarrow x_{QS}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ x_{st} & t > 0 \end{cases}$$

$$\max_t \{x(t)\} = 2\,x_{st} \rightarrow$$ GLI EFFETTI DINAMICI AMPLIFICANO DI UN FATTORE 2 LA RISPOSTA Q-S

QUANDO IL SISTEMA È CONSERVATIVO

SE IL SISTEMA NON È CONSERVATIVO (ES. STRUTTURE CIVILI) L'AMPLIFICAZIONE È DI CIRCA 1,3!

FORZANTE SINUSOIDALE

$$F(t) = \bar{F} \sin \omega t$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$x_{as}(t) = \frac{F(t)}{K} = x_{st} \sin \omega t$$

L'EQUAZIONE DEL MOTO:

$$m\ddot{x}(t) + K x(t) = \bar{F} \sin \omega t$$

$$\ddot{x}(t) + \omega_1^2 x(t) = \underbrace{\frac{\bar{F}}{K}}_{x_{st}} \underbrace{\frac{K}{m}}_{\omega_1^2} \sin \omega t$$

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + \omega_1^2 x(t) = \omega_1^2 x_{st} \sin \omega t \\ x_{part}(t) = X \sin \omega t \quad , \quad \text{se } \omega \neq \omega_1 \\ \ddot{x}_{part}(t) = -X \omega^2 \sin \omega t \end{cases}$$

SOSTITUENDO:

$$(-\omega^2 + \omega_1^2) X \cancel{\sin \omega t} = \omega_1^2 x_{st} \cancel{\sin \omega t} \quad , \quad \forall t$$

$$\boxed{X = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega^2} x_{st}} \boxed{= \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}} x_{st}}$$

$$x_{part}(t) = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}} x_{st} \sin \omega t$$

$$\boxed{x(t) = \underbrace{A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t}_{\text{OSCILLAZIONI LIBERE}} + \underbrace{\frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}} x_{st} \sin \omega t}_{\text{OSCILLAZIONI FORZATE}}}$$

Se c'è smorzamento
a $t \to \infty$ va a zero!

SE LA VELOCITÀ DELLA FORZANTE È MOLTO PIÙ PICCOLA DELLA PULSAZIONE DELLA STRUTTURA

$$\frac{\omega^2}{\omega_1^2} \to 0 \to \frac{1}{1-\cancel{\frac{\omega^2}{\omega_1^2}}} x_{st} \sin \omega t = x_{st} \sin \omega t = QS$$

CI SI RICONDUCE AL CASO Q-S

Se

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ \dot{x}(0) &= \dot{x}_0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} A &= x_0 \\ B &= \frac{\dot{x}_0}{\omega_1} = \frac{\omega/\omega_1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_1^2}} x_{st} \end{aligned}$$

Se $x(0) = \dot{x}(0) = 0$

$$x(t) = \frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_1^2}} x_{st} \left[\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right]$$

LA $x_{part}(t)$ PUÒ ESSERE ANCHE SCRITTA COME

$$x_{part}(t) = N\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right) x_{st} \sin\left[\omega t - \xi\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)\right]$$

$$\boxed{N = \frac{1}{\left|1-\frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right|}} = \text{coefficiente di amplificazione dinamica}$$

$$\boxed{\xi = \begin{cases} 0 & \text{se } \omega < \omega_1 \\ \pi & \text{se } \omega > \omega_1 \end{cases}} = \text{sfasamento}$$

0 → in fase → spostamento in fase alla forza

π → controfase → spostamento controfase alla forza

Se $\omega = \omega_1$

$$x_{part}(t) = -\frac{\omega_1 x_{st}}{2} t \cos \omega_1 t$$

$$\boxed{x(t) = \frac{x_{st}}{2}\left[\sin \omega_1 t - \omega_1 t \cos \omega_1 t\right]} \quad \omega = \omega_1$$

FORZANTE SINUSOIDALE

$$x_{part}(t) = N\left(\omega/\omega_1\right) x_{st} \sin\left[\omega t - \xi\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)\right]$$

$$N = \frac{1}{\left|1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right|}$$

$$\xi = \begin{cases} 0 & \omega < \omega_1 \\ \pi & \omega > \omega_1 \end{cases}$$

FORZANTE senza SMORZAMENTO

Undamped Forced $\frac{\omega}{\omega_1}=0.01$

Undamped Forced $\frac{\omega}{\omega_1}=0.1$

Undamped Forced $\frac{\omega}{\omega_1}=0.9$

Undamped Forced $\frac{\omega}{\omega_1}=2$ → Q-S a favore de sicurezza

Undamped Forced $\frac{\omega}{\omega_1}=2$

CONDIZIONI Q-S

Undamped Forced $\frac{\omega}{\omega_1}=10$ → A FAVORE DI SICUREZZA

Undamped Forced $\frac{\omega}{\omega_1}=1$

ENERGIA DELL'OSCILLATORE SEMPLICE

$$\frac{d}{dt}\left[\mathcal{E}(t) + T(t)\right] = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}K x^2(t) + \frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2\right] = \underbrace{\left[m\ddot{x}(t) + K x(t)\right]}_{F(t)} \dot{x}(t) =$$

$$= \underbrace{F(t)\,\dot{x}(t)}_{\Pi_a(t)} \overset{-\Pi_d(t)}{=} \Pi_a(t) - \Pi_d(t)$$

Potenza Forza Attiva

Potenza forza dissipativa

IN ASSENZA DELLA FORZA ESTERNA L'ENERGIA VIENE EROSA / DISSIPATA.

$$\Pi_d(t) = F_d(t) \cdot \dot{x}(t) \geq 0$$

$$F_d(t) = \begin{cases} F_A \, \mathrm{sign}(\dot{x}(t)) & \text{Forza d. Attrito} \\ c\,\dot{x}(t) & \text{Forza Viscosa} \end{cases}$$

$$\Pi_d(t) = F_A \, \mathrm{sign}(\dot{x}(t))\, \dot{x}(t) = F_A\, |\dot{x}(t)| \geq 0$$

$$\Pi_d(t) = c\,\dot{x}(t) \cdot \dot{x}(t) = c\,\dot{x}^2(t) \geq 0 \quad , c > 0$$

Se $\left[K x(t) + m\ddot{x}(t)\right]\dot{x}(t) = \left[F(t) - F_d(t)\right]\dot{x}(t)$ ALLORA

$$\boxed{\underbrace{m\ddot{x}(t)}_{\text{INERZIA}} + \underbrace{F_d(t)}_{\text{DISSIPATIVA}} + \underbrace{K x(t)}_{\text{ELASTICO}} = \underbrace{F(t)}_{\text{EXT}}}$$

SE F_d è VISCOSA

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t) \rightarrow \text{ODE II° LINEARE A COEFF. COSTANTI}$$

SE F_d È DI ATTRITO

$$m\ddot{x} + F_A \, sgn(\dot{x}(t)) + Kx(t) = F(t) \rightarrow \text{ODE II NON LINEARE}$$

CONSIDERO UNA

$$C = C_{eq} \left[\text{Fenomeni dissipativi nella struttura} \right]$$

OSCILLATORE SEMPLICE SMORZATO (VISCOSAMENTE)

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + Kx(t) = 0$$

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + 2\nu\omega_1\dot{x}(t) + \omega_1^2 x(t) = 0 \\ \omega_1 = \sqrt{\dfrac{K}{m}} \\ \nu = \dfrac{c}{c_{CR}} \geq 0, \quad c_{CR} = 2\sqrt{Km} \end{cases}$$

ν = rapporto di smorzamento viscoso

$c_{CR} = 2m\omega_1 = \dfrac{2K}{\omega_1}$ = smorzamento viscoso critico

PER LE STRUTTURE:

	ν
CA	0.05
MET SALD.	0.04
MET BULL.	0.07
CAP	0.07

PENSIAMO

$$x(t) = e^{\lambda t}, \quad \dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t}, \quad \ddot{x}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

SOSTITUENDO

$$(\lambda^2 + 2\nu\omega_1\lambda + \omega_1^2)e^{\lambda t} = 0, \quad \forall t$$

$$\lambda^2 + 2\nu\omega_1\lambda + \omega_1^2 = 0 \longrightarrow \lambda_{1,2} = \omega_1(-\nu \pm \sqrt{\nu^2 - 1})$$

Se $\nu > 1 \rightarrow$ 2 RADICI REALI e DISTINTE (NEGATIVE) $\{\lambda_1, \lambda_2\} < 0$

SMORZAMENTO SUPERCRITICO ($C > C_R$)

2 Se $\nu = 1 \Rightarrow$ 2 RADICI REALI NEGATIVE COINCIDENTI

$$-\nu\omega_1 = \lambda_1 = \lambda_2 < 0 \qquad \text{SMORZAMENTO CRITICO}$$
$$= -\omega_1$$

3 Se $\nu \in [0,1) \Rightarrow$ 2 RADICI COMPLESSE CONIUGATE CON PARTE REALE NEGATIVA

SMORZAMENTO SUBCRITICO
↳ STRUTTURE

$$\lambda_{1,2} = \omega_1\left(-\nu \pm i\sqrt{1-\nu^2}\right)$$

1 SMORZAMENTO SUPERCRITICO ($\nu > 1$)

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$
$$= C_1 e^{-\nu\omega_1 t} e^{\omega_1\sqrt{\nu^2-1}\,t} + C_2 e^{-\omega_1 t} e^{-\omega_1\sqrt{\nu^2-1}\,t}$$
$$= e^{-\nu\omega_1 t}\left[C_1 e^{\omega_1\sqrt{\nu^2-1}\,t} + C_2 e^{-\omega_1\sqrt{\nu^2-1}\,t}\right]$$

$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ ALL'INFINITO TERMINA CON LA CONFIGURAZIONE INDEFORMATA

↳ DECADIMENTO ESPONENZIALE

2 SMORZAMENTO CRITICO ($\nu = 1$)

$$x(t) = C_1 e^{-\nu\omega_1 t} + C_2 t\, e^{-\nu\omega_1 t} = e^{-\omega_1 t}\left[C_1 + C_2 t\right]$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$

3 SMORZAMENTO SUBCRITICO ($\nu \in [0,1)$)

$$x(t) = C_1 e^{-\nu\omega_1 t + i\omega_1\sqrt{1-\nu^2}\,t} + C_2 e^{-\nu\omega_1 t - i\omega_1\sqrt{1-\nu^2}\,t}$$
$$= e^{-\nu\omega_1 t}\left[C_1 e^{i\underbrace{\omega_1\sqrt{1-\nu^2}}_{\omega_{D1}}t} + C_2 e^{-i\underbrace{\omega_1\sqrt{1-\nu^2}}_{\omega_{D1}}t}\right]$$
$$= \boxed{e^{-\nu\omega_1 t}\left[A\cos\omega_{D1}t + B\sin\omega_{D1}t\right]}$$

$$\omega_{D1} = \omega_1\sqrt{1-\nu^2} \leq \omega_1$$

IL SISTEMA SMORZATO OSCILLA CON PULSAZIONE PIÙ LENTA

$$T_{D1} = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{T_1}{\sqrt{1-\nu^2}} \geq T_1 \qquad \text{PERIODO MAGGIORE}$$

Free Overdamped Oscillation $x_0 \neq 0$

ν=3

LO SMORZAMENTO SUPERCRITICO E' COST ELEVATO DA SMORZARE L'OSCILLAZIONE.

NON VA A SEGNO NEGATIVO

Free Critically damped Oscillation $x_0 \neq 0$

NON VA A SEGNO NEGATIVO

• Se $\nu \simeq 0$

(0.05 ÷ 0.07 come nelle strutture)

$$\begin{cases} \omega_{D1} \simeq \omega_1 \\ T_{D1} \simeq T_1 \end{cases}$$

damping (smorzamento)

• Se $\nu \to 1$

$$\begin{cases} \omega_{D1} \to 0 \\ T_{D1} \to \infty \end{cases} \to$$ L'OSCILLAZIONE NON È COMPIUTA

$$\begin{cases} x(t) = \ldots = R e^{-\nu\omega_1 t} \sin(\omega_{D1} t + \phi) \\ R = \sqrt{A^2+B^2} \\ \tan\phi = \frac{A}{B} \end{cases}$$

→ LO SMORZAMENTO DECADE e OSCILLA. HA PERCIÒ UN PERIODO!

FISSANDO

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \end{cases} \to \begin{cases} A = x_0 \\ B = \dfrac{\dot{x}_0 + \nu\omega_1 x_0}{\omega_1\sqrt{1-\nu^2}} \end{cases}$$

RAPPORTO TRA GLI SPOSTAMENTI DEGLI ISTANTI CHE DISTANO 1 PERIODO:

$$\begin{cases} \dfrac{x(\bar{t})}{x(\bar{t}+T_{D1})} = \dfrac{\cancel{R} \cancel{e^{-\nu\omega_1 \bar{t}}} \cancel{\sin(\omega_{D1}\bar{t}+\phi)}}{\cancel{R} e^{-\nu\omega_1(\bar{t}+T_{D1})} \cancel{\sin(\omega_{D1}\bar{t} + \underbrace{\omega_{D1} T_{D1}}_{2\pi} + \phi)}} \\ = e^{\nu\omega_1 T_{D1}} = e^{\nu \overbrace{\omega_1 \frac{T_1}{\sqrt{1-\nu^2}}}^{2\pi}} = e^{2\pi\nu/\sqrt{1-\nu^2}} \\ T_{D1} = \dfrac{T_1}{\sqrt{1-\nu^2}} \end{cases}$$

IL RAPPORTO TRA 2 PICCHI

$$\frac{x_j}{x_{j+1}} = e^{2\pi\nu/\sqrt{1-\nu^2}} \to \boxed{\ln\left(\frac{x_0}{x_{0+1}}\right) = \frac{2\pi\nu}{\sqrt{1-\nu^2}} = \delta}$$

DECREMENTO LOGARITMICO

IL RAPPORTO TRA PICCHI NON SUCCESSIVI

$$\frac{x(\bar{t})}{x(\bar{t}+nT_{D1})} = \dots = e^{n\omega_1 T_{D1}} = e^{\frac{n\nu\omega_n T_{D1}}{\sqrt{1-\nu^2}}} = e^{n\,2\pi\nu/\sqrt{1+\nu^2}}$$

$$\ln\left(\frac{x_0}{x_{0+n}}\right) = \frac{2\pi\nu n}{\sqrt{1-\nu^2}}$$

IL METODO DI STIMA PER LA $\nu_{equivalente}$ SI BASA SULLE OSCILLAZIONI LIBERE.

Se $\nu \simeq 0$ $\quad \frac{2\pi\nu}{\sqrt{1-\nu^2}} \simeq 2\pi\nu \rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} \nu &= \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{x_0}{x_{0+1}}\right) \\ \nu &= \frac{1}{2\pi n}\ln\left(\frac{x_0}{x_{0+n}}\right) \end{aligned}}$$

PICCHI SUCCESSIVI

PICCHI GENERICI

I° METODO DI VALUTAZIONE DI ν_{eq}

ANCHE QUI

$$\lim_{t\to\infty} x(t) \rightarrow 0$$

SMORZAMENTO PER ATTRITO (COULOMB)

ATTRITO DI COULOMB

$F_A(t) = \mathrm{Sign}[\dot{x}(t)]\,F_a$ si oppone al moto

$$m\ddot{x}(t) + K\,x(t) + \underbrace{\mathrm{Sign}[\dot{x}(t)]}_{\text{non lineare}}F_a = 0$$

Free Subcritically Damped Oscillation $x_0 \neq 0$, $\dot{x}_0 = \dfrac{2\pi x_0}{T1}$

Free Damped Oscillation $x_0 \neq 0$, $\dot{x}_0 = \dfrac{2\pi x_0}{T1}$

Se $\dot{x}(t) > 0$

- $m\ddot{x}(t) + Kx(t) = -F_a$

Se $\dot{x}(t) < 0$

- $m\ddot{x}(t) + Kx(t) = F_a$

2 EQ.NI DIFFERENZIALI LINEARI $\Downarrow$ HANNO SOLUZIONI DIVERSE

SOLUZIONI:

- $\begin{cases} x(t) = A_0 \cos\omega_1 t + B_0 \sin\omega_1 t - x_F \\ x_F = \dfrac{F_a}{K} \end{cases}$

- $x_t = A_0 \cos\omega_1 t + B_0 \sin\omega_1 t + x_F$

CONSIDERANDO LE SEGUENTI CI.

$\begin{cases} x(0) = x_0 > 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$

I INTERVALLO: $\dot{x} < 0$

$\begin{cases} x(t) = A_1 \cos\omega_1 t + B_1 \sin\omega_1 t + x_F \\ x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$

$\hookrightarrow \begin{cases} B_1 = 0 \\ A_1 = x_0 - x_F \end{cases}$

I INTERVALLO:

$\boxed{x(t) = x_F + (x_0 - x_F)\cos\omega_1 t, \quad \begin{cases} \forall t \in \left[0, \frac{T_1}{2}\right] \\ \text{Se } x_0 > x_F \end{cases}}$

$\hookrightarrow$ VALE FINCHÉ NON CAMBIA LA VELOCITÀ $\hookrightarrow$ altrimenti $x(t) = x_0 \ \forall t$

IL MOTO SI AVVIA SE: $Kx_0 > F_a \rightarrow x_0 > \dfrac{F_a}{K} = x_F$

$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\omega_1(x_0 - x_F)\sin\omega_1 t = 0 \\ \dot{x}\left(t = \frac{T_1}{2}\right) = 0 \\ x\left(t = \frac{T_1}{2}\right) = x_F - x_0 + x_F = 2x_F - x_0 \end{cases}$

II INTERVALLO $\dot{x} > 0$

$\begin{cases} x(t) = A_2 \cos\omega_1 t + B_2 \sin\omega_1 t - x_F \\ x\left(t = \frac{T_1}{2}\right) = 2x_F - x_0 < -x_F \\ \dot{x}\left(t = \frac{T_1}{2}\right) = 0 \end{cases}$ affinché ci sia moto ($F_{molla} > F_a$)

$\boxed{x_0 > 3x_F}$

$\begin{cases} A_2 = x_0 - 3x_F \\ B_2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \boxed{x(t) = (x_0 - 3x_F)\cos\omega_1 t - x_F, \quad \forall t \in \left[\frac{T_1}{2}, T_1\right] \text{ Se } x_0 > 3x_F}$

$\dot{x}(t) = -\underbrace{(x_0 - 3x_F)}_{>0}\underbrace{\sin(\omega_1 t)}_{<0 \text{ dopo } T_1/2}\omega_1 = 0 \Rightarrow \dot{x}(t = T_1) = 0 \quad x(T_1) = x_0 - 4x_F$

Free Coulomb Oscillation $x_0 \neq 0$, $\frac{x_F}{x_0} = 0.4$ → $\frac{x_0}{x_F} = 2.5$

$2.5 < 3$

NO ALTRE OSCILLAZIONI!

Free Coulomb Oscillation $x_0 \neq 0$, $\dfrac{x_F}{x_0} = 0.2$ $\rightarrow \dfrac{x_0}{x_F} = 5$

NEL III INTERVALLO SI HA MOTO SE $\begin{cases} x_0 > 5 x_F \\ \dfrac{x_0}{x_F} = \dfrac{1}{0.2} = 5 \end{cases} \rightarrow$ SI FERMA ALLA II° OSCILLAZIONE

↳ spostamento $\neq 0$

Free Coulomb Oscillation $x_0 \neq 0$, $\frac{x_F}{x_0} = 0.1$

$\frac{x_0}{x_F} = 10$

se $x_0 > 11\, x_F \Rightarrow$ VI int.

$x_0 = 10\, x_F \rightarrow$ 5 intervalli di oscillazione

↳ spostamento $\neq 0$

Free Coulomb Oscillation $x_0 \neq 0$, $\frac{x_F}{x_0} = 0.08$

$\frac{x_0}{x_F} = 12.5$

↓

6 intervalli

↓

3 periodi

↓

spostamento $\neq 0$

CARATTERISTICHE DI QUESTO SMORZAMENTO (ATTRITO)

- IL PERIODO DI OSCILLAZIONE NON CAMBIA (ω_1 NON VARIA)
- $\lim_{t \to \infty} x(t) = C_1 \neq 0 \quad , \quad |C_1| < x_F$
- RISOLUZIONE NON LINEARE = SUCCESSIONI DI PROBLEMI LINEARI
- DECADIMENTO LINEARE

$$x_{i+1} = x_i - 4\zeta x_F$$

OSCILLAZIONI SMORZATE CON FORZANTE A GRADINO

$$x(t) = e^{-\nu\omega_1 t}\left[A\cos\omega_{D_1} t + B\sin\omega_{D_1} t\right] + x_{st} \quad , \quad x_{st} = \frac{F}{k}$$

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = -x_{st} \\ B = \dfrac{-\nu x_{st}}{\sqrt{1-\nu^2}} \end{cases}$$

$$x(t) = x_{st}\left[1 - e^{-\nu\omega_1 t}\left(\cos\omega_{D_1} t + \frac{\nu}{\sqrt{1-\nu^2}}\sin\omega_{D_1} t\right)\right]$$

L'OSCILLAZIONE LIBERA $x(t) = x_{st}\left[1 - e^{-\nu\omega_n t}\left(\cos\omega_D t + \frac{\nu}{\sqrt{1-\nu^2}}\sin\omega_D t\right)\right]$

$\rightarrow 0$ per $t \to \infty$

OTTENE PRIMA IL DECADIMENTO

Step Force

$\nu = 0.05 \longrightarrow \left.\frac{x(t)}{x_{st}}\right|_{max} = 1.85 \rightarrow$ MOLTO PIÙ VICINA A 2 CHE A 1 $\rightarrow$ A FAVORE DI SICUREZZA

LO SPOSTAMENTO MASSIMO SI HA DURANTE IL TRANSITORIO.

Linearly Increasing Force $\frac{t_r}{T_1}=0.1$

14/10/2013

OSCILLAZIONI SMORZATE CON FORZANTE SINUSOIDALE

$$\bar{F}(t) = \bar{F}\sin\omega t$$

L'EQUAZIONE DEL MOTO:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + k\,x(t) = \bar{F}\sin\omega t$$

NORMALIZZANDO

$$\boxed{\ddot{x}(t) + 2\nu\omega_1\dot{x}(t) + \omega_1^2\,x(t) = \omega_1^2\,x_{st}\sin\omega t}$$

LA SOLUZIONE

$$x(t) = e^{-\nu\omega_1 t}\left[A\cos\omega_{D_1}t + B\sin\omega_{D_1}t\right] + x_{part}(t) \quad ?$$

PER RISOLVERE LA SOLUZIONE NON OMOGENEA INTRODUCIAMO LA FUNZIONE

$z(t)$ COMPLESSA , $\{x(t), y(t)\} \in \mathbb{R}$

$$z(t) = i\,x(t) + y(t)$$

$$x(t) = \mathrm{Im}[z(t)]$$

$$y(t) = \mathrm{Re}[z(t)]$$

ALLORA VALE

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = i\,\dot{x}(t) + \dot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) = i\,\ddot{x}(t) + \ddot{y}(t) \end{cases}$$

CIOÈ

$$\boxed{\ddot{z}(t) + 2\nu\omega_1\dot{z}(t) + \omega_1^2\,z(t) = \omega_1^2\,x_{st}\,e^{i\omega t}}$$

EQUAZIONE DIFFERENZIALE COMPLESSA

DEVONO ESSERE SODDISFATTE SIA LA PARTE REALE CHE QUELLA IMMAGINARIA

$$\mathrm{Re}[\dots] = \mathrm{Re}[\dots]$$

$$\mathrm{Im}[\dots] = \mathrm{Im}[\dots]$$

LA PARTE REALE

$$\ddot{y}(t) + 2\nu\omega_1 \dot{y}(t) + \omega_1^2 y(t) = \omega_1^2 x_{st} \cos \omega t$$

MENTRE QUELLA IMMAGINARIA

$$\ddot{x}(t) + 2\nu\omega_1 \dot{x}(t) + \omega_1^2 x(t) = x_{st}\omega_1^2 \sin \omega t$$

COINCIDE CON QUELLA INIZIALE DA RISOLVERE

CIOÈ

$$\begin{cases} z_{part}(t) = Z e^{i\omega t} \\ \dot{z}_{part}(t) = i\omega Z e^{i\omega t} \\ \ddot{z}_{part}(t) = -\omega^2 Z e^{i\omega t} \end{cases}$$

SOSTITUENDO,

$$\left(-\omega^2 + 2\nu\omega_1 i\omega + \omega_1^2\right) Z \cancel{e^{i\omega t}} = \omega_1^2 x_{st} \cancel{e^{i\omega t}} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{Z = \frac{\omega_1^2}{-\omega^2 + 2\nu\omega_1 i\omega + \omega_1^2} x_{st}} \in \mathbb{C}$$

A NOI INTERESSA LA $x(t)$, CIOÈ LA PARTE IMMAGINARIA DI $z(t)$

SPACCHIAMO Z e $z_{part}(t)$ IN PARTE REALE e PARTE IMMAGINARIA

$$x_{part}(t) = \mathrm{Im}\left[z_{part}(t)\right] = \mathrm{Re}\left[Z\right] \underbrace{\mathrm{Im}\left[e^{i\omega t}\right]}_{\sin \omega t} + \mathrm{Im}\left[Z\right] \underbrace{\mathrm{Re}\left[e^{i\omega t}\right]}_{\cos \omega t}$$

LO DERIVA DA, $C = A \cdot B$, $\{A, B\} \in \mathbb{C}$

$$= (A_{Re} + iA_{Im}) \cdot (B_{Re} + iB_{Im}) =$$

$$= (A_R B_R - A_{Im} B_{Im}) + i(A_R B_i + A_I B_R)$$

PER SPACCARE Z IN PARTE REALE e IMMAGINARIA

$$\frac{A}{C} \cdot \frac{\bar{C}}{\bar{C}} \quad , \quad \begin{matrix} A \in \mathbb{R} \\ C \in \mathbb{C} \end{matrix}$$

$$C \cdot \bar{C} = (C_R + i C_I)(C_R - i C_I) = C_R^2 + C_I^2 + i(\cancel{C_R C_I - C_R C_I})$$

PERCIÒ

$$Z = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 + 2i\nu\omega\omega_1 - \omega^2} x_{st} \frac{\omega_1^2 - \omega^2 - 2\nu\omega\omega_1}{\omega_1^2 - \omega^2 - 2\nu\omega\omega_1} = \dots =$$

$$= \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2} - 2\nu i \, \omega/\omega_1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)^2 + \left(2\nu\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2} x_{st}$$

$$z_{Part}(t) = \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2} - 2\nu i \frac{\omega}{\omega_1}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)^2 + \left(2\nu\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2} x_{st} (\cos\omega t + i \sin\omega t)$$

$$= \underbrace{\boxed{\frac{x_{st}\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)\cos\omega t + \left(2\nu\frac{\omega}{\omega_1}\right)\sin\omega t\right]}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)^2 + \left(2\nu\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}}}_{y_{Part}(t)} + i \underbrace{\boxed{\frac{x_{st}\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)\sin\omega t - \frac{2\nu\omega}{\omega_1}\cos\omega t\right]}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)^2 + \left(2\nu\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}}}_{x_{Part}(t)}$$

$$y_{Part}(t) \qquad \bar{F}\cos\omega t = \bar{F}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \qquad x_{Part}(t) \qquad \bar{F}\sin\omega t$$

LA FORZANTE VA COME IL SENO. LA RISPOSTA VA COME SENO e COSENO

Cioè

$$y_{Part}(t) = x_{Part}\left(t + \frac{\pi}{2\omega}\right)$$

$$x_{Part}(t) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)^2 + \left(2\nu\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}} x_{st} \sin(\omega t - \xi) = N x_{st} \sin(\omega t - \xi)$$

$$\boxed{N\left(\frac{\omega}{\omega_1}, \nu\right) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)^2 + \left(2\nu\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}}}$$

DA RICORDARE

$$\boxed{\tan\xi\left(\frac{\omega}{\omega_1}, \nu\right) = \frac{2\nu\frac{\omega}{\omega_1}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}}}$$

Se $\nu \neq 0$ PERDO LA SINGOLARITÀ

e $\frac{\omega}{\omega_1} = 1 \Rightarrow \xi = \frac{\pi}{2}, \ \forall \nu$

→ QUADRATURA DI FASE

→ LA FORZANTE È IN SENO
LO SPOSTAMENTO È IN COSENO

$$\boxed{N\left(\frac{\omega}{\omega_1} = 1, \nu\right) = \frac{1}{2\nu}}$$

Se $\nu = 5\%$ $\quad N\left(\frac{\omega}{\omega_1} = 1, \nu = 5\%\right) = 10$

10 VOLTE LO SPOSTAMENTO S-S

SI DEFINISCE

$$\frac{x_{st}}{2\max\{x\}\Big|_{\frac{\omega}{\omega_1}=1}} = \boxed{\nu_{eq} = \frac{1}{2\,\frac{\max\{x\}}{x_{st}}}}$$

CONNESSA A TUTTI GLI EFFETTI DISSIPATIVI DELLA STRUTTURA

→ II° METODO PER VALUTARE LA ν_{eq} DI UNA STRUTTURA (SPERIMENTALMENTE)

$$N_{max}(\nu) = N\left(\frac{\omega}{\omega_1} = \sqrt{1-2\nu^2}, \nu\right) = \frac{1}{2\nu\sqrt{1-\nu^2}} \geq 1 \quad \text{se } \nu \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0.707$$

A REGIME le oscillazioni libere tendono a zero e $x(t) \simeq x_{part}(t)$

DOPO UN CERTO TEMPO LE OSCILLAZIONI DIVENTANO PERIODICHE

CICLO DI ISTERESI DINAMICA

$\Pi_a(t) - \Pi_d(t) \neq 0$ dove $F_d(t) = c\,\dot{x}_p(t) = c\,\bar{X}\omega\cos(\omega t - \xi)$

$x_p(t) = \bar{X}\sin(\omega t - \xi)$

$$\mathcal{L}_a - \mathcal{L}_d = 0$$

$$\mathcal{L}_a = \int_0^{\tau = 2\pi/\omega} F(t)\cdot\dot{x}_{part}(t)\,dt =$$

$$\mathcal{L}_d = \int_0^{\tau = 2\pi/\omega} c\,\dot{x}^2_{part}\,dt =$$

$$= c\,\bar{X}^2\omega^2\int_0^{2\pi/\omega}\cos^2(\omega t + \xi) = \pi c\,\omega\,\bar{X}^2 \quad , \quad \bar{X} = x_{st}\cdot N$$

Amplicazione dinamica

$\sqrt{1-2\nu^2}\Big|_{\nu=0.1} = \sqrt{1-2\cdot 0.01} \cong 0.9899$

$\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)_{max}$

Sfasatura

Damped Forced $\frac{\omega}{\omega_1}=0.01$

$\nu = 0.2$

FORZANTE LENTA RISPETTO ALLE OSCILLAZIONI DELLA "STRUTTURA"

Damped Forced $\frac{\omega}{\omega_1}$=0.1, ν=0.05

Damped Forced $\frac{\omega}{\omega_1}$=0.9, ν=0.05

Damped Forced $\underbrace{\frac{\omega}{\omega_1}}_{\text{RISONANZA}}=1,\ \nu=0.05$

MASSIMO A REGIME
(NON DURANTE IL TRANSITORIO)

Damped Forced $\frac{\omega}{\omega_1}=2$, $\nu=0.05$

Damped Forced $\frac{\omega}{\omega_1}=10,\ \nu=0.05$

$$\mathcal{L}_d = \int_0^{T=\frac{2\pi}{\omega}} F_d(t)\,\dot{x}_{part}(t)\,dt \quad \text{(area)}$$

CICLO DI ISTERESI

$$\pi c \omega \bar{X}^2 =$$

CICLO DI ISTERESI DINAMICA

$$\boxed{\left(\frac{x_{part}(t)}{\bar{X}}\right)^2 + \left(\frac{F_d(t)}{\omega c \bar{X}}\right)^2 = 1 \quad \text{eq ellisse}}$$

$$F_d(t) = c\,\dot{x}_{part}(t) = c\,\bar{X}\,\omega\cos(\omega t - \xi)$$

$$x_{part}(t) = \bar{X}\sin(\omega t - \xi)$$

SU UN PERIODO $\mathcal{L}_d^{exp} = \mathcal{L}_d^{modello}$

$$\mathcal{L}_d^{modello} = \mathcal{L}_d^{exp} = \pi c_{eq}\,\omega\,\bar{X}^2$$

$$\mathcal{E}_{max}^{exp} = \frac{1}{2} K \bar{X}^2$$

$$K\bar{X}^2 = 2\,\mathcal{E}_{max}^{exp}$$

POSTO $\frac{\omega}{\omega_1} = 1$

$$c_{eq} = \frac{\mathcal{L}_d^{exp}}{\pi\omega\bar{X}^2} \rightarrow \nu_{eq} = \frac{c_{eq}}{c_{CR}} = \frac{c_{eq}}{2\sqrt{Km}} = \frac{c_{eq}\,\omega_1}{2K}$$

$$\frac{\mathcal{L}_d^{exp}}{2\pi\bar{X}^2}\,\frac{\omega_1}{\omega K}$$

$$\boxed{\nu_{eq} = \frac{1}{4\pi}\,\frac{\mathcal{L}_d^{exp}}{\mathcal{E}_{max}^{exp}}\,\frac{\omega_1}{\omega}}$$

ν_{eq} SI RICAVA DAL LAVORO DISSIPATO

$$\boxed{\nu_{eq} = \frac{\mathcal{L}_d^{exp}}{4\pi\,\mathcal{E}_{max}^{exp}}}$$

III METODO PER VALUTARE ν_{eq} DELLA STRUTTURA

(IN CONDIZIONI DI RISONANZA)

FORZANTE PERIODICA

LA FORZANTE SINUSOIDALE È UNA PARTICOLARE FORZANTE PERIODICA.

$$F(t + j T_0) = F(t) \quad \forall t \quad j \in \mathbb{Z}$$

T_0 → PERIODO DELLA FORZANTE

È ESPRIMIBILE MEDIANTE SERIE DI FOURIER:

$$F(t) = F_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n \cos n\omega_0 t + B_n \sin n\omega_0 t \right]$$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ = pulsazione fondamentale della forzante

$$F_0 = \frac{1}{T_0} \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+T_0} F(t)\, dt \longrightarrow \text{VALORE MEDIO SUL PERIODO}$$

$$\left.\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{T_0} \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+T_0} F(t) \cos\left(\frac{2\pi n}{T_0} t\right) dt \\ B_n &= \frac{2}{T_0} \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+T_0} F(t) \sin\left(\frac{2\pi n}{T_0} t\right) dt \end{aligned}\right\}$$

AMPIEZZE DELLA n-ESIMA ARMONICA (ASSOCIATE A PULSAZIONE $n\omega_0$)

OSSERVAZIONI:

1) Se $F(t)$ è CONTINUA $\Rightarrow$ LA SERIE CONVERGE IN OGNI PUNTO

2) Se $F(t)$ è DISCONTINUA $\Rightarrow$ NEL PUNTO DI DISCONTINUITÀ CONVERGE AL VALORE MEDIO

3) Se $F(t) = F(-t)$ (funzione pari) $\Rightarrow B_n = 0$

4) Se $F(t) = -F(-t)$ (funzione dispari) $\Rightarrow A_n = 0$

SI PUÒ RISCRIVERE LA SERIE DI FOURIER COME

$$F(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sin(n\omega_0 t + \theta_n)$$

$$F_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$$ ampiezza della n-esima armonica

$$\tan\theta_n = \frac{A_n}{B_n}$$ sfasamento

STIAMO COSTRUENDO INFINITI VALORI DI F_n E DI θ_n. SI DEFINISCE LO <u>SPETTRO DELLA FORZANTE</u>

$\rightarrow$ DISCRETA

L'EQUAZIONE DEL MOTO:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \cos n\omega_0 t + B_n \sin n\omega_0 t\right]$$

$$x(t) = e^{-\nu\omega_1 t}\left(A\cos\omega_{d_1} t + B\sin\omega_{d_1} t\right) + x_{Part}(t)$$

PER VALUTARE $x_{Part}(t)$ USIAMO IL PRINCIPIO DI SOVRAPOSIZIONE DEGLI EFFETTI PER OGNI COMPONENTE DELLA SERIE

$$x_{Part}(t) = \frac{F_0}{K} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left[a_n' \cos n\omega_0 t + b_n' \sin n\omega_0 t\right]}_{\text{relativa a } A_n \cos n\omega_0 t} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left[b_n'' \sin n\omega_0 t - a_n'' \cos n\omega_0 t\right]}_{\text{relativa a } B_n \sin n\omega_0 t}$$

relative a quanto trovato per la forzante sinusoidale poco prima

$$a_n' = \frac{A_n}{B_n} b_n'' = \frac{1 - \frac{n^2\omega_0^2}{\omega_1^2}}{\left(1 - \frac{n^2\omega_0^2}{\omega_1^2}\right)^2 + \left(2\nu \frac{n\omega_0}{\omega_1}\right)^2} \frac{A_n}{K}$$

$$b_n' = \frac{A_n}{B_n} a_n'' = \frac{2\nu \frac{n\omega_0}{\omega_1}}{\left(1 - \frac{n^2\omega_0^2}{\omega_1^2}\right)^2 + \left(2\nu \frac{n\omega_0}{\omega_1}\right)^2} \frac{A_n}{K}$$

ALLORA, RACCOGLIENDO

$$x_{Part}(t) = \frac{F_0}{K} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n' - a_n'') \cos n\omega_0 t + (b_n' + b_n'') \sin n\omega_0 t] =$$

$$= \frac{F_0}{K} + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \sin\left(n\omega_0 t + \theta_n - \xi_n\right)$$

$$X_n = x_{st}^{(n)} N^{(n)}\left(\frac{n\omega_0}{\omega_1}, \nu\right)$$

$$x_{st}^{(n)} = \frac{F_n}{K}$$

$$N^{(n)}\left(\frac{n\omega_0}{\omega_1}, \nu\right) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{n^2\omega_0^2}{\omega_1^2}\right)^2 + \left(2\nu \frac{n\omega_0}{\omega_1}\right)^2}}$$

$$\tan \xi_n = \frac{2\nu \frac{n\omega_0}{\omega_1}}{1 - \frac{n^2\omega_0^2}{\omega_1^2}}$$

SPETTRO FORZANTE → NON DIPENDE DA $\frac{\omega_0}{\omega_1}$

$\frac{\omega_0}{\omega_1} = \frac{1}{2}$

$\frac{\omega_0}{\omega_1} = 1$

$\frac{\omega_0}{\omega_1} = \frac{1}{4}$

$\frac{\omega_0}{\omega_1} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{n\omega_0}{\omega_1} = \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots\right\}$

$\frac{\omega_0}{\omega_1} = 1 \rightarrow \frac{n\omega_0}{\omega_1} = \{1, 2, 3, \dots\}$

$\frac{\omega_0}{\omega_1} = \frac{1}{4} \rightarrow \frac{n\omega_0}{\omega_1} = \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \dots\right\}$

$N^{(n)} x_{st}^{(n)} = X_n$

↓ prodotto dei 2 grafici precedenti

↳ NON È DETTO CHE CONVERGA ALLA CONVERGENZA DI UNO DEI DUE.

- $\frac{\omega_0}{\omega_1} > 1$ (Forza veloce) : LA PRIMA FORZANTE È QUELLA CHE DÀ LO SPOSTAMENTO MASSIMO.

  HO SUPERATO LA RISONANZA, OVVERO N È MONOTONO DECRESCENTE.

- $\frac{\omega_0}{\omega_1} < 1$ (Forza lenta) : NON HO SUPERATO LA RISONANZA. N DIVENTA MASSIMO VICINO A QUALCHE ARMONICA.

  LA RISONANZA NON È DETTO CHE SI ABBIA SUL MASSIMO DELL'ARMONICA

  ↳ più pericolosa $\frac{\omega_0}{\omega_1} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}$

- $\frac{\omega_0}{\omega_1} << 1$ (Forza ultra lenta) : SI HA RISONANZA PER n MOLTO GRANDE

  MA PER n GRANDE LO SPETTRO DELLA FORZANTE È MOLTO BASSO e QUINDI IL PRODOTTO È TRASCURABILE.

  EFFETTO TRASCURABILE

FORZANTE ONDA QUADRA

$$F(t) = \begin{cases} \bar{F} & n-1 < t/T_0 < n-\frac{1}{2} \\ -\bar{F} & n-\frac{1}{2} < t/T_0 < n \end{cases}$$

$$F(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos n\omega_0 t + B_n \sin n\omega_0 t \right]$$

$\rightarrow = F_n$ (poiché $A_n = 0$)

$F_0 = 0$ (Valore medio)

$F(t)$ FUNZIONE DISPARI $\rightarrow A_n = 0$

$\hookrightarrow F(t) = -F(-t)$

$$B_n = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{T_0/2} \underbrace{F(t)}_{\text{dispari}} \underbrace{\sin\left(\frac{2\pi n}{T_0} t\right)}_{\times \text{ dispari} = \text{pari}} dt$$

$\rightarrow$ integrale di una funzione pari può essere diversa da zero

$$= \frac{2}{T_0} \cdot 2 \int_0^{T_0/2} \underbrace{F(t)}_{\bar{F}} \sin\left(\frac{2\pi n}{T_0} t\right) dt = \frac{4\bar{F}}{T_0} \int_0^{T_0/2} \sin\left(\frac{2\pi n}{T_0} t\right) dt =$$

poiché è pari

$$= \frac{\cancel{4}^{2}\bar{F}}{\cancel{T_0}} \left[-\cos\left(\frac{2\pi n}{T_0} t\right) \right]_0^{T_0/2} \cdot \frac{\cancel{T_0}}{\cancel{2}\pi n} = \frac{2\bar{F}}{\pi n} \left[-\underbrace{\cos(\pi n)}_{=(-1)^n} + 1 \right], \; n \in \mathbb{Z}$$

$$= \frac{2\bar{F}}{\pi n} \left(1 - (-1)^n \right) = \begin{cases} 0 \text{ se } n \text{ pari} \\ \frac{4\bar{F}}{\pi n} \text{ se } n \text{ dispari} \end{cases}$$

M (Troncatura della serie)

$$F(t) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{4\bar{F}}{\pi} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{2\pi n}{T_0} t\right)$$

LE ARMONICHE ALTE HANNO AMPIEZZA DI FORZANTE BASSA

Force approximation

Force Spectrum

$$x(t) = e^{-\nu\omega_1 t}\left(A\cos\omega_{d1} t + B\sin\omega_{d1} t\right) + \sum_{n=1,3,5}^{\infty} X_n \sin\left(n\omega_0 t - \xi_n\right)$$

$$X_n = \frac{B_n}{K}\,\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{n^2\omega_0^2}{\omega_1^2}\right)^2 + \left(2\nu\frac{n\omega_0}{\omega_1}\right)^2}} = x_{ST}\,\frac{4}{\pi n}\,\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{n^2\omega_0^2}{\omega_1^2}\right)^2 + \left(2\nu\frac{n\omega_0}{\omega_1}\right)^2}}$$

$$\frac{4F}{\pi n K} \quad x_{ST}$$

LA RISPOSTA O-S È

LA RISPOSTA O.S NON VA MAI BENE.

C'È SEMPRE UN'AMPLIFICAZIONE DINAMICA

(VEDI 146/1).

Displacement Spectrum ν=0.05, $\frac{\omega_0}{\omega_1}$=0.1 → RISONANTE AD n=10

ξ_n

Phase Spectrum ν=0.05, $\frac{\omega_0}{\omega_1}$=0.1

Displacement Spectrum ν=0.05, $\frac{\omega_0}{\omega_1}$=0.2 → RISONANZA ALLA QUINTA ARMONICA

Phase Spectrum ν=0.05, $\frac{\omega_0}{\omega_1}$=0.2

Displacement Spectrum ν=0.05, $\frac{\omega_0}{\omega_1}=1$ → RISONANZA per n=1

Phase Spectrum ν=0.05, $\frac{\omega_0}{\omega_1}=1$

Displacement Spectrum ν=0.05, $\frac{\omega_0}{\omega_1}$=2

Phase Spectrum ν=0.05, $\frac{\omega_0}{\omega_1}$=2

M Troncatura della serie

Displacement ν=0.05, $\frac{\omega_0}{\omega_1}$=.1

Displacement ν=0.05, $\dfrac{\omega_0}{\omega_1}$=.2 → velocità doppia

Displacement ν=0.05, $\frac{\omega_0}{\omega_1}=1$

12 volte lo spostamento statico

≃ 12

FORZA NULLA
⇕
SPOSTAMENTO MIN / MAX

Teoria e dinamica delle strutture - F. Dal Corso

AL CAMBIO DI SEGNO DELLA FORZA LO SPOSTAMENTO È MASSIMO → QUADRATURA DI FASE

Displacement ν=0.05, $\frac{\omega_0}{\omega_1}$=2

VIBROMETRO e ACCELEROMETRO

OGGETTO CHE, PER IPOTESI, MISURI IL MOVIMENTO DURANTE IL TERREMOTO

PER UNA MISURA COMPLETA SI PENSA AD USARE 3 VIBROMETRI, UNO PER OGNI DIREZIONE

VIBROMETRO : $x(t) \sim u_g(t)$

ACCELEROMETRO : $x(t) \sim a_g(t)$

L'EQUAZIONE DEL MOTO :

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = -m\ddot{u}_g(t) = \underbrace{+m\omega^2\bar{u}_g}_{\bar{F}} \sin \omega t$$

SIA

$$u_g(t) = \bar{u}_g \sin \omega t$$

$$\ddot{u}_g(t) = \bar{a}_g \sin \omega t = -\omega^2 \bar{u}_g \sin \omega t$$

$$x_{st} = \frac{\bar{F}}{k} = \frac{\bar{u}_g m \omega^2}{k} = \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\bar{u}_g$$

$$x(t) = x_{st} N\left(\frac{\omega}{\omega_1}, \nu\right) \sin(\omega t - \xi)$$ → QUANDO È RAPPRESENTATIVA DI u_g e QUANDO DI a_g?

VIBROMETRO

$$x_{part}(t) = \bar{u}_g \frac{\omega^2}{\omega_1^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)^2 + \left(2\nu\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}} \cdot \sin(\omega t - \xi) =$$

$$= \bar{u}_g \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega_1^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(2\nu\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2}} \sin(\omega t - \xi)$$

$$N'\left(\frac{\omega_1}{\omega}, \nu\right) = N\left(\frac{\omega_1}{\omega}, \nu\right)$$ COEFFICIENTE DI AMPLIFICAZIONE DINAMICA DEL MOTO IMPRESSO

$$\frac{1}{\frac{\omega}{\omega_1}}$$

VEDI (147/1)

IN QUESTO CASO $\nu = 0.6 \div 0.7 \Rightarrow x(t) \simeq x_{part}(t)$ → posso trascurare le oscillazioni libere

Amplificazione dinamica
spostamento impresso

Se $\frac{\omega}{\omega_1} > 2$ ALLORA $N' \simeq 1$ (VEDI 147/1)

Se $\frac{\omega}{\omega_1} > 3 \Longrightarrow \xi \simeq \pi$

ALLORA

$$\boxed{x(t) \simeq \bar{u}_g \sin(\omega t - \pi) = -\bar{u}_g \sin(\omega t) = -u_g(t)}$$

Se $\frac{\omega}{\omega_1} > 3$

$\nu \in [0.6, 0.7]$

PULSAZIONE DEL TERREMOTO MAGGIORI DI 3 VOLTE LE PULSAZIONI CARATTERISTICHE DEL VIBROMETRO.

IL VIBROMETRO FUNZIONERÀ PER ω_1 BASSI

molle morbide

$$\begin{cases} k \text{ basse} \\ \text{oppure} \\ m \text{ alte} \end{cases} \rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

masse pesanti che oscillano

ACCELEROMETRO

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = -m\ddot{u}_g(t)$$

$$u_g(t) = \bar{u}_g \sin \omega t$$

$$\ddot{u}_g(t) = \bar{a}_g \sin \omega t \quad , \quad \bar{a}_g = -\omega^2 \bar{u}_g$$

$$x_{Part}(t) = \overbrace{\bar{u}_g \frac{\omega^2}{\omega_1^2}}^{-\bar{a}_g} N \sin(\omega t - \xi)$$

$$= \ominus \bar{a}_g \frac{N}{\omega_1^2} \sin(\omega t - \xi)$$

elementi che differenziano $x_{Part}(t)$ da $u_g(t)$

DEVO TROVARE RAPPORTI $\frac{\omega}{\omega_1}$ TALI DA AVERE N e ξ BUONI,

ESSENDO $N = N\left(\frac{\omega}{\omega_1}, \nu\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Se } \nu = 0.6 \div 0.75 \\ \frac{\omega}{\omega_1} < \frac{1}{2} \end{array}\right] \Rightarrow N\left(\frac{\omega}{\omega_1}, \nu\right) \simeq 1$$

IL COMPORTAMENTO DI ξ È QUASI LINEARE, SE

$$\left.\begin{array}{l} \text{SE } \nu = 0.6 \div 0.75 \\ \text{E } \dfrac{\omega}{\omega_1} < \dfrac{1}{2} \end{array}\right] \Rightarrow \xi \simeq \frac{\pi}{2}\frac{\omega}{\omega_1}$$

$$\xi/\omega = \frac{\pi}{2\omega_1}$$

ALLORA

$$x_{part}(t) \simeq -\bar{a}_g \frac{1}{\omega_1^2} \sin\left[\omega\left(t - \frac{\xi}{\omega}\right)\right] = -\bar{a}_g \frac{1}{\omega_1^2} \sin\left[\omega\left(t - \underbrace{\frac{\pi}{2\omega_1}}_{t_d}\right)\right] =$$

DELAY

$$= -\frac{\bar{a}_g}{\omega_1^2} \underbrace{\sin\left[\omega(t - t_d)\right]}_{a_g(t-t_d)} = \frac{-a_g(t-t_d)}{\omega_1^2}$$

L'ACCELEROMETRO FUNZIONERÀ BENE SE $\frac{\omega}{\omega_1}$ È PICCOLO $\begin{cases} K \text{ ALTE} \\ m \text{ PICCOLE} \end{cases}$

UN BUON ACCELEROMETRO È UN CATTIVO VIBROMETRO E L'OPPOSTO.

FORZANTE GENERICA

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + Kx(t) = F(t)$$

→ COMPOSIZIONE DI IMPULSI

- FORZANTE IMPULSIVA

IN PRIMA APPROSSIMAZIONE STUDIO LA FORZANTE IMPULSIVA DI IMPULSO

$$I = \int_{\tau}^{\tau+\Delta t} F(t)\,dt = \bar{F}\Delta t$$

LA GENERICA FORZANTE SARÀ UNA COMPOSIZIONE DI FORZANTI IMPULSIVE

$$m\ddot{x}(t) = F(t) - k\,x(t) - c\,\dot{x}(t)$$

INTEGRO TRA $\bar{t}$ e $\bar{t}+\Delta t$

$$\int_{\bar{t}}^{\bar{t}+\Delta t} m\ddot{x}(t)\,dt = \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+\Delta t} \left[F(t) - k\,x(t) - c\,\dot{x}(t)\right] dt$$

CIOÈ

$$\underbrace{m\dot{x}(t)\Big|_{\bar{t}}^{\bar{t}+\Delta t}}_{\text{variazione di quantità di moto}} = I - \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+\Delta t} \left[k\,x(t) + c\,\dot{x}(t)\right] dt$$

$\overset{\shortparallel}{0}$ (da dimostrare)

c'è o non c'è?

$$\begin{matrix} |x(t)| < M_1 \\ |\dot{x}(t)| < M_2 \end{matrix} \rightarrow \left| \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+\Delta t} \left[k\,x(t) + c\,\dot{x}(t)\right] dt \right| \leq \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+\Delta t} \left[k\,|x(t)| + c\,|\dot{x}(t)|\right] dt \leq$$

$$\leq (k M_1 + c M_2)\Delta t$$

$$\left| m\dot{x}(t)\Big|_{\bar{t}}^{\bar{t}+\Delta t} - I \right| = \left| -\int_{\bar{t}}^{\bar{t}+\Delta t} \left[k\,x(t) + c\,\dot{x}(t)\right] dt \right| \leq (k M_1 + c M_2)\Delta t$$

Se $\Delta t \rightarrow 0$ $\quad (k M_1 + c M_2)\Delta t \rightarrow 0$

$$\hookrightarrow \left| m\dot{x}(t)\Big|_{\bar{t}}^{\bar{t}+\Delta t} - I = 0 \right| = 0$$

DA CUI

$$\boxed{\lim_{\Delta t \to 0} m\dot{x}(t)\Big|_{\bar{t}}^{\bar{t}+\Delta t} = I}$$

COME DESCRITTO IN FISICA 1

$$= m\dot{x}(\bar{t}^+) - \cancel{m\dot{x}(\bar{t}^-)}^{\,0}$$

Se $\dot{x}(\bar{t}^-) = 0$

$$\dot{x}(\bar{t}^+) = \frac{I}{m}$$

LE CI SONO

$$\begin{cases} x(\bar{t}^+) = 0 \\ \dot{x}(\bar{t}^+) = \dfrac{I}{m} \end{cases}$$

LA SOLUZIONE È DEL TIPO

$$x(t) = e^{-\nu\omega_1(t-\bar{t})}\left[A\cos\omega_{D1}(t-\bar{t}) + B\sin\omega_{D1}(t-\bar{t})\right], \quad \forall t \geq \bar{t}$$

APPLICANDO LE C.I.

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = \dfrac{I}{m\omega_{D1}} \end{cases}$$

$h(t-\bar{t})$ = RISPOSTA A IMPULSO UNITARIO AL TEMPO $t-\bar{t}$

PERCIÒ

$$\boxed{x(t) = \frac{I}{m\cdot\omega_{D1}} e^{-\nu\omega_1(t-\bar{t})} \sin\omega_{D1}(t-\bar{t})}, \quad \forall t \geq \bar{t}$$

CIOÈ

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < \bar{t} \\ I\,h(t-\bar{t}) & t \geq \bar{t} \end{cases}$$

OGNI IMPULSO DÀ IL SUO CONTRIBUTO E INIZIA A UN TEMPO τ DIVERSO

GENERALIZZANDO

$$\Delta x_i(t) = \frac{F(\tau_i)\,\Delta(\tau_i)}{m\omega_{D1}}\, e^{-\omega_1 \nu (t-\tau_i)} \sin \omega_{D1}(t-\tau_i)$$

$$= F(\tau_i)\,\Delta\tau_i\, h(t-\tau_i)$$

Se $\Delta\tau_i \to d\tau$

istante in cui sto valutando la risposta

$$x(t) = \int_0^t \underbrace{F(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau}_{\text{variabile di integrazione}}$$

IMPLICA CHE $\begin{cases} x(0)=0 \\ \dot{x}(0)=0 \end{cases}$

$$x(t^*) = \boxed{\int_0^{t^*} F(\tau)\, h(t^*-\tau)\, d\tau}$$

INTEGRALE DI CONVOLUZIONE

↳ LA FORZANTE È MOLTIPLICATA PER UN FATTORE h E POI INTEGRATA.

$$= \boxed{\frac{1}{m\omega_{D1}} \int_0^{t^*} F(\tau) e^{-\nu\omega_1(t^*-\tau)} \sin \omega_{D1}(t^*-\tau)\, d\tau}$$

INTEGRALE DI DUHAMEL

$\nu = 0$

$$= \frac{1}{m\omega_1} \int_0^{t^*} F(\tau) \sin \omega_1 (t^*-\tau)\, d\tau$$

SOSTITUENDO ALL'INTERNO DI $F(\tau)$ LE FORZANTI GIÀ VISTE SI OTTERREBBERO I RISULTATI GIÀ VISTI.

FORZANTE LINEARE NEL TEMPO

$$F(t) = \bar{F}\,\frac{t}{t_r}$$

$$x_{sdc}(t) = \frac{F(t)}{k} = \frac{\bar{F}}{k}\,\frac{t}{t_r} = x_{st}\,\frac{t}{t_r}$$

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + k\,x(t) = \bar{F}\,\frac{t}{t_r}$$

$$x(t) = \frac{\bar{F}}{m\omega_{D1}t_r}\int_0^t \underbrace{\tau}_{F(\tau)}\, e^{-\nu\omega_1(t-\tau)}\sin\omega_{D1}(t-\tau)\,d\tau$$

INTEGRANDO CON DUHAMEL

$$= x_{st}\left[\frac{t}{t_r} - \underbrace{\frac{2\nu}{\omega_1 t_r}}_{\text{EFFETTO VISCOSO per } \nu\neq 0} + \underbrace{\frac{e^{-\nu\omega_1 t}}{\omega_1 t_r}\left(2\nu\cos\omega_{D1}t - \frac{1-2\nu^2}{\sqrt{1-\nu^2}}\sin\omega_{D1}t\right)}_{\text{OSCILLAZIONI LIBERE DECADONO FINTANTOCHÉ } \nu\neq 0}\right]$$

- $\nu = 0$

$$x(t) = x_{st}\left[\frac{t}{t_r} - \frac{\sin\omega_1 t}{\omega_1 t_r}\right]$$

→ OSCILLAZIONE LIBERA NON DECADENTE ATTORNO ALLA SOLUZIONE STATICA

↓

DI AMPIEZZA $\frac{1}{\omega_1 t_r}$

$$\frac{1}{\omega_1 t_r} = \frac{T_1}{2\pi t_r}$$

↓

OSCILLAZIONE DI AMPIEZZA GRANDE SE $\frac{t_r}{T_1} \to 0$

• $\nu \neq 0 \qquad t \to \infty$

$$x^{REGIME}(t) = x_{st}\left[\frac{t}{t_r} - \frac{2\nu}{\omega_1 t_r}\right]$$

$$\omega_1 = \frac{\pi}{2T_1} \qquad = x_{st}\left[\frac{t}{t_r} \; \frac{\nu}{\pi} \; \frac{T_1}{t_r}\right]$$

$$= x_{st}\,\frac{t - t_D}{t_r}, \qquad \underline{t_D = \frac{\nu}{\pi}\,T_1}$$

$$= x_{sdc}(t - t_D)$$

LA SOLUZIONE DELLA SCIENZA DELLE COSTRUZIONI.

$$x(t^*) = x_{sdc}(t^* - t_D)$$

$\underline{\frac{t_D}{t_r} \to 0}$ se $\nu \to 0$ oppure $\boxed{\frac{T}{t_r} \to 0}$ FORZA CON CRESCITA LENTA

Linearly Increasing Force $\frac{t_r}{T_1}=0.5$

Linearly Increasing Force $\frac{t_r}{T_1}=1$

Linearly Increasing Force $\frac{t_r}{T_1}=5$

FORZANTE A GRADINO CON CRESCITA LINEARE

PER $t \in [0, t_r]$ USIAMO QUELLA APPENA TROVATA.

POI USO QUELLA PER VALORI COSTANTI.

$$x(t) = \begin{cases} x_{st}\left[\dfrac{t}{t_r} - \dfrac{2\nu}{\omega_1 t_r} + \dfrac{e^{-\nu\omega_1 t}}{\omega_1 t_r}\left(2\nu\cos\omega_{D1} t - \dfrac{1-2\nu^2}{\sqrt{1-\nu^2}}\sin\omega_{D1} t\right)\right] & t \in [0, t_r] \\ e^{-\nu\omega_1(t-t_r)}\left[A\cos\omega_{D1}(t-t_r) + B\sin\omega_{D1}(t-t_r)\right] + \dfrac{\bar{F}}{K} & , t > t_r \end{cases}$$

IMPONENDO LA CONGRUENZA

$$\begin{cases} A = x(t_r) - \dfrac{\bar{F}}{K} \\ B = \dfrac{\dot{x}(t_r) + \nu\omega_1 x(t_r)}{\omega_1\sqrt{1-\nu^2}} \end{cases}$$

- $\nu = 0$

$$x(t) = \begin{cases} x_{st}\left[\dfrac{t}{t_r} - \dfrac{\sin\omega_1 t}{\omega_1 t_r}\right] & t < t_r \\ x_{st}\left[1 - \dfrac{1}{\omega_1 t_r}\left(\sin\omega_1 t - \sin\omega_1(t-t_r)\right)\right] & t > t_r \end{cases}$$

IL MASSIMO QUANDO ACCADE?

$$\max_{t\geq 0}\{x(t)\} = \max_{t\geq t_r}\{x(t)\} \rightarrow \text{RAGGIUNTO DURANTE IL CARICO COSTANTE}$$

$$= x_{st}\left[1 + \underbrace{\frac{\left|\sin\frac{\pi t_r}{T_1}\right|}{\frac{\pi t_r}{T_1}}}_{\geq 0}\right]$$

MASSIMO DELLO SPOSTAMENTO LUNGO TUTTO IL PROCESSO DI CARICO

$$\geq x_{st}$$

Se $\frac{t_r}{T_1} \to 0 \Rightarrow \max\{x(t)\} = 2x_{st}$ FORZA (ULTRA)VELOCE

Se $\frac{t_r}{T_1} \to \infty \Rightarrow \max\{x(t)\} = x_{st}$ FORZA LENTA

Se $\frac{t_r}{T_1} \in \mathbb{N} \Rightarrow \max\{x(t)\} = x_{st}$

$$\frac{\max\{x(t)\}}{x_{st}} = 1 + \frac{\left|\sin \frac{\pi t_r}{T_1}\right|}{\frac{\pi t_r}{T_1}} = R_d = \text{SPETTRO DI RISPOSTA}$$

per $\frac{t_r}{T_1} \lesssim 1 \to$ AMPLIFICAZIONE DINAMICA CONSISTENTE

per $\frac{t_r}{T_1} > 3 \to$ AMPLIFICAZIONE DINAMICA PICCOLA ($\simeq 1.1$)

LO SPETTRO DI RISPOSTA È UN GRAFICO CHE RIPORTA LA MASSIMA QUANTITÀ ($\max\{x\}$, $\max\{\dot{x}\}$, $\max\{\ddot{x}\}$) OTTENUTA CONSIDERANDO LO STESSO INPUT (ACCELEROGRAMMA: $\ddot{u}_g(t)$, FORZANTE: $F(t)$) AL VARIARE DI UN PARAMETRO (DI INPUT O DI STRUTTURA).

SE SI HA LO SPETTRO DI RISPOSTA NON SERVE FARE L'ANALISI DINAMICA POICHÉ SI OTTIENE LO SPOSTAMENTO MASSIMO CHE CI INTERESSA.

IL GRAFICO $N - \frac{\omega}{\omega_1}$ (AMPLIFICAZIONE DINAMICA) È PROPRIO LO SPETTRO DI RISPOSTA

PER $\nu \neq 0$ LO SPETTRO DI RISPOSTA SAREBBE "SIMILE" MA CON PARTENZA DA 1.9 INVECE CHE DA 2.

IL SISTEMA HA UN SOLO GDL

$\theta(t)$

L'ENERGIA CINETICA:

$$T = \frac{1}{2}\int_0^h \underbrace{\gamma}_{\frac{m}{h}} (\dot{\theta}\cdot s)^2 ds = \frac{1}{2}\gamma\dot{\theta}^2\frac{h^3}{3} = \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2\frac{h^2}{3} = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2(t)\frac{mh^2}{3}$$

I_θ = inerzia

L'ENERGIA ELASTICA

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}K_\theta\,\theta^2(t)$$

RIGIDEZZA ROTAZIONALE

$\longrightarrow$

$\longrightarrow$ $K_\theta = \dfrac{3EJ}{l}$

$$\frac{d}{dt}\left[T(t) + \mathcal{E}(t)\right] = \mathcal{P}(t)$$

$$\mathcal{P}(t) = P(t)\,\dot{\theta}(t)\cdot h + \left(M_1(t) + M_2(t)\right)\dot{\theta}(t) = \left[P(t)\,h + M_1(t) + M_2(t)\right]\cancel{\dot{\theta}(t)}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}I_\theta\,\dot{\theta}(t)^2 + \frac{1}{2}K_\theta\,\theta(t)^2\right] = \left[I_\theta\,\ddot{\theta}(t) + K\,\theta(t)\right]\cancel{\dot{\theta}(t)} =$$

$$\underbrace{I_\theta\,\ddot{\theta}(t)}_{M_{Inerzia}(t)} + \underbrace{K_\theta\,\theta(t)}_{M_{el}(t)} = \underbrace{P(t)\,h + M_1(t) + M_2(t)}_{M_{ext}(t)}$$

EQUILIBRIO A MOMENTO

$$\boxed{\frac{mb^2}{3}\ddot{\theta}(t) + \frac{3EJ}{\ell}\theta(t) = P(t) + M_1(t) + M_2(t)}$$ EQ. DEL MOTO

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{K_\theta}{I_0}} = \sqrt{\frac{9EJ}{mb^2\ell}}$$

SI POSSONO USARE I METODI USATI PER GLI SPOSTAMENTI TRASLAZIONALI.

16/10/2013

STRUTTURA IPERSTATICA SOLLECITA A MOMENTO TORSIONALE

$$T = \int_0^R \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{m}{\pi R^2}}_{\text{densità}} (\dot{\theta}(t)\rho)^2 \rho \, d\rho \, d\varphi = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{m R^2}{2}}_{I_p \text{ inerzia polare}} \dot{\theta}^2(t)$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} K_\theta \theta(t)^2 = \frac{1}{2} \frac{M_{el}^2(t)}{K_\theta} \; ?$$

EQUILIBRIO ALLA TORSIONE

$$W_A + M_{el} = W_B \rightarrow \boxed{W_A = W_B - M_{el}}$$

IPERSTATICITÀ TORSIONALE

CONGRUENZA

$$\theta_B = 0$$

L'ANGOLO UNITARIO DI TORSIONE $\quad \Theta(s) = \dfrac{M_t(s)}{G J_t}$

PER LA NOSTRA SEZIONE : $\quad G J_t = G J_p = G \dfrac{\pi R^4}{2}$ RIGIDEZZA TORSIONALE

$$J_p = \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho^2 \rho \, d\rho \, d\varphi = \iint \rho^3 \, d\rho \, d\varphi = \frac{R^4}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi R^4}{2}$$

UNA VOLTA NOTO $M_t(s)$

$$\theta_B = \cancel{\theta_A}^{\,0} + \int_0^\ell \frac{M_t(s)}{G J_t} \, ds = 0$$

$M_t(s)$:

$$\begin{cases} M_t(s) = W_B - M_{el} & , s \in [0, \frac{\ell}{2}] \\ M_t(s) = W_B & , s \in [\frac{\ell}{2}, \ell] \end{cases}$$

ALLORA

$$\int_0^\ell \frac{M_t(s)}{G J_t} \, ds = \int_0^{\ell/2} \frac{W_B - M_{el}}{G J_t} \cdot ds + \int_{\ell/2}^{\ell} \frac{W_B}{G J_t} \, ds = 0$$

$$\frac{\ell}{2GJ_t}\left[W_B - M_{el} + W_B\right] = 0$$

$$\boxed{W_B = \frac{M_{el}}{2}} \rightarrow \boxed{W_A = -\frac{M_{el}}{2}}$$

$M_t(s)$:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\left[\int_0^{\ell/2}\left(\frac{M_{el}}{2}\right)^2\frac{1}{GJ_t}\,ds + \int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell}\frac{(M_{el}/2)^2}{GJ_t}\,ds\right] = \frac{1}{2}\frac{(M_{el}/2)^2}{GJ_t}\cdot\ell =$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\frac{M_{el}^2}{4GJ_t}\ell}_{1/K_\theta} = \frac{1}{2}\frac{M_{el}^2}{K_\theta}$$

L'EQUAZIONE DEL MOTO:

$$\underbrace{\frac{mR^2}{2}}_{I_p}\ddot{\theta}(t) + \underbrace{\frac{4\pi r^4/2}{\ell}}_{K_\theta}\theta(t) = M(t)$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K_\theta}{I_p}} = \sqrt{\frac{4\pi r^4/2}{\frac{mR^2}{2}\ell}}$$

SISTEMI A N GRADI DI LIBERTÀ

EQUAZIONI DI LAGRANGE

$\mathcal{E}(\underline{q}(t))$, $T(\dot{\underline{q}}(t))$

vettore di coordinate Lagrangiane (N)

IL VETTORE FORZANTE: $\underline{F}(t)$

LA POTENZA DEL SISTEMA: $\mathbb{P}(t) = \underline{F}(t) \cdot \dot{\underline{q}}(t)$

$$\frac{d}{dt}\left[\mathcal{E}(\underline{q}(t)) + T(\dot{\underline{q}}(t))\right] = \mathbb{P}(t)$$

matrice di rigidezza DEFINITA POSITIVA e SIMMETRICA

SE $\mathcal{E}(\underline{q}(t)) = \frac{1}{2}\, \underline{q}(t) \cdot \underline{\underline{K}}\, \underline{q}(t)$

FORMA LINEARE

matrice di massa DEF. POSITIVA e SIMMETRICA

e $T(\dot{\underline{q}}(t)) = \frac{1}{2}\, \dot{\underline{q}}(t)\, \underline{\underline{M}}\, \dot{\underline{q}}(t)$

ALLORA LA POTENZA

$$\dot{\underline{q}}(t)\left[\underline{\underline{M}}\, \ddot{\underline{q}}(t) + \underline{\underline{K}}\, \underline{q}(t)\right] = \underline{F}(t)\, \dot{\underline{q}}(t)$$

CIOÈ

$$\boxed{\underline{\underline{M}}\, \ddot{\underline{q}}(t) + \underline{\underline{K}}\, \underline{q}(t) = \underline{F}(t)}$$

Sistema di equazioni differenziali ordinarie del II ordine lineari (accoppiate)

SIA

$$\mathcal{L}(\underline{q}(t), \dot{\underline{q}}(t)) = T(\dot{q}) - \mathcal{E}(q)$$

ALLORA

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\underline{q}}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{q}} = \underline{F}(t)$$

EQ. DI LAGRANGE

$$N=2 \quad \begin{cases} M_{11}\, \ddot{q}_1(t) + M_{12}\, \ddot{q}_2(t) + K_{11}\, q_1(t) + K_{12}\, q_2(t) = F_1(t) \\ M_{12}\, \ddot{q}_1(t) + M_{22}\, \ddot{q}_2(t) + K_{12}\, q_1(t) + K_{22}\, q_2(t) = F_2(t) \end{cases}$$

CHE SI PUÒ RISCRIVERE NEL SISTEMA PRINCIPALE $\hat{q}$

$$\begin{cases} \hat{M}_{11}\,\ddot{\hat{q}}_1(t) + \hat{K}_{11}\,\hat{q}_1(t) = \hat{F}_1(t) \\ M_{12}\,\ddot{\hat{q}}_2(t) + \hat{K}_{22}\,\hat{q}_2(t) = \hat{F}_2(t) \end{cases}$$

→ IL SISTEMA DIVENTA DISACCOPPIATO

↓

LA SINGOLA EQUAZIONE HA COME SOLUZIONE QUELLA DI 1 gdl

↓

SI OTTIENE UN SISTEMA DI N OSCILLATORI SEMPLICI DISACCOPPIATI

IN FORMA MATRICIALE

$$\hat{\underline{M}}\,\ddot{\hat{\underline{q}}}(t) + \hat{\underline{K}}\,\hat{\underline{q}}(t) = \hat{\underline{F}}(t)$$

diagonali nel sistema principale

STRUTTURE

MASSE CONCENTRATE NEI NODI.

3D 6 gdl per nodo (3 TRASL + 3 ROT)

2D 3 gdl per nodo (2 TRASL + 1 ROT)

Hp.

H_1) INESTENSIBILITÀ ASSIALE DEI PILASTRI E DELLE TRAVI

H_2) AZIONE DI MOMENTO ESTERNO AL NODO E INERZIA DEL NODO NULLA

H_3) COMPORTAMENTO RIGIDO ALLA FLESSIONE NEL PIANO DEI SOLAI (3D)

(H_4) SE HO "SIMMETRIA" SEPARO IL PROBLEMA 3D IN 2 PROBLEMI 2D

2D

18 gdl

$H_1)$ $\begin{cases} u_1(t) = u_2(t) = u_3(t) = q_1^*(t) \\ u_4(t) = u_5(t) = u_6(t) = q_2^*(t) \end{cases}$

$\begin{cases} v_1(t) = v_2(t) = v_3(t) = v_4(t) = v_5(t) = \\ \quad = v_6(t) = \underline{\underline{0}} \end{cases}$

8 gdl

$$\underline{q}^*(t) = \begin{Bmatrix} q_1^*(t) \\ q_2^*(t) \\ \vdots \\ q_8^*(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_1^*(t) \\ q_2^*(t) \\ q_3^*(t) \\ \hline \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \\ \vdots \\ \theta_6(t) \end{Bmatrix}$$

$M = 8 \xrightarrow{H2)} 2 \quad \underline{q}(t) = \begin{Bmatrix} q_1^*(t) \\ q_2^*(t) \end{Bmatrix}$

IL SISTEMA:

$$\underline{\underline{M}}^* \ddot{\underline{q}}^*(t) + \underline{\underline{K}}^* \underline{q}^*(t) = \underline{F}^*(t)$$

$\underline{\underline{M}}^*$ matrice di massa:

$$\underline{F}^{*I}(t) = \underline{\underline{M}}^* \cdot \ddot{\underline{q}}^*(t)$$

$$F_i^{*I} = M_{ij}^* \ddot{q}_j(t)$$

$\longrightarrow M_{ij}^*$ = Forza di inerzia in direzione i quando ho accelerazione unitaria lungo j (e in tutte le altre direzioni nulle)

$\ddot{q}_1^* = 1$, $\ddot{q}_k^* = 0 \ \forall k \neq 1$ $\qquad$ $\ddot{q}_2 = 1$; $\ddot{q}_k = 0 \ \forall k \neq 2$, $\theta_1 = 1$

$$\underline{\underline{M}}^* = \left[\begin{array}{cc|cccccc} m_A + m_B + m_C & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & m_D + m_E + m_F & 0 & 0 & & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \end{array}\right]$$

MATRICE DIAGONALE

$\underline{\underline{K}}^*$: matrice di rigidezza

$$\underline{F}^{el*}(t) = \underline{\underline{K}}^* \, \underline{q}^*(t)$$

$$F_i^{*el} = K_{ij}^* \, q_j^*(t) \longrightarrow K_{ij}^* = \text{Forza elastica in direzione } i \text{ quando ho spostamento unitario in direzione } j \text{ (e tutti gli altri nulli)}$$

$q_1^* = 1$, $q_k^* = 0 \;\; \forall k \neq 1$:

$q_3^* = 1$, $q_k^* = 0 \;\; \forall k \neq 3$

SI RISOLVE CON IL METODO DEGLI SPOSTAMENTI (LA MATRICE DI RIGIDEZZA)

AL CONTRARIO DELLA MATRICE $\underline{\underline{H}}$

$$\underline{\underline{K}}^* = \left[\begin{array}{c|c} \neq 0 & \neq 0 \\ \hline \neq 0 & \neq 0 \end{array}\right]$$

$\underline{F}^*(t)$: Forzante esterna

$$\underline{F}^*(t) = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \ddot{u}_g(t) \begin{Bmatrix} m_A + m_B + m_C \\ m_D + m_E + m_F \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

per i gdl di rotazione i momenti sono nulli (+2)

CONDENSAZIONE STATICA

$$\underline{q}^* = \begin{Bmatrix} \underline{q}^{*A}(t) \\ \hline \underline{q}^{*B}(t) \end{Bmatrix}$$

→ gdl traslazionali (N)

gdl rotazionali (P)

$N + P = M$

$$\underline{\underline{M}}^* \ddot{\underline{q}}^*(t) + \underline{\underline{K}}^* \underline{q}^*(t) = \underline{F}^*(t)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}^*_{AA} & \underline{\underline{0}} \\ \hline \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\underline{q}}^{*A}(t) \\ \hline \ddot{\underline{q}}^{*B}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}^*_{AA} & \underline{\underline{K}}^*_{AB} \\ \hline \underline{\underline{K}}^*_{BA} & \underline{\underline{K}}^*_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{q}^{*A}(t) \\ \hline \underline{q}^{*B}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F}^*_A(t) \\ \hline \underline{0} \end{bmatrix}$$

$N \times N$, $N \times P$, $P \times N$, $P \times P$; N, P

ALLORA

$$\begin{cases} \underline{\underline{M}}^*_{AA} \ddot{\underline{q}}^{*A} + \underline{\underline{K}}^*_{AA} \underline{q}^{*A}(t) + \underline{\underline{K}}^*_{AB} \underline{q}^{*B}(t) = \underline{F}^*_A(t) \\ \underline{0} + \underline{\underline{K}}^*_{BA} \underline{q}^{*A}(t) + \underline{\underline{K}}^*_{BB} \underline{q}^{*B}(t) = \underline{0} \end{cases} \longrightarrow$$

$$\longmapsto \quad \underline{q}^{*B}(t) = -\left(\underline{\underline{K}}^*_{BB}\right)^{-1} \underline{\underline{K}}^*_{BA} \underline{q}^{*A}(t)$$ → LEGAME LINEARE

CIOÈ $\underline{q}^{*B}(t) = \underline{q}^{*B}\left(\underline{q}^{*A}(t)\right)$ → È FUNZIONE DEL TEMPO PERCHÉ LE TRASLAZIONI SONO FUNZIONE DEL TEMPO.

$$\underline{\underline{M}}^*_{AA} \ddot{\underline{q}}^{*A}(t) + \left[\underline{\underline{K}}^*_{AA} - \underline{\underline{K}}^*_{AB}\left(\underline{\underline{K}}^*_{BB}\right)^{-1} \underline{\underline{K}}_{BA}\right] \underline{q}^{*A}(t) = F^*_A(t)$$

↳ IN FUNZIONE DI UN gdl!

Se:

$$\underline{q}(t) = \underline{q}^{*A}(t), \quad \underline{F}(t) = \underline{F}^*_A(t), \quad \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{M}}^*_{AA},$$

$$\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{K}}^*_{AA} - \underline{\underline{K}}^*_{AB}\left(\underline{\underline{K}}^*_{BB}\right)^{-1} \underline{\underline{K}}^*_{BA}$$ → CONDENSAZIONE STATICA

ALLORA

$$\boxed{\underline{\underline{M}}\, \ddot{\underline{q}}(t) + \underline{\underline{K}}\, \underline{q}(t) = \underline{F}(t)}$$

N GDL TRASLAZIONALI

$\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{K}}^{-1}$ MATRICE DI CEDEVOLEZZA

ESEMPIO

CALCOLARE $\underline{\underline{K}}$

$q_1 = 1 \; ; \; q_2 = 0 \; ; \; q_j^* = 0 \; \forall j = 3, \dots, 6 \longrightarrow K_{i1}^* \; , \; i = 1, 2, \dots, 6$

$$\begin{cases} y(0) = 0 & y(h) = 1 \\ y'(0) = 0 & y'(h) = 0 \end{cases} \rightarrow y(s) = As^3 + Bs^2 + Cs + D \quad (\text{POICHÉ } M(s) \propto s)$$

I^a COLONNA DI $\underline{\underline{K}}^*$

$$K_{11}^* = \frac{24(EJ_{p1} + EJ_{p2})}{h^3} > 0 \; , \qquad K_{21}^* = -\frac{24\,EJ_{p2}}{h^3} = K_{12}^*$$

$$K_{31}^* = \frac{6}{h^2}(EJ_{p1} - EJ_{p2}) \; , \qquad K_{41}^* = \frac{6}{h^2}(EJ_{p1} - EJ_{p2})$$

$$K_{51}^* = -\frac{6\,EJ_{p2}}{h^2} \; , \qquad K_{61}^* = -\frac{6\,EJ_{p2}}{h^2}$$

$q_2 = 1 \; ; \; q_1 = 0 \; ; \; q_j^* = 0 \quad \forall j = 3, 4, \dots 6$

II° COLONNA DI $\underline{K}^*$

$K_{12}^* = -\dfrac{24EJ_{p2}}{h^3} = K_{21}^* \quad ; \quad K_{22}^* = \dfrac{24EJ_{p2}}{h^3} > 0$

$K_{32}^* = \dfrac{6EJ_{p2}}{h^2} \quad ; \quad K_{42}^* = \dfrac{6EJ_{p2}}{h^2}$

$K_{52}^* = \dfrac{6EJ_{p2}}{h^2} \quad ; \quad K_{62}^* = \dfrac{6EJ_{p2}}{h^2}$

LA MATRICE $\underline{K}^*$ È SIMMETRICA! COME VERIFICA È BENE CALCOLARE TUTTE LE COMPONENTI.

SULLA DIAGONALE I TERMINI DEVONO ESSERE SEMPRE POSITIVI, PERCHÉ LE FORZE DEVONO COMPIERE LAVORO POSITIVO

$q_3^* = 1 \; , \; q_j^* = 0 \quad \forall j \in [4, 6) \; , \; q_1 = q_2 = 0$

$y(0) = 0$

$y'(0) = 0$

$y(h) = 0$

$y'(h) = 1$

PER IL TEOREMA di BETTI:

$$\mathcal{L}_{ab} = \mathcal{L}_{ba}$$

CIOÈ, IL MOMENTO DELLA PRIMA DEFORMATA CREA LAVORO NELLA SECONDA PER

$$\mathcal{L}_{ab} = \underbrace{\frac{6EJ_p}{h^2}}_{\text{momento "1"}} \cdot 1 \rightarrow \text{rotazione "2"}$$

IL TAGLIO NELLA SECONDA CREA LAVORO NELLA PRIMA DEFORMATA

$$\mathcal{L}_{ba} = \underbrace{\frac{6EJ_p}{h^2}}_{\text{taglio "2"}} \cdot 1 \rightarrow \text{spostamento "1"}$$

$$K_{13}^* = \frac{6}{h^2}\left(EJ_{p1} - EJ_{p2}\right) = K_{31}^* \quad ; \quad K_{23}^* = \frac{6}{h^2} EJ_{p2} = K_{32}^*$$

$$K_{33}^* = \frac{4}{h}\left(EJ_{p1} + EJ_{p2}\right) + \frac{4EJ_{t1}}{\ell} \quad ; \quad K_{43}^* = \frac{2EJ_{t1}}{\ell}$$

$$K_{53}^* = \frac{2EJ_{p2}}{h} \quad ; \quad K_{63}^* = 0$$

$$\boxed{\rho_5^* = 1 \; ; \; \rho_j^* = 0 \quad \forall j = 3,4,6 \; , \; \rho_1 = \rho_2 = 0}$$

$$K_{15}^* = -\frac{6EJ_{p2}}{h^2} \quad ; \quad K_{25} = \frac{6EJ_{p2}}{h^2}$$

$$K_{35}^* = \frac{2EJ_{p2}}{h} \quad ; \quad K_{45}^* = 0$$

$$K_{55}^* = 4\frac{EJ_{p2}}{h} + \frac{4EJ_{t2}}{\ell} \quad ; \quad K_{65}^* = \frac{2EJ_{t2}}{\ell}$$

La matrice di rigidezza del telaio considerato risulta:

$$\underline{\underline{K}}^{*} = \left[\begin{array}{cc|cccc}
\frac{24(EI_{P1}+EI_{P2})}{h^3} & -\frac{24EI_{P2}}{h^3} & \frac{6(EI_{P1}-EI_{P2})}{h^2} & \frac{6(EI_{P1}-EI_{P2})}{h^2} & -\frac{6EI_{P2}}{h^2} & -\frac{6EI_{P2}}{h^2} \\
-\frac{24EI_{P2}}{h^3} & \frac{24EI_{P2}}{h^3} & \frac{6EI_{P2}}{h^2} & \frac{6EI_{P2}}{h^2} & \frac{6EI_{P2}}{h^2} & \frac{6EI_{P2}}{h^2} \\
\hline
\frac{6(EI_{P1}-EI_{P2})}{h^2} & \frac{6EI_{P2}}{h^2} & \frac{4(EI_{P1}+EI_{P2})}{h}+\frac{4EI_{T1}}{l} & \frac{2EI_{T1}}{l} & \frac{2EI_{P2}}{h} & 0 \\
\frac{6(EI_{P1}-EI_{P2})}{h^2} & \frac{6EI_{P2}}{h^2} & \frac{2EI_{T1}}{l} & \frac{4(EI_{P1}+EI_{P2})}{h}+\frac{4EI_{T1}}{l} & 0 & \frac{2EI_{P2}}{h} \\
-\frac{6EI_{P2}}{h^2} & \frac{6EI_{P2}}{h^2} & \frac{2EI_{P2}}{h} & 0 & \frac{4EI_{P2}}{h}+\frac{4EI_{T2}}{l} & \frac{2EI_{T2}}{l} \\
-\frac{6EI_{P2}}{h^2} & \frac{6EI_{P2}}{h^2} & 0 & \frac{2EI_{P2}}{h} & \frac{2EI_{T2}}{l} & \frac{4EI_{P2}}{h}+\frac{4EI_{T2}}{l}
\end{array}\right]. \qquad (1)$$

Limitando l'attenzione al caso $EI_{P1} = EI_{P2} = EI_P$ e $EI_{T1} = EI_{T2} = EI_T$ ed introducendo $K_P = \frac{6EI_P}{h}$, $K_T = \frac{6EI_T}{l}$ e $\phi = \frac{K_T}{K_P}$, la matrice di rigidezza (1) si può riscrivere come

$$\underline{\underline{K}}^{*} = K_P \left[\begin{array}{cc|cccc}
\frac{8}{h^2} & -\frac{4}{h^2} & 0 & 0 & -\frac{1}{h} & -\frac{1}{h} \\
-\frac{4}{h^2} & \frac{4}{h^2} & \frac{1}{h} & \frac{1}{h} & \frac{1}{h} & \frac{1}{h} \\
\hline
0 & \frac{1}{h} & \frac{2}{3}(2+\phi) & \frac{\phi}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\
0 & \frac{1}{h} & \frac{\phi}{3} & \frac{2}{3}(2+\phi) & 0 & \frac{1}{3} \\
-\frac{1}{h} & \frac{1}{h} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3}(1+\phi) & \frac{\phi}{3} \\
-\frac{1}{h} & \frac{1}{h} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{\phi}{3} & \frac{2}{3}(1+\phi)
\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \underline{\underline{K}}^{*}_{AA} & \underline{\underline{K}}^{*}_{AB} \\ \hline \underline{\underline{K}}^{*}_{BA} & \underline{\underline{K}}^{*}_{BB} \end{array}\right] \qquad (2)$$

CONDENSAZIONE STATICA $\quad \underline{\underline{K}} = \underline{\underline{K}}^*_{AA} - \underline{\underline{K}}^*_{AB}\,\underline{\underline{K}}^{*-1}_{BB}\,\underline{\underline{K}}^*_{BA}$

Considerando ai nodi azioni rotazionali esterne ed inerzia rotazionale nulle, ai fini dinamici è utile riferirsi alla matrice di rigidezza condensata

$$\underline{\underline{K}} = K_P \left\{ \begin{bmatrix} \frac{8}{h^2} & -\frac{4}{h^2} \\ -\frac{4}{h^2} & \frac{4}{h^2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{h} & -\frac{1}{h} \\ \frac{1}{h} & \frac{1}{h} & \frac{1}{h} & \frac{1}{h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3}(2+\phi) & \frac{\phi}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{\phi}{3} & \frac{2}{3}(2+\phi) & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3}(1+\phi) & \frac{\phi}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{\phi}{3} & \frac{2}{3}(1+\phi) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{h} \\ 0 & \frac{1}{h} \\ -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} \\ -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} \end{bmatrix} \right\} \tag{3}$$

$$= \frac{K_P}{(9\phi^4 + 84\phi^3 + 254\phi^2 + 292\phi + 105)h^2} \left[\begin{array}{c|c} 72\phi^4 + 654\phi^3 + 1882\phi^2 + 1970\phi + 576 & -(36\phi^4 + 318\phi^3 + 872\phi^2 + 844\phi + 222) \\ -(36\phi^4 + 318\phi^3 + 872\phi^2 + 844\phi + 222) & 36\phi^4 + 300\phi^3 + 734\phi^2 + 568\phi + 114 \end{array} \right],$$

che nel caso limite di traversi infinitamente rigidi diventa

SIMMETRICA $\longleftarrow$

$$\underline{\underline{K}}(\phi \to \infty) = \frac{4K_P}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \to \det \underline{\underline{K}} > 0 \tag{4}$$

>0

GDL ROTAZIONI NULLE

mentre nel caso di traversi infinatemente flessibili,

SIMMETRICA $\longleftarrow$

$$\underline{\underline{K}}(\phi \to 0) = \frac{2K_P}{35h^2} \begin{bmatrix} 96 & -37 \\ -37 & 19 \end{bmatrix}. \to \det \underline{\underline{K}} > 0 \tag{5}$$

>0

NEL CASO DI TRAVI INFINITAMENTE RIGIDE

$\rho_1 = 1 \; ; \; \rho_2 = 0$

$\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{K}}^*$

$$K_{11} = \frac{24}{h^3}\left(EJ_{P1} + EJ_{P2}\right)$$

$$K_{21} = -\frac{24\,EJ_{P2}}{h^3}$$

$\rho_2 = 1 \; ; \quad \rho_1 = 0$

$$K_{12} = -\frac{24\,EJ_{P2}}{h^3}$$

$$K_{22} = \frac{24\,EJ_{P2}}{h^3}$$

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} EJ_{P1} + EJ_{P2} & -EJ_{P2} \\ -EJ_{P2} & EJ_{P2} \end{bmatrix} \frac{24}{h^3}$$

$$\det \underline{\underline{K}} = \left(\frac{24}{h^3}\right)^2 \left(EJ_{P1} \cdot EJ_{P2} + \cancel{EJ_{P2}^2} - \cancel{EJ_{P2}^2}\right) > 0$$

Se $EJ_{P1} = EJ_{P2} = EJ_P$

$$\underline{\underline{K}} = \frac{24\,EJ_P}{h^3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{q_1 = 1}$

$$K_{11} = +\frac{72\,EJ_p}{h^3}$$

$$K_{21} = -36\frac{EJ_p}{h^3}$$

$\boxed{q_2 = 1}$

$$K_{12} = -\frac{36\,EJ_p}{h^3}$$

$$K_{22} = \frac{36\,EJ_p}{h^3} + \frac{12(\alpha EJ_p)}{8h^3}$$

$$\underline{\underline{K}} = \frac{36\,EJ_p}{h^3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1+\frac{\alpha}{24} \end{bmatrix}$$

$$\det \underline{\underline{K}} > 0$$

PER UN CORPO RIGIDO SI PUÒ SCRIVERE:

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} m & 0 & -S_{x_1^P} \\ 0 & m & S_{x_2^P} \\ -S_{x_1^P} & S_{x_2^P} & I_P \end{bmatrix}$$

LASTRA PIANA RIGIDA

$$\gamma = \frac{m}{\ell_1 \ell_2}$$

$$I_G = \gamma\left(\frac{\ell_1 \ell_2^3}{12} + \frac{\ell_1^3 \ell_2}{12}\right) = \frac{m(\ell_1^2 + \ell_2^2)}{12}$$

momento statico nullo in G

$$\underline{\underline{M}} = m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\ell_1^2+\ell_2^2}{12} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{M}} = m \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\ell_2/2 \\ 0 & 1 & \ell_1/2 \\ -\ell_2/2 & \frac{\ell_1}{2} & \frac{\ell_1^2+\ell_2^2}{3} \end{bmatrix}$$

$$I_P = \left(\frac{\ell_1 \cdot \ell_2^3}{3} + \frac{\ell_1^3 \ell_2}{3}\right)\gamma = \frac{m(\ell_1^2+\ell_2^2)}{3} = I_Q$$

$$\underline{\underline{M}} = m \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{\ell_2}{2} \\ 0 & 1 & \ell_1/2 \\ \frac{\ell_2}{2} & \frac{\ell_1}{2} & \frac{\ell_1^2+\ell_2^2}{3} \end{bmatrix}$$

BARRETTA RIGIDA

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\ell^2}{12} \end{bmatrix} m$$

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\ell/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\ell}{2} & 0 & \ell^2/3 \end{bmatrix} m$$

$\begin{cases} \ell_1 \to 0 \\ \ell_2 = \ell \end{cases}$ del caso precedente

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ell/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \ell/2 & 0 & \ell^2/3 \end{bmatrix} m$$

LE MATRICI DI MASSA SONO SIMMETRICHE E SONO DIAGONALI SOLO RISPETTO AL BARICENTRO.

OGNI MATRICE DESCRIVE L'EQUAZIONE DEL MOTO RISPETTO UN SISTEMA DIFFERENTE.

$$\underline{\underline{M}} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix} + \underline{\underline{K}} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \underline{F}(t)$$

$$\underline{\underline{M}} \begin{Bmatrix} \ddot{v}_1 \\ \ddot{v}_2 \\ \ddot{v}_3 \end{Bmatrix} + \underline{\underline{K}} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \underline{F}(t)$$

$$\underline{\underline{M}} \begin{Bmatrix} \ddot{w}_1 \\ \ddot{w}_2 \\ \ddot{w}_3 \end{Bmatrix} + \underline{\underline{K}} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} = \underline{F}(t)$$

OSCILLAZIONI LIBERE NON SMORZATE

IL SISTEMA RISOLVENTE DI N ODE DEL II° ORDINE CON C.I.

$$\begin{cases} \underline{\underline{M}}\, \ddot{\underline{q}}(t) + \underline{\underline{K}}\, \underline{q}(t) = \underline{0} & N \text{ ODE II° ORDINE} \\ \underline{q}(0) = \underline{q}_0 & \\ \dot{\underline{q}}(0) = \dot{\underline{q}}_0 & \end{cases} \quad 2N \text{ C.I}$$

LA SOLUZIONE:

$$\underline{q}(t) = \underbrace{\underline{\psi}^{(n)}}_{?} \left[A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t \right] \rightarrow \text{simile a quella ad 1 gdl } x(t) = A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t$$

SE ASSUMIAMO QUESTA COME SOLUZIONE, ALLORA

$$\dot{\underline{q}}(t) = \omega_n \underline{\psi}^{(n)} \left[-A_n \sin \omega_n t + B \cos \omega_n t \right]$$

$$\ddot{\underline{q}}(t) = -\omega_n^2 \underbrace{\underline{\psi}^{(n)} \left[A_n \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t \right]}_{\underline{q}(t)} = -\omega_n^2\, \underline{q}(t)$$

SOSTITUENDO:

$$\left[-\omega_n^2 \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{K}} \right] \underline{\psi}^{(n)} \left[A_n \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t \right] = \underline{0}$$

ESCLUDENDO LA QUIETE $\underline{q}(t) = \underline{0} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

SI HA SOLUZIONE SE

$$\left[-\omega_n^2 \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{K}}\right] \underline{\psi}^{(n)} = \underline{0} \rightarrow \text{PROBLEMA AGLI AUTOVALORI GENERALIZZATO}$$

CI SI RICONDUCE PER

$$\left[-\omega_n^2 \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{K}}\right] \underline{\underline{M}}\, \underline{\psi}^{(n)} = 0$$

LA SOLUZIONE NON BANALE SI HA SE

$$\det\left[-\omega_n^2 \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{K}}\right] = 0$$

?

$$= a_n (\omega_n^2)^N + a_{n-1} (\omega_n^2)^{N-1} + \dots + a_0$$

POLINOMIO DI ORDINE N in ω_n^2 A COEFFICIENTI REALI.

POICHÉ $\underline{\underline{K}}$ e $\underline{\underline{M}}$ SONO $\overset{+}{Sym} \Rightarrow \omega_n^2 > 0 \Rightarrow \omega_n$ REALE POSITIVO

AUTOVALORI

ω_n RAPPRESENTANO LE PULSAZIONI NATURALI

pulsazione fondamentale del sistema (la più bassa)

$$0 \le \omega_1 \le \omega_2 \le \omega_3 \le \dots \le \omega_N$$

I PERIODI e LE FREQUENZE

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \qquad f_n = \frac{1}{T_n} = \frac{\omega_n}{2\pi}$$

periodi propri (o naturali) — frequenze proprie (o naturali)

SI RISOLVE QUINDI IL PROBLEMA AGLI AUTOVETTORI:

$\underline{\psi}^{(n)}$ è L'AUTOVETTORE e SI OTTIENE DATO ω_n A MENO DEL SUO MODULO

ω_n INDICA LA VELOCITÀ DELLA STRUTTURA MENTRE $\underline{\psi}^{(n)}$ CI INDICA LA FORMA CHE PRENDE LA STRUTTURA.

$$\boxed{\underline{\psi}^{(n)} = \text{MODO NATURALE DI VIBRAZIONE}}$$

NORMALIZZAZIONE (DEGLI AUTOVETTORI)

ESISTONO DIVERSI MODI DI NORMALIZZARE

NOI UTILIZZEREMO LA ①

① $\max_{j=1,\dots,N} \left\{ |\psi_j^{(n)}| \right\} = \max_{j=1,\dots,N} \left\{ \psi_j^{(n)} \right\} = 1$

② $|\underline{\psi}^{(n)}| = 1$

③ $\underline{\psi}^{(n)} \cdot \underline{\underline{M}}\, \underline{\psi}^{(n)} = 1$

ESEMPIO: SIA

$\underline{\psi}^{(n)} = \begin{Bmatrix} +1 \\ -2 \end{Bmatrix}$ ① IL MASSIMO DEL MODULO È > 1 → DIVIDO PER 2

$\begin{Bmatrix} 1/2 \\ -1 \end{Bmatrix}$ NON COINCIDE CON IL MASSIMO DI $\underline{\psi}^{(n)}$ → MOLTIPLICO PER -1

$\begin{Bmatrix} -1/2 \\ 1 \end{Bmatrix}$ → $\max_j |\psi_j^{(n)}| = 1$ OK

② DIVIDO PER $\sqrt{5}$ → $\begin{Bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2\sqrt{5} \end{Bmatrix}$

③ DEVO AVERE DEFINITO $\underline{\underline{M}}$

se $\underline{\psi}^{(n)} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 2 \end{Bmatrix}$ ① HO UN PASSAGGIO IN MENO → DIVIDO PER 2

$\begin{Bmatrix} -1/2 \\ 1 \end{Bmatrix}$

ESEMPIO (GENERALE)

$\underline{\psi}^{(n)} = \begin{Bmatrix} \pm\alpha \\ \mp 2 \end{Bmatrix} \underset{①}{\sim} \begin{Bmatrix} \pm 1 \\ \mp 1 \end{Bmatrix}$ → $\begin{Bmatrix} \pm 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$ / $\begin{Bmatrix} -1 \\ +1 \end{Bmatrix}$ → posso scegliere indifferentemente uno o l'altro.

NEL CASO IN CUI 2 PULSAZIONI COINCIDANO:

$\omega_1 = \omega_2 \rightarrow$ può capitare in un telaio tridimensionale simmetrico a facce uguali

Però $\underline{\psi}^{(1)} \neq \underline{\psi}^{(2)}$

ABBIAMO TROVATO N SOLUZIONI $\underline{q}(t)$

LA SOLUZIONE FINALE È LA COMPOSIZIONE DI N SOLUZIONI.

$$\underline{q}(t) = \sum_{n=1}^{N} \underline{\psi}^{(n)} \left[A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t \right]$$

$\rightarrow$ SOVRAPPOSIZIONE DI N OSCILLATORI SEMPLICI.

$$\dot{\underline{q}}(t) = \sum_{n=1}^{N} \omega_n \underline{\psi}^{(n)} \left[-A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t \right]$$

ALLORA, PER CALCOLARE A_n e B_n:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{q}(0) &= \sum_{n=1}^{N} A_n \underline{\psi}^{(n)} = \underline{q}_0 \\ \dot{\underline{q}}(0) &= \sum_{n=1}^{N} \omega_n B_n \underline{\psi}^{(n)} = \dot{\underline{q}}_0 \end{aligned}}$$

SISTEMA LINEARE DI $2N$ INCOGNITE (A_n e B_n) IN $2N$ EQUAZIONI.

ORTOGONALITÀ DEI MODI DI VIBRARE

$$\underline{\psi}^{(i)} \cdot \underline{\underline{K}}\, \underline{\psi}^{(j)} = \underline{\psi}^{(i)} \cdot \underline{\underline{M}}\, \underline{\psi}^{(j)} = 0 \qquad \forall \omega_i \neq \omega_j$$

↳ in riferimento a $\underline{\underline{M}}$ e $\underline{\underline{K}}$

$\underline{u} \perp \underline{v} \rightarrow \underline{u} \cdot \underline{v} = 0 \rightarrow \underline{u} \cdot \underline{\underline{I}}\, \underline{v} = 0$

↳ in riferimento alla matrice identità

$$\left[-\omega_i^2 \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{K}} \right] \underline{\psi}^{(i)} = 0 \rightarrow \underline{\psi}^{(j)} \omega_i^2 \underline{\underline{M}}\, \underline{\psi}^{(i)} = \underline{\underline{K}}\, \underline{\psi}^{(i)} \cdot \underline{\psi}^{(j)}$$

$$\left[-\omega_j^2 \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{K}} \right] \underline{\psi}^{(j)} = 0 \rightarrow \underline{\psi}^{(i)} \omega_j^2 \underline{\underline{M}}\, \underline{\psi}^{(j)} = \underline{\underline{K}}\, \underline{\psi}^{(j)} \cdot \underline{\psi}^{(i)}$$

$\longrightarrow$

$$= \underline{\psi}^{(i)} \cdot \underline{\underline{K}}^T \underline{\psi}^{(j)} = \boxed{\underline{\psi}^{(i)} \cdot \underline{\underline{K}}\, \underline{\psi}^{(j)}} \quad , \quad \underline{\underline{K}} \in Sym$$

$$\rightarrow \quad = \boxed{\underline{\psi}^{(i)} \cdot \underline{\underline{K}}\, \underline{\psi}^{(j)}} \quad =$$

POSSIAMO DIRE CHE:

$$\underline{\psi}^{(j)} \cdot \omega_i^2 \underline{\underline{M}}\, \underline{\psi}^{(i)} = \underline{\psi}^{(i)} \cdot \omega_j^2 \underline{\underline{M}}\, \underline{\psi}^{(j)}$$

$$\omega_i^2\, \underline{\psi}^{(j)} \cdot \underline{\underline{M}}\, \underline{\psi}^{(i)} = \omega_j^2\, \underline{\psi}^{(j)} \underline{\underline{M}}\, \underline{\psi}^{(i)}$$

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2)\, \underline{\psi}^{(j)} \cdot \underline{\underline{M}}\, \underline{\psi}^{(i)} = 0 \iff \underline{\psi}^{(j)} \cdot \underline{\underline{M}}\, \underline{\psi}^{(i)} = 0$$

NE CONSEGUE CHE

$$\underline{\psi}^{(i)} \cdot \underline{\underline{K}}\, \underline{\psi}^{(j)} = 0$$

MATRICE MODALE $\underline{\underline{\Psi}}$

$$\left[\underline{\underline{\Psi}}\right]_{ij} = \psi_i^{(j)}$$

$$\left[\underline{\underline{\Psi}}\right] = \left[\underline{\psi}^{(1)}, \underline{\psi}^{(2)}, \dots, \underline{\psi}^{(N)}\right] = (N \times N)$$

MATRICE SPETTRALE $\underline{\underline{\Omega}}^2$

$$\underline{\underline{\Omega}}^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & 0 \\ & \omega_2^2 & \\ 0 & & \ddots \; \omega_N^2 \end{bmatrix} = \mathrm{diag}\left[\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_N^2\right]$$

ESERCIZIO 1

$q_1 = 1 \; ; \; q_2 = 0$

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$$

$q_2 = 1 \; ; \; q_1 = 0$

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} 72 & -24 \\ -24 & 24 \end{bmatrix} \frac{EJ_p}{h^3}$$

$$\underline{F}(t) = \begin{Bmatrix} P_1(t) - 2m\,\ddot{u}_g(t) \\ P_2(t) - m\,\ddot{u}_g(t) \end{Bmatrix}$$

CASO $\boxed{P_1 = P_2 = u_g = 0}$ OSCILLAZIONI LIBERE

VALUTARE $\omega_1 \rightsquigarrow \underline{\psi}^{(1)}$

$\omega_2 \rightsquigarrow \underline{\psi}^{(2)}$

$$\det\left[-\omega_n^2 \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{K}}\right] = 0$$

$K = K_{greco}$

$$\det\left[-\omega_n^2 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} m + \frac{24EJ_p}{h^3} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right] = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} 3K - 2m\omega_n^2 & -K \\ -K & K - \omega_n^2 m \end{bmatrix} = (3K - 2m\omega_n^2)(K - \omega_n^2 m) - K^2 =$$

$$= m^2\left[2\omega_n^4 - \frac{5K}{m}\omega_n^2 + 2\left(\frac{K}{m}\right)^2\right] = 0$$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{K}{m}\,\frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{K}{m} = \frac{12\,EJ_p}{h^3 m} = \omega_1^2 \\ 2\frac{K}{m} = \frac{48\,EJ_p}{m h^3} = \omega_2^2 \end{cases}$$

$\omega_1 < \omega_2$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{12\,EJ_p}{m h^3}} \quad ; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{48\,EJ_p}{m h^3}} = 2\,\omega_1$$

SOSTITUENDO PER TROVARE I MODI DI VIBRARE:

$$\left[-\omega_n^2\,\underline{\underline{M}} + \underline{\underline{K}}\right]\underline{\psi}^{(n)} = \underline{0}$$

$\omega_n = 1$:

$$\begin{bmatrix} 3K - \cancel{2m}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\frac{K}{\cancel{m}} & -K \\ -K & K - \cancel{m}\frac{1}{\cancel{2}}\frac{K}{\cancel{m}} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\psi_1^{(1)}\\ \psi_2^{(1)}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix} K \begin{Bmatrix}\psi_1^{(1)}\\ \psi_2^{(1)}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2\psi_1^{(1)} - \psi_2^{(1)} = 0 \\ -\psi_1^{(1)} + \frac{\psi_2^{(1)}}{2} = 0 \end{cases} \rightarrow \text{SONO L.D.} \rightarrow \psi_2^{(1)} = 2\,\psi_1^{(1)} \quad \text{cioè}$$

$$\underline{\psi}^{(1)} = \begin{Bmatrix}1\\2\end{Bmatrix} \xrightarrow[\text{NORM.}]{\text{a}} \underline{\psi}^{(1)} = \begin{Bmatrix}1/2\\1\end{Bmatrix}$$

GRAFICANDO IL MODO DI VIBRARE

I

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{12\,EJ_p}{m h^3}} \qquad \underline{\psi}^{(1)} = \begin{Bmatrix}1/2\\1\end{Bmatrix}$$

$\omega_n = 2$:

$$\begin{bmatrix} 3K - \cancel{2m}\frac{2K}{\cancel{m}} & -K \\ -K & K - \cancel{m}\frac{2K}{\cancel{m}} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\psi_1^{(2)}\\ \psi_2^{(2)}\end{Bmatrix} = K\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\psi_1^{(2)}\\ \psi_2^{(2)}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix} \rightarrow$$

$$\underline{\psi_2^{(2)} = -\psi_1^{(2)}} \qquad \underline{\psi}_2 = \begin{Bmatrix}1\\-1\end{Bmatrix}$$

II

questo nodo non si muove

$\omega_2 = 2\omega_1 \qquad \underline{\psi}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$

NODO DEL MODO

VERIFICA DEL PRINCIPIO DI ORTOGONALITÀ

$$\underline{\psi}^{(1)} \cdot \underline{\underline{M}}\, \underline{\psi}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} m \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 \\ -1 \end{Bmatrix} m = \left(2 \times \tfrac{1}{2} - 1 \times 1\right) m = 0 \quad \boxed{OK}$$

$$= \underline{\psi}^{(2)} \cdot \underline{\underline{M}}\, \underline{\psi}^{(1)}$$

$$\underline{\psi}^{(1)} \cdot \underline{\underline{K}}\, \underline{\psi}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} k \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} k = (2-2)k = 0 \quad \boxed{OK}$$

$$= \underline{\psi}^{(2)} \cdot \underline{\underline{K}}\, \underline{\psi}^{(1)}$$

CONDIZIONI INIZIALI

$$\underline{q}(t) = \sum_{n=1}^{2} \underline{\psi}^{(n)} \left[A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t \right]$$

$$\dot{\underline{q}}(t) = \sum_{n=1}^{2} \omega_n \underline{\psi}^{(n)} \left[-A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t \right]$$

$$\underline{q}(0) = \sum_{n=1}^{2} \underline{\psi}^{(n)} A_n = A_1 \underline{\psi}^{(1)} + A_2 \underline{\psi}^{(2)}$$

$$\dot{\underline{q}}(0) = \sum_{n=1}^{2} \underline{\psi}^{(n)} \omega_n B_n = A_1 \omega_1 \underline{\psi}^{(1)} + A_2 \omega_2 \underline{\psi}^{(2)}$$

SIA $\dot{\underline{q}}(0) = 0 \implies \underline{B_1 = B_2 = 0}$

Caso (i): $\underline{q}(0) = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$ → MOLTIPLICATORE DEL PRIMO MODO DI VIBRARE (A_2 NON GIOCA)

$$\begin{cases} A_1 \psi_1^{(1)} + A_2 \psi_1^{(2)} = 1 \\ A_1 \psi_2^{(1)} + A_2 \psi_2^{(2)} = 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} A_1 = 2 \\ \underline{A_2 = 0} \end{cases}$$

$$\underline{q}(t) = \begin{Bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{Bmatrix} \cdot 2 \cos \omega_1 t = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \cos \omega_1 t \rightarrow$$

IL SISTEMA OSCILLA TRA LA CONFIGURAZIONE (I) POSITIVA E LA NEGATIVA INDEFINITAMENTE NEL TEMPO

Caso (ii) $\underline{q}(0) = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$

$$\begin{cases} A_1 \psi_1^{(1)} + A_2 \psi_1^{(2)} = -1 \\ A_1 \psi_2^{(1)} + A_2 \psi_2^{(2)} = +1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A_1 = 0 \\ A_2 = -1 \end{cases}$$

$$\underline{q}(t) = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \cos \omega_2 t$$

VIBRA SECONDO IL MODO (II) PARTENDO DALLA CONFIGURAZIONE NEGATIVA.

Caso (iii) $\underline{q}(0) = \begin{Bmatrix} -1/2 \\ 2 \end{Bmatrix}$

$$\begin{cases} A_1 \psi_1^{(1)} + A_2 \psi_1^{(2)} = -\frac{1}{2} \\ A_1 \psi_2^{(1)} + A_2 \psi_2^{(2)} = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A_1 = 1 \\ A_2 = -1 \end{cases}$$

$$\underline{q}(t) = \begin{Bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{Bmatrix} \cos \omega_1 t + \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \cos \omega_2 t$$

ENTRAMBI I MODI ENTRANO IN GIOCO.

22/10/2019

COORDINATE PRINCIPALI

L'EQUAZIONE DEL MOTO

$$\underline{\underline{M}}\,\ddot{\underline{q}}(t) + \underline{\underline{K}}\,\underline{q}(t) = \underline{F}(t)$$

RISULTA UN PROBLEMA DISACCOPPIATO (NELLE COMPONENTI DI $\ddot{\underline{q}}$ e $\underline{q}$)

POICHÉ LE MATRICI $\underline{\underline{M}}$ e $\underline{\underline{K}}$ RISULTANO DIAGONALI.

$$\underset{(N\times 1)}{\underline{q}(t)} = \underset{(N\times N)}{\underline{\underline{\Psi}}}\ \underset{(N\times 1)}{\hat{\underline{q}}(t)}$$

COORDINATE LAGRANGIANE DI RIFERIMENTO (o libere)

MATRICE MODALE

COORDINATE PRINCIPALI

Se $\hat{\underline{q}}(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}$ K-esima posizione $\Rightarrow q_i(t) = [\underline{\underline{\Psi}}]_{ij}\ \hat{q}_j(t) =$

$$= \psi_i^{(j)}\ \hat{q}_j(t)$$

$$\rightarrow q_i(t) = \psi_i^{(j)}\,\delta_{jk} = \psi_i^{(k)} \longrightarrow \underline{q}(t) = \underline{\psi}^{(k)}$$

PONENDO POI NULLA UNA DELLE COMPONENTI DELLE COORDINATE PRINCIPALI, RISULTA CHE, LE COORDINATE LAGRANGIANE $\underline{q}(t)$ SARÀ PARI AL SOLO MODO DI VIBRARE $\underline{\psi}^{(k)}$.

L'ENERGIA CINETICA

$$T = \frac{1}{2}\,\dot{\underline{q}}(t)\cdot\underline{\underline{M}}\,\dot{\underline{q}}(t) = \frac{1}{2}\,\underline{\underline{\Psi}}\,\dot{\hat{\underline{q}}}(t)\cdot\underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{\Psi}}\,\dot{\hat{\underline{q}}}(t) = \frac{1}{2}\,\dot{\hat{\underline{q}}}(t)\cdot\boxed{\underline{\underline{\Psi}}^T\underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{\Psi}}}\,\dot{\hat{\underline{q}}}(t)$$

$\hat{\underline{\underline{M}}}$ = matrice di massa nel sistema principale

L'ENERGIA ELASTICA:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\,\underline{q}(t)\cdot\underline{\underline{K}}\,\underline{q}(t) = \frac{1}{2}\,\underline{\underline{\Psi}}\,\hat{\underline{q}}(t)\cdot\underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{\Psi}}\,\hat{\underline{q}}(t) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\hat{\underline{q}}(t)\cdot\boxed{\underline{\underline{\Psi}}^T\underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{\Psi}}}\,\hat{\underline{q}}(t)$$

$\hat{\underline{\underline{K}}}$ = matrice di rigidezza nel sistema principale

DOVE:

$$\hat{\underline{\underline{M}}}_{ij} = \left[\underline{\underline{\Psi}}^T \underline{\underline{M}}\, \underline{\underline{\Psi}}\right]_{ij} = \left[\underline{\underline{\Psi}}^T\right]_{i\ell} \left[\underline{\underline{M}}\right]_{\ell k} \left[\underline{\underline{\Psi}}\right]_{kj} =$$

$$= \left[\underline{\underline{\Psi}}\right]_{\ell i} \left[\underline{\underline{M}}\right]_{\ell k} \left[\underline{\underline{\Psi}}\right]_{kj} =$$

$$= \psi^{(i)}_{\ell} \left[\underline{\underline{M}}\right]_{\ell k} \psi^{(j)}_{k} = \underline{\psi}^{(i)} \cdot \underline{\underline{M}}\, \underline{\psi}^{(j)} = \begin{cases} \overbrace{0 \quad i \neq j}^{\text{ORTOGONALITÀ}} \\ \hat{M}_i \end{cases}$$

$\hat{\underline{\underline{M}}}$ È DIAGONALE!

VALE LO STESSO PROCEDIMENTO PER $\hat{\underline{\underline{K}}}$

$$\hat{\underline{\underline{M}}} = \mathrm{diag}(\hat{M}_i) \qquad \hat{M}_i = \underline{\psi}^{(i)} \cdot \underline{\underline{M}}\, \underline{\psi}^{(i)}, \quad \underline{i \text{ NON SOMMATO}}$$

$$\hat{\underline{\underline{K}}} = \mathrm{diag}(\hat{K}_i) \qquad i = 1, 2, \dots, N,$$

L'EQUAZIONE DI PARTENZA, CON OSCILLAZIONI LIBERE:

$$\underline{\underline{M}}\, \ddot{\underline{q}}(t) + \underline{\underline{K}}\, \underline{q}(t) = 0$$

$$\hat{\underline{\underline{M}}}\, \ddot{\hat{\underline{q}}}(t) + \hat{\underline{\underline{K}}}\, \hat{\underline{q}}(t) = 0 \longrightarrow \underbrace{\begin{cases} \hat{M}_1\, \ddot{\hat{q}}_1(t) + \hat{K}_1\, \hat{q}_1(t) = 0 \\ \vdots \\ \hat{M}_N\, \ddot{\hat{q}}_N(t) + \hat{K}_N\, \hat{q}_N(t) = 0 \end{cases}}_{\text{N OSCILLATORI SEMPLICI DISACCOPPIATI}}$$

SE SIAMO ARRIVATI QUA CONOSCIAMO $\underline{\psi}^{(n)}$ e perciò $\omega_n^2 = \dfrac{\hat{K}_n}{\hat{M}_n}$

$$\boxed{\omega_n^2 = \frac{\hat{K}_n}{\hat{M}_n} = \frac{\underline{\psi}^{(n)} \cdot \underline{\underline{K}}\, \underline{\psi}^{(n)}}{\underline{\psi}^{(n)} \cdot \underline{\underline{M}}\, \underline{\psi}^{(n)}}}$$

QUOZIENTE DI RAYLEIGH

IL CRITERIO DI NORMALIZZAZIONE ③ DI PAG. 176 IMPONE

$$\underline{\psi}^{(n)}\, \underline{\underline{M}}\, \underline{\psi}^{(n)} = 1 \quad \text{CIOÈ} \quad \hat{M}_i = 1 \quad \forall i = 1, \dots, N$$

MA ALLORA

$$\hat{\underline{\underline{M}}} = \underline{\underline{I}}$$

e

$$\hat{\underline{\underline{K}}} = \underline{\underline{\Omega}}^2 \qquad (\hat{K}_i = \omega_i^2)$$

CON FORZANTE

$$\underline{\underline{M}}\,\ddot{\underline{q}}(t) + \underline{\underline{K}}\,\underline{q}(t) = \underline{F}(t)$$

$$\hat{\underline{\underline{M}}}\,\ddot{\hat{\underline{q}}}(t) + \hat{\underline{\underline{K}}}\,\hat{\underline{q}}(t) = \hat{\underline{F}}(t)$$

$$\underline{\underline{\Psi}}^T \underline{\underline{M}}\,\underbrace{\underline{\underline{\Psi}}\,\ddot{\hat{\underline{q}}}(t)}_{\ddot{\underline{q}}(t)} + \underline{\underline{\Psi}}^T \underline{\underline{K}}\,\underbrace{\underline{\underline{\Psi}}\,\hat{\underline{q}}(t)}_{\underline{q}(t)} = \hat{\underline{F}}(t)$$

$$\underline{\underline{\Psi}}^T \Big(\underbrace{\underline{\underline{M}}\,\ddot{\underline{q}}(t) + \underline{\underline{K}}\,\underline{q}(t)}_{\underline{F}(t)}\Big) = \hat{\underline{F}}(t)$$

$$\boxed{\hat{\underline{F}}(t) = \underline{\underline{\Psi}}^T \underline{F}(t)}$$ FORZANTE NEL SISTEMA PRINCIPALE

RISPOSTA FORZATA

L'OBIETTIVO È RISOLVERE:

$$\hat{M}_i \ddot{\hat{q}}_i(t) + \hat{K}_i \hat{q}_i(t) = \hat{F}_i(t) \qquad \forall\, i = 1, \dots, N$$

Se $\hat{F}_i(t) = \hat{\bar{F}}_i \quad \hat{f}_i(t)$

ALLORA

$$\ddot{\hat{q}}_i(t) + \omega_i^2 \hat{q}_i(t) = \omega_i^2 \hat{q}_i^{ST} \hat{f}_i(t) \quad , \qquad \hat{q}_i^{ST} = \frac{\hat{\bar{F}}_i}{\hat{K}_i}$$

DATA $\hat{q}_i^{ST}$ e $\hat{\bar{F}}_i$

$$\hat{q}_i^{part}(t) = \frac{1}{\hat{M}_i \omega_i} \int_0^t \hat{F}_i(\tau) \sin \omega_i (t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \hat{q}_i^{ST} \boxed{\omega_i \int_0^t \hat{f}_i(\tau) \sin \omega_i (t-\tau)\, d\tau} \quad \hat{\Xi}_i(t)$$

$$\hat{q}_i(t) = A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t + \hat{q}_i^{ST}\, \hat{\Xi}_i(t)$$

$$\underline{q}(t) = \underline{\underline{\Psi}}\,\hat{\underline{q}}(t)$$

$$q_i(t) = \sum_{j=1}^{N} \psi_i^{(j)} \hat{q}_j(t) = \sum_{j=1}^{N} \psi_i^{(j)} \left[A_j \cos \omega_j t + B_j \sin \omega_j t + \hat{q}_j^{st} \, \hat{\Gamma}_j(t) \right] \quad (134)$$

IN GENERE $\hat{f}_i(t) \neq f_i(t)$

CASO $\hat{f}_i(t) = \sin \omega t$

$$\hat{q}_i(t) = A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t + \frac{\hat{q}_i^{st}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_i^2}} \sin \omega t$$

$$\underline{q}(t) = \sum_{j=1}^{N} \underline{\psi}^{(j)} \left[A_j \cos \omega_j t + B_j \sin \omega_j t \right] + \sum_{j=1}^{N} \underline{\psi}^{(j)} \frac{\hat{q}_j^{st}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_j^2}} \sin \omega t$$

NEL SISTEMA ⊗ $\hat{q}_i$ VA IN RISONANZA QUANDO $\omega = \omega_i$ $\forall i$

($\hat{q}_1$ VA IN RISONANZA QUANDO $\omega = \omega_1$, etc). VA A INFINITO SOLO 1 COMPONENTE.
$\hat{q}_1 \to \infty$, $\hat{q}_2, \hat{q}_3$ finiti

NEL SISTEMA LIBERO, AD OGNI RISONANZA (ESSENDOCI UNA SOMMATORIA) BECCO QUELLA CHE VA AD INFINITO, PERCIÒ OGNI COMPONENTE DI $\underline{q}(t)$ VA A INFINITO.

Se $\omega \to \omega_i \Rightarrow \hat{q}_i \to \infty$

$\Rightarrow \underline{q}(t) \to \infty \cdot \underline{\psi}^{(i)}$

FORZE EQUIVALENTI A MOTO IMPRESSO

$$\underline{F}(t) = -\underline{\underline{M}} \left[\underline{t}_h \, \ddot{u}_g(t) + \underline{t}_v \, \ddot{v}_g(t) \right] \quad \text{MOTO SINCRONO}$$

accelerazione orizzontale

accelerazione verticale

vettore di trascinamento orizzontale

vettore di trascinamento verticale

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2+m_3+m_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{F}(t) = -\begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2+m_3+m_4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \ddot{u}_g(t) - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_3 \\ m_4 \end{Bmatrix} \ddot{v}_g(t) =$$

$$\underline{E}(t) = \dots = -\underline{\underline{M}}\left[\underbrace{\begin{Bmatrix}1\\1\\0\\0\end{Bmatrix}}_{\underline{t}_h}\ddot{u}_g(t) + \underbrace{\begin{Bmatrix}0\\0\\1\\1\end{Bmatrix}}_{\underline{t}_v}\ddot{v}_g\right]$$

$$\hat{\underline{E}}(t) = \underline{\underline{\Psi}}^T \underline{E}(t) = -\underline{\underline{\Psi}}^T \underline{\underline{M}}\left[\underline{t}_h\,\ddot{u}_g(t) + \underline{t}_v\,\ddot{v}_g(t)\right]$$

$$\hat{M}_i\,\ddot{\hat{q}}_i(t) + \hat{K}_i\,\hat{q}_i(t) = -\left[\Gamma_{hi}\,\hat{M}_i\,\ddot{u}_g(t) + \Gamma_{vi}\,\hat{M}_i\,\ddot{v}_g(t)\right]$$

coefficienti di partecipazione modale

È INFLUENZATO DAL CRITERIO DI NORMALIZZAZIONE

$$\begin{cases}\Gamma_{hi} = \dfrac{\underline{\psi}^{(i)}\cdot\underline{\underline{M}}\,\underline{t}_h}{\hat{M}_i}\\[2ex] \Gamma_{vi} = \dfrac{\underline{\psi}^{(i)}\cdot\underline{\underline{M}}\,\underline{t}_v}{\hat{M}_i}\end{cases}$$

ESERCIZIO

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} m$$

$$\underline{\underline{K}} = \underbrace{\frac{24\,EJ_p}{h^3}}_{K}\begin{bmatrix}3 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\underline{E}(t) = \begin{cases}P_1(t) - 2m\,\ddot{u}_g(t)\\ P_2(t) - m\,\ddot{u}_g(t)\end{cases}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{12\,EJ_p}{m h^3}} \qquad \underline{\psi}^{(1)} = \begin{Bmatrix}1/2\\1\end{Bmatrix}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{48\,EJ_p}{m h^3}} \qquad \underline{\psi}^{(2)} = \begin{Bmatrix}1\\-1\end{Bmatrix}$$

$$\hat{\underline{\underline{K}}} = \underline{\underline{\Psi}}^T \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{\Psi}} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}^T K \begin{bmatrix}3 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1/2 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix} = K\begin{bmatrix}3/4 & 0\\ 0 & 6\end{bmatrix}$$

OK DIAGONALE

$$\hat{\underline{\underline{M}}} = \underline{\underline{\Psi}}^T \underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{\Psi}} = \begin{bmatrix}1/2 & +1\\ 1 & -1\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/2 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix} = m\begin{bmatrix}3/2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$$

$$\hat{\underline{F}}(t) = \underline{\underline{\Psi}}\,\underline{F}(t) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} P_1(t) - 2m\ddot{u}_g(t) \\ P_2(t) - m\ddot{u}_g(t) \end{Bmatrix} =$$

$$= P_1(t)/2 + P_2(t) - 2m\ddot{u}_g(t)$$

$$P_1(t) - P_2(t) - m\ddot{u}_g(t)$$

LE EQUAZIONI SONO:

$$\begin{cases} \frac{3}{2}m\,\ddot{\hat{q}}_1(t) + \frac{3}{4}K\,\hat{q}_1(t) = \frac{P_1(t)}{2} + P_2(t) - 2m\,\ddot{u}_g(t) \\ 3m\,\ddot{\hat{q}}_2(t) + 6K\,\hat{q}_2(t) = P_1(t) - P_2(t) - m\,\ddot{u}_g(t) \end{cases}$$

- $\ddot{u}_g(t)$ CREA FORZANTE PER ENTRAMBI I MODI DI VIBRARE, COSÌ ANCHE $P_1(t)$ e $P_2(t)$.
- Se $P_1(t) = P_2(t) \xRightarrow{u_g(t)=0}$ LA FORZANTE È SOLO PER PRIMO MODO
- INOLTRE SE $P_1(t) = -2P_2(t) \xRightarrow{u_g=0}$ LA FORZANTE È SOLO PER II° MODO

$$\begin{cases} \Gamma_{h1} = \dfrac{2m}{\frac{3}{2}m} = \dfrac{4}{3} \\ \Gamma_{h2} = \dfrac{m}{3m} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$\underline{P_2(t) = 0, \quad P_1(t) = \bar{P}\sin\omega t, \quad u_g(t) = \bar{u}_g \sin\omega t}$

$$\ddot{u}_g(t) = -\omega^2 \bar{u}_g \sin\omega t$$

$$\begin{cases} \ddot{\hat{q}}_1(t) + \omega_1^2\,\hat{q}_1(t) = \underbrace{\boxed{\left[\dfrac{2\bar{P}}{3K} + \Gamma_{h1}\dfrac{\omega^2}{\omega_1^2}\bar{u}_g\right]}}_{\hat{q}_1^{ST}}\omega_1^2 \sin\omega t \\ \ddot{\hat{q}}_2(t) + \omega_2^2\,\hat{q}_2(t) = \underbrace{\boxed{\left[\dfrac{\bar{P}}{6K} + \Gamma_{h2}\dfrac{\omega^2}{\omega_2^2}\bar{u}_g\right]}}_{\hat{q}_2^{ST}}\omega_2^2 \sin\omega t \end{cases}$$

DATE LE C.I. DI QUIETE

$$\underline{q}(0) = \dot{\underline{q}}(0) = 0 \implies \hat{\underline{q}}(0) = \dot{\hat{\underline{q}}}(0) = 0$$

LA SOLUZIONE:

$$\begin{cases} \hat{q}_1(t) = \left[\dfrac{2\bar{P}}{3k} + \Gamma_{h1}\dfrac{\omega^2}{\omega_1^2}\bar{u}_g\right]\dfrac{1}{1-\dfrac{\omega^2}{\omega_1^2}}\left[\sin\omega t - \dfrac{\omega}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right] \\ \hat{q}_2(t) = \left[\dfrac{\bar{P}}{6k} + \Gamma_{h2}\dfrac{\omega^2}{\omega_2^2}\bar{u}_g\right]\dfrac{1}{1-\dfrac{\omega^2}{\omega_2^2}}\left[\sin\omega t - \dfrac{\omega}{\omega_2}\sin\omega_2 t\right] \end{cases}$$

RITORNIAMO AL SISTEMA DI COORDINATE LIBERE

$$\underline{q}(t) = \underline{\underline{\Psi}}\,\hat{\underline{q}}(t) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \hat{q}_1(t) \\ \hat{q}_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\hat{q}_1(t)}{2} + \hat{q}_2(t) \\ \hat{q}_1(t) - \hat{q}_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{Bmatrix}$$

CASO $\bar{u}_g = 0$:

$$\begin{cases} q_1(t) = \dfrac{\bar{P}}{3k}\left[\dfrac{\sin\omega t - \omega/\omega_1 \sin\omega_1 t}{1-\omega^2/\omega_1^2} + \dfrac{\sin\omega t - \dfrac{\omega}{\omega_2}\sin\omega_2 t}{2(1-\omega^2/\omega_2^2)}\right] \\ q_2(t) = \dfrac{\bar{P}}{3k}\left[2\,\dfrac{\sin\omega t - \omega/\omega_1 \sin\omega_1 t}{1-\omega^2/\omega_1^2} - \dfrac{\sin\omega t - \omega/\omega_2 \sin\omega_2 t}{2(1-\omega^2/\omega_2^2)}\right] \end{cases}$$

HO 2 RISONANZE PER OGNI COORDINATA LIBERA MENTRE NEL SISTEMA PRINCIPALE HO UNA SOLO RISONANZA PER OGNI COORDINATA.

Se $\dfrac{\omega}{\omega_1} \to 0$, $\dfrac{\omega}{\omega_2} < \dfrac{\omega}{\omega_1} \to 0$

$$\begin{cases} q_1(t) = \dfrac{\bar{P}}{3k}\sin\omega t \cdot \dfrac{3}{2} = \dfrac{\bar{P}}{2k}\sin\omega t = \dfrac{\bar{P}h^3}{48EJ_p}\sin\omega t \\ q_2(t) = \dfrac{\bar{P}}{3k}\,\dfrac{3}{2}\sin\omega t = q_1(t) \end{cases}$$

$q_1^{st} = q_2^{st}$

IN Q-S DAVANTI UNA FORZANTE AL I° PIANO, IL II° SI SPOSTA COME IL PRIMO.

CASO

$$q_1^{Part}(t) = q_1^{ST} \frac{1 - 1/3\left(\frac{\omega^2}{\omega_1^2} + \frac{\omega^2}{\omega_2^2}\right)}{\left(1 - \omega^2/\omega_1^2\right)\left(1 - \omega^2/\omega_2^2\right)} \sin \omega t \qquad N_1\left(\frac{\omega}{\omega_1}, \frac{\omega}{\omega_2}\right)$$

COEFFICIENTI DI AMPLIFICAZIONE DINAMICA PER IL I° e II° MODO

$$q_2^{Part}(t) = q_2^{ST} \frac{1}{\left(1 - \omega^2/\omega_1^2\right)\left(1 - \omega^2/\omega_2^2\right)} \sin \omega t \qquad N_2\left(\frac{\omega}{\omega_1}, \frac{\omega}{\omega_2}\right)$$

PER ANTIRISONANZA (≡ UN PO' DI SMORZAMENTO) IL II° PIANO OSCILLA POCHISSIMO CONFRONTATO CON LO SPOSTAMENTO DEL I° PIANO. IL II° PIANO È EQUILIBRATO DALLA FORZA ELASTICA DEL PICHTRO E L'INERZIA.

A NOI INTERESSA IL MASSIMO MOMENTO NEL TEMPO

$$M_2 = \frac{6EJ}{e^2}\left[q_1(t) - q_2(t)\right] = M_2(t)$$

$$M_1 = \frac{6EJ}{e^2}\left(q_1(t)\right) = M_1(t)$$

$$M_1^d = \max_t \{M_1(t)\} = \frac{6EJ}{e^2} \max_t \{q_1(t)\}$$

$$M_2^d = \max_t \{M_2(t)\} = \frac{6EJ}{e^2} \max_t \{q_1(t) - q_2(t)\}$$

CASO $P_1(t) = P_2(t) = 0$ $\quad u_g = \bar{u}_g \sin \omega t$

$$\begin{cases} q_1(t) = \bar{u}_g\left[-\dfrac{\Gamma_{h1}}{2\left(1-\frac{\omega_1^2}{\omega^2}\right)}\left(\sin\omega t - \dfrac{\omega}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right) - \dfrac{\Gamma_{h2}}{1-\frac{\omega_2^2}{\omega^2}}\left(\sin\omega t - \dfrac{\omega}{\omega_2}\sin\omega_2 t\right)\right] \\ q_2(t) = \bar{u}_g\left[-\dfrac{\Gamma_{h1}}{1-\frac{\omega_1^2}{\omega^2}}\left(\sin\omega t - \dfrac{\omega}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right) + \dfrac{\Gamma_{h2}}{1-\frac{\omega_2^2}{\omega^2}}\left(\sin\omega t - \dfrac{\omega}{\omega_2}\sin\omega_2 t\right)\right] \end{cases}$$

⊛ Se $\dfrac{\omega}{\omega_1} \to 0$ $\left(\dfrac{\omega}{\omega_2} \to 0\right) \Rightarrow q_1(t) = q_2(t) = 0$ TRASLAZIONE RIGIDA SINUSOIDALE

SE LO SPOSTAMENTO DEL TERRENO È MOLTO LENTO LA STRUTTURA SI MUOVE DI MOTO RIGIDO MA NON SI DEFORMA.

$$q_1^{part}(t) = -\bar{u}_g \left(\frac{\Gamma_{h1}\left(1-\frac{\omega_2^2}{\omega^2}\right) + 2\Gamma_{h2}\left(1-\frac{\omega_1^2}{\omega^2}\right)}{2\left(1-\frac{\omega_1^2}{\omega^2}\right)\left(1-\frac{\omega_2^2}{\omega^2}\right)} \right) \sin \omega t \; - N_1'\left(\frac{\omega}{\omega_1}, \frac{\omega}{\omega_2}\right)$$

$$q_2^{part}(t) = -\bar{u}_g \left(\frac{\Gamma_{h1}\left(1-\frac{\omega_2^2}{\omega^2}\right) - \Gamma_{h2}\left(1-\frac{\omega_1^2}{\omega^2}\right)}{\left(1-\frac{\omega_1^2}{\omega^2}\right)\left(1-\frac{\omega_2^2}{\omega^2}\right)} \right) \sin \omega t \; - N_2'\left(\frac{\omega}{\omega_1}, \frac{\omega}{\omega_2}\right)$$

23/10/2019

UNA VOLTA TROVATA $q_1(t)$ POSSIAMO CALCOLARE LE AZIONI SULLA STRUTTURA.

$$\underline{\underline{M}}\,\ddot{\underline{q}}(t) + \underline{\underline{K}}\,\underline{q}(t) = \underline{F}(t)$$

I MOMENTI SONO GENERATI DALLE FORZE ELASTICHE APPLICATE ALLA STRUTTURA.

$$\underline{F_{el}}(t) = \underline{\underline{K}}\,\underline{q}(t) = \underline{F}(t) - \underline{\underline{M}}\,\ddot{\underline{q}}(t)$$

A QUESTO PUNTO SI DEVE RISOLVERE QUESTO TELAIO

USO I METODI DELLA SdC

$$\begin{Bmatrix} F_{el,1} \\ F_{el,2} \end{Bmatrix} = \frac{24 E J_p}{h^3} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{Bmatrix}$$

$F_{el,1}$ e $F_{el,2}$ VARIANO NEL TEMPO.

SPEZZIAMO IL PROBLEMA IN 2 PARTI:

- PARTE SUPERIORE (PARTE INFERIORE TERMINA)

I PILASTRI HANNO LA STESSA RIGIDEZZA.

LA FORZA SI DIVIDE IN PARTI UGUALI NEI DUE PILASTRI

LA STRUTTURA SENZA AZIONI VERTICALI NON È IN EQUILIBRIO. ESISTE UNA REAZIONE VERTICALE

• PARTE INTERIORS

POR L'EQUILIBRIO:

$$F_{el,1}\cdot h + F_{el,2}\cdot 2h = 2\,\frac{F_{el,1}+F_{el,2}}{4}\cdot h + R_v\cdot \ell$$

$$R_v = \frac{3F_{el,2}+F_{el,1}}{2}\,\frac{h}{\ell}$$

TETTOIA

N.B. $P_4(t)$ NON DA CONTRIBUTO LUNGO $q_2(t)$

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} m_1+m_2 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad ; \quad \underline{F}(t) = \begin{Bmatrix} P_1(t) + P_3(t) - (m_1+m_2)\,\ddot{u}_g(t) \\ P_2(t) - m_2\,\ddot{v}_g(t) \end{Bmatrix}$$

• METODO DEGLI SPOSTAMENTI → CONSIDERO I GRADI DI LIBERTÀ ROTAZIONALI

$q_1 = 1$

$$K^*_{11} = \frac{12\,EJ}{\ell^3}$$
$$K^*_{21} = 0$$
$$K^*_{31} = \frac{6\,EJ}{\ell^3}$$
$$K^*_{41} = 0$$

$q_2 = 1$

$$K^*_{12} = 0$$
$$K^*_{22} = 12\,EJ/\ell^3$$
$$K^*_{32} = 6\,EJ/\ell^2$$
$$K^*_{42} = 6\,EJ/\ell^2$$

$q_3 = 1$

$$K^*_{13} = 6\,EJ/\ell^2$$
$$K^*_{23} = +6\,EJ/\ell^2$$
$$K^*_{33} = 2 \cdot 4\,EJ/\ell$$
$$K^*_{43} = 2\,EJ/\ell$$

$q_4 = 1$

$K^*_{14} = 0$

$K^*_{24} = 6EJ/l^2$

$K^*_{34} = 2EJ/l$

$K^*_{44} = 4EJ/l$

$$\underline{\underline{K}}^* = \frac{EJ}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & 0 & 6l & 0 \\ 0 & 12 & 6l & 6l \\ 6l & 6l & 8l^2 & 2l^2 \\ 0 & 6l & 2l^2 & 4l^2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{K}} = \frac{EJ}{l^3}\left[\begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6l & 0 \\ 6l & 6l \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8l^2 & 2l^2 \\ 2l^2 & 4l^2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 6l & 6l \\ 0 & 6l \end{bmatrix}\right]$$

$$= \underbrace{\frac{6EJ}{7l^3}}_{K}\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

- METODO DELLE FORZE (PER OTTENERE $\underline{\underline{K}}$ CI SONO INFINITI MODI)

INTERESSA CALCOLARE φ_1 e φ_2 PER TROVARE GLI SPOSTAMENTI.

$$\begin{cases} \dfrac{M_A l}{3EJ} + \dfrac{M_B l}{6EJ} + \varphi_1 = 0 \\[2ex] \dfrac{M_B l}{3E} + \dfrac{M_A l}{6EJ} - \varphi_1 = -\dfrac{M_B l}{3EJ} - \varphi_2 \\[2ex] M_A \varphi_1 - M_B \varphi_1 + F_1 \varphi_1 l = 0 \\ M_B \varphi_2 + F_2 \varphi_2 l = 0 \end{cases}$$

$$M_A = -(F_1+F_2)\,\ell \qquad \varphi_1 = \frac{2F_1+3F_2}{6EJ}\,\ell^2$$

$$M_B = -F_2\,\ell \qquad \varphi_2 = \frac{3F_1+8F_2}{6EJ}\,\ell^2$$

SAPPIAMO CHE

$$\delta_1 = \varphi_1 \ell = \underbrace{\frac{2\ell^3}{6EJ}}_{\eta_{11}} F_1 + \underbrace{\frac{3\ell^3}{6EJ}}_{\eta_{12}} F_2$$

$$\delta_2 = \varphi_2 \ell = \underbrace{\frac{3\ell^3}{6EJ}}_{\eta_{21}} F_1 + \underbrace{\frac{8\ell^3}{6EJ}}_{\eta_{22}} F_2$$

— coefficienti di cedevolezza

LA MATRICE DI CEDEVOLEZZA:

$$\underline{\underline{\eta}} = \frac{\ell^3}{EJ}\begin{bmatrix} 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 4/3 \end{bmatrix}$$

STIAMO OTTENENDO $\underline{\delta} = \underline{\underline{\eta}}\,\underline{F} \longrightarrow \underline{F} = \underbrace{\underline{\underline{\eta}}^{-1}}_{\underline{\underline{K}}}\,\underline{\delta}$

$$\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{\eta}}^{-1} = \dots \rightarrow \det \underline{\underline{\eta}} = \left(\frac{\ell^3}{EJ}\right)^2\left(\frac{4}{9}-\frac{1}{4}\right) = \frac{7}{36}\left(\frac{\ell^3}{EJ}\right)^2$$

$$\begin{cases} a_{11} = (-1)^2\,\frac{4}{3} = +\frac{4}{3}\frac{\ell^3}{EJ} \\ a_{12} = (-1)^3\,\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\frac{\ell^3}{EJ} \\ a_{21} = (-1)^3\,\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\frac{\ell^3}{EJ} \\ a_{22} = (-1)^4\,\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\frac{\ell^3}{EJ} \end{cases} \rightarrow \underline{\underline{K}} = \cancel{\left(\frac{\ell^3}{EJ}\right)} \cdot \frac{36}{7}\left(\frac{\ell^3}{EJ}\right)^{\cancel{-2}}\begin{bmatrix} 4/3 & -1/2 \\ -1/2 & 1/3 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{6EJ}{7\ell^3}\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

- LINEA ELASTICA (Forze)

Abbiamo sovrapposizione degli effetti:

$$\begin{cases} q_1 = \eta_{11} F_1 + \eta_{12} F_2 = y_2 \ (s_2 = \ell) \\ q_2 = \eta_{21} F_1 + \eta_{22} F_2 = y_1 \ (s_1 = \ell) \end{cases}$$

DAI MOMENTI $\begin{cases} M_1(s_1) \rightsquigarrow y_1(s_1) \\ M_2(s_2) \rightsquigarrow y_2(s_2) \end{cases}$

DEFORMATA DI F_2

$$q_1 = \underbrace{\frac{\ell^3}{2EJ}}_{\eta_{12}} F_2$$

$$q_2 = \underbrace{\frac{4\ell^3}{3EJ}}_{\eta_{22}} F_2$$

DEFORMATA DI F_1

$$q_1 = \underbrace{\frac{\ell^3}{3EJ}}_{\eta_{11}} F_1$$

$$q_2 = \underbrace{\frac{\ell^3}{2EJ}}_{\eta_{21}} F_1$$

QUESTO È POSSIBILE PERCHÉ LA STRUTTURA È ISOSTATICA
(NON SERVE RISOLVERE LE REAZIONI VINCOLARI)

• LINEA ELASTICA

$$\begin{cases} M_1(s_1) = -(F_1+F_2)\ell + F s_1 \\ M_2(s_2) = -F_2\ell + F_2 s_2 \end{cases}$$

$$y_i'' = -\frac{M_i(s_i)}{EJ}, \quad i = 1,2$$

rotazione rigida

$$y_1(s_1) = \iint \left[\frac{(F_1+F_2)\ell - F_1 s_1}{EJ}\right] ds\, ds + As + B$$

traslazione rigida perpendicolare alla trave

$$y_2(s_2) = \int \left[\int \frac{+F_2(\ell - s_2)}{EJ} ds\right] ds + Cs + D$$

$y_1(s_1=0)=0$

$y_1'(s_1=0)=0$ $\rightarrow$ $A, B, C, D = \ldots$

$y_2(s_2=0)=0$

$y_1'(s_1=\ell) = y_2'(s_2=0)$

CALCOLIAMO I MODI DI VIBRARE; CONSIDERANDO $m_2 = 2m_1 = 2m$

$$\det\left[-\omega_n^2 \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{K}}\right] = 0 \qquad \text{Se} \quad K = \frac{6EJ}{7\ell^3}$$

$$\det\begin{bmatrix} 8K - 3m\omega_n^2 & -3K \\ 3K & 2K - 2m\omega_n^2 \end{bmatrix} = 6\omega_n^2 - 22\frac{K}{m}\omega_n^2 + 7\left(\frac{K}{m}\right)^2 = 0$$

$$\omega_n^2 = \frac{11 \pm \sqrt{79}}{6}\frac{K}{m} = \begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\frac{11-\sqrt{79}}{7}}\sqrt{\frac{EJ}{m\ell^3}} & < \omega_2 \\ \omega_2 = \sqrt{\frac{11+\sqrt{79}}{7}}\sqrt{\frac{EJ}{m\ell^3}} \end{cases}$$

Da ω_i

$$\underline{\psi}^{(1)} = \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{79}-5}{9} \\ 1 \end{Bmatrix} \simeq \begin{Bmatrix} 0.437 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\underline{\psi}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{79}+5}{6} \end{Bmatrix} \simeq \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.668 \end{Bmatrix}$$

I

II

$\downarrow$

$\begin{cases} m_1 \text{ si sposta solo in orizzontale} \\ m_2 \text{ si sposta in diagonale su una retta} \end{cases}$

$\downarrow$

$\rightarrow \underline{F} = \underline{\underline{K}}\,\underline{\psi}^{(1)}$

$\downarrow$

Il II° MODO DI VIBRARE AVVIENE MOLTO PIÙ VELOCEMENTE DEL I°

NEL SISTEMA PRINCIPALE:

$$\hat{\underline{\underline{M}}} = \text{diag}\,[2.560,\ 3.840]\,m$$
$$= \underline{\underline{\Psi}}^T \underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{\Psi}}$$

$$\hat{\underline{\underline{K}}} = \text{diag}\,[0.901,\ 17.728]\,k$$

$$\hat{\underline{F}}(t) = \begin{Bmatrix} 0.432\,(P_1(t) + P_3(t)) - 1.290\,m\,\ddot{u}_g(t) - 2m\ddot{v}_g(t) + P_2(t) \\ P_1(t) + P_2(t) - 3m\,\ddot{u}_g(t) - 0.648\,P_2(t) + 1.296\,m\,\ddot{v}_g(t) \end{Bmatrix}$$

$$\Gamma_{1,v} = \frac{2m}{2.560m} = 0.781 \qquad \Gamma_{2,v} = -\frac{1.296\,m}{3.840\,m} = -0.338$$

$$\Gamma_{1,h} = \frac{1.290\,m}{2.560\,m} = 0.5 \qquad \Gamma_{2,h} = \frac{3\,m}{3.840\,m} = 0.781$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u_g = v_g = P_2 = P_3 = 0 \\ P_1(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ \bar{P} & t > 0 \end{cases} \end{array}}$$

forzante a gradino:

$$\hat{\underline{F}}(t) = \begin{Bmatrix} 0.432\,P_1(t) \\ P_1(t) \end{Bmatrix}$$

L'EQUAZIONE DEL MOTO ALLORA:

$$\begin{cases} 2.560\,m\,\ddot{\hat{q}}_1(t) + 0.901\,k\,\hat{q}_1(t) = 0.432\,P_1(t) \\ 3.480\,m\,\ddot{\hat{q}}_2(t) + 17.728\,k\,\hat{q}_2(t) = P_1(t) \end{cases}$$

ADIMENSIONALIZZANDO:

$$\begin{cases} \ddot{\hat{q}}_1(t) + \omega_1^2\,\hat{q}_1(t) = \omega_1^2\,\underbrace{0.560\,\frac{\bar{P}\ell^3}{EJ}}_{\hat{q}_{1,ST}} & t > 0 \\ \ddot{\hat{q}}_2(t) + \omega_2^2\,\hat{q}_2(t) = \omega_2^2\,\underbrace{0.092\,\frac{\bar{P}\ell^3}{EJ}}_{\hat{q}_{2,ST}} & t > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{q}_1(t) = 0.560\,\frac{\bar{P}\ell^3}{EJ} + A_1\cos\omega_1 t + B_1\sin\omega_1 t \\ \hat{q}_2(t) = 0.092\,\frac{\bar{P}\ell^3}{EJ} + A_2\cos\omega_2 t + B_2\sin\omega_2 t \end{cases}$$

Se $\hat{q}(0) = \dot{\hat{q}}(0) = 0$

$$\begin{cases} \hat{q}_1(t) = 0.560 \dfrac{\bar{P}\ell^3}{EJ} (1 - \cos \omega_1 t) \\ \hat{q}_2(t) = 0.092 \dfrac{\bar{P}\ell^3}{EJ} (1 - \cos \omega_2 t) \end{cases}$$

SAPPIAMO CHE:

$$\underline{q}(t) = \underline{\underline{\Psi}}\, \hat{\underline{q}}(t) \Rightarrow \begin{cases} q_1(t) = \dfrac{\bar{P}\ell^3}{3EJ} (1 - 0.725 \cos \omega_1 t - 0.275 \cos \omega_2 t) \\ q_2(t) = \dfrac{\bar{P}\ell^3}{2EJ} (1 - 1.119 \cos \omega_1 t + 0.112 \cos \omega_2 t) \end{cases}$$

Spostamenti quasi statici

SMORZAMENTO IN SISTEMI A N gdl

$$\underline{\underline{M}}\, \ddot{\underline{q}}(t) + \underline{\underline{C}}\, \dot{\underline{q}}(t) + \underline{\underline{K}}\, \underline{q}(t) = \underline{F}(t)$$

$$\hat{\underline{\underline{M}}}\, \ddot{\hat{\underline{q}}}(t) + \hat{\underline{\underline{C}}}\, \dot{\hat{\underline{q}}}(t) + \hat{\underline{\underline{K}}}\, \hat{\underline{q}}(t) = \hat{\underline{F}}(t)$$

$$\{\hat{\underline{\underline{M}}}, \hat{\underline{\underline{C}}}, \hat{\underline{\underline{K}}}\} = \underline{\underline{\Psi}}^T \{\underline{\underline{M}}, \underline{\underline{C}}, \underline{\underline{K}}\}\, \underline{\underline{\Psi}}$$

PER DEFINIZIONE DI $\underline{\underline{\Psi}}$, $\hat{\underline{\underline{M}}}$ e $\hat{\underline{\underline{K}}}$ SONO DIAGONALI MENTRE $\hat{\underline{\underline{C}}}$ NON È FORZATAMENTE DIAGONALE

IN GENERALE NON È GARANTITO IL DISACCOPPIAMENTO DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL SISTEMA PRINCIPALE.

ABBIAMO 2 CASI:

- $\hat{\underline{\underline{C}}}$ DIAGONALE $\longrightarrow$ SMORZAMENTO CLASSICO
- $\hat{\underline{\underline{C}}}$ NON DIAGONALE $\longrightarrow$ SMORZAMENTO NON CLASSICO

SMORZAMENTO CLASSICO

$$\hat{\underline{\underline{C}}} = \underline{\underline{\Psi}}^T \underline{\underline{C}}\, \underline{\underline{\Psi}} = \mathrm{diag}\left[\hat{C}_i\right]$$

L'EQUAZIONE DEL MOTO

$$\hat{M}_i\, \ddot{\hat{q}}_i(t) + \hat{C}_i\, \dot{\hat{q}}_i(t) + \hat{K}_i\, \hat{q}_i(t) = \hat{F}_i(t)$$

$$\ddot{\hat{q}}_i(t) + 2\hat{\nu}_i \omega_i\, \dot{\hat{q}}_i(t) + \omega_i^2\, \hat{q}_i(t) = \frac{\hat{F}_i(t)}{\hat{M}_i}$$

$$\hat{\nu}_i = \frac{\hat{C}_i}{\hat{C}_{cr,i}} = \frac{\hat{C}_i}{2\sqrt{\hat{M}_i \hat{K}_i}}$$ = COEFFICIENTE DI SMORZAMENTO MODALE i-ESIMO.

LA RISPOSTA:

$$\hat{q}_i(t) = e^{-\hat{\nu}_i \omega_i t}\left[A_i \cos \omega_i \sqrt{1-\hat{\nu}_i^2}\, t + B_i \sin \omega_i \sqrt{1-\hat{\nu}_i}\, t\right] + \underbrace{\frac{1}{\hat{M}_i \omega_i \sqrt{1-\hat{\nu}_i^2}} \int_0^t \hat{F}_i(\tau)\, e^{-\hat{\nu}_i \omega_i (t-\tau)} \sin \omega_i \sqrt{1-\hat{\nu}_i^2}\,(t-\tau)\, d\tau}_{\text{DA INTEGRALE DI DUHAMEL}}$$

$\forall\, i = 1, 2, \dots, N$

COME DEVE ESSERE $\underline{\underline{C}}$ AFFINCHÉ $\hat{\underline{\underline{C}}}$ SIA DIAGONALE?

SMORZAMENTO DI RAYLEIGH (semplice)

$$\underline{\underline{C}} = a_0\, \underline{\underline{M}} + a_1\, \underline{\underline{K}}, \qquad [a_0] = \mathrm{Sec}^{-1}, \quad [a_1] = \mathrm{Sec}$$

$$\hat{\underline{\underline{C}}} = \underline{\underline{\Psi}}^T \underline{\underline{C}}\, \underline{\underline{\Psi}} = a_0 \underbrace{\underline{\underline{\Psi}}^T \underline{\underline{M}}\, \underline{\underline{\Psi}}}_{\hat{\underline{\underline{M}}}} + a_1 \underbrace{\underline{\underline{\Psi}}^T \underline{\underline{K}}\, \underline{\underline{\Psi}}}_{\hat{\underline{\underline{K}}}} = \underline{a_0\, \hat{\underline{\underline{M}}} + a_1\, \hat{\underline{\underline{K}}}}$$ diag

LA SOMMA DI DUE MATRICI DIAGONALI È UNA MATRICE DIAGONALE.

$$\hat{C}_i = a_0\, \hat{M}_i + a_1\, \hat{K}_i$$

MENTRE LE

$$\hat{\nu}_i = \frac{a_0 \hat{M}_i + a_1 \hat{K}_i}{2\sqrt{\hat{M}_i \hat{K}_i}} = \frac{1}{2}\left(\frac{a_0}{\omega_i} + a_1 \omega_i\right)$$

FISSATI a_0 e a_1 CONOSCO LO SMORZAMENTO DI OGNI MODO DI VIBRARE (N)

FACENDO DEGLI ESPERIMENTI POSSO VALUTARE, PER UNA STRUTTURA e PER I MODI DI VIBRARE h e k, $\hat{v}_h$ e $\hat{v}_k$ DA

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_h} & \omega_h \\ 1/\omega_k & \omega_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{v}_h \\ \hat{v}_k \end{Bmatrix} \longrightarrow \text{INVERTENDO TROVO:}$$

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{2\,\omega_h \omega_k (\hat{v}_k \omega_h - \hat{v}_h \omega_k)}{\omega_h^2 - \omega_k^2} \\[2ex] a_1 = \dfrac{2(\hat{v}_h \omega_k - \hat{v}_k \omega_h)}{\omega_h^2 - \omega_k^2} \end{cases}$$

DATI ω_h e ω_k POSSO RICAVARE i $\hat{v}_i$ DISCRETE LEGGENDOLE SULLA CURVA

IL CONSIGLIO E' DI COSTRUIRE LA CURVA USANDO IL 1° MODO DI VIBRARE ($\omega_h = \omega_1$) IN MODO DA NON AVERE POI VALORI DI $\hat{v}_i$ MOLTO ELEVATI (Vedi come è fatta la curva verde)

UGUALMENTE SI SCEGLIE ω_k NON TROPPO GRANDE MA NEMMENO TROPPO PICCOLO ($\omega_k = \omega_{10}$)

IN GENERE SI CONSIDERA $\hat{v}_h = \hat{v}_k$

Se $\hat{\nu}_h = \hat{\nu}_k = \tilde{\nu}$ (FISSATI)

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{2\tilde{\nu}\,\omega_h\omega_k}{\omega_h+\omega_k} \\ a_1 = \dfrac{2\tilde{\nu}}{\omega_h+\omega_k} \end{cases}$$

SMORZAMENTO DI CAUGHEY

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{M}} \sum_{p=0}^{J-1} a_p \left[\underline{\underline{M}}^{-1}\underline{\underline{K}}\right]^p$$

J COEFFICIENTI DA FISSARE PER OTTENERE LO SMORZAMENTO SUI RIMANENTI $N-J$ MODI DI VIBRARE
(PER $J=2$ SI OTTIENE RAYLEIGH)

$$= a_0\underline{\underline{M}} + a_1\underline{\underline{K}} + \sum_{p=2}^{J-1} a_p \left[\underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{M}}^{-1}\right]^{p-1}\underline{\underline{K}}$$

$$\hat{\underline{\underline{C}}} = \underline{\underline{\Psi}}^T \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{\Psi}} = \sum_{p=0}^{J-1} a_p\,\underline{\underline{\Omega}}^{2p}\,\hat{\underline{\underline{M}}} \rightarrow \boxed{\hat{C}_i = \sum_{p=0}^{J-1} a_p\,\omega_i^{2p}\,\hat{M}_i}$$

e

$$\hat{\nu}_i = \frac{\hat{C}_i}{2\sqrt{\hat{K}_i\,\hat{M}_i}} = \frac{\sum_{p=0}^{J-1} a_p\,\omega_i^{2p}\,\hat{M}_i}{2\sqrt{\hat{K}_i\,\hat{M}_i}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a_0}{\omega_i} + a_1\omega_i + a_2\omega_i^3 + \dots\right) = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{J-1} a_p\,\omega_i^{2p-1}$$

PRESO J DISPARI

SMORZAMENTO NEGATIVO!
FISICAMENTE NON VA BENE!
ACCUMULO DI ENERGIA NELLA STRUTTURA

J PARI

→ ZONA DI SOVRASMORZAMENTO

SI EVITA PERCIÒ L'USO DI J DISPARI.

NON HA SENSO PRENDERE $J = N$!

COMBINAZIONI DELLE AZIONI IN DINAMICA

$$\underline{F}^{el}(t) = \underline{C}\,\dot{\underline{q}}(t) + \underline{M}\,\ddot{\underline{q}}(t) + \underline{E}(t) = \underline{\underline{K}}\,\underline{q}(t) = \underline{\underline{K}} \sum_{i=1}^{N} \underline{\psi}^{(i)} \hat{q}_i(t) = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} F^{el(i)}(t)}_{\text{Somma di } N \text{ Forzanti elastiche derivanti dai singoli modi di vibrare}}$$

↑ FORZANTE ESTERNA DEPURATA DALL'INERZIA.

$$M(s,t) = \sum_{i=1}^{N} M^{(i)}(s,t)$$

IL MOMENTO DI PROGETTO È IL MASSIMO NEL TEMPO FISSATO S:

$$M_A^d = \max_t \left\{ \left| M(s_A, t) \right| \right\} = \max_t \left\{ \left| \sum_{i=1}^{N} M^{(i)}(s_A, t) \right| \right\}$$

$$\simeq f\left(\max_t \left\{ M^{(i)}(s,t) \right\} \right) \rightarrow \text{APPROSSIMAZIONE}$$

CONSIDERANDO LE SOLLECITAZIONI GENERICHE S AL POSTO DEI SOLI MOMENTI: $S_A^{max(I)}$, $S_A^{max(II)}$, S_A^{max}

ABSSUM: Absolute SUM: $S_A^d = \sum_{i=1}^{N} \left| S_A^{max(i)} \right| \geq S_A^{max}$

QUESTO METODO DI COMBINAZIONE CONSIDERA LA IPOTESI DI SINCRONIA DI TUTTI I MODI DI VIBRARE.

SRSS: Square Root Sum of Squares (1951)

$$S_A^d = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(S_A^{max(i)}\right)^2} = \sqrt{S_A^{max(I)\,2} + S_A^{max(II)\,2} + \dots + S_A^{max(N)\,2}}$$

DA BUONA STIMA, SE

$$\omega_{i+1} > 1.1\,\omega_i \qquad \forall\, i \in [1, N-1]$$

CIOÈ SE LE PULSAZIONI NATURALI SONO DISTANTI.

↳ PULSAZIONI VICINE → NON SI PUÒ APPLICARE IL SRSS

PULSAZIONI VICINE AVVENGONO IN TEMI TRIDIMENZIONALI PARTICOLARMENTE SIMMETRICI.

SE 2 PULSAZIONI AVVENGONO CIRCA CONTEMPORANEAMENTE (IL MASSIMO ARRIVA QUASI CONTEMPORANEAMENTE) SI PUÒ DIRE:

$$S_A^{max(i)} + S_A^{max(i+1)} = S_A^{max(i,\,i+1)}$$

SONO SOMMABILI.

$$S_A^d = \sqrt{\dots + \left[S_A^{max(i,\,i+1)}\right]^2 + \dots}$$

$$= \sqrt{\dots + S_A^{max(i)\,2} + \underbrace{2\,S_A^{max(i)}\,S_A^{max(i+1)}}_{\text{SPUNTA UN TERMINE NON PRESENTE ORIGINARIAMENTE NEL SRSS}} + S_A^{max(i+1)\,2} + \dots}$$

CQC: Complete Quadratic Combination

$$S_k^d = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \rho_{ij}\, S_k^{max(i)}\, S_k^{max(j)}} = \sqrt{\sum_{\substack{i=1\\ i=j}}^{N} \cancel{\rho_{ij}}^{\,1}\, S_k^{max(i)\,2} + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N}\sum_{j=1}^{N} \rho_{ij}\, S_k^{max(i)}\, S_k^{max(j)}}$$

ρ_{ij}: coefficiente di correlazione tra modo i e modo j

$\rho_{ij} \in [0,1]$

Se $\omega_i = \omega_j \Rightarrow \rho_{ii} = 1$

- SRSS

$$\rho_{ij} = \frac{8\nu^2 \left(1+\frac{\omega_i}{\omega_j}\right)\left(\frac{\omega_i}{\omega_j}\right)^{3/2}}{\left(1-\frac{\omega_i^2}{\omega_j^2}\right)^2 + 4\nu^2\frac{\omega_i}{\omega_j}\left(1+\frac{\omega_i}{\omega_j}\right)^2}$$

[DER KIUREGHIAN]

ESERCIZIO | Appello 15/06/2010

- Matrice di massa

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} m$$

- Forzante

$$\underline{F}(t) = \begin{Bmatrix} P_1(t) - m\ddot{v}_g(t) \\ P_2(t) - m\ddot{v}_g(t) \end{Bmatrix}$$

- Matrice di rigidezza

  - Energia del sistema

$$\mathcal{E}(F_1, F_2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \cdot \underline{\underline{\eta}} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_{strutt} M(s)\, \chi(s)\, ds = \frac{1}{2} \int_{strutt} \frac{M^2(s)}{EJ}\, ds =$$

$$= \frac{1}{2EJ} \left[\int_0^{\ell} (-F_1 s_1)^2 ds_1 + \int_0^{\ell} \left(-F_1 \ell + (F_2 - F_1) s_2\right)^2 ds_2 + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\ell} (-F_2 s_3)^2 ds_3 \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\ell^3}{3EJ} \left[2F_1^2 + F_1 F_2 + 2F_2^2 \right]$$

$$\underline{\underline{\eta}} = \frac{\ell^3}{3EJ} \begin{bmatrix} 2 & 1/2 \\ 1/2 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \underline{\underline{K}} = \underline{\underline{\eta}}^{-1} = \frac{2EJ}{5\ell^3} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

  - Metodo delle Forze

$$\delta_1 = \eta_{11} F_1 + \eta_{12} F_2 = \varphi_1(F_1, F_2)\, \ell$$

$$\delta_2 = \eta_{21} F_1 + \eta_{22} F_2 = \varphi_2(F_1, F_2)\, \ell$$

$$\frac{M_A \ell}{3EJ} + \varphi_1 = -\frac{M_A \ell}{3EJ} - \frac{M_B \ell}{6EJ}$$

$$\frac{M_B \ell}{3EJ} + \frac{M_A \ell}{6EJ} = -\frac{M_B \ell}{3EJ} - \varphi_2$$

$$F_1 \cancel{\varphi_1} \ell + M_A \cancel{\varphi_1} = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \varphi_1 = \frac{2\ell^2}{3EJ}\left[F_1 + \frac{F_2}{4}\right]$$

$$F_2 \cancel{\varphi_2} \ell + M_B \cancel{\varphi_2} = 0 \qquad \qquad \varphi_2 = \frac{2\ell^2}{3EJ}\left[\frac{F_1}{4} + F_2\right]$$

$$\delta_1 = \varphi_1 \ell = \frac{2\ell^3}{3EJ}\left[F_1 + \frac{F_2}{4}\right]$$

$$\delta_2 = \varphi_2 \ell = \frac{2\ell^3}{3EJ}\left[\frac{F_1}{4} + F_2\right]$$

$$\rightsquigarrow \quad \underline{\underline{\ell}} = \begin{bmatrix} 2 & 1/2 \\ 1/2 & 2 \end{bmatrix} \frac{\ell^3}{3EJ}$$

- Metodo degli Spostamenti

$q_1 = 1$

$K^*_{11} = \frac{12EJ}{\ell^3}$ $\qquad K^*_{21} = 0$

$K^*_{31} = -\frac{6EJ}{\ell^2}$ $\qquad K^*_{41} = -\frac{6EJ}{\ell^2}$

$K^*_{51} = 0$ $\qquad K^*_{61} = 0$

$q_2 = 1$

$K^*_{12} = 0$ $\qquad K^*_{22} = \frac{12EJ}{\ell^3}$

$K^*_{32} = 0$ $\qquad K^*_{42} = 0$

$K^*_{52} = \frac{6EJ}{\ell^2}$ $\qquad K^*_{62} = \frac{6EJ}{\ell^2}$

$q_3 = 1$

$K^*_{13} = -\frac{6EJ}{\ell^2}$ $\qquad K^*_{23} = 0$

$K^*_{33} = 4EJ/\ell$ $\qquad K^*_{43} = 2EJ/\ell$

$K^*_{53} = 0$ $\qquad K^*_{63} = 0$

$$\underline{\underline{K}}^* = \frac{EJ}{\ell^3}\left[\begin{array}{cc|cccc} \multicolumn{2}{c}{\underline{\underline{K}}^*_{AA}} & \multicolumn{4}{c}{\underline{\underline{K}}^*_{AB}} \\ 12 & 0 & -6\ell & -6\ell & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 & 6\ell & 6\ell \\ \hline -6\ell & 0 & 4\ell^2 & 2\ell^2 & 0 & 0 \\ -6\ell & 0 & 2\ell^2 & 8\ell^2 & 2\ell^2 & 0 \\ 0 & 6\ell & 0 & 2\ell^2 & 8\ell^2 & 2\ell^2 \\ 0 & 6\ell & 0 & 0 & 0 & 4\ell^2 \end{array}\right] \underline{\underline{K}}^*_{BB}$$

$\underline{\underline{K}}^*_{BA}$

$$\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{K}}^*_{AA} - \underline{\underline{K}}^*_{AB}\left[\underline{\underline{K}}^*_{BB}\right]^{-1}\underline{\underline{K}}^*_{BA} = \frac{2EJ}{\ell^3}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

- Pulsazioni

$$\det[-\omega_n^2 \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{K}}] = 0 \rightsquigarrow \omega_1 \cong 1.095 \sqrt{\frac{EJ}{me^3}} \rightarrow \underline{\psi}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\omega_2 \cong 1.414 \sqrt{\frac{EJ}{me^3}} \rightarrow \underline{\psi}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

(1)

(2)

$$\underline{F}_{el}(t) = \underline{\underline{K}}\,\underline{\psi}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 3 \end{Bmatrix} \frac{2EJ}{5e^3}$$

$$\underline{F}_{el}(t) = \underline{\underline{K}}\,\underline{\psi}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 5 \\ -5 \end{Bmatrix} \frac{2EJ}{5e^3}$$

(1) ANTISYM

DEF ANTISYM

MOMENTO SIMMETRICO → DEFORMATA SIMMETRICA

- Sistema Principale

$$\begin{cases} \hat{\underline{\underline{M}}} = \mathrm{diag}\,[1, 1]\; 2m \\ \hat{\underline{\underline{K}}} = \mathrm{diag}\,[3/5 ; 1]\; \frac{4EJ}{e^3} \\ \hat{\underline{F}}(t) = \begin{Bmatrix} P_1(t) + P_2(t) - 2m\ddot{v}_g(t) \\ P_1(t) - P_2(t) \end{Bmatrix} \end{cases}$$

$$\Gamma_{v_1} = 1 \qquad \Gamma_{v_2} = 0$$

POICHÉ LA STRUTTURA È SIMMETRICA, APPLICANDO L'ACCELERAZIONE $\ddot{v}_g(t)$ ALLA STRUTTURA IL SUO EFFETTO È SIMMETRICO PERCIÒ SI ATTIVA SOLO IL MODO CON DEFORMATA SIMMETRICA (IL (1))

Se INOLTRE $P_1(t) = P_2(t)$ IL SECONDO MODO NON SI ATTIVA.

UNA CONFIGURAZIONE DI CARICO SIMMETRICA ATTIVA UN MODO SIMMETRICO

Se PERÒ $v_B(t)=0$ e $P_2(t) = -P_1(t)$ (CARICO ANTISIMMETRICO) SI ATTIVA SOLO IL MODO ② (ANTISIMMETRICO).

$$\left.\begin{array}{ll} \underline{q}(0) = ? & P_1(t) = ? \\ \dot{\underline{q}}(0) = ? & P_2(t) = ? \end{array}\right\} \text{AFFINCHÉ } \underline{q}(t) \propto \underline{\psi}^{(1)}$$

$$\underline{q}(t) = \underline{q}_{\text{osc. lib.}}(t) + \underline{q}_{\text{osci. forzata}}(t)$$

PER LE OSCILLAZIONI LIBERE:

$$\left.\begin{array}{l} \underline{q}(0) = \alpha\, \underline{\psi}^{(1)} \\ \dot{\underline{q}}(0) = \beta\, \underline{\psi}^{(1)} \end{array}\right\} \text{ALLORA OSCILLA SECONDO } \underline{\psi}^{(1)}$$

PER LE OSCILLAZIONI FORZATE:

$$P_1(t) = P_2(t) = P(t) \Rightarrow q(t) \text{ VA COME } \underline{\psi}^{(1)}$$

IN GENERALE, APPLICANDO TUTTE QUESTE CONDIZIONI

$$\begin{cases} \hat{q}_2(0) = 0 \\ \dot{\hat{q}}_2(0) = 0 \\ \hat{F}_2(t) = 0 \end{cases} \longrightarrow \hat{M}_2\, \ddot{\hat{q}}_2(t) + \hat{K}_2\, \hat{q}_2(t) = \cancel{\hat{F}_2(t)}^{\,0} \rightarrow \text{NON SI ATTIVA}$$

- Se $\hat{\nu}_1 = \hat{\nu}_2 = \nu \Rightarrow \hat{\underline{\underline{C}}} = ?$

$$\hat{\underline{\underline{C}}} = \text{diag}[\hat{C}_i]$$

$$\hat{C}_i = 2\hat{\nu}_i \sqrt{\hat{\mu}_i \hat{k}_i} = 2\nu \sqrt{\hat{\mu}_i \hat{k}_i} = \begin{cases} \hat{C}_1 = 2\nu \sqrt{\frac{12}{5}\frac{EJ}{e^3} \cdot 2m} \\ \hat{C}_2 = 2\nu \sqrt{2m \cdot 4\frac{EJ}{e^3}} \end{cases}$$

$$\hat{\underline{\underline{C}}} = \text{diag}[\hat{C}_i] = 2\nu\, \text{diag}[2.191;\ 2.828] \cdot \sqrt{\frac{mEJ}{e^3}}$$

↳ MATRICE DI SMORZAMENTO NEL SISTEMA PRINCIPALE.

- $V_g(t) = \begin{cases} \bar{V}_g \cos \omega t, & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$

$P_1(t) = P_2(t) = 0$

VALUTARE L'AMPIEZZA MASSIMA IN MODULO A REGIME DELLE SOLUZIONI PARTICOLARI.

$$\max_t \{ |\hat{q}_{1,part}(t)| \} = ?$$

$$\max_t \{ |\hat{q}_{2,part}(t)| \} = 0 \leftarrow \hat{F}_2(t) = 0$$

IN QUESTO CASO

$$\underline{\hat{F}}(t) = \begin{Bmatrix} 2m\omega^2 \bar{V}_g \cos \omega t \\ 0 \end{Bmatrix}$$

DOBBIAMO RISOLVERE

$$\hat{\mu}_1 \ddot{\hat{q}}_1(t) + \hat{c}_1 \dot{\hat{q}}_1(t) + \hat{k}_1 \hat{q}_1(t) = \hat{F}_1(t) = 2m\omega^2 \bar{V}_g \cos \omega t$$

ALLORA, DERIVANTE DAL CASO 1D

$$\max_t \{ \hat{q}_{1,part}(t) \} = \hat{q}_{st} N = \frac{2m\omega^2 \bar{V}_g}{\hat{k}_1} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)^2 + \left(2\nu \frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}} =$$

$$= \Gamma_{V_1} \underbrace{\frac{\hat{\mu}_1}{\hat{k}_1}}_{1/\omega_1^2} \omega^2 \bar{V}_g \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)^2 + \left(2\nu \frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}} =$$

$$= \underbrace{\Gamma_{V_1}}_{1} \bar{V}_g \frac{\omega^2}{\omega_1^2} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)^2 + \left(2\nu \frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}} =$$

$$= \bar{V}_g \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(2\nu \frac{\omega_1}{\omega}\right)^2}}}_{N'}$$

o PARTENDO DAI DATI APPENA CALCOLATI, STIMATI

$$\max |q_{1,Part}(t)|$$

$$\max |q_{2,Part}(t)|$$

CON <u>ABSSUM</u>:

$$\underline{q}(t) = \underline{\underline{\Psi}}\, \underline{\hat{q}}(t) \rightarrow \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{q}_1(t) \\ \hat{q}_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{q}_1(t) + \hat{q}_2(t) \\ \hat{q}_1(t) - \hat{q}_2(t) \end{Bmatrix}$$

$$\max_t |q_{1,Part}(t)| = \max_t |\hat{q}_{1,Part}(t)| + \max_t |\cancel{\hat{q}_{2,Part}(t)}^{\,0} = \max_t |\hat{q}_{1,Part}(t)|$$

$$\max_t |q_{2,Part}(t)| = \max_t |\hat{q}_{1,Part}(t)| + \max_t |\cancel{-\hat{q}_{2,Part}(t)}^{\,0} = \max_t |\hat{q}_{1,Part}(t)|$$

ESERCIZIO 1 APPELLO 01/09/2012

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} m$$

$$\underline{F}(t) = \begin{Bmatrix} P_1(t) - 2m\,\ddot{v}_g(t) \\ P_2(t) - m\,\ddot{v}_g(t) \end{Bmatrix}$$

- Linea Elastica

$$M_1(s_1) = -M + (F_1+F_2)\,s_1 \quad , \; s_1 \in [0,\ell]$$

$$M_2(s_2) = -M + (F_1+F_2)\ell + F_2\,s_2 \quad , \; s_2 \in [0,\ell]$$

$$y_i''(s_i) = -\frac{M_i(s_i)}{EJ}$$

$$y_1(s_1) = \frac{1}{EJ}\left[\frac{M s_1^2}{2} - (F_1+F_2)\frac{s_1^3}{6} + A s_1 + B\right]$$

$$y_2(s_2) = \frac{1}{EJ}\left[\frac{M s_2^2}{2} - (F_1+F_2)\ell\frac{s_2^2}{2} - F_2\frac{s_2^3}{6} + C s_2 + D\right]$$

IMPONGO LE 5 CONDIZIONI:

$$\begin{cases} y_1(s_1=0)=0 \\ y_1'(s_1=0)=0 \\ y_2'(s_2=\ell)=0 \\ y_1(s_1=\ell)=y_2(s_2=0) \\ y_1'(s_1=\ell)=y_2'(s_2=0) \end{cases} \longrightarrow \begin{aligned} & A=B=0 \\ & C=\frac{\ell^2}{4}\left[F_1+2F_2\right] \\ & D=\frac{\ell^3}{24}\left[5F_1+8F_2\right] \\ & M=(3F_1+4F_2)\frac{\ell}{4} \end{aligned}$$

$$y_1(s_1=\ell) = \frac{5\ell^3}{24EJ}F_1 + \frac{\ell^3}{3EJ}F_2$$

$$y_2(s_2=\ell) = \frac{\ell^3}{3EJ}F_1 + \frac{2\ell^3}{3EJ}F_2$$

$$\underline{\underline{\eta}} = \begin{bmatrix} 5/8 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\frac{\ell^3}{3EJ} \longrightarrow \underline{\underline{K}} = \underline{\underline{\eta}}^{-1} = \begin{bmatrix} 24 & -12 \\ -12 & 15/2 \end{bmatrix}\frac{EJ}{\ell^3}$$

- Metodo dell'energia

UNA VOLTA TROVATO LA DISTRIBUZIONE DI MOMENTO:

$$\mathcal{E}(F_1, F_2, M) = \frac{1}{2}\frac{1}{EJ}\int_{struttura} M^2(s)\,ds \longrightarrow \text{LEMMA DI MENABREA}$$

$$\phi_0 = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial M} = 0 \Rightarrow M = \frac{3F_1 + 4F_2}{4}\ell$$

A QUESTO PUNTO

$$\mathcal{E}(F_1, F_2) = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}\underline{\underline{\eta}}\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \longrightarrow \underline{\underline{K}} = \underline{\underline{\eta}}^{-1}$$

- Metodo degli spostamenti

$q_1 = 1$

$$K_{11}^* = \frac{24EJ}{\ell^3} \qquad K_{21}^* = -\frac{12EJ}{\ell^3} \qquad K_{31}^* = 0$$

$q_2 = 1$

$$K_{12}^* = -\frac{12EJ}{\ell^3} \qquad K_{22}^* = \frac{12EJ}{\ell^3} \qquad K_{32}^* = \frac{6EJ}{\ell^2}$$

$q_3 = 1$

$K_{13}^* = 0 \qquad K_{23}^* = \frac{6EJ}{\ell^2}$

$K_{33}^* = 8\frac{EJ}{\ell}$

$$\underline{\underline{K}}^* = \frac{EJ}{\ell^3}\left[\begin{array}{cc|c} 24 & -12 & 0 \\ -12 & 12 & 6\ell \\ \hline 0 & 6\ell & 8\ell^2 \end{array}\right]$$

$$\underline{\underline{K}} = \frac{EJ}{\ell^3}\left\{\begin{bmatrix} 24 & -12 \\ -12 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 6\ell \end{bmatrix}\left[8\ell^2\right]^{-1}\left[0, 6\ell\right]\right\} = \frac{EJ}{\ell^3}\begin{bmatrix} 24 & -12 \\ -12 & \frac{15}{2} \end{bmatrix}$$

- Metodo delle Forze

$\delta_1 = \varphi_1 \ell$

$\delta_2 = \varphi_2 \ell$

$$\frac{M_A \ell}{3EJ} + \frac{M_B \ell}{6EJ} + \varphi_1 = 0$$

$$\frac{M_B \ell}{3EJ} + \frac{M_A \ell}{6EJ} - \varphi_1 = -\frac{M_B \ell}{3EJ} - \frac{M_C \ell}{6EJ} + \varphi_1 - \varphi_2$$

$$\frac{M_C \ell}{3EJ} + \frac{M_B \ell}{6EJ} + \varphi_1 - \varphi_2 = 0$$

$$M_A \varphi_1 - M_B \varphi_1 - M_B \varphi_1 + M_C \varphi_1 + F_1 \varphi_1 \ell = 0$$

$$M_B \varphi_2 - M_C \varphi_2 + F_2 \ell \varphi_2 = 0$$

SI OTTIENE:

$M_A = \left(-\frac{3F_1}{4} - F_2\right)\ell \qquad M_C = \left(\frac{F_1}{4} + F_2\right)\ell \qquad \varphi_1 = \frac{\ell^2}{24EJ}\left(5F_1 + 8F_2\right)$

$M_B = F_1 \frac{\ell}{4} \qquad \varphi_2 = \frac{\ell^2}{3EJ}\left(F_1 + 2F_2\right)$

- PULSAZIONI NATURALI E MODI DI VIBRARE

$$\det\left[-\omega_n^2 \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{K}}\right] = 0$$

$$\omega_1 \cong 0.986 \sqrt{\frac{EJ}{me^3}} \rightsquigarrow \underline{\psi}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 0.544 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\omega_2 \cong 4.304 \sqrt{\frac{EJ}{me^3}} \rightsquigarrow \underline{\psi}^{(2)} = \begin{Bmatrix} -0.919 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

- SISTEMA PRINCIPALE

$$\hat{\underline{\underline{M}}} = [1.591;\ 2.688]\, m$$

$$\hat{\underline{\underline{K}}} = [1.547;\ 49.828]\, \frac{EJ}{e^3}$$

$$\hat{\underline{F}}(t) = \begin{Bmatrix} 0.544\, P_1(t) + P_2(t) - 2.088\, m\ddot{v}_g(t) \\ -0.919\, P_1(t) + P_2(t) + 0.838\, m\ddot{v}_g(t) \end{Bmatrix}$$

Se $P_2(t) = -0.544\, P_1(t)$ e $v_g(t) = 0$ $\Rightarrow \hat{\underline{F}}(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1.463\, P_1(t) \end{Bmatrix}$

Se $P_1(t) = P_2(t) = 0$ $\quad \underline{F}(t) = \begin{Bmatrix} -2.088\, m\ddot{v}_g(t) \\ +0.838\, m\ddot{v}_g(t) \end{Bmatrix}$ SI ATTIVANO ENTRAMBI I MODI DI VIBRAR

- COEFFICIENTE DI PARTECIPAZIONE MODALE

$$\Gamma_{v_1} = \frac{2.088}{1.591} = 1.312 \quad , \quad \Gamma_{v_2} = \frac{-0.838}{2.689} = -0.312$$

ESERCIZIO | APPELLO 10/2/2010

m UNIFORMEMENTE DISTRIBUITA

$$I = \int_A \frac{m}{t\ell} y^2 \, t\,dy = \frac{m}{\cancel{t\ell}} \frac{\cancel{t}\ell^{\cancel{3}\,2}}{12} = \frac{m\ell^2}{12}$$

- Matrice di Massa

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m\ell^2/12 \end{bmatrix}$$

- Vettore Forzante

$$\underline{F}(t) = \begin{Bmatrix} P_1(t) + P_2(t) - m\ddot{u}_g(t) - m\ell\ddot{\theta}_g(t) \\ (P_3(t) - P_4(t))\ell/2 + \frac{m\ell^2}{12}\ddot{\theta}_g(t) \end{Bmatrix}$$

- Matrice di Rigidezza

* Metodo degli spostamenti

$$K_{11} = \frac{12EJ}{\ell^3} \qquad K_{12} = \frac{6EJ}{\ell^2}$$

$$K_{21} = \frac{6EJ}{\ell^2} \qquad K_{22} = \frac{4EJ}{\ell}$$

* Metodo delle Forze

$$\delta_1 = \eta_{11}F_1 + \eta_{12}F_2 = \frac{\ell^3}{3EJ}F_1 - \frac{\ell^2}{2EJ}F_2$$

$$\varphi_2 = \eta_{21}F_1 + \eta_{22}F_2 = -\frac{\ell^2}{2EJ}F_1 + \frac{\ell}{EJ}F_2$$

$$\underline{\underline{\eta}} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/\ell\cdot 2 \\ -1/2\ell & 1/\ell \end{bmatrix} \frac{\ell^3}{EJ}$$

$$\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{\eta}}^{-1}$$

* Linea Elastica (+ Energia)

$$\begin{cases} y(s) = As^3 + Bs^2 + Cs + D \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y(\ell) = q_1 \\ y'(\ell) = -q_2 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} A = -(2q_1 + q_2\ell)\frac{1}{\ell^3} \\ B = \frac{3q_1 + q_2\ell}{\ell^2} \\ C = D = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\int_0^\ell EJ\,(y''(s))^2\,ds = \frac{1}{2}\int_0^\ell EJ\,[6As + 2B]^2\,ds = \frac{EJ}{2}\int_0^\ell (36A^2s^2 + 4B^2 + 24ABs)\,ds =$$

$$y''(s) = 6As + 2B$$

$$= \frac{EJ}{2}\left[36A^2\frac{s^3}{3}\Big|_0^\ell + 4B^2 s\Big|_0^\ell + 24AB\frac{s^2}{2}\Big|_0^\ell\right] =$$

$$= \frac{EJ}{2}\left(12A^2\ell^2 + 4B^2\ell + 12AB\ell^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(K_{11}q_1^2 + 2K_{12}q_1q_2 + K_{22}q_2^2\right)$$

- Pulsazioni naturali e modi di vibrare

$$\omega_1 = 1.583\sqrt{\frac{EJ}{m\ell^3}} \qquad \underline{\psi}^{(1)} = \begin{Bmatrix} -0.632\,\ell \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\omega_2 = 7.583\sqrt{\frac{EJ}{m\ell^3}} \qquad \underline{\psi}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 0.132\,\ell \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Se $u_g(t) = 0$, $\theta_g(t) = 0$, $P_1 = P_2 = 0$, $P_3 = P_4$ ALLORA

$q_2(t) = 0 \quad \forall t$ partendo dalla quiete

ESERCIZIO / APPELLO 02/02/2012

- Matrice di massa

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} \frac{m\ell^2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{m\ell^2}{3} \end{bmatrix}$$

- Vettore Forzante

$$E(t) = \begin{Bmatrix} -P_1(t)\ell + m\ddot{v}_g(t)\,\ell/2 \\ P_2(t)\,\ell - m\ddot{v}_g(t)\,\frac{\ell}{2} \end{Bmatrix}$$

→ genera un momento $m\ddot{v}_g(t)\cdot\frac{\ell}{2}$

- Matrice di Rigidezza

* Linea elastica (+ Energia)

$$\begin{cases} y(s) = As^3 + Bs^2 + Cs + D \\ y(0) = q_1\ell \\ y'(0) = q_1 \\ y(\ell) = -q_2\ell \\ y'(\ell) = q_2 \end{cases}$$

$$A = \frac{3(q_1+q_2)}{\ell^2} \quad ; \quad B = -\frac{5q_1+4q_2}{\ell}$$

$$C = q_1 \quad ; \quad D = q_1\ell$$

$$\begin{cases} \mathcal{E} = \frac{1}{2}\int_0^\ell EJ[y''(s)]^2\,ds = \dots = \frac{1}{2}\left(K_{11}q_1^2 + 2K_{12}q_1q_2 + K_{22}q_2^2\right) \\ y''(s) = 6As + 2B \end{cases}$$

Da cui

$$\underline{\underline{K}} = \frac{2EJ}{\ell}\begin{bmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{bmatrix}$$

* Metodo delle Forze

$$\varphi_1 = \eta_{11} F_1 + \eta_{12} F_2$$
$$\varphi_2 = \eta_{21} F_1 + \eta_{22} F_2$$

$$M(s) = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3\ell} s$$

$$\begin{cases} y(s) = \frac{1}{EJ}\left[-\frac{s^2}{3} + \frac{s^3}{18\ell} + As + B\right] \\ y(0) = \eta_{11}\ell \qquad y(\ell) = -\eta_{21}\ell \\ y'(0) = \eta_{11} \qquad y'(\ell) = \eta_{21} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = \dots \\ B = \dots \end{cases} \quad \begin{cases} \eta_{11} = \frac{7\ell}{27EJ} = \eta_{22} \\ \eta_{21} = -\frac{13\ell}{54EJ} = \eta_{12} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{\eta}} = \begin{bmatrix} 14 & -13 \\ -13 & 14 \end{bmatrix} \frac{\ell}{54EJ} \rightsquigarrow \underline{\underline{K}} = \underline{\underline{\eta}}^{-1}$$

* Metodo degli Spostamenti

$\varphi_1 = 1$; $(\varphi_2 = 0)$

$$\frac{K_{11}+K_{21}}{3\ell} = (12+6)\frac{EJ}{\ell^2}$$
$$\frac{2K_{11}-K_{21}}{3} = (6+4)\frac{EJ}{\ell}$$

$$K_{11} = \frac{28\,EJ}{\ell} \quad ; \quad K_{21} = 26\,\frac{EJ}{\ell}$$

- Analisi Dinamica

$$\det\left[-\omega_1^2 \underline{\underline{M}} - \underline{\underline{K}}\right] = 0$$

$$\omega_1 = 2.449\sqrt{\frac{EJ}{me^3}} \qquad \underline{\psi}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$$\omega_2 = 12.728\sqrt{\frac{EJ}{me^3}} \qquad \underline{\psi}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\underline{\underline{K}} \cdot \underline{\psi}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \frac{2EJ}{\ell}$$

$$\underline{\underline{K}} \cdot \underline{\psi}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{54EJ}{\ell}$$

- $\hat{\underline{\underline{M}}} = \mathrm{diag}\,[1, 1]\,\frac{2m\ell^2}{3}$

  $\hat{\underline{\underline{K}}} = \mathrm{diag}\,[1, 27]\,\frac{4EJ}{\ell}$

  $$\hat{\underline{F}}(t) = \begin{Bmatrix} -P_1(t) - P_2(t) + m\ddot{v}_g(t) \\ -P_1(t) + P_2(t) \end{Bmatrix} \ell$$

- $\Gamma_{v_1} = \dfrac{-m\ell}{2m\ell^2/3} = -\dfrac{3}{2\ell}$

  $\Gamma_{v_2} = \dfrac{0}{2m\ell^2/3} = 0$

$$\hat{\underline{F}}(t) = \begin{Bmatrix} -2\bar{P} \\ 0 \end{Bmatrix} \ell$$

- SIA $v = 0$; $\underline{q}(0) = \dot{\underline{q}}(0) = \underline{0}$, $v_g(t) = 0$ $\quad P_1(t) = P_2(t) = \begin{cases} \bar{P} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \hat{q}_1(t) = -\dfrac{2\bar{P}\ell}{4EJ/\ell}(1 - \cos\omega_1 t) = -\dfrac{\bar{P}\ell^2}{2EJ}(1 - \cos\omega_1 t) = \hat{q}_{1,st}(1 - \cos\omega_1 t) \\ \hat{q}_2(t) = 0 \quad \text{il secondo modo di vibrare non si attiva (carichi simmetrici)} \end{cases}$$

$$\underline{q}(t) = \underline{\underline{\Psi}}\,\hat{\underline{q}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{q}_1(t) \\ \hat{q}_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{q}_1(t) + \hat{q}_2(t) \\ -\hat{q}_1(t) + \hat{q}_2(t) \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \left[-\frac{\bar{P} e^2}{2EJ} (1 - \cos \omega_1 t) \right]$$

SI ATTIVA IL MODO I VERSO IL BASSO

11/11/2019

COSTRUZIONI SIMMETRICHE

PER SCOMPORRE UN TELAIO TRIDIMENSIONALE IN TELAI BIDIMENSIONALI DISACCOPPIATI HO BISOGNO DI COSTRUZIONI SIMMETRICHE, CIOÈ:

- SIMMETRIA IN PIANTA
- +
- UNIFORMITÀ IN ELEVAZIONE

SIMMETRIA IN PIANTA

Non simmetrica

UNIFORMITÀ IN ELEVAZIONE

Uniforme

Non Uniforme

POSSO CONSIDERARE IL CASO NON UNIFORME COME PARALLELEPIPEDI UNIFORMI COLLEGATI CON GIUNTI SISMICI CHE DANNO UN COMPORTAMENTO DINAMICO SCOLLEGATO TRA I 2 ELEMENTI

COSTRUZIONI CON PIANTA NON SIMMETRICA

SI CONSIDERANO PIANTE DI TELAI A UN PIANO.

SI CONSIDERINO 3 TELAI: A, B, C

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b^2+d^2}{12} \end{bmatrix} m \quad ; \quad \underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{x\theta} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{y\theta} \\ K_{\theta x} & K_{\theta y} & K_{\theta\theta} \end{bmatrix}$$

AD ESEMPIO, B:

B:

SI CONSIDERA PER SEMPLIFICAZIONE,

$K_x^B >> K_y^B$

PERCIÒ SONO TRASCURABILI

$$K_x^A \simeq K_y^B \simeq K_y^C \simeq 0$$

e SI CONSIDERA RIGIDEZZA ROTAZIONALE CIRCA NULLA

$$K_\theta^A \simeq K_\theta^B \simeq K_\theta^C \simeq 0$$

$u_x = 1$

$$K_{xx} = K_x^B + K_x^C > 0$$

$$K_{yx} = 0$$

$$K_{\theta x} = (K_x^C - K_x^B)\frac{d}{2}$$

$u_y = 1$

$$K_{xy} = 0 = K_{yx}$$

$$K_{yy} = K_y^A > 0$$

$$K_{\theta y} = K_y^A \cdot e$$

$u_\theta = 1$

POICHÉ $K_y^C = K_\theta^C = 0$ IL TELAIO C SENTE SOLO UNO SPOSTAMENTO ORIZZONTALE PARI A $K_x^C \frac{d}{2}$. VALE LO STESSO PER B

LA FORZA VERTICALE SU A È: $K_y^A \cdot e$

$$K_{x\theta} = (K_x^C - K_x^B)\frac{d}{2} = K_{\theta x}$$

$$K_{y\theta} = K_y^A \cdot e = K_{\theta y}$$

$$K_{\theta\theta} = (K_x^C + K_x^B)\frac{d^2}{4} + K_y^A \cdot e^2 > 0$$

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} K_x^C + K_x^B & 0 & \frac{(K_x^C - K_x^B)d}{2} \\ 0 & K_y^A & K_y^A \cdot e \\ \frac{K_x^C - K_x^B}{2} d & K_y^A \cdot e & (K_x^C + K_x^B)\frac{d^2}{4} + K_y^A \cdot e^2 \end{bmatrix}$$

MATRICE NON DIAGONALE $\rightarrow$ IL MOTO È ACCOPPIATO

- Se $d = 0$ oppure $K_x^B = K_x^C$ PERDO L'ACCOPPIAMENTO $x - \theta$

  IMPLICANO CHE x È ASSE DI SIMMETRIA

$$\rightarrow \underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} 2K_x^B & 0 & 0 \\ 0 & K_y^A & K_y^A \cdot e \\ 0 & 0 & \frac{K_x^B}{2} d^2 + K_y^A \cdot e^2 \end{bmatrix}$$

- Se $e = 0$ PERDO L'ACCOPPIAMENTO $y - \theta$

  y È ASSE DI SIMMETRIA

CIOÈ:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} K_x^B + K_x^C & 0 & \frac{K_x^C - K_x^B}{2} d \\ 0 & K_y^A & 0 \\ \frac{K_x^B - K_x^C}{2} d & 0 & \frac{K_x^B + K_x^C}{4} d^2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow m_{xx}\ddot{u}_x(t) + K_{xx}u_x(t) = F_x(t)$$

$$\rightarrow m_{yy}\ddot{u}_y(t) + K_{yy}u_y(t) = F_y(t)$$

- Se $d = 0$ oppure $K_x^B = K_x^C$ ed $e = 0$: x e y ASSI DI SIMMETRIA

  $\underline{\underline{K}}$ È DIAGONALE:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} 2K_x^B & 0 & 0 \\ 0 & K_y^A & 0 \\ 0 & 0 & \frac{K_x^B}{2} d^2 \end{bmatrix}$$

$K_{\theta\theta}^{(A)} << K_{\theta\theta}^{(B)}$

(A) HA MENO RIGIDEZZA TORSIONALE.

ANCHE IN CASO DI PIANTA SIMMETRICA LA NORMATIVA RICHIEDE UNA VERIFICA CON IL CENTRO DI MASSA SPOSTATO DEL 5% NELLE 2 DIREZIONI

APPELLO 14/7/2011

Se $\ell \gg h$ (rigidezza torsionale propria sia trascurabile)

In pianta:

y ASSE DI SIMMETRIA: moto lungo y disaccoppiato

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\ell^2}{6} \end{bmatrix} m$$

$$\underline{F}(t) = \begin{Bmatrix} R_1(t) + R_2(t) \\ 0 \\ (R_1(t) - R_2(t))\frac{\ell}{2} \end{Bmatrix} - m \begin{Bmatrix} \ddot{u}_{gx}(t) \\ \ddot{u}_{gy}(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

PER LA MATRICE DI RIGIDEZZA DOBBIAMO FARE DELLE CONSIDERAZIONI

P_1 e P_2:

$$\frac{12 E 2d^4}{h^3 12} = \frac{2Ed^4}{h^3}$$

$$\frac{12E}{h^3}\frac{d(2d)^3}{12} = \frac{8Ed^4}{h^3}$$

P_3 e P_4

$q_1 = 1$ | DALL'ALTO

$K_{11} = 6 E d^4 / h^3$

$K_{21} = 0$

$K_{31} = (4-2) \frac{E d^4}{h^3} \frac{\ell}{2} = E d^4 \frac{\ell}{h^3}$

$q_2 = 1$ |

$K_{12} = 0 = K_{21}$

$K_{22} = 18 \frac{E d^4}{h^3} > 0$

$K_{32} = 0$

disaccoppiamento in ✓

$q_3 = 1$ |

Se $\ell >> h$ possiamo non considerare la forza che genera la torsione (rotazione del pilastro)

$K_{13} = \frac{E d^4 \ell}{h^3}$

$K_{23} = 0$

$K_{33} = \frac{E d^4 \ell}{h^3} \left[4 + 1 + 4 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right]$

$= \frac{6 E d^4 \ell^2}{h^3}$

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & \ell \\ 0 & 18 & 0 \\ \ell & 0 & 6\ell^2 \end{bmatrix} \frac{Ed^4}{h^3}$$

$$\det\left[-\omega_n^2 \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{K}}\right] = 0$$

$$\omega_1 = 2.409 \sqrt{\frac{Ed^4}{mh^3}} \longrightarrow \underline{\psi}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-0.199}{\ell} \end{Bmatrix}$$

$$\omega_2 = 4.243 \sqrt{\frac{Ed^4}{mh^3}} \longrightarrow \underline{\psi}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\omega_3 = 6.017 \sqrt{\frac{Ed^4}{mh^3}} \longrightarrow \underline{\psi}^{(3)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{30.199}{\ell} \end{Bmatrix}$$

$$\hat{\underline{\underline{M}}} = \mathrm{diag}\left[1.007;\ 1,\ 152.993\right] m$$

$$\hat{\underline{\underline{K}}} = \mathrm{diag}\left[5.939,\ 18,\ 5538.16\right] \frac{Ed^4}{h^3}$$

$$\hat{\underline{F}}(t) = \begin{Bmatrix} 0.801\, R_1(t) + 1.199\, R_2(t) - m\ddot{u}_{g_x}(t) \\ -m\ddot{u}_{g_y}(t) \\ 37.199\, R_1(t) - 29.199\, R_2(t) - m\ddot{u}_{g_x}(t) \end{Bmatrix}$$

$\Gamma_{1x} = 0.993$ $\quad$ $\Gamma_{2x} = 0$ $\quad$ $\Gamma_{3x} = 0.007$

$\Gamma_{1y} = 0$ $\quad$ $\Gamma_{2y} = 1$ $\quad$ $\Gamma_{3y} = 0$

Se $R_1(t) = R_2(t) = 0$; $u_{gy} = 0$; $u_{gx} = \bar{u}_g \cos \omega t$

$$\max_t |\hat{q}_1^{part}(t)| = \frac{\omega^2/\omega_1^2}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)^2 + \left(2\nu\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}} \cdot \underbrace{0.993}_{\Gamma_{1x}} \bar{u}_g$$

$$\max_t |\hat{q}_2^{part}(t)| = 0$$

$$\max_t |\hat{q}_3^{part}(t)| = \underbrace{0.007}_{\Gamma_{3x}} \bar{u}_g \frac{\omega^2/\omega_3^2}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_3^2}\right)^2 + \left(2\nu\frac{\omega}{\omega_3}\right)^2}}$$

COME MAI SE $\ell \gg h$ LA RIGIDEZZA TORSIONALE DEI PILASTRI È TRASCUR.?

TRASCURABILITÀ DELL'INERZIA TORSIONALE PROPRIA

$$\begin{cases} M_t = G J_t \Theta \\ \Theta = \frac{\theta}{h} = \text{angolo di torsione unitario} \end{cases}$$

$$M_t = G J_t \Theta = \frac{E}{2(1+\nu)} J_t \frac{\theta}{h}$$

generati dalle forze esterne

$$K_{\theta\theta} = G(M_{z_1} + M_{z_2} + M_t)$$

$\{M_{z1}, M_{z2}\}$ in precedenza

proprio

$$\frac{M_t}{M_{z_1} + M_{z_2}} = \frac{\frac{E}{(1+\nu)\cdot 2} J_t \frac{\theta}{h}}{\frac{2 E d^4 \ell^2}{4 h^3} \theta} = \frac{J_t}{1+\nu} \frac{h^2}{d^4 \ell^2} = \frac{14}{100(1+\nu)} \frac{h^2}{\ell^2} \overset{\nu = 0.3}{=} 0.11 \frac{h^2}{\ell^2}$$

$J_t = \frac{14 d^4}{100}$

di trasporto

Se $\ell = \frac{h}{2}$ — 43 %

Se $\ell = h$ — 11 %

Se $\ell = 2h$ — 2.7 %

ANALISI DINAMICA DI ASTE INCLINATE $\neq k \cdot \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{N}$

$$\underline{u}(t) = \underline{\underline{D}}\ \underline{q}(t)$$

$\underline{u}$: gdl traslazionali (P)

$\underline{\underline{D}}$: Matrice di dipendenza ($P \times N$)

$\underline{q}$: coord. libere (N)

$(P \equiv N)$

DALL'ANALISI CINEMATICA

$$\underline{u_1 = u_2 = q_1}$$

$$\begin{cases} P = 2 \\ N = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{D}}} q_1$$

$\underline{\underline{\tilde{M}}}_{P \times P}$ = MATRICE DI MASSA NEL SDR $\underline{u}$

$$T = \frac{1}{2}\dot{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{\tilde{M}}} \cdot \dot{\underline{u}} = \frac{1}{2}\underline{\underline{D}}\,\dot{\underline{q}}(t) \cdot \underline{\underline{\tilde{M}}} \cdot \underline{\underline{D}}\,\dot{\underline{q}}(t) =$$

$$= \frac{1}{2}\dot{\underline{q}}(t) \cdot \underbrace{\underline{\underline{D}}^T \underline{\underline{\tilde{M}}}\ \underline{\underline{D}}}_{\substack{N \times P \quad P \times P \quad P \times N \\ N \times N}} \cdot \dot{\underline{q}}(t)$$

IN GENERALE $\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{D}}^T \underline{\underline{\tilde{M}}}\ \underline{\underline{D}}$ NON DIAGONALE (ANCHE SE $\underline{\underline{\tilde{M}}}$ LO È)

$\underline{\tilde{F}}_{[P]}$:

$$\delta L = \underline{\tilde{F}} \cdot \delta \underline{u} = \underline{F} \cdot \delta \underline{q}$$

$$= \underline{\tilde{F}} \cdot \underline{\underline{D}}\,\delta \underline{q} = \underline{\underline{D}}^T \underline{\tilde{F}} \cdot \delta \underline{q}$$

$\underline{\underline{\tilde{K}}}$ NON ESISTE!! | $\underline{\underline{K}}$ SÍ!!

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\, \underline{q}(t) \cdot \underline{\underline{K}}\, \underline{q}(t)$$

COME CALCOLO K_{ij}?

SI CONSIDERI UN CAMPO DEGLI SPOSTAMENTI

$$\{\underline{q}^{(a)}\}_\ell = \delta_{j\ell} \quad ; \quad \{\underline{q}^{(b)}\}_\ell = \delta_{i\ell}$$

$$\underline{F}^{(a)} = \underline{\underline{K}}\, \underline{q}^{(a)} \qquad \underline{F}^{(b)} = \underline{\underline{K}}\, \underline{q}^{(b)}$$

$$\underline{F}^{(a)} \cdot \underline{q}^{(b)} = \underline{\underline{K}}\, \underline{q}^{(a)} \cdot \underline{q}^{(b)} = K_{\ell m}\, q_m^{(a)} \cdot q_\ell^{(b)} = K_{\ell m}\, \delta_{jm}\, \delta_{i\ell} =$$

$$= \underline{K_{ij}}$$ ALTERNATIVA ALL'ENERGIA ELASTICA

$V_1 = V_3 = 0$ (inestensibilità + carrello)

$$\underline{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad ; \quad \underline{P=4}$$

ANALISI CINEMATICA

CON I 2 CARRELLI AUSILIARI LA STRUTTURA È A NODI FISSI

$\underline{N=2}$

$$\underline{u} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_1 - q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & +1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}$$

$$T = \frac{1}{2}\left[m_1(\dot{u}_1^2) + m_2(\dot{u}_2^2 + \dot{v}_2^2) + m_3(\dot{u}_3^2)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\,\dot{\underline{u}}\,\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & & & 0 \\ & m_2 & & \\ & & m_2 & \\ 0 & & & m_3 \end{bmatrix}}_{\tilde{\underline{M}}}$$

$$= \frac{1}{2} m_1(\dot{q}_1^2) + m_2\,\dot{q}_1^2 + (\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2 + m_3\,\dot{q}_2^2 = \frac{1}{2}\cdot\dot{\underline{q}}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix} m_1+2m_2 & -m_2 \\ -m_2 & m_2+m_3 \end{bmatrix}}_{\underline{M}}\cdot\dot{\underline{q}}$$

$$\underline{\tilde{F}}(t) = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix}$$

$$\underline{F}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & +1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 + P_2 + P_4 \\ P_3 - P_4 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \text{LAVORANO PER IL I° CINEMATISM} \\ \rightarrow \text{LAVORANO PER IL II° CINEMATISM} \end{matrix}$$

PRINCIPI DI ISOLAMENTO

1) SMORZATORE A MASSA RISONANTE (TUNED MASS DAMPER)

1 gdl

2 gdl

$$\omega_1^* = \sqrt{\frac{K_1}{m_1}} \qquad \omega_2^* = \sqrt{\frac{K_2}{m_2}}$$

LE 2 PULSAZIONI NATURALI DEL SISTEMA MODIFICATO:

$$\begin{cases} \omega_{1,2} = \sqrt{\dfrac{\omega_1^{*2} + \omega_2^{*2}(1+\beta) \mp \sqrt{\left(\omega_1^{*2} + \omega_2^{*2}(1+\beta)\right)^2 - 4\omega_1^{*2}\omega_2^{*2}}}{2}} \\ \beta = \dfrac{m_2}{m_1} < 1 \end{cases}$$

FACENDO L'ANALISI DELLA RISPOSTA DEL SISTEMA MODIFICATO:

$$\frac{\max_t \left\{ q_1^{Part}(t) \right\}}{q_1^{st}} = N_1 = \frac{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_2^{*2}}}{\left(1 + \beta \dfrac{\omega_2^{*2}}{\omega_1^{*2}} - \dfrac{\omega^2}{\omega_1^{*2}}\right)\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_2^{*2}}\right) - \beta \dfrac{\omega_2^{*2}}{\omega_1^{*2}}}$$

$$\frac{\max_t \left\{ q_2^{Part}(t) \right\}}{q_2^{st}} = N_2 = \frac{1}{\ldots}$$

- $\bar{\omega}$ (fissata) : $\omega = \bar{\omega} \simeq \omega_1^*$ → LA STRUTTURA DI PARTENZA È IN RISONANZA PER $\bar{\omega}$. ALLORA LA MODIFICO AGGIUNGENDO UNA MASSA (CAMBIANO ω_1 e ω_2)

- ω_1 e ω_2 → LA STRUTTURA MODIFICATA NON È IN RISONANZA PER $\bar{\omega}$
  $\omega_1 \neq \omega_1^*$, $\omega_2 \neq \omega_2^*$

m_2 È UNA MASSA CHE SERVE SOLO PER MODIFICARE LA STRUTTURA.

MENTRE VOGLIO CHE $q_1 = 0$. ALLORA:

- $\omega_2^* = \bar{\omega}$ → LA STRUTTURA MODIFICATA HA q_1 IN ANTIRISONANZA PER $\bar{\omega}$

$$\Downarrow$$

$$\omega_1^* = \omega_2^* \Rightarrow \frac{K_1}{m_1} = \frac{K_2}{m_2} \Rightarrow \left[\frac{m_2}{m_1} = \frac{K_2}{K_1} = \beta \right]$$

FISSO UN RAPPORTO TRA LE MASSE (β) e PERCIÒ, TRA LE RIGIDEZZE

2) ISOLAMENTO SISMICO ALLA BASE

$$\omega_1^* = \sqrt{\frac{K_p}{m}}$$

$$\omega_b^* = \sqrt{\frac{K_b}{m+m_b}} \quad (\text{se } K_p \to \infty)$$

LE EQUAZIONI DEL MOTO:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1(t) \\ \ddot{q}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_p & -K_p \\ -K_p & K_b+K_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} m \\ m_b \end{Bmatrix} \ddot{u}_g(t)$$

Tuned Mass Damper

ANTIRISONANZA PER LA MASSA MA NO SISTEMA MODIFICATO

di partenza

LE RISONANZE SI DISTANZIANO DI PIÙ → HO PIÙ MARGINE SUL ω CRITICO E PERCIÒ MIGLIORA PROGETTAZIONE

$$\frac{\omega_b^{*2}}{\omega_1^{*2}} = \frac{K_b}{K_p}\,\frac{m}{m+m_b} = \varepsilon \text{, piccolo perché } K_b \ll K_p,$$

$$\gamma = \frac{m}{m+m_b} \in [0,1]$$

Se ε piccolo

$$\omega_1 \cong \omega_b^*\left(1-\frac{1}{2}\gamma\varepsilon\right) + o(\varepsilon^2) \longrightarrow \underline{\varphi}^{(1)} \cong \begin{Bmatrix} 1+\varepsilon \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\omega_2 \cong \omega_1^* \frac{1+\frac{1}{2}\gamma\varepsilon}{\sqrt{1-\gamma}} + o(\varepsilon^2) \longrightarrow \underline{\varphi}^{(2)} \cong \begin{Bmatrix} -\frac{1-\gamma}{\gamma}(1-\varepsilon) \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Se ε piccolo $\underline{\varphi}^{(1)} \longrightarrow \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ TUTTA LA DEFORMAZIONE AVVIENE SULL'ISOLATORE

↓

LA STRUTTURA SI SPOSTA DI MOTO RIGIDO.

I

e $\underline{\varphi}^{(2)} \longrightarrow \begin{Bmatrix} -\frac{1-\gamma}{\gamma} \\ 1 \end{Bmatrix}$

II

LA FORZANTE:

$$\hat{\underline{F}}(t) = \underline{\underline{\Phi}}^T \cdot \underline{F}(t) = -\begin{bmatrix} 1+\varepsilon & 1 \\ -\frac{1-\gamma}{\gamma}(1-\varepsilon) & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} m \\ m_b \end{Bmatrix}\ddot{u}_g(t) = -\begin{bmatrix} m+m_b+\varepsilon m \\ \varepsilon m_b \end{bmatrix}\ddot{u}_g(t)$$

Se ε piccolo il II° MODO NON SI AVVIA.

SISTEMI CONTINUI

VIBRAZIONI FLESSIONALI DI TRAVI

Si OTTENGONO:

- OSCILLAZIONI ASSIALI (GOVERNANO w)
- OSCILLAZIONI TORSIONALI (φ_t)

- VIBRAZIONI FLESSIONALI (x 2: x, y)

$\varphi_x = y'$ DEFORMABILITÀ A TAGLIO TRASCURABILE

$-\rho(s)\,J(s)\,\ddot{\varphi}_x(s,t)\,ds$ (inerzia rotazionale)

TRASCURANDO I TERMINI DEL II° ORDINE!

$$\cancel{T(s)} - q(s,t)\,ds - \cancel{T(s)} - dT + \gamma(s)\,\ddot{y}(s,t)\,ds = 0$$

$$\cancel{M(s)} - \cancel{M(s)} - dM + T(s)\,ds - \rho(s)\,J(s)\,\ddot{\varphi}_x(s,t)\,ds = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{ds} = \gamma(s)\,\ddot{y}(s,t) - q(s,t) \\[2ex] \dfrac{dM}{ds} = T(s) - \rho(s)\,J(s)\,\ddot{\varphi}_x(s,t) \end{cases}$$

$\ddot{\varphi}_x(s,t) \rightarrow \ddot{y}'(s,t)$

$$\frac{d^2M}{ds^2} = \frac{dT}{ds} - \frac{d}{ds}\left[\rho(s)\,J(s)\,\ddot{y}'(s,t)\right] =$$

$$\frac{d^2 M}{ds^2} = \gamma(s)\,\ddot{y}(s,t) - q(s,t) - \left[\rho(s)\,J(s)\,\ddot{y}'(s,t)\right]'$$

$$M(s,t) = -E(s)\,J(s)\,y''(s,t)$$

CARICO EQUIVALENTE MOVIMENTO DEL TERRENO

SOSTITUENDO

TRASCURABILE PER TRAVI SVELTE (Termine inerzia Rotazionale)

$$\underbrace{\gamma(s)\,\ddot{y}(s,t) - \overbrace{\left[\rho(s)\,J(s)\,\ddot{y}'(s,t)\right]'}^{q_I(s,t)\ \text{(inerzia)}} + \underbrace{\left[E(s)\,J(s)\,y''(s,t)\right]''}_{q_{ee}(s,t)\ \text{(elastico)}} = q(s,t) - \gamma(s)\,\ddot{u}_g(t)}_{\text{dipende solo da } y}$$

PDE

Partial Differential Equation

del II° ORDINE NEL TEMPO (t)

IV° ORDINE NELLO SPAZIO (s)

Servono sia C.I. che B.C.

- CONDIZIONI INIZIALI : VALIDE $\forall s$ A UN TEMPO SPECIFICO

$$y(s, t=0) = y_0(s)$$
$$\dot{y}(s, t=0) = \dot{y}_0(s)$$

- CONDIZIONI AL CONTORNO : VALIDE $\forall t$ ed s SPECIFICI

$$y(s=0,t) = 0$$
$$y'(s=0,t) = 0$$
$$y(s=\ell,t) = 0$$
$$y''(s=\ell,t) = 0$$

NEL CASO DI MOVIMENTO DEL TERRENO

$\Leftrightarrow$ CARICO EQUIVALENTE

$$q_{eq}(s,t) = -\gamma(s)\,\ddot{u}_g(t)$$

SI CONSIDERI IL TERMINE DI INERZIA ROTAZIONALE TRASCURABILE E IL CARICO ESTERNO NULLO!

OSCILLAZIONI LIBERE $\left(q(s,t) = u_g(t) = 0\right)$

$$\gamma(s)\,\ddot{y}(s,t) + \left[E(s)\,J(s)\,y''(s,t)\right]'' = 0$$

PROVIAMO AD USARE LA SEPARAZIONE DELLE VARIABILI. IPOTIZZIAMO CHE

$$y(s,t) = \psi(s)\cdot f(t)$$

$$\ddot{y}(s,t) = \psi(s)\cdot \ddot{f}(t)$$

$$y''(s,t) = \psi''(s)\cdot f(t)$$

SOSTITUENDO NELL'EQUAZIONE DI PARTENZA

$$\gamma(s)\,\psi(s)\,\ddot{f}(t) + \left[E(s)\,J(s)\,\psi''(s)\right]''\,f(t) = 0$$

$$-\frac{\ddot{f}(t)}{f(t)} = \frac{\left[E(s)\,J(s)\,\psi''(s)\right]''}{\gamma(s)\,\psi(s)} = \omega_n^2$$

funct(t) = funct(s) se e solo se sono COSTANTI!

SIAMO PASSATI DA UNA PDE A 2 ODE

$$\begin{cases} \ddot{f}(t) + \omega_n^2 f(t) = 0 \\ [E(s)\,J(s)\,\psi''^{(n)}(s)]'' - \omega^2 \gamma(s)\,\psi^{(n)}(s) = 0 \end{cases}$$

→ oscillatore semplice

$$f^{(n)}(t) = \overset{?}{A_n} \cos \overset{?}{\omega_n} t + \overset{?}{B_n} \sin \overset{?}{\omega_n} t$$

← AMPLITUDE NEL TEMPO

SI PENSI A $\begin{cases} E(s) = E \\ J(s) = J \\ \gamma(s) = \gamma \end{cases}$

$$\psi^{(n)\,IV}(s) - \underbrace{\omega_n^2 \frac{\gamma}{EJ}}_{\beta_n^4 > 0} \psi^{(n)}(s) = 0$$

$$\psi^{(n)}(s) = e^{\lambda s} \rightsquigarrow (\lambda^4 - \beta^4)\, e^{\lambda s} = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \beta_n \\ \lambda_2 = -\beta_n \\ \lambda_3 = i\beta_n \\ \lambda_4 = -i\beta_n \end{cases}$$

CIOÈ

→ MODO DI VIBRARE

$$\psi^{(n)}(s) = D_1^{(n)} e^{\beta_n s} + D_2^{(n)} e^{-\beta_n s} + D_3^{(n)} e^{i\beta_n s} + D_4^{(n)} e^{-i\beta_n s}$$

$$= C_1^{(n)} \sin \beta_n s + C_2^{(n)} \cos \beta_n s + C_3^{(n)} \sinh \beta_n s + \underset{?}{C_4^{(n)}} \cosh \underset{?}{\beta_n} s$$

DALLE C.I. → $\{A_n, B_n\} = \dots$

DALLE B.C. → $\begin{cases} 3 \cdot C_i^{(n)} \text{ e } \beta_n \\ \text{L'ULTIMA } C_{\cancel{i}}^{(n)} \text{ È DETERMINATA DAL CRITERIO DI} \\ \text{NORMALIZZAZIONE} \end{cases}$

ALLORA

$$y(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi^{(n)}(s) \cdot f^{(n)}(t)$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\sinh = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

$$\cos x = \frac{e^{+ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\cosh = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

$\sin x = -\sin(-x)$ $\qquad$ $\sin(0) = \sinh(0) = 0$

$\cos x = \cos(-x)$ $\qquad$ $\cos(0) = \cosh(0) = 1$

$\sinh(x) = -\sinh(-x)$ $\qquad$ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\cosh(x) = \cosh(-x)$ $\qquad$ $\sinh^2 x - \cosh^2 x = -1$

$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$ $\qquad$ $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$

$\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x$ $\qquad$ $\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x$

TRAVE APPOGGIATA

$$\begin{matrix} y(0,t)=0 \\ y''(0,t)=0 \\ y(\ell,t)=0 \\ y''(\ell,t)=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \psi(0)=0 \\ \psi''(0)=0 \\ \psi(\ell)=0 \\ \psi''(\ell)=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_2^{(n)} + C_4^{(n)} = 0 \\ \beta_n^2 \left[-C_2^{(n)} + C_4^{(n)} \right] = 0 \\ C_1^{(n)} \sin\beta_n \ell + C_2^{(n)} \cos\beta_n \ell + C_3^{(n)} \sinh\beta_n \ell + C_4^{(n)} \cosh\beta_n \ell = \\ \beta_n^2 \left[-C_1^{(n)} \sin\beta_n \ell - C_2^{(n)} \cos\beta_n \ell + C_3^{(n)} \sinh\beta_n \ell + C_4^{(n)} \cosh\beta_n \ell = \right. \end{cases}$$

$\rightarrow C_2 = C_4 = 0$

$$\psi^{(n)''}(s) = \beta_n^2 \left[-C_1^{(n)} \sin\beta_n s - C_2^{(n)} \cos\beta_n s + C_3^{(n)} \sinh\beta_n s + C_4^{(n)} \cosh\beta_n s \right]$$

IN FORMA MATRICIALE:

$$\begin{bmatrix} \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ \sin\beta_n\ell & \cos\beta_n\ell & \sinh\beta_n\ell & \cosh\beta_n\ell \\ -\sin\beta_n\ell & -\cos\beta_n\ell & \sinh\beta_n\ell & \cosh\beta_n\ell \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1^{(n)} \\ \cancel{C_2^{(n)}} \\ C_3^{(n)} \\ \cancel{C_4^{(n)}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cancel{0} \\ \cancel{0} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

AMMETTE LA SOLUZIONE BANALE:

$$C_1^{(n)} = C_2^{(n)} = C_3^{(n)} = C_4^{(n)} = 0 \implies y(s,t) = 0 \text{ è SOLUZIONE.}$$

PER AVERE SOLUZIONI NON BANALI, STUDIO IL DETERMINANTE:

$$\det[\dots]_{4\times4} = 0 \xrightarrow[\text{è}]{\text{che}} f(\beta_n) = 0 \xRightarrow[\text{ricavo}]{} \beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$$

DA CUI SI RICAVANO GLI AUTOVETTORI $\psi^{(1)}(s), \psi^{(2)}(s), \dots$

TROVATI I $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$ POSSO RICAVARE $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$

SE C_2 e $C_4 = 0$ (DALLE PRIME 2 B.C) IL SISTEMA SI RIDUCE:

$$\begin{bmatrix} \sin\beta_n l & \sinh\beta_n l \\ -\sin\beta_n l & \sinh\beta_n l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1^{(n)} \\ C_3^{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{ALLORA}$$

$$\det[\dots]_{2\times2} = \cancel{2} \sin\beta_n l \cdot \cancel{\sinh\beta_n l} = 0$$

$\sinh\beta_n l$ si annulla solo in $\emptyset \longrightarrow \beta_n = 0$ SOLUZIONE BANALE (MOTO RIGIDO)

ALLORA SI RIDUCE A

$\underline{\sin\beta_n l = 0}$ $\rightarrow$ VALORI PER CUI SI HA LA VIBRAZIONE DI OSCILLAZIONE LIBERA.

$$\downarrow$$

$$\beta_n l = n\pi \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\beta_n = \frac{n\pi}{l} \longrightarrow \text{INFINITI VALORI.}$$

$$\downarrow$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{EJ}{\gamma}\beta_n^4} = \frac{n^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{\gamma}} \longrightarrow \omega_2 = 4\omega_1$$

$$\omega_3 = 9\omega_1$$

in generale: $\underline{\omega_n = n^2\omega_1}$

TROVATI I β_1 POSSO CALCOLARE $C_1^{(n)}$ e $C_3^{(n)}$

$$\begin{bmatrix} 0 & \sinh(n\pi) \\ 0 & \sinh(n\pi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1^{(n)} \\ C_3^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_3^{(n)} \sinh(n\pi) = 0 \xrightarrow[\substack{n \neq 0 \\ n=1,2,\dots}]{\text{essendo}} C_3^{(n)} = 0$$

$C_1^{(n)}$ INDEFINITO. LO PONGO ALLORA PARI A 1 (NORMALIZZO)

$$\forall n : C_1^{(n)} = 1$$ normalizzazione

PER CUI

$$\boxed{\psi^{(n)}(s) = \sin \frac{n\pi s}{\ell}}$$

I° MODO : $\psi^{(1)}(s) = \sin \frac{\pi s}{\ell}$

II MODO : $\psi^{(2)}(s) = \sin \frac{2\pi s}{\ell}$

III° MODO : $\psi^{(3)}s = \sin \frac{3\pi s}{\ell}$

$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{\ell^2}\sqrt{\frac{EJ}{\gamma}}$$

$$\omega_2 = \frac{4\pi^2}{\ell^2}\sqrt{\frac{EJ}{\gamma}}$$

$$\omega_3 = \frac{9\pi^2}{\ell^2}\sqrt{\frac{EJ}{\gamma}}$$

LE CONDIZIONI DI VINCOLO SONO SIMMETRICHE PERCIÒ I MODI DI VIBRARE SONO SIMMETRICI e/o ANTISIMMETRICI.

LA DEFORMATA NEL TEMPO:

$$y(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi s}{\ell} \left[A^{(n)} \cos \omega_n t + B^{(n)} \sin \omega_n t \right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi s}{\ell} \left[A^{(n)} \cos \frac{n^2\pi^2}{\ell^2}\sqrt{\frac{EJ}{\gamma}} \cdot t + B^{(n)} \sin \frac{n^2\pi^2}{\ell^2}\sqrt{\frac{EJ}{\gamma}} \cdot t \right]$$

PER TROVARE $A^{(n)}$ e $B^{(n)}$ USO LE CONDIZIONI INIZIALI:

$$y(s,0) = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} A^{(n)} \sin \frac{n\pi s}{\ell} = y_0(s)}$$

INFINITI VALORI

$$\dot{y}(s,0) = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n B^{(n)} \sin \frac{n\pi s}{\ell} = \dot{y}_0(s)}$$

PER TROVARE LA SOLUZIONE SI USA:

$$\int_0^{\ell} \sin\left(\frac{n\pi s}{\ell}\right) \cdot \sin\left(\frac{k\pi s}{\ell}\right) ds = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq k \\ \frac{1}{2}\ell & \text{se } n = k \end{cases}$$

$$\int_0^{\ell} \left[\sum_{n=1}^{\infty} A^{(n)} \sin \frac{n\pi s}{\ell}\right] \sin\frac{k\pi s}{\ell}\, ds = \int_0^{\ell} \left[y_0(s)\right] \cdot \sin\frac{k\pi s}{\ell}\, ds$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A^{(n)} \int_0^{\ell} \sin\frac{n\pi s}{\ell} \sin\frac{k\pi s}{\ell}\, ds = A^{(k)} \frac{\ell}{2}$$

$$\boxed{A^{(k)} = \frac{2\int_0^{\ell} y_0(s) \cdot \sin\left(\frac{k\pi s}{\ell}\right) ds}{\ell}}$$

$$\boxed{B^{(k)} = \frac{2\int_0^{\ell} \dot{y}_0(s) \cdot \sin\left(\frac{k\pi s}{\ell}\right) ds}{\omega_k \ell}}$$

Se $y_0(s) = \dot{y}_0(s) = 0 \implies A^{(n)} = B^{(n)} = 0 \quad \forall n \implies$

$\implies y(s,t) = 0 \quad \forall t$ QUIETE

PER AVERE MOTO BASTA AVERE ALMENO UNA TRA:

$$\begin{cases} y_0(s) \neq 0 \\ \dot{y}_0(s) \neq 0 \end{cases}$$

ORTOGONALITÀ DEI MODI DI VIBRARE

$$\int_0^\ell \psi^{(n)}(s)\, \gamma(s)\, \psi^{(k)}(s)\, ds = \int_0^\ell \psi^{(n)''}(s)\, E(s)\, J(s)\, \psi^{(k)''}(s)\, ds = 0 \quad \text{se } k \neq n$$

$$\omega_n^2 = \frac{\left[E(s)\, J(s)\, \psi^{(n)''}(s)\right]''}{\gamma(s)\, \psi^{(n)}(s)} \longrightarrow \left[E(s)\, J(s)\, \psi^{(n)''}(s)\right]'' = \omega_n^2\, \gamma(s)\, \psi^{(n)}(s), \ \forall n$$

PER K:

$$\left[E(s)\, J(s)\, \psi^{(k)''}(s)\right]'' = \omega_k^2\, \gamma(s)\, \psi^{(k)}(s)$$

INTEGRIAMO PER PARTI:

$$\boxed{\int_0^\ell \psi^{(k)}(s) \left[E(s)\, J(s)\, \psi^{(n)''}(s)\right]''} ds = \int_0^\ell \psi^{(k)}(s) \cdot \omega_n^2\, \gamma(s)\, \psi^{(n)}(s)\, ds$$

$$\int_0^\ell \overbrace{\psi^{(k)}(s)}^{f} \overbrace{\left[E(s)\, J(s)\, \psi^{(n)''}(s)\right]''}^{g'} ds \overset{\text{P.P.}}{=}$$

$$= \cancel{\underbrace{\psi^{(k)}(s)}_{\text{Spost}} \underbrace{\left[E(s)\, J(s)\, \psi^{(n)''}(s)\right]'}_{\text{(Momento)}'}}\Bigg|_0^\ell - \int_0^\ell \psi^{(k)'}(s) \left[E(s)\, J(s)\, \psi^{(n)''}(s)\right]' ds \overset{\text{P.P.}}{=}$$

Taglio

↳ in genere (Taglio × spostamento = 0)

$$= \cancel{-\underbrace{\psi^{(k)'}(s)}_{\text{Rotazione}} \underbrace{\left[E(s)\, J(s)\, \psi^{(n)''}(s)\right]}_{\text{Momento}}}\Bigg|_0^\ell + \int_0^\ell \psi^{(k)''}(s) \left[E(s)\, J(s)\, \psi^{(n)''}(s)\right] ds$$

$= 0$

Spostamento Taglio = 0

ALLORA:

$$\int_0^\ell \psi^{(k)''}(s) \left[E(s)\, J(s)\, \psi^{(n)''}(s)\right] = \int_0^\ell \omega_n^2\, \gamma(s)\, \psi^{(n)}(s)\, \psi^{(k)}(s)\, ds$$

INTEGRIAMO ORA PER IL TERMINE IN K

$$\boxed{\int_0^\ell \left[E(s)\, J(s)\, \psi^{(k)''}(s)\right]'' ds} = \int_0^\ell \omega_k^2\, \gamma(s)\, \psi^{(k)}(s)\, ds$$

FACCIO LO STESSO PROCEDIMENTO PER K ...

$$= \int_0^\ell \psi^{(k)''}(s)\, E(s)\, J(s)\, \psi^{(k)''}(s) = \int_0^\ell \omega_k^2\, \psi^{(n)}(s)\, \gamma(s)\, \psi^{(k)}(s)\, ds$$

ESSENDO $\omega_k = \text{cost}$ e quindi $\omega_n = \text{cost}$ posso portarli fuori dall'integrale; allora:

$$0 = \int_0^\ell \gamma(s)\, \psi^{(k)}(s)\, \psi^{(n)}(s)\, ds \implies \int_0^\ell E(s)\, J(s)\, \psi^{(n)''}(s)\, \psi^{(k)''}(s)\, ds = 0$$

Se $k \neq n$ Se $k \neq n$

Se $\gamma(s) = \gamma$; $E(s)\, J(s) = EJ$

LA PROPRIETÀ DI ORTOGONALITÀ SI RIDUCE A:

$$\int \psi^{(n)}(s)\, \psi^{(n)}(s) = 0$$

$$\int \psi^{(n)''}(s)\, \psi^{(k)''}(s) = 0$$

$$\int \psi^{(n)}(s)\, \psi^{(k)''''}(s) = 0$$

L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE PER LE OSCILLAZIONI LIBERE DIVENTA:

$$\underbrace{\int_0^\ell \psi^{(k)}(s)\, \gamma(s) \sum_{n=1}^{\infty} \psi^{(n)}(s)}_{M_k}\, \ddot{f}^{(n)}(t) + \underbrace{\int_0^\ell \psi^{(k)}(s) \sum_{n=1}^{\infty} \left[E(s)\, J(s)\, \psi^{(n)''}(s)\right]''}_{K_k}\, f^{(n)}(t) = 0$$

INTEGRO e MOLTIPLICO PER $\psi^{(k)}(s)$. SI OTTIENE (PER L'ORTOGONALITÀ):

$$M_k\, \ddot{f}^{(k)}(t) + K_k\, f^{(k)}(t) = 0 \qquad \forall\, k = 1, 2, \ldots, \infty$$

INFINITI OSCILLATORI SEMPLICI. LA PDE È EQUIVALENTE A INFINITE ODE (OSCILLATORI SEMPLICI)

$$M_K = \int_0^\ell \gamma(s) \left[\psi_s^{(K)} \right]^2 ds$$ = MASSA MODALE

$$K_K = \int_0^\ell E(s)\, J(s) \left[\psi^{(K)\,''}(s) \right]^2 ds$$ = RIGIDEZZA MODALE

PERCIÒ

$$\omega_n^2 = \frac{K_n}{M_n} = \frac{\int_0^\ell E(s)\, J(s) \left[\psi^{(n)\,''}(s) \right]^2 ds}{\int_0^\ell \gamma(s) \left[\psi^{(n)}(s) \right]^2 ds}$$ = QUOZIENTE DI RAYLEIGH

INSERENDO LE C.I. IN:

$$\begin{cases} y(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi^{(n)}(s) \left(A^{(n)} \cos \omega_n t + B^{(n)} \sin \omega_n t \right) \\ y(s,0) = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} A^{(n)} \psi^{(n)}(s) = y_0(s)} \\ \dot{y}(s,0) = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n B^{(n)} \psi^{(n)}(s) = \dot{y}_0(s)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \int_0^\ell \psi^{(K)}(s) \sum_{n=1}^{\infty} A^{(n)} \psi^{(n)}(s)\, ds = \int_0^\ell y_0(s)\, \psi^{(K)}(s)\, ds \\ \int_0^\ell \psi^{(K)}(s) \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n B^{(n)} \psi^{(n)}(s)\, ds = \int_0^\ell \dot{y}_0(s)\, \psi^{(K)}(s)\, ds \end{cases}$$

LA PRIMA:

$$A^{(K)} \int_0^\ell \left[\psi^{(K)}(s) \right]^2 ds = \int_0^\ell y_0(s)\, \psi^{(K)}(s)\, ds$$

DA CUI

$$\boxed{A^{(K)} = \frac{\int_0^\ell y_0(s)\, \psi^{(K)}(s)\, ds}{\int_0^\ell \left[\psi^{(K)}(s) \right]^2 ds}}$$ e dalla seconda $$\boxed{B^{(K)} = \frac{\int_0^\ell \dot{y}_0(s)\, \psi^{(K)}(s)\, ds}{\omega_K \int_0^\ell \left[\psi^{(K)}(s) \right]^2 ds}}$$

VALGONO PER OGNI C.I.

SMORZAMENTO SISTEMI CONTINUI

SI ASSUME LO SMORZAMENTO CLASSICO:

$$M_n \ddot{f}^{(n)}(t) + C_n \dot{f}^{(n)}(t) + K_n f^{(n)}(t) = 0$$

$$C_n = 2 \nu_n \sqrt{M_n K_n}$$

ν_n → COEFFICIENTE DI SMORZAMENTO MODALE

$$f^{(n)}(t) = e^{-\nu_n \omega_n t}\left[A^{(n)} \cos \omega_n \sqrt{1-\nu_n^2}\, t + B^{(n)} \sin \omega_n \sqrt{1-\nu_n^2}\, t\right]$$

$\psi^{(n)}(s)$ NON VARIA.

ALLORA POSSIAMO DIRE CHE:

$$y(s,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi^{(n)}(s) A^{(n)} = y_0(s)$$

LA DERIVATA PRIMA:

$$\dot{f}^{(n)}(t) = -e^{-\nu_n \omega_n t} \nu_n \omega_n f^{(n)}(t) + \omega_n \sqrt{1-\nu_n^2}\left[-A^{(n)} \sin \omega_n \sqrt{1-\nu_n^2}\, t + B^{(n)} \cos \omega_n \sqrt{1-\nu_n^2}\, t\right]$$

DA CUI

$$\dot{y}(s,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \psi^{(n)}(s)\left[-\nu_n A^{(n)} + \sqrt{1-\nu_n^2}\, B^{(n)}\right] = \dot{y}_0(s)$$

PER VALUTARE $A^{(n)}$ e $B^{(n)}$ PROCEDO COME IN PRECEDENZA

$$\int_0^{\ell} \psi^{(k)}(s) \sum_{n=1}^{\infty} \psi^{(n)}(s) A^{(n)} ds = \int_0^{\ell} \psi^{(k)}(s)\, y_0(s)\, ds$$

- - - - - - - - - - - - - - -

PER CUI:

$$A^{(n)} = \frac{\int_0^{\ell} y_0(s)\, \psi^{(n)}(s)\, ds}{\int_0^{\ell} \left[\psi^{(n)}(s)\right]^2 ds} \quad ; \quad B^{(n)} = \frac{\int_0^{\ell} \dot{y}_0(s)\, \psi^{(n)}(s)\, ds + \nu_n \omega_n \int_0^{\ell} y_0(s)\, \psi^{(n)}(s)\, ds}{\omega_n \sqrt{1-\nu_n^2} \int_0^{\ell} \left[\psi^{(n)}(s)\right]^2 ds}$$

= CASO NON SMORZATO

Se $\dot{y}_0(s) = 0$

$$B^{(n)} = \frac{\nu_n \cancel{\omega_n} \int_0^\ell y_0(s)\, \psi^{(n)}(s)\, ds}{\cancel{\omega_n} \sqrt{1-\nu_n^2} \int_0^\ell \left[\psi^{(n)}(s)\right]^2 ds} = \frac{\nu_n}{\sqrt{1-\nu_n^2}}\, A^{(n)}$$

ABBIAMO INFINITI OSCILLATORI SMORZATI.

PER $n \to \infty \Rightarrow \nu_n \to \infty$ CI TROVIAMO NELLA FASE DI SOVRASMORZAMENTO.

POSSIAMO APPROSSIMARE LA SERIE INFINITA

$$\sum_{n=1}^{\infty} \simeq \sum_{n=1}^{M} \quad , \; M \text{ molto grande}$$

I MODI PIÙ ALTI VENGONO SMORZATI PRIMA. ESSENDO

$$\omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{EJ}{\gamma}} \qquad \text{se } \nu_n = \nu = (5\%) \quad \forall n$$

I° MODO $\to e^{-\nu \omega_1 t}$

II° MODO $\to e^{-\nu \omega_2 t} = e^{-9 \nu \omega_1 t}$

III° MODO $\to e^{-\nu \omega_3 t} = e^{-9 \nu \omega_1 t}$

INIZIALMENTE CI SONO "TUTTI" I MODI MA POI I PIÙ ALTI VENGONO SMORZATI e SOPRAVVIVE SOLO IL MODO I° FINO ALLA CONFIGURAZIONE INDEFORMATA.

CAMBIAMO ORA LE B.C. (VINCOLI): COME CAMBIANO LE PULSAZIONI e I MODI DI VIBRARE?

TRAVE INCASTRATA

CONDIZIONI DI VINCOLO:

$$\begin{aligned} y(0,t) &= 0 \\ \dot{y}(0,t) &= 0 \\ EJ\, y''(\ell,t) &= 0 \\ EJ\, y'''(\ell,t) &= 0 \end{aligned} \Longrightarrow \begin{cases} \psi^{(n)}(0) = 0 \\ \psi^{(n)\prime}(0) = 0 \\ \psi^{(n)\prime\prime}(\ell) = 0 \\ \psi^{(n)\prime\prime\prime}(\ell) = 0 \end{cases}$$

ALLORA

$$\begin{cases} C_2^{(n)} + C_4^{(n)} = 0 \\ C_1^{(n)} + C_3^{(n)} = 0 \\ \beta_n^2 \left[-C_1^{(n)} \sin\beta_n \ell - C_2^{(n)} \cos\beta_n \ell + C_3^{(n)} \sinh\beta_n \ell + C_4 \cosh\beta_n \ell \right] = 0 \\ \beta_n^3 \left[-C_1^{(n)} \cos\beta_n \ell + C_2^{(n)} \sin\beta_n \ell + C_3^{(n)} \cosh\beta_n \ell + C_4 \sinh\beta_n \ell \right] = 0 \end{cases}$$

IN FORMA MATRICIALE:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta_n\ell & -\cos\beta_n\ell & \sinh\beta_n\ell & \cosh\beta_n\ell \\ -\cos\beta_n\ell & +\sin\beta_n\ell & \cosh\beta_n\ell & \sinh\beta_n\ell \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1^{(n)} \\ C_2^{(n)} \\ C_3^{(n)} \\ C_4^{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

MA SE

$$C_4^{(n)} = -C_2^{(n)}$$
$$C_3^{(n)} = -C_1^{(n)}$$

$$\psi^{(n)}(s) = C_1^{(n)} \left[\sin\beta_n s - \sinh\beta_n s \right] + C_2^{(n)} \left[\cos\beta_n s - \cosh\beta_n s \right]$$

IL SISTEMA (4x4) SI RIDUCE A UN SISTEMA 2x2

$$\begin{bmatrix} \sin\beta_n \ell + \sinh\beta_n \ell & \cos\beta_n \ell + \cosh\beta_n \ell \\ \cos\beta_n \ell + \cosh\beta_n \ell & -\sin\beta_n \ell + \sinh\beta_n \ell \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1^{(n)} \\ C_2^{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\det[\ ] = (\sin\beta_n \ell + \sinh\beta_n \ell)(-\sin\beta_n \ell + \sinh\beta_n \ell) - (\cos\beta_n \ell + \cosh\beta_n \ell)^2$$

$$= \underbrace{-\sin^2\beta_n \ell + \sinh^2\beta_n \ell}_{-1} \underbrace{- \cos^2\beta_n \ell - \cosh^2\beta_n}_{-1} - 2\cos\beta_n \ell \cosh\beta_n \ell$$

$$= -2(1 + \cos\beta_n \ell \cosh\beta_n \ell) = 0$$

(LA SOLUZIONE SI HA SOLO CON VALORI NUMERICI)

PER TROVARE GLI ZERI BISOGNA TROVARE QUANDO:

$$\cos\beta_n \ell = -\frac{1}{\cosh\beta_n \ell}$$

$$\begin{cases} \beta_1 \ell \simeq 0.597\,\pi \\ \beta_2 \ell \simeq 1.494\,\pi \\ \beta_n \ell \simeq \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi \quad , \quad n \geq 3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \omega_1 = \dfrac{3.516}{\ell^2}\sqrt{\dfrac{EJ}{\gamma}} \\ \omega_2 = \dfrac{22.03}{\ell^2}\sqrt{EJ/\gamma} \\ \omega_n = (n - 1/2)^2 \dfrac{\pi^2}{\ell^2}\sqrt{\dfrac{EJ}{\gamma}} \quad ; \quad n \geq 3 \end{cases}$$

PER $n > 3$ SI PUÒ CONSIDERARE $-\dfrac{1}{\cosh\beta_n \ell} \to 0$. SI HA UNA RELAZIONE ANALITICA E NON NUMERICA COME NEI PRIMI 2.

LA STRUTTURA INCASTRATA È A NODI MOBILI E RISULTA MENO RIGIDA RISPETTO ALLA TRAVE SEMPLICEMENTE APPOGGIATA (NODI FISSI)
LA PULSAZIONE È PIÙ VELOCE NELLA TRAVE APPOGGIATA.

SI RICAVANO LE INCOGNITE:

$$C_2^{(n)} = -\frac{\sinh\beta_n l + \sin\beta_n l}{\cosh\beta_n l + \cos\beta_n l}\, C_1^{(n)}$$

valore numerico

$$\psi^{(n)}(s) = C_1^{(n)}\left[\sin\beta_n s - \sinh\beta_n s - \frac{\sin\beta_n l + \sinh\beta_n l}{\cos\beta_n l + \cosh\beta_n l}\left(\cos\beta_n s - \cosh\beta_n s\right)\right]$$

sarà posta pari a 1

I)

II)

nodo del modo II

III)

IV)

TRAVE INCASTRO - APPOGGIO

$$\begin{cases} y(0,t)=0 \\ y'(0,t)=0 \\ y''(\ell,t)=0 \\ y(\ell,t)=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \psi^{(n)}(0)=0 \\ \psi^{(n)\prime}(0)=0 \\ \psi^{(n)\prime\prime}(\ell)=0 \\ \psi^{(n)}(\ell)=0 \end{cases}$$

SI RICAVA LA MATRICE 4×4 E SI CALCOLA IL $\det[\ldots]=0$ DA CUI

$$\det[\ldots]=0 \longrightarrow \tan\beta_n\ell = \tanh\beta_n\ell \longrightarrow \underline{\beta_n\ell \simeq \left(\frac{1}{4}+n\right)\pi}$$

$$\underline{\omega_n = \frac{\left(n+\frac{1}{4}\right)^2\pi^2}{\ell^2}\sqrt{\frac{EJ}{r}}}$$

$$\psi^{(n)}(s) = \sin\beta_n s - \sinh\beta_n s - \frac{\sin\beta_n\ell - \sinh\beta_n\ell}{\cos\beta_n\ell - \cosh\beta_n\ell}\left(\cos\beta_n s - \cosh\beta_n s\right)$$

I)

III)

II)

IV)

TRAVE INCASTRO PATTINO

$y(0,t)=0 \qquad y'(\ell,t)=0$

$y'(0,t)=0 \qquad y'''(\ell,t)=0$

I)

II)

$\omega = \beta^2 \sqrt{\frac{EI}{\gamma}}$

$\omega_{LABILE} < \omega_{NODI\ MOBILI} < \omega_{NODI\ FISSI}$

N	Condizioni al contorno	$(\beta\ell)_n$ $n=1$	$n=2$	$n=3$	$n>3$
1	LABILE Estremo libero $M(0,t)=0$ $T(0,t)=0$ — Estremo libero $M(\ell,t)=0$ $T(\ell,t)=0$	$\boxed{0}$	4,730	7,853	$\frac{2n-1}{2}\pi$
	SISTEMA a RIGIDEZZA NULLA PRODUCE $\omega = \sqrt{\frac{E}{\gamma}} = 0$				
2	LABILE Estremo libero $M(0,t)=0$ $T(0,t)=0$ — Doppio pendolo $\varphi(\ell,t)=0$ $T(\ell,t)=0$	$\boxed{0}$	2,365	5,498	$\frac{4n-5}{4}\pi$
3	LABILE Estremo libero $M(0,t)=0$ $T(0,t)=0$ — Appoggio $v(\ell,t)=0$ $M(\ell,t)=0$	$\boxed{0}$	3,927	7,069	$\frac{4n-3}{4}\pi$
4	LABILE Doppio pendolo $\varphi(0,t)=0$ $T(0,t)=0$ — Doppio pendolo $\varphi(\ell,t)=0$ $T(\ell,t)=0$	$\boxed{0}$	3,142	6,283	$(n-1)\pi$
5	NODI MOBILI Doppio pendolo $\varphi(0,t)=0$ $T(0,t)=0$ — Appoggio $v(\ell,t)=0$ $M(\ell,t)=0$	1,571	4,712	7,854	$\frac{2n-1}{2}\pi$

N	Condizioni al contorno	$(\beta\ell)_n$ $n=1$	$n=2$	$n=3$	$n>3$
6	NODI MOBILI Incastro $v(0,t)=0$ $\varphi(0,t)=0$ — Estremo libero $M(\ell,t)=0$ $T(\ell,t)=0$	1,875	4,694	7,855	$\frac{2n-1}{2}\pi$
7	NODI FISSI Appoggio $v(0,t)=0$ $M(0,t)=0$ — Appoggio $v(\ell,t)=0$ $M(\ell,t)=0$	3,142	6,283	9,425	$n\pi$
8	NODI FISSI Incastro $v(0,t)=0$ $\varphi(0,t)=0$ — Appoggio $v(\ell,t)=0$ $M(\ell,t)=0$	3,927	7,069	10,210	$\frac{4n+1}{4}\pi$
9	NODI MOBILI Incastro $v(0,t)=0$ $\varphi(0,t)=0$ — Doppio pendolo $\varphi(\ell,t)=0$ $T(\ell,t)=0$	2,365	5,498	8,639	$\frac{4n-1}{4}\pi$
10	NODI FISSI Incastro $v(0,t)=0$ $\varphi(0,t)=0$ — Incastro $v(\ell,t)=0$ $\varphi(\ell,t)=0$	$\boxed{4,730}$	7,853	10,996	$\frac{2n+1}{2}\pi$
	MAGGIORE VALORE				

SISTEMI A PIÙ CAMPATE

$y_1(s_1=0,t)=0 \qquad y_2(s_2=l_1,t)=0 \qquad y_1(s_1=l_1,t)=0 \qquad y_1'(s_1=l_1,t)=y_2'(s_2=0,t)$

$EJ_1 y_1''(s_1=0,t)=0 \qquad EJ_2 y''(s_2=l_2,t)=0 \qquad y_2(s_2=0,t)=0 \qquad EJ_1 y_1''(s_1=l_1,t)=EJ_2 y_2''(s_2=0,t)$

$$\begin{cases} y_1(s_1,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_1^{(n)}(s_1)\cdot f_1^{(n)}(t) \\ y_2(s_2,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_2^{(n)}(s_2)\, f_2^{(n)}(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi_1^{(n)}(s_1)=C_1^{(n)}\sin\beta_{1n}s_1+C_2^{(n)}\cos\beta_{1n}s_1+C_3^{(n)}\sinh\beta_{1n}s_1+C_4^{(n)}\cosh\beta_{1n}s_1 \\ \psi_2^{(n)}(s_2)=D_1^{(n)}\sin\beta_{2n}s_2+D_2^{(n)}\cos\beta_{2n}s_2+D_3^{(n)}\sinh\beta_{2n}s_2+D_4^{(n)}\cosh\beta_{2n}s_2 \end{cases}$$

LE 2 CAMPATE LEGGONO LA STESSA EVOLUZIONE TEMPORALE. NEL PROBLEMA NON SMORZATO:

$$f_1^{(n)}(t)=f_2^{(n)}(t)=A^{(n)}\cos\omega_n t+B^{(n)}\sin\omega_n t$$

ESISTE UNA PULSAZIONE DELL'INTERA STRUTTURA, e NON PER OGNI CAMPATA:

$$\omega_n=\sqrt{\frac{EJ_1}{\gamma_1}}\beta_{1n}^2=\sqrt{\frac{EJ_2}{\gamma_2}}\beta_{2n}^2$$

40 INCOGNITE: $C_i^{(n)}$ (4)

$D_i^{(n)}$ (4)

ω_n (1)

DATE M CAMPATE → SI DEVE RISOLVERE UN SISTEMA DI MATRICE QUADRATA DI DIMENSIONE $4M\times 4M$ $\underset{4M\times 4M}{[\quad]}\underset{4M}{\{\quad\}}=\underline{0}$

SI SCRIVONO LE 8 EQUAZIONI AL CONTORNO e SI RICAVA UN SISTEMA 8 x 8.

PONENDO $\det\left[\ldots\right]_{8\times 8} = 0$ e se $\ell_1 = \ell_2 = \ell$, $EJ_1 = EJ_2 = EJ$,

$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma \Longrightarrow \beta_{1n} = \beta_{2n} = \beta_n$ SI OTTIENE

$$\sin\beta_n\ell \, \sinh\beta_n\ell \left(\cos\beta_n\ell \, \sinh\beta_n\ell - \sin\beta_n\ell \, \cosh\beta_n\ell\right) = 0$$

CONDIZIONE di $\det[\ldots] = 0$ di

$\rightarrow \beta_n = \frac{n\pi}{\ell} = \{1, 2, 3, \ldots\}\frac{\pi}{\ell}$

I° MODO SISTEMA COMBINATO

CONDIZIONE di $\det[\ldots] = 0$ di

$\rightarrow \beta_n = \left(n + \frac{1}{4}\right)\frac{\pi}{\ell} = \left\{\frac{5}{4}, \frac{9}{4}, \frac{13}{4}, \ldots\right\}\frac{\pi}{\ell}$

II° MODO

III° MODO, ...

LA PRIMA PULSAZIONE DEL SISTEMA È LA PIÙ PICCOLA TRA LE PRIME PULSAZIONI DELLE SINGOLE TRAVI.

I)

$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{\ell^2}\sqrt{\frac{EJ}{\gamma}}$$

CONTINUITÀ MOMENTO

II)

$$\omega_2 = \frac{\pi^2}{\ell^2}\frac{25}{16}\sqrt{\frac{EJ}{\gamma}}$$

CURVATURA DELLO STESSO SEGNO (NO FLESSO)

III)

$$\omega_3 = \frac{4\pi^2}{\ell^2}\sqrt{\frac{EJ}{\gamma}}$$

IV)

$$\omega_4 = \frac{81\pi^2}{16\ell^2}\sqrt{\frac{EJ}{\gamma}}$$

$$\psi_1^{(n)}(s_1) = C_1^{(n)} \sin \beta_{tn} s_1 + C_2^{(n)} \cos \beta_{tn} s_1 + C_3^{(n)} \sinh \beta_{tn} s_1 + C_4^{(n)} \cosh \beta_{tn} s_1$$

$$\psi_2^{(n)}(s_2) = D_1^{(n)} \sin \beta_{pn}(s_2) + D_2^{(n)} \cos \beta_{pn} s_2 + D_3^{(n)} \sinh \beta_{pn} s_2 + D_4^{(n)} \cosh \beta_{pn} s_2$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{EJ_t}{\gamma_t}}\, \beta_{tn}^2 = \sqrt{\frac{EJ_p}{\gamma_p}}\, \beta_{pn}^2 \implies \beta_{tn} = \sqrt[4]{\frac{EJ_p}{EJ_t}\,\frac{\gamma_t}{\gamma_p}}\, \beta_{pn}$$

8 B.C.:

(1) $\psi_1^{(n)}(s_1=0)=0$ (inestensibilità) ; (2) $\psi_1^{(n)}(s_1=\ell)=0$ (appoggio)

(3) $EJ_t\, \psi_1^{(n)\,''}(s_1=\ell)=0$; (4) $\psi_2^{(n)}(s_2=0)=0$

(5) $\psi_2^{(n)\,'}(s_2=0)=0$; (6) $\psi_2^{(n)}(s_2=h)=0$ (inestensibilità)

(7) $\psi_1^{(n)\,'}(s_1=0) = \psi_2^{(n)\,'}(s_2=h)$; (8) $EJ_t\, \psi_1^{(n)\,''}(s_1=0) = EJ_p\, \psi_2^{(n)\,''}(s_2=h)$

CASO 1)

LA (2) È SOSTITUITA CON:

$$EJ_t\, \psi_1^{(n)\,''}(s_1=\ell)=0$$

CASO 2)

LA (6) È SOSTITUITA CON

$$-\gamma_t \ell \ddot{y}_2(h,t) - EJ_p\, y_2'''(s_2=h,t) + \gamma_t \ell \ddot{y}_2(h,t) = 0$$

$$\begin{cases} \ddot{y}_2(h,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_2^{(n)}(h)\, \ddot{f}^{(n)}(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2\, \psi_2^{(n)}(h)\, f^{(n)}(t) \\ y_2'''(h,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_2^{(n)\,''}(h)\, f^{(n)}(t) \end{cases}$$

e sostituendo:

$$EJ_p\, \psi_2^{(n)\,''}(h) + \gamma_t\, \ell\, \omega_n^2\, \psi_2^{(n)}(h) = 0$$

Per cui, la (6) è sostituita da:

$$EJ_p\, \psi_2'''(\xi_2 = h) = -\gamma_t\, \ell\, \omega_n^2\, \psi_2^{(n)}(h)$$

(Caso 3)

Somma dei 2 casi precedenti:

(2) $\longrightarrow$ $EJ_t\, \psi_1^{(n)\,'''}(\ell) = 0$

(6) $\longrightarrow$ $EJ_p\, \psi_2^{(n)\,'''}(h) = -\gamma_t\, \ell\, \omega_n^2\, \psi_2^{(n)}(h)$

Influenza dell'inerzia rotazionale

$$\underbrace{\gamma(s)\, \ddot{y}(s,t) - \left(\left(\rho(s)\, J(s)\, \ddot{y}'(s,t)\right)'\right)'}_{q_{inerzia}(s,t)} + \underbrace{\left[E(s)\, J(s)\, y''(s,t)\right]''}_{q_{el}} = 0$$

inerzia rotazionale

Per un sistema appoggio - appoggio

$$\omega_n = \omega_n^0 \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{n^2 \pi^2 r^2}{\ell^2}}} \le \omega_n^0 \; ; \qquad r = \sqrt{\frac{J}{A}} = \text{raggio giratore di inerzia}$$

$$\omega_n^0 = \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{EJ}{\gamma}}$$

Essendo $\omega \sim \sqrt{\frac{K}{m}}$; considerando l'inerzia rotazionale si aumenta la massa m e perciò ω diminuisce

$\frac{\ell}{r}$ = snellezza della struttura

IN MODI BASSI SI HA POCA INERZIA ROTAZIONALE (e TANTO TRASLAZIONALE) PER CUI NON MI DISTACCO MOLTO TRASCURANDOLA.

PER MODI ALTI HO TANTA INERZIA ROTAZIONALE

INFLUENZA AZIONE ASSIALE

$$\gamma(s)\,\ddot{y}(s,t) + \left[E(s)J(s)\,y''(s,t)\right]'' - P\,y''(s,t) = 0$$

CONTRIBUTO GEOMETRICO DEL CARICO ASSIALE (momento generato dal carico assiale nella configurazione non deformata)

NEL SISTEMA APPOGGIO - APPOGGIO

$$\omega_n(P) = \omega_n(P=0)\sqrt{1 - \frac{P}{P_{CR}^{(n)}}} \quad ; \quad P_{CR} = -\frac{n^2\pi^2 EJ}{\ell^2} < 0 \text{ (compr.)}$$

IN PROSSIMITÀ DEL CARICO CRITICO P_{cr} $\omega_n(P) \to 0$

PER CARICO DI TRAZIONE LA TRAVE RISPONDE IN MANIERA PIÙ RIGIDA

IN COMPRESSIONE CON $P \to P_{cr}$ SI HA IL COLLASSO ($\omega \to 0$ -- IL SISTEMA NON TORNA ALLA SUA CONFIGURAZIONE INIZIALE).

OSCILLAZIONI FORZATE

$$\gamma(s)\,\ddot{y}(s,t) + \left[E(s)\,J(s)\,y''(s,t)\right]'' = q(s,t) \qquad \text{(PDE)}$$

$$y(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi^{(n)}(s)\, f^{(n)}(t) + y_{part}(s,t)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \psi^{(n)}(s)\left[\underbrace{f^{(n)}(t)}_{\text{risposta oscillazioni libere}} + \underbrace{h^{(n)}(t)}_{\text{risposta oscillazioni forzate}}\right]$$

decompongo

SOSTITUISCO NELLA PRIMA, CONSIDERANDO $E(s)J(s) = EJ$ e $\gamma(s) = \gamma$

$$\gamma(s)\sum_{n=1}^{\infty} \psi^{(n)}(s)\left[\cancel{\ddot{f}^{(n)}(t)} + \ddot{h}^{(n)}(t)\right] + EJ\sum_{n=1}^{\infty} \psi^{(n)\,IV}(s)\left[\cancel{f^{(n)}(t)} + h^{(n)}(t)\right] = q(s,t)$$

non inducono $q(s,t)$

$$\psi^{(n)\,IV}(s) = \beta_n^4\,\psi^{(n)}(s) = \frac{\gamma\,\omega_n^2}{EJ}\,\psi^{(n)}(s)$$

$$\int_0^{\ell} \psi^{(k)}(s)\,\gamma\sum_{n=1}^{\infty}\left[\ddot{h}^{(n)}(t) + \omega_n^2\,h^{(n)}(t)\right]\psi^{(n)}(s)\,ds = \int_0^{\ell} q(s,t)\,\psi^{(k)}(s)\,ds$$

con ∞ $h^{(n)}(t)$ incognite

MOLTIPLICO PER $\psi^{(k)}(s)$ e INTEGRO. SI OTTIENE:

$$\left[\ddot{h}^{(k)}(t) + \omega_k^2\,h^{(k)}(t)\right]\underbrace{\int_0^{\ell}\gamma\left[\psi^{(k)}(s)\right]^2 ds}_{M_k \text{ massa modale}} = \int_0^{\ell} q(s,t)\,\psi^{(k)}(s)\,ds$$

$\omega_k^2 M_k$

$$M_k\,\ddot{h}^{(k)}(t) + K_k\,h^{(k)}(t) = \underbrace{\int_0^{\ell} q(s,t)\,\psi^{(k)}(s)\,ds}_{F_k(t) = \text{FORZANTE MODALE}}$$

DATA $F_K(t)$ MEDIANTE INTEGRALE DI DUAMEL:

$$h^{(K)}(t) = \frac{1}{\omega_K M_K} \int_0^t F_K(\tau) \sin \omega_K (t-\tau)\, d\tau$$

SMORZAMENTO CLASSICO

$$M_K \ddot{h}^{(K)}(t) + C_K \dot{h}^{(K)}(t) + K_K h^{(K)}(t) = F_K(t) \qquad (\infty \text{ ODE DISACCOPPIATE})$$

$$h^{(K)}(t) = \frac{1}{M_K \omega_K \sqrt{1-\nu_K^2}} \int_0^t F_K(\tau)\, e^{-\nu_K \omega_K (t-\tau)} \sin\left(\omega_K \sqrt{1-\nu_K^2}\,(t-\tau)\right) d\tau$$

$$M_n = \int_0^\ell \gamma \left[\psi^{(n)}(s)\right]^2 ds$$

$$K_n = \int_0^\ell EJ \left[\psi^{(n)\,''}(s)\right]^2 ds = \omega_n^2 M_n \quad , \quad \omega_n = \sqrt{\frac{K_n}{M_n}}$$

$$C_n = 2\nu_n \sqrt{M_n K_n}$$

TRAVE APPOGGIO - APPOGGIO

$$\left.\begin{aligned} \psi^{(n)}(s) &= \sin \frac{n\pi s}{\ell} \\ \omega_n &= \frac{n^2\pi^2}{\ell^2}\sqrt{\frac{EJ}{\gamma}} \end{aligned}\right\} \text{ per appoggio - appoggio}$$

$$M_n = \int_0^\ell \gamma \sin^2\left(\frac{n\pi s}{\ell}\right) ds = \gamma \frac{\ell}{2} \qquad \forall n \quad \text{NON DIPENDE DAL CARICO}$$

$$K_n = \int_0^\ell EJ \left(\left[\sin\left(\frac{n\pi s}{\ell}\right)\right]''\right)^2 ds = \omega_n^2 M_n = \frac{n^4\pi^4}{\ell^4} \frac{EJ}{\gamma} \gamma \frac{\ell}{2} = \frac{n^4\pi^4 EJ}{2\ell^3}$$

$$F_n(t) = \int_0^\ell q(s,t)\, \psi^{(n)}(s)\, ds = \int_0^\ell \bar{q}\, g(t) \cdot \sin\left(\frac{n\pi s}{\ell}\right) ds = \bar{q}\, g(t) \left[-\cos \frac{n\pi s}{\ell}\right]_0^\ell \frac{\ell}{n\pi} =$$

$$= \bar{q}\, g(t) \frac{\ell}{n\pi}\left[-\cos n\pi + 1\right] = \bar{q}\, g(t) \frac{\ell}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right) = \begin{cases} \dfrac{2\bar{q}\,\ell\, g(t)}{n\pi}, & n \text{ dispari} \\ 0 & n \text{ pari} \end{cases}$$

$\cos(n\pi) = (-1)^n, \; n = 1, 2, 3, \ldots$

IL CARICO È NULLO PER TUTTI I MODI DI VIBRARE PARI.

QUESTO PERCHÈ, ESSENDO LA TRAVE SIMMETRICA CARICATA SIMMETRICAMENTE SI ATTIVANO SOLO I MODI DI VIBRARE SIMMETRICI E NON QUELLI ANTISIMMETRICI.

INOLTRE, PIÙ SALGONO GLI ORDINI DEI MODI DI VIBRARE n, PIÙ BASSO È IL VALORE DELLA FORZANTE ($\propto \frac{1}{n}$).

<u>CON SMORZAMENTO</u>

DALL'INTEGRALE DI DUAMEL:

$$h^{(n)}(t) = \frac{4\bar{q}\ell^2}{n^3\pi^3\sqrt{\gamma EJ}\sqrt{1-\nu_n^2}} \int_0^t g(\tau)\, e^{-\nu_n \omega_n (t-\tau)} \sin \omega_n \sqrt{1-\nu_n^2}\,(t-\tau)\, d\tau$$

<u>Se n è dispari</u>

$h^{(n)}(t) = 0$ se n è pari.

Se $g(t) = 1$ per $t \geq 0$; $\nu_n = 0$

$$h^{(n)}(t) = \frac{4\bar{q}\ell^4}{n^5\pi^5 EJ}(1-\cos\omega_n t) \qquad n \text{ dispari}$$

$$y(s,t) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \varphi^{(n)}(s)\, h^{(n)}(t) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{4\bar{q}\ell^4}{n^5\pi^5 EJ} \sin\frac{n\pi s}{\ell}\left(1-\cos\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}\sqrt{\frac{EJ}{\gamma}}\cdot t\right)$$

VA COME $1/n^5$ $\longrightarrow$ AD ESEMPIO, IL III° MODO HA AMPIEZZA (deformata) $\frac{1}{3^5} \simeq 0.004 = 4\%$ del I° MODO

$$M(s,t) = -EJ\, y''(s,t) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{4\bar{q}\ell^2}{n^3\pi^3} \sin\frac{n\pi s}{\ell}\left(1-\cos\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}\sqrt{\frac{EJ}{\gamma}}\, t\right)$$

IL DIAGRAMMA DEL MOMENTO HA AMPIEZZA (III° MODO)

$\frac{1}{3^3} \cong 0.037 \cong 4\%$ del I° MODO

IL TAGLIO:

$$T(s,t) = -EJ\, y'''(s,t) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{4\bar{q}\ell}{n^2\pi^2} \cos\frac{n\pi s}{\ell}\left(1-\cos\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}\sqrt{\frac{EJ}{\gamma}}\,t\right)$$

IL TAGLIO HA VELOCITÀ DI CONVERGENZA MINORE

$$\frac{1}{3^2} = 0.111 \cong 11\%$$

I DIVERSI CAMPI, AVENDO VELOCITÀ DI CONVERGENZA DIVERSA, NON HANNO LO STESSO ORDINE DEI MODI PER VEDERE LA CONVERGENZA.

CARICO CONCENTRATO

$$F_n(t) = ?$$

SI PUÒ PENSARE COME UN CARICO DISTRIBUITO SU UN TRATTO PICCOLO DI LUNGHEZZA $2\Delta x$ e CENTRATO IN $\bar{x}$

$$q(s,t) = \begin{cases} \dfrac{P(t)}{2\Delta x} & \text{se } s \in [\bar{x}-\Delta x, \bar{x}+\Delta x] \\ 0 & \text{se } s \notin [\bar{x}-\Delta x, \bar{x}+\Delta x] \end{cases}$$

$$F_n(t) = \int_0^{\ell} q(s,t)\,\psi^{(n)}(s)\,ds = \int_{\bar{x}-\Delta x}^{\bar{x}+\Delta x} \frac{P(t)}{2\Delta x}\,\psi^{(n)}(s)\,ds = \frac{P(t)}{2\Delta x}\int_{\bar{x}-\Delta x}^{\bar{x}+\Delta x} \psi^{(n)}(s)\,ds$$

PER IL CARICO CONCENTRATO

$$F_n(t) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(t)}{2\Delta x}\int_{\bar{x}-\Delta x}^{\bar{x}+\Delta x} \psi^{(n)}(s)\,ds = P(t)\,\psi^{(n)}(\bar{x})$$

TH. VALOR MEDIO

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{2\Delta x}\int_{\bar{x}-\Delta x}^{\bar{x}+\Delta x} \psi^{(n)}(s)\,ds = \psi^{(n)}(\bar{x})$$

TRAVE APPOGGIO – APPOGGIO CON CARICO CONCENTRATO

$$\psi^{(n)}(s) = \sin\frac{n\pi s}{\ell}$$

$$F_n(t) = P(t)\,\psi^{(n)}\left(s=\frac{\ell}{2}\right) = P(t)\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ pari} \\ (-1)^{(n-1)/2}\cdot P(t) & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$

Se $P(t) = \bar{P} \quad t \geq 0$

$$F_n(t) = \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}\,\bar{P} & n \text{ dispari},\ t \geq 0 \end{cases}$$

$$h^{(n)}(t) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\,\bar{P}\,\frac{2\ell^3}{n^4\pi^4 EJ}\left(1-\cos\omega_n t\right),\ n \text{ dispari}$$

$$y(s,t) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{2\ell^3\bar{P}}{n^4\pi^4 EJ}\sin\frac{n\pi s}{\ell}\left(1-\cos\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}\sqrt{\frac{EJ}{\gamma}}\,t\right)$$

$$M(s,t) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{\bar{P}\,2\ell}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi s}{\ell}\left(1-\cos\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}\sqrt{\frac{EJ}{\gamma}}\,t\right)$$

$$T(s,t) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{\bar{P}\cdot 2}{n\pi}\cos\frac{n\pi s}{\ell}\left(1-\cos\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}\sqrt{\frac{EJ}{\gamma}}\,t\right)$$

LA CONVERGENZA DIMINUISCE COME LA METÀ. IL TAGLIO HA UNA CONVERGENZA MOLTO LENTA.

CARICO CON VARIAZIONE SINUSOIDALE:

$$P(t) = \bar{P} \sin \omega t$$

$$\bar{F}_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ pari} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \bar{P} \sin \omega t & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$

MODI DISPARI: $\omega = \omega_n$; n dispari

∞ condizioni di risonanza

$$y(s,t) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\bar{P} \ell^3}{n^4 \pi^4 EJ} \frac{\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_n} \sin \omega_n t}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \sin \frac{n \pi s}{\ell}$$

$$M(s,t) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\bar{P} \ell \cdot 2}{n^2 \pi^2} \cdot \frac{\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_n} \cdot \sin \omega_n t}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \sin \frac{n \pi s}{\ell}$$

$$T(s,t) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\bar{P} \cdot 2}{n \pi} \cdot \frac{\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_n} \cdot \sin \omega_n t}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \cos \frac{n \pi s}{\ell}$$

CARICO MOBILE SU PONTE

$$\bar{x}(t) = \bar{v} \cdot t \qquad \forall\, t \in \left[0; \frac{\ell}{\bar{v}}\right]$$

$$F_n(t) = \bar{P} \cdot \psi^{(n)}(\bar{x}(t)) = \bar{P} \cdot \sin \frac{n \pi \bar{x}(t)}{\ell} = \bar{P} \sin \frac{n \pi \bar{v}}{\ell} t = \bar{P} \sin n \bar{\omega} t$$

CARICO SINUSOIDALE NEL TEMPO CON PULSAZIONE

pulsazione

$n \bar{\omega} t$

$$\boxed{\bar{\omega} = \frac{\pi \bar{v}}{\ell}}$$

$$y(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \bar{P} \ell^3}{n^4 \pi^4 EJ} \cdot \sin \frac{n \pi s}{\ell} \frac{\sin n \bar{\omega} t - \frac{\bar{\omega} \cdot n}{\omega_n} \sin \omega_n t}{1 - \frac{n^2 \bar{\omega}^2}{\omega_n^2}}$$

$$M(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \bar{P} \ell}{n^2 \pi^2} \cdot \sin \frac{n \pi s}{\ell} \left[\quad \cdots \quad \right]$$

$$T(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \bar{P}}{n \pi} \cdot \cos \frac{n \pi s}{\ell} \left[\quad \cdots \quad \right]$$

Se avessi: $1 - \frac{n^2 \bar{\omega}^2}{\omega_n^2} = 0$ AVREI RISONANZA

Cioè:

$$\bar{\omega} = \frac{n\pi^2}{\ell^2}\sqrt{\frac{EJ}{\gamma}} \longrightarrow \underbrace{\bar{v} = \frac{n\pi}{\ell}\sqrt{\frac{EJ}{\gamma}}}_{\text{VELOCITÀ DEL VEICOLO CHE PORTA A RISONANZA}} =$$

$$= \{1, 2, 3, \dots\} \frac{\pi}{\ell}\sqrt{\frac{EJ}{\gamma}}$$

IN GENERE LA CONDIZIONE DI RISONANZA VALE PER VELOCITÀ

$$v \simeq \bar{v} \quad \text{se} \quad d_{veicoli} \simeq 2\ell$$

QUESTA È UNA VISIONE SEMPLIFICATA DEL PROBLEMA. LA VERA FORZA A SENTITA DALLA STRUTTURA È IL PESO DEL VEICOLO DEPURATO DALL'INERZIA DURANTE L'ABBASSAMENTO DELLA TRAVE.

$$F_n(t) = \left[\bar{P} - m\ddot{y}(\bar{x}(t), t)\right] \sin n\bar{\omega} t = \left[\bar{P} - m\sum_{k=1}^{\infty} \psi^{(k)}(\bar{x}(t))\, \ddot{h}(t)\right] \sin n\bar{\omega} t$$

$$\ddot{y}(\xi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi^{(n)}(\xi)\, \ddot{h}^{(n)}(t)$$

$$= \left[\bar{P} - m\sum_{k=1}^{\infty} (\sin k\bar{\omega} t)\, \ddot{h}(t)\right] \sin n\bar{\omega} t$$

$$= M_n \ddot{h}^{(n)}(t) + K_n h^{(n)}(t)$$

EQUAZIONE DEL MOTO DA RISOLVERE

L'AGGIUNTA DEL TERMINE INERZIALE PORTA ALL'ACCOPPIAMENTO DELLE ODE CHE INOLTRE SONO A COEFFICIENTI NON COSTANTI.

EQUAZIONI ODE ACCOPPIATE

Se $\ddot{h}^{(1)}(t) \gg \{\ddot{h}^{(k)}(t)\}$; $n > 1$

ALLORA IN $\underline{n=1}$:

$$\underbrace{\left[M_1 + m \sin\bar{\omega} t \sin\bar{\omega} t\right]}_{m(t) = \text{la massa varia con il tempo.}} \ddot{h}^{(1)}(t) + K_1 h^{(1)}(t) = \bar{P} \sin\bar{\omega} t$$

20/11/2019

SISTEMI A 1 gdl GENERALIZZATO

È UN METODO APPROSSIMATO ALL'INTERNO DEL MODELLO (APPROSSIMATO).

L'APPROSSIMAZIONE È:

$$y(s,t) = \psi(s)\, f(t)$$ funzione di forma

LA DEFORMATA NON È DATA DALLA SOMMA DEI MODI DI VIBRARE, MA È UN'UNICA FUNZIONE SPAZIALE $\psi(s)$ SCELTA DA NOI

$\psi(s)$ DEVE SODDISFARE LE CONDIZIONI CINEMATICHE (MEGLIO SE SODDISFA ANCHE QUELLE STATICHE EQUIVALENTI):

$$\psi(0) = \psi(\ell) = 0$$

meglio se anche: $\left(\psi''(0) = \psi''(\ell) = 0\right)$

L'ENERGIA CINETICA:

$$T(t) = \frac{1}{2}\int_0^\ell \gamma(s)\, \dot{y}^2(s,t)\, ds \quad ; \quad \dot{y}(s,t) = \psi(s)\, \dot{f}(t)$$

e L'ENERGIA ELASTICA:

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}\int_0^\ell EJ(s)\left[y''(s,t)\right]^2 ds \quad ; \quad y''(s,t) = \psi''(s)\, f(t)$$

SOSTITUENDO:

$$T = \frac{1}{2}\dot{f}(t)^2 \boxed{\int_0^\ell \gamma(s)\, \psi^2(s)\, ds}$$ massa equivalente m_e

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} f(t)^2 \boxed{\int_0^\ell EJ(s)\left[\psi''(s)\right]^2 ds}$$ K_e rigidezza equivalente

SONO DIPENDENTI DALLA SCELTA DI $\psi(s)$

ALLORA

$$T = \frac{1}{2} m_e \left[\dot{f}(t)\right]^2$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} K_e \left[f(t)\right]^2$$

CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

$$\frac{d}{dt}\left[T+\mathcal{E}\right]=0 \rightarrow m_e \ddot{f}(t)+K_e f(t)=0$$

$$\boxed{\omega_e=\sqrt{\frac{K_e}{m_e}}}$$

PULSAZIONE DEL SISTEMA EQUIVALENTE AD 1 gdl $\psi(s)$

$$\omega_e^2=\frac{\int_0^{\ell} EJ(s)\left[\psi''(s)\right]^2 ds}{\int_0^{\ell} \gamma(s)\left[\psi(s)\right]^2 ds} = \text{QUOZIENTE DI RAYLEIGH}$$

ANCHE LA PULSAZIONE VARIA IN FUNZIONE DI $\psi(s)$.

CI SONO INFINITE DEFORMATE ($\psi(s)$) COMPATIBILI CON LA CINEMATICA.

PROPRIETÀ:

- $\omega_e \geq \omega_1$: POSSO VALUTARE ω_1 DALLA MINIMIZZAZIONE DI ω_e
- Se $\psi(s) \simeq \psi^{(n)}(s) \Longrightarrow \omega_e \simeq \omega_n$
  - $\psi^{(n)}(s)$: modo di vibrare n-esimo
- Se $\psi(s) = \psi^{(n)}(s) \Longrightarrow \omega_e = \omega_n$

DATO UN SISTEMA A 3 CAMPATE:

$$m_e=\sum_{i=1}^{n_{campate}}\int_0^{\ell}\gamma_i(s_i)\left[\psi_i(s_i)\right]^2 ds_i$$

$$K_e=\sum_{i=1}^{n_{camp}}\int_0^{\ell} EJ_i(s_i)\left[\psi_i''(s_i)\right]^2 ds_i$$

$$\omega_e^2=\frac{\int_0^{\ell_1} EJ_1\ldots+\int_0^{\ell_2} EJ_2\ldots+\int_0^{\ell_3} EJ_3\ldots}{\int_0^{\ell_1}\gamma_1\ldots+\int_0^{\ell_2}\gamma_2\ldots+\int_0^{\ell_3}\gamma_3\ldots} \neq \cancel{\frac{\int_0^{\ell_1} EJ_1}{\int_0^{\ell_1}\gamma_1}+\frac{\int_0^{\ell_2} EJ_2}{\int_0^{\ell_2}\gamma_2}+\ldots}$$

NO!

$$\psi(s) = \sum_{j=\cancel{0}\,1}^{m} a_j s^j = \cancel{a_0} + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + \dots$$

↳ SPOSTAMENTO VERTICALE RIGIDO (NO!)

ABBIAMO $m+\cancel{1}$ PARAMETRI. POSSIAMO FISSARNE ALCUNI CON LE CONDIZIONI CINEMATICHE E STATICHE. (4 in appoggio – appoggio)

Se $m > 4$ $\quad \psi(s, \underline{a}) \longrightarrow w_e = w_e(\underline{a})$

$m-4$ componenti

POSSO FARE VARIARE I PARAMETRI IN $\underline{a}$ e MINIMIZZO w_e.

$$\underbrace{\min_{\underline{a}} \{w_e\}}_{\Downarrow} \geq w_1$$

$$\boxed{\nabla_{\underline{a}}\, w_e = \underline{0}}$$

PER LA STRUTTURA IN SEMPLICE APPOGGIO: CONOSCIAMO:

$$\psi^{(n)}(s) = \sin\frac{n\pi s}{\ell} \quad ; \quad w_n = \frac{n^2\pi^2}{\ell^2}\sqrt{\frac{EJ}{\gamma}} = \{1, 4, 9, \dots\}\, 9.8696440\sqrt{\frac{EJ}{\gamma \ell^4}}$$

CHE USEREMO PER UN CONFRONTO. SUPPONIAMO $\gamma(s) = \gamma$, $EJ(s) = EJ$

$\boxed{1}$ I° tentativo, SCELGO:

$$\psi(s) = \left(\frac{s}{\ell}\right) a_1 + a_2\left(\frac{s}{\ell}\right)^2 + a_3\left(\frac{s}{\ell}\right)^3 + a_4\left(\frac{s}{\ell}\right)^4$$

IMPONGO

$\underline{\psi(0) = 0} \longrightarrow a_0 = 0 \qquad \psi''(0) = 0$

$\psi(\ell) = 0 \qquad \psi''(\ell) = 0$

ALLORA LA $\psi(s)$

$$\psi(s) = \underbrace{a_1}_{\substack{= 1 \text{ (FISSATO)} \\ \text{si semplifica in } w_e^2}}\left[\left(\frac{s}{\ell}\right) - 2\left(\frac{s}{\ell}\right)^3 + \left(\frac{s}{\ell}\right)^4\right]$$

DA CUI

$$\left.\begin{aligned} m_e &= 0.049\,\gamma\ell \\ K_e &= 4.8\,\frac{EJ}{\ell^3} \end{aligned}\right\} \longrightarrow \underline{w_e = 9.87666\sqrt{\frac{EJ}{\gamma\ell^4}} > w_1}$$

CONSIDERIAMO ALTRI 2 PARAMETRI:

$\boxed{2}$

$$\psi(s) = \underset{\substack{\uparrow \\ a_1=1}}{} \left(\frac{s}{\ell}\right) + a_2\left(\frac{s}{\ell}\right)^2 + a_3\left(\frac{s}{\ell}\right)^3 + a_4\left(\frac{s}{\ell}\right)^4 + a_5\left(\frac{s}{\ell}\right)^5 + a_6\left(\frac{s}{\ell}\right)^6$$

$$\psi(s, a_5, a_6) = \left(\frac{s}{\ell}\right) - \left(2 - \frac{4}{3}a_5 - 3a_6\right)\left(\frac{s}{\ell}\right)^3 + \left(1 - \frac{7}{3}a_5 - 4a_6\right)\left(\frac{s}{\ell}\right)^4 +$$

$$+ a_5\left(\frac{s}{\ell}\right)^5 + a_6\left(\frac{s}{\ell}\right)^6$$

~~DA~~ ci

$$m_e(a_5, a_6) = \left[0.0492 + 0.0164\,a_5 + 0.0017\,a_5^2 + 0.0453\,a_6 + 0.0094\,a_5 a_6 + 0.0131\,a_6^2\right]\gamma\ell$$

$$K_e(a_5, a_6) = \dots$$

$$\omega_e = \sqrt{\frac{K_e}{m_e}} = \omega_e(a_5, a_6)$$

VALUTO

$$\underline{\nabla}\,\omega_e = \underline{0} \rightarrow \frac{\partial \omega_e}{\partial a_5} = \frac{\partial \omega_e}{\partial a_6} = 0 \begin{cases} a_5 = -6;\ a_6 = 0 \\ a_5 = -75.690;\ a_6 = 25.23 \\ a_5 = 1.121;\ a_6 = -0.374 \end{cases}$$

$\omega_e = 39.7995\sqrt{\frac{EJ}{\gamma\ell^4}}$

$\omega_e = 31.3125\sqrt{\frac{EJ}{\gamma\ell^4}}$

minimo assoluto $\leftarrow$ $\omega_e = 9.8696\sqrt{\frac{EJ}{\gamma\ell^4}}$

9.8696069

$\boxed{3}$ DEFORMATA RIFERITA A UN CARICO POSSIBILE:

$$M(s) = M$$

$$y(s) = -\frac{M}{EJ}\frac{s^2}{2} + As + B$$

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= 0 \\ y(\ell) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad y(s) = \frac{M}{EJ}\left[\frac{s\ell}{2} - \frac{s^2}{2}\right]$$

PRENDIAMO $\psi(s)$ DA $y(s)$

adimensionale $\leftarrow$ $\psi(s) = \left(\frac{s}{\ell}\right)^2 - \frac{s}{\ell} = y(s)\cdot\frac{EJ}{M}\cdot\frac{2}{\ell^2}$

$$m_e = \frac{\gamma \ell}{30} \qquad K_e = \frac{4EJ}{\ell^3} \longrightarrow \underline{\omega_e = 10.955\sqrt{\frac{EJ}{\gamma \ell^4}}}$$

NON SODDISFA LE CONDIZIONI STATICHE (MOMENTI NULLI AGLI ESTREMI)
QUESTO IMPLICA UNA STIMA PEGGIORE.

$\boxed{4}$

$$\psi(s) = \left(\frac{s}{\ell}\right)^3 - \frac{3}{4}\frac{s}{\ell}, \quad s \in \left[0, \frac{\ell}{2}\right]$$

$$m_e = 2\int_0^{\ell/2} \gamma \cdot [\psi(s)]^2 ds = 0.0304\, \gamma \ell$$

$$K_e = 2\int_0^{\ell/2} EJ\, [\psi''(s)]^2 ds = \frac{3EJ}{\ell^3}$$

$$\underline{\omega_e = 9.941\sqrt{\frac{EJ}{\gamma \ell^4}}}$$ (SIAMO PIÙ VICINI)

$\boxed{5}$

$$\psi(s) = \left(\frac{s}{\ell}\right)^4 - 2\left(\frac{s}{\ell}\right)^2 + \frac{s}{\ell}$$

$$m_e = 0.0492\, \gamma \ell$$

$$K_e = 4.8\, \frac{EJ}{\ell^3}$$

$$\underline{\omega_e = 9.8767\sqrt{\frac{EJ}{\gamma \ell^4}}}$$

$\boxed{6}$

$$\psi(s) = 4\left(\frac{s}{\ell}\right)^3 - \left(\frac{s}{\ell}\right), \quad s \in \left[0, \frac{\ell}{2}\right]$$

$$m_e = 2\int_0^{\ell/2} \gamma\, [\psi(s)]^2 ds = 0.0190\, \gamma \ell$$

$$K_e = 2\int_0^{\ell/2} EJ\, [\psi''(s)]^2 ds = 48\, \frac{EJ}{\ell^3}$$

$$\underline{\omega_e = 50.1996\sqrt{\frac{EJ}{\gamma \ell^4}}} \rightarrow$$ più vicino a ω_2, lontano da ω_1

$$\omega_2 = 39.479\sqrt{\frac{EJ}{\gamma \ell^4}}$$

PER LA TRAVE IN CASTRATA

$$\psi_{(s)}^{(1)} = \left[\cosh\left(1.875\,\frac{s}{\ell}\right) - \cos\left(1.875\,\frac{s}{\ell}\right) - 0.734 \cdot \left(\sinh\left(1.875\,\frac{s}{\ell}\right) - \sin\left(1.875\,\frac{s}{\ell}\right)\right)\right]$$

$$\omega_1 \simeq \frac{3.516}{\ell^2}\sqrt{\frac{EJ}{\gamma}}$$

1st natural vibration mode $\rightsquigarrow \omega_1 = 3.516\sqrt{\frac{EI}{\gamma l^4}}$	$\Psi^{(2)} = 1 - \cos\frac{\pi s}{2l} \rightsquigarrow \omega_e^{(2)} = 3.664\sqrt{\frac{EI}{\gamma l^4}}$	$\Psi^{(4)} = \frac{1-\cosh(s/l)}{1-\cosh(1)} \rightsquigarrow \omega = 5.0\sqrt{\frac{EJ}{\gamma l^4}}$
$\Psi^{(1)} = \frac{3s^2}{2l^2} - \frac{s^3}{2l^3} \rightsquigarrow \omega_e^{(1)} = 3.568\sqrt{\frac{EI}{\gamma l^4}}$	$\Psi^{(3)} = \frac{s^2}{l^2} \rightsquigarrow \omega_e^{(3)} = 4.472\sqrt{\frac{EI}{\gamma l^4}}$	$\Psi^{(5)} = \frac{4s^3}{l^3} - \frac{3s^2}{l^2} \rightsquigarrow \omega = 31.3\sqrt{\frac{EJ}{\gamma l^4}}$

Cantilever Second Derivative Shape Functions

1st natural vibration mode $\rightsquigarrow \omega_1 = 3.516\sqrt{\frac{EI}{\gamma l^4}}$	$\Psi^{2} = 1-\cos\frac{\pi s}{2l} \rightsquigarrow \omega_e^{(2)} = 3.664\sqrt{\frac{EI}{\gamma l^4}}$	$\Psi^{4} = \frac{1-\cosh(s/l)}{1-\cosh(1)} \rightsquigarrow \omega = 5.0\sqrt{\frac{EJ}{\gamma l^4}}$
$\Psi^{1} = \frac{3s^2}{2l^2} - \frac{s^3}{2l^3} \rightsquigarrow \omega_e^{(1)} = 3.568\sqrt{\frac{EI}{\gamma l^4}}$	$\Psi^{3} = \frac{s^2}{l^2} \rightsquigarrow \omega_e^{(3)} = 4.472\sqrt{\frac{EI}{\gamma l^4}}$	$\Psi^{5} = \frac{4s^3}{l^3} - \frac{3s^2}{l^2} \rightsquigarrow \omega = 31.3\sqrt{\frac{EJ}{\gamma l^4}}$