Çoklu Doğrusal Regresyon Modeli: Tahmin

Ekonometri I

Dr. Ömer Kara[1]

[1] İktisat Bölümü
Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

7 Mayıs 2021

Taslak

Motivasyon - BDR.5

- Basit Doğrusal Regresyon (BDR) analizinde kilit varsayım olan BDR.5 varsayımı çoğu zaman gerçekçi olmayan bir varsayımdır.

BDR.5: Sıfır Koşullu Ortalama Varsayımı

$$E(u|\mathbf{x}) = 0$$

- Daha önce gördüğümüz Yinelenen Beklentiler Kanunu'nu hatırlayalım.

Yinelenen Beklentiler Kanunu

$$E[E(u|\mathbf{x})] = E(u)$$

Motivasyon - BDR.5

- Yinelenen Beklentiler Kanunu kullanılarak BDR.5 varsayımı yeniden tanımlanabilir.

$$E[\underbrace{E(u|\mathbf{x})}_{=0}] = E(u)$$

$$E[0] = E(u)$$

$$0 = E(u)$$

BDR.5: Sıfır Koşullu Ortalama Varsayımı

$$E(u|\mathbf{x}) = E(u) = 0$$

Yani, hata terimi u'nun bağımsız değişken x'e göre koşullu ve koşulsuz ortalaması sıfırdır.

Motivasyon - BDR.5

- Koşullu beklenen değerin 5. özelliğini kullanarak u ve x arasındaki ilişki hakkında daha fazla yorumda bulunabiliriz.

Koşullu Beklenen Değer: Özellik 5

$$E(u|\mathbf{x}) = E(u) \quad \text{ise} \quad Cov(x,u) = 0 \quad \text{ve} \quad Corr(x,u) = 0$$

Yani, bağımsız değişken x'in her fonksiyonu hata terimi u ile ilişkisizdir.

- Korelasyondan farklı olarak, koşullu beklenen değer u ve x arasındaki non-lineer ilişkiyi de kapsadığından BDR.5 varsayımı hata terimi u ve bağımsız değişken x rassal olduğunda (BDR.3 sağlandığında) yeniden tanımlanabilir.

BDR.5: Sıfır Koşullu Ortalama Varsayımı

$$E(u|\mathbf{x}) = E(u) = 0$$

$$Cov(x,u) = 0, \quad Corr(x,u) = 0 \quad \text{ve} \quad E(xu) = 0$$

Sonuç: u ve x bağımsızdır. Yani u ve x hem lineer hem de non-lineer olarak ilişkisizdir.

Ek Bilgi

Motivasyon - BDR.5

- BDR.5 varsayımı ile, y'yi etkileyen diğer tüm faktörler (gözlenemeyen hata terimi u) x ile ilişkisizdir (ceteris paribus).
- Bu faktörler spesifik (kesin) olarak kontrol edilemez. Sadece, bu faktörlerin ortalama olarak değişmediği varsayılır ($\Delta u = 0$).
- İktisadi değişkenlerin bir çoğu birbiriyle ilişkili olduğundan bağımsız bir değişken x'in bağımlı değişken y üzerindeki yalın etkisini bulmak için bazı faktörlerin spesifik olarak kontrol edilmesi gerekir.
- BDR analizinde spesifik kontrol mümkün olmadığından dolayı ceteris paribus varsayımını uygulamak çok zordur.
- Bu nedenle BDR analizinde çoğu zaman BDR.5 varsayımı ihlal edilir ve parametre tahmincileri (β_0 ve β_1) sapmalı olur.
- Çoklu Doğrusal Regresyon analizinde ise açıkça diğer birçok faktör spesifik olarak kontrol edildiğinden ceteris paribus varsayımına uygundur.

Motivasyon - Fonksiyonel Form

- Çoklu Doğrusal Regresyon (ÇDR) analizinde bağımlı değişkeni (y) eşanlı olarak etkileyen pek çok etkeni (x) kontrol edebiliriz. Kısacası, çok sayıda bağımsız değişkeni (x) kullanabiliriz.
- Modele yeni bağımsız değişkenler ekleyerek y'deki değişimin daha büyük bir kısmını açıklayabiliriz. Yani, y'nin tahmini için daha üstün/iyi modeller geliştirebiliriz.
- ÇDR analizinde regresyonun biçimini, yani fonksiyonel formunu, belirlemede çok daha geniş olanaklara sahip oluruz.
- Kısacası, ÇDR modeli bize daha zengin bir analiz imkanı sunar.

ÇDR Modeli: Örnek 1

2 Bağımsız Değişkenli ÇDR Modeli

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u$$

Ücret Modeli

$$wage = \beta_0 + \beta_1 educ + \beta_2 exper + u$$

$wage$: Saatlik ücret (dolar); $educ$: Eğitim düzeyi (yıl); $exper$: Tecrübe düzeyi (yıl)

- β_1, ücretleri etkileyen diğer tüm faktörler sabit tuttuğumuzda ($\Delta exper$ ve $\Delta u = 0$), eğitimin ücretler üzerindeki etkisini ölçer.
- β_2, ücretleri etkileyen diğer tüm faktörler sabit tuttuğumuzda ($\Delta educ$ ve $\Delta u = 0$), tecrübenin ücretler üzerindeki etkisini ölçer.
- Yukarıdaki regresyonda tecrübeyi sabit tutarak eğitimin ücretlere etkisini ölçebiliyoruz. Basit regresyonda bu olanak yoktu. Sadece $educ$ ile u ilişkisizdir diye varsayıyorduk. Yani sadece $\Delta u = 0$ diyebiliyorduk.

ÇDR Modeli: Örnek 2

Sınav Başarı Modeli

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u$$

$$avgscore = \beta_0 + \beta_1 expend + \beta_2 avginc + u$$

avgscore: Ortalama sınav sonucu; *expend*: Öğrencinin eğitim harcaması; *avginc*: Ortalama aile geliri

- Eğer ortalama aile gelirini (*avginc*) modele doğrudan sokmazsak (yanlış modeli kullanırsak), onu yanlış modeledeki hata teriminin (v) içine almış oluruz.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \qquad \text{(Doğru Model)}$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + v \qquad \text{(Yanlış Model)}$$

$$v = \beta_2 x_2 + u \qquad \text{(Yanlış Model Hata Terimi)}$$

ÇDR Modeli: Örnek 2

- Doğru ve yanlış modelden elde edeceğimiz tahminler farklı olacağından, modeller ve onların ÖRF'leri aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \longrightarrow \hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 \quad \text{(Doğru Model ve ÖRF)}$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + v \longrightarrow \tilde{y} = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x_1 \quad \text{(Yanlış Model ve ÖRF)}$$

$$v = \beta_2 x_2 + u \quad \text{(Yanlış Model Hata Terimi)}$$

- Ortalama aile geliri ($avginc$), öğrencinin harcaması ($expend$) ile yakından ilişkili olduğundan yanlış model kullanıldığında:
  - x_1 ile v ilişkili olacaktır. $\longrightarrow Corr(x_1, v) \neq 0$
  - BDR.5 varsayımı ihlal edilecektir. $\longrightarrow E(v|\mathbf{x}) \neq 0$
  - Sonuç olarak $\tilde{\beta}_1$ sapmalı tahmin edilecektir. $\longrightarrow E(\tilde{\beta}_1) \neq \beta_1$
- Eğer doğru modeli ($avginc$ değişkenini modele ekleyerek) kullanırsak hem $avginc$'i doğrudan kontrol etme olanağına kavuşmuş olacağız hem de sapmasız parametre tahmincileri elde edeceğiz.

ÇDR Modeli: Örnek 3

Tüketim Modeli: Karesel (Quadratic) Fonksiyonel Form

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \longrightarrow y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_1^2 + u$$

$$cons = \beta_0 + \beta_1 inc + \beta_2 inc^2 + u$$

$cons$: Tüketim; inc: Gelir; $x_1 = inc$; $x_2 = inc^2$; $x_2 = x_1^2$

- Bu modelde β_1'in yorumu farklı olacaktır. Geliri (inc) değiştirirken, gelirin karesini (inc^2) sabit ($\Delta inc^2 = 0$) tutamayız. Çünkü, gelir değişirse karesi de değişir.
- Burada, gelirdeki bir birim değişmenin tüketim üzerindeki etkisi, yani marjinal tüketim eğilimi (marginal propensity to consume) şu şekilde hesaplanabilir:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x_1} \approx \beta_1 + 2\beta_2 x_1 \qquad \longrightarrow \qquad \frac{\Delta cons}{\Delta inc} \approx \beta_1 + 2\beta_2 inc$$

k Bağımsız Değişkenli ÇDR Modeli

Model

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + u \qquad \text{(İndekssiz)}$$

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_k x_{ik} + u_i \qquad \text{(İndeksli)}$$

- k: bağımsız değişken sayısı $\longrightarrow j = 1, 2, \ldots, k$
- $k+1$: bilinmeyen sabit β parametre sayısı $\longrightarrow \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k$
- n: gözlem (veri) sayısı $\longrightarrow i = 1, 2, \ldots, n$ ve $s = 1, 2, \ldots, n,\ \ i \neq s$
- y: bağımlı değişken
- x_j: j'inci bağımsız değişken $\longrightarrow x_1, x_2, \ldots, x_k$
- u: Hata terimi. x'ler dışında modele dahil edilmemiş tüm faktörlerin ortak etkisi
- β_0: Kesim parametresi (1 tane var), sabit terim olarak da adlandırılır
- β_j: x_j bağımsız değişkeni için eğim parametresi (k tane var)
- $\mathbf{x}$: Tüm bağımsız değişkenlerin temsili $\longrightarrow \mathbf{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$
- Yukarıdaki model bazen **anakütle modeli** olarak da bilinir.

k Bağımsız Değişkenli ÇDR Modeli

Model

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + u \qquad \text{(İndekssiz)}$$

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_k x_{ik} + u_i \qquad \text{(İndeksli)}$$

- β_j: y'yi etkileyen diğer tüm faktörler sabit tutulduğunda x_j'deki değişmenin y'de yaratacağı etkiyi/değişmeyi gösterir.
- β_1: y'yi etkileyen diğer tüm faktörler, yani diğer x'ler ve u'da içerilen faktörler, sabitken ($\Delta x_2 = \Delta x_3 = \cdots = \Delta x_k = \Delta u = 0$), x_1'deki değişmenin y'de yaratacağı etkiyi/değişmeyi gösterir.
  - Parametreleri yorumlarken fonksiyonel forma dikkat edilmelidir.
  - Düzey-Düzey, Log-Log, Log-Düzey ve Düzey-Log fonksiyonel formlarındaki yorumlama farklarını hatırlayın!
- Modele ne kadar çok x bağımsız değişkeni eklenirse eklensin dışarıda bırakılmış ya da gözlenemeyen faktörler her zaman olacaktır.

Gauss–Markov Varsayımları

ÇDR.1: Gözlem Sayısı

Gözlem sayısı n tahmin edilecek anakütle parametre sayısından büyük ya da en azından eşit olmalıdır.

$$n \geq k + 1$$

ÇDR.2: Parametrelerde Doğrusallık

Model parametrelerde doğrusaldır.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + u \checkmark$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \checkmark$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_1^2 + u \checkmark$$

$$y = \beta_0 + \beta_1^2 x_1 + \beta_2 x_2 + u \times$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \sqrt{\beta_2} x_2 + u \times$$

Detay

Gauss–Markov Varsayımları

ÇDR.3: Rassallık

Tahminde kullanılan n tane gözlem ilgili anakütleden rassal örnekleme yoluyla seçilmiştir. Yani gözlemler stokhastiktir (rassal), deterministik (kesin) değil.

$$\{(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik}, y_i) : i = 1, 2, \ldots, n\}$$

ÇDR.4: Tam Çoklu Doğrusal Bağıntının Olmaması

Örneklemde (ve bu nedenle anakütlede) bağımsız değişkenlerin hiçbiri kendi içinde sabit değildir (yeterli değişenlik vardır) ve bağımsız değişkenler arasında tam çoklu doğrusal bağıntı (TÇDB) yoktur.

$$\sum_{i=1}^{n}(x_{ij} - \bar{x}_j)^2 > 0, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \quad \longrightarrow \quad x_2 = 2x_1 \quad \text{TÇDB VAR ✘}$$

$$\longrightarrow \quad x_2 = x_1^2 \quad \text{TÇDB YOK ✔}$$

▸ Detay

Gauss–Markov Varsayımları

ÇDR.5: Sıfır Koşullu Ortalama

u hata teriminin bağımsız değişkenlerin herhangi bir değeri verildiğinde beklenen değeri sıfıra eşittir.

$$E(u|x_1, x_2, \dots, x_k) = E(u|\mathbf{x}) = 0$$

Detay

- Yinelenen Beklentiler Kanunu (Slayt 4) ve koşullu beklenen değerin 6. özelliği (Slayt 5) kullanılarak Sıfır Koşullu Ortalama varsayımı hata terimi u ve bağımsız değişken x rassal olduğunda (ÇDR.3 sağlandığında) yeniden tanımlanabilir.

ÇDR.5: Sıfır Koşullu Ortalama

$$E(u|\mathbf{x}) = E(u) = 0$$

$$Cov(x_j, u) = 0, \quad Corr(x_j, u) = 0 \quad \text{ve} \quad E(x_j u) = 0, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$$

Sonuç: u ve x_j bağımsızdır. Yani u ve x_j hem lineer hem de non-lineer olarak ilişkisizdir.

Ek Bilgi

Gauss–Markov Varsayımları

ÇDR.6: Otokorelasyon Olmaması

Hata terimleri arasında otokorelasyon yoktur.

$$Corr(u_i, u_s | x_1, x_2, \ldots, x_k) = 0, \quad i \neq s$$

$$Corr(u_i, u_s | \mathbf{x}) = 0, \quad i \neq s$$

$$Corr(u_i, u_s) = 0, \quad i \neq s \qquad (u \text{ ve } x\text{'ler bağımsız olduğundan})$$

- ÇDR.6 varsayımı, yatay-kesit verilerindeki rassallık varsayımı (ÇDR.3) nedeniyle aslında otomatik olarak sağlanır. Fakat çok ekstrem durumlarda gereklidir ve bu nedenle diğer birçok kaynaktan farklı olarak eklenmiştir.
- ÇDR.6 varsayımı aşağıdaki eşitlikleri de sağlar.

ÇDR.6: Otokorelasyon Olmaması

$$Cov(u_i, u_s | \mathbf{x}) = 0 \quad \text{ve} \quad Cov(u_i, u_s) = 0, \quad i \neq s$$

$$E(u_i u_s | \mathbf{x}) = 0 \quad \text{ve} \quad E(u_i u_s) = 0, \quad i \neq s$$

Ek Bilgi

Gauss–Markov Varsayımları

ÇDR.7: Sabit Varyans (Homoscedasticity)

u hata teriminin bağımsız değişken x'lere göre koşullu varyansı sabittir.

$$Var(u|x_1, x_2, \ldots, x_k) = \sigma^2$$

$$Var(u|\mathbf{x}) = \sigma^2$$

$$Var(u) = \sigma^2 \qquad (u \text{ ve } x\text{'ler bağımsız olduğundan})$$

▸ Detay

- ÇDR.7 varsayımı aşağıdaki eşitlikleri de sağlar.

ÇDR.7: Sabit Varyans (Homoscedasticity)

$$E(u^2|\mathbf{x}) = \sigma^2 \quad \text{ve} \quad E(u^2) = \sigma^2$$

▸ Ek Bilgi

- σ regresyonun standart sapmasıdır (bilinmiyor, bu nedenle tahmin edilecek).

Gauss–Markov Varsayımları

- Yukarıda verilen Gauss–Markov varsayımları yatay-kesit verisi ile yapılan regresyon için geçerli varsayımlardır.
- Zaman serileri ile yapılan regresyonlarda bu varsayımların değiştirilmesi gerekir.
- Gauss–Markov Varsayımları, ÇDR Varsayımları olarak da anılır.
- Bazı ÇDR varsayımlarının detayı ilerleyen slatlarda konu akışı içinde verilmiştir.
- Gauss–Markov Varsayımları daha sonra Gauss–Markov Teoremi'ni oluşturmada kullanılacaktır.
- Gauss–Markov Teoremi ise ÇDR modelinin Sıradan En Küçük Kareler Yöntemi ya da Momentler Yöntemi ile tahmini için teorik dayanak sağlamada kullanılacaktır. Bakınız Slayt 85.

Anakütle Regresyon Fonksiyonu

- ÇDR.5 ve ÇDR.7 varsayımları altında bağımlı değişken y'nin x'e göre koşullu dağılımı aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

y'nin $\mathbf{x}$'e Göre Koşullu Dağılımı

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + u \qquad \text{(Model)}$$

$$E(y|\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k \qquad \text{(ARF)}$$

$$Var(y|\mathbf{x}) = \sigma^2$$

$$y|\mathbf{x} \sim (\underbrace{\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k}_{\text{Ortalama}}, \underbrace{\sigma^2}_{\text{Varyans}}) \qquad \text{(y'nin dağılımı)}$$

Ek Bilgi

Anakütle Regresyon Fonksiyonu

- Anakütle Regresyon Fonksiyonu (ARF) bağımlı değişken y'nin x'e göre koşullu ortalamasıdır.

Anakütle Regresyon Fonksiyonu (ARF)

$$E(y|\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k \qquad \text{(İndekssiz)}$$

$$E(y_i|\mathbf{x}_i) = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_k x_{ik} \qquad \text{(İndeksli)}$$

Örneklem Regresyon Fonksiyonu: Amaç

- ÇDR tahminindeki asıl amacımız:
  - Öncelikle, iktisat teorisine göre model oluşturmak.
  - Sonra, Gauss–Markov varsayımları kullanarak ARF'yi oluşturmak.
  - Son olarak, ARF'yi rassal örnekleme yoluyla seçtiğimiz belli sayıdaki veriyi kullanarak tahmin etmektir.
- ARF'nin tahmini ise Örneklem Regresyon Fonksiyonu'dur ve bu tahmin örneklemden örnekleme değişir.

Model

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + u$$

Anakütle Regresyon Fonksiyonu (ARF)

$$E(y|\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k$$

Örneklem Regresyon Fonksiyonu (ÖRF)

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \cdots + \hat{\beta}_k x_k$$

Örneklem Regresyon Fonksiyonu: Amaç

Model

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + u \qquad \text{(İndekssiz)}$$

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_k x_{ik} + u_i \qquad \text{(İndeksli)}$$

Anakütle Regresyon Fonksiyonu (ARF)

$$E(y|\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k \qquad \text{(İndekssiz)}$$

$$E(y_i|\mathbf{x}_i) = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_k x_{ik} \qquad \text{(İndeksli)}$$

Örneklem Regresyon Fonksiyonu (ÖRF)

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \cdots + \hat{\beta}_k x_k \qquad \text{(İndekssiz)}$$

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} + \cdots + \hat{\beta}_k x_{ik} \qquad \text{(İndeksli)}$$

Örneklem Regresyon Fonksiyonu

Örneklem Regresyon Fonksiyonu (ÖRF)

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \cdots + \hat{\beta}_k x_k \qquad \text{(İndekssiz)}$$

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} + \cdots + \hat{\beta}_k x_{ik} \qquad \text{(İndeksli)}$$

$$\underbrace{y_i}_{\text{Gözlenen Değer}} = \underbrace{\hat{y}_i}_{\text{Tahmin Edilen Değer}} + \underbrace{\hat{u}_i}_{\substack{\text{Kalıntı (Artık)} \\ \text{Rassal Değil (Deterministik)}}}$$

- $\hat{y}_i$: y_i bağımlı değişkenin tahmini
- Paramete tahmincileri/tahmin edicileri örneklemden örnekleme değişir, yani rassaldır.
  - $\hat{\beta}_0$: β_0 kesim parametresinin tahmini (1 tane var)
  - $\hat{\beta}_j$: β_j eğim parametresinin tahmini (k tane var)
- $\hat{u}_i$: Kalıntı (artık). Rassal değildir, tahmin sırasında hesaplanır. Hata terimi u_i'nun örneklem analoğu olarak yorumlanabilir fakat kesinlikle aynı şeyler değildir.

Örneklem Regresyon Fonksiyonu

- Model, ARF ve ÖRF denklemleri arasında dikkat edilmesi gereken farklar vardır.

Model, ARF ve ÖRF

$$\underbrace{y_i}_{\text{Gözlenen Değer}} = \underbrace{\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_k x_{ik}}_{\substack{E(y_i|\mathbf{x}_i) \\ \text{(Sistemetik Kısım)}}} + \underbrace{u_i}_{\substack{\text{Rassal Hata Terimi} \\ \text{(Sistematik Olmayan Kısım)}}} \qquad \text{(Model)}$$

$$E(y_i|\mathbf{x}_i) = \underbrace{\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_k x_{ik}}_{\text{Sistemetik Kısım}} \qquad \text{(ARF)}$$

$$\underbrace{\hat{y}_i}_{\text{Tahmin Edilen Değer}} = \underbrace{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} + \cdots + \hat{\beta}_k x_{ik}}_{\text{Sistemetik Kısmın Tahmini}} \qquad \text{(ÖRF)}$$

$$\underbrace{y_i}_{\text{Gözlenen Değer}} = \underbrace{\hat{y}_i}_{\text{Tahmin Edilen Değer}} + \underbrace{\hat{u}_i}_{\substack{\text{Kalıntı (Artık)} \\ \text{Rassal Değil (Deterministik)}}}$$

Örneklem Regresyon Fonksiyonu: Tahmin Yöntemleri

Model, ARF ve ÖRF

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + u \qquad \text{(Model)}$$

$$E(y|\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k \qquad \text{(ARF)}$$

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \cdots + \hat{\beta}_k x_k \qquad \text{(ÖRF)}$$

- Örneklem Regresyon Fonksiyonu (ÖRF), iki yöntemle tahmin edilebilir.
  - Sıradan En Küçük Kareler (SEKK) Yöntemi
  - Momentler Yöntemi
- İki yöntem de aynı tahmin sonuçlarını verir.

Sıradan En Küçük Kareler Yöntemi

- Sıradan En Küçük Kareler (SEKK) Yöntemi, kalıntı kareleri toplamını (SSR) en küçük yapan parametre tahmincilerini hesaplamaya çalışır.

Örneklem Regresyon Fonksiyonu (ÖRF)

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \cdots + \hat{\beta}_k x_k$$

Gözlenen Değer, Tahmin Edilen Değer ve Artık

$$y_i = \hat{y}_i + \hat{u}_i \quad \longrightarrow \quad \hat{u}_i = y_i - \hat{y}_i$$

SEKK Amaç Fonksiyonu

$$\min_{\hat{\beta}_0,\, \hat{\beta}_j} SSR = \min_{\hat{\beta}_0,\, \hat{\beta}_j} \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2 = \min_{\hat{\beta}_0,\, \hat{\beta}_j} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2} - \cdots - \hat{\beta}_k x_{ik})^2$$

Sıradan En Küçük Kareler Yöntemi

SEKK Birinci Sıra Koşulları

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial SSR}{\partial \hat{\beta}_0} &= -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2} - \cdots - \hat{\beta}_k x_{ik}) = 0 \\
\frac{\partial SSR}{\partial \hat{\beta}_1} &= -2\sum_{i=1}^{n} x_{i1}(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2} - \cdots - \hat{\beta}_k x_{ik}) = 0 \\
\frac{\partial SSR}{\partial \hat{\beta}_2} &= -2\sum_{i=1}^{n} x_{i2}(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2} - \cdots - \hat{\beta}_k x_{ik}) = 0 \\
\vdots &= \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad = 0 \\
\frac{\partial SSR}{\partial \hat{\beta}_k} &= -2\sum_{i=1}^{n} x_{ik}(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2} - \cdots - \hat{\beta}_k x_{ik}) = 0
\end{aligned}
$$

Sıradan En Küçük Kareler Yöntemi

SEKK Birinci Sıra Koşulları

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2} - \cdots - \hat{\beta}_k x_{ik}) = 0 &\longrightarrow \sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i = 0 \\
\sum_{i=1}^{n}x_{i1}(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2} - \cdots - \hat{\beta}_k x_{ik}) = 0 &\longrightarrow \sum_{i=1}^{n}x_{i1}\hat{u}_i = 0 \\
\sum_{i=1}^{n}x_{i2}(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2} - \cdots - \hat{\beta}_k x_{ik}) = 0 &\longrightarrow \sum_{i=1}^{n}x_{i2}\hat{u}_i = 0 \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad = 0 &\longrightarrow \vdots \quad = 0 \\
\sum_{i=1}^{n}x_{ik}(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2} - \cdots - \hat{\beta}_k x_{ik}) = 0 &\longrightarrow \sum_{i=1}^{n}x_{ik}\hat{u}_i = 0
\end{aligned}
$$

- Birinci sıra koşullarından elde edilen $k+1$ tane denklemin çözümünden parametre tahmincileri $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_j$'lar (toplamda $k+1$ tane) bulunur.

Momentler Yöntemi

- Anakütle moment koşulları ÇDR.5 varsayımı kullanılarak yazılabilir.
- Daha sonra anakütle moment koşullarını kullanarak örneklem moment koşulları elde edilebilir.

ÇDR.5: Sıfır Koşullu Ortalama

$$E(u|\mathbf{x}) = E(u) = 0$$

$$Cov(x_j, u) = 0, \quad Corr(x_j, u) = 0 \quad \text{ve} \quad E(x_j u) = 0, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

Sonuç: u ve x_j bağımsızdır. Yani u ve x_j hem lineer hem de non-lineer olarak ilişkisizdir.

Momentler Yöntemi

Anakütle Moment Koşulları ve Örneklem Moment Koşulları

$$
\begin{array}{rcl}
\overbrace{}^{\text{Anakütle}} & & \overbrace{\phantom{\sum \hat{u}_i = 0}}^{\text{Örneklem}} \\
E(u) = 0 & \longrightarrow & \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i = 0 \\
E(x_1 u) = 0 & \longrightarrow & \sum_{i=1}^{n} x_{i1}\hat{u}_i = 0 \\
E(x_2 u) = 0 & \longrightarrow & \sum_{i=1}^{n} x_{i2}\hat{u}_i = 0 \\
\vdots \quad = 0 & \longrightarrow & \vdots \quad = 0 \\
E(x_k u) = 0 & \longrightarrow & \sum_{i=1}^{n} x_{ik}\hat{u}_i = 0
\end{array}
$$

Momentler Yöntemi

- Örneklem moment koşullarından elde edilen $k + 1$ tane denklemin çözümünden parametre tahmincileri $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_j$'lar (toplamda $k + 1$ tane) bulunur.
- SEKK birinci sıra koşulları ve örneklem moment koşulları aslında aynı denklemler kümesini verir.
- Bu nedenle, SEKK Yöntemi ve Momentler Yöntemi ile ÇDR modeli tahmin edildiğinde aynı sonuçlara ulaşılır.
- Genellikle kullanılan yöntem SEKK'dır. Bu nedenle parametre tahmincileri $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_j$'lar genellikle SEKK parametre tahmincileri ya da SEKK tahmincileri olarak adlandırılır.
- Bu yöntemlerin tek çözüm vermesi için ÇDR.4 (Tam Çoklu Doğrusal Bağıntının Olmaması) varsayımının sağlanması gereklidir. Bakınız Slayt 15.

SEKK Parametre Tahmincileri: 2 Bağımsız Değişken

Ana Model

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + u_i \qquad \text{(Model - İndeksli)}$$

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} \qquad \text{(ÖRF - İndeksli)}$$

- β_0 kesim parametresinin tahmini $\hat{\beta}_0$:

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{x}_2$$

Ek Bilgi

- β_1 eğim parametresinin tahmini, ya da x_1'nin eğim parametresinin tahmincisi, $\hat{\beta}_1$:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1} y_i}{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1}^2}$$

SEKK Parametre Tahmincileri: 2 Bağımsız Değişken

- β_1 eğim parametresinin tahmini, ya da x_1'in eğim parametresinin tahmincisi, $\hat{\beta}_1$:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1} y_i}{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1}^2}$$

burada $\hat{r}_{i1}$, x_1'in x_2 üzerine uygulanan regresyondan (1. yardımcı regresyon) elde edilen kalıntılardır.

1. Yardımcı Regresyon Tahmini

$$x_{i1} = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 x_{i2} + \hat{r}_{i1} \qquad \text{(İndeksli)}$$

- 1. yardımcı regresyondan elde edilen kalıntı $\hat{r}_1$, x_1 içindeki x_2'nin etkisi çıkarıldıktan sonraki x_1'i ifade eder.
- Bu işlemdeki amaç, bağımsız değişkenler x_1 ve x_2 arasındaki doğrusal bağıntı nedeniyle bağımlı değişken y üzerinde oluşabilecek dolaylı etkiyi kaldırmaktır.

SEKK Parametre Tahmincileri: 2 Bağımsız Değişken

- Amacımız x_1'in y'yi yalın/kısmi olarak ne kadar etkilediğini yani $\hat{\beta}_1$'yı bulmaktı.
- Öyleyse $\hat{\beta}_1$, y'nin $\hat{r}_1$ üzerine uygulanan regresyondan (2. yardımcı regresyon) elde edilen eğim parametresinin tahminidir.

2. Yardımcı Regresyon Tahmini

$$y_i = \hat{\delta}_0 + \hat{\beta}_1 \hat{r}_{i1} + \hat{\epsilon}_i \qquad \text{(İndeksli)}$$

- $\hat{\epsilon}_i$ ve $\hat{\delta}_0$, sırasıyla 2. yardımcı regresyondaki kalıntıları ve kesim parametresi tahminini ifade eder. Bu değerler bizim ilgi alanımızda değildir.
- 2. yardımcı regresyon basit doğrusal regresyon olduğundan, daha önceden bildiğimiz eğim parametresi tahmicisinin formülünü kullanabiliriz.

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})y_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

SEKK Parametre Tahmincileri: 2 Bağımsız Değişken

- $\hat{r}_j$, 2. yardımcı regresyonda bağımsız değişken olarak görev yaptığı için formüldeki x'ler yerine konulabilir.

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})y_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \longrightarrow \hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{r}_{i1} - \bar{\hat{r}}_1)y_i}{\sum_{i=1}^{n}(\hat{r}_{i1} - \bar{\hat{r}}_1)^2}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{r}_{i1} - \overbrace{\bar{\hat{r}}_1}^{=0})y_i}{\sum_{i=1}^{n}(\hat{r}_{i1} - \underbrace{\bar{\hat{r}}_1}_{=0})^2} \longrightarrow \hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\hat{r}_{i1}y_i}{\sum_{i=1}^{n}\hat{r}_{i1}^2} \quad \text{(1. Yardımcı Regresyondan)}$$

- Kısacası $\hat{\beta}_1$, x_1 içindeki x_2'nin etkisi çıkarıldıktan sonraki x_1'nin bağımlı değişken y'yi etkileyen yalın/kısmi yani ceteris paribus etkisini ifade eder.

SEKK Parametre Tahmincileri: k Bağımsız Değişken

Ana Model

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_k x_{ik} + u_i \qquad \text{(Model - İndeksli)}$$

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} + \cdots + \hat{\beta}_k x_{ik} \qquad \text{(ÖRF - İndeksli)}$$

- β_0 kesim parametresinin tahmini $\hat{\beta}_0$ (1 tane var):

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{x}_2 - \cdots - \hat{\beta}_k \bar{x}_k$$

Ek Bilgi

- β_j eğim parametresinin tahmini, ya da x_j'nin eğim parametresinin tahmincisi, $\hat{\beta}_j$ (k tane var):

$$\hat{\beta}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{ij} y_i}{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{ij}^2}, \qquad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

SEKK Parametre Tahmincileri: k Bağımsız Değişken

- x_j'nin eğim parametresinin tahmincisi $\hat{\beta}_j$ (k tane var):

$$\hat{\beta}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{ij} y_i}{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{ij}^2}, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

burada $\hat{r}_{ij}$, x_j'nin diğer tüm x'ler $(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_k)$ üzerine uygulanan regresyondan (1. yardımcı regresyon) elde edilen kalıntılardır.

1. Yardımcı Regresyon Tahmini

$$x_{ij} = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 x_{i1} + \hat{\alpha}_2 x_{i2} + \cdots + \hat{\alpha}_{j-1} x_{ij-1} + \hat{\alpha}_{j+1} x_{ij+1} + \cdots + \hat{\alpha}_k x_{ik} + \hat{r}_{ij} \quad \text{(İndeksli)}$$

- 1. yardımcı regresyondan elde edilen kalıntı $\hat{r}_j$, x_j içindeki diğer tüm x'lerin $(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_k)$ etkisi çıkarıldıktan sonraki x_j'yi ifade eder.
- Bu işlemdeki amaç, bağımsız değişken x'ler arasındaki çoklu doğrusal bağıntı nedeniyle bağımlı değişken y üzerinde oluşabilecek dolaylı etkiyi kaldırmaktır.

SEKK Parametre Tahmincileri: k Bağımsız Değişken

- Amacımız x_j'nin y'yi yalın/kısmi olarak ne kadar etkilediğini yani $\hat{\beta}_j$'yı bulmaktı.
- Öyleyse $\hat{\beta}_j$, y'nin $\hat{r}_j$ üzerine uygulanan regresyondan (2. yardımcı regresyon) elde edilen eğim parametresinin tahminidir.

2. Yardımcı Regresyon Tahmini

$$y_i = \hat{\delta}_0 + \hat{\beta}_j \hat{r}_{ij} + \hat{\epsilon}_i \qquad \text{(İndeksli)}$$

- $\hat{\epsilon}_i$ ve $\hat{\delta}_0$, sırasıyla 2. yardımcı regresyondaki kalıntıları ve kesim parametresi tahminini ifade eder. Bu değerler bizim ilgi alanımızda değildir.
- 2. yardımcı regresyon basit doğrusal regresyon olduğundan, daha önceden bildiğimiz eğim parametresi tahmicisinin formülünü kullanabiliriz.

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})y_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

SEKK Parametre Tahmincileri: k Bağımsız Değişken

- $\hat{r}_j$, 2. yardımcı regresyonda bağımsız değişken olarak görev yaptığı için formüldeki x'ler yerine konulabilir.

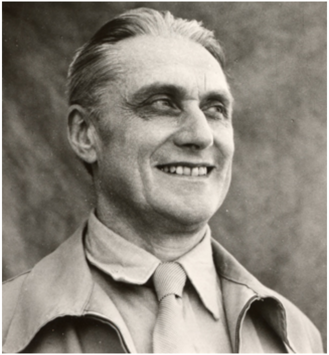
$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})y_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \longrightarrow \hat{\beta}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{r}_{ij} - \bar{\hat{r}}_j)y_i}{\sum_{i=1}^{n}(\hat{r}_{ij} - \bar{\hat{r}}_j)^2}$$

$$\hat{\beta}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{r}_{ij} - \overbrace{\bar{\hat{r}}_j}^{=0})y_i}{\sum_{i=1}^{n}(\hat{r}_{ij} - \underbrace{\bar{\hat{r}}_j}_{=0})^2} \longrightarrow \hat{\beta}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n}\hat{r}_{ij}y_i}{\sum_{i=1}^{n}\hat{r}_{ij}^2} \quad \text{(1. Yardımcı Regresyondan)}$$

- Kısacası $\hat{\beta}_j$, x_j içindeki diğer tüm x'lerin $(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_k)$ etkisi çıkarıldıktan sonraki x_j'nin bağımlı değişken y'yi etkileyen yalın/kısmi yani ceteris paribus etkisini ifade eder.

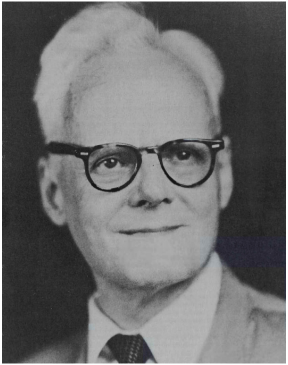
SEKK Parametre Tahmincileri: Frisch–Waugh Teoremi

- Önceki slaytlarda 2 bağımsız ve k bağımsız değişkenli ÇDR modellerinde $\hat{\beta}_j$'yi, yani x_j'nin bağımlı değişken y'yi etkileyen yalın/kısmi etkisini, hesaplamak için kullandığımız prosedür ekonometride **Frisch–Waugh Teoremi** olarak anılır.



Ragnar Frisch (1895-1973)

Kaynak: Wikipedia



Frederick V. Waugh (1898–1974)

Kaynak: AgEcon

Sıfır Koşullu Ortalama Varsayımı (ÇDR.5) Yorumu

2 Bağımsız Değişkenli Model

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u$$

- 2 bağımsız değişkenli modelde, u'nun x'lerle ilişkisiz olması varsayımını, yani ÇDR.5, şu şekilde formüle edebilirz.

$$E(u|x_1, x_2) = E(u|\mathbf{x}) = 0$$

- Yani x_1 ve x_2'nin anakütledeki tüm kombinasyonları için u'nun beklenen değeri sıfırdır.
- Örneğin, ücret modelinde (Slayt 8) ÇDR.5 varsayımı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$wage = \beta_0 + \beta_1 educ + \beta_2 exper + u \qquad \text{(Model)}$$

$$E(u|educ, exper) = 0 \qquad \text{(ÇDR.5)}$$

- Bu ücretleri etkileyen diğer faktörlerin (u) ortalama olarak $educ$ ve $exper$ ile ilişkisiz olduğu anlamına gelir.
- Örneğin, doğuştan gelen yetenek (ability) u'nun bir parçası ise, ortalama yetenek düzeyi, eğitim ve tecrübenin tüm kombinasyonlarında aynıdır (sabittir).

Sıfır Koşullu Ortalama Varsayımı (ÇDR.5) Yorumu

- Sınav başarı modelinde (Slayt 9), ÇDR.5 varsayımı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$avgscore = \beta_0 + \beta_1 expend + \beta_2 avginc + u \qquad \text{(Model)}$$

$$E(u|expend, avginc) = 0 \qquad \text{(ÇDR.5)}$$

- Yani, ortalama sınav sonucunu etkileyen diğer faktörler (okula ya da öğrenciye özgü vs.), ortalama olarak, $expend$ ve $avginc$ değişkenleriyle ilişkisizdir.
- Tüketim modelinde (Slayt 11), ÇDR.5 varsayımı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$cons = \beta_0 + \beta_1 inc + \beta_2 inc^2 + u \qquad \text{(Model)}$$

$$E(u|inc, inc^2) = E(u|inc) = 0 \qquad \text{(ÇDR.5)}$$

- Burada inc biliniyorken, inc^2 otomatik olarak bilineceğinden ayrıca koşullu beklenti içinde yazmaya gerek yoktur.

Regresyonun Yorumu: 2 Bağımsız Değişken

Model ve ÖRF

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \qquad \text{(Model)}$$

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 \qquad \text{(ÖRF)}$$

$$\Delta\hat{y} = \hat{\beta}_1 \Delta x_1 + \hat{\beta}_2 \Delta x_2 \qquad \text{(Değişim Cinsinden)}$$

- Eğim paramtresi tahmincisi $\hat{\beta}_1$, bağımsız değişken x_1'in y üzerindeki yalın/kısmi yani ceteris paribus etkisini verir.
- $\hat{\beta}_1$'nın yorumu: x_2 sabitken, yani $\Delta x_2 = 0$ iken

$$\Delta\hat{y} = \hat{\beta}_1 \Delta x_1$$

- x_2 sabitken, x_1'de meydana gelen 1 birimlik değişmenin y'de meydana getireceği ortalama değişim $\hat{\beta}_1$ kadardır.
  - Parametreleri yorumlarken fonksiyonel forma dikkat edilmelidir.
- Benzer şekilde $\hat{\beta}_2$'nın yorumu: x_1 sabitken, yani $\Delta x_1 = 0$ iken

$$\Delta\hat{y} = \hat{\beta}_2 \Delta x_2$$

Regresyonun Yorumu: k Bağımsız Değişken

Model ve ÖRF

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + u \qquad \text{(Model)}$$

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \cdots + \hat{\beta}_k x_k \qquad \text{(ÖRF)}$$

$$\Delta\hat{y} = \hat{\beta}_1 \Delta x_1 + \hat{\beta}_2 \Delta x_2 + \cdots + \hat{\beta}_k \Delta x_k \qquad \text{(Değişim Cinsinden)}$$

- Eğim paramtresi tahmincisi $\hat{\beta}_j$, bağımsız değişken x_j'nin y üzerindeki yalın/kısmi yani ceteris paribus etkisini verir.
- $\hat{\beta}_j$'nın yorumu: diğer tüm bağımsız değişkenler $(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_k)$ sabitken, yani $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \cdots = \Delta x_{j-1} = \Delta x_{j+1} = \cdots = \Delta x_k = 0$ iken

$$\Delta\hat{y} = \hat{\beta}_j \Delta x_j$$

- Diğer tüm bağımsız değişkenler $(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_k)$ sabitken, x_j'de meydana gelen 1 birimlik değişmenin y'de meydana getireceği ortalama değişim $\hat{\beta}_j$ kadardır.
  - Parametreleri yorumlarken fonksiyonel forma dikkat edilmelidir.

Örnek: Üniversite Başarı Modeli

Üniversite Başarı Modeli (ÇDR)

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 \qquad \text{(ÖRF)}$$

$$\widehat{colGPA} = 1.29 + 0.453\, hsGPA + 0.0094\, ACT \qquad \text{(ÖRF)}$$

$n = 141$ Öğrenci; $colGPA$: Üniversite genel not ortalaması (4 üzerinden); $hsGPA$: Lise not ortalaması; ACT: Genel yetenek sınav sonucu

- Kesim parametresi $\hat{\beta}_0 = 1.29$ olarak tahmin edilmiştir.
  - $hsGPA = 0$ ve $ACT = 0$ olduğunda modelce tahmin edilen üniversite genel not ortalaması $\widehat{colGPA}$'yı ifade eder. Ancak örneklemde $hsGPA$ ve ACT'si 0 olan öğrenci olmadığından yorumlanması anlamsızdır.
- ACT'yi sabit tutarak lise not ortalaması $hsGPA$'yı 1 puan arttırdığımızda üniversite genel not ortalaması $colGPA$ 0.453 puan artar.
- $hsGPA$'yı sabit tutarak genel yetenek sınav sonucu ACT'yi 1 puan arttırdığımızda üniversite genel not ortalaması $colGPA$ 0.0094 puan artar.

Örnek: Üniversite Başarı Modeli

- Sadece genel yetenek sınav sonucu ACT'yi kullanarak basit regresyon tahmin etseydik:

Üniversite Başarı Modeli (BDR)

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_2 x_2 \qquad \text{(ÖRF)}$$

$$\widehat{colGPA} = 2.4 + 0.0271\, ACT \qquad \text{(ÖRF)}$$

- ACT'nin paramatre tahmincisi $\hat{\beta}_2$ önceki çoklu regresyonda bulunandan 3 kat daha yüksek çıktı.
- Bu regresyon, bize lise not ortalaması ($hsGPA$) aynı olan iki öğrenciyi ortalama olarak karşılaştırma olanağı vermiyor fakat önceki regresyonda veriyordu.
- Lise not ortalaması $hsGPA$'yı kontrol ettiğimizde genel yetenek sınav sonucu ACT'nin üniversite genel not ortalaması $colGPA$ üzerindeki önemi/etkisi azalıyor.

Örnek: Logaritmik Ücret Modeli

Logaritmik Ücret Modeli

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \hat{\beta}_3 x_3 \qquad \text{(ÖRF)}$$

$$\widehat{\ln wage} = 0.284 + 0.092\, educ + 0.0041\, exper + 0.022\, tenure \qquad \text{(ÖRF)}$$

$n = 526$ Çalışan; $wage$: Saatlik ücret (dolar); $educ$: Eğitim düzeyi (yıl); $exper$: Tecrübe düzeyi (yıl); $tenure$: Kıdem (yıl)

- Bağımlı değişken logaritmik ve bağımsız değişkenler düzey (log-düzey) olarak modelde yer aldığından paramtere tahmincileri 100 ile çarpılarak % olarak ceteris paribus yorumlanmalıdır.
- Örneğin, $exper$ ve $tenure$ sabit tutulduğunda $educ$ bir yıl arttırılırsa $wage$ ortalama olarak %9.2 (%0.092 $\times$ 100) artar.
- Başka bir ifadeyle, $exper$ ve $tenure$ düzeyleri aynı olan iki çalışandan birinin $educ$ düzeyi diğerinden bir yıl fazlaysa, bu iki çalışan için tahmin edilen ücret farkı ortalama olarak %9.2'dir.
- Burada somut iki işçiden değil ortalama durumdan bahsedilmektedir.

Diğer Değişkenleri Sabit Tutmanın Anlamı

- ÇDR'de parametre tahmincilerini ceteris paribus koşulu altında bağımsız değişkenlerin y üzerindeki yalın/kısmi etkileri olarak yorumluyoruz.
- Örneğin, logaritmik ücret modelinde (Slayt 48) $\hat{\beta}_1 = 0.092$ olması, $exper$ ve $tenure$ düzeyleri aynı olan iki çalışandan birinin $educ$ düzeyi 1 yıl fazla olanın ortalama olarak %9.2 daha yüksek ücret alacağı şeklinde yorumlanmıştı.
- Bu yorum, verinin bu şekilde toplandığı anlamına gelmez, yani $exper$ ve $tenure$ düzeyleri aynı olan işçiler özellikle seçilip veri toplanmamıştır.
  - Veri rassal seçilmiş 526 çalışana ait $wage$, $educ$, $exper$ ve $tenure$ bilgilerinden oluşuyor.
  - $exper$ ve $tenure$ düzeyi aynı olan çalışanları ayrıca gruplandırmıyoruz.
- Aslında elimizde $exper$ ve $tenure$ düzeyleri aynı olan çalışanlardan oluşan bir örneklem olsaydı, $exper$ ve $tenure$ bağımsız değişkenlerini modele koymaya gerek kalmazdı.
  - Fakat, bu durum uygulamada çoğunlukla mümkün değildir.
  - Ayrıca ÇDR analizinde yalın/kısmi yani ceteris paribus etki hesaplandığından zaten yukarıdaki gibi bir duruma gerek yoktur.

Birden Fazla Bağımsız Değişkeni Aynı Anda Değiştirmek

- Bazen bağımsız değişken x'lerden birkaçını aynı anda değiştirerek y'de meydana gelen ortalama değişimi ölçmek isteriz.
- Bazı durumlarda ise bağımsız değişken x'lerden biri değiştirildiğinde diğeri de otomatik olarak değişir.
- Örneğin, logaritmik ücret modelinde (Slayt 48) $tenure$ 1 yıl arttırıldığında $exper$ de otomatik olarak 1 yıl artar.

$$
\begin{aligned}
\Delta\widehat{\ln wage} &= 0.284\Delta educ + 0.0041\Delta exper + 0.022\Delta tenure \qquad \text{(Değişim Cins.)} \\
&= 0.0041 \times 0 + 0.0041 \times 1 + 0.0022 \times 1 \\
&= 0.0261
\end{aligned}
$$

- Burada 0.0261, $educ$ sabit tutulduğunda $tenure$ ve $exper$ 1 yıl arttırılırsa $\ln wage$'de meydana gelen ortalama etkiyi belirtir.
  - Model log-düzey formunda olduğundan bulunan bu değer 100 ile çarpılarak % olarak ceteris paribus yorumlanmalıdır.
  - Yani, $educ$ sabit tutulduğunda $tenure$ ve $exper$ 1 yıl arttırılırsa $wage$ ortalama olarak %2.61 (%0.0261 × 100) artar.

Tahmin Edilen Değerler ve Kalıntılar

i'inci Gözlem İçin Tahmin Edilen $\hat{y}_i$ Değeri

$$\underbrace{\hat{y}_i}_{\text{Tahmin Edilen Değer}} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} + \cdots + \hat{\beta}_k x_{ik} \qquad \text{(ÖRF)}$$

- x_{ij} değerlerini tahmin edilen regresyonda (ÖRF'de) yerine koyarsak tahmin edilen bağımsız değişken değerlerini yani $\hat{y}_i$'yi elde ederiz.

Kalıntılar (Artıklar)

$$\underbrace{\hat{u}_i}_{\text{Kalıntı (Artık)}} = \underbrace{y_i}_{\text{Gözlenen Değer}} - \underbrace{\hat{y}_i}_{\text{Tahmin Edilen Değer}}$$

- Gözlenen y_i değerleriyle tahmin edilen değerler $\hat{y}_i$ arasındaki fark kalıntıları $\hat{u}_i$ verir.
- $\hat{u}_i > 0$ ise $y_i > \hat{y}_i$, eksik tahmin yapılmıştır.
- $\hat{u}_i < 0$ ise $y_i < \hat{y}_i$, fazla tahmin yapılmıştır.

Tahmin Edilen Değerler ve Kalıntıların Cebirsel Özellikleri

1. SEKK kalıntılarının toplamı ve dolayısıyla da örneklem ortalaması sıfıra eşittir.

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i = 0 \quad \text{ve} \quad \bar{\hat{u}} = 0$$

- Bu durum SEKK birinci sıra koşullarından ilkinin (aynı zamanda örneklem moment koşullarından ilkinin) bir sonucudur. Bakınız Slayt 31.
- Anakütledeki hata terimleri u'nun örneklemdeki analoğu kalıntılar $\hat{u}$ olarak yorumlanabilir fakat kesinlikle aynı şeyler değildir.

$$\underbrace{u}_{\text{Anakütle}} \longrightarrow \underbrace{\hat{u}}_{\text{Örneklem}}$$

$$\underbrace{E(u) = 0}_{\text{Anakütle}} \longrightarrow \underbrace{E(\hat{u}) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i = 0 \quad \text{ve} \quad \bar{\hat{u}} = 0}_{\text{Örneklem}}$$

Tahmin Edilen Değerler ve Kalıntıların Cebirsel Özellikleri

2. Bağımsız değişken x_j ile kalıntı terimleri $\hat{u}$ arasındaki örneklem kovaryansı ve korelasyon katsayısı sıfırdır.

$$Cov(x_j, \hat{u}) = 0 \quad \text{ve} \quad Corr(x_j, \hat{u}) = 0, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

- Bu durum diğer SEKK birinci sıra koşullarının (k tane) ve ayrıca diğer örneklem moment koşullarının (k tane) bir sonucudur. Bakınız Slayt 31.
- Bağımsız değişken x_j'lerle kalıntı $\hat{u}$'ların lineer olarak ilişkisizliği çıkarılabilir.

$$Cov(x_j, u) = 0 \quad \text{ve} \quad Corr(x_j, u) = 0 \quad \longrightarrow \quad E(x_j u) = 0 \qquad \text{(Anakütle)}$$

$$Cov(x_j, \hat{u}) = 0 \quad \text{ve} \quad Corr(x_j, \hat{u}) = 0 \quad \longrightarrow \quad E(x_j \hat{u}) = 0 \qquad \text{(Örneklem)}$$

$$\underbrace{E(x_j u) = 0}_{\text{Anakütle}} \quad \longrightarrow \quad \underbrace{E(x_j \hat{u}) = 0 \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \hat{u}_i = 0}_{\text{Örneklem}}$$

Ek Bilgi

Tahmin Edilen Değerler ve Kalıntıların Cebirsel Özellikleri

3. 1. ve 2. cebirsel özelliklerin bir sonucu olarak tahmin edilen değerler $\hat{y}$ ile kalıntı terimleri $\hat{u}$ arasındaki örneklem kovaryansı ve korelasyon katsayısı sıfırdır.

$$Cov(\hat{y}, \hat{u}) = 0 \quad \text{ve} \quad Corr(\hat{y}, \hat{u}) = 0$$

- Bu özellikten tahmin edilen değerler $\hat{y}$ ile kalıntı terimleri $\hat{u}$'ların lineer olarak ilişkisizliği çıkarılabilir.

$$\underbrace{Cov(\hat{y}, \hat{u}) = 0 \quad \text{ve} \quad Corr(\hat{y}, \hat{u}) = 0}_{\text{Örneklem}} \longrightarrow \underbrace{E(\hat{y}\hat{u}) = 0 \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i \hat{u}_i = 0}_{\text{Örneklem}}$$

Ek Bilgi

Tahmin Edilen Değerler ve Kalıntıların Cebirsel Özellikleri

4. Tahmin edilen $\hat{y}_i$ değerlerinin ortalaması gözlenen y_i değerlerinin ortalamasına eşittir.

$$y_i = \hat{y}_i + \hat{u}_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i}_{=0} \qquad \text{(1. Cebirsel Özellik)}$$

$$n\bar{\hat{y}} = n\bar{y}$$

$$\bar{\hat{y}} = \bar{y}$$

5. $(\bar{x}_j, \bar{y} : j = 1, 2, \ldots, k)$ noktası daima ÖRF'den geçer (üzerine düşer).

$$(\bar{x}_j, \bar{y} : j = 1, 2, \ldots, k) \quad \longrightarrow \quad \bar{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1\bar{x}_1 + \hat{\beta}_2\bar{x}_2 + \cdots + \hat{\beta}_k\bar{x}_k + u$$

BDR ve ÇDR Tahminlerinin Karşılaştırılması

Basit vs. Çoklu Doğrusal Regresyon (2 Bağımsız Değişkenli) Tahmini

$$y = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x_1 + \tilde{u} \quad \text{vs.} \quad y = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \hat{u} \qquad \text{(Tahmin)}$$

- Yukarıda verilen regresyonlar arasındaki temel fark, soldaki regresyonda (BDR'de) bağımsız değişken x_2'nin modele dahil edilmemesidir.
- $\tilde{\beta}_1$ ve $\hat{\beta}_1$ arasındaki ilişki şu şekildedir: $\tilde{\beta}_1 = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \tilde{\delta}_1$
- $\tilde{\delta}_1$, x_2'nin x_1 üzerine uygulanan regresyondaki eğim parametresi tahminidir.
- Yukarıdaki regresyonlar genelde farklı sonuçlar verir.
- Ancak şu iki durumda eğim parametresi tahminleri $\tilde{\beta}_1$ ve $\hat{\beta}_1$ aynı olur.
    - x_2'nin y üzerindeki yalın/kısmi etkisi sıfırdır, yani $\hat{\beta}_2 = 0$'dır.
    - Örneklemde x_1 ve x_2 lineer (doğrusal) olarak ilişkisizdir, yani $\tilde{\delta}_1 = 0$'dır.

BDR ve ÇDR Tahminlerinin Karşılaştırılması

BDR Bilgileri - Tahmin

$$y = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x_1 + \tilde{u} \quad \longrightarrow \quad \tilde{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1} - \bar{x}_1)y_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1} - \bar{x}_1)^2}$$

ÇDR (2 Bağımsız Değişkenli) Bilgileri - Tahmin

$$y = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \hat{u} \quad \longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} x_{i1}\hat{u}_i = 0 \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i = 0 \qquad \text{(Ana Model)}$$

$$x_2 = \tilde{\delta}_0 + \tilde{\delta}_1 x_1 + \tilde{r}_2 \quad \longrightarrow \quad \tilde{\delta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1} - \bar{x}_1)x_{i2}}{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1} - \bar{x}_1)^2} \qquad \text{(Yardımcı Model)}$$

BDR ve ÇDR Tahminlerinin Karşılaştırılması

- Şimdi BDR'deki eğim parametresi tahmincisi $\tilde{\beta}_1$'nın verilen formülünü
  - ÇDR modelini
  - ÇDR modelinden elde ettiğimiz cebirsel özellikleri
  - Yardımcı modeldeki eğim parametresi tahmincisi $\tilde{\delta}_1$'nın verilen formülünü

  kullanarak değiştirelim ve $\tilde{\beta}_1$ ve $\hat{\beta}_1$ arasındaki ilişkiyi bulalım.

$$\tilde{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)y_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)(\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1x_{i1}+\hat{\beta}_2x_{i2}+\hat{u}_i)}{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)^2}$$

$$= \frac{\hat{\beta}_0\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)}{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)^2} + \frac{\hat{\beta}_1\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)x_{i1}}{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)^2} + \frac{\hat{\beta}_2\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)x_{i2}}{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)\hat{u}_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)^2}$$

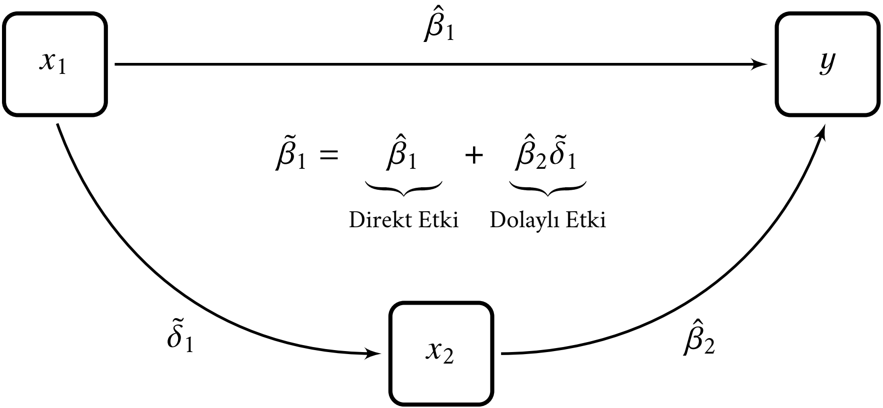
BDR ve ÇDR Tahminlerinin Karşılaştırılması

$$\tilde{\beta}_1 = \frac{\hat{\beta}_0 \overbrace{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)}^{=0}}{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)^2} + \frac{\hat{\beta}_1 \overbrace{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)x_{i1}}^{=\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)^2}}{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)^2} + \frac{\hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)x_{i2}}{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)\hat{u}_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)^2}$$

$$= \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)x_{i2}}{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)^2}}_{\tilde{\delta}_1} + \frac{\overbrace{\sum_{i=1}^{n} x_{i1}\hat{u}_i}^{=0} - \bar{x}_1 \overbrace{\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i}^{=0}}{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)^2}$$

$$\tilde{\beta}_1 = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2\tilde{\delta}_1$$

BDR ve ÇDR Tahminlerinin Karşılaştırılması



Şekil 1: x_1'in y Üzerindeki Direkt ve Dolaylı Etkisi

$k-1$ vs. k Değişkenli ÇDR Tahminlerinin Karşılaştırılması

$k-1$ vs. k Değişkenli Çoklu Doğrusal Regresyon Tahmini

$$y = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x_1 + \tilde{\beta}_2 x_2 + \cdots + \tilde{\beta}_{k-1} x_{k-1} + \tilde{u}$$

vs.

$$y = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \cdots + \hat{\beta}_{k-1} x_{k-1} + \hat{\beta}_k x_k + \hat{u} \qquad \text{(Tahmin)}$$

- Yukarıda verilen regresyonlar arasındaki temel fark, soldaki regresyonda bağımsız değişken x_k'nin modele dahil edilmemesidir.
- $\tilde{\beta}_j$ ve $\hat{\beta}_j$ arasındaki ilişki şu şekildedir: $\tilde{\beta}_j = \hat{\beta}_j + \hat{\beta}_k \tilde{\delta}_j$
- $\tilde{\delta}_j$, x_k'nın x_j üzerine uygulanan regresyondaki eğim parametresi tahminidir.
- Yukarıdaki regresyonlar genelde farklı sonuçlar verir.
- Ancak şu iki durumda eğim parametresi tahminleri $\tilde{\beta}_j$ ve $\hat{\beta}_j$ aynı olur.
  - x_k'nin y üzerindeki yalın/kısmi etkisi sıfırdır, yani $\hat{\beta}_k = 0$'dır.
  - Örneklemde x_j ve x_k lineer (doğrusal) olarak ilişkisizdir, yani $\tilde{\delta}_j = 0$'dır.

Karaler Toplamları (Sum of Squares)

- Her bir i gözlemi için gözlenen değer, tahmin edilen değer ve kalıntı arasındaki ilişki aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$y_i = \hat{y}_i + \hat{u}_i$$

- Her iki tarafın örneklem ortalamalarından sapmalarının karesini alıp toplarsak

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{n}\left[(\hat{y}_i - \bar{\hat{y}}) + (\hat{u}_i - \bar{\hat{u}})\right]^2$$

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{n}\left[(\hat{y}_i - \bar{y}) + \hat{u}_i\right]^2 \qquad \text{(1. ve 4. Cebirsel Öz.)}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2 + 2\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i\hat{y}_i}_{=0} - 2\bar{y}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i}_{=0} \qquad \text{(3. Cebirsel Öz.)}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2$$

Karaler Toplamları (Sum of Squares)

- Toplam Kareler Toplamı: SST (Total Sum of Squares) y'deki toplam değişkenliği verir.

$$SST = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$$

$Var(y) = SST/(n-1)$ olduğuna dikkat edin.

- Açıklanan Kareler Toplamı: SSE (Explained Sum of Squares) modelce açıklanan kısımdaki, yani $\hat{y}$, değişkenliği verir.

$$SSE = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y})^2$$

- Kalıntı Kareleri Toplamı: SSR (Residual Sum of Squares) kalıntılardaki, yani $\hat{u}$, değişkenliği verir.

$$SSR = \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2$$

Karaler Toplamları (Sum of Squares)

- y'deki toplam değişkenlik aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$SST = SSE + SSR$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}_{\text{SST}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2}_{\text{SSE}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2}_{\text{SSR}}$$

Uyum İyiliği (Goodness-of-fit)

- y'deki toplam değişkenlik denkleminin her iki tarafını SST'ye bölersek

$$SST = SSE + SSR$$

$$1 = \frac{SSE}{SST} + \frac{SSR}{SST}$$

- Açıklanan kısmın değişkenliğinin toplam değişkenlik içindeki payı regresyonun determinasyon (belirlilik) katsayısıdır ve R^2 ile gösterilir.

$$R^2 = \frac{SSE}{SST} = 1 - \frac{SSR}{SST}$$

- SSE hiçbir zaman SST'den büyük olamayacağı için $0 \leq R^2 \leq 1$
- R^2, y'deki değişkenliğin x tarafından açıklanan kısmının yüzdesini verir. Regresyonun açıklama gücü yükseldikçe R^2, 1'e yaklaşır.
- R^2 modelin açıklama gücünü (ne kadar iyi fit edildiğini) belirttiği için bazen Uyum İyiliği olarak da adlandırılır.
- R^2 şu şekilde de hesaplanabilir: $R^2 = Corr(y, \hat{y})^2$

Uyum İyiliği (Goodness-of-fit)

- Determinasyon katsayısı

$$R^2 = \frac{SSE}{SST} = 1 - \frac{SSR}{SST}$$

- Regresyona yeni bir bağımsız değişken x eklendiğinde R^2 her zaman artar (ya da çok nadir aynı kalır). Ya da başka bir deyişle SSE'nin her zaman artmasıdır.
- Örneğin daha önce verilen ÇDR Ücret Modeli'ne (Slayt 8) modelle alakasız bir değişken eklendiğinde dahi R^2 artacaktır.
    - Modele SSN adlı kişinin sosyal güvenlik numarasının son hanesini belirten yeni bir değişken ekledیğimizi düşünelim.
    - Emek ekonomisine göre kişinin alacağı ücretin, SSN ile hiçbir ilişkisi yoktur.
    - Fakat SSN'nin modele eklenmesi matematiksel olarak R^2 değerini arttıracaktır.
- Bu nedenle yeni bir değişkenin modele olan katkısının belirlenmesinde ve ÇDR modellerinde modelin açıklama gücünün belirlenmesinde R^2 iyi bir ölçüt değildir.
- Bu sebeple ÇDR modellerinde düzeltilmiş R^2 yani $\bar{R}^2$ kullanılır.
- $\bar{R}^2$ detaylı olarak daha sonra incelenecektir. O zamana kadar modelin açıklama gücünü belirlemede R^2 değerini kullanacağız.

Uyum İyiliği (Goodness-of-fit): Örnek

Üniversite Başarı Modeli (ÇDR)

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 \qquad \text{(ÖRF)}$$

$$\widehat{colGPA} = 1.29 + 0.453\, hsGPA + 0.0094\, ACT \qquad \text{(ÖRF)}$$

$$n = 141, \quad R^2 = 0.176$$

- Determinasyon katsayısı 0.176 olarak tahmin edilmiştir.
- Üniversite genel not ortalaması $colGPA$'daki değişkenliğin yaklaşık %17.6'sı $hsGPA$ ve ACT değişkenleriyle açıklanabilmektedir.
- Dışarıda bırakılan birçok faktör olduğundan üniversite genel not ortalaması $colGPA$'nın küçük bir kısmı açıklanabilmiştir.
- Üniversite genel not ortalaması $colGPA$'yı etkileyen bu modelde yer almayan başka birçok değişken olduğu unutulmamalıdır.

SEKK Parametre Tahmincilerinin Varyansı

ÇDR.7: Sabit Varyans (Homoscedasticity)

u hata teriminin bağımsız değişken x'lere göre koşullu varyansı sabittir.

$$Var(u|x_1, x_2, \ldots, x_k) = \sigma^2$$

$$Var(u|\mathbf{x}) = \sigma^2$$

$$Var(u) = \sigma^2 \qquad (u \text{ ve } x\text{'ler bağımsız olduğundan})$$

- Bu varsayımın sağlanmadığı duruma değişen varyans (heteroscedasticity) denir.
- Bu varsayım SEKK parametre tahmincilerinin varyanslarının ve standart hatalarının türetilmesinde ve etkinlik özelliklerinin belirlenmesinde kullanılır.
- Sapmasızlık için sabit varyans varsayımına ihtiyaç yoktur.
- Örneğin, ücret modelinde (Slayt 8) bu varsayım, model dışında bırakılan faktörler u'nun değişkenliğinin modele dahil edilen tüm bağımsız değişkenlere ($educ$ ve $exper$) bağlı olmadığını söylemektedir.

SEKK Parametre Tahmincilerinin Varyansı

Teorem: $\hat{\beta}_j$'ların Varyansları

Gauss–Markov varsayımları (ÇDR.1 - ÇDR.7) altında

$$Var(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma^2}{SST_j(1-R_j^2)}, \quad SST_j = \sum_{i=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x}_j)^2, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

Ek Bilgi

- σ^2 gözlenemeyen hata terimi u'nun varyansıdır. Bu nedenle σ^2 hata varyansı, σ ise regresyonun standart sapması olarak adlandırılır.
- SST_j, x_j'deki örneklem değişkenliğini ifade eder.
- R_j^2 ise x_j'nin diğer tüm x değişkenlerine regresyonundan (kesim parametresi içeren) elde edilen belirlilik katsayısıdır.
- $Var(\hat{\beta}_j)$, σ^2 ile aynı yönde ilişkilidir. σ^2'yi düşürmenin tek yolu güçlü bağımsız değişkenleri modele eklemektir.
- $Var(\hat{\beta}_j)$, SST_j ile ters yönde ilişkilidir. SST_j'yi arttırmanın tek yolu gözlem sayısını arttırmaktır.

SEKK Parametre Tahmincilerinin Varyansı

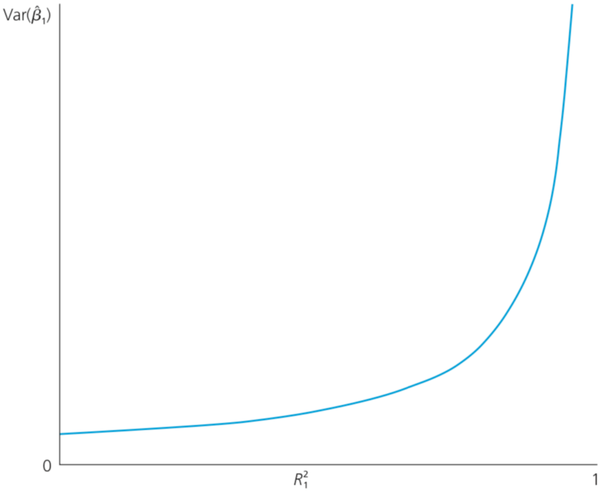
Teorem: $\hat{\beta}_j$'ların Varyansları

Gauss–Markov varsayımları (ÇDR.1 - ÇDR.7) altında

$$Var(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma^2}{SST_j(1 - R_j^2)}, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

- $Var(\hat{\beta}_j)$, diğer tüm bağımsız değişken x'lerin x_j ile korelasyon düzeyini belirten R_j^2 terimine de bağlıdır.
  - R_j^2 arttıkça $Var(\hat{\beta}_j)$ sınırsız artar. Bakınız Şekil 2.
  - Limitte $R_j^2 = 1$ olduğunda varyans sonsuz olur (ayrıca $\hat{\beta}_j$ belirsiz olur). Ancak tam çoklu doğrusal bağıntının olmaması varsayımı (ÇDR.4) bu durumu engeller.
- Kısacası, bağımsız değişken x'lerin birbirleriyle doğrusal ilişki düzeyi (çoklu doğrusal bağıntının gücü) arttıkça SEKK parametre tahmincilerinin varyansı artar.
- Bu nedenle istenmeyen durum tam çoklu doğrusal bağıntı iken dikkat edilmesi durum ise çoklu doğrusal bağıntı gücünün yüksek olmasıdır.

SEKK Parametre Tahmincilerinin Varyansı



Kaynak: Wooldridge (2016)

Şekil 2: Varyans ve R_j^2 İlişkisi

SEKK Parametre Tahmincilerinin Varyansı

Teorem: $\hat{\beta}_j$'ların Varyansları

Gauss–Markov varsayımları (ÇDR.1 - ÇDR.7) altında

$$Var(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma^2}{SST_j(1-R_j^2)}, \quad SST_j = \sum_{i=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x}_j)^2, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$$

- ÇDR için verilen yukarıdaki $Var(\hat{\beta}_j)$ formülü aynı zamanda tek bağımsız değişken içeren modeldeki (BDR) parametre tahmincilerinin varyans formülünün çıkartılmasında kullanılabilir.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + u \qquad \text{(Model)}$$

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 \qquad \text{(ÖRF)}$$

$$x_1 = \hat{\alpha}_0 + \hat{r}_1, \quad R_1^2 = 0 \qquad \text{(1. Yardımcı Regresyon Tahmini)}$$

$$Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{SST_1(1-R_1^2)} = \frac{\sigma^2}{SST_1} \longrightarrow Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{SST_x} = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

SEKK Parametre Tahmincilerinin Varyansı

Teorem: $\hat{\beta}_j$'ların Varyansları

Gauss–Markov varsayımları (ÇDR.1 - ÇDR.7) altında

$$Var(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma^2}{SST_j(1 - R_j^2)}, \quad SST_j = \sum_{i=1}^{n}(x_{ij} - \bar{x}_j)^2, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

- Hata terimi u gözlenemediği için hata varyansı σ^2 bilinmez.
- Bu nedenle, SEKK parametre tahmincilerinin varyansı $Var(\hat{\beta}_j)$'ların tahmini için öncelikle hata varyansı σ^2'nin tahmin edilmesi gerekir.
- Buradaki önemli nokta, $Var(\hat{\beta}_j)$'ların sapmasız tahmin edilmesi gereklidir. Bu nedenle, σ^2'nin de aynı şekilde sapmasız tahmin edilmesi gerekir.

SEKK Parametre Tahmincilerinin Varyansı

Hata Varyansı σ^2

ÇDR.5 varsayımı altında hata varyansı σ^2 aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$Var(u) = \sigma^2 = E(u^2) - \underbrace{E(u)^2}_{=0\ (\text{ÇDR.5})} \qquad \text{(Varyans Formülü)}$$

$$\sigma^2 = E(u^2)$$

- σ^2'nin sapmasız tahmincisi hata terimi u'nun örneklem ortalaması $n^{-1}\sum_{i=1}^{n} u_i^2$'dır.
- Fakat, hata terimi u gözlenemediği için σ^2'nin tahmininde hata terimi u'nun yerine onun örneklem analoğu olan kalıntı $\hat{u}$ kullanılır. $n^{-1}\sum_{i=1}^{n} u_i^2 \longrightarrow n^{-1}\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2$
- Fakat $n^{-1}\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2$ sapmalı bir tahmincidir. Bu nedenle, σ^2'nin sapmasız tahmincisini hesaplamak için BDR'de yaptığımız gibi bu değerin serbestlik derecesi kullanılarak düzeltilmesi gerekir.

SEKK Parametre Tahmincilerinin Varyansı

Teorem: Hata Varyansı σ^2'nin Sapmasız Tahmini

Gauss–Markov varsayımları (ÇDR.1 - ÇDR.7) altında hata varyansı σ^2'nin sapmasız bir tahmincisi:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2}{n-k-1} = \frac{SSR}{n-k-1}$$

- Serbestik derecesi (bağımsız bilgi sayısı) $\longrightarrow s.d. = n - (k+1)$
    - Serbestlik derecesi SEKK birinci sıra koşullarından ($k+1$ tane) gelmektedir. Bu koşullar kalıntı $\hat{u}$'nın üzerine $k+1$ tane kısıt koyar.
    - n tane kalıntıdan $n-(k+1)$ tanesi biliniyorsa geriye kalan $k+1$ kalıntı otomatik olarak bilinecektir. Bu nedenle kalıntıların serbestlik derecesi $n-k-1$'dir.
- $\hat{\sigma}$ regresyonun standart sapması σ'nın bir tahmincisidir ve regresyonun standart hatası ya da ortalama karesel hata olarak adlandırılır.
- Regresyona yeni bir bağımsız değişken eklendiğinde $\hat{\sigma}$ azalabilir ya da artabilir.
    - Modele yeni bir bağımsız değişken eklendiğinde SSR düşecektir fakat aynı zamanda serbestklik dereceside 1 düşecektir. SSR payda, serbestlik derecesi ise paydada olduğundan hangi değişimin daha fazla etkiye sahip olduğunu kestiremeyiz.

SEKK Parametre Tahmincilerinin Varyansı

- $\hat{\sigma}^2$ tahmin edildikten sonra $Var(\hat{\beta}_j)$'nın formülünde yerine koyulup $Var(\hat{\beta}_j)$'nın sapmsız bir tahmincisi hesaplanabilir.

$\hat{\beta}_j$'ların Varyans Tahminleri

$$Var(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma^2}{SST_j(1-R_j^2)} \quad \longrightarrow \quad \widehat{Var(\hat{\beta}_j)} = \frac{\hat{\sigma}^2}{SST_j(1-R_j^2)}, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

- Genelde, $Var(\hat{\beta}_j)$ ve $\widehat{Var(\hat{\beta}_j)}$ arasındaki ayrım yazımda net olarak gösterilmez.
  - $\hat{\beta}_j$'ların varyans tahmini denildiğinde $\widehat{Var(\hat{\beta}_j)}$ kastedilmesine rağmen yazıdaki gösterimde genelde $Var(\hat{\beta}_j)$ kullanılır.
  - Bu derste aynı yolu izleyip $\hat{\beta}_j$'ların varyans tahminini $Var(\hat{\beta}_j)$ ile göstereceğiz.

$$Var(\hat{\beta}_j) = \frac{\hat{\sigma}^2}{SST_j(1-R_j^2)}, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

SEKK Parametre Tahmincilerinin Varyansı

$\hat{\beta}_j$'ların Standart Sapmaları (sd)

$$sd(\hat{\beta}_j) = \sqrt{Var(\hat{\beta}_j)} \quad \longrightarrow \quad sd(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma}{\sqrt{SST_j(1-R_j^2)}}, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

$\hat{\beta}_j$'ların Standart Hataları (se)

$$se(\hat{\beta}_j) = \sqrt{\widehat{Var(\hat{\beta}_j)}} \quad \longrightarrow \quad se(\hat{\beta}_j) = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{SST_j(1-R_j^2)}}, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

- $se(\hat{\beta}_j)$ güven aralıklarının hesaplanmasında ve hipotez testlerinde kullanılır.
  - $se(\hat{\beta}_j)$ direkt olarak $\hat{\sigma}$'ya bağlı olduğundan aynen SEKK parametre tahmincileri $\hat{\beta}_j$'lar gibi $se(\hat{\beta}_j)$'nın da örneklem dağılımı vardır ve örneklemden örnekleme değişir.
  - $se(\hat{\beta}_j)$, ÇDR.7 (sabit varyans) varsayımına dayanan $Var(\hat{\beta}_j)$ formülünden türetildiği için ÇDR.7 varyasımının sağlanmaması durumunda, yani değişen varyans varsa, $Var(\hat{\beta}_j)$ ve $se(\hat{\beta}_j)$ tahminleri sapmalı olur.
  - Değişen varyans durumunda SEKK parametre tahmincilerinin varyansları geçersizdir ve bu nedenle düzeltilmeleri gerekir.

SEKK Parametre Tahmincilerinin Sapmasızlığı

Teorem: SEKK Parametre Tahmincilerinin Sapmasızlığı

ÇDR.1 - ÇDR.5 varsayımları altında SEKK parametre tahmincileri sapmasızdır.

$$E(\hat{\beta}_0) = \beta_0$$

$$E(\hat{\beta}_j) = \beta_j, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

Ek Bilgi

- Sapmasızlık SEKK parametre tahmincilerinin örneklem dağılımlarının ortalamasının (beklenen değerinin) bilinmeyen anakütle parametrelerine eşit olduğunu söyler.
- İlerleyen slaytlarda sapmasızlık için gerekli olan varsayımların bazıları hakkındaki detaylar verilmiştir.

SEKK Tahmincilerinin Sapmasızlığı İçin Gerekli Varsayımlar

ÇDR.1: Gözlem Sayısı

Gözlem sayısı n tahmin edilecek anakütle parametre sayısından büyük ya da en azından eşit olmalıdır.

$$n \geq k + 1$$

ÇDR.2: Parametrelerde Doğrusallık

Model parametrelerde doğrusaldır.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + u \text{ ✔}$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \text{ ✔}$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_1^2 + u \text{ ✔}$$

$$y = \beta_0 + \beta_1^2 x_1 + \beta_2 x_2 + u \text{ ✘}$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \sqrt{\beta_2} x_2 + u \text{ ✘}$$

SEKK Tahmincilerinin Sapmasızlığı İçin Gerekli Varsayımlar

Doğrusal Parametre Tahmincileri

$\hat{\beta}_j$ parametre tahmincisi aşağıdaki gibi yazılabiliyorsa doğrusaldır.

$$\hat{\beta}_j = \sum_{i=1}^{n} w_{ij} y_i, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

- Burada w_{ij} tüm bağımsız değişken x'lerin bir fonksiyonudur.
- SEKK parametre tahmincileri aşağıdaki gibi yazılabildiğinden doğrusaldır:

$$\hat{\beta}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{ij} y_i}{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{ij}^2} = \sum_{i=1}^{n} w_{ij} y_i, \quad \text{burada} \quad w_{ij} = \frac{\hat{r}_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{ij}^2}$$

- $\hat{r}_{ij}$, x_j'nin tüm diğer bağımsız değişkenler üzerine regresyonundan elde edilen kalıntı terimidir.

SEKK Tahmincilerinin Sapmasızlığı İçin Gerekli Varsayımlar

ÇDR.3: Rassallık

Tahminde kullanılan n tane gözlem ilgili anakütleden rassal örnekleme yoluyla seçilmiştir. Yani gözlemler stokhastiktir (rassal), deterministik (kesin) değil.

$$\{(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik}, y_i) : i = 1, 2, \ldots, n\}$$

ÇDR.4: Tam Çoklu Doğrusal Bağıntının Olmaması

Örneklemde (ve bu nedenle anakütlede) bağımsız değişkenlerin hiçbiri kendi içinde sabit değildir (yeterli değişenlik vardır) ve bağımsız değişkenler arasında tam çoklu doğrusal bağıntı (TÇDB) yoktur.

$$\sum_{i=1}^{n} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2 > 0, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \quad \longrightarrow \quad x_2 = 2x_1 \quad \text{TÇDB VAR ✘}$$

$$\longrightarrow \quad x_2 = x_1^2 \quad \text{TÇDB YOK ✔}$$

SEKK Tahmincilerinin Sapmasızlığı İçin Gerekli Varsayımlar

ÇDR.4: Tam Çoklu Doğrusal Bağıntının Olmaması

Bu varsayım bağımsız değişken x'ler arasında tam doğrusal bir ilişkinin olmaması gerektiğini söyler. Herhangi bir x diğer x'lerin lineer bir kombinasyonu olarak yazılamaz. Yani x'ler arasındaki korelasyon katsayısı 1 olamaz.

- ÇDR.4 varsayımı bağımsız değişken x'lerin arasındaki non-lineer ilişki hakkında hiçbir kısıtlamada bulunmaz.
- ÇDR.4 varsayımı bağımsız değişken x'lerin doğrusal ilişkili olmasına izin verir. Fakat izin verilmeyen tek durum tam doğrusal ilişkinin olmamasıdır.
- x'ler tam ilişkili olursa SEKK parametre tahmincilerinin hesaplanması matematiksel olarak mümkün olmaz (parametre tahmincileri belirsiz olur).
- Bu varsayıma göre bağımsız değişkenler doğrusal ilişkili olabilirler. Zaten, x'ler arasında doğrusal ilişkiye (1'den düşük korelasyona) izin vermezsek ÇDR'den istediğimiz faydayı alamayız.
- Örneğin, sınav başarı modelinde (Slayt 9) ortalama aile geliri $avginc$ ve öğrencinin eğitim harcaması $expend$ arasında ilişki olduğunu bilerek bu değişkenleri modele sokuyoruz. Amaç ortalama aile geliri $avginc$'i kontrol etmektir.

SEKK Tahmincilerinin Sapmasızlığı İçin Gerekli Varsayımlar

ÇDR.5: Sıfır Koşullu Ortalama

$$E(u|\mathbf{x}) = E(u) = 0$$

$$Cov(x_j, u) = 0, \quad Corr(x_j, u) = 0 \quad \text{ve} \quad E(x_j u) = 0, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

Sonuç: u ve x_j bağımsızdır. Yani u ve x_j hem lineer hem de non-lineer olarak ilişkisizdir.

- ÇDR.5 varsayımı hata terimi u'nun bağımsız değişken x'lerle ilişkisiz olduğunu, yani x'lerin kesin dışsal (exogenous) olduğunu, söyler.
- Eğer u, x'lerden biriyle ilişkiliyse, yani ÇDR.5 sağlanmazsa, SEKK parametre tahmincileri sapmalı olur. Bu durumda tahmin sonuçları güvenilir olmaz.
- ÇDR.5 varsayımının sağlanmadığı durumlar nelerdir?
  - Modelin fonksiyon kalıbının yanlış kurulması (functional form misspecification)
  - Önemli bir değişkenin model dışında bırakılması (omitted variable)
  - Bağımsız değişkenlerde yapılan ölçme hataları (measurement error)
- ÇDR.5 varsayımı sağlanmıyorsa içsel değişkenler (endogenous variables), yani içsellik, söz konusudur.

SEKK Parametre Tahmincilerinin Etkinliği

Teorem: SEKK Parametere Tahmincilerinin Etkinliği

ÇDR.6 - ÇDR.7 varsayımları altında SEKK parametre tahmincileri etkindir.

$$Var(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma^2}{SST_j(1 - R_j^2)}, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

Ek Bilgi

- SEKK paramatre tahmincileri $\hat{\beta}_j$'ların etkin olması en küçük/minimum varyanslı olması anlamına gelir.
- Küçük varyans ve dolayısıyla küçük standart hata $se(\hat{\beta}_j)$ istenen bir özelliktir.
  - Küçük varyansa sahip parametre tahmincileri $\hat{\beta}_j$'ların farklı örneklemlerde elde edilen değerleri gerçek parametre β_j değerinden (beklenen değeri) çok fazla uzaklaşmaz, yani ortalamadan sapma azdır.
  - Bu nedenle küçük varyansa sahip parametre tahmincileri $\hat{\beta}_j$'lar daha hassas bir tahmin verir.
  - Küçük standart hata $se(\hat{\beta}_j)$'ya sahip ve dolayısıyla daha hassas olan $\hat{\beta}_j$'ların güven aralıklarının hesaplanmasında ve hipotez testlerinin yapılmasında daha kesin istatistiki sonuçlara varabiliriz.

Gauss–Markov Teoremi

Gauss–Markov Teoremi

ÇDR.1 - ÇDR.7 varsayımları altında SEKK parametre tahmincileri, tüm doğrusal sapmasız tahminciler kümesi içinde en etkin/en iyi (minimum varyanslı) olanlarıdır.

Başka bir ifadeyle, ÇDR.1 - ÇDR.7 varsayımları altında SEKK parametre tahmincileri $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \ldots, \hat{\beta}_k$ anakütle parametreleri $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$'nın **D**oğrusal **E**n **İ**yi **S**apmasız **T**ahmin **E**dicileridir (DESTE ya da BLUE—**B**est **L**inear **U**nbiased **E**stimator).

- Gauss–Markov teoremi regresyon modelinin SEKK yöntemiyle tahmini için teorik dayanak sağlar.
- Eğer bu varsayımlar sağlanıyorsa SEKK yöntemi dışında başka bir tahmin yöntemine başvurmamıza gerek yoktur. SEKK yöntemi bize doğrusal, sapmasız ve varyansı en düşük (en iyi) tahmincileri vermektedir.
- ÇDR.1 - ÇDR.7 varsayımlarından biri bile ihlal edilirse Gaus-Markov Teoremi geçersiz olur.
- ÇDR.5 sağlanmazsa parametre tahmincilerinin sapmasızlık özelliği, ÇDR.6 ve ÇDR.7 sağlanmazsa etkinlik özelliği kaybolur.

Gauss–Markov Teoremi

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Kaynak: Wikipedia

Andrey Markov (1856-1922)

Kaynak: Wikipedia

Orijinden Geçen Regresyon

Orijinden Geçen Regresyon

Bazen Ekonomi Teorisi, kesim parametresi β_0'ın sıfır olması gerektiğini söyler. Böyle bir durumda β_0 modelden çıkartılarak tahmin yapılır.

$$y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + u \qquad \text{(Model)}$$

$$\tilde{y} = \tilde{\beta}_1 x_1 + \tilde{\beta}_2 x_2 + \cdots + \tilde{\beta}_k x_k \qquad \text{(ÖRF)}$$

- Orijinden geçen regresyonda
  - Parametre tahmincileri $\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \ldots, \tilde{\beta}_k$'ların, kesim parametresi β_0'ın bulunduğu regresyondaki $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \ldots, \hat{\beta}_k$'lardan farklı değerler alacağı unutmulmamalıdır.
  - x'ler 0 olduğunda tahmin edilen y değeri ($\hat{y}$) 0'dır.
  - Cebirsel özellikler geçersizdir.
  - R^2 negatif çıkabilir, yani y'nin örneklem ortalaması ($\bar{y}$) y'deki değişkenliği açıklamada modeldeki bağımsız değişken x'lerden daha başarılıdır.
  - R^2 negatif ise, $R^2 = 0$ kabul edilir ya da regresyona kesim parametresi eklenerek tahmin yapılır.

Orijinden Geçen Regresyon

Orijinden Geçen Regresyon

Bazen Ekonomi Teorisi, kesim parametresi β_0'ın sıfır olması gerektiğini söyler. Böyle bir durumda β_0 modelden çıkartılarak tahmin yapılır.

$$y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + u \quad \text{(Model)}$$

$$\tilde{y} = \tilde{\beta}_1 x_1 + \tilde{\beta}_2 x_2 + \cdots + \tilde{\beta}_k x_k \quad \text{(ÖRF)}$$

- Gerçekte (ARF'de) kesim parametresi β_0 sıfırdan farklı olmasına ($\beta_0 \neq 0$) rağmen orijinden geçen regresyon tahmin edilirse eğim parametresi tahmincileri sapmalı olur. $\longrightarrow E(\tilde{\beta}_j) \neq \beta_j$
- Gerçekte (ARF'de) kesim parametresi β_0 sıfır olmasına ($\beta_0 = 0$) rağmen sıfır değilmiş gibi regresyona dahil edilirse eğim parametresi tahmincilerinin varyansları yükseltir. $\longrightarrow Var(\hat{\beta}_j) \uparrow$
- Gözlem sayısı n arttırılarak parametre tahmincilerinin varyansları düşürülebilirken sapmalı parametre tahminci probleminden kurtulamayız. Bu nedenle uygulamada genelde kesim parametresi β_0 direkt olarak modele eklenir.

Modele Gereksiz Bağımsız Değişken Eklenmesi

- Modele gerekli olmadığı halde bir bağımsız değişken x eklersek SEKK parametre tahmincileri $\hat{\beta}$'lar ve onların varyansları bundan nasıl etkilenir?
- Modele gereksiz bir bağımsız değişken x'in eklenmesi ARF'de bu değişkenin yalın/kısmi etkisinin sıfır olduğu anlamına gelmektedir.
- Yani, model fazla kurulmuştur (overspecification).
- Örneğin, aşağıdaki doğru modelin bilinmediğini ve bağımsız değişken x_3'ü modele gereksiz yere ekleyerek yanlış modelin kullanıldığını düşünelim.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \qquad \text{(Doğru Model)}$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + u \qquad \text{(Yanlış Model)}$$

- Yanlış modelin ÇDR.1 - ÇDR.7 varsayımlarını sağladığını varsayalım.
- x_3'ün yalın/kısmi etkisi sıfır olmasına ($\beta_3 = 0$) rağmen modele koyulduğunda, yani yanlış model kullanıldığında ARF aşağıdaki gibi olur.

$$E(y|x_1, x_2, x_3) = E(y|x_1, x_2) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 \qquad \text{(ARF)}$$

- Bu ARF'nin bilinmediğini ve araştırmacının modele x_3'ü katsayısı sıfır ($\beta_3 = 0$) olduğu halde eklediğini varsayıyoruz.

Modele Gereksiz Bağımsız Değişken Eklenmesi

- Bu durumda ÖRF aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \hat{\beta}_3 x_3 \qquad \text{(ÖRF)}$$

- SEKK parametre tahmincileri hala sapmasızdır. Bu sonuç Slayt 78'de verilen teorem ve ek bilgi yardımıyla kolayca çıkarılabilir.

$$E(\hat{\beta}_0) = \beta_0, \quad E(\hat{\beta}_1) = \beta_1, \quad E(\hat{\beta}_2) = \beta_2, \quad E(\hat{\beta}_3) = 0$$

- Gereksiz eklenen bağımsız değişken x_3'ün katsayısının doğru değeri sıfırdır. $\hat{\beta}_3$'nın kendisi hiçbir zaman sıfır olmayacak olsa da, x_3 değişkenin bir açıklayıcılığı olmadığından tahmincisinin beklenen değeri de 0 olacaktır.
- Modele gereksiz bir bağımsız değişkenin eklenmesi durumda SEKK parametre tahmincileri hala sapmasız olsa da parametre tahmincilerinin varyansları yükselir.
  - Modele yeni bağımsız değişken x_j eklenince R_j^2 artacağından $Var(\hat{\beta}_j)$ de artar.

$$Var(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma^2}{SST_j(1 - R_j^2)}, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

Gerekli Bağımsız Değişkenin Model Dışında Bırakılması

- Modelede yer alması gerektiği halde bir bağımsız değişken x'i modelden dışlarsak SEKK parametre tahmincileri $\hat{\beta}$'lar ve onların varyansları bundan nasıl etkilenir?
- Gerekli bir bağımsız değişken x'in modelden dışlanması ARF'de bu değişkenin yalın/kısmi etkisinin sıfır olmadığı anlamına gelmektedir.
- Yani, model eksik kurulmuştur (underspecification).
- Örneğin, ÇDR.1 - ÇDR.7 varsayımlarının sağlandığı doğru modelin x_1 ve x_2 bağımsız değişkenlerini içerdiğini varsayalım.
- Fakat, araştırmacının bağımsız değişken x_2'yi gözleyemediği için model dışında bırakıp yanlış modeli tahmin ettiğini düşünelim.
- Eğer x_2'yi modele doğrudan sokmazsak (yanlış modeli kullanırsak), onu yanlış modeledeki hata teriminin (v) içine almış oluruz.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \qquad \text{(Doğru Model)}$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + v \qquad \text{(Yanlış Model)}$$

$$v = \beta_2 x_2 + u \qquad \text{(Yanlış Model Hata Terimi)}$$

Gerekli Bağımsız Değişkenin Model Dışında Bırakılması

- Doğru ve yanlış modelden elde edeceğimiz tahminler farklı olacağından, modeller ve onların ÖRF'leri aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \longrightarrow \hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 \quad \text{(Doğru Model ve ÖRF)}$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + v \longrightarrow \tilde{y} = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x_1 \quad \text{(Yanlış Model ve ÖRF)}$$

$$v = \beta_2 x_2 + u \quad \text{(Yanlış Model Hata Terimi)}$$

- Yanlış model tahmin edildiğinde x_1'in eğim paramteresi β_1'in parametre tahminicisi $\tilde{\beta}_1$ hala sapmasız mıdır?
- Yanlış modelde β_1'in parametre tahminicisi $\tilde{\beta}_1$:

$$\tilde{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_{i1} - \bar{x}_1) y_i}{\sum_{i=1}^{n} (x_{i1} - \bar{x}_1)^2}$$

Gerekli Bağımsız Değişkenin Model Dışında Bırakılması

- $\tilde{\beta}_1$'nın sapmalı bir tahminci olup olmadığını ve eğer sapmalı ise sapmanın boyutunu belirlemek için $\tilde{\beta}_1$ formülünde y yerine doğru modeli yazıp, yeniden düzenleyelim.

$$\tilde{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)y_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)(\beta_0+\beta_1 x_1+\beta_2 x_2+u)}{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)^2}$$

$$= \frac{\beta_0 \overbrace{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)}^{=0}}{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)^2} + \frac{\beta_1 \overbrace{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)x_{i1}}^{=\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)^2}}{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)^2} + \frac{\beta_2 \sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)x_{i2}}{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)u_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)^2}$$

Gerekli Bağımsız Değişkenin Model Dışında Bırakılması

- $\tilde{\beta}_1$'nın yeniden düzenlenen formülü aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\tilde{\beta}_1 = \beta_1 + \frac{\beta_2 \sum_{i=1}^{n} (x_{i1} - \bar{x}_1) x_{i2}}{\sum_{i=1}^{n} (x_{i1} - \bar{x}_1)^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_{i1} - \bar{x}_1) u_i}{\sum_{i=1}^{n} (x_{i1} - \bar{x}_1)^2}$$

- $\tilde{\beta}_1$'nın yeniden düzenlenen formülünün tüm x'lere ($\mathbf{x}$) göre koşullu beklenen değerini alalım.

$$E(\tilde{\beta}_1|\mathbf{x}) = E(\beta_1|\mathbf{x}) + E\left(\frac{\beta_2 \sum_{i=1}^{n} (x_{i1} - \bar{x}_1) x_{i2}}{\sum_{i=1}^{n} (x_{i1} - \bar{x}_1)^2} \middle| \mathbf{x} \right) + E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_{i1} - \bar{x}_1) u_i}{\sum_{i=1}^{n} (x_{i1} - \bar{x}_1)^2} \middle| \mathbf{x} \right)$$

$$= \beta_1 + \beta_2 \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_{i1} - \bar{x}_1) x_{i2}}{\sum_{i=1}^{n} (x_{i1} - \bar{x}_1)^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_{i1} - \bar{x}_1) \overbrace{E(u_i|\mathbf{x})}^{=\,0\ (\text{ÇDR.5})}}{\sum_{i=1}^{n} (x_{i1} - \bar{x}_1)^2}$$

Gerekli Bağımsız Değişkenin Model Dışında Bırakılması

- $\tilde{\beta}_1$'nın tüm x'lere ($\mathbf{x}$) göre koşullu beklenen değeri aşağıdaki gibi olacaktır.

$$E(\tilde{\beta}_1|\mathbf{x}) = \beta_1 + \beta_2 \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1} - \bar{x}_1)x_{i2}}{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1} - \bar{x}_1)^2}$$

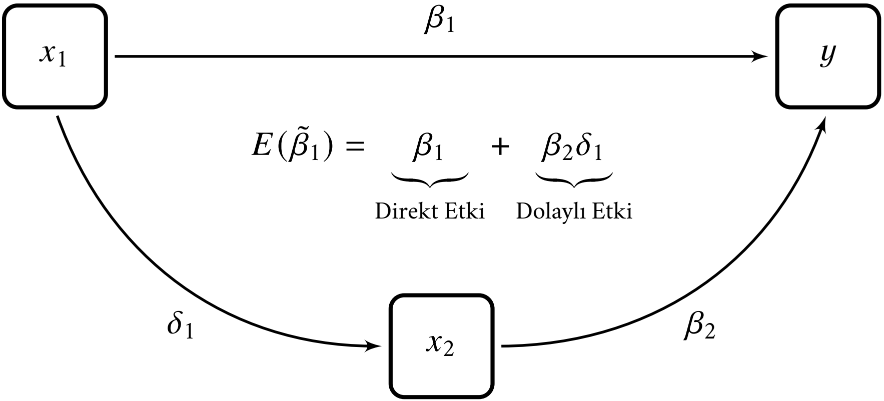
- β_2'nin yanında yer alan terim x_2'nin x_1 üzerine regresyonundan (yardımcı model) elde edilen eğim parametresi tahmincisi $\tilde{\delta}_1$'dir.

$$x_2 = \tilde{\delta}_0 + \tilde{\delta}_1 x_1 + \tilde{r}_2 \quad \longrightarrow \quad \tilde{\delta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1} - \bar{x}_1)x_{i2}}{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1} - \bar{x}_1)^2} \quad \text{(Yardımcı Model Tahmini)}$$

- SEKK parametre tahmincilerinin sapmasızlığı tüm x'lere ($\mathbf{x}$) göre koşullu hesaplanmasına rağmen genelde koşulsuz olarak gösterilir. Böylece, $\tilde{\beta}_1$'nın beklenen değeri aşağıdaki gibi olur.

$$E(\tilde{\beta}_1|\mathbf{x}) = \beta_1 + \beta_2\tilde{\delta}_1 \quad \longrightarrow \quad E(\tilde{\beta}_1) = \beta_1 + \beta_2\tilde{\delta}_1$$

Gerekli Bağımsız Değişkenin Model Dışında Bırakılması



Şekil 3: x_1'in y Üzerindeki Direkt ve Dolaylı Etkisi

Dışlanmış Değişken Sapması

- $E(\tilde{\beta}_1)$ ve β_1 arasındaki farka **dışlanmış değişken sapması** (omitted variable bias) adı verilir.

$$E(\tilde{\beta}_1) = \beta_1 + \beta_2\tilde{\delta}_1 \quad \longrightarrow \quad sapma = E(\tilde{\beta}_1) - \beta_1 = \beta_2\tilde{\delta}_1$$

- Şu iki durumda sapma 0, yani $\tilde{\beta}_1$ sapmasız, olur.
  - x_2'nin y üzerindeki yalın/kısmi etkisi sıfırdır, yani $\beta_2 = 0$'dır. Doğru modelde bağımsız değişken x_2 bulunmamalıdır.
  - x_1 ve x_2 lineer (doğrusal) olarak ilişkisizdir, yani $\tilde{\delta}_1 = 0$.
- Sapmanın işareti hem β_2'ye hem de dışlanan bağımsız değişken x_2 ile modele dahil edilen değişken x_1 arasındaki korelasyona, yani $Corr(x_1, x_2) = \tilde{\delta}_1$, bağlıdır.
- Dışlanan bağımsız değişken x_2 gözlenemiyorsa bu korelasyon hesaplanamaz.
- Aşağıdaki tablo sapmanın yönüne ilişkin dört olası durumu özetlemektedir.

	$\tilde{\delta}_1$	
β_2	$\tilde{\delta}_1 > 0$	$\tilde{\delta}_1 < 0$
$\beta_2 > 0$	Pozitif Sapma	Negatif Sapma
$\beta_2 < 0$	Negatif Sapma	Pozitif Sapma

Notlar: $Corr(x_1, x_2) = \tilde{\delta}_1$

Dışlanmış Değişken Sapması

$$sapma = E(\tilde{\beta}_1) - \beta_1 = \beta_2 \tilde{\delta}_1$$

- Sapmanın işaretinin yanı sıra boyutu da önemlidir. Sapmanın boyutu hem $\tilde{\delta}_1$'ya hem de β_2'ye bağlıdır.
- β_1'in büyüklüğüne kıyasla küçük bir sapma uygulamada sorun yaratmayabilir. Örneğin, anakütle eğim parametresi β_1'ın değeri 8.6 iken tahmin sonucunda elde edilen sapma 0.1 ise.
- Uygulamada, β_2 bilinmeyen anakütle parametresi olduğundan sapmanın büyüklüğünü hesaplamak çoğunlukla mümkün olmaz.
- Buna rağmen bazı durumlarda sapmanın yönü/işareti hakkında bir fikir elde edebiliriz.
- Örneğin, bağımsız değişken x_2'yi gözleyemediğimize rağmen
  - x_2'nin y üzerindeki yalın/kısmi etkisinin yönünü, yani β_2'nin işaretini
  - x_1 ve x_2 arasındaki lineer ilişkinin yönünü, yani $\tilde{\delta}_1$'nin işaretini

  bildiğimizi düşünelim.
- Bu durumda sapmanın yönü/işareti hakkında yorumda bulunabiliriz.
  - $E(\tilde{\beta}_1) > \beta_1$ ise $\tilde{\beta}_1$'da **yukarı sapma** vardır.
  - $E(\tilde{\beta}_1) < \beta_1$ ise $\tilde{\beta}_1$'da **aşağı sapma** vardır.

Dışlanmış Değişken Sapması

- Örneğin, ücreti açıklamak doğru modelin hem eğitim (*educ*) hem de doğuştan gelen yetenek (*ability*) bağımsız değişkenlerini içerdiğini düşünelim.
- Yetenek (*ability*) bağımsız değişkenini gözleyemediğimiz için model dışında bırakıp yanlış modeli tahmin ettiğimizi düşünelim.

$$wage = \beta_0 + \beta_1 educ + \beta_2 ability + u \qquad \text{(Doğru Model)}$$

$$wage = \beta_0 + \beta_1 educ + v \longrightarrow \widehat{wage} = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 educ \qquad \text{(Yanlış Model ve ÖRF)}$$

$$v = \beta_2 ability + u \qquad \text{(Yanlış Model Hata Terimi)}$$

$$ability = \tilde{\delta}_0 + \tilde{\delta}_1 educ + \tilde{r}_{ability} \qquad \text{(Yardımcı Model Tahmini)}$$

- Yanlış model tahmin edildiğinde, *educ*'e ait eğim parametresi tahmincisi $\tilde{\beta}_1$'deki sapmanın işaretinin pozitif olacağı söylenebilir. Çünkü,
  - Yetenek (*ability*) ücretlerle (*wage*) pozitif ilişkilidir, yani $\beta_2 > 0$'dır.
  - Eğitimli (*educ*) insanlar daha yetenekli (*ability*) olma eğilimindedir, yani $\tilde{\delta}_1 > 0$'dır.

$$sapma = E(\tilde{\beta}_1) - \beta_1 = \underbrace{\beta_2}_{+} \underbrace{\tilde{\delta}_1}_{+}$$

- $E(\tilde{\beta}_1) > \beta_1$ olduğundan $\tilde{\beta}_1$'da **yukarı sapma** vardır.

Dışlanmış Değişken Sapması

$$wage = \beta_0 + \beta_1 educ + \beta_2 ability + u \qquad \text{(Doğru Model)}$$

$$wage = \beta_0 + \beta_1 educ + v \longrightarrow \widetilde{wage} = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 educ \qquad \text{(Yanlış Model ve ÖRF)}$$

$$v = \beta_2 ability + u \qquad \text{(Yanlış Model Hata Terimi)}$$

$$ability = \tilde{\delta}_0 + \tilde{\delta}_1 educ + \tilde{r}_{ability} \qquad \text{(Yardımcı Model Tahmini)}$$

- Yetenek ($ability$) ve eğitim ($educ$) yakından ilişkili, $\tilde{\delta}_1 \neq 0$, olduğundan yanlış model kullanıldığında:
  - $educ$ ile v ilişkili olacaktır. $\longrightarrow Corr(educ, v) \neq 0$
  - ÇDR.5 varsayımı ihlal edilecektir. $\longrightarrow E(v|educ) \neq 0$
  - $\tilde{\beta}_1$ sapmalı tahmin edilecektir. $\longrightarrow E(\tilde{\beta}_1) \neq \beta_1$

  Sonuç olarak bağımsız değişken $educ$ içseldir.
- Yeteneğin dışlanıp yanlış modelin kullanılması durumunda, eğitimin ücret ($wage$) üzerindeki etkisi, yani $\tilde{\beta}_1$, abartılı tahmin edilir. Yani, aslında yanlış modeldeki eğitimin etkisinin bir kısmı doğuştan gelen yeteneğe bağlıdır.

Dışlanmış Değişken Sapması

- Daha fazla bağımsız değişken içeren modellerde gerekli bir değişkenin model dışında bırakılması SEKK parametre tahmincilerinin genellikle sapmalı olmasına neden olur.
- Doğru modelin aşağıdaki gibi olduğunu varsayalım.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + u \qquad \text{(Doğru Model)}$$

- x_3'ü dışarıda bırakarak aşağıdaki yanlış modeli tahmin ettiğimizi düşünelim.

$$\tilde{y} = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x_1 + \tilde{\beta}_2 x_2 \qquad \text{(Yanlış Model - ÖRF)}$$

- x_3'ün, x_1 ile lineer ilişkili fakat x_2 ile lineer ilişkisiz olsun. Eğer,
  - x_1 ve x_2 lineer ilişkili ise, bu durumda $\tilde{\beta}_1$ ve $\tilde{\beta}_2$ sapmalı olur.
  - x_1 ve x_2 lineer ilişkisiz ise, bu durumda $\tilde{\beta}_1$ sapmalı fakat $\tilde{\beta}_2$ sapmasız olur.

$$\left.\begin{array}{l} Corr(x_3, x_1) \neq 0 \\ Corr(x_3, x_2) = 0 \\ Corr(x_1, x_2) \neq 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} E(\tilde{\beta}_1) \neq \beta_1 \\ E(\tilde{\beta}_2) \neq \beta_2 \end{array} \quad \text{vs.} \quad \left.\begin{array}{l} Corr(x_3, x_1) \neq 0 \\ Corr(x_3, x_2) = 0 \\ Corr(x_1, x_2) = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} E(\tilde{\beta}_1) \neq \beta_1 \\ E(\tilde{\beta}_2) = \beta_2 \end{array}$$

Model Seçimi: Sapmasızlık vs. Küçük Varyans

- Modele bir bağımsız değişkenin eklenip eklenmemesi kararı SEKK parametre tahmincilerinin sapması ve varyansındaki değişim karşılaştırılarak verilmelidir.
- Olası modeller ve onların ÖRF'lerinin aşağıdaki gibi olduğunu varsayalım.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \longrightarrow \hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 \qquad \text{(1. Model ve ÖRF)}$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + v \longrightarrow \tilde{y} = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x_1 \qquad \text{(2. Model ve ÖRF)}$$

$$v = \beta_2 x_2 + u \qquad \text{(2. Model Hata Terimi)}$$

$$x_2 = \tilde{\delta}_0 + \tilde{\delta}_1 x_1 + \tilde{r}_2 \qquad \text{(Yardımcı Model Tahmini)}$$

- Bağımsız değişkenler genellikle lineer olarak ilişkili olduğundan, x_1 ve x_2'in de lineer ilişkili, yani $Corr(x_1, x_2) = \tilde{\delta}_1 \neq 0$ olduğunu varsayalım.
- 1. model tahmininden elde edilen $\hat{\beta}_1$ eğer,
  - $\beta_2 = 0$ ise, bağımsız değişken x_2 gereksiz olarak modele eklenmiştir (bakınız Slayt 89) ve bu nedenle $\hat{\beta}_1$ sapmasızdır. $\longrightarrow E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$
  - $\beta_2 \neq 0$ ise, bağımsız değişken x_2 doğru olarak modele eklenmiştir ve bu nedenle $\hat{\beta}_1$ sapmasızdır. $\longrightarrow E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$

Model Seçimi: Sapmasızlık vs. Küçük Varyans

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \longrightarrow \hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 \qquad \text{(1. Model ve ÖRF)}$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + v \longrightarrow \tilde{y} = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x_1 \qquad \text{(2. Model ve ÖRF)}$$

$$v = \beta_2 x_2 + u \qquad \text{(2. Model Hata Terimi)}$$

$$x_2 = \tilde{\delta}_0 + \tilde{\delta}_1 x_1 + \tilde{r}_2 \qquad \text{(Yardımcı Model Tahmini)}$$

- 2. model tahmininden elde edilen $\tilde{\beta}_1$ eğer,
  - $\beta_2 = 0$ ise, bağımsız değişken x_2 doğru olarak modelden çıkarılmıştır ve bu nedenle $\tilde{\beta}_1$ sapmasızdır. $\longrightarrow E(\tilde{\beta}_1) = \beta_1$
  - $\beta_2 \neq 0$ ise, bağımsız değişken x_2 gerekli olduğu halde modelden çıkarılmıştır (bakınız Slayt 91) ve bu nedenle $\tilde{\beta}_1$ sapmalıdır. $\longrightarrow E(\tilde{\beta}_1) \neq \beta_1$
- Bu nedenle model seçiminde eğer sapmasızlık tek kriter ise, 1. model tahminindeki $\hat{\beta}_1$ her durumda sapmasız olduğu için $\tilde{\beta}_1$'e göre tercih edilir.
- Fakat sapmasızlığa göre bir model tercihi, varyans da düşünüldüğünde her zaman doğru degildir.

Model Seçimi: Sapmasızlık vs. Küçük Varyans

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \longrightarrow \hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 \qquad \text{(1. Model ve ÖRF)}$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + v \longrightarrow \tilde{y} = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x_1 \qquad \text{(2. Model ve ÖRF)}$$

- 1. modelde 2. modele göre daha fazla bağımsız değişken olduğundan $Var(\tilde{\beta}_1) < Var(\hat{\beta}_1)$'dır (bakınız Slayt 90).
- Eğer $\beta_2 = 0$ ise,
  - 1. model tahminindeki $\hat{\beta}_1$ sapmasızdır. $\longrightarrow E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$
  - 2. model tahminindeki $\tilde{\beta}_1$ sapmasızdır. $\longrightarrow E(\tilde{\beta}_1) = \beta_1$
  - $\tilde{\beta}_1$ sapmasız ve $\hat{\beta}_1$'e göre daha küçük varyanslı olduğundan 2. model, yani $\tilde{\beta}_1$, tercih edilir.
- Eğer $\beta_2 \neq 0$ ise,
  - 1. model tahminindeki $\hat{\beta}_1$ sapmasızdır. $\longrightarrow E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$
  - 2. model tahminindeki $\tilde{\beta}_1$ sapmalıdır. $\longrightarrow E(\tilde{\beta}_1) \neq \beta_1$
  - $\hat{\beta}_1$ sapmasız olduğundan ve gözlem sayısı n arttırılarak varyansı yeteri kadar küçüleceğinden 1. model, yani $\hat{\beta}_1$, tercih edilir.
- Kısacası sapmasızlık olmazsa olmaz şart iken varyans gözlem sayısı n arttırılarak düşürebilir.

Kaynaklar

Gujarati, D.N. (2009). *Basic Econometrics*. Tata McGraw-Hill Education.
Güriş, S. (2005). *Ekonometri: Temel Kavramlar*. Der Yayınevi.
Hyndman, R.J. ve G. Athanasopoulos (2018). *Forecasting: Principles and Practice*. OTexts.
Stock, J.H. ve M.W. Watson (2015). *Introduction to Econometrics*.
Wooldridge, J.M. (2016). *Introductory Econometrics: A Modern Approach*. Nelson Education.

Ek Bilgiler

BDR.5: Sıfır Koşullu Ortalama Varsayımı

$$E(u|\mathbf{x}) = E(u) = 0$$

$$Cov(x, u) = 0, \quad Corr(x, u) = 0 \quad \text{ve} \quad E(xu) = 0$$

$$Cov(x, u) = E(xu) - E(x)\underbrace{E(u)}_{=0} = 0$$

$$= E(xu) = 0$$

Sunuma Geri Dön

Ek Bilgiler

ÇDR.5: Sıfır Koşullu Ortalama Varsayımı

$$E(u|\mathbf{x}) = E(u) = 0$$

$$Cov(x_j, u) = 0, \quad Corr(x_j, u) = 0 \quad \text{ve} \quad E(x_j u) = 0, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

$$Cov(x_j, u) = E(x_j u) - E(x_j)\underbrace{E(u)}_{=0} = 0$$

$$= E(x_j u) = 0$$

Sunuma Geri Dön

Ek Bilgiler

ÇDR.6: Otokorelasyon Olmaması

$$Cov(u_i, u_s|\mathbf{x}) = 0 \quad \text{ve} \quad Cov(u_i, u_s) = 0, \quad i \neq s$$

$$E(u_i u_s|\mathbf{x}) = 0 \quad \text{ve} \quad E(u_i u_s) = 0, \quad i \neq s$$

$$Cov(u_i, u_s|\mathbf{x}) = E(u_i u_s|\mathbf{x}) - \underbrace{E(u_i|\mathbf{x})}_{=0} \underbrace{E(u_s|\mathbf{x})}_{=0} = 0$$

$$= E(u_i u_s|\mathbf{x}) = 0$$

◂ Sunuma Geri Dön

Ek Bilgiler

ÇDR.7: Sabit Varyans (Homoscedasticity)

$$E(u^2|\mathbf{x}) = \sigma^2 \quad \text{ve} \quad E(u^2) = \sigma^2$$

$$\begin{aligned} Var(u|\mathbf{x}) &= E(u^2|\mathbf{x}) - \underbrace{E(u|\mathbf{x})^2}_{=0} = \sigma^2 \\ &= E(u^2|\mathbf{x}) = \sigma^2 \end{aligned}$$

Sunuma Geri Dön

Ek Bilgiler

Anakütle Regresyon Fonksiyonu (ARF)

$$E(y|\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k \quad \text{(ARF)}$$

$$Var(y|\mathbf{x}) = \sigma^2$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + u$$

$$E(y|\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + \underbrace{E(u|\mathbf{x})}_{=0}$$

$$E(y|\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k \quad \text{(ARF)}$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + u$$

$$Var(y|\mathbf{x}) = Var(u|\mathbf{x})$$

$$Var(y|\mathbf{x}) = \sigma^2$$

Sunuma Geri Dön

Ek Bilgiler

Parametre Tahmincileri: 2 Bağımsız Değişken

β_0 kesim parametresinin tahmini $\hat{\beta}_0$:

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1\bar{x}_1 - \hat{\beta}_2\bar{x}_2$$

- $\hat{\beta}_0$'nın formülü
  - SEKK birinci sıra koşullarından ya da örneklem moment koşullarından ilki (Slayt 31)
  - İndeksli haldeki model denklemi
  - Kalıntı $\hat{u}$'nın denklemi

kullanılarak çıkarılabilir.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i &= \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i) = 0 \\
&= \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n}\hat{\beta}_0 - \sum_{i=1}^{n}\hat{\beta}_1 x_{i1} - \sum_{i=1}^{n}\hat{\beta}_2 x_{i2} = 0 \\
&= n\bar{y} - n\hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 n\bar{x}_1 - \hat{\beta}_2 n\bar{x}_2 = 0 \\
&= \bar{y} - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1\bar{x}_1 - \hat{\beta}_2\bar{x}_2 = 0
\end{aligned}$$

Sonuç: $\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1\bar{x}_1 - \hat{\beta}_2\bar{x}_2$

Sunuma Geri Dön

Ek Bilgiler

Parametre Tahmincileri: k Bağımsız Değişken

β_0 kesim parametresinin tahmini $\hat{\beta}_0$ (1 tane var):

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1\bar{x}_1 - \hat{\beta}_2\bar{x}_2 - \cdots - \hat{\beta}_k\bar{x}_k$$

- $\hat{\beta}_0$'nın formülü
  - SEKK birinci sıra koşullarından ya da örneklem moment koşullarından ilki (Slayt 31)
  - İndeksli haldeki model denklemi
  - Kalıntı $\hat{u}$'nın denklemi

kullanılarak çıkarılabilir.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i &= \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i) = 0 \\
&= \sum_{i=1}^{n}y_i - \sum_{i=1}^{n}\hat{\beta}_0 - \sum_{i=1}^{n}\hat{\beta}_1 x_{i1} - \sum_{i=1}^{n}\hat{\beta}_2 x_{i2} - \cdots - \sum_{i=1}^{n}\hat{\beta}_k x_{ik} = 0 \\
&= n\bar{y} - n\hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 n\bar{x}_1 - \hat{\beta}_2 n\bar{x}_2 - \cdots - \hat{\beta}_k n\bar{x}_k = 0 \\
&= \bar{y} - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1\bar{x}_1 - \hat{\beta}_2\bar{x}_2 - \cdots - \hat{\beta}_k\bar{x}_k = 0
\end{aligned}$$

Sonuç: $\quad \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1\bar{x}_1 - \hat{\beta}_2\bar{x}_2 - \cdots - \hat{\beta}_k\bar{x}_k$

Sunuma Geri Dön

Ek Bilgiler

Tahmin Edilen Değerler ve Kalıntıların Cebirsel Özellikleri - 2

$$Cov(x_j, \hat{u}) = E(x_j \hat{u}) - E(x_{ij}) \underbrace{E(\hat{u}_i)}_{=0} = 0 \qquad \text{(1. Cebirsel Özellik)}$$

$$= E(x_j \hat{u}) = 0$$

ya da

$$Cov(x_j, \hat{u}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_{ij} - \bar{x}_j)(\hat{u}_i - \bar{\hat{u}})}{n-1} = 0$$

$$Cov(x_j, \hat{u}) = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} (\hat{u}_i - \underbrace{\bar{\hat{u}}}_{=0}) = 0 \qquad \text{(1. Cebirsel Özellik)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \hat{u}_i = 0$$

Sunuma Geri Dön

Ek Bilgiler

Tahmin Edilen Değerler ve Kalıntıların Cebirsel Özellikleri - 3

$$Cov(\hat{y},\hat{u}) = Cov(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \cdots + \hat{\beta}_k x_k, \hat{u})$$

$$= \hat{\beta}_1 \underbrace{Cov(x_1,\hat{u})}_{=0} + \hat{\beta}_2 \underbrace{Cov(x_2,\hat{u})}_{=0} + \cdots + \hat{\beta}_k \underbrace{Cov(x_k,\hat{u})}_{=0} = 0 \quad \text{(2. Cebirsel Öz.)}$$

$$= E(\hat{y}\hat{u}) = 0 \qquad \text{(Kovaryans formülü ve 1. Cebirsel Özellik)}$$

ve

$$Cov(\hat{y},\hat{u}) = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y})(\hat{u}_i - \underbrace{\bar{\hat{u}}}_{=0}) = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y})\hat{u}_i = 0 \qquad \text{(1. Cebirsel Özellik)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i \hat{u}_i - \bar{y} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i}_{=0} = 0 \qquad \text{(1. Cebirsel Özellik)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i \hat{u}_i = 0$$

Sunuma Geri Dön

Ek Bilgiler

SEKK Parametre Tahmincilerinin Varyansı

$\hat{\beta}_j$'ların varyansları:

$$Var(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma^2}{SST_j(1 - R_j^2)}, \quad SST_j = \sum_{i=1}^{n}(x_{ij} - \bar{x}_j)^2, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

- $\hat{\beta}_j$'ların varyans formülünü çıkartmada işimizi kolaylaştırmak için 2 bağımsız değişkenli ÇDR modelini kullanacağız.

2 Bağımsız Değişkenli ÇDR Modeli

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + u_i \qquad \text{(Model - İndeksli)}$$

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} \qquad \text{(ÖRF - İndeksli)}$$

- 2 bağımsız değişkenli ÇDR modelinde, spesifik olarak $\hat{\beta}_1$'nın varyans formülünü çıkartacağız.
- Daha sonra bulduğumuz bu formülü k bağımsız değişkenli ÇDR modelindeki $\hat{\beta}_j$'ların varyans formülünü çıkartmada kullanacağız.

Ek Bilgiler

2 Bağımsız Değişkenli ÇDR Modeli

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + u_i \qquad \text{(Model - İndeksli)}$$

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} \qquad \text{(ÖRF - İndeksli)}$$

1. Yardımcı Regresyon Tahmini

$$x_{i1} = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 x_{i2} + \hat{r}_{i1} \qquad \text{(İndeksli)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1} = 0 \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^{n} x_{i2}\hat{r}_{i1} = 0 \qquad \text{(Cebirsel Özellikler)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i1}\hat{r}_{i1} = \sum_{i=1}^{n} (\hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 x_{i2} + \hat{r}_{i1})\hat{r}_{i1} = \hat{\alpha}_0 \sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1} + \hat{\alpha}_1 \sum_{i=1}^{n} x_{i2}\hat{r}_{i1} + \sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1}^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i1}\hat{r}_{i1} = \sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1}^2 \qquad \text{(Sonra Kullanılacak)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1}^2 = SSR_1 = SST_1(1 - R_1^2) \qquad \text{(R^2 Formülünden)}$$

Ek Bilgiler

- $\hat{\beta}_1$'nın varyans formülü
  - $\hat{\beta}_1$'nın formülü (Slayt 39)
  - 2 bağımsız değişkenli ÇDR model denklemi (Slayt 105),
  - Otokorelasyon olmaması varsayımı, ÇDR.6 (Slayt 17),
  - Sabit varyans varsayımı, ÇDR.7 (Slayt 18),
  - Varyansın bir özelliği $\longrightarrow Var(\sum a_i u_i) = \sum a_i^2 Var(u_i)$, burada a_i'ler sabit sayılardır ve u_i'ler ikili olarak ilişkisizdir.
  - R^2 formülü

kullanılarak çıkarılabilir.

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1} y_i}{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1}^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1}(\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + u_i)}{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1}^2}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\beta_0 \overbrace{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1}}^{=0} + \beta_1 \overbrace{\sum_{i=1}^{n} x_{i1}\hat{r}_{i1}}^{\sum \hat{r}_{i1}^2} + \beta_2 \overbrace{\sum_{i=1}^{n} x_{i2}\hat{r}_{i1}}^{=0} + \sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1} u_i}{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1}^2} = \beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1} u_i}{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1}^2}$$

Ek Bilgiler

- Alternatif $\hat{\beta}_1$ formülü şimdi $\hat{\beta}_j$ için yazılabilir:

$$\hat{\beta}_1 = \beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1} u_i}{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1}^2} \quad \longrightarrow \quad \hat{\beta}_j = \beta_j + \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{ij} u_i}{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{ij}^2}$$

- Şimdi, alternatif $\hat{\beta}_1$ formülünün tüm x'lere ($\mathbf{x}$) göre koşullu varyansını alalım.

$$Var(\hat{\beta}_1|\mathbf{x}) = Var\left(\beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1} u_i}{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1}^2} \Bigg| \mathbf{x}\right) = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1}^2\right)^2} Var\left(\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1} u_i | \mathbf{x}\right)$$

$$= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1}^2\right)^2} \left(\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1}^2 \underbrace{Var(u_i|\mathbf{x})}_{=\sigma^2 \text{ (ÇDR.7)}}\right) = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1}^2\right)^2} \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1}^2 = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1}^2}$$

Ek Bilgiler

- $\hat{\beta}_1$'nın varyans formülü

$$Var(\hat{\beta}_1|\mathbf{x}) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1}^2} = \frac{\sigma^2}{SST_1(1-R_1^2)}$$

- $\hat{\beta}_1$'nın varyans formülü tüm x'lere ($\mathbf{x}$) göre koşullu hesaplanmasına rağmen genelde koşulsuz olarak gösterilir:

$$Var(\hat{\beta}_1|\mathbf{x}) = \frac{\sigma^2}{SST_1(1-R_1^2)} \quad \longrightarrow \quad Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{SST_1(1-R_1^2)}$$

- $Var(\hat{\beta}_1)$ formülü şimdi $Var(\hat{\beta}_j)$ için yazılabilir:

$$Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{SST_1(1-R_1^2)} \quad \longrightarrow \quad Var(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma^2}{SST_j(1-R_j^2)}$$

Sunuma Geri Dön

Ek Bilgiler

SEKK Parametere Tahmincilerinin Sapmasızlığı

$$E(\hat{\beta}_0) = \beta_0$$

$$E(\hat{\beta}_j) = \beta_j, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

- $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_j$'ların sapmasızlığını kanıtlamada işimizi kolaylaştırmak için 2 bağımsız değişkenli ÇDR modelini kullanacağız.

2 Bağımsız Değişkenli ÇDR Modeli

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + u_i \qquad \text{(Model - İndeksli)}$$

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} \qquad \text{(ÖRF - İndeksli)}$$

- 2 bağımsız değişkenli ÇDR modelinde, spesifik olarak $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$'nın sapmasızlığını kanıtlacağız.
- Böylelikle, k bağımsız değişkenli ÇDR modelindeki $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_j$'ların sapmasızlığını kanıtlamış olacağız.

Ek Bilgiler

- $\hat{\beta}_1$'nın sapmasızlığı
  - $\hat{\beta}_1$'nın Slayt 105'de gösterilen alternatif formülünün tüm x'lere ($\mathbf{x}$) göre koşullu beklenen değerini alıp
  - Sıfır koşullu ortalama varsayımı, ÇDR.5 (Slayt 16),

kullanalılarak gösterilebilir.

$$\hat{\beta}_1 = \beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1} u_i}{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1}^2} \qquad (\hat{\beta}_1\text{'nın Alternatif Formülü})$$

$$E(\hat{\beta}_1|\mathbf{x}) = E\left(\beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1} u_i}{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1}^2} \middle| \mathbf{x}\right) = \beta_1 + \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1} \overbrace{E(u_i|\mathbf{x})}^{=0}\right)}{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1}^2} = \beta_1$$

$$E(\hat{\beta}_1|\mathbf{x}) = \beta_1$$

Ek Bilgiler

- $\hat{\beta}_0$'nın sapmasızlığı
  - $\hat{\beta}_0$'nın Slayt 33'deki formülünün tüm x'lere ($\mathbf{x}$) göre koşullu beklenen değerini alıp
  - Model denkleminin toplamları alınarak elde edilen denklem

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + u_i \quad \longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} (\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + u_i)$$

$$n\bar{y} = n\beta_0 + \beta_1 n\bar{x}_1 + \beta_2 n\bar{x}_2$$

$$\bar{y} = \beta_0 + \beta_1 \bar{x}_1 + \beta_2 \bar{x}_2$$

kullanılarak gösterilebilir.

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{x}_2 \qquad \text{(Slayt 33)}$$

$$E(\hat{\beta}_0|\mathbf{x}) = E(\bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{x}_2|\mathbf{x})$$

$$E(\hat{\beta}_0|\mathbf{x}) = \bar{y} - \underbrace{E(\hat{\beta}_1|\mathbf{x})}_{=\beta_1} \bar{x}_1 - \underbrace{E(\hat{\beta}_2|\mathbf{x})}_{=\beta_2} \bar{x}_2$$

$$E(\hat{\beta}_0|\mathbf{x}) = \bar{y} - \beta_1 \bar{x}_1 - \beta_2 \bar{x}_2$$

$$E(\hat{\beta}_0|\mathbf{x}) = \beta_0$$

Ek Bilgiler

- $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$'nın sapmasızlığı tüm x'lere ($\mathbf{x}$) göre koşullu hesaplanmasına rağmen genelde koşulsuz olarak gösterilir:

$$E(\hat{\beta}_0|\mathbf{x}) = \beta_0 \quad \longrightarrow \quad E(\hat{\beta}_0) = \beta_0$$

$$E(\hat{\beta}_1|\mathbf{x}) = \beta_1 \quad \longrightarrow \quad E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$$

- $\hat{\beta}_1$'nın sapmasızlığı şimdi $\hat{\beta}_j$ için yazılabilir:

$$E(\hat{\beta}_1) = \beta_1 \quad \longrightarrow \quad E(\hat{\beta}_j) = \beta_j, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

SEKK Parametere Tahmincilerinin Sapmasızlığı

$$E(\hat{\beta}_0) = \beta_0$$

$$E(\hat{\beta}_j) = \beta_j, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

Sunuma Geri Dön

Ek Bilgiler

Teorem: SEKK Parametere Tahmincilerinin Etkinliği

ÇDR.6 - ÇDR.7 varsayımları altında SEKK parametre tahmincileri etkindir.

$$Var(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma^2}{SST_j(1 - R_j^2)}, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

- $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_j$'ların etkinliğini kanıtlamada işimizi kolaylaştırmak için 2 bağımsız değişkenli ÇDR modelini kullanacağız.

2 Bağımsız Değişkenli ÇDR Modeli

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + u_i \qquad \text{(Model - İndeksli)}$$

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} \qquad \text{(ÖRF - İndeksli)}$$

- 2 bağımsız değişkenli ÇDR modelinde, spesifik olarak $\hat{\beta}_1$'nın etkinliğini kanıtlacağız.
- Böylelikle, k bağımsız değişkenli ÇDR modelindeki $\hat{\beta}_j$'ların etkinliğini kanıtlamış olacağız.

Ek Bilgiler

- $\hat{\beta}_1$'nın etkinliğini kanıtlayabilmek için β_1'in herhangi bir doğrusal sapmasız tahmincisi olan $\tilde{\beta}_1$'nın $\hat{\beta}_1$'e göre daha büyük varyanslı olduğunun gösterilmesi gerekir. $\longrightarrow Var(\tilde{\beta}_1) \geq Var(\hat{\beta}_1)$
- Bu nedenle $\hat{\beta}_1$ ve $\tilde{\beta}_1$'nın varyanslarının hesaplanarak karşılaştırılması gereklidir.
- $\hat{\beta}_1$'nın tüm x'lere ($\mathbf{x}$) göre koşullu varyansı (bakınız Slayt 105)

$$Var(\hat{\beta}_1|\mathbf{x}) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1}^2} = \frac{\sigma^2}{SST_1(1 - R_1^2)}$$

- $\tilde{\beta}_1$'nın tüm x'lere ($\mathbf{x}$) göre koşullu varyansı
  - $\hat{\beta}_1$'nın Slayt 105'de gösterilen alternatif formülü önce $\tilde{\beta}_1$ için yazılıp tüm x'lere ($\mathbf{x}$) göre koşullu varyansını alındıktan sonra
  - Varyansın bir özelliği $\longrightarrow Var(\sum a_i u_i) = \sum a_i^2 Var(u_i)$, burada a_i'ler sabit sayılardır ve u_i'ler ikili olarak ilişkisizdir.

kullanalılarak hesaplanabilir.

Ek Bilgiler

$$\hat{\beta}_1 = \beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1} u_i}{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1}^2} \quad \longrightarrow \quad \tilde{\beta}_1 = \beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1} u_i}{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1}^2} \quad (\hat{\beta}_1 \text{ ve } \tilde{\beta}_1\text{'nın Alternatif Formülü})$$

$$\tilde{\beta}_1 = \beta_1 + \sum_{i=1}^{n} w_{i1} u_i, \quad \text{burada} \quad w_{i1} = \frac{\hat{r}_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1}^2} \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^{n} w_{i1} \hat{r}_{i1} = 1$$

$$\begin{aligned} Var(\tilde{\beta}_1 | \mathbf{x}) &= Var(\beta_1 + \sum_{i=1}^{n} w_{i1} u_i | \mathbf{x}) = Var(\sum_{i=1}^{n} w_{i1} u_i | \mathbf{x}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} w_{i1}^2 \underbrace{Var(u_i | \mathbf{x})}_{= \sigma^2 \text{ (ÇDR.7)}} \end{aligned}$$

$$Var(\tilde{\beta}_1 | \mathbf{x}) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} w_{i1}^2 \qquad (\tilde{\beta}_1\text{'nın Varyansı})$$

Ek Bilgiler

- Şimdi, ÇDR.1 - ÇDR.7 varsayımları altında $Var(\tilde{\beta}_1|\mathbf{x})$ ve $Var(\hat{\beta}_1|\mathbf{x})$ arasındaki farkı inceleyelim.

$$Var(\tilde{\beta}_1|\mathbf{x}) - Var(\hat{\beta}_1|\mathbf{x}) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} w_{i1}^2 - \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1}^2} = \sigma^2 \left(\sum_{i=1}^{n} w_{i1}^2 - \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1}^2} \right)$$

$$= \sigma^2 \left(\sum_{i=1}^{n} w_{i1}^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} w_{i1} \hat{r}_{i1} \right)^2}{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1}^2} \right) \qquad \left(\sum w_{i1}\hat{r}_{i1} = 1\right)$$

$$= \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} (w_{i1} - \hat{\gamma}_1 \hat{r}_{i1})^2, \quad \text{burada} \quad \hat{\gamma}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_{i1} \hat{r}_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1}^2}$$

Ek Bilgiler

$$Var(\tilde{\beta}_1|\mathbf{x}) - Var(\hat{\beta}_1|\mathbf{x}) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} (w_{i1} - \hat{\gamma}_1 \hat{r}_{i1})^2, \quad \text{burada} \quad \hat{\gamma}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_{i1}\hat{r}_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1}^2}$$

- σ^2 her zaman pozitif olan bir değerdir.
- $\sum_{i=1}^{n} (w_{i1} - \hat{\gamma}_1 \hat{r}_{i1})^2$ değeri, w_{i1}'in $\hat{r}_{i1}$ üzerine uygulanan regresyondan elde edilen kalıntı kareleri toplamıdır ve her zaman pozitif olan bir değerdir.
    - $\hat{\gamma}_1$ ise aynı regresyondan elde edilen eğim parametresi tahmincisidir.
- Bu nedenle $Var(\tilde{\beta}_1) \geq Var(\hat{\beta}_1)$'dır.
- $\hat{\beta}_1$ doğrusal sapmasız tahminciler içinde en küçük varyansa sahiptir, yani etkindir.
- $\hat{\beta}_1$'nın etkinliği şimdi $\hat{\beta}_j$ için yazılabilir:

Teorem: SEKK Parametere Tahmincilerinin Etkinliği

ÇDR.6 - ÇDR.7 varsayımları altında SEKK parametre tahmincileri etkindir.

$$Var(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma^2}{SST_j(1 - R_j^2)}, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

Sunuma Geri Dön