

# Basit Doğrusal Regresyon Modeli

## Ekonometri I

Dr. Ömer Kara<sup>1</sup>

<sup>1</sup>İktisat Bölümü  
Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

16 Kasım 2022



# Taslak

## 1 Motivasyon

## 2 Basit Doğrusal Regresyon Modeli

- Basit Doğrusal Regresyon Modelinin Mantığı
- Basit Doğrusal Regresyon Modeli
- Gauss–Markov Varsayımları
- Anakütle Regresyon Fonksiyonu

## 3 Basit Doğrusal Regresyon Modeli Tahmini

- Örneklem Regresyon Fonksiyonu
- Tahmin Yöntemleri
- SEKK Parametre Tahmincileri
- Yorumlama ve Örnekler
- Tahmin Edilen Değer ve Kalıntı
- Kareler Toplamları ve Determinasyon Katsayısı
- SEKK Parametre Tahmincilerinin Beklenen Değeri
- SEKK Parametre Tahmincilerinin Varyansı

## 4 SEKK Parametre Tahmincilerinin Özellikleri

- SEKK Parametre Tahmincilerinin Sapmasızlığı
- SEKK Parametre Tahmincilerinin Etkinliği
- Gauss–Markov Teoremi

## 5 Modelleme Sorunları

- Orijinden Geçen Regresyon
- Fonksiyonel Form



# Motivasyon

Bu bölümde, sırasıyla aşağıdaki konular incelenecaktır.

- Basit Doğrusal Regresyon modeli
- Basit Doğrusal Regresyon modelinde Gauss–Markov varsayımları
- Basit Doğrusal Regresyon modelinin tahminine ait yöntemler
- Sıradan En Küçük Kareler parametre tahmincileri
- Determinasyon Katsayısı
- Sıradan En Küçük Kareler parametre tahmincilerinin özellikleri
- Basit Doğrusal Regresyon modelinde Gauss–Markov teoremi



# Motivasyon

- Basit Doğrusal Regresyon (BDR) iki farklı değişken arasındaki ilişkiyi incelemek için kullanılır.
- Daha sonra göreceğimiz nedenlerden dolayı, ugulamalı analizde genel bir araç olarak kullanıldığında BDR modelinin kısıtları vardır.
- Buna rağmen, BDR modelinin nasıl yorumlanacağını öğrenmek, sonraki bölümlerde yapacağımız Çoklu Doğrusal Regresyon (ÇDR) modelini temelden anlamak üzerinde durulması gereken bir konudur.
- BDR modelinin kısıtları ve ÇDR modeli hakkındaki detaylı bilgi “Ekonometri I - Çoklu Doğrusal Regresyon Modeli: Tahmin” konusunda bulunabilir.



# Basit Doğrusal Regresyon Modelinin Mantığı

- Uygulamalı ekonometrik analizlerin çoğu şu önermeye baþlar:

## Temel Ekonometrik Önerme

$y$  ve  $x$ , bir anakütleyi temsil eden iki rassal deðiþkendir ve biz, " $y$ 'yi  $x$  cinsinden açıklamak" veya " $y$ 'nin  $x$ 'teki deðiþikliklerle nasýl deðistiðini incelemekle" ilgileniyoruz.

- "Ekonometri I - Matematik ve İstatistik Gözden Geçirme" konusunda  $y$  ve  $x$  arasındaki **kesin iliþkiyi** gösteren fonksiyonları incelemiþtik.
- Fakat sosyal bilimlerde iki deðiþken arasındaki iliþki hiçbir zaman kesin deðildir.
- Bu nedenle, " $y$ 'yi  $x$  cinsinden açıklayacak" bir model yazarken üç sorun vardır.
  - ➊ İki deðiþken arasında hiçbir zaman kesin bir iliþki olmadığına göre, **diger faktörlerin**  $y$ 'yi etkilemesine nasýl izin verebiliriz?
  - ➋  $y$  ve  $x$  arasındaki iliþkiyi belirten **fonksiyonel form** nedir?
  - ➌  $y$  ve  $x$  arasında bir **ceteris paribus** iliþkisi yakaladığımızdan nasýl emin olabiliriz?
- Bu sorunları,  $y$ 'den  $x$ 'e iliþkin bir denklem yazarak Slayt 6'deki gibi çözebiliriz.

# Basit Doğrusal Regresyon Modeli

## Model

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + u \quad (\text{İndekssiz})$$

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{İndeksli})$$

- $k$ : bağımsız değişken sayısı  $\rightarrow k = 1$
- $k + 1$ : bilinmeyen sabit  $\beta$  parametre sayısı  $\rightarrow \beta_0, \beta_1$
- $n$ : gözlem (veri) sayısı  $\rightarrow i = 1, 2, \dots, n$  ve  $s = 1, 2, \dots, n$ ,  $i \neq s$
- $y$ : bağımlı değişken
- $x$ : bağımsız değişken
- $u$ : Hata terimi,  $x$  dışında modele dahil edilmemiş tüm faktörlerin ortak etkisi
- $\beta_0$ : Kesim parametresi (1 tane var), sabit terim olarak da adlandırılır
- $\beta_1$ :  $x$  bağımsız değişkeni için eğim parametresi (1 tane var)
- $\mathbf{x}$ : Tüm bağımsız değişkenlerin temsili  $\rightarrow \mathbf{x} = \{x\}$
- Yukarıdaki model bazen **anakütle modeli** olarak da bilinir.

# Basit Doğrusal Regresyon Modeli

## Model

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + u \quad (\text{İndekssiz})$$

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{İndeksli})$$

- $u$ : Bağımlı değişken  $y$  üzerinde etkili olan bağımsız değişken  $x$  dışındaki diğer gözlenemeyen faktörleri temsil eder.
- $\beta_0$ :  $x = 0$  iken  $y$ 'nin alacağı değeri gösterir.
- $\beta_1$ :  $y$ 'yi etkileyen diğer tüm faktörler, yani  $u$ 'da içeren faktörler, sabitken ( $\Delta u = 0$ ),  $x$ 'deki değişimden  $y$ 'de yaratacağı yalnız etkiyi/değişmeyi gösterir.

$$\Delta y = \beta_1 \Delta x + \Delta u$$

$$\Delta y = \beta_1 \Delta x \quad \text{eğer} \quad \Delta u = 0$$

- Parametreleri yorumlarken fonksiyonel forma dikkat edilmelidir.
- Farklı fonksiyonel formların yorumlamalarılarındaki detaylı bilgi Slayt 93'de bulunabilir.
- $\Delta u = 0$  olduğunda,  $u$ 'nun içinde bulunan tüm gözlenemeyen faktörlerin ayrı ayrı sabit olduğu değil, ortalama olarak değişimin olmadığı kastedilir. Yani, negatif ve pozitif işaretli  $u$ 'lar birbirini götürdüğünde ortalama olarak değişim olmayacağı.

# Basit Doğrusal Regresyon Modeli

- Regresyon modellerinde değişkenler için kullanılan terminoloji aşağıda verilmiştir.

Tablo 1: Değişkenler Terminolojisi

| y                      | x                    |
|------------------------|----------------------|
| Bağımlı Değişken       | Bağımsız Değişken    |
| Açıklanan Değişken     | Açıklayıcı Değişken  |
| Tepki Değişkeni        | Kontrol Değişkeni    |
| Tahmin Edilen Değişken | Tahmin Eden Değişken |
| Regresand              | Regressor            |

# Basit Doğrusal Regresyon Modeli - Örnek 1

## Ücret vs. Eğitim Modeli

Bir çalışanın fazladan 1 yıl eğitim aldığında ücretinin ne kadar arendiğini araştırmak istedigimizi düşünelim. Yani, eğitimin ücret üzerindeki etkisini ayırtmak istiyoruz.

$$wage = \beta_0 + \beta_1 educ + u$$

*wage*: saat başına ücret (dolar); *educ*: eğitim düzeyi (yıl)

- **Eğim Parametresi**  $\beta_1$ : Ceteris paribus eğitim düzeyindeki 1 birimlik değişimin, saat başına ücretinde meydana getireceği değişimi belirtir.

$$\Delta wage = \beta_1 \Delta educ + \Delta u$$

$$\Delta wage = \beta_1 \Delta educ \quad \text{eğer} \quad \Delta u = 0$$

- **Rassal Hata Terimi**  $u$ : Saat başına ücreti etkileyen, eğitim düzeyi dışındaki tecrübe, kıdem, doğuştan gelen yetenek, cinsiyet ve yaş gibi tüm faktörlerin ortak etkisini gösterir.

Ceteris Paribus  $\Leftrightarrow$  Diğer tüm faktörlerin ortalamada sabit tutulması  $\Leftrightarrow \Delta u = 0$

## Basit Doğrusal Regresyon Modeli - Örnek 2

### Tarımsal Çıktı vs. Gübre Miktarı Modeli

Gübre miktarının üretilen tarımsal çıktı miktarı üzerindeki yalın etkisini araştırmak istedigimizi düşünelim. Yani, kullanılan gübre miktarının üretilen tarımsal çıktı miktarı üzerindeki etkisini ayırtmak istiyoruz.

$$\text{output} = \beta_0 + \beta_1 \text{fert} + u$$

*output*: tarımsal çıktı miktarı; *fert*: gübre miktarı

- **Eğim Parametresi**  $\beta_1$ : Ceteris paribus gübre miktarındaki 1 birimlik değişimin, çıktı miktarında meydana getireceği değişimi belirtir.

$$\Delta \text{output} = \beta_1 \Delta \text{fert} + \Delta u$$

$$\Delta \text{output} = \beta_1 \Delta \text{fert} \quad \text{eğer} \quad \Delta u = 0$$

- **Rassal Hata Terimi**  $u$ : Çıktı miktarını etkileyen, gübre miktarı dışındaki yağmur miktarı ve toprağın kalitesi gibi tüm faktörlerin ortak etkisini gösterir.  
Ceteris Paribus  $\Leftrightarrow$  Diğer tüm faktörlerin ortalamada sabit  $\Leftrightarrow \Delta u = 0$

# Doğrusal Model

- Regresyon modelinin doğrusal olması şu anlamına gelir:  $x$ 'deki değişmenin  $y$ 'de meydana getireceği etki,  $x$ 'in başlangıç değeri ne olursa olsun aynıdır, yani sabittir.
- Uygulamadaki bu sabit etki varsayıımı çoğu zaman gerçeklere uymaz. Örneğin:
  - Ölçeğe göre artan ya da azalan getiri doğrusal regresyon modelleriyle açıklanamaz.
  - Slayt 9'de verilen ücret vs. eğitim modelinde, ilave bir yıl eğitimimin etkisi önceki eğitim düzey(ler)ine göre aynıdır, fakat其实 daha fazla olması beklenir.
  - Tecrübenin ücret üzerindeki etkisini araştıran bir modelde ise gerşekte tecrübe düzeyinin ücretler üzerinde önce artan sonra azalan bir etkiye sahip olması beklenir.
- Doğrusal modellerin bu kısıtına rağmen Ekonometri Teorisi'nde basitliği ve kolay anlaşılmasının nedeniyle sıkılıkla kullanılır.
- Sabit olmayan etkilerin nasıl modelleneceğini daha sonra göreceğiz.

# Gauss-Markov Varsayımları

## BDR.1: Gözlem Sayısı

Gözlem sayısı  $n$  tahmin edilecek anakütle parametre sayısından büyük ya da en azından eşit olmalıdır.

$$n \geq k + 1$$

## BDR.2: Parametrelerde Doğrusallık

Model parametrelerde doğrusaldır.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + u \checkmark$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x^2 + u \checkmark$$

$$y = \beta_0 + \beta_1^2 x + u \times$$

$$y = \beta_0 + \sqrt{\beta_1} x + u \times$$

► Detay



# Gauss-Markov Varsayımları

## BDR.3: Rassallık

Tahminde kullanılan  $n$  tane gözlem ilgili anakütleden rassal örneklemeye yoluyla seçilmiştir. Yani gözlemler stokhastiktir (rassal), yani deterministik (kesin) değildir.

$$\{(x_i, y_i) : i = 1, 2, \dots, n\}$$

## BDR.4: Bağımsız Değişkenin Sabit Olmaması

Örneklemde (ve bu nedenle anakütlede) bağımsız değişken kendi içinde sabit değildir (yeterli değişimlik vardır).

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 > 0$$

► Detay



# Gauss-Markov Varsayımları

## BDR.5: Sıfır Koşullu Ortalama

Bağımsız değişkenin herhangi bir değeri verildiğinde,  $u$  hata teriminin beklenen değeri sıfıra eşittir.

$$E(u|x) = E(u|\mathbf{x}) = 0$$

► Detay

- Yinelenen Beklentiler Kanunu ve koşullu beklenen değerin 5. özelliği kullanılarak Sıfır Koşullu Ortalama varsayıımı yeniden tanımlanabilir.

► Ek Bilgi

## BDR.5: Sıfır Koşullu Ortalama

$$E(u|\mathbf{x}) = E(u) = 0$$

$$\text{Cov}(x, u) = 0, \quad \text{Corr}(x, u) = 0 \quad \text{ve} \quad E(xu) = 0$$

Sonuç:  $u$  ve  $x$  ortalama bağımsızdır. Yani  $u$  ve  $x$  doğrusal olarak ilişkisizdir.

► Ek Bilgi



# Gauss-Markov Varsayımları

## BDR.6: Otokorelasyon Olmaması

Hata terimleri arasında otokorelasyon yoktur.

$$\text{Corr}(u_i, u_s | x) = 0, \quad i \neq s$$

$$\text{Corr}(u_i, u_s | \mathbf{x}) = 0, \quad i \neq s$$

$$\text{Corr}(u_i, u_s) = 0, \quad i \neq s$$

► Detay

- BDR.6 varsayıımı, yatay-kesit analizindeki rassallık varsayıımı (BDR.3) nedeniyle genellikle otomatik olarak sağlanır. Fakat çok ekstrem durumlarda gereklidir ve bu nedenle diğer birçok kaynaktan farklı olarak eklenmiştir.
- BDR.6 varsayıımı aşağıdaki eşitlikleri de sağlar.

## BDR.6: Otokorelasyon Olmaması

$$\text{Cov}(u_i, u_s | \mathbf{x}) = 0 \quad \text{ve} \quad \text{Cov}(u_i, u_s) = 0, \quad i \neq s$$

$$E(u_i u_s | \mathbf{x}) = 0 \quad \text{ve} \quad E(u_i u_s) = 0, \quad i \neq s$$

► Ek Bilgi

# Gauss-Markov Varsayımları

## BDR.7: Sabit Varyans (Homoscedasticity)

$u$  hata teriminin bağımsız değişken  $x$ 'e göre koşullu varyansı sabittir.

$$\text{Var}(u|x) = \sigma^2$$

$$\text{Var}(u|\mathbf{x}) = \sigma^2$$

$$\text{Var}(u) = \sigma^2$$

► Detay

- BDR.7 varsayıımı aşağıdaki eşitlikleri de sağlar.

## BDR.7: Sabit Varyans (Homoscedasticity)

$$E(u^2|\mathbf{x}) = \sigma^2 \quad \text{ve} \quad E(u^2) = \sigma^2$$

► Ek Bilgi

- $\sigma$  regresyonun standart sapmasıdır (bilinmiyor, bu nedenle tahmin edilecek).



# Gauss–Markov Varsayımları

- Yukarıda verilen **Gauss–Markov Varsayımları** yatay-kesit verisi ile yapılan regresyon için geçerli varsayımlardır.
- Zaman serileri ile yapılan regresyonlarda bu varsayımların değiştirilmesi gerekir.
- Gauss–Markov Varsayımları, **BDR Varsayımları** olarak da anılır.
- Bazı BDR Varsayımlarının detayı ilerleyen slaytlarda konu akışı içinde verilmiştir.
- Gauss–Markov Varsayımları daha sonra **Gauss–Markov Teoremi**'ni oluşturmada kullanılacaktır.
- Gauss–Markov Teoremi ise BDR modelinin **Sıradan En Küçük Kareler Yöntemi** ya da **Momentler Yöntemi** ile tahmini için teorik dayanak sağlamada kullanılacaktır. Bakınız Slayt 89.

# Anakütle Regresyon Fonksiyonu

- **Anakütle Regresyon Fonksiyonu (ARF)**, BDR.5 varsayıımı altında, bağımlı değişken  $y$ 'nin bağımsız değişken  $x$ 'e göre koşullu ortalamasıdır.

## Anakütle Regresyon Fonksiyonu (ARF)

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + u \quad (\text{Model})$$

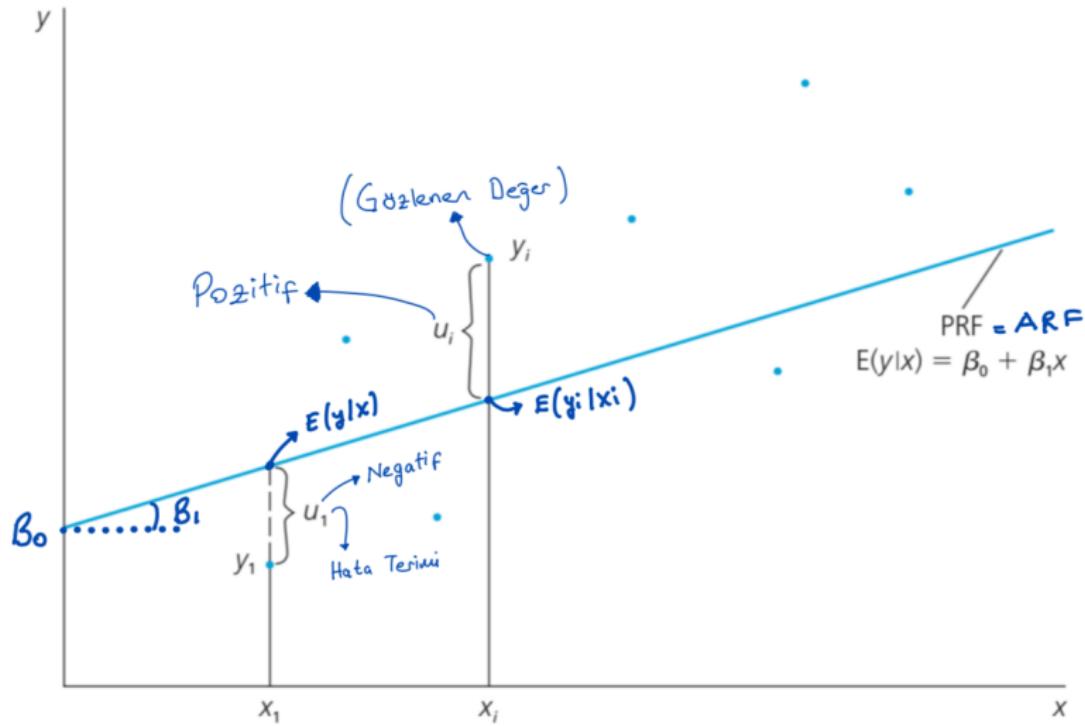
$$E(y|x) = \beta_0 + \beta_1 x \quad (\text{ARF - İndekssiz})$$

$$E(y|\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 x \quad (\text{ARF - İndekssiz})$$

$$E(y_i|\mathbf{x}_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i \quad (\text{ARF - İndeksli})$$

- ARF tektir ve bilinmez.
- ARF, bağımsız değişken  $x$ 'in doğrusal bir fonksiyonudur.
- $y = \beta_0 + \beta_1 x + u$  modeline ait ARF Şekil 1'de gösterilmiştir.

# Anakütle Regresyon Fonksiyonu

Şekil 1:  $y = \beta_0 + \beta_1 x + u$  Modeline ARF

Kaynak: Wooldridge (2016)

# Anakütle Regresyon Fonksiyonu

- BDR.5 ve BDR.7 varsayımları altında bağımlı değişken  $y$ 'nin bağımsız değişken  $x$ 'e göre koşullu dağılımı aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$y$ 'nin  $x$ 'e Göre Koşullu Dağılımı

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + u \quad (\text{Model})$$

$$E(y|\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 x \quad (\text{ARF})$$

$$\text{Var}(y|\mathbf{x}) = \sigma^2$$

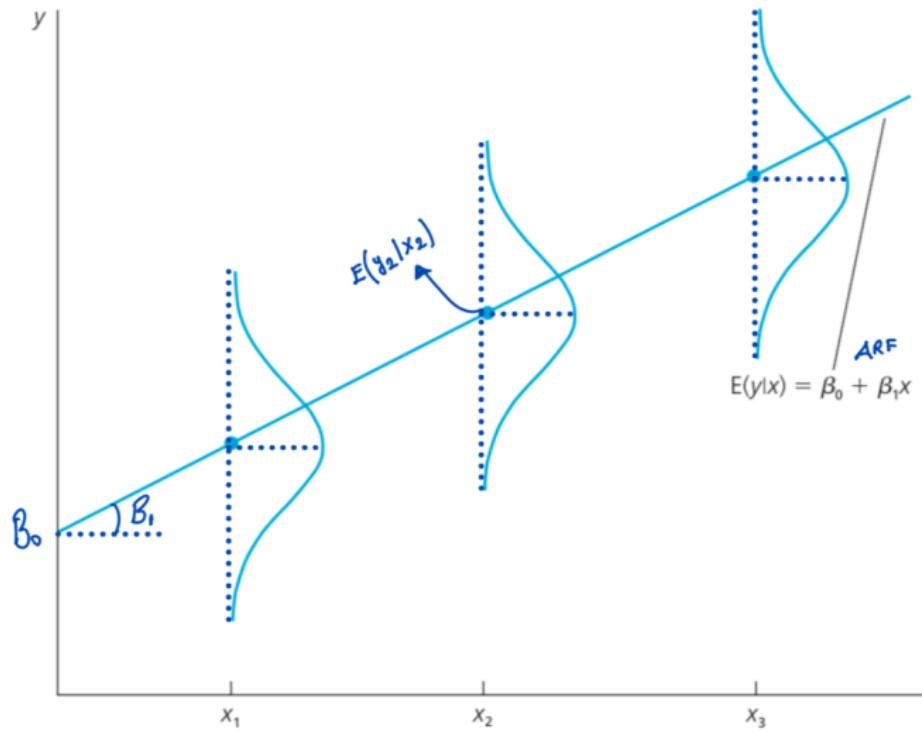
$$y|\mathbf{x} \sim (\underbrace{\beta_0 + \beta_1 x}_{\text{Ortalama}}, \underbrace{\sigma^2}_{\text{Varyans}}) \quad (y|\mathbf{x}'\text{in dağılımı})$$

► Ek Bilgi

- Verilmiş bağımsız değişken  $x$  düzeyinde bağımlı değişken  $y$ 'nin dağılımının ortalaması  $E(y|\mathbf{x})$  ve varyansı  $\sigma^2$ 'dir.
- BDR.5 (sıfır koşullu ortalama) ve BDR.7 (sabit varyans) varsayımları altında,  $y = \beta_0 + \beta_1 x + u$  modeline ait ARF ve  $y|\mathbf{x}$ 'in dağılımı Şekil 2'de gösterilmiştir.



# Anakütle Regresyon Fonksiyonu ve $y|\mathbf{x}$ 'in Dağılımı



Şekil 2:  $y = \beta_0 + \beta_1x + u$  Modeline Ait ARF ve  $y|\mathbf{x}$ 'in Dağılımı

Kaynak: Wooldridge (2016)

# Örneklem Regresyon Fonksiyonu: Amaç

- BDR tahminindeki asıl amacımız sırasıyla:
  - Öncelikle, iktisat teorisine göre model oluşturmak.
  - Gauss–Markov varsayımları kullanarak ARF'yi oluşturmak.
  - ARF'yi rassal örneklemeye seçtiğimiz belli sayıdaki veriyi kullanarak tahmin etmektir.
- ARF'nin tahmini ise **Örneklem Regresyon Fonksiyonu**'dur ve bu tahmin örneklemden örnekleme değişir.

## Model

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + u$$

## Anakütle Regresyon Fonksiyonu (ARF)

$$E(y|\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 x$$

## Örneklem Regresyon Fonksiyonu (ÖRF)

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$$

- ARF'deki parametreler  $(\beta_0, \beta_1)$  bilinmeyen sabit sayılarken, ÖRF'deki parametreler  $(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$  örneklemden örnekleme değişen rassal değişkenlerdir.



# Örneklem Regresyon Fonksiyonu: Amaç

## Model

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + u \quad (\text{İndekssiz})$$

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i \quad (\text{İndeksli})$$

## Anakütle Regresyon Fonksiyonu (ARF)

$$E(y|\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 x \quad (\text{İndekssiz})$$

$$E(y_i|\mathbf{x}_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i \quad (\text{İndeksli})$$

## Örneklem Regresyon Fonksiyonu (ÖRF)

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x \quad (\text{İndekssiz})$$

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i \quad (\text{İndeksli})$$

# Örneklem Regresyon Fonksiyonu

## Örneklem Regresyon Fonksiyonu (ÖRF)

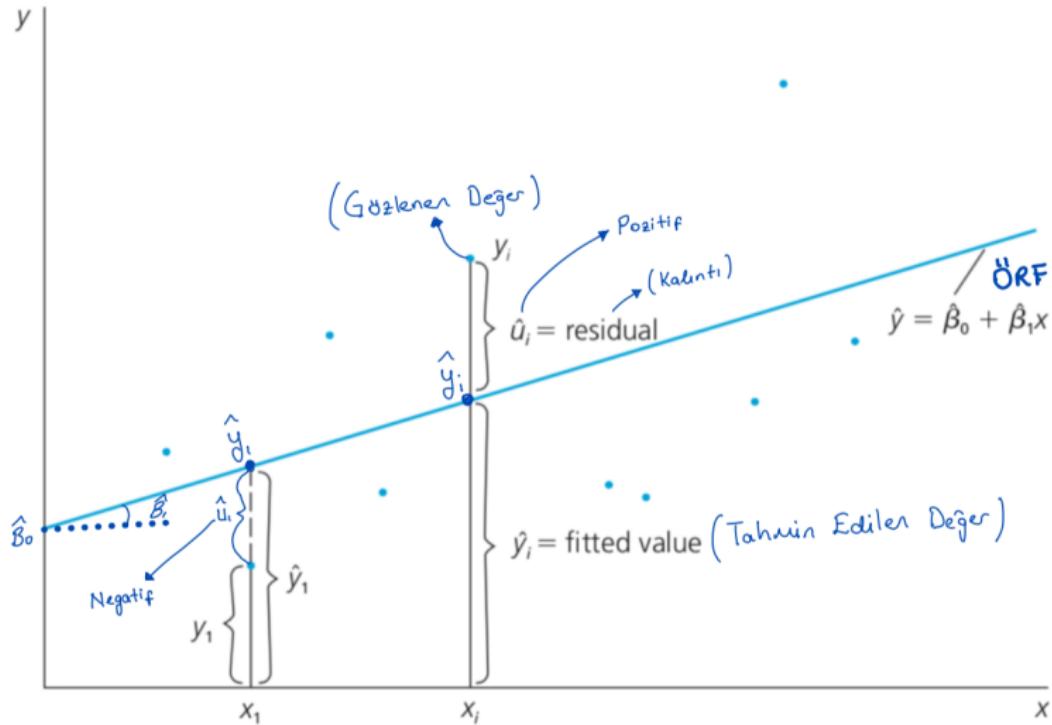
$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x \quad (\text{İndekssiz})$$

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i \quad (\text{İndeksli})$$

$$\underbrace{y_i}_{\substack{\text{Gözlenen Değer}}} = \underbrace{\hat{y}_i}_{\substack{\text{Tahmin Edilen Değer}}} + \underbrace{\hat{u}_i}_{\substack{\text{Kalıntı (Artık)} \\ \text{Rassal Değil (Deterministik)}}}$$

- $\hat{y}_i$ :  $y_i$  bağımlı değişkeninin tahmini
- Parametre tahmincileri örneklemden örnekleme değişir, yani rassaldır.
  - $\hat{\beta}_0$ :  $\beta_0$  kesim parametresinin tahmini (1 tane var)
  - $\hat{\beta}_1$ :  $\beta_1$  eğim parametresinin tahmini (1 tane var)
- $\hat{u}_i$ : Kalıntı (artık) olarak adlandırılır. Gözlenen değer  $y_i$  ile tahmin edilen değer  $\hat{y}_i$ 'nın farktır. Rassal değildir, tahmin sırasında hesaplanır. Hata terimi  $u_i$ 'nun örneklem analogu olarak yorumlanabilir fakat kesinlikle aynı şeyler değildir.
- Hata terimi  $u$  ve kalıntı  $\hat{u}$  arasındaki farklar için Slayt 28'i inceleyin.
- $y = \beta_0 + \beta_1 x + u$  modeline ait ÖRF Şekil 3'de gösterilmiştir.

# Örneklem Regresyon Fonksiyonu

Şekil 3:  $y = \beta_0 + \beta_1 x + u$  Modeline Ait ÖRF

Kaynak: Wooldridge (2016)

# Örneklem Regresyon Fonksiyonu

- Model, ARF ve ÖRF denklemleri arasında dikkat edilmesi gereken farklar vardır.

## Model, ARF ve ÖRF

$$\underbrace{y_i}_{\text{Gözlenen Değer}} = \underbrace{\beta_0 + \beta_1 x_i}_{E(y_i | \mathbf{x}_i)} + \underbrace{u_i}_{\substack{\text{Rassal Hata Terimi} \\ (\text{Sistemetik Olmayan Kısım})}} \quad (\text{Model})$$

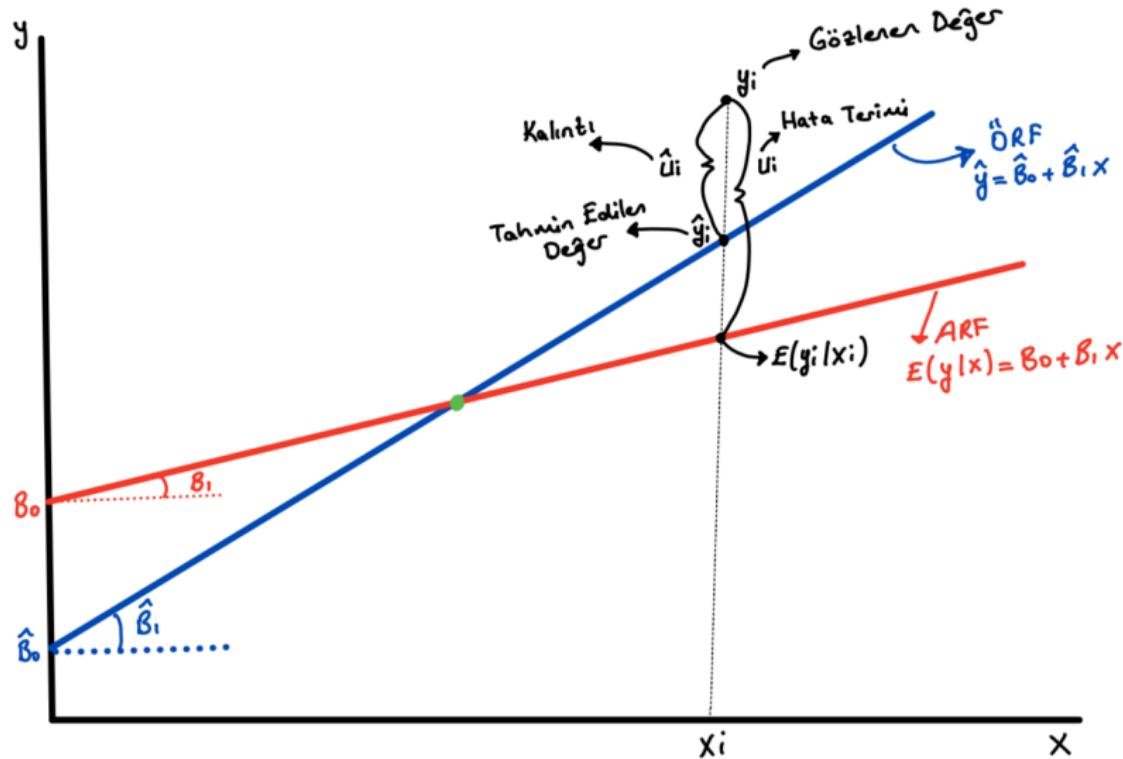
$$E(y_i | \mathbf{x}_i) = \underbrace{\beta_0 + \beta_1 x_i}_{\text{Sistemetik Kısım}} \quad (\text{ARF})$$

$$\underbrace{\hat{y}_i}_{\text{Tahmin Edilen Değer}} = \underbrace{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i}_{\text{Sistemetik Kısımın Tahmini}} \quad (\text{ÖRF})$$

$$\underbrace{y_i}_{\text{Gözlenen Değer}} = \underbrace{\hat{y}_i}_{\text{Tahmin Edilen Değer}} + \underbrace{\hat{u}_i}_{\substack{\text{Kalıntı (Artık)} \\ \text{Rassal Değil (Deterministik)}}}$$

- $y = \beta_0 + \beta_1 x + u$  modeline ait ARF ve ÖRF Şekil 4'de beraberce gösterilmiştir.

# ARF ve ÖRF



Şekil 4:  $y = \beta_0 + \beta_1 x + u$  Modeline Ait ARF ve ÖRF

# Hata Terimi $u$ ve Kalıntı $\hat{u}$ Arasındaki Farklar

- Kalıntı  $\hat{u}$ , hata terimi  $u$ 'nun örneklem analogu olarak yorumlanabilir fakat kesinlikle aynı şeyler değildir. Bu nedenle kesinlikle birbirine karıştırılmamalıdır.
- Hata terimi  $u$ :

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \underbrace{u_i}_{\text{Hata Terimi}}$$

- Tıpkı anakütle parametreleri  $\beta_0$  ve  $\beta_1$  gibi gözlenemez ve bu nedenle bilinemez.
- Rassaldır.

- Kalıntı  $\hat{u}$ :

$$y_i = \underbrace{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i}_{\text{Tahmin Edilen Değer } \hat{y}_i} + \underbrace{\hat{u}_i}_{\text{Kalıntı}}$$

- Tahmin sırasında veriler kullanılarak hesaplanır ve bu nedenle bilinir.
- Rassal değildir.

# Örneklem Regresyon Fonksiyonu: Tahmin Yöntemleri

Model, ARF ve ÖRF

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + u \quad (\text{Model})$$

$$E(y|\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 x \quad (\text{ARF})$$

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x \quad (\text{ÖRF})$$

- Örneklem Regresyon Fonksiyonu (ÖRF), iki yöntemle tahmin edilebilir.
  - Sıradan En Küçük Kareler (SEKK) Yöntemi
  - Momentler Yöntemi
- İki yöntem de aynı tahmin sonuçlarını verir.



# Sıradan En Küçük Kareler Yöntemi

- **Sıradan En Küçük Kareler Yöntemi**, kalıntı kareleri toplamını (SSR) en küçük yapan parametre tahmincilerini hesaplamaya çalışır.

Örneklem Regresyon Fonksiyonu (ÖRF)

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$$

Gözlenen Değer, Tahmin Edilen Değer ve Kalıntı

$$y_i = \hat{y}_i + \hat{u}_i \quad \longrightarrow \quad \hat{u}_i = y_i - \hat{y}_i$$

SEKK Amaç Fonksiyonu

$$\min_{\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1} SSR = \min_{\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1} \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2 = \min_{\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i)^2$$

# Sıradan En Küçük Kareler Yöntemi

## SEKK Birinci Sıra Koşulları

$$\frac{\partial SSR}{\partial \hat{\beta}_0} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i) = 0$$

$$\frac{\partial SSR}{\partial \hat{\beta}_1} = -2 \sum_{i=1}^n x_i (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i) = 0$$

# Sıradan En Küçük Kareler Yöntemi

## SEKK Birinci Sıra Koşulları

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i) = 0 \quad \longrightarrow \quad \sum_{i=1}^n \hat{u}_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n x_i (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i) = 0 \quad \longrightarrow \quad \sum_{i=1}^n x_i \hat{u}_i = 0$$

- Birinci sıra koşullarından elde edilen  $k + 1$  tane denklemin çözümünden parametre tahmincileri  $\hat{\beta}_0$  ve  $\hat{\beta}_1$  (toplamda  $k + 1 = 2$  tane) bulunur.

# Momentler Yöntemi

- Anakütle moment koşulları BDR.5 varsayıımı kullanılarak yazılabilir.
- Daha sonra anakütle moment koşullarını kullanarak örneklem moment koşulları elde edilebilir.

BDR.5: Sıfır Koşullu Ortalama

$$E(u|\mathbf{x}) = E(u) = 0$$

$$Cov(x, u) = 0, \quad Corr(x, u) = 0 \quad \text{ve} \quad E(xu) = 0$$

Sonuç:  $u$  ve  $x$  ortalama bağımsızdır. Yani  $u$  ve  $x$  doğrusal olarak ilişkisizdir.



# Momentler Yöntemi

## Anakütle Moment Koşulları ve Örneklem Moment Koşulları

Anakütle

$$\overbrace{E(u) = 0}^{\text{Anakütle}}$$

Örneklem

$$\overbrace{\sum_{i=1}^n \hat{u}_i = 0}^{\text{Örneklem}}$$

$$E(xu) = 0 \quad \longrightarrow \quad \sum_{i=1}^n x_i \hat{u}_i = 0$$



# Momentler Yöntemi

- Örneklem moment koşullarından elde edilen  $k + 1$  tane denklemin çözümünden parametre tahmincileri  $\hat{\beta}_0$  ve  $\hat{\beta}_1$  (toplamda  $k + 1 = 2$  tane) bulunur.
- SEKK birinci sıra koşulları ve örneklem moment koşulları aslında aynı denklemler kümesini verir.
- Bu nedenle, SEKK Yöntemi ve **Momentler Yöntemi** ile BDR modeli tahmin edildiğinde aynı sonuçlara ulaşılır.
- Genellikle kullanılan yöntem SEKK'dır. Bu nedenle parametre tahmincileri  $\hat{\beta}_0$  ve  $\hat{\beta}_1$  genellikle **SEKK parametre tahmincileri** ya da **SEKK tahmincileri** olarak adlandırılır.
- Bu yöntemlerin tek çözüm vermesi için BDR.4 (Bağımsız Değişkenin Sabit Olmaması) varsayıminının sağlanması gereklidir. Bakınız Slayt 13 ve Slayt 37.

# SEKK Parametre Tahmincileri

## Ana Model

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i$$

(Model - İndeksli)

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$$

(ÖRF - İndeksli)

- $\beta_0$  kesim parametresinin tahmini  $\hat{\beta}_0$ :

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

► Ek Bilgi

- $\beta_1$  eğim parametresinin tahmini, ya da  $x$ 'in eğim parametresinin tahminci,  $\hat{\beta}_1$ :

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

► Ek Bilgi 1

► Ek Bilgi 2



# SEKK Parametre Tahmincileri

- $\beta_1$  eğim parametresinin tahmini, ya da  $x$ 'in eğim parametresinin tahmincisi,  $\hat{\beta}_1$ :

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad \rightarrow \quad \hat{\beta}_1 = \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n-1}}_{\substack{y \text{ ile } x \text{'in Örneklem Kovaryansı} \\ \underbrace{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}_{n-1}}} \\ \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}_{x \text{'in Örneklem Varyansı}}$$

- ①  $\hat{\beta}_1$ ,  $y$  ile  $x$ 'in örneklem kovaryansının,  $x$ 'in örneklem varyansına oranına eşittir.
- ②  $\hat{\beta}_1$ 'nın işaretti  $y$  ile  $x$ 'in örneklem kovaryansının işaretine bağlıdır. Örneklemde  $y$  ve  $x$  aynı yönde ilişkiliyse  $\hat{\beta}_1$  pozitif işaretli, ters yönde ilişkiliyse negatif işaretli olacaktır.
- ③  $\hat{\beta}_1$ 'nın hesaplanabilmesi için  $x$ 'de yeterli değişiklik olmalıdır. Eğer örneklemde tüm  $x$ 'ler aynı değerleri alıysa  $x$ 'in örneklem varyansı sıfır olur ve  $\hat{\beta}_1$  tanımsız olur.

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 > 0$$

# Sıfır Koşullu Ortalama Varsayımları (BDR.5) Yorumu

## Basit Doğrusal Regresyon Modeli

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + u$$

- BDR modelinde,  $u$ 'nun  $x$ 'lerle ilişkisiz olması varsayımlı, yani BDR.5:

$$E(u|x) = E(u|\mathbf{x}) = 0$$

- Yani  $x$ 'in anakütüledeki tüm değerleri için  $u$ 'nun beklenen değeri sıfırdır.
- Ücret vs. eğitim modelinde (Slayt 9) BDR.5 varsayımlı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$wage = \beta_0 + \beta_1 educ + u \quad (\text{Model})$$

$$E(u|educ) = 0 \quad (\text{BDR.5})$$

- Bu ücretleri etkileyen diğer faktörlerin ( $u$ ) ortalama olarak  $educ$  ile ilişkisiz olduğu anlamına gelir.
- Örneğin, doğuştan gelen yetenek (ability)  $u$ 'nun bir parçası ise, ortalama yetenek düzeyi, eğitimin tüm düzeylerinde aynıdır (sabittir).

$$E(ability|educ = 4) = E(ability|educ = 8) = \dots = 0$$

- Eğer eğitim düzeyi ile doğuştan gelen yeteneğin ilişkili olduğunu düşünüyorsak (örneğin: daha yetenekliler okulda da daha iyiler ve bu nedenle eğitim düzeyleri fazla), bu durumda BDR.5 varsayımlı sağlanmaz.



# Sıfır Koşullu Ortalama Varsayıımı (BDR.5) Yorumu

- Tarımsal çıktı vs. gübre miktarı modelinde (Slayt 10), BDR.5 varsayıımı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$output = \beta_0 + \beta_1 fert + u \quad (\text{Model})$$

$$E(u|fert) = 0 \quad (\text{BDR.5})$$

- Yani, tarımsal çıktı miktarını etkileyen diğer faktörler (yağmur miktarı, toprağın kalitesi vs.), ortalama olarak, *fert* değişkeniyle ilişkisizdir.
- Eğer yüksek kaliteli toprak parçalarına yüksek miktarda gübre uygulanırsa (yani toprak kalitesi ve gübre miktarı ilişkili), hata terimi *u*'nun beklenen değeri gübre miktarı ile değişir. Bu durumda BDR.5 varsayıımı sağlanmaz.



# Regresyonun Yorumu

## Model ve ÖRF

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + u \quad (\text{Model})$$

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x \quad (\text{ÖRF})$$

$$\Delta\hat{y} = \hat{\beta}_1 \Delta x \quad (\text{Değişim Cinsinden})$$

- Eğim paramtresi tahmincisi  $\hat{\beta}_1$ , bağımsız değişken  $x$ 'in  $y$  üzerindeki yalnız/kısmı yani ceteris paribus etkisini verir.

- $\hat{\beta}_1$ 'nın yorumu:

$$\Delta\hat{y} = \hat{\beta}_1 \Delta x$$

- $x$ 'de meydana gelen 1 birimlik değişmenin  $y$ 'de meydana getireceği ortalama değişim  $\hat{\beta}_1$  kadardır.
  - Parametreleri yorumlarken fonksiyonel forma dikkat edilmelidir.
  - Farklı fonksiyonel formların yorumlamalarılarındaki detaylı bilgi Slayt 93'de bulunabilir.

# Örnek: CEO Maaşı vs. Karlılık Modeli

## CEO Maaşı vs. Karlılık Modeli

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + u \quad \rightarrow \quad \text{salary} = \beta_0 + \beta_1 \text{roe} + u \quad (\text{Model})$$

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x \quad \rightarrow \quad \widehat{\text{salary}} = \beta_0 + \beta_1 \text{roe} \quad (\text{ÖRF})$$

$$\widehat{\text{salary}} = 963.191 + 18.501 \text{ roe} \quad (\text{ÖRF})$$

$$n = 209$$

*salary*: CEO maaşı (bin dolar); *roe*: şirketin karlılık yüzdesi

- Kesim parametresi  $\hat{\beta}_0 = 963.191$  olarak tahmin edilmiştir.
  - $roe = 0$  olduğunda modelce tahmin edilen CEO maaşı  $\widehat{\text{salary}}$ 'yi ifade eder. Yani şirketin karlılık yüzdesi  $roe$  sıfır olduğunda, CEO maaşı \$963191'dir.
- Eğim parametresi  $\hat{\beta}_1 = 18.501$  olarak tahmin edilmiştir.
  - $roe$ 'yı 1 birim arttırdığımızda CEO maaşı  $\text{salary}$  18.501 birim, yani \$18501 artar.
  - Başka bir ifadeyle, iki CEO'dan birinin  $roe$  düzeyi diğerinden bir birim fazlaysa, bu iki CEO için tahmin edilen maaş farkı ortalama olarak \$18501'dir.
  - Burada somut iki CEO'dan değil ortalama durumdan bahsedilmektedir.



## Örnek: CEO Maaşı vs. Karlılık Modeli

- $roe$ 'daki farklı artışların CEO maaşı üzerindeki etkisini tahmin etmek için ÖRF'yi kullanabiliriz. Örneğin,  $\Delta roe = 30$  ise

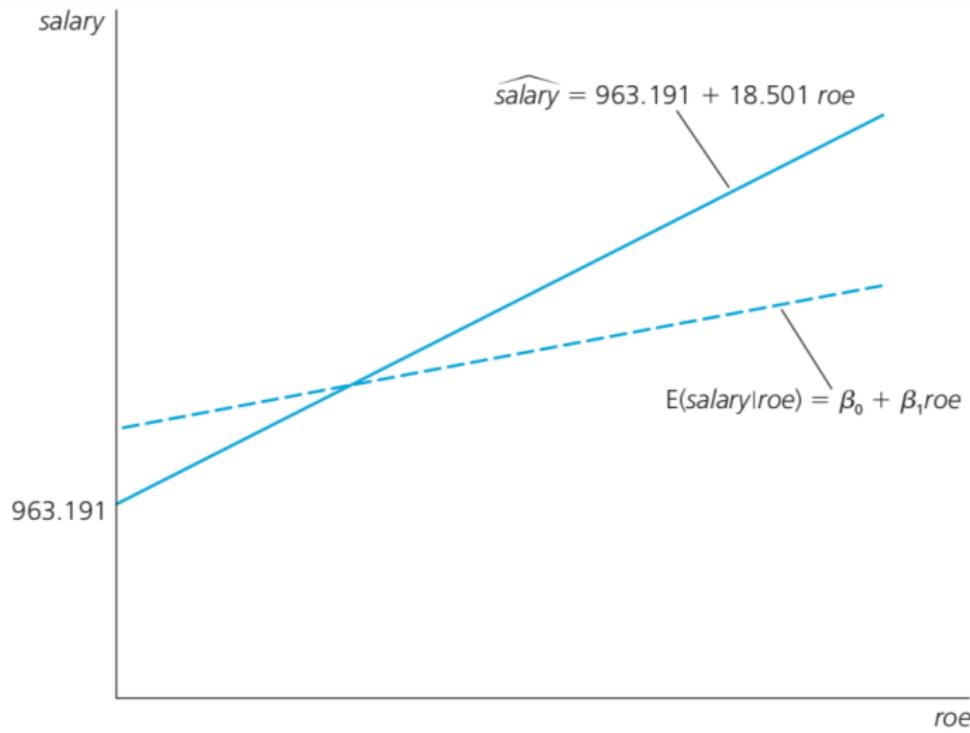
$$\begin{aligned}\widehat{\Delta salary} &= 18.501 \Delta roe && (\text{Değişim Cins.}) \\ &= 18.501 \times 30 \\ &= 555.030\end{aligned}$$

- Farklı  $roe$  seviyelerindeki CEO maaşını tahmin etmek için ÖRF'yi kullanabiliriz. Örneğin,  $roe = 30$  ise

$$\begin{aligned}\widehat{salary} &= 963.191 + 18.501 roe && (\text{ÖRF}) \\ &= 963.191 + 18.501 \times 30 \\ &= 1518.221\end{aligned}$$

- Ancak bu, şirketi %30 karlılığa sahip olan belirli bir CEO'nun \$1518221 kazandığı anlamına gelmez. Bu sadece ÖRF kullanılarak yapılan bir tahmidir.
- Slayt 41'de verilen CEO maaşı vs. karlılık modeline ait
  - ARF ve ÖRF'nin grafiği Şekil 5'de gösterilmiştir.
  - İlk 15 gözlem için bağımsız  $roe$ , bağımsız  $değişken roe$  ya da gözlenen değer  $salary$ , tahmin edilen değer  $salary$ , ve kalıntı  $\hat{u}$  Şekil 6'de gösterilmiştir.

# Örnek: CEO Maaşı vs. Karlılık Modeli



Şekil 5: CEO Maaşı vs. Karlılık Modeline Ait ARF ve ÖRF

Kaynak: Wooldridge (2016)

# Örnek: CEO Maaşı vs. Karlılık Modeli

**TABLE 2.2 Fitted Values and Residuals for the First 15 CEOs**

| obsno | roe  | salary | salaryhat | uhat      |
|-------|------|--------|-----------|-----------|
| 1     | 14.1 | 1095   | 1224.058  | -129.0581 |
| 2     | 10.9 | 1001   | 1164.854  | -163.8542 |
| 3     | 23.5 | 1122   | 1397.969  | -275.9692 |
| 4     | 5.9  | 578    | 1072.348  | -494.3484 |
| 5     | 13.8 | 1368   | 1218.508  | 149.4923  |
| 6     | 20.0 | 1145   | 1333.215  | -188.2151 |
| 7     | 16.4 | 1078   | 1266.611  | -188.6108 |
| 8     | 16.3 | 1094   | 1264.761  | -170.7606 |
| 9     | 10.5 | 1237   | 1157.454  | 79.54626  |
| 10    | 26.3 | 833    | 1449.773  | -616.7726 |
| 11    | 25.9 | 567    | 1442.372  | -875.3721 |
| 12    | 26.8 | 933    | 1459.023  | -526.0231 |
| 13    | 14.8 | 1339   | 1237.009  | 101.9911  |
| 14    | 22.3 | 937    | 1375.768  | -438.7678 |
| 15    | 56.3 | 2011   | 2004.808  | 6.191895  |

Şekil 6: CEO Maaşı vs. Karlılık Modeli Tahminine Ait İlk 15 Gözlem İçin Bazı Değerler

Kaynak: Wooldridge (2016)

# Örnek: Ücret vs. Eğitim Modeli

## Ücret vs. Eğitim Modeli

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + u \quad \rightarrow \quad wage = \beta_0 + \beta_1 educ + u \quad (\text{Model})$$

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x \quad \rightarrow \quad \widehat{wage} = \beta_0 + \beta_1 educ \quad (\text{ÖRF})$$

$$\widehat{wage} = -0.9 + 0.54 educ \quad (\text{ÖRF})$$

$n = 526$

*wage*: saat başına ücret (dolar); *educ*: eğitim düzeyi (yıl)

- Kesim parametresi  $\hat{\beta}_0 = -0.9$  olarak tahmin edilmiştir.
  - $educ = 0$  olduğunda modelce tahmin edilen ücret  $\widehat{wage}$ 'i ifade eder. Yani çalışanın eğitim düzeyi *educ* sıfır olduğunda, ücreti  $-\$0.9$ 'dur. Ancak ücret negatif olamayacağı için yorumlanması anlamsızdır.
- Eğim parametresi  $\hat{\beta}_1 = 0.54$  olarak tahmin edilmiştir.
  - *educ*'u 1 yıl arttırdığımızda ücret *wage* 0.54 birim, yani \$0.54 artar.
  - Başka bir ifadeyle, iki çalışandan birinin *educ* düzeyi diğerinden bir yıl fazlaysa, bu iki çalışan için tahmin edilen ücret farkı ortalama olarak \$0.54'dir.
  - Burada somut iki çalışandan değil ortalama durumdan bahsedilmektedir.

# Tahmin Edilen Değer ve Kalıntı

$i$ 'inci Gözlem İçin Tahmin Edilen  $\hat{y}_i$  Değeri

$$\underbrace{\hat{y}_i}_{\text{Tahmin Edilen Değer}} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i \quad (\text{ÖRF})$$

- $x_i$  değerini tahmin edilen regresyonda (ÖRF'de) yerine koyarsak tahmin edilen değer  $\hat{y}_i$ 'yi elde ederiz.

Kalıntı (Artık)

$$\underbrace{\hat{u}_i}_{\text{Kalıntı (Artık)}} = \underbrace{y_i}_{\text{Gözlenen Değer}} - \underbrace{\hat{y}_i}_{\text{Tahmin Edilen Değer}}$$

- Gözlenen  $y_i$  değeriyle tahmin edilen değer  $\hat{y}_i$  arasındaki fark kalıntı  $\hat{u}_i$ 'yi verir.
- $\hat{u}_i > 0$  ise  $y_i > \hat{y}_i$ , eksik tahmin yapılmıştır.
- $\hat{u}_i < 0$  ise  $y_i < \hat{y}_i$ , fazla tahmin yapılmıştır.



# Tahmin Edilen Değer ve Kalıntıların Cebirsel Özellikleri

- SEKK kalıntılarının toplamı ve dolayısıyla da örneklem ortalaması sıfır eşittir.

$$\sum_{i=1}^n \hat{u}_i = 0 \quad \text{ve} \quad \bar{\hat{u}} = 0$$

- Bu durum SEKK birinci sıra koşullarından ilkinin (aynı zamanda örneklem moment koşullarından ilkinin) bir sonucudur. Bakınız Slayt 32 ve Slayt 34.
- Anakütledeki hata terimi  $u$ 'nın örneklemdeki analogu kalıntı  $\hat{u}$  olarak yorumlanabilir fakat kesinlikle aynı şeyler değildir.

$$\underbrace{u}_{\text{Anakütle}} \longrightarrow \underbrace{\hat{u}}_{\text{Örneklem}}$$

$$\underbrace{E(u) = 0}_{\text{Anakütle}} \longrightarrow E(\hat{u}) = 0, \quad \underbrace{\sum_{i=1}^n \hat{u}_i = 0}_{\text{Örneklem}} \quad \text{ve} \quad \bar{\hat{u}} = 0$$

# Tahmin Edilen Değer ve Kalıntıların Cebirsel Özellikleri

- 2 Bağımsız değişken  $x$  ile kalıntı  $\hat{u}$  arasındaki örneklem kovaryansı ve korelasyon katsayısı sıfırdır.

$$\text{Cov}(x, \hat{u}) = 0 \quad \text{ve} \quad \text{Corr}(x, \hat{u}) = 0$$

- Bu durum diğer SEKK birinci sıra koşullarının (aynı zamanda diğer örneklem moment koşullarının) bir sonucudur. Bakınız Slayt 32 ve Slayt 34.
- Bağımsız değişken  $x$ 'le kalıntı  $\hat{u}$ 'nın doğrusal olarak ilişkisizliği çıkarılabilir.

$$\text{Cov}(x, u) = 0 \quad \text{ve} \quad \text{Corr}(x, u) = 0 \quad \longrightarrow \quad E(xu) = 0 \quad (\text{Anakütle})$$

$$\text{Cov}(x, \hat{u}) = 0 \quad \text{ve} \quad \text{Corr}(x, \hat{u}) = 0 \quad \longrightarrow \quad E(x\hat{u}) = 0 \quad (\text{Örneklem})$$

$$\underbrace{E(xu) = 0}_{\text{Anakütle}} \quad \longrightarrow \quad \underbrace{E(x\hat{u}) = 0}_{\text{Örneklem}} \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^n x_i \hat{u}_i = 0$$

► Ek Bilgi

# Tahmin Edilen Değer ve Kalıntıların Cebirsel Özellikleri

- 1. ve 2. cebirsel özelliklerin bir sonucu olarak tahmin edilen değer  $\hat{y}$  ile kalıntı  $\hat{u}$  arasındaki örneklem kovaryansı ve korelasyon katsayısı sıfırdır.

$$\text{Cov}(\hat{y}, \hat{u}) = 0 \quad \text{ve} \quad \text{Corr}(\hat{y}, \hat{u}) = 0$$

- Bu özellikten tahmin edilen değer  $\hat{y}$  ile kalıntı  $\hat{u}$ 'nın doğrusal olarak ilişkisizliği çıkarılabilir.

$$\underbrace{\text{Cov}(\hat{y}, \hat{u}) = 0 \quad \text{ve} \quad \text{Corr}(\hat{y}, \hat{u}) = 0}_{\text{Örneklem}} \quad \rightarrow \quad \underbrace{E(\hat{y}\hat{u}) = 0 \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^n \hat{y}_i \hat{u}_i = 0}_{\text{Örneklem}}$$

▶ Ek Bilgi



# Tahmin Edilen Değer ve Kalıntıların Cebirsel Özellikleri

- ➊ Tahmin edilen değer  $\hat{y}_i$ 'lerin ortalaması gözlenen değer  $y_i$ 'lerin ortalamasına eşittir.

$$y_i = \hat{y}_i + \hat{u}_i$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i=1}^n \hat{y}_i + \underbrace{\sum_{i=1}^n \hat{u}_i}_{= 0} \quad (1. \text{ Cebirsel Özellik})$$

$$n\bar{\hat{y}} = n\bar{y}$$

$$\bar{\hat{y}} = \bar{y}$$

- ➋  $(\bar{x}, \bar{y})$  noktası daima ÖRF'den geçer (ÖRF üzerindedir).

$$(\bar{x}, \bar{y}) \longrightarrow \bar{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

# Kareler Toplamları

- Her bir  $i$  gözlemi için gözlenen değer, tahmin edilen değer ve kalıntı arasındaki ilişki aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$y_i = \hat{y}_i + \hat{u}_i$$

- Her iki tarafın örneklem ortalamalarından sapmalarının karesini alıp toplarsak

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n [(\hat{y}_i - \bar{\hat{y}}) + (\hat{u}_i - \bar{\hat{u}})]^2$$

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n [(\hat{y}_i - \bar{y}) + \hat{u}_i]^2 \quad (1. \text{ ve } 4. \text{ Cebirsel Öz.})$$

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2 + 2 \underbrace{\sum_{i=1}^n \hat{u}_i \hat{y}_i}_{= 0} - 2\bar{y} \underbrace{\sum_{i=1}^n \hat{u}_i}_{= 0} \quad (3. \text{ Cebirsel Öz.})$$

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2$$

# Kareler Toplamları

- **Toplam Kareler Toplamı:** SST (Total Sum of Squares)  $y$ 'deki toplam değişkenliği verir.

$$SST = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$$

$Var(y) = SST/(n - 1)$  olduğuna dikkat edin.

- **Açıklanan Kareler Toplamı:** SSE (Explained Sum of Squares) model tarafından açıklanan kısımdaki, yani tahmin edilen değer  $\hat{y}$ 'lardaki, değişkenliği verir.

$$SSE = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2$$

- **Kalıntı Kareleri Toplamı:** SSR (Residual Sum of Squares) model tarafından açıklanamayan kısımdaki, yani kalıntı  $\hat{u}$ 'lardaki, değişkenliği verir.

$$SSR = \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2$$



# Kareler Toplamları

- $y'$ deki toplam değişkenlik aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$SST = SSE + SSR$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}_{\text{SST}} = \underbrace{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}_{\text{SSE}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2}_{\text{SSR}}$$

# Determinasyon Katsayısı

- $y$ 'deki toplam değişkenlik denkleminin her iki tarafını SST'ye bölersek

$$SST = SSE + SSR$$

$$1 = \frac{SSE}{SST} + \frac{SSR}{SST}$$

- Açıklanan kısmın değişkenliğinin toplam değişkenlik içindeki payı regresyonun **determinasyon katsayısı** ya da **belirlilik katsayıısı**dır (coefficient of determination) ve  $R^2$  ile gösterilir.

$$R^2 = \frac{SSE}{SST} = 1 - \frac{SSR}{SST}$$

- SSE hiçbir zaman SST'den büyük olamayacağı için  $0 \leq R^2 \leq 1$
- $R^2$ ,  $y$ 'deki değişkenliğin  $x$  tarafından açıklanan kısmının oranını verir. Regresyonun açıklama gücü yükseldikçe  $R^2$ , 1'e yaklaşır.
- $R^2$ 'yi yorumlarken, yüzdeye dönüştürmek için genellikle 100 ile çarparız:  $100 \times R^2$ ,  $y$ 'deki değişkenliğin  $x$  tarafından açıklanan kısmının yüzdesini verir.
- $R^2$  modelin açıklama gücünü (ne kadar iyi fit edildiğini) belirttiği için bazen **uyum iyiliği** (goodness-of-fit) olarak da adlandırılır.
- $R^2$  şu şekilde de hesaplanabilir:  $R^2 = \text{Corr}(y, \hat{y})^2$



# Determinasyon Katsayısı: Örnek

## CEO Maaşı vs. Karlılık Modeli

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x \quad (\text{ÖRF})$$

$$\widehat{\text{salary}} = 963.191 + 18.501 \text{ roe} \quad (\text{ÖRF})$$

$$n = 209, \quad R^2 = 0.0132$$

*salary*: CEO maaşı (bin dolar); *roe*: şirketin karlılık yüzdesi

- Determinasyon katsayısı 0.0132 olarak tahmin edilmiştir.
- CEO maaşı *salary*'deki değişkenliğin yaklaşık %1.32'si *roe* değişkeniyle açıklanabilmektedir. Diğer bir deyişle, *salary*'daki değişkenliğin yaklaşık %98.68'i açıklanamamıştır.
- Dışarıda bırakılan birçok faktör (hata terimi  $u$ 'nun içinde) olduğundan CEO maaşı *salary*'nin küçük bir kısmı açıklanabilmiştir.
- CEO maaşı *salary*'yi etkileyen ve bu modelde yer almayan başka birçok değişken olduğu unutulmamalıdır.



# SEKK Parametre Tahmincilerinin Beklenen Değeri

- SEKK parametre tahmincileri  $\hat{\beta}_0$  ve  $\hat{\beta}_1$  örneklemden örnekleme değiştiği için bunlara ait dağılımın özelliklerinin incelenmesi gereklidir.
- İncelenenecek dağılım özelliklerisi:
  - Beklenen değer
  - Varyans

Teorem:  $\hat{\beta}_0$  ve  $\hat{\beta}_1$ 'nın Beklenen Değeri

BDR.1 - BDR.5 varsayımları altında

$$E(\hat{\beta}_0) = \beta_0$$

$$E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$$

► Ek Bilgi

- Yani, BDR.1 - BDR.5 varsayımları altında SEKK parametre tahmincilerinin örneklem dağılımlarının ortalaması (beklenen değeri) bilinmeyen anakütle parametrelerine eşittir.



# SEKK Parametre Tahmincilerinin Varyansı

- SEKK parametre tahmincilerinin varyans formülünün çıkartılmasında otokorelasyonun olmaması (BDR.6) ve sabit varyans (BDR.7) varsayımları önemli bir rol oyanar.
- Bu nedenle, SEKK parametre tahmincilerinin varyansına geçmeden önce bu iki varsayıım hakkındaki temel bilgileri inceleyeceğiz.

# Otokorelasyonun Olmaması

## BDR.6: Otokorelasyon Olmaması

Hata terimleri arasında otokorelasyon yoktur.

$$\text{Corr}(u_i, u_s | \mathbf{x}) = 0, \quad i \neq s$$

$$\text{Corr}(u_i, u_s | \mathbf{x}) = 0, \quad i \neq s$$

$$\text{Corr}(u_i, u_s) = 0, \quad i \neq s$$

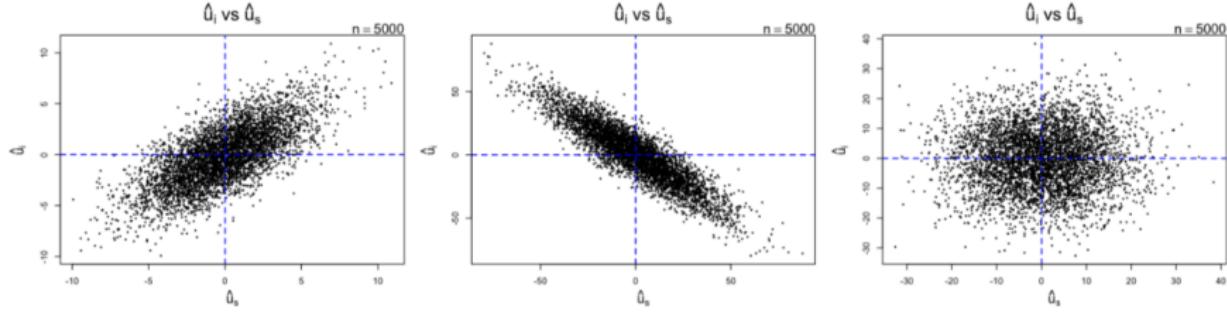
- Bu varsayımda SEKK parametre tahmincilerinin varyansının ve standart hatasının türetilmesinde ve etkinlik özelliklerinin belirlenmesinde kullanılır.
  - SEKK parametre tahmincilerinin sapmasızlığı için BDR.6 varsayıma ihtiyaç yoktur.
- BDR.6 varsayıımı sağlandığında, yani otokorelasyon olmadığından, herhangi iki hata terimi  $u_i$  ve  $u_s$  doğrusal ilişkisizdir.
- Oysa, BDR.6 varsayıımı sağlanmadığında, herhangi iki hata terimi  $u_i$  ve  $u_s$  doğrusal ilişkilidir, yani model **otokorelasyon** (autocorrelation) içeriyor demektir.

## Otokorelasyonun Olmaması

- Otokorelasyon, çoğunlukla zaman serisi analizine özgü bir sorundur.
- Otokorelasyon olmaması varsayımlı yatay-kesit analizindeki rassallık varsayımlı (BDR.3) nedeniyle genellikle otomatik olarak sağlanır.
  - Rassal örneklemme varsayımlı altında herhangi iki  $i$  ve  $s$  gözlemlerine ait hata terimleri,  $u_i$  ve  $u_s$ , birbirinden bağımsızdır, yani otokorelasyon yoktur. Bu durum, bağımsız değişkenlere göre koşullu olarak da geçerlidir.
  - Yatay-kesit analizinde, otokorelasyon varsayımlı sadece çok ekstrem durumlarda gereklidir ve bu nedenle genellikle kullanılmaz. Fakat, burada diğer birçok kaynaktan farklı olarak eklenmiştir.

# Uygulamada Otokorelasyonu Belirleme

- Uygulamada, hata terimi  $u$  gözlenemediği için  $u_i$  ve  $u_s$ 'nin doğrusal ilişkili olup olmadığını anlamak mümkün olmaz.
- Bunun yerine kalıntı  $\hat{u}_i$  ve  $\hat{u}_s$ 'nın grafiğine bakılır.
- Şekil 7'da kalıntı  $\hat{u}_i$  ve  $\hat{u}_s$ 'nın olası grafikleri verilmiştir.  $\hat{u}_i$  ve  $\hat{u}_s$  arasındaki doğrusal ilişki:
  - Soldaki grafikte pozitif olduğundan pozitif otokorelasyon vardır.
  - Ortadaki grafikte negatif olduğundan negatif otokorelasyon vardır.
  - Sağdaki grafikte sıfır olduğundan otokorelasyon yoktur.



Şekil 7: Kalıntı  $\hat{u}_i$  vs.  $\hat{u}_s$ 'nın Olası Grafikleri

*Not:* Tüm grafiklerde dikey eksende kalıntı  $\hat{u}_i$  ve yatay eksende ise kalıntı  $\hat{u}_s$  vardır.

# Sabit Varyans

## BDR.7: Sabit Varyans (Homoscedasticity)

$u$  hata teriminin bağımsız değişken  $x$ 'e göre koşullu varyansı sabittir.

$$Var(u|x) = \sigma^2$$

$$Var(u|\mathbf{x}) = \sigma^2$$

$$Var(u) = \sigma^2$$

- Bu varsayımda SEKK parametre tahmincilerinin varyansının ve standart hatasının türetilmesinde ve etkinlik özelliklerinin belirlenmesinde kullanılır.
  - SEKK parametre tahmincilerinin sapmasızlığı için BDR.7 varsayıma ihtiyaç yoktur.
- Örneğin, ücret vs. eğitim modelinde (Slayt 9) bu varsayımda, model dışında bırakılan faktörler  $u$ 'daki değişkenliğin modele dahil edilen *educ*'e bağlı olmadığını söyler.
- BDR.5 ve BDR.7 varsayımları kullanılarak Slayt 20'deki gibi bağımlı değişken  $y$ 'nin bağımsız değişken  $x$ 'lere göre koşullu varyansının da sabit olduğu gösterilebilir.

$$Var(y|\mathbf{x}) = \sigma^2$$



# Sabit Varyans vs. Değişen Varyans

- **Sabit varyans** (BDR.7) durumunda,  $y = \beta_0 + \beta_1 x + u$  modeline ait ARF ve  $y|\mathbf{x}$ 'in dağılımı Şekil 8'de gösterilmiştir (BDR.5 varsayıımı sağlanıyorken).
- BDR.7'nin sağlanmadığı duruma **değişen varyans** (heteroscedasticity) denir.

## Değişen Varyans (Heteroscedasticity)

$u$  hata teriminin bağımsız değişken  $x$ 'e göre koşullu varyansı sabit değil, bağımsız değişken  $x$ 'in aldığı değerlere göre değişkendir. Bu nedenle de aşağıdaki gibi indeks  $i$ 'ye göre değişeceğin şekilde gösterilir.

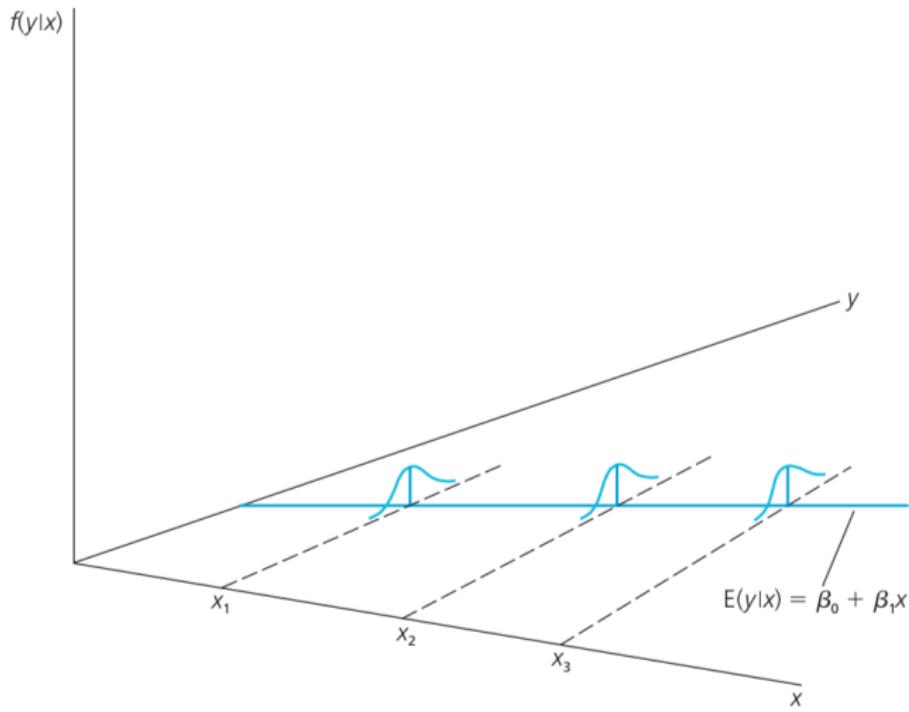
$$\text{Var}(u|x) = \sigma_i^2, \quad \text{Var}(u|\mathbf{x}) = \sigma_i^2 \quad \text{ve} \quad \text{Var}(u) = \sigma_i^2$$

$$E(u^2|\mathbf{x}) = \sigma_i^2 \quad \text{ve} \quad E(u^2) = \sigma_i^2$$

$$\text{Var}(y|\mathbf{x}) = \sigma_i^2$$

- Değişen varyans durumunda, Slayt 9'de verilen ücret vs. eğitim modeline ait ARF ve  $y|\mathbf{x}$ 'in dağılımı Şekil 9'deki gibi gösterilebilir (BDR.5 varsayıımı sağlanıyorken).
- Değişen varyans detaylı olarak "Ekonometri II - Değişen Varyans" konusunda işlenecektir.

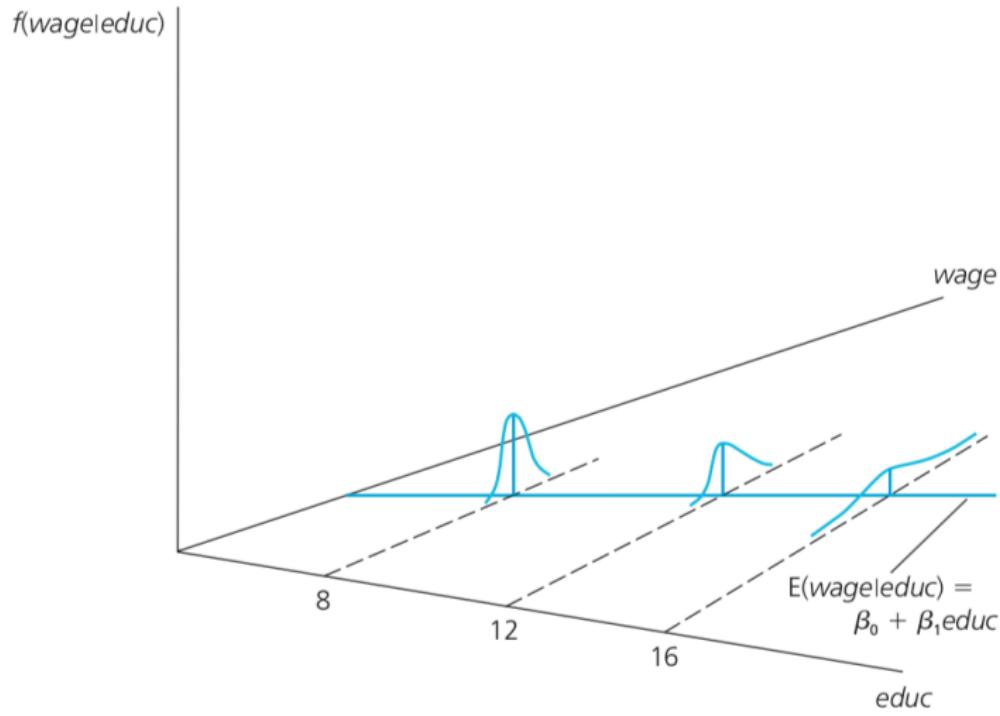
# Sabit Varyans



Şekil 8: Sabit Varyans (BDR.7) Durumunda ARF ve  $y|\mathbf{x}$ 'in Dağılımı

Kaynak: Wooldridge (2016)

# Değişen Varyans



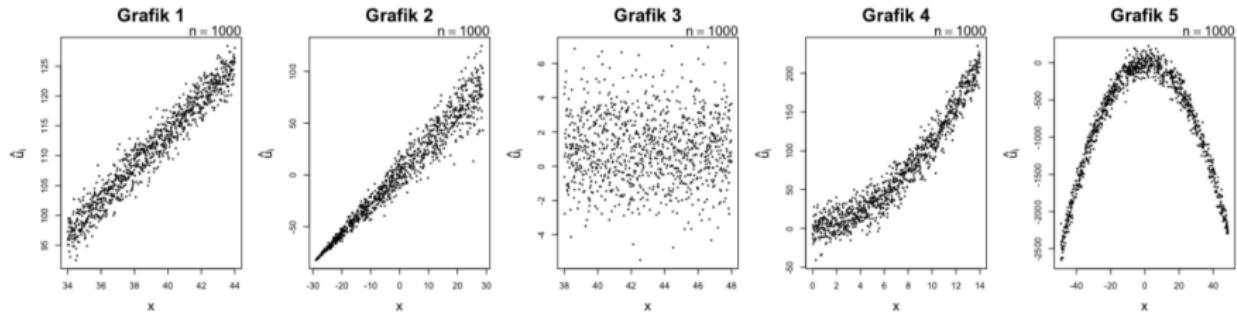
Şekil 9: Değişen Varyans Durumunda ARF ve  $y|\mathbf{x}'$ 'in Dağılımı

Kaynak: Wooldridge (2016)

# Uygulamada Sabit Varyans vs. Değişen Varyans Belirleme

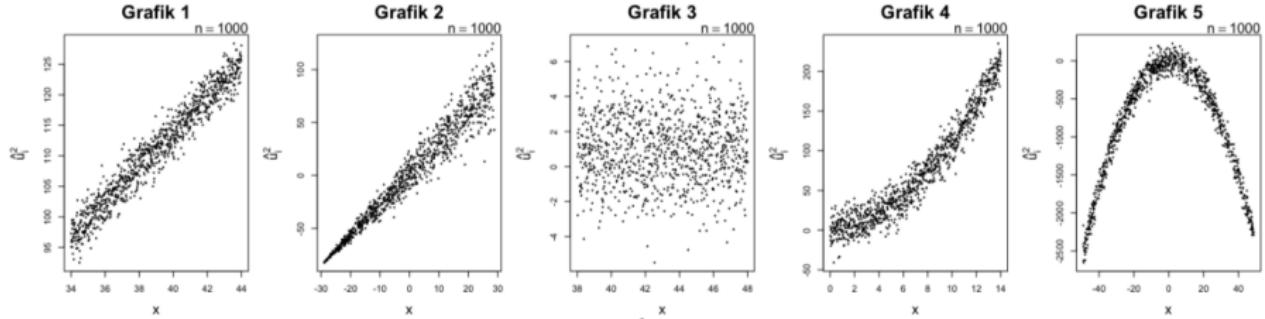
- Uygulamada, hata terimi  $u$  gözlenemediği için  $u$ 'nun  $x$ 'e göre koşullu varyansı  $Var(u|\mathbf{x})$ 'in sabit olup olmadığını, yani  $u$ 'daki değişkenliğin  $\mathbf{x}$ 'e göre nasıl değiştiğini, anlamak mümkün olmaz.
- Bunun yerine iki farklı yöntem kullanılabilir.
  - Kalıntı  $\hat{u}$  vs.  $\mathbf{x}$ 'in grafiğine bakılır.
  - Kalıntı karesi  $\hat{u}^2$  vs.  $\mathbf{x}$ 'in grafiğine bakılır.
- Eğer Şekil 10'deki gibi kalıntı  $\hat{u}$  vs.  $\mathbf{x}$ 'in grafiğine bakılırsa, kalıntı  $\hat{u}$ 'daki değişkenliğin bağımsız değişken  $\mathbf{x}$ 'e göre nasıl değiştiği incelenmelidir.
  - Şekil 10'de, sadece Grafik 2'de değişen varyans vardır. Çünkü,  $\hat{u}$ 'daki değişkenlik bağımsız değişken  $\mathbf{x}$ 'e göre değişir.
  - Şekil 10'deki diğer graifklerde sabit varyans vardır.
- Eğer Şekil 11'deki gibi kalıntı karesi  $\hat{u}^2$  vs.  $\mathbf{x}$ 'in grafiğine bakılır, kalıntı karesi  $\hat{u}^2$ 'nın bağımsız değişken  $\mathbf{x}$ 'e göre nasıl değiştiği incelenmelidir.
  - Şekil 11'de, sadece Grafik 3'de sabit varyans vardır. Çünkü,  $\hat{u}^2$  bağımsız değişken  $\mathbf{x}$ 'e göre değişmez (sabit).
  - Şekil 11'deki diğer graifklerde değişen varyans vardır.

# Uygulamada Sabit Varyans vs. Değişen Varyans Belirleme



**Şekil 10:** Kalıntı  $\hat{u}$  vs.  $x$ 'in Olası Grafikleri

*Not:* Tüm grafiklerde dikey eksende kalıntı  $\hat{u}_i$  ve yatay eksende ise bağımsız değişken  $x$  vardır.



**Şekil 11:** Kalıntı Karesi  $\hat{u}^2$  vs.  $x$ 'in Olası Grafikleri

*Not:* Tüm grafiklerde dikey eksende kalıntı  $\hat{u}_i^2$  ve yatay eksende ise bağımsız değişken  $x$  vardır.

# SEKK Parametre Tahmincilerinin Varyansı

Teorem:  $\hat{\beta}_1$ 'nın Varyansı

Gauss–Markov varsayımları (BDR.1 - BDR.7) altında

$$Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sigma^2}{SST_x}, \quad SST_x = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

► Ek Bilgi

- Ekonometrik analizde ana odak  $\hat{\beta}_1$  olduğundan,  $\hat{\beta}_0$ 'nın varyansı verilmemiştir.
- $\sigma^2$  gözlenemeyen hata terimi  $u$ 'nun varyansıdır. Bu nedenle  $\sigma^2$  **hata varyansı**,  $\sigma$  ise **regresyonun standart sapması** olarak adlandırılır.
- $SST_x$ ,  $x$ 'deki örneklem değişkenliğini ifade eder.
- SEKK parametre tahmincilerine ait varyansın olabildiğinde küçük olması istenir, çünkü küçük varyans tahminin hassaslığını arttırmır. Bakınız Slayt 85.
- $Var(\hat{\beta}_j)$ ,  $\sigma^2$  ile aynı yönde ilişkilidir.  $\sigma^2$ 'yi düşürmenin tek yolu güçlü bağımsız değişkenleri modele eklemektir. Daha büyük bir  $\sigma^2$ ,  $y$ 'yi etkileyen gözlenemeyen hata terimi  $u$ 'ya ait dağılımın daha fazla yayılmış olduğu anlamına gelir.
- $Var(\hat{\beta}_1)$ ,  $SST_x$  ile ters yönde ilişkilidir.  $SST_x$ 'yi artırmmanın tek yolu gözlem sayısını artttırmaktır.



# SEKK Parametre Tahmincilerinin Varyansı

Teorem:  $\hat{\beta}_1$ 'nın Varyansı

Gauss–Markov varsayımları (BDR.1 - BDR.7) altında

$$Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sigma^2}{SST_x}, \quad SST_x = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

- Hata terimi  $u$  gözlenemediği için hata varyansı  $\sigma^2$  bilinmez.
- Bu nedenle, SEKK parametre tahmincilerinin varyansı  $Var(\hat{\beta}_1)$ 'nın tahmini için öncelikle hata varyansı  $\sigma^2$ 'nin tahmin edilmesi gereklidir.
- Buradaki önemli nokta,  $Var(\hat{\beta}_1)$ 'nın sapmasız tahmin edilmesi gereklidir. Bu nedenle,  $\sigma^2$ 'nin de aynı şekilde sapmasız tahmin edilmesi gereklidir.

# SEKK Parametre Tahmincilerinin Varyansı

Hata Varyansı  $\sigma^2$

BDR.5 varsayıımı altında hata varyansı  $\sigma^2$  aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} Var(u) &= \sigma^2 = E(u^2) - \underbrace{E(u)^2}_{= 0 \text{ (BDR.5)}} && \text{(Varyans Formülü)} \\ &\quad \sigma^2 = E(u^2) \end{aligned}$$

- $\sigma^2$ 'nin sapmasız tahmincisi hata terimi  $u$ 'nun örneklem ortalaması  $n^{-1} \sum_{i=1}^n u_i^2$ 'dır.
- Fakat, hata terimi  $u$  gözlenemediği için  $\sigma^2$ 'nin tahmininde hata terimi  $u$ 'nun yerine onun örneklem analogu olan kalıntı  $\hat{u}$  kullanılır.  $n^{-1} \sum_{i=1}^n u_i^2 \longrightarrow n^{-1} \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2$
- Fakat  $n^{-1} \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2$  sapmalı bir tahmincidir. Bu nedenle,  $\sigma^2$ 'nin sapmasız tahmincisini hesaplamak için bu değerin serbestlik derecesi kullanılarak düzeltilmesi gereklidir.

# SEKK Parametre Tahmincilerinin Varyansı

Teorem: Hata Varyansı  $\sigma^2$ 'nin Sapmasız Tahmini

Gauss–Markov varsayımları (BDR.1 - BDR.7) altında hata varyansı  $\sigma^2$ 'nin sapmasız bir tahmincisi:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2}{n - k - 1} = \frac{SSR}{n - k - 1} = \frac{SSR}{n - 2} \quad (\text{BDR'de } k = 1)$$

- **Serbestik derecesi** (bağımsız bilgi sayısı)

- Bağımsız bilgi sayısı  $\rightarrow s.d. = n - (k + 1) = n - k - 1 \rightarrow$  BDR'de  $s.d. = n - 2$
- Serbestlik derecesi, SEKK birinci sıra koşullarından ( $k + 1$  tane) gelmektedir. Bu koşullar  $n$  tane kalıntı  $\hat{u}$ 'nın üzerine  $k + 1$  tane kısıt koyar.
- $n$  tane kalıntıdan  $n - (k + 1)$  tanesi biliniyorsa, geriye kalan  $k + 1$  kalıntı otomatik olarak bilinecektir. Bu nedenle kalıntıların serbestlik derecesi  $n - k - 1$ 'dir.
- $\hat{\sigma}$ , regresyonun standart sapması  $\sigma$ 'nın bir tahmincisidir ve **regresyonun standart hatası** olarak adlandırılır.
- Regresyona yeni bir bağımsız değişken eklendiğinde  $\hat{\sigma}$  azalabilir ya da artabilir.
  - Modele yeni bir bağımsız değişken eklendiğinde  $SSR$  düşecektir fakat aynı zamanda serbestlik derecesi de 1 düşecektir.  $SSR$  payda, serbestlik derecesi ise paydada olduğundan hangi değişimin daha fazla etkiye sahip olacağını kestirememiz.

# SEKK Parametre Tahmincilerinin Varyansı

- $\hat{\sigma}^2$  tahmin edildikten sonra  $Var(\hat{\beta}_1)$ 'nın formülünde yerine koyulup  $Var(\hat{\beta}_1)$ 'nın sapımsız bir tahmincisi hesaplanabilir.

## $\hat{\beta}_1$ 'nın Varyans Tahmini

$$Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{SST_x} \quad \longrightarrow \quad \widehat{Var(\hat{\beta}_1)} = \frac{\hat{\sigma}^2}{SST_x}$$

- Genelde,  $Var(\hat{\beta}_1)$  ve  $\widehat{Var(\hat{\beta}_1)}$  arasındaki ayrim yazimda net olarak gösterilmez.
  - $\hat{\beta}_1$ 'nın varyans tahmini denildiginde  $\widehat{Var(\hat{\beta}_1)}$  kastedilmesine rağmen yazidaki gösterimde genelde  $Var(\hat{\beta}_1)$  kullanılır.
  - Bu derste aynı yolu izleyip  $\hat{\beta}_1$ 'nın varyans tahminini  $Var(\hat{\beta}_j)$  ile gösterecegiz.

$$Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\hat{\sigma}^2}{SST_x}$$

- $Var(\hat{\beta}_1)$  direkt olarak  $\hat{\sigma}^2$ ya bağlı olduğundan aynen  $\hat{\beta}_1$ 'lar gibi  $Var(\hat{\beta}_1)$ 'nın da örneklem dagılımı vardır ve örneklemden örnekleme degisir.



# SEKK Parametre Tahmincilerinin Varyansı

$\hat{\beta}_1$ 'nın Standart Sapması (sd)

$$sd(\hat{\beta}_1) = \sqrt{Var(\hat{\beta}_1)} \quad \rightarrow \quad sd(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma}{\sqrt{SST_x}}$$

$\hat{\beta}_1$ 'nın Standart Hatası (se)

$$se(\hat{\beta}_1) = \sqrt{Var(\hat{\beta}_1)} \quad \rightarrow \quad se(\hat{\beta}_1) = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{SST_x}}$$

- $se(\hat{\beta}_1)$  güven aralıklarının hesaplanması ve hipotez testlerinde kullanılır.
- $se(\hat{\beta}_1)$  direkt olarak  $\hat{\sigma}$ 'ya bağlı olduğundan aynen  $\hat{\beta}_1$  gibi  $se(\hat{\beta}_1)$ 'nın da örneklem dağılımı vardır ve örneklemden örnekleme değişir.
- $se(\hat{\beta}_1)$ , BDR.7 (sabit varyans) varsayımlına dayanan  $Var(\hat{\beta}_1)$  formülünden türetildiği için BDR.7 varyasının sağlanmaması durumunda, yani değişen varyans varsa,  $Var(\hat{\beta}_1)$  ve  $se(\hat{\beta}_1)$  tahminleri sapmalı olur.
- Değişen varyans durumunda SEKK parametre tahmincilerinin varyansları ve dolayısıyla standart hataları geçersizdir ve bu nedenle düzeltilmeleri gereklidir.

# SEKK Parametre Tahmincilerinin Özellikleri

- Anakütleden çekilen birbirinden farklı ve tekrarlanan **rassal örneklemeleri** (random samples) kullanarak elde edeceğimiz SEKK parametre tahmincileri  $\hat{\beta}_0$  ve  $\hat{\beta}_1$ 'nın **örneklem dağılımlarının** (sampling distributions) özellikleri nelerdir?
- Bu bölümde, SEKK parametre tahmincileri  $\hat{\beta}_0$  ve  $\hat{\beta}_1$ 'nın **küçük örneklem** (small sample) özellikleri detaylı olarak incelenecaktır. Bu özellikler:
  - **Sapmasızlık:** İlgili parametre tahmin edicisinin örneklem dağılımı ortalamasının (beklenen değerin) anakütle bilinmeyen değerine eşit olmasıdır.
  - **Etkinlik:** İlgili parametre tahmin edicisinin örneklem dağılımı varyansının o tahmin ediciler kümesi içinde (genelde sapmasız tahminci kümesi içinde) en küçük olmasıdır.
- SEKK parametre tahmincileri  $\hat{\beta}_0$  ve  $\hat{\beta}_1$ 'nın
  - **büyük örneklem** (asimptotik) özellikleri daha sonra ayrıca incelenecaktır.
  - küçük örneklem ve büyük örneklem özellikleri birbirine karıştırılmamalıdır.

# SEKK Parametre Tahmincilerinin Sapmasızlığı

Teorem: SEKK Parametre Tahmincilerinin Sapmasızlığı

BDR.1 - BDR.5 varsayımları altında SEKK parametre tahmincileri sapmasızdır.

$$E(\hat{\beta}_0) = \beta_0$$

$$E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$$

- **Sapmasızlık**, SEKK parametre tahmincilerinin örneklem dağılımlarının ortalamasının (beklenen değerinin) bilinmeyen anakütle parametrelerine eşit olduğunu söyler.
- Sapmasızlık tekrarlanan örneklemelerden elde edilen çok sayıdaki  $\hat{\beta}_0$  ve  $\hat{\beta}_1$  tahminlerine ait örneklem dağılımlarının bir özelliğidir.
- Dolayısıyla, tek bir örneklem kullanılarak hesaplanan  $\hat{\beta}_0$  ve  $\hat{\beta}_1$  ile ilgili olarak hiçbir şey söylemez. Çünkü, bilinmeyen anakütle parametreleri  $\beta_0$  ve  $\beta_1$ 'den çok uzak bir tahmin de elde edebiliriz.
- İlerleyen slaytlarda sapmasızlık için gerekli olan varsayımlar gösterilmiş ve bazılarılarındaki detaylar verilmiştir. Bu varsayımlardan biri veya bir kaç sağlanmazsa sapmasızlık özelliği kaybolur ve sapmalı tahmin ediciler elde edilir.



# SEKK Parametre Tahmincilerinin Sapmasızlığı

## Model

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + u$$

- Yukarıda verilen modeldeki eğim parametresi  $\beta_1$ 'i tahmin etmek için kullanılan iki farklı parametre tahmincisinin örneklem dağılımları Şekil 12'de verilmiştir.
- $\hat{\beta}_1$ , eğim parametresi  $\beta_1$ 'in sapmasız bir tahmincisidir, çünkü:

$$E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$$

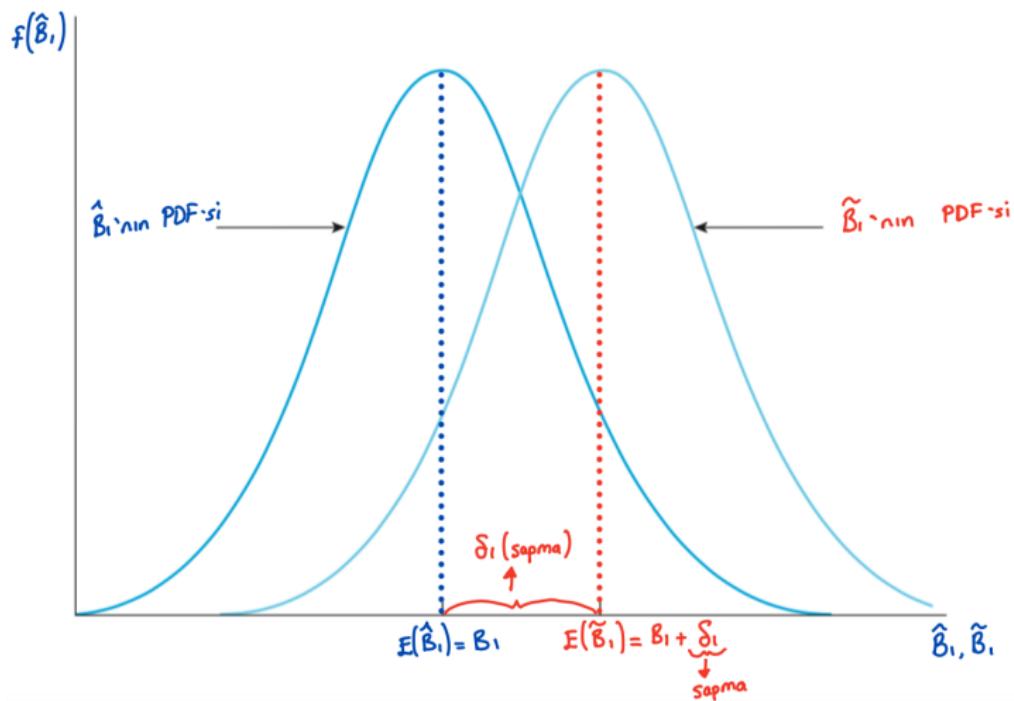
- $\tilde{\beta}_1$ , eğim parametresi  $\beta_1$ 'in sapmalı bir tahmincisidir, çünkü:

$$E(\tilde{\beta}_1) \neq \beta_1$$

- $\tilde{\beta}_1$  parametre tahmincisinin sapması  $\delta_1$  kadardır.

$$E(\tilde{\beta}_1) = \beta_1 + \delta_1 \quad \longrightarrow \quad \text{sapma} = E(\tilde{\beta}_1) - \beta_1 = \delta_1$$

# SEKK Parametre Tahmincilerinin Sapmasızlığı



**Şekil 12:** Sapmasız  $\hat{\beta}_1$  ve Sapmalı  $\tilde{\beta}_1$ 'nın Örneklem Dağılımları

Kaynak: Wooldridge (2016)

# Sapmasızlık İçin Gerekli Varsayımlar: BDR.1 ve BDR.2

## BDR.1: Gözlem Sayısı

Gözlem sayısı  $n$  tahmin edilecek anakütle parametre sayısından büyük ya da en azından eşit olmalıdır.

$$n \geq k + 1$$

## BDR.2: Parametrelerde Doğrusallık

Model parametrelerde doğrusaldır.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + u \checkmark$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x^2 + u \checkmark$$

$$y = \beta_0 + \beta_1^2 x + u \times$$

$$y = \beta_0 + \sqrt{\beta_1} x + u \times$$



# Sapmasızlık İçin Gerekli Varsayımlar: BDR.2

## Doğrusal Parametre Tahmincileri

$\hat{\beta}_1$  parametre tahmincisi aşağıdaki gibi yazılabiliriyorsa doğrusaldır.

$$\hat{\beta}_1 = \sum_{i=1}^n w_i y_i$$

- Burada  $w_i$  bağımsız değişken  $x$ 'in bir fonksiyonudur.
- SEKK parametre tahmincileri aşağıdaki gibi yazılabiligidinden doğrusaldır:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) y_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \sum_{i=1}^n w_i y_i, \quad \text{burada} \quad w_i = \frac{(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

- Ekonometrik analizde ana odak  $\hat{\beta}_1$  olduğundan,  $\hat{\beta}_0$  üzerinde durulmamıştır.

# Sapmasızlık İçin Gerekli Varsayımlar: BDR.3 ve BDR.4

## BDR.3: Rassallık

Tahminde kullanılan  $n$  tane gözlem ilgili anakütleden rassal örneklemeye yoluyla seçilmiştir. Yani gözlemler stokhastiktir (rassal), yani deterministik (kesin) değildir.

$$\{(x_i, y_i) : i = 1, 2, \dots, n\}$$

## BDR.4: Bağımsız Değişkenin Sabit Olmaması

Örneklemde (ve bu nedenle anakütlede) bağımsız değişken kendi içinde sabit değildir (yeterli değişimlik vardır).

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 > 0$$



# Sapmasızlık İçin Gerekli Varsayımlar: BDR.5

## BDR.5: Sıfır Koşullu Ortalama

$$E(u|\mathbf{x}) = E(u) = 0$$

$$\text{Cov}(x, u) = 0, \quad \text{Corr}(x, u) = 0 \quad \text{ve} \quad E(xu) = 0$$

Sonuç:  $u$  ve  $x$  ortalama bağımsızdır. Yani  $u$  ve  $x$  doğrusal olarak ilişkisizdir.

- BDR.5 varsayıımı hata terimi  $u$ 'nun bağımsız değişken  $x$ 'le ilişkisiz olduğunu, yani  $x$ 'in **kesin dışsal** (exogenous) olduğunu, söyler.
- Eğer  $u$  ve  $x$  ile ilişkiliyse, yani BDR.5 sağlanmazsa, SEKK parametre tahmincileri sapmalı olur. Bu durumda tahmin sonuçları güvenilir olmaz.
- BDR.5 varsayıımının sağlanmadığı durumlar nelerdir?
  - Modelin **fonsiyon kalibinin yanlış kurulması** (functional form misspecification)
  - Önemli bir **değişkenin model dışında bırakılması** (omitted variable)
  - Bağımsız değişkenlerde yapılan **ölçme hataları** (measurement error)
- BDR.5 varsayıımı sağlanmıyorsa  **içsel değişkenler** (endogenous variables), yani  **içsellilik** (endogeneity), söz konusudur.

# Sapmasızlık İçin Gerekli Varsayımlar: BDR.5

## BDR.5: Sıfır Koşullu Ortalama

$$E(u|\mathbf{x}) = E(u) = 0$$

$$\text{Cov}(x, u) = 0, \quad \text{Corr}(x, u) = 0 \quad \text{ve} \quad E(xu) = 0$$

Sonuç:  $u$  ve  $x$  ortalama bağımsızdır. Yani  $u$  ve  $x$  doğrusal olarak ilişkisizdir.

- Sıfır koşullu ortalama varsayıımı **ceteris paribus** çıkarımlarının yapılabilmesi için gereklidir.
- BDR.5 varsayıımı aşağıdaki koşulları otomatik olarak sağlar.
  - ➊ Hata terimi  $u$ 'nun anakütle ortalaması sıfırdır.
  - ➋ Hata terimi  $u$ 'nun ortalaması bağımsız değişken  $x$ 'den bağımsızdır, yani  $u$  ve  $x$  ortalama bağımsızdır.

# Sapmasızlık İçin Gerekli Varsayımlar: BDR.5

- ➊ Hata terimi  $u$ 'nun anakütle ortalaması sıfırdır.

$$E(u) = 0$$

- Modelde kesim parametresi  $\beta_0$  mevcut olduğu sürece bu koşul kesinlikle sağlanır.
- Bu koşul,  $u$ 'nun içerdiği gözlenemeyen faktörlerin dağılımı ile ilgilidir. Kısaca,  $u$ 'ların bir kısmı +, bir kısmı ise - işaretlidir ve bunlar birbirini götürdüğünde ortalama sıfır çıkacaktır diye varsayıyoruz.
- $\beta_0$  yeniden tanımlanarak bu koşul her zaman kolayca sağlanabilir.

# Sapmasızlık İçin Gerekli Varsayımlar: BDR.5

- ② Hata terimi  $u$ 'nun ortalaması bağımsız değişken  $x$ 'den bağımsızdır, yani  $u$  ve  $x$  **ortalama bağımsızdır**.

$$E(u|\mathbf{x}) = E(u)$$

- $u$  ve  $x$  rassal değişkenler olduğu için  $x$ 'in verilen herhangi bir değeri için  $u$ 'nun koşullu ortalamasını tanımlayabiliriz.
- Bu koşul gözlenemeyen hata terimi  $u$ 'nun ortalamasının  $x$ 'in değeriyle belirlenen anakütlenin tüm dilimlerinde aynı olduğunu ve ayrıca  $u$ 'nun tüm anakütle üzerindeki ortalamasına eşit olduğunu söyler.
  - Yani,  $u$ 'nun ortalaması  $x$ 'in alacağı değerlere bağlı değildir.
  - Yani,  $u$  ortalamada  $x$ 'den bağımsızdır.
- Ortalama bağımsızlık, doğrusal ilişkisizlikten daha güçlü bir kavramdır. Bu nedenle ortalama bağımsızlık aynı zamanda **doğrusal ilişkisizliği** de sağlar.
- Kısacası, bu koşulla beraber gözlenemeyen hata terimi  $u$  ve bağımsız değişken  $x$ 'in doğrusal olarak ilişkisiz olması da sağlanır.

$$E(u|\mathbf{x}) = E(u) \Rightarrow Cov(x, u) = 0 \text{ ve } Corr(x, u) = 0$$

- Bu koşul, gözlenemeyen hata terimi  $u$  ve bağımsız değişken  $x$ 'in bağımsız olması hakkında hiçbir varsayımda bulunmaz. Unutmayın ki, bağımsızlık ortalama bağımsızlıktan daha güçlü bir kavramdır.

## SEKK Parametre Tahmincilerinin Etkinliği

- Sapmasızlık ile beraber SEKK parametre tahmincilerinin, örneğin  $\hat{\beta}_1$ 'nın, örneklem dağılımının  $\beta_1$  etrafında merkezlendiğini gösterdik.
- Fakat,  $\hat{\beta}_1$ 'nın ortalama  $\beta_1$ 'den ne kadar uzakta olacağını da bilmek önemlidir.
- Bir diğer deyişle, tahminin hassallığını artırmak ve daha kesin istatistikci sonuçlara ulaşmak için sapmasız tahminciler arasında ortalamadan en az sapan, yani varyansı en düşük, parametre tahmincisini bulmak isteriz.
- Bunun için de SEKK parametre tahmincilerinin örneklem dağılımındaki yayılımın ölçüsü olan varyans kullanılmalıdır.

# SEKK Parametre Tahmincilerinin Etkinliği

**Teorem:** SEKK Parametere Tahmincilerinin Etkinliği

BDR.6 - BDR.7 varsayımları altında SEKK parametre tahmincileri etkindir.

$$Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sigma^2}{SST_x}, \quad SST_x = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

► Ek Bilgi

- SEKK parametresi tahmincisi  $\hat{\beta}_1$ 'nın **etkin** olması **en küçük/minimum varyanslı** olması anlamına gelir.
- Küçük varyans ve dolayısıyla küçük standart hata  $se(\hat{\beta}_1)$  istenen bir özelliktir.
  - Küçük varyansa sahip parametresi  $\hat{\beta}_1$ 'nın farklı örneklerde elde edilen değerleri gerçek parametre  $\beta_1$  değerinden (beklenen değeri) çok fazla uzaklaşmaz, yani ortalamadan sapma azdır.
  - Bu nedenle küçük varyansa sahip parametresi  $\hat{\beta}_1$  daha **hassas** bir tahmin verir.
  - Küçük standart hata  $se(\hat{\beta}_1)$ 'ya sahip ve dolayısıyla daha hassas olan  $\hat{\beta}_1$ 'nın güven aralıklarının hesaplanması ve hipotez testlerinin yapılmasında daha **kesin istatistiksel sonuçlara** varabiliriz.



# SEKK Parametre Tahmincilerinin Etkinliği

## Model

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + u$$

- Yukarıda verilen modeldeki eğim parametresi  $\beta_1$ 'i tahmin etmek için kullanılan iki farklı parametre tahmincisinin örneklem dağılımları Şekil 13'de verilmiştir.
- $\hat{\beta}_1$ , eğim parametresi  $\beta_1$ 'in sapmasız bir tahmincisidir, çünkü:

$$E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$$

- $\tilde{\beta}_1$ , eğim parametresi  $\beta_1$ 'in sapmasız bir tahmincisidir, çünkü:

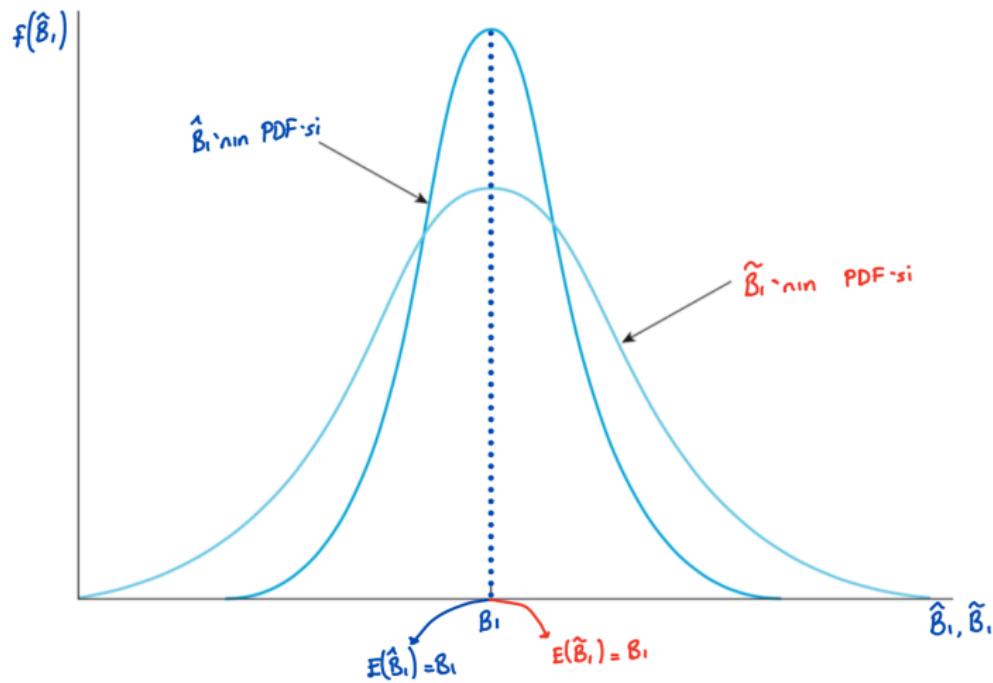
$$E(\tilde{\beta}_1) = \beta_1$$

- $\hat{\beta}_1$ , eğim parametresi  $\beta_1$ 'in sapmasız tahmincileri arasında etkin olan bir parametre tahmincisidir, çünkü:

$$\text{Var}(\hat{\beta}_1) < \text{Var}(\tilde{\beta}_1)$$



# SEKK Parametre Tahmincilerinin Etkinliği



Şekil 13: Sapmasız ve Etkin  $\hat{\beta}_1$  ve Sapmasız ve Etkin Olmayan  $\tilde{\beta}_1$ 'nın Örneklem Dağılımları

Kaynak: Wooldridge (2016)

# Etkinlik İçin Gerekli Varsayımlar: BDR.6 ve BDR.7

- Etkinlik için BDR.1 - BDR.5 varsayımlarının yanı sıra BDR.6 - BDR.7 varsayımları da gereklidir.

## BDR.6: Otokorelasyon Olmaması

Hata terimleri arasında otokorelasyon yoktur.

$$\text{Corr}(u_i, u_s | x) = 0, \quad i \neq s$$

$$\text{Corr}(u_i, u_s | \mathbf{x}) = 0, \quad i \neq s$$

$$\text{Corr}(u_i, u_s) = 0, \quad i \neq s$$

## BDR.7: Sabit Varyans (Homoscedasticity)

$u$  hata teriminin bağımsız değişken  $x$ 'e göre koşullu varyansı sabittir.

$$\text{Var}(u|x) = \sigma^2$$

$$\text{Var}(u|\mathbf{x}) = \sigma^2$$

$$\text{Var}(u) = \sigma^2$$



# Gauss-Markov Teoremi

## Gauss-Markov Teoremi

BDR.1 - BDR.7 varsayımları altında SEKK parametre tahmincileri, tüm doğrusal sapmasız tahminciler arasında etkin/en iyi (minimum varyanslı) olanlardır.

Başka bir ifadeyle, BDR.1 - BDR.7 varsayımları altında SEKK parametre tahmincileri  $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$  anakütle parametreleri  $\beta_0, \beta_1$ 'nın **Doğrusal En İyi Sapmasız Tahmin Edicileridir** (DESTE ya da BLUE—**Best Linear Unbiased Estimator**).

- Gauss-Markov Teoremi regresyon modelinin SEKK yöntemiyle tahmini için teorik dayanak sağlar.
- Eğer bu varsayımlar sağlanıyorsa SEKK yöntemi dışında başka bir tahmin yöntemine başvurmamıza gerek yoktur. SEKK yöntemi bize **doğrusal, sapmasız ve varyansı en düşük** (en iyi) tahmincileri vermektedir.
- BDR.1 - BDR.7 varsayımlarından biri bile ihlal edilirse Gaus-Markov Teoremi geçersiz olur.
- BDR.5 sağlanmazsa SEKK parametre tahmincilerinin sapmasızlık özelliği kaybolur ve sapmalı tahmin ediciler elde edilir.
- BDR.6 ve BDR.7 sağlanmazsa etkinlik özelliği kaybolur ve minimum varyans elde edilemez, yani varyans olması gerekenden daha büyük olur.

# Gauss–Markov Teoremi



Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Kaynak: Wikipedia



Andrey Markov (1856-1922)

Kaynak: Wikipedia

# Orijinden Geçen Regresyon

## Orijinden Geçen Regresyon

Bazen Ekonomi Teorisi, kesim parametresi  $\beta_0$ 'ın sıfır olması gerektiğini söyler. Böyle bir durumda  $\beta_0$  modelden çıkartılarak tahmin yapılır.

$$y = \beta_1 x + u \quad (\text{Model})$$

$$\tilde{y} = \tilde{\beta}_1 x \quad (\text{ÖRF})$$

- Orijinden geçen regresyonda

- Parametre tahminci  $\tilde{\beta}_1$ 'nın, kesim parametresi  $\beta_0$ 'ın bulunduğu regresyondaki  $\hat{\beta}_1$  dan farklı değer alacağı unutulmamalıdır.
- $x$ 'ler 0 olduğunda tahmin edilen  $y$  değeri, yani  $\hat{y}$ , 0'dır.
- Cebirsel özellikler geçersizdir.
- $R^2$  negatif çıkabilir, yani  $y$ 'nin örneklem ortalaması, yani  $\bar{y}$ ,  $y$ 'deki değişkenliği açıklamada modeldeki bağımsız değişken  $x$ 'lerden daha başarılıdır.
- $R^2$  negatif ise,  $R^2 = 0$  kabul edilir ya da regresyona kesim parametresi eklenerek tahmin yapılır.

# Orijinden Geçen Regresyon

## Orijinden Geçen Regresyon

Bazen Ekonomi Teorisi, kesim parametresi  $\beta_0$ 'ın sıfır olması gerektiğini söyler. Böyle bir durumda  $\beta_0$  modelden çıkartılarak tahmin yapılır.

$$y = \beta_1 x + u \quad (\text{Model})$$

$$\tilde{y} = \tilde{\beta}_1 x \quad (\text{ÖRF})$$

- Gerçekte (ARF'de) kesim parametresi  $\beta_0$  sıfırdan farklı olmasına ( $\beta_0 \neq 0$ ) rağmen orijinden geçen regresyon tahmin edilirse eğim parametresi tahmincisi sapmalı olur.  $\rightarrow E(\tilde{\beta}_1) \neq \beta_1$
- Gerçekte (ARF'de) kesim parametresi  $\beta_0$  sıfır olmasına ( $\beta_0 = 0$ ) rağmen sıfır değilmiş gibi regresyona dahil edilirse eğim parametresi tahmincisinin varyansı yükseltir.  $\rightarrow Var(\hat{\beta}_1) \uparrow$
- Gözlem sayısı  $n$  arttırılarak parametre tahmincilerinin varyansları düşürülebilirken sapmalı parametre tahminci probleminden kurtulamayız. Bu nedenle uygulamada genelde kesim parametresi  $\beta_0$  direkt olarak modele eklenir.

# Fonksiyonel Form

- Ekonometride sıkılıkla tercih edilen 4 farklı **fonksiyonel form** (functional form) ile regresyon modellerinde  $y$  ve  $x$  değişkenleri arasındaki ilişkiyi yorumlayalım.
- Farklı fonksiyonel formlar ile ilgili daha fazla bilgi “Ekonometri I - Matematik ve İstatistik Gözden Geçirme” konusunda bulunabilir.

## Düzey-Düzey Fonksiyonel Formu

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + u \quad \rightarrow \quad \Delta y = \beta_1 \Delta x$$

ceteris paribus koşulu altında, bağımsız değişken  $x$ 'deki 1 birimlik artış, bağımlı değişken  $y$ 'de ortalamada  $\beta_1$  birim kadar değişime neden olur.

## Düzey-Log Fonksiyonel Formu

$$y = \beta_0 + \beta_1 \ln x + u \quad \rightarrow \quad \Delta y \approx (\beta_1 / 100) \% \Delta x$$

ceteris paribus koşulu altında, bağımsız değişken  $x$ 'deki %1'lik artış, bağımlı değişken  $y$ 'de ortalamada  $\beta_1 / 100$  birim kadar değişime neden olur.  $100 \Delta \ln x \approx \% \Delta x$  olduğunu unutmayın.

# Fonksiyonel Form

## Log-Düzey Fonksiyonel Formu

$$\ln y = \beta_0 + \beta_1 x + u \quad \rightarrow \quad \% \Delta y \approx (100 \beta_1) \Delta x$$

ceteris paribus koşulu altında, bağımsız değişken  $x$ 'deki 1 birimlik artış, bağımlı değişken  $y$ 'de ortalamada  $100 \beta_1$  kadar değişime neden olur.  $100 \beta_1$ ,  $y$ 'nin  $x$ 'e göre **yarı-esnekliği** olarak adlandırılır.  $100 \Delta \ln y \approx \% \Delta y$  olduğunu unutmayın.

## Log-Log Fonksiyonel Formu

$$\ln y = \beta_0 + \beta_1 \ln x + u \quad \rightarrow \quad \% \Delta y \approx \beta_1 \% \Delta x$$

ceteris paribus koşulu altında, bağımsız değişken  $x$ 'deki  $\%1$ 'lik artış, bağımlı değişken  $y$ 'de ortalamada  $\% \beta_1$  kadar değişime neden olur.  $\beta_1$ ,  $y$ 'nin  $x$ 'e göre **esnekliği** ya da **sabit esnekliği** olarak adlandırılır.  $100 \Delta \ln y \approx \% \Delta y$  ve  $100 \Delta \ln x \approx \% \Delta x$  olduğunu unutmayın.

- Logaritmik form ekonometrik analizde sıkılıkla kullanılmaktadır.
  - Logaritmik form kullanarak bağımsız değişken  $x$ 'in bağımlı değişken  $y$  üzerindeki etkisini, ölçü birimlerimden bağımsız olarak, **sabit yüzde** cinsinden elde edebiliriz.

# Fonksiyonel Form: Özeti

- Farklı fonksiyonel formlardaki  $\beta_1$ 'in yorumu özeti halinde Tablo 2'de gösterilmiştir.

Tablo 2: Fonksiyonel Form: Özeti

| Model       | Bağımlı Değişken | Bağımsız Değişken | $\beta_1$ 'in Yorumu                           |
|-------------|------------------|-------------------|------------------------------------------------|
| Düzey-Düzey | $y$              | $x$               | $\Delta y = \beta_1 \Delta x$                  |
| Düzey-Log   | $y$              | $\ln x$           | $\Delta y \approx (\beta_1 / 100) \% \Delta x$ |
| Log-Düzey   | $\ln y$          | $x$               | $\% \Delta y \approx (100 \beta_1) \Delta x$   |
| Log-Log     | $\ln y$          | $\ln x$           | $\% \Delta y \approx \beta_1 \% \Delta x$      |

- Yukarıdaki tabloda, farklı fonksiyonel formlardaki esneklik formülünün üzerinde durulmamıştır. Fakat, detaylar “Ekonometri I - Matematik ve İstatistik Gözden Geçirme” konusunda bulunabilir.

# Fonksiyonel Form: Örnek 1

## Ücret vs. Eğitim Modeli

$$\widehat{\ln(wage)} = 0.584 + 0.083 \text{ educ}$$

(0.097)      (0.008)

$$n = 526, \quad R^2 = 0.186$$

*wage*: saat başına ücret (dolar); *educ*: eğitim düzeyi (yıl)

- Parametre tahmincilerinin standart hataları  $se(\hat{\beta}_0)$  ve  $se(\hat{\beta}_1)$  tahminin altında parantez içinde verilmiştir.
- Eğim parametresi  $\hat{\beta}_1 = 0.083$  olarak tahmin edilmiştir.
  - Yorumlama:** Ceteris paribus koşulu altında, *educ*'deki 1 birimlik artış, *wage*'de ortalama %100  $\beta_1$ , yani %8.3 ( $100 \times 0.083 \approx 8.3$ ), kadar değişime neden olur.
- Determinasyon katsayısı  $R^2 = 0.186$  olarak bulunmuştur.
  - educ*,  $\ln(wage)$ 'deki değişkenliğin %18.6'sını açıklayabilmektedir.

# Fonksiyonel Form: Örnek 2

## Maaş vs. Satış Modeli

$$\widehat{\ln(\text{salary})} = 4.822 + 0.257 \ln(\text{sales})$$

(0.288)      (0.035)

$$n = 209, \quad R^2 = 0.211$$

*salary*: yönetici maaşı (dolar); *sales*: satış mktarı

- Eğim parametresi  $\hat{\beta}_1 = 0.257$  olarak tahmin edilmiştir.
  - **Yorumlama:** Ceteris paribus koşulu altında,  $\ln(\text{sales})$ 'deki %1'lik artış,  $\ln(\text{salary})$ 'de ortalama  $\% \beta_1$ , yani %0.257, kadar değişime neden olur.
  - Bir başka ifadeyle, yönetici maaşlarının satışlara göre esnekliği 0.257 olarak tahmin edilmiştir.
  - Satışlarda %4'lük bir artış, yönetici maaşlarını yaklaşık %1 ( $4 \times \%0.257 \approx \%1$ ) artırmaktadır.
- Determinasyon katsayısı  $R^2 = 0.211$  olarak bulunmuştur.
  - $\ln(\text{sales}), \ln(\text{salary})$ 'deki değişkenliğin %21.1'ini açıklayabilmektedir.

# Kaynaklar

Gujarati, D.N. (2009). *Basic Econometrics*. Tata McGraw-Hill Education.

Stock, J.H. ve M.W. Watson (2015). *Introduction to Econometrics*.

Tastan, H. (2020). *Lecture on Econometrics I. Personal Collection of H. Tastan*. Retrieved from Online.

Wooldridge, J.M. (2016). *Introductory Econometrics: A Modern Approach*. Nelson Education.



# Ek Bilgiler

## BDR.5: Sıfır Koşullu Ortalama

$$E(u|\mathbf{x}) = 0$$

- Daha önce gördüğümüz Yinelenen Beklentiler Kanunu'nu hatırlayalım.

## Yinelenen Beklentiler Kanunu

$$E[E(u|\mathbf{x})] = E(u)$$

# Ek Bilgiler

- Yinelelenen Beklentiler Kanunu kullanılarak BDR.5 varsayıımı yeniden tanımlanabilir.

$$\underbrace{E[E(u|\mathbf{x})]}_{= 0} = E(u)$$

$$E[0] = E(u)$$

$$0 = E(u)$$

## BDR.5: Sıfır Koşullu Ortalama

$$E(u|\mathbf{x}) = E(u) = 0$$

Yani, hata terimi  $u$ 'nun bağımsız değişken  $x$ 'e göre koşullu ve koşulsuz ortalaması sıfırdır.



# Ek Bilgiler

- Koşullu beklenen değerin 5. özelliğini kullanarak  $u$  ve  $x$  arasındaki ilişki hakkında daha fazla yorumda bulunabiliriz.

## Koşullu Beklenen Değer: Özellik 5

$$E(u|\mathbf{x}) = E(u) \quad \text{ise} \quad Cov(x, u) = 0 \quad \text{ve} \quad Corr(x, u) = 0$$

Yani, bağımsız değişken  $x$ 'in her doğrusal fonksiyonu hata terimi  $u$  ile ilişkisizdir.

## BDR.5: Sıfır Koşullu Ortalama

$$E(u|\mathbf{x}) = E(u) = 0$$

$$Cov(x, u) = 0, \quad Corr(x, u) = 0 \quad \text{ve} \quad E(xu) = 0$$

Sonuç:  $u$  ve  $x$  ortalama bağımsızdır. Yani  $u$  ve  $x$  doğrusal olarak ilişkisizdir.

Sunuma Geri Dön



# Ek Bilgiler

## BDR.5: Sıfır Koşullu Ortalama Varsayıımı

$$E(u|\mathbf{x}) = E(u) = 0$$

$$Cov(x, u) = 0, \quad Corr(x, u) = 0 \quad \text{ve} \quad E(xu) = 0$$

$$\begin{aligned} Cov(x, u) &= E(xu) - E(x) \underbrace{E(u)}_{= 0} = 0 \\ &= E(xu) = 0 \end{aligned}$$

◀ Sunuma Geri Dön



# Ek Bilgiler

## BDR.6: Otokorelasyon Olmaması

$$\text{Cov}(u_i, u_s | \mathbf{x}) = 0 \quad \text{ve} \quad \text{Cov}(u_i, u_s) = 0, \quad i \neq s$$

$$E(u_i u_s | \mathbf{x}) = 0 \quad \text{ve} \quad E(u_i u_s) = 0, \quad i \neq s$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(u_i, u_s | \mathbf{x}) &= E(u_i u_s | \mathbf{x}) - \underbrace{E(u_i | \mathbf{x})}_{=0} \underbrace{E(u_s | \mathbf{x})}_{=0} = 0 \\ &= E(u_i u_s) = 0 \end{aligned}$$

◀ Sunuma Geri Dön



# Ek Bilgiler

## BDR.7: Sabit Varyans (Homoscedasticity)

$$E(u^2|\mathbf{x}) = \sigma^2 \quad \text{ve} \quad E(u^2) = \sigma^2$$

$$\begin{aligned} Var(u|\mathbf{x}) &= E(u^2|\mathbf{x}) - \underbrace{E(u|\mathbf{x})^2}_{= 0} = \sigma^2 \\ &= E(u^2|\mathbf{x}) = \sigma^2 \end{aligned}$$

◀ Sunuma Geri Dön



# Ek Bilgiler

## Anakütle Regresyon Fonksiyonu (ARF)

$$E(y|\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 x \quad (\text{ARF})$$

$$\text{Var}(y|\mathbf{x}) = \sigma^2$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + u$$

$$E(y|\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 x + \underbrace{E(u|\mathbf{x})}_{= 0}$$

$$E(y|\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 x \quad (\text{ARF})$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + u$$

$$\text{Var}(y|\mathbf{x}) = \text{Var}(u|\mathbf{x})$$

$$\text{Var}(y|\mathbf{x}) = \sigma^2$$

Sunuma Geri Dön



# Ek Bilgiler

## Parametre Tahmincileri

$\beta_0$  kesim parametresinin tahmini  $\hat{\beta}_0$ :

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}_1$$

- $\hat{\beta}_0$ 'nın formülü

- SEKK birinci sıra koşulları ya da örneklem moment koşullarından ilki (Slayt 34)
- Kalıntı  $\hat{u}$ 'nın denklemi
- İndeksli haldeki model denklemi

kullanılarak çıkarılabilir.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \hat{u}_i &= \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i) = 0 \\ &= \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n \hat{\beta}_0 - \sum_{i=1}^n \hat{\beta}_1 x_i = 0 \\ &= n\bar{y} - n\hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 n\bar{x} = 0 \\ &= \bar{y} - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \bar{x} = 0 \\ \text{Sonuç: } \hat{\beta}_0 &= \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \end{aligned}$$

◀ Sunuma Geri Dön



# Ek Bilgiler

## Parametre Tahmincileri

$\beta_1$  eğim parametresinin tahmini  $\hat{\beta}_1$ :

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

- $\hat{\beta}_1$ 'nın formülü

- SEKK birinci sıra koşulları ya da örneklem moment koşullarından ikincisi (Slayt 34)
- Kalıntı  $\hat{u}$ 'nın denklemi
- $\beta_0$  kesim parametresinin tahmini  $\hat{\beta}_0$
- Ortalamadan sapmaların kareleri toplamı

kullanılarak çıkarılabilir.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i \hat{u}_i &= \sum_{i=1}^n x_i (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i) = 0 \\ &= \sum_{i=1}^n x_i (y_i - (\bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}) - \hat{\beta}_1 x_i) = 0 \end{aligned}$$



# Ek Bilgiler

$$\sum_{i=1}^n x_i(y_i - (\bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}) - \hat{\beta}_1 x_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \bar{y} + \sum_{i=1}^n \hat{\beta}_1 x_i \bar{x} - \sum_{i=1}^n \hat{\beta}_1 x_i x_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n x_i(y_i - \bar{y}) = \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_i(x_i - \bar{x})$$

**Sonuç:**  $\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$

burada

$$\sum_{i=1}^n x_i(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

$$\sum_{i=1}^n x_i(x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

◀ Sunuma Geri Dön



# Ek Bilgiler

## Parametre Tahmincileri

$\beta_1$  eğim parametresinin tahmini  $\hat{\beta}_1$ 'nın BDR'deki formülünün bir diğer gösterimi:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})y_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

burada

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})y_i$$

◀ Sunuma Geri Dön



# Ek Bilgiler

## Tahmin Edilen Değer ve Kalıntıların Cebirsel Özellikleri - 2

$$\begin{aligned} Cov(x, \hat{u}) &= E(x\hat{u}) - E(x) \underbrace{E(\hat{u})}_{=0} = 0 && (1. \text{ Cebirsel Özellik}) \\ &= E(x_j\hat{u}) = 0 \\ \text{ya da} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Cov(x, \hat{u}) &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(\hat{u}_i - \bar{\hat{u}})}{n-1} = 0 \\ Cov(x, \hat{u}) &= \sum_{i=1}^n x_i (\hat{u}_i - \underbrace{\bar{\hat{u}}}_{=0}) = 0 && (1. \text{ Cebirsel Özellik}) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \hat{u}_i = 0 \end{aligned}$$

Sunuma Geri Dön



# Ek Bilgiler

## Tahmin Edilen Değer ve Kalıntıların Cebirsel Özellikleri - 3

$$Cov(\hat{y}, \hat{u}) = Cov(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x, \hat{u})$$

$$= \hat{\beta}_1 \underbrace{Cov(x, \hat{u})}_{= 0} = 0 \quad (2. \text{ Cebirsel Özellik})$$

$$= E(\hat{y}\hat{u}) = 0 \quad (\text{Kovaryans formülü ve 1. Cebirsel Özellik})$$

$$Cov(\hat{y}, \hat{u}) = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})(\hat{u}_i - \underbrace{\bar{\hat{u}}}_{= 0}) = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})\hat{u}_i = 0 \quad (1. \text{ Cebirsel Özellik})$$

$$= \sum_{i=1}^n \hat{y}_i \hat{u}_i - \bar{y} \underbrace{\sum_{i=1}^n \hat{u}_i}_{= 0} = 0 \quad (1. \text{ Cebirsel Özellik})$$

$$= \sum_{i=1}^n \hat{y}_i \hat{u}_i = 0$$

◀ Sunuma Geri Dön



# Ek Bilgiler

## SEKK Parametre Tahmincilerinin Beklenen Değeri

$$E(\hat{\beta}_0) = \beta_0$$

$$E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$$

## BDR Modeli

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i \quad (\text{Model - İndeksli})$$

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i \quad (\text{ÖRF - İndeksli})$$

- $\hat{\beta}_0$ 'nın beklenen değer formülü
  - $\hat{\beta}_0$ 'nın Slayt 36'deki formülünün  $x$ 'e ( $\mathbf{x}$ ) göre koşullu beklenen değerini alıp
  - Model denkleminin toplamları alınarak elde edilen denklem

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i \quad \longrightarrow \quad \sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i=1}^n (\beta_0 + \beta_1 x_i + u_i)$$

$$n\bar{y} = n\beta_0 + \beta_1 n\bar{x}$$

$$\bar{y} = \beta_0 + \beta_1 \bar{x}$$

kullanılarak gösterilebilir.



# Ek Bilgiler

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \quad (\text{Slayt } 36)$$

$$E(\hat{\beta}_0 | \mathbf{x}) = E(\bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} | \mathbf{x})$$

$$\begin{aligned} E(\hat{\beta}_0 | \mathbf{x}) &= \bar{y} - \underbrace{E(\hat{\beta}_1 | \mathbf{x})}_{= \beta_1} \bar{x} \\ &= \beta_1 \end{aligned}$$

$$E(\hat{\beta}_0 | \mathbf{x}) = \bar{y} - \beta_1 \bar{x}$$

$$E(\hat{\beta}_0 | \mathbf{x}) = \beta_0$$

# Ek Bilgiler

- $\hat{\beta}_1$ 'nın beklenen değer formülü
  - $\hat{\beta}_1$ 'nın formülü (Slayt 109)
  - BDR model denklemi (Slayt 112)
  - Sıfır koşullu ortalama varsayıımı, BDR.5 (Slayt 14),

kullanılarak gösterilebilir.

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})y_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(\beta_0 + \beta_1 x_i + u_i)}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

$$\hat{\beta}_1 = \underbrace{\beta_0 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})}_{= 0} + \underbrace{\beta_1 \sum_{i=1}^n x_i (x_i - \bar{x})}_{\sum (x_i - \bar{x})^2} + \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})u_i = \beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})u_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$



# Ek Bilgiler

- Alternatif  $\hat{\beta}_1$  formülü:

$$\hat{\beta}_1 = \beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) u_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (\hat{\beta}_1 \text{'nın Alternatif Formülü})$$

- Alternatif  $\hat{\beta}_1$  formülünün  $x$ 'e ( $\mathbf{x}$ ) göre koşullu beklenen değerini alalım.

$$E(\hat{\beta}_1 | \mathbf{x}) = E\left(\beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) u_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \middle| \mathbf{x}\right) = \beta_1 + \frac{\overbrace{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) E(u_i | \mathbf{x})}^{= 0}}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \beta_1$$

$$E(\hat{\beta}_1 | \mathbf{x}) = \beta_1$$



## Ek Bilgiler

- $\hat{\beta}_0$  ve  $\hat{\beta}_1$ 'nın beklenen değer formülü  $x$ 'e ( $\mathbf{x}$ ) göre koşullu hesaplanmasına rağmen genelde koşulsuz olarak gösterilir:

$$E(\hat{\beta}_0|\mathbf{x}) = \beta_0 \quad \longrightarrow \quad E(\hat{\beta}_0) = \beta_0$$

$$E(\hat{\beta}_1|\mathbf{x}) = \beta_1 \quad \longrightarrow \quad E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$$

◀ Sunuma Geri Dön

# Ek Bilgiler

Teorem:  $\hat{\beta}_1$ 'nın Varyansı

$$Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sigma^2}{SST_x}, \quad SST_x = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

## BDR Modeli

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i \quad (\text{Model - İndeksli})$$

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i \quad (\text{ÖRF - İndeksli})$$

- $\hat{\beta}_1$ 'nın varyans formülü

- $\hat{\beta}_1$ 'nın Slayt 115'de gösterilen alternatif formülü
- Otokorelasyon olmaması varsayıımı, BDR.6 (Slayt 15),
- Sabit varyans varsayıımı, BDR.7 (Slayt 16),
- Varyansın bir özelliği  $\rightarrow Var(\sum a_i u_i) = \sum a_i^2 Var(u_i)$ , burada  $a_i$ 'ler sabit sayılardır ve  $u_i$ 'ler ikili olarak ilişkisizdir.

kullanılarak çıkarılabilir.



# Ek Bilgiler

- Alternatif  $\hat{\beta}_1$  formülünün  $x$ 'e ( $\mathbf{x}$ ) göre koşullu varyansını alalım.

$$\begin{aligned}
 Var(\hat{\beta}_1|\mathbf{x}) &= Var\left(\beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) u_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \middle| \mathbf{x}\right) = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right)^2} Var\left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) u_i \middle| \mathbf{x}\right) \\
 &= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right)^2} \left( \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \underbrace{Var(u_i \mid \mathbf{x})}_{= \sigma^2 \text{ (BDR.7)}} \right) \\
 &= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right)^2} \sigma^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}
 \end{aligned}$$

# Ek Bilgiler

- $\hat{\beta}_1$ 'nın varyans formülü

$$Var(\hat{\beta}_1 | \mathbf{x}) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sigma^2}{SST_x}$$

- $\hat{\beta}_1$ 'nın varyans formülü  $x$ 'e ( $\mathbf{x}$ ) göre koşullu hesaplanmasına rağmen genelde koşulsuz olarak gösterilir:

$$Var(\hat{\beta}_1 | \mathbf{x}) = \frac{\sigma^2}{SST_x} \quad \longrightarrow \quad Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{SST_x}$$

 Sunuma Geri Dön



# Ek Bilgiler

Teorem: SEKK Parametere Tahmincilerinin Etkinliği

BDR.6 - BDR.7 varsayımları altında SEKK parametre tahmincileri etkindir.

$$Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sigma^2}{SST_x}, \quad SST_x = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

- $\hat{\beta}_1$ 'nın etkinliğini kanıtlayabilmek için  $\beta_1$ 'in herhangi bir doğrusal sapmasız tahmincisi olan  $\tilde{\beta}_1$ 'nın  $\hat{\beta}_1$ 'e göre daha büyük varyanslı olduğunun gösterilmesi gereklidir.  $\rightarrow Var(\tilde{\beta}_1) \geq Var(\hat{\beta}_1)$
- Bu nedenle  $\hat{\beta}_1$  ve  $\tilde{\beta}_1$ 'nın varyanslarının hesaplanarak karşılaştırılması gereklidir.
- $\hat{\beta}_1$ 'nın  $x$ 'e ( $\mathbf{x}$ ) göre koşullu varyansı (bakınız Slayt 119)

$$Var(\hat{\beta}_1|\mathbf{x}) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sigma^2}{SST_x}$$



# Ek Bilgiler

- $\tilde{\beta}_1$ 'nın  $x$ 'e ( $\mathbf{x}$ ) göre koşullu varyansı

- $\hat{\beta}_1$ 'nın Slayt 115'de gösterilen alternatif formülü önce  $\tilde{\beta}_1$  için yazılıp  $x$ 'e ( $\mathbf{x}$ ) göre koşullu varyansını alındıktan sonra
- Varyansın bir özelliği  $\rightarrow \text{Var}(\sum a_i u_i) = \sum a_i^2 \text{Var}(u_i)$ , burada  $a_i$ 'ler sabit sayılardır ve  $u_i$ 'ler ikili olarak ilişkisizdir.

kullanılarak hesaplanabilir.

$$\hat{\beta}_1 = \beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) u_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad \rightarrow \quad \tilde{\beta}_1 = \beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) u_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

( $\hat{\beta}_1$  ve  $\tilde{\beta}_1$ 'nın Alternatif Formülü)

$$\tilde{\beta}_1 = \beta_1 + \sum_{i=1}^n w_i u_i, \quad \text{burada} \quad w_i = \frac{(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^n w_i (x_i - \bar{x}) = 1$$



# Ek Bilgiler

$$\begin{aligned}
 Var(\tilde{\beta}_1 | \mathbf{x}) &= Var\left(\beta_1 + \sum_{i=1}^n w_i u_i | \mathbf{x}\right) = Var\left(\sum_{i=1}^n w_i u_i | \mathbf{x}\right) \\
 &= \sum_{i=1}^n w_i^2 \underbrace{Var(u_i | \mathbf{x})}_{= \sigma^2 \text{ (BDR.7)}}
 \end{aligned}$$

$$Var(\tilde{\beta}_1 | \mathbf{x}) = \sigma^2 \sum_{i=1}^n w_i^2 \quad (\tilde{\beta}_1 \text{'nın Varyansı})$$

## Ek Bilgiler

- Şimdi, BDR.1 - BDR.7 varsayımları altında  $Var(\tilde{\beta}_1|\mathbf{x})$  ve  $Var(\hat{\beta}_1|\mathbf{x})$  arasındaki farkı inceleyelim.

$$\begin{aligned}
 Var(\tilde{\beta}_1|\mathbf{x}) - Var(\hat{\beta}_1|\mathbf{x}) &= \sigma^2 \sum_{i=1}^n w_i^2 - \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \sigma^2 \left( \sum_{i=1}^n w_{i1}^2 - \frac{1}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right) \\
 &= \sigma^2 \left( \sum_{i=1}^n w_i^2 - \frac{\left( \sum_{i=1}^n w_i (x_i - \bar{x}) \right)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right) \quad (\sum w_i (x_i - \bar{x}) = 1) \\
 &= \sigma^2 \sum_{i=1}^n \left( w_i - \hat{\gamma}_1 (x_i - \bar{x}) \right)^2, \quad \text{burada } \hat{\gamma}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n w_i (x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}
 \end{aligned}$$

# Ek Bilgiler

$$Var(\tilde{\beta}_1|\mathbf{x}) - Var(\hat{\beta}_1|\mathbf{x}) = \sigma^2 \sum_{i=1}^n (w_i - \hat{\gamma}_1(x_i - \bar{x}))^2, \quad \text{burada} \quad \hat{\gamma}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n w_i (x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

- $\sigma^2$  her zaman pozitif olan bir değerdir.
- $\sum_{i=1}^n (w_i - \hat{\gamma}_1(x_i - \bar{x}))^2$  değeri,  $w_i$ 'in  $(x_i - \bar{x})$  üzerine uygulanan regresyondan elde edilen kalıntı kareleri toplamıdır ve her zaman pozitif olan bir değerdir.
  - $\hat{\gamma}_1$  ise aynı regresyondan elde edilen eğim parametresi tahmincisidir.
- Bu nedenle  $Var(\tilde{\beta}_1) \geq Var(\hat{\beta}_1)$ 'dır.
- $\hat{\beta}_1$  doğrusal sapmasız tahminciler içinde en küçük varyansa sahiptir, yani etkindir.

## Teorem: SEKK Parametere Tahmincilerinin Etkinliği

BDR.6 - BDR.7 varsayımları altında SEKK parametre tahmincileri etkindir.

$$Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sigma^2}{SST_x}, \quad SST_x = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

[◀ Sunuma Geri Dön](#)

