Zaman Serileri Verisiyle Regresyon Analizi

Zaman Serileri Analizi
Ekonometrik Modelleme ve Zaman Serileri Analizi

Dr. Ömer Kara[1]

[1] İktisat Bölümü
Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

12 Şubat 2026

Taslak

Motivasyon

Bu bölümde, sırasıyla aşağıdaki konular incelenecektir.

- Zaman serisi modeli
- Zaman serisi modellerinde küçük örneklemde Gauss–Markov varsayımları
- Zaman serisi modellerinde tahmin
- Zaman serisi modellerinde Gauss–Markov varsayımları altında Sıradan En Küçük Kareler (SEKK) parametre tahmincilerinin küçük örneklem özellikleri
- Zaman serisi modellerinde küçük örneklemde Gauss–Markov Teoremi
- Zaman serisi modellerinde normallik varsayımı
- Zaman serisi modellerinde küçük örneklemde klasik doğrusal model varsayımları
- Zaman serisi modellerinde küçük örneklemde klasik doğrusal model varsayımları altında çıkarsama
- Zaman serisi modellerinde farklı fonksiyonel form ve kukla değişken kullanımı
- Zaman serisi modellerinde trend ve mevsimsellik kullanımı

Not: Yukarıdaki konular sadece doğrusal modeller düşünülerek incelenecektir.

Zaman Serisi Modeli

Zaman Serisi Model (k Bağımsız Değişkenli Statik Model Örneği)

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + \cdots + \beta_k x_{tk} + u_t, \quad t = 1, 2, \ldots, n$$

- k: bağımsız değişken sayısı $\longrightarrow j = 1, 2, \ldots, k$
- $k + 1$: bilinmeyen sabit β parametre sayısı $\longrightarrow \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k$
- n: gözlem (veri) sayısı $\longrightarrow t = 1, 2, \ldots, n \quad \text{ve} \quad s = 1, 2, \ldots, n, \quad t \neq s$
- y: bağımlı değişken
- x_j: j'inci bağımsız değişken $\longrightarrow x_1, x_2, \ldots, x_k$
- u: Hata terimi, x'ler dışında modele dahil edilmemiş tüm faktörlerin ortak etkisi
- β_0: Kesim parametresi (1 tane var), sabit terim olarak da adlandırılır
- β_j: x_j bağımsız değişkeni için eğim parametresi (k tane var)
- $\mathbf{x_t}$: t zamanındaki tüm bağımsız değişkenlerin temsili $\longrightarrow \mathbf{x_t} = \{x_{t1}, x_{t2}, \ldots, x_{tk}\}$
- $\mathbf{X}$: Tüm t zamanlarındaki $\mathbf{x_t}$'lerden oluşan $n \times k$ boyutlu veri matrisi

Zaman Serisi Modeli

- Zaman serilerinde x_{tj} bağımsız değişkeninin iki indeksi vardır.
  - t zaman indeksidir.
  - j ise x'in kaçıncı bağımsız değişken olduğunu belirtir.
- FDL modellerinde her bir gecikmeli değişken ayrı bir x olarak tanimlanabilir.

$$x_{t1} = z_t, \quad x_{t2} = z_{t-1} \quad ve \quad x_{t3} = z_{t-2}$$

- Zaman serisi modellerindeki varsayımları belirtmek ve üzerinde tartışmak için t zamanındaki bağımsız değişkenlerin oluşturduğu kümeyi belirtmek için $\mathbf{x_t} = (x_{t1}, x_{t2}, \ldots, x_{tk})$ kullanacağız.
- Tüm t zamanlarındaki $\mathbf{x_t}$'lerden oluşan veri matrisi ise $n \times k$ boyutlu $\mathbf{X}$ olacaktır.
- $\mathbf{X}$ matrisinin t. satırı t dönemine ait $\mathbf{x_t}$ bağımsız değişken değerlerinden oluşur. Bu nedenle $\mathbf{X}$ matrisinin birinci satırı $t = 1$, ikinci satırı $t = 2$ ve son satırı $t = n$ zamanındaki bağımsız değişken değerlerinin bütününü gösterir.

Bağımsız Değişken Matrisi **X**'e Örnek

Cinayet Modeli (Statik Model)

$$mrdrte_t = \beta_0 + \beta_1 convrte_t + \beta_2 unem_t + \beta_3 yngmle_t + u_t$$

$mrdrte$: şehirdeki 10000 kişi başına cinayet oranı; $convrte$: cinayetten hüküm giyme oranı; $unem$: işsizlik oranı; $yngmle$: 18-25 yaşları arasındaki erkeklerin oranı

- Cinayet Modeli için bağımsız değişken matrisi **X** Şekil 1'de gösterilmiştir.

TABLE 10.2 Example of X for the Explanatory Variables in Equation (10.3)

t	*convrte*	*unem*	*yngmle*
1	.46	.074	.12
2	.42	.071	.12
3	.42	.063	.11
4	.47	.062	.09
5	.48	.060	.10
6	.50	.059	.11
7	.55	.058	.12
8	.56	.059	.13

Şekil 1: Cinayet Modeli: Bağımsız Değişken Matrisi **X**

Kaynak: Wooldridge (2016)

Gauss–Markov Varsayımları (Küçük Örneklem)

- Bu alt bölümde, **küçük örneklem** (small sample) durumunda zaman serisi modellerindeki Gauss–Markov varsayımları (ZS.1 - ZS.6) detaylı olarak incelenecektir.
  - Verilen Gauss–Markov varsayımları sadece küçük örneklem durumunda zaman serisi verisi ile yapılan regresyon için geçerli varsayımlardır.
  - **Büyük örneklem** (asimptotik) için gereken Gauss–Markov varsayımları daha sonra ayrıca incelenecektir.
  - Küçük örneklem ve büyük örneklem Gauss–Markov varsayımları birbirine karıştırılmamalıdır.
- Gauss–Markov varsayımları daha sonra Gauss–Markov Teoremi'ni oluşturmada kullanılacaktır.
- Gauss–Markov Teoremi ise basit zaman serisi modelinin Sıradan En Küçük Kareler Yöntemi ya da Momentler Yöntemi ile tahmini için teorik dayanak sağlamada kullanılacaktır.

Gözlem Sayısı

ZS.1: Gözlem Sayısı

Gözlem sayısı n tahmin edilecek anakütle parametre sayısından büyük ya da en azından eşit olmalıdır.

$$n \geq k + 1$$

Bu varsayım yatay-kesit analizindeki ÇDR.1'e denk gelmektedir.

Parametrelerde Doğrusallık

ZS.2: Parametrelerde Doğrusallık

$\{(x_{t1}, x_{t2}, \ldots, x_{tk}, y_t) : t = 1, 2, \ldots, n\}$ stokastik süreci aşağıdaki doğrusal modeli izler, yani model parametrelerde doğrusaldır.

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + \cdots + \beta_k x_{tk} + u_t \quad ✔$$

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + u_t \quad ✔$$

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t1}^2 + u_t \quad ✔$$

$$y_t = \beta_0 + \beta_1^2 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + u_t \quad ✘$$

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \sqrt{\beta_2} x_{t2} + u_t \quad ✘$$

Bu varsayım yatay-kesit analizindeki ÇDR.2'ye denk gelmektedir.

Tam Çoklu Doğrusal Bağıntının Olmaması

ZS.3: Tam Çoklu Doğrusal Bağıntının Olmaması

Örneklemde (dolayısıyla altında yatan zaman serisi sürecinde) bağımsız değişken x'lerin hiçbiri kendi içinde sabit değildir (yeterli değişenlik vardır) ve bağımsız değişkenler arasında tam çoklu doğrusal bağıntı (TÇDB) yoktur.

$$\sum_{t=1}^{n}(x_{tj}-\bar{x}_j)^2 > 0, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

$$\begin{aligned} y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + u_t \quad &\longrightarrow \quad x_2 = 2x_1 \quad \text{TÇDB VAR ✘} \\ &\longrightarrow \quad x_2 = x_1^2 \quad \text{TÇDB YOK ✔} \end{aligned}$$

Bu varsayım yatay-kesit verisi analizindeki ÇDR.4'e denk gelmektedir.

- ZS.3 varsayımı bağımsız değişken x'lerin arasındaki doğrusal olmayan ilişki hakkında hiçbir kısıtlamada bulunmaz.
- ZS.3 varsayımı bağımsız değişken x'lerin doğrusal ilişkili olmasına izin verir. Fakat izin verilmeyen tek durum tam doğrusal ilişkinin olmasıdır.
- x'lerde değişme olması, yani sabit olmamaları da bu varsayım içinde yer almaktadır.

Sıfır Koşullu Ortalama

ZS.4: Sıfır Koşullu Ortalama

Her t dönemi için, hata terimi u_t'nin bağımsız değişkenlerin tüm dönemlerine koşullu olarak beklenen değeri sıfıra eşittir.

$$E(u_t|\mathbf{X}) = 0, \quad \forall t = 1, 2, \ldots, n$$

Bu varsayım yatay-kesit analizindeki ÇDR.5'ten çok daha güçlü bir varsayımdır.

- ZS.4 varsayımı şunu söylemektedir: t dönemine ait hata terimi u_t her bir x ile tüm dönemlerde ilişkisizdir.
- Bu varsayım koşullu beklenen değer cinsinden ifade edildiği için y ile x'lerin arasındaki ilişkiye ait biçimin doğru olarak belirlenmesi gerekmektedir.
    - Yani, modelin fonksiyon kalıbının yanlış kurulmaması gerekir. Diğer bir deyişle, functional form misspecification olmaması gerekir.
- Eğer u_t ve $\mathbf{X}$ bağımsız ve $E(u_t) = 0$ ise, ZS.4 varsayımı otomatik olarak sağlanır.

Sıfır Koşullu Ortalama

ZS.4: Sıfır Koşullu Ortalama

$$E(u_t|\mathbf{X}) = 0, \quad \forall t = 1, 2, \ldots, n$$

- ZS.4 varsayımının sağlanması için hata terimi u ve bağımsız değişken x'ler arasında iki farklı dışsallık koşulunun sağlanması gerekir.
  - **Eşanlı dışsallık** (contemporaneously exogeneity)
  - **Kesin dışsallık** (strict exogeneity)

Sıfır Koşullu Ortalama

ZS.4.1: Eşanlı Dışsallık

t dönemindeki u_t'lerin sadece t dönemine ait bağımsız değişken x'lere göre koşullu beklenen değeri sıfıra eşittir.

$$E(u_t|x_{t1}, x_{t2}, \ldots, x_{tk}) = E(u_t|\mathbf{x_t}) = 0, \quad \forall t = 1, 2, \ldots, n$$

$$Corr(x_{tj}, u_t) = 0, \quad \forall t = 1, 2, \ldots, n; \ \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

Bu koşul yatay-kesit analizindeki ÇDR.5'e denk gelmektedir.

- Bu koşul u_t'lerin sadece t dönemine ait x'lerle ($\mathbf{x_t}$) ilişkisiz olmasını ifade eder.
- Eşanlı dışsallık sağlandığında bağımsız değişken x_{tj}'ler eşanlı olarak dışsaldır.
- Eşanlı dışsallık u_t ve bağımsız değişken x'ler cari dönem itibariyle (eşanlı olarak) ilişkisiz olduğu için **cari dönem dışsallığı** olarak da anılır.

Sıfır Koşullu Ortalama

ZS.4.2: Kesin Dışsallık

t dönemindeki u_t'lerin tüm dönemlere ait bağımsız değişken x'lere göre koşullu beklenen değeri sıfıra eşittir.

$$E(u_t|x_{s1}, x_{s2}, \ldots, x_{sk}) = E(u_t|\mathbf{x_s}) = 0, \quad \forall t, s = 1, 2, \ldots, n$$

$$Corr(x_{sj}, u_t) = 0, \quad \forall t, s = 1, 2, \ldots, n; \ \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

Bu koşul yatay-kesit analizindeki ÇDR.5'ten çok daha güçlüdür.

- Bu koşul u_t'lerin tüm dönemlere ait bağımsız değişken x_{sj}'lerle ilişkisiz olmasını ifade eder. Yani,
  - $s = t$ olduğunda u_t ve $x_{sj} = x_{tj}$ ilişkisiz olmalıdır, eşanlı dışsallık sağlanmalıdır.
  - $s \neq t$ olduğunda bile u_t ve x_{sj} ilişkisiz olmalıdır.
- Kısacası, kesin dışsallık sağlandığında otomatik olarak eşanlı dışsallık da sağlanmış olur ama bunun tersi her zaman doğru değildir.
  - Bu nedenle kesin dışsallık, eşanlı dışsallıktan daha sert/güçlü bir koşuldur.
- Kesin dışsallık sağlandığında bağımsız değişken x'ler kesin olarak dışsaldır.

Sıfır Koşullu Ortalama

- ZS.4 varsayımı, yatay-kesit analizindeki ÇDR.5'ten daha güçlü bir varsayımdır. Nedenini anlamak için yatay-kesit analizindeki ÇDR.5 varsayımını hatırlayalım.

ÇDR.5: Sıfır Koşullu Ortalama

$$E(u|\mathbf{x}) = 0 \quad \longrightarrow \quad E(u_i|\mathbf{x_i}) = 0, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n$$

$$Corr(x_j, u) = 0 \quad \longrightarrow \quad Corr(x_{ij}, u_i) = 0, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n; \ \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

- Yatay-kesit analizinde, ÇDR.5 varsayımı ile i. gözleme ait hata terimi u_i'nin örneklemdeki
  - i. gözlemin bağımsız değişkenleriyle ilişkisiz olduğunu yukarıdaki gibi açıkça belirtmiştik. Yani, zaman serisi analizindeki gibi eşanlı dışsallık koşulu belirtilmişti.
  - s. gözlemin ($s \neq i$) bağımsız değişkenleriyle nasıl ilişkili olduğunu açıkça belirtmemiştik. Yani, zaman serisi analizindeki gibi kesin dışsallık koşulu belirtilmemişti.
- Yatay-kesit analizinde kesin dışsallık koşuluna gerek olmamıştı çünkü rassal örnekleme varsayımı (ÇDR.3) sayesinde u_i otomatik olarak i. gözlem haricindeki bağımsız değişkenlerden bağımsız (ve dolayısıyla ilişkisiz) olmuştu.

Sıfır Koşullu Ortalama

ZS.4: Sıfır Koşullu Ortalama

$$E(u_t|\mathbf{X}) = 0, \quad \forall t = 1, 2, \ldots, n$$

- Zaman serisi analizinde ise rassal örnekleme neredeyse hiçbir zaman uygun değildir. Değişkenler stokastik yani rassaldır fakat örnekleme rassal değildir.
- Bu nedenle u_t'nin hiç bir zaman farklı dönemdeki bağımsız değişken x_{sj}'lerle ilişkili olmadığını, yani kesin dışsallığın sağlandığını, açıkça varsaymamız gerekir.
- ZS.4 varsayımı sağlanırsa, yatay-kesit analizindeki rassal örnekleme varsayımına (ÇDR.3) gerek kalmaz.
- ZS.4 sağlandığında otomatik olarak kesin dışsallık koşulu sağlanır ve x'lerin **kesin olarak dışsal** olduğunu söyleriz.
- Daha sonraki konularda gösterileceği gibi SEKK parametre tahmincilerinin
  - tutarlılığı için eşanlı dışsallık koşulunun sağlanması yeterlidir.
  - sapmasızlığı için kesin dışsallık koşulunun sağlanması gereklidir.

Sıfır Koşullu Ortalama

ZS.4: Sıfır Koşullu Ortalama

$$E(u_t|\mathbf{X}) = 0, \quad \forall t = 1, 2, \ldots, n$$

- ZS.4 varsayımı, hata terimi u'nun ve x'lerin kendi geçmişleriyle olan korelasyonuna (ilişkili olmasına) izin vermektedir.
- İzin verilmeyen durum, u_t'nin beklenen değerinin x'lerle zaman içinde ileri ve geriye doğru ilişkili olmasıdır. Yani, u_t'nin ortalaması bağımsız değişken x'lerle tüm dönemlerde ilişkisiz olmalıdır.
- ZS.4 varsayımının sağlanmamasına yol açan başlıca iki faktör **dışlanmış değişken** (omitted variable) ve **ölçme hataları**dır (measurement error).
- Ancak daha az belirgin başka nedenler de ZS.4 varsayımının ihlaline yol açabilir.
- Şimdi, basit statik model üzerinden ZS.4 varsayımının ihlaline yol açan ancak belirgin olmayan bu nedenleri inceleyelim.

Sıfır Koşullu Ortalama

- Aşağıdaki basit statik modeli, yani bağımsız değişkenler arasında gecikmeli değişkenin olmadığı modeli ele alalım:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 z_t + u_t$$

- ZS.4 varsayımı, sadece hata terimi u_t'nin ve bağımsız değişken z_t ile ilişkisiz olmasını gerektirmiyor.
- ZS.4 varsayımı ayrıca, hata terimi u_t'nin, z_t'nin tüm geçmiş $\{z_{t-1}, z_{t-2}, \ldots\}$ ve gelecek $\{z_{t+1}, z_{t+2}, \ldots\}$ değerleri ile de ilişkisiz olmasını koşul olarak koyuyor.
- ZS.4 varsayımının iki sonucu vardır:
  1. z_t'nin y_t üzerindeki **gecikmeli etkisi** (lagged effect) yoktur. Eğer gecikmeli etkisi varsa, FDL modeli tahmin edilmelidir.
  2. **Kesin dışsallık** koşulu, u'da t anında oluşacak bir değişmenin z_t'nin gelecek değerlerine etki etmeyeceğini varsayar. Bu durum, y_t'den z_t'nin gelecek değerlerine bir etkinin, yani **geri bildirim etkisi** (feedback effect), olmadığı anlamına gelir.
- Bu iki sonuçtan biri sağlanmazsa, ZS.4 varsayımı ihlal edilmiş olur.
- Şimdi, ZS.4 varsayımına ait bu iki sonucun ihlaline yol açabilecek durumlara basit statik modeller üzerinden örnek verelim.

Sıfır Koşullu Ortalama

ZS.4 varsayımının birinci sonucu ile ilgili olarak:

- Eğer z_t'nin y_t üzerinde gecikmeli etkisi varsa ve FDL modeli tahmin edilmezse ZS.4 varsayımı ihlal edilmiş olur.
- Örneğin, doğru modelin z_t ve z_{t-1} bağımsız değişkenlerini içerdiğini, yani z_t'nin y_t üzerinde gecikmeli bir etkisinin olduğunu, varsayalım.
- Fakat, araştırmacının bağımsız değişken z_{t-1}'i model dışında bırakıp yanlış modeli kullandığını düşünelim.
- Eğer z_{t-1}'yi modele doğrudan sokmazsak (yanlış modeli kullanırsak), onu yanlış modeledeki hata teriminin (v_t) içine almış oluruz.

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 z_t + \beta_2 z_{t-1} + u_t \qquad \text{(Doğru Model)}$$

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 z_t + v_t \qquad \text{(Yanlış Model)}$$

$$v_t = \beta_2 z_{t-1} + u_t \qquad \text{(Yanlış Model Hata Terimi)}$$

- Zaman serilerinin geçmiş değerleriyle genellikle yüksek derecede ilişkili olduğu düşünülürse, yani $Corr(z_t, z_{t-1}) \neq 0$, yanlış modeledeki hata terimi v_t ve z_t ilişkili olacak ve ZS.4 varsayımı ihlal edilecektir.

$$Corr(z_t, v_t) \neq 0 \quad \longrightarrow \quad Corr(z_t, \beta_2 z_{t-1} + u_t) \neq 0$$

Sıfır Koşullu Ortalama

ZS.4 varsayımının ikinci sonucu ile ilgili olarak:

- u'da t anında oluşacak bir değişme z_t'nin gelecek değerlerine etki ediyorsa, yani y_t'den z_t'nin gelecek değerlerine bir etki varsa ZS.4 varsayımı ihlal edilmiş olur.
- Örneğin, şehirlerde işlenen kişi başına cinayet sayılarını, nüfus başına düşen polis sayısı ile açıklayan cinayet modelini ele alalım:

Cinayet Modeli (Statik Model)

$$mrdrte_t = \beta_0 + \beta_1 polpc_t + u_t$$

$mrdrte$: kişi başına cinayet sayısı; $polpc$: nüfus başına düşen polis sayısı

- Yukarıdaki modelde, u_t'nin $polpc_t$ ile ilişkisiz olmasını varsaymamız makuldur.
    - Hatta u_t'nin $polpc_t$'nin geçmiş değerleri ile de ilişkisiz olduğunu varsayalım.
- Diyelim ki şehir yönetimi polis sayısını geçmiş cinayet sayısına göre değiştiriyor.
    - Bu durumda, $mrdrte_t \to polpc_{t+1}$ yönünde bir geri bildirim etkisi olacaktır.
    - Bu ise, $u_t \to polpc_{t+1}$ yönündeki bir diğer etkileşimi dolaylı olarak ifade edecektir çünkü fonksiyonel form gereği daha yüksek $mrdrte_t$ daha yüksek u_t'den kaynaklanır.
    - Sonuç olarak, u_t ve $polpc_{t+1}$ ilişkili olacak, yani $Corr(u_t, polpc_{t+1}) \neq 0$, ve ZS.4 varsayımı ihlal edilecektir.

Sıfır Koşullu Ortalama

ZS.4 varsayımı hakkında önemli notlar:

- Sonlu dağıtılmış gecikme modellerinde (FDL), u_t'nin z_t'nin geçmiş $\{z_{t-1}, z_{t-2}, \dots\}$ değerleriyle ilişkili olması sorun olmaz ve ZS.4 varsayımı ihlal edilmez. Çünkü modelde modelde z_t'nin geçmiş değerlerini bağımsız değişken olarak zaten kullanıyoruz, yani kontrol ediyoruz.
  - Ancak, u_t'den z_t'nin gelecek değerlerine doğru bir geri bildirim etkisi, yani $u_t \to z_{t+1}, z_{t+2}, \dots$, her zaman sorun yaratacak ve ZS.4 varsayımını ihlal edecektir.
- Kesin dışsal olan bağımsız değişken z_t'ler, y_t'nin geçmiş değerlerinden etkilenmez.
  - Örneğin, t yılındaki yağmur miktarı, z_t, bu yılın ve önceki yılların buğday üretiminden, $\{y_t, y_{t-1}, y_{t-2}, \dots\}$, etkilenmez.

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 z_t + \beta_2 z_{t-1} + u_t$$

  - Bu aynı zamanda şu anlama da gelir: gelecek yılların yağmur miktarı, $\{z_{t+1}, z_{t+2}, \dots\}$, bu yılın ve geçen yılların buğday üretiminden $\{y_t, y_{t-1}, y_{t-2}, \dots\}$ etkilenmez.
  - Kısacası, yağmur miktarını belirten z_t'ler kesin dışsaldır ve ZS.4 varsayımının ikinci sonucu olan kesin dışsallık koşulu sağlanır.

Sıfır Koşullu Ortalama

ZS.4 varsayımı hakkında önemli notlar:

- Ancak, tüm tarım girdileri yağmur gibi değildir.
- Örneğin, işgücü girdisini çiftlik sahibi geçen yılın hasılasına bakarak belirleyebilir.

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 z_t + u_t$$

  - Yani, bu yılın işgücü miktarı z_t geçen yılın hasılası y_{t-1}'den etkilenmiştir.
  - Dolayısıyla, kesin dışsallık koşulu sağlanmaz ve ZS.4 varsayımı ihlal edilir.
- Sosyal bilimlerde kullandığımız pek çok bağımsız zaman serisi değişkeni böyledir.
  - Örneğin: para arzı artış hızı, sosyal refah harcamaları, yollardaki hız limitleri vs.
  - Tüm bu bağımsız değişkenler, çoğu zaman, bağımlı değişken y'nin geçmişte aldığı değerlere bakılarak belirlenmetedir, dolayısıyla da kesin dışsal koşulu sağlanmaz ve ZS.4 varsayımı ihlal edilir.

Sıfır Koşullu Ortalama

ZS.4 varsayımı hakkında önemli notlar:

- ZS.4 varsayımı çoğu zaman gerçekçi olmamasına rağmen SEKK parametre tahmincilerinin sapmasız olmasını sağlamak için kullanılır.
- Çoğu zaman ZS.4 varsayımı ondan daha katı olan **rassal-olmama varsayımı** ile değiştirilir.

Rassal-Olmama (Non-randomness) Varsayımı

Bağımsız değişken x'ler rassal (stokastik) değildir ya da tekrarlanan örneklemlerde sabit (fixed) değerler alırlar.

- Rassal-olmama varsayımı otomatik olarak ZS.4 varsayımını sağlar.
- Ancak, rassal-olmama varsayımının zaman serileri gözlemleri için doğru olmayacağı çok açıktır.
- Oysa, ZS.4 varsayımı x'lerin rassalık niteliğine dayandığı için daha gerçekçidir.
- Ancak, sapmasızlığın sağlanması için $x \leftrightarrow u$ ilişkisinin nasıl olması gerektiği konusunda, kesin dışsallık koşulu gibi katı koşullar gerekir.

Otokorelasyonun Olmaması

ZS.5: Otokorelasyonun Olmaması

Her $t \neq s$ için, $\mathbf{X}$'e göre koşullu olarak iki farklı zaman dönemine ait hata terimleri arasında korelasyon yoktur.

$$Corr(u_t, u_s|\mathbf{X}) = 0, \quad \forall t, s = 1, 2, \ldots, n \;\text{ ve }\; t \neq s$$

Bu varsayım yatay-kesit verisi analizindeki ÇDR.6'ya denk gelmektedir.

- **Otokorelasyonun olmaması** ZS.5 varsayımı aşağıdaki eşitliği de sağlar.

ZS.5: Otokorelasyonun Olmaması

$$Cov(u_t, u_s|\mathbf{X}) = 0 \quad \text{ve} \quad E(u_t u_s|\mathbf{X}) = 0, \quad \forall t, s = 1, 2, \ldots, n \;\text{ ve }\; t \neq s$$

- ZS.5 varsayımı sağlanmadığında, hata terimleri dönemler boyunca ilişkilidir yani **otokorelasyon** (autocorrelation) içeriyor demektir.

Otokorelasyonun Olmaması

- Otokorelasyon, çoğunlukla zaman serisi analizine özgü bir sorundur.
- Otokorelasyon, ard arda gelen u'ların tümünün birden pozitif ya da tümünün birden negatif olması şeklinde ortaya çıkar.
  - Örneğin, eğer t döneminde faiz oranı beklenmedik biçimde yüksek olursa, sonraki dönemlerde faiz oranı büyük ihtimalle ortalamanın üstünde olacaktır.
  - Bu durum birçok zaman serisi uygulamasında hata terimlerinin genel karakteridir.
- Oysa, ZS.5 varsayımı sağlandığında, yani otokorelasyon olmadığında, hata terimleri tamamen birbirinden doğrusal ilişkisiz olarak rasgele dağılır.
- Otokorelasyon olmaması varsayımı yatay-kesit analizindeki rassallık varsayımı (ÇDR.3) nedeniyle genellikle otomatik olarak sağlanır.
  - Rassal örnekleme varsayımı altında herhangi iki i ve s gözlemlerine ait hata terimleri, u_i ve u_s, birbirinden bağımsızdır, yani otokorelasyon yoktur. Bu durum, bağımsız değişkenlere göre koşullu olarak da geçerlidir.
  - Yatay-kesit analizinde, otokorelasyon varsayımı sadece çok ekstrem durumlarda gereklidir ve bu nedenle genellikle kullanılmaz.
- ZS.5 varsayımı, bağımsız değişkenlerin kendi zamanları arasındaki korelasyon hakkında hiçbir varsayımda bulunmaz.
- Otokorelasyon hakkındaki detaylı bilgi "Ekonometri I - Basit Doğrusal Regresyon Modeli" ve "Ekonometri II - Otokorelasyon" konularında bulunabilir.

Sabit Varyans

ZS.6: Sabit Varyans (Homoscedasticity)

u_t hata teriminin $\mathbf{X}$'e göre koşullu varyansı her t dönemi için sabittir.

$$Var(u_t|\mathbf{X}) = \sigma^2, \quad \forall t = 1, 2, \ldots, n$$

$$Var(y_t|\mathbf{X}) = \sigma^2, \quad \forall t = 1, 2, \ldots, n$$

Bu varsayım yatay-kesit verisi analizindeki ÇDR.7'ye denk gelmektedir.

- **Sabit varyans** ZS.6 varsayımı aşağıdaki eşitliği de sağlar.

ZS.6: Sabit Varyans (Homoscedasticity)

$$E(u_t^2|\mathbf{X}) = \sigma^2$$

- ZS.6 varsayımının sağlanmadığı duruma **değişen varyans** (heteroscedasticity) denir.
- σ **regresyonun standart sapması**dır (bilinmiyor, bu nedenle tahmin edilecek).
- Bu varsayım SEKK parametre tahmincilerinin varyansının ve standart hatasının türetilmesinde ve etkinlik özelliklerinin belirlenmesinde kullanılır.

Sabit Varyans

- Sabit varyans varsayımının ihlal edildiği duruma örnek olarak aşağıdaki faiz denklemini ele alalım.

Faiz Denklemi (Statik Model)

$$i3_t = \beta_0 + \beta_1 inf_t + \beta_2 def_t + u_t$$

$i3$: 3 aylık devlet tahvili faiz oranı; inf: enflasyon oranı; def: bütçe açığı (GSYH'ya oran olarak)

- ZS.6 varsayımı faiz oranı $i3_t$'yi etkileyen hata terimi u_t'nin zamanla değişmeyen sabit bir varyansa sahip olduğunu söyler.
  - Para politikası rejimindeki değişimler faiz oranındaki değişkenliği etkilediğinden ZS.6 varsayımı rahatlıkla ihlal edilebilir.
  - Bunun ötesinde, faiz oranındaki değişkenlik enflasyon oranına ve bütçe açığına bağlı olabilir. Böyle bir durum da sabit varyans varsayımını ihlal eder.
- Sabit ve değişen varyans hakkındaki detaylı bilgi "Ekonometri I - Basit Doğrusal Regresyon Modeli" ve "Ekonometri II - Değişen Varyans" konularında bulunabilir.

Zaman Serisi Modeli: Tahmin

- Bu alt bölümde, basit zaman serisi modellerinde
  - Anakütle Regresyon Fonksiyonu (ARF)
  - ARF'nin tahmini olan Örneklem Regresyon Fonksiyonu (ÖRF)
  - ÖRF'nin tahmin yöntemleri üzerinde
  - SEKK parametre tahmincileri
  - SEKK parametre tahmincilerinin beklenen değeri
  - SEKK parametre tahmincilerinin varyansı

  üzerinde kısaca durulacaktır.
- Bu konular hakkındaki detaylı bilgi "Ekonometri I - Basit Doğrusal Regresyon Modeli" ve "Ekonometri I - Çoklu Doğrusal Regresyon Modeli: Tahmin" konularında bulunabilir.
  - Zaman serisi analizinde i indeksinin yerine t indeksinin kulanıldığına dikkat edin.
  - Yukarıda sıralanan konuların anlatımı sırasında kullanılan formüllerin ve teoremlerin türetilmesi yatay-kesit analizindekine çok benzer olduğundan özellikle gösterilmemiştir.

Tahmin Yöntemleri

Model, ARF ve ÖRF

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + \cdots + \beta_k x_{tk} + u_t \qquad \text{(Model)}$$

$$E(y_t|\mathbf{X}) = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + \cdots + \beta_k x_{tk} \qquad \text{(ARF)}$$

$$\hat{y}_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{t1} + \hat{\beta}_2 x_{t2} + \cdots + \hat{\beta}_k x_{tk} \qquad \text{(ÖRF)}$$

- Örneklem Regresyon Fonksiyonu (ÖRF), iki yöntemle tahmin edilebilir.
  - Sıradan En Küçük Kareler Yöntemi
  - Momentler Yöntemi
- İki yöntem de aynı tahmin sonuçlarını verir.

SEKK Parametre Tahmincileri

Ana Model

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + \cdots + \beta_k x_{tk} + u_t \quad \text{(Model)}$$

$$\hat{y}_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{t1} + \hat{\beta}_2 x_{t2} + \cdots + \hat{\beta}_k x_{tk} \quad \text{(ÖRF)}$$

- β_0 kesim parametresinin tahmini $\hat{\beta}_0$ (1 tane var):

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{x}_2 - \cdots - \hat{\beta}_k \bar{x}_k$$

- β_j eğim parametresinin tahmini, ya da x_j'nin eğim parametresinin tahmincisi, $\hat{\beta}_j$ (k tane var):

$$\hat{\beta}_j = \frac{\sum_{t=1}^{n} \hat{r}_{tj} y_t}{\sum_{t=1}^{n} \hat{r}_{tj}^2}, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

SEKK Parametre Tahmincileri

- x_j'nin eğim parametresinin tahmincisi $\hat{\beta}_j$ (k tane var):

$$\hat{\beta}_j = \frac{\sum_{t=1}^{n} \hat{r}_{tj} y_t}{\sum_{t=1}^{n} \hat{r}_{tj}^2}, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

  burada $\hat{r}_{tj}$, x_j'nin diğer tüm x'ler $(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_k)$ üzerine uygulanan regresyondan elde edilen kalıntılardır.

- Yardımcı regresyondan elde edilen kalıntı $\hat{r}_j$, x_j içindeki diğer tüm x'lerin $(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_k)$ etkisi çıkarıldıktan sonraki x_j'yi ifade eder.
- Bu işlemdeki amaç, bağımsız değişken x'ler arasındaki çoklu doğrusal bağıntı nedeniyle bağımlı değişken y üzerinde oluşabilecek dolaylı etkiyi kaldırmaktır.

SEKK Parametre Tahmincilerinin Beklenen Değeri

- SEKK parametre tahmincileri $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_j$'lar örneklemden örnekleme değiştiği için bunlara ait dağılımın özelliklerinin incelenmesi gerekir.
- İncelenecek dağılım özellikleri:
  - **Beklenen değer**
  - **Varyans**

Teorem: $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_j$'ların Beklenen Değeri

ZS.1 - ZS.4 varsayımları, Gauss–Markov varsayımları (küçük örneklemde), altında

$$E(\hat{\beta}_0|\mathbf{X}) = \beta_0$$

$$E(\hat{\beta}_j|\mathbf{X}) = \beta_j, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

- Yani, ZS.1 - ZS.4 varsayımları altında SEKK parametre tahmincilerinin örneklem dağılımlarının ortalaması (beklenen değeri) bilinmeyen anakütle parametrelerine eşittir.

SEKK Parametre Tahmincilerinin Varyansı

Teorem: $\hat{\beta}_j$'ların Varyansı

ZS.1 - ZS.6, Gauss–Markov varsayımları (küçük örneklemde), altında

$$Var(\hat{\beta}_j|\mathbf{X}) = \frac{\sigma^2}{SST_j(1-R_j^2)}, \quad SST_j = \sum_{t=1}^{n}(x_{tj}-\bar{x}_j)^2, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

- Ekonometrik analizde ana odak $\hat{\beta}_j$'lar olduğundan, $\hat{\beta}_0$'nın varyansı verilmemiştir.
- Yukarıdaki varyans formülü, Gauss–Markov varsayımları altında yatay-kesit analizi için türettiğimiz varyans ile neredeyse aynıdır.
- Yatay-kesit analizinde varyansı etkileyen faktörler (gözlem sayısı, çoklu doğrusal bağıntı vb.) zaman serisi analizinde de yine aynı etkiyi gösterir.
  - σ^2 gözlenemeyen hata terimi u'nun varyansıdır. Bu nedenle σ^2 **hata varyansı**, σ ise **regresyonun standart sapması** olarak adlandırılır.
  - SST_j, x_j'deki örneklem değişkenliğini ifade eder.
  - R_j^2 ise x_j'nin diğer tüm x değişkenlerine regresyonundan (kesim parametresi içeren) elde edilen belirlilik katsayısıdır.

SEKK Parametre Tahmincilerinin Varyansı

Teorem: $\hat{\beta}_j$'ların Varyansı

ZS.1 - ZS.6, Gauss–Markov varsayımları (küçük örneklemde), altında

$$Var(\hat{\beta}_j|\mathbf{X}) = \frac{\sigma^2}{SST_j(1-R_j^2)}, \quad SST_j = \sum_{t=1}^{n}(x_{tj}-\bar{x}_j)^2, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

- Hata terimi u gözlenemediği için hata varyansı σ^2 bilinmez.
- Bu nedenle, SEKK parametre tahmincilerinin varyansı $Var(\hat{\beta}_j|\mathbf{X})$'ların tahmini için öncelikle hata varyansı σ^2'nin tahmin edilmesi gerekir.
- Buradaki önemli nokta, $Var(\hat{\beta}_j|\mathbf{X})$'ların sapmasız tahmin edilmesi gereklidir. Bu nedenle, σ^2'nin de aynı şekilde sapmasız tahmin edilmesi gerekir.

SEKK Parametre Tahmincilerinin Varyansı

Teorem: Hata Varyansı σ^2'nin Sapmasız Tahmini

ZS.1 - ZS.6, Gauss–Markov varsayımları (küçük örneklemde), altında hata varyansı σ^2'nin sapmasız bir tahmincisi:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n} \hat{u}_t^2}{n-k-1} = \frac{SSR}{n-k-1}$$

burada SSR kalıntı kareleri toplamını ifade eder.

- **Serbestik derecesi** (bağımsız bilgi sayısı)
  - Bağımsız bilgi sayısı $\longrightarrow s.d. = n - (k+1) = n - k - 1$
- $\hat{\sigma}$, regresyonun standart sapması σ'nın bir tahmincisidir ve **regresyonun standart hatası** olarak adlandırılır.

SEKK Parametre Tahmincilerinin Varyansı

- $\hat{\sigma}^2$ tahmin edildikten sonra $Var(\hat{\beta}_j|\mathbf{X})$'nın formülünde yerine koyulup $Var(\hat{\beta}_j|\mathbf{X})$'nın sapmsız bir tahmincisi hesaplanabilir.

$\hat{\beta}_j$'ların $\mathbf{X}$'e Göre Koşullu Varyans Tahminleri

$$Var(\hat{\beta}_j|\mathbf{X}) = \frac{\sigma^2}{SST_j(1-R_j^2)} \longrightarrow \widehat{Var(\hat{\beta}_j|\mathbf{X})} = \frac{\hat{\sigma}^2}{SST_j(1-R_j^2)}, \quad \forall j = 1,2,\ldots,k$$

- Genelde, $Var(\hat{\beta}_j|\mathbf{X})$ ve $\widehat{Var(\hat{\beta}_j|\mathbf{X})}$ arasındaki ayrım yazımda net olarak gösterilmez.
  - $\hat{\beta}_j$'ların varyans tahmini denildiğinde $\widehat{Var(\hat{\beta}_j|\mathbf{X})}$ kastedilmesine rağmen yazıdaki gösterimde genelde $Var(\hat{\beta}_j|\mathbf{X})$ kullanılır.
  - Bu derste aynı yolu izleyip $\hat{\beta}_j$'ların $\mathbf{X}$'e göre koşullu varyans tahminini $Var(\hat{\beta}_j|\mathbf{X})$ ile göstereceğiz.

$$Var(\hat{\beta}_j|\mathbf{X}) = \frac{\hat{\sigma}^2}{SST_j(1-R_j^2)}, \quad \forall j = 1,2,\ldots,k$$

SEKK Parametre Tahmincilerinin Varyansı

$\hat{\beta}_j$'ların $\mathbf{X}$'e Göre Koşullu Standart Sapmaları (sd)

$$sd(\hat{\beta}_j|\mathbf{X}) = \sqrt{Var(\hat{\beta}_j|\mathbf{X})} \longrightarrow sd(\hat{\beta}_j|\mathbf{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{SST_j(1-R_j^2)}}, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

$\hat{\beta}_j$'ların $\mathbf{X}$'e Göre Koşullu Standart Hataları (se)

$$se(\hat{\beta}_j|\mathbf{X}) = \sqrt{\widehat{Var(\hat{\beta}_j|\mathbf{X})}} \longrightarrow se(\hat{\beta}_j|\mathbf{X}) = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{SST_j(1-R_j^2)}}, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

- $se(\hat{\beta}_j|\mathbf{X})$, ZS.6 (sabit varyans) varsayımına dayanan $Var(\hat{\beta}_j|\mathbf{X})$ formülünden türetildiği için ZS.6 varyasımının sağlanmaması durumunda, yani değişen varyans varsa, $Var(\hat{\beta}_j|\mathbf{X})$ ve $se(\hat{\beta}_j|\mathbf{X})$ tahminleri sapmalı olur.

SEKK Parametre Tahmincilerinin Özellikleri

Bu alt bölümde, sırasıyla aşağıdaki konular kısaca incelenecektir.

- Zaman serisi modellerinde Gauss–Markov varsayımları altında SEKK parametre tahmincilerinin küçük örneklem özellikleri
    - Sapmasızlık
    - Etinlik
- Zaman serisi modellerinde küçük örneklemde Gauss–Markov Teoremi

SEKK Parametre Tahmincilerinin Sapmasızlığı

Teorem: SEKK Parametre Tahmincilerinin Sapmasızlığı

ZS.1 - ZS.4 varsayımları altında SEKK parametre tahmincileri $\mathbf{X}$'e göre koşullu olarak sapmasızdır.

$$E(\hat{\beta}_0|\mathbf{X}) = \beta_0$$

$$E(\hat{\beta}_j|\mathbf{X}) = \beta_j, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

- **Sapmasızlık**, SEKK parametre tahmincilerinin örneklem dağılımlarının ortalamasının (beklenen değerinin) bilinmeyen anakütle parametrelerine eşit olduğunu söyler.
- Bu teoremin ispatı yatay-kesit analizi için verilen SEKK parametre tahmincilerinin sapmasızlığı teoreminin ispatıyla aynıdır.
    - Ancak, yatay-kesit analizindeki rassal örnekleme varsayımının (ÇDR.3) yerini zaman serisi analizinde "**bağımsız değişken x'lerin değerleri tüm zamanlar için kontrol edilmişken, her bir t dönemi için u_t sıfır ortalamaya sahiptir**" varsayımı, yani ZS.4 varsayımı, almıştır.
- ZS.1 - ZS.4 varsayımları sağlanmazsa SEKK parametre tahmincileri sapmalı olur.

SEKK Parametre Tahmincilerinin Etkinliği

Teorem: SEKK Parametere Tahmincilerinin Etkinliği

ZS.5 - ZS.6 varsayımları altında SEKK parametre tahmincileri $\mathbf{X}$'e göre koşullu olarak etkindir.

$$Var(\hat{\beta}_j|\mathbf{X}) = \frac{\sigma^2}{SST_j(1 - R_j^2)}, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

- SEKK paramatre tahmincileri $\hat{\beta}_j$'ların **etkin** olması **en küçük/minimum varyanslı** olması anlamına gelir.
- Bu teoremin ispatı yatay-kesit analizi için verilen SEKK parametre tahmincilerinin etkinlik teoreminin ispatıyla aynıdır.
- ZS.5 - ZS.6 varsayımları sağlanmazsa SEKK parametre tahmincileri etkin olmaz.

Gauss–Markov Teoremi

Gauss–Markov Teoremi

ZS.1 - ZS.6 varsayımları altında SEKK parametre tahmincileri $\mathbf{X}$'e göre koşulu olarak, tüm doğrusal sapmasız tahminciler arasında etkin/en iyi (minimum varyanslı) olanlarıdır.

Başka bir ifadeyle, ZS.1 - ZS.6 varsayımları altında SEKK parametre tahmincileri $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \ldots, \hat{\beta}_k$ anakütle parametreleri $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$'nın **D**oğrusal **E**n **İ**yi **S**apmasız **T**ahmin **E**dicileridir (DESTE ya da BLUE—**B**est **L**inear **U**nbiased **E**stimator).

- Gauss–Markov Teoremi regresyon modelinin SEKK yöntemiyle tahmini için teorik dayanak sağlar.
  - ZS.1 - ZS.6 varsayımlarından biri bile ihlal edilirse Gaus-Markov Teoremi geçersiz olur.
  - ZS.4 sağlanmazsa SEKK parametre tahmincilerinin sapmasızlık özelliği, ZS.5 ve ZS.6 sağlanmazsa etkinlik özelliği kaybolur.
- SEKK parametre tahmincileri, ZS.1 - ZS.6 varsayımları altında tıpkı yatay-kesit analizinde ÇDR.1 - ÇDR.7 varsayımları altında olduğu gibi arzu edilir **küçük örneklem** özelliklerine sahip olurlar.

Gauss–Markov Teoremi

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Kaynak: Wikipedia

Andrey Markov (1856-1922)

Kaynak: Wikipedia

Zaman Serisi Modeli: Çıkarsama

- Bu alt bölümde, basit zaman serisi modellerinde
  - Normallik varsayımı
  - Klasik doğrusal model (KDM) varsayımları
  - KDM varsayımları altında SEKK parametre tahmincilerinin küçük örneklem özellikleri
  - KDM varsayımları altında çıkarsama

  üzerinde kısaca durulacaktır.
- Bu konular hakkındaki detaylı bilgi "Ekonometri I - Çoklu Doğrusal Regresyon Modeli: Çıkarsama" konusunda bulunabilir.
  - Zaman serisi analizinde i indeksinin yerine t indeksinin kulanıldığına dikkat edin.
  - Yukarıda sıralanan konuların anlatımı sırasında kullanılan formüllerin ve teoremlerin türetilmesi yatay-kesit analizindekine çok benzer olduğundan özellikle gösterilmemiştir.

Normallik Varsayımı

- Zaman serisi analizinde hipotez testleri yapabilmek ve güven aralıkları oluşturabilmek için, başka bir deyişle, standart hata, t ve F testlerini kullanabilmek için yatay-kesit analizindeki varsayımın bir benzerini kullanacağız.

ZS.7: Normallik Varsayımı

u_t hata terimleri, $\mathbf{X}$'ten bağımsızdır, ve bağımsız ve özdeş dağılımlıdır (iid - **i**dentically and **i**ndependently **d**istributed). u_t hata terimleri, ortalaması 0 ve varyansı σ^2 olan normal dağılma uyar.

$$u \overset{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$$

Bu varsayım yatay-kesit analizindeki ÇDR.8'e denk gelmektedir.

- Normallik varsayımı önceki varsayımlardan çok daha kuvvetli bir varsayımdır.
  - ZS.7 varsayımı, ZS.4, ZS.5 ve ZS.6 varsayımlarının geçerli olmasını zorunlu kılar.
  - Bir başka deyişle, ZS.7 sağlanmışsa, ZS.4, ZS.5 ve ZS.6 otomatik olarak sağlanmış olur.
  - Bağımsızlık ve normallik varsayımları nedeniyle ZS.7 varsayımı daha katı bir varsayımdır.

Klasik Doğrusal Model Varsayımları

- ZS.1 - ZS.7 varsayımlarına klasik doğrusal model (KDM) varsayımları denir.,
  - Gauss–Markov varsayımları: ZS.1 - ZS.6
  - KDM varsayımları: ZS.1 - ZS.7 (Gauss–Markov varsayımları + Normallik varsayımı)
- KDM varsayımları altında SEKK parametre tahmincileri $\mathbf{X}$'e göre koşulu olarak, sadece doğrusal sapmasız tahminciler arasında değil, doğrusal olsun ya da olmasın, tüm tahminciler arasında sapmasız ve etkin/en iyi (minimum varyanslı) olanlarıdır.

Klasik Doğrusal Model Varsayımları Altında Çıkarsama

Teorem: Normal Örneklem Dağılımları

ZS.1 - ZS.7 varsayımları (KDM varsayımları) altında, SEKK parametre tahmincilerinin $\mathbf{X}$'e göre koşulu dağılımı normaldir. Sıfır hipotezi altında $t-$istatistikleri t dağılımına, $F-$istatistikleri F dağılımına uyar. Güven aralıkları standart biçimde oluşturulabilir.

- Yukarıdaki teorem, ZS.1 - ZS.7 sağlandığında yatay-kesit analizindeki tahmin ve çıkarsama ile ilgili olarak elde edilen tüm sonuçların zaman serisi analizinde de uygulanabileceğini ifade ediyor.
- Zaman serisi analizi için KDM varsayımları ZS.1 - ZS.7, yatay-kesit analizi varsayımlarına kıyasla daha katı koşullar getirir.
    - Özellikle kesin dışsallık (ZS.4) ve otokorelasyon olmaması (ZS.5) varsayımları çoğu zaman gerçekçi olmaktan uzak olabilirler.

Çıkarsama: Örnek 1

- Zaman serisi modellerinde t-testi ile çıkarsamaya (tekil kısıt) örnek vermek için yıllık veri ile işsizliğin enflasyon üzerindeki etkisini araştıran Statik Phillips Eğrisi modelini ele alalım.

Statik Phillips Eğrisi Modeli

$$inf_t = \beta_0 + \beta_1 unem_t + u_t$$

inf: enflasyon oranı; $unem$: işsizlik oranı

- Bu formadaki bir Phillips Eğrisi modeli **doğal işsizlik oranı** ve **beklenen enflasyonun** sabit olduğunu varsayar.
- Makroekonomi teorisinin işaret ettiği işsizlik ve enflasyon arasındaki ters ilişki bilgisini kullanarak, ortalamada işsizlik ve enflasyon arasındaki **eşanlı ödünümü** araştırmak için

$$H_0 : \beta_1 = 0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \beta_1 < 0$$

  tek kuyruklu (sol kuyruk) hipotez testini uygulayabiliriz.
- Eğer KDM varsayımları geçerliyse SEKK t-istatistiği kullanılabilir.

Çıkarsama: Örnek 1

Statik Phillips Eğrisi Modeli

$$\widehat{inf_t} = \underset{(1.547)}{1.053} + \underset{(0.265)}{0.502}\, unem_t$$

$$n = 56, \quad R^2 = 0.062, \quad \bar{R}^2 = 0.044$$

- $\hat{\beta}_1$ beklenenin aksine pozitif (+) işaretli çıkmıştır. Enflasyonla işsizlik arasında beklediğimiz zıt yönlü bir eşanlı ödünüm gözükmemektedir.
  - Bu sonucun nedeni kısmen de olsa modelin yetersizliğinden olabilir. Daha sonra göreceğimiz gibi, beklenen enflasyonun modele dahil edildiği genişletilmiş (augmented) Phillips eğrisi modeli daha başarılı sonuç verecektir.
  - Bu sonucun olası bir diğer nedeni ise KDM varsayımlarının sağlanmaması olabilir.
- $\hat{\beta}_1$'e ait t-istatistiği yaklaşık olarak 1.891'dir ve bu istatistiğe ait
  - çift kuyruklu hipotez testindeki ($H_0 : \beta_1 = 0$ vs. $H_1 : \beta_1 \neq 0$) p-değeri 0.063'tür.
  - sol kuyruklu hipotez testindeki ($H_0 : \beta_1 = 0$ vs. $H_1 : \beta_1 < 0$) p-değeri 0.968'dir.

Çıkarsama: Örnek 2

- Zaman serisi modellerinde t-testi ile çıkarsamaya (tekil kısıt) örnek vermek için yıllık veri ile enflasyon ve bütçe açığının faiz üzerindeki etkisini araştıran statik modeli ele alalım.

Statik Faiz, Enfalsyon ve Bütçe Açığı Modeli

$$i3_t = \beta_0 + \beta_1 inf_t + \beta_2 def_t + u_t$$

$i3$: 3 aylık devlet tahvili faiz oranı; inf: enflasyon oranı; def: bütçe açığı (GSYH'ya oran olarak)

- Makroekonomi teorisinin işaret ettiği bütçe açığı ve faiz oranı arasındaki pozitif yönlü ilişki bilgisini kullanarak, ortalamada bütçe açığı ve faiz oranı arasındaki **eşanlı ödünümü** araştırmak için

$$H_0 : \beta_2 = 0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \beta_2 > 0$$

tek kuyruklu (sağ kuyruk) hipotez testini uygulayabiliriz.

- Eğer KDM varsayımları geçerliyse SEKK t-istatistiği kullanılabilir.

Çıkarsama: Örnek 2

Statik Faiz, Enfalsyon ve Bütçe Açığı Modeli

$$\widehat{i3_t} = \underset{(0.431)}{1.733} + \underset{(0.083)}{0.605}\, inf_t + \underset{(0.118)}{0.513}\, def_t$$

$$n = 56, \quad R^2 = 0.602, \quad \bar{R}^2 = 0.587$$

- $\hat{\beta}_2$ beklenildiği gibi pozitif (+) işaretli çıkmıştır. Faiz oranı ile bütçe açığı arasında beklediğimiz pozitif yönlü bir eşanlı ödünüm gözükmektedir.
  - Ceteris paribus koşulu altında, bütçe açığındaki yüzde 1 puanlık artış faizde 0.513 puanlık artış yaratıyor.
- $\hat{\beta}_2$'e ait t-istatistiği 4.333'tür ve bu istatistiğe ait
  - çift kuyruklu hipotez testindeki ($H_0 : \beta_2 = 0$ vs. $H_1 : \beta_2 \neq 0$) p-değeri 0.00006'dır.
  - sağ kuyruklu hipotez testindeki ($H_0 : \beta_2 = 0$ vs. $H_1 : \beta_2 > 0$) p-değeri 0.00003'tür.

Çıkarsama: Örnek 3

- Zaman serisi modellerinde F-testi ile çıkarsamaya (çoklu kısıt) örnek için daha önce kullandığımız Statik Phillips Eğrisi modelinin $\text{FDL}_{(2)}$ versiyonunu ele alalım.

$\text{FDL}_{(2)}$ Phillips Eğrisi Modeli

$$inf_t = \alpha_0 + \delta_0 unem_t + \delta_1 unem_{t-1} + \delta_2 unem_{t-2} + u_t$$

inf: enflasyon oranı; $unem$: işsizlik oranı

- Modelin istatistiki olarak genel anlamlılığını araştırmak için

$$H_0 : \delta_0 = \delta_1 = \delta_2 = 0 \;\; \text{vs.} \;\; H_1 : H_0 \text{ doğru değil}$$

hipotez testini uygulayabiliriz.
- Tüm gecikmeli değişken parametrelerinin birlikte istatistiki olarak anlamlı olup olmadığını araştırmak için

$$H_0 : \delta_1 = \delta_2 = 0 \;\; \text{vs.} \;\; H_1 : H_0 \text{ doğru değil}$$

hipotez testini uygulayabiliriz. Eğer boş hipotez reddedilirse, $\text{FDL}_{(2)}$ modeline ihtiyaç vardır. Aksi durumda statik model kullanılmalıdır.
- Eğer KDM varsayımları geçerliyse SEKK F-istatistiği kullanılabilir.

Çıkarsama: Örnek 3

$\text{FDL}_{(2)}$ Phillips Eğrisi Modeli

$$\widehat{inf_t} = \underset{(1.689)}{-0.124} + \underset{(0.402)}{0.903}\, unem_t - \underset{(0.525)}{0.856}\, unem_{t-1} + \underset{(0.386)}{0.668}\, unem_{t-2}$$

$$n = 54, \quad R^2 = 0.149, \quad \bar{R}^2 = 0.098$$

- Modelin istatistiki olarak genel anlamlılığını araştıran hipotez testine ait F-istatistiği 2.932'dir.
  - Bu teste ait p-değeri 0.042'dir.
- Tüm gecikmeli değişken parametrelerinin birlikte istatistiki olarak anlamlı olup olmadığını araştıran hipotez testine ait F-istatistiği 1.708'dir.
  - Bu teste ait p-değeri 0.191'dir.

Fonksiyonel Form ve Kukla Değişkenler

- Bu alt bölümde, zaman serisi modellerinde
  - Farklı fonksiyonel form
  - Kukla değişken

  kullanımı üzerinde kısaca durulacaktır.
- Bu konular hakkındaki detaylı bilgi sırasıyla "Ekonometri I - Matematik ve İstatistik Gözden Geçirme", "Ekonometri I - Basit Doğrusal Regresyon Modeli" ve "Ekonometri II - Kukla Değişkenler" konularında bulunabilir.
  - Zaman serisi analizinde i indeksinin yerine t indeksinin kulanıldığına dikkat edin.
  - Yukarıda sıralanan konularla ilgili bilgi, formül ve teoremler yatay-kesit analizindekine çok benzer olduğundan özellikle gösterilmemiştir.

Fonksiyonel Form

- Şimdi, yatay-kesit analizinde gördüğümüz fonksiyonel formlar ve parametre yorumlamalarını statik zaman serisi modelini kullanarak kısaca hatırlayalım.

Düzey-Düzey Fonksiyonel Formu

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + u_t \quad \longrightarrow \quad \Delta y_t = \beta_1 \Delta x_t$$

ceteris paribus koşulu altında, bağımsız değişken x'deki 1 birimlik artış, bağımlı değişken y'de ortalamada β_1 birim kadar değişime neden olur.

Düzey-Log Fonksiyonel Formu

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 \ln x_t + u_t \quad \longrightarrow \quad \Delta y_t \approxeq (\beta_1/100)\%\Delta x_t$$

ceteris paribus koşulu altında, bağımsız değişken x'deki %1'lik artış, bağımlı değişken y'de ortalamada $\beta_1/100$ birim kadar değişime neden olur. $100\,\Delta \ln x_t \approxeq \%\Delta x_t$ olduğunu unutmayın.

Fonksiyonel Form

Log-Düzey Fonksiyonel Formu

$$\ln y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + u_t \quad \longrightarrow \quad \%\Delta y_t \approxeq (100\,\beta_1)\Delta x_t$$

ceteris paribus koşulu altında, bağımsız değişken x'deki 1 birimlik artış, bağımlı değişken y'de ortalamada $\%100\,\beta_1$ kadar değişime neden olur. $100\,\beta_1$, y'nin x'e göre **yarı-esnekliği** olarak adlandırılır. $100\,\Delta\ln y_t \approxeq \%\Delta y_t$ olduğunu unutmayın.

Log-Log Fonksiyonel Formu

$$\ln y_t = \beta_0 + \beta_1 \ln x_t + u_t \quad \longrightarrow \quad \%\Delta y_t \approxeq \beta_1 \%\Delta x_t$$

ceteris paribus koşulu altında, bağımsız değişken x'deki %1'lik artış, bağımlı değişken y'de ortalamada $\%\beta_1$ kadar değişime neden olur. β_1, y'nin x'e göre **esnekliği** ya da **sabit esnekliği** olarak adlandırılır. $100\,\Delta\ln y_t \approxeq \%\Delta y_t$ ve $100\,\Delta\ln x_t \approxeq \%\Delta x_t$ olduğunu unutmayın.

Fonksiyonel Form

- Yatay-kesit analizinde gördüğümüz tüm fonksiyonel formlar zaman serisi analizinde de kullanılabilir.
- Özellikle logaritmik form zaman serilerinde sıklıkla kullanılmaktadır.
    - Logaritmik form kullanarak bağımsız değişken x'lerin bağımlı değişken y üzerindeki etkisini, ölçü birimlerimden bağımsız olarak, **sabit yüzde** cinsinden elde edebiliriz.
- Farklı fonksiyonel formlardaki β_1'in yorumu özet halinde Tablo 1'de gösterilmiştir.

Tablo 1: Fonksiyonel Form: Özet

Model	**Bağımlı Değişken**	**Bağımsız Değişken**	**β_1'in Yorumu**
Düzey-Düzey	y_t	x_t	$\Delta y_t = \beta_1 \Delta x_t$
Düzey-Log	y_t	$\ln x_t$	$\Delta y_t \approxeq (\beta_1/100)\%\Delta x_t$
Log-Düzey	$\ln y_t$	x_t	$\%\Delta y_t \approxeq (100\,\beta_1)\Delta x_t$
Log-Log	$\ln y_t$	$\ln x_t$	$\%\Delta y_t \approxeq \beta_1 \%\Delta x_t$

- Yukarıdaki tabloda, farklı fonksiyonel formlardaki esneklik formülünün üzerinde durulmamıştır. Fakat, detaylar "Ekonometri I - Matematik ve İstatistik Gözden Geçirme" konusunda bulunabilir.

Fonksiyonel Form: Örnek 1

- Zaman serisi modellerinde fonksiyonel form kullanımına örnek vermek için yıllık veri ile Amerika'daki asgari ücretin Porto Riko'daki istihdam üzerindeki etkisini araştıran Log-Log fonksiyonel formundaki statik modeli ele alalım.

Statik İstihdam, Asgari Ücret ve GSMH Modeli

$$\ln(prepop_t) = \beta_0 + \beta_1 \ln(mincov_t) + \beta_2 \ln(usgnp_t) + u_t$$

$prepop$: Porto Riko'daki istihdam oranı; $mincov$: asgari ücretin ortalama ücrete göre göreceli önemi; $usgnp$: Amerika için Gayri Safi Milli Hasıla (GSMH)

- Asgari ücretin ortalama ücrete göre göreceli önemini belirten $mincov$ değişkeni şu şekilde hesaplanmıştır.

$$\frac{avgmin}{avgwage} \times avgcov$$

burada $avgmin$: ortalama asgari ücret; $avgwage$: ortalama ücret; $avgcov$: asgari ücret yasasından faydalanan çalışanların oranıdır.

Fonksiyonel Form: Örnek 1

Statik İstihdam, Asgari Ücret ve GSMH Ücret Modeli

$$\ln(\widehat{prepop_t}) = \underset{(0.765)}{-1.054} - \underset{(0.064)}{0.154} \ln(mincov_t) - \underset{(0.088)}{0.012} \ln(usgnp_t)$$

$$n = 38, \quad R^2 = 0.661, \quad \bar{R}^2 = 0.641$$

- $prepop$'un $mincov$'a göre esnekliği -0.154 bulunmuştur. Yani, yüksek bir asgari ücret, istihdam oranını düşürmektedir. Bu sonuç, iktisat teorisinin öngörüsüne uygun bir sonuçtur.
  - Çift kuyruklu hipotez testine ait t-istatistiği -2.379 ve p-değeri ise 0.022'dir.
  - β_1, %5 anlamlılık düzeyinde istatistiki olarak anlamlıdır.
- $prepop$'un $usgnp$'ye göre esnekliği -0.012 bulunmuştur.
  - Çift kuyruklu hipotez testine ait t-istatistiği -1.137 ve p-değeri ise 0.891'dir.
  - β_2, %5 anlamlılık düzeyinde istatistiki olarak anlamsızdır. Ancak, ileride göreceğiz ki modele trend ekleyince bu sonuç değişecektir.

Fonksiyonel Form: Örnek 2

- Zaman serisi analizinde, farklı fonksiyonel formlar FDL modelleri için de kullanılabilir. Örnek olarak, çeyreklik veri ile GSYH'nin para talebi üzerindeki etkisini araştıran Log-Log fonksiyonel formundaki $\text{FDL}_{(4)}$ modelini ele alalım.

$\text{FDL}_{(4)}$ Para Talebi ve GSYH Modeli

$$
\begin{aligned}
\ln(M_t) = \alpha_0 + \delta_0 \ln(GDP_t) + \delta_1 \ln(GDP_{t-1}) + \delta_2 \ln(GDP_{t-2}) \\
+ \delta_3 \ln(GDP_{t-3}) + \delta_4 \ln(GDP_{t-4}) + u_t
\end{aligned}
$$

M: Para talebi; GDP: Gayri Safi Yurtiçi Hasıla (GSYH)

Fonksiyonel Form: Örnek 2

$\text{FDL}_{(4)}$ Para Talebi ve GSYH Modeli

$$\ln(M_t) = \alpha_0 + \delta_0 \ln(GDP_t) + \delta_1 \ln(GDP_{t-1}) + \delta_2 \ln(GDP_{t-2}) + \delta_3 \ln(GDP_{t-3}) + \delta_4 \ln(GDP_{t-4}) + u_t$$

M: Para talebi; GDP: Gayri Safi Yurtiçi Hasıla (GSYH)

- δ_0, **etki çarpanıdır** ve GDP'nin M üzerindeki **ani etkisini** gösterir.
  - Kullanılan model Log-Log fonksiyonel formunda olduğu için **kısa dönem esnekliği** (short-run elasticity) olarak da adlandırılır.
  - GDP'deki %1'lik **geçici** bir artışın para talebinde doğuracağı **ani** yüzdesel değişmeyi gösterir.
- δ'ların toplamı, $\delta_0 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4$, **uzun dönem çarpanıdır** ve GDP'nin M üzerindeki **uzun dönemli etkisini** gösterir.
  - Kullanılan model Log-Log fonksiyonel formunda olduğu için **uzun dönem esnekliği** (long-run elasticity) olarak da adlandırılır.
  - GDP'deki %1'lik **kalıcı** bir artışın para talebinde **4 çeyrek sonra doğuracağı** yüzdesel değişmeyi gösterir.

Kukla Değişkenler

- Kukla değişkenler zaman serisi analizinde sıkça kullanılır ve oldukça yararlıdır.
  - Zaman serilerinde gözlem ölçütü zaman olduğundan bir kukla değişken her zaman döneminde belli bir olayın meydana gelip gelmediği bilgisini ifade eder.
  - Çoğu zaman, kukla değişkenler, bir verinin kapsadığı diğer dönemlerden sistematik olarak farklı olabilecek belirli dönemleri izole etmek için kullanılır.
- Örneğin, savaş yılları, siyasi ve ekonomik krizler, depremler vb. bazı özel dönemleri kukla değişkenlerı kullanarak izole edebiliriz.
  - Örnek 1: herhangi bir A partisinin iktidarda olduğu yıllarda 1, olmadığı yıllarda 0 değerini alan bir kukla değişkeni tanımlayıp modelde açıklayıcı değişken olarak kullanabiliriz.
  - Örnek 2: II. Dünya Savaşı yıllarında 1, diğer yıllarda 0 değerini alan bir kukla değişkeni yaratarak savaş yıllarının bağımlı değişken y üzerindeki özel etkisini ölçebiliriz.
- Bellirli bir olayın kukla değişken kullanarak etkisini ölçmeye **olay çalışması** (event study) denir.
  - Bir olay çalışmasında amaç, belirli bir olayın bazı sonuçları etkileyip etkilemediğini görmektir.

Kukla Değişkenler: Örnek 1

- Zaman serisi modellerinde kukla değişken kullanımına örnek vermek için yıllık veri ile vergi muafiyeti, savaş ve doğum kontrol hapının doğurganlık üzerindeki etkisini araştıran statik modeli ele alalım.

Statik Doğurganlık, Vergi Muafiyeti, Savaş ve Doğum Kontrol Hapı Modeli

$$gfr_t = \beta_0 + \beta_1 pe_t + \beta_2 ww2_t + \beta_3 pill_t + u_t$$

gfr: doğurganlık oranı (doğurganlık yaşındaki 1000 kadına düşen bebek sayısı); pe: çocuk sahibi olmayı özendirmek için getirilen vergi muafiyeti; $ww2$: II. Dünya Savaşı yıllarını belirten kukla değişken (1941-1945 yılları için 1 diğer yıllar için 0); $pill$: doğum kontrol hapı kullanımının yasal olduğu yılları belirten kukla değişken (1963 ve sonrası için 1 diğer yıllar için 0)

Kukla Değişkenler: Örnek 1

Statik Doğurganlık, Vergi Muafiyeti, Savaş ve Doğum Kontrol Hapı Modeli

$$\widehat{gfr_t} = \underset{(3.208)}{98.681} + \underset{(0.029)}{0.082}\, pe_t - \underset{(7.458)}{24.238}\, ww2_t - \underset{(4.081)}{31.594}\, pill_t$$

$$n = 72, \quad R^2 = 0.473, \quad \bar{R}^2 = 0.450$$

- Tüm parametreler çift kuyruklu alternatif bir hipoteze karşı %1 anlamlılık düzeyinde istatistiki olarak anlamlıdır.
  - $H_0 : \beta_1 = 0$ vs. $H_1 : \beta_1 \neq 0$ için t-değeri 2.784 ve p-değeri ise 0.006'dır.
  - $H_0 : \beta_2 = 0$ vs. $H_1 : \beta_2 \neq 0$ için t-değeri −3.249 ve p-değeri ise 0.001'dir.
  - $H_0 : \beta_3 = 0$ vs. $H_1 : \beta_3 \neq 0$ için t-değeri −7.741 ve p-değeri ise 0.000'dır.
- Tahmin sonuçlarına göre ceteris paribus koşulu altında
  - Vergi muafiyeti pe'deki 12 dolarlık artış, doğum sayısını 1 adet arttıracaktır ($12 \times 0.082 \approxeq 1$). pe değişkeninin 0-243.8 dolar arasında değiştiğini ve ortalamasının 100.4 dolar olduğunu düşünürsek bu sayı oldukça önemlidir.
  - II. Dünya Savaşı yıllarında ($ww2 = 1$ iken), doğum sayısı 24.238 azalmıştır. gfr değişkeninin 65-127 arasında değiştiğini düşünürsek bu sayı oldukça önemlidir.
  - Doğum kontrol haplarının piyasaya çıktığı yıldan sonra ($pill = 1$ iken), doğum sayısı 31.594 azalmıştır.

Kukla Değişkenler: Örnek 2

- Zaman serisi analizinde, kukla değişkenler FDL modelleri için de kullanılabilir. Örnek olarak, yıllık veri ile vergi muafiyeti, savaş ve doğum kontrol hapının doğurganlık üzerindeki etkisini araştıran $\text{FDL}_{(2)}$ modelini ele alalım.

$\text{FDL}_{(2)}$ Doğurganlık, Vergi Muafiyeti, Savaş ve Doğum Kontrol Hapı Modeli

$$gfr_t = \alpha_0 + \delta_0 pe_t + \delta_1 pe_{t-1} + \delta_2 pe_{t-2} + \beta_1 ww2_t + \beta_2 pill_t + u_t$$

gfr: doğurganlık oranı (doğurganlık yaşındaki 1000 kadına düşen bebek sayısı); pe: çocuk sahibi olmayı özendirmek için getirilen vergi muafiyeti; $ww2$: II. Dünya Savaşı yıllarını belirten kukla değişken (1941-1945 yılları için 1 diğer yıllar için 0); $pill$: doğum kontrol hapı kullanımının yasal olduğu yılları belirten kukla değişken (1963 ve sonrası için 1 diğer yıllar için 0)

Kukla Değişkenler: Örnek 2

FDL$_{(2)}$ Doğurganlık, Vergi Muafiyeti, Savaş ve Doğum Kontrol Hapı Modeli

$$\widehat{gfr_t} = \underset{(3.281)}{95.87} + \underset{(0.125)}{0.072}\, pe_t - \underset{(0.155)}{0.0058}\, pe_{t-1} + \underset{(0.126)}{0.033}\, pe_{t-2} - \underset{(10.731)}{22.12}\, ww2_t - \underset{(3.981)}{31.30}\, pill_t$$

$$n = 70, \quad R^2 = 0.498, \quad \bar{R}^2 = 0.459$$

- pe_t, pe_{t-1} ve pe_{t-2} bağımsız değişkenleri arasında çok yüksek korelasyon olduğu için bu değişkenlere ait parametrelerin standart hataları çok yüksek çıkmıştır.
  - Bu nedenle, hiçbiri ayrı ayrı istatistiki olarak anlamlı değildir.
  - Ancak, üçü birden istatistiki olarak anlamlıdır (F-istatistiği: 3.972; p-değeri: 0.011).
- pe_t, pe_{t-1} ve pe_{t-2} bağımsız değişkenlerinin üçü de istatistiki olarak anlamsız çıktığı için pe'nin gfr üzerindeki etkisinin cari dönem itibariyle mi yoksa gecikmeli mi olduğunu bilemiyoruz.
- Bu nedenle, pe_{t-1} ve pe_{t-2}'nin birlikte istatistiki olarak anlamlı olup olmadığını test edip, testin sonucuna göre FDL$_{(2)}$ ya da statik modeli seçebiliriz.
  - pe_{t-1} ve pe_{t-2} bağımsız değişekenlerine ait parametreler birlikte istatistiki olarak anlamlı olmadığı için gecikmeli değişkenlerin gfr üzerinde bir etkisi yoktur sonucuna varıp, Slayt 62'deki statik modeli kullanırız (F-istatistiği: 0.053; p-değeri: 0.948).

Kukla Değişkenler: Örnek 2

$\text{FDL}_{(2)}$ Doğurganlık, Vergi Muafiyeti, Savaş ve Doğum Kontrol Hapı Modeli

$$\widehat{gfr}_t = \underset{(3.281)}{95.87} + \underset{(0.125)}{0.072}\, pe_t - \underset{(0.155)}{0.0058}\, pe_{t-1} + \underset{(0.126)}{0.033}\, pe_{t-2} - \underset{(10.731)}{22.12}\, ww2_t - \underset{(3.981)}{31.30}\, pill_t$$

$$n = 70, \quad R^2 = 0.498, \quad \bar{R}^2 = 0.459$$

- Yukarıdaki $\text{FDL}_{(2)}$ modelinde uzun dönem çarpanı: $\hat{\theta}_0 = 0.072 - 0.0058 + 0.033 \approxeq 0.1007$ olarak bulunmuştur.
- Bu tahminin istatistiki anlamlılığını sınamak için uzun dönem çarpanının standart hatası $se(\hat{\theta}_0)$'yı bilmemiz gerekir.
- Bunun için $\text{FDL}_{(2)}$ modelini aşağıdaki eşitliği kullanarak yeniden yazalım.

$$\theta_0 = \delta_0 + \delta_1 + \delta_2 \quad \longrightarrow \quad \delta_0 = \theta_0 - \delta_1 - \delta_2$$

Kukla Değişkenler: Örnek 2

$FDL_{(2)}$ Doğurganlık, Vergi Muafiyeti, Savaş ve Doğum Kontrol Hapı Modeli

$$gfr_t = \alpha_0 + \delta_0 pe_t + \delta_1 pe_{t-1} + \delta_2 pe_{t-2} + \beta_1 ww2_t + \beta_2 pill_t + u_t$$

- Yukarıdaki $FDL_{(2)}$ modelinde $\delta_0 = \theta_0 - \delta_1 - \delta_2$'ı yerine koyarsak aşağıdaki dönüştürülmüş modeli elde ederiz.

Dönüştürülmüş $FDL_{(2)}$ Modeli

$$gfr_t = \alpha_0 + \delta_0 pe_t + \delta_1 pe_{t-1} + \delta_2 pe_{t-2} + \beta_1 ww2_t + \beta_2 pill_t + u_t$$

$$gfr_t = \alpha_0 + (\theta_0 - \delta_1 - \delta_2) pe_t + \delta_1 pe_{t-1} + \delta_2 pe_{t-2} + \beta_1 ww2_t + \beta_2 pill_t + u_t$$

$$gfr_t = \alpha_0 + \theta_0 pe_t + \delta_1 (pe_{t-1} - pe_t) + \delta_2 (pe_{t-2} - pe_t) + \beta_1 ww2_t + \beta_2 pill_t + u_t$$

Kukla Değişkenler: Örnek 2

Dönüştürülmüş $\text{FDL}_{(2)}$ Modeli

$$\widehat{gfr_t} = \underset{(3.208)}{95.87} + \underset{(0.029)}{0.1007}\, pe_t - \underset{(0.155)}{0.0058}\,(pe_{t-1} - pe_t) + \underset{(0.126)}{0.033}\,(pe_{t-2} - pe_t)$$

$$- \underset{(10.731)}{22.12}\; ww2_t - \underset{(3.981)}{31.30}\; pill_t$$

$$n = 70, \quad R^2 = 0.498, \quad \bar{R}^2 = 0.459$$

- Dönüştürülmüş modelde uzun dönem çarpanı $\hat{\theta}_0 = 0.1007$'dir ve standart hatası ise $se(\hat{\theta}_0) = 0.029$'dur.
- Uzun dönem çarpanı θ_0, %1 anlamlılık düzeyinde istatistiki olarak anlamlıdır (t-istatistiği: 3.379; p-değeri: 0.001).
  - Kısacası, her üç δ da teker teker istatistiki olarak anlamsız çıktığı halde onların toplamı olan uzun dönem çarpanı θ_0 kuvvetli bir şekilde istatistiki olarak anlamlıdır ve bu nedenle sıfırdan farklıdır.
- Uzun dönem çarpanı θ_0 için %95'lik güven aralığı $[0.041, 0.160]$ olduğundan yukarıdaki hipotez testinin sonucunu doğrular.

Trend ve Mevsimsellik

- Bu alt bölümde, zaman serisi modellerinde
  - Trend
  - Farklı trend türleri
  - Sahte regresyon problemi (spurious regression problem)
  - Trende sahip değişkenlerin regresyonda kullanılması
  - Mevsimsellik
  - Mevsimselliğie sahip değişkenlerin regresyonda kullanılması

  konuları üzerinde durulacaktır.

Trend

- Pek çok ekonomik değişken zaman içinde artma ya da azalma eğilimi gösterir.
  - Yani, zaman içinde trend gösterir.
  - Zaman serisi analizinde çıkarsama yapabilmek için bazı zaman serisi süreçlerinin ayrı ayrı ya da beraberce trend içerbileceğini göz önünde bulundurmalıyız.
- Zaman serisi analizinde, farklı iki zaman serisi süreci diğer başka gözlenemeyen faktörlerin etkisiyle zaman içinde trend gösterdikleri için çoğu kez ilişkili görünür.
  - Fakat, iki zaman serisi sürecinin aynı ya da zıt yönde trend göstermesi onların mutlaka birbirleri üzerinde bir etkiye sahip oldukları anlamına gelmez.
  - İki zaman serisi sürecinin aynı ya da zıt yönde trend gösterdiği gerçeğini göz ardı etmek, yanlış bir şekilde onların birbirleri üzerinde bir etkiye sahip oldukları sonucuna varmamıza neden olabilir.

Trend

- Zaman serilerinde genellikle 3 tür trend gözlenir.
  - Doğrusal trend (linear trend)
  - Üstel trend (exponential trend)
  - Karesel trend (quadratic trend)
- Zaman serisi süreçleri belirli zaman dilimlerinde belirgin aşağı yönlü trende sahip olmalarına rağmen, zaman serisi analizinde genellikle yukarı yönlü trend gözlenir.
  - Bu nedenle, yukarıda belirtilen trend türlerini incelerken zaman serisi süreci içinde her zaman yukarı yönlü trendin olduğunu varsayacağız.
- Zaman serilerindeki bu 3 tür trendi aşağıdaki modellerle ifade edebiliriz.
  - Doğrusal Trend Modeli
  - Üstel Trend Modeli
  - Karesel Trend Modeli
- Şimdi, farklı trendlerin ifade edildiği bu modelleri inceleyelim.

Doğrusal Trend Modeli

- Zaman serisi analizinde kullanılan en yaygın model **doğrusal trend modeli**dir.

Doğrusal Trend Modeli

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \epsilon_t, \quad t = 1, 2, \ldots, n$$

- ϵ_t, ortalaması sıfır ve varyansı sabit olan **bağımsız ve özdeş dağılımlı** (iid - **i**dentically and **i**ndependently **d**istributed) bir seridir.

$$E(\epsilon_t) = 0 \quad \text{ve} \quad Var(\epsilon_t) = \sigma_\epsilon^2$$

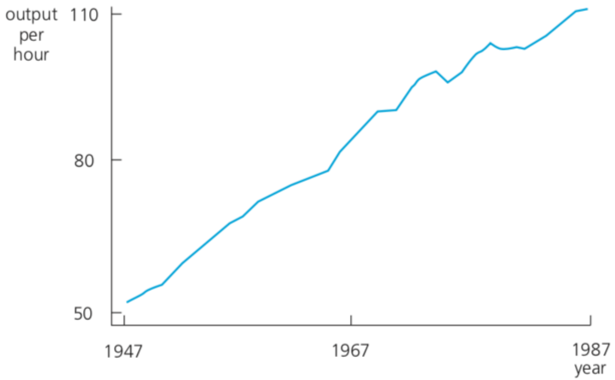
- α_1, diğer faktörler (ϵ_t'de içerilen) sabit iken, zaman indeksinde 1 dönemlik bir değişme olduğunda y_t'de meydana gelen değişimi ölçer.

$$\text{Eğer} \quad \Delta\epsilon_t = \epsilon_t - \epsilon_{t-1} = 0 \quad \text{ise} \quad \Delta y_t = y_t - y_{t-1} = \alpha_1$$

- Doğrusal trende örnek olarak Şekil 2, Amerika'daki işgücü üretkenliğini (çalışma saati başına çıktı) içermektedir. Bu zaman serisi, işçilerin zaman içinde daha üretken hale geldiğini yansıtan açık bir yukarı yönlü trendi göstermektedir.

Doğrusal Trend Modeli

FIGURE 10.2 Output per labor hour in the United States during the years 1947–1987; 1977 = 100.



Şekil 2: Çalışma Saati Başına Çıktı: ABD, 1947-1987

Kaynak: Wooldridge (2016)

Doğrusal Trend Modeli

- Doğrusal trende sahip bir zaman serisi sürecinin ortalaması zamanın kesin bir fonksiyonudur.

Doğrusal Trend Modeli

$$E(\epsilon_t) = 0 \quad \text{olduğundan} \quad y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \epsilon_t \quad \longrightarrow \quad E(y_t) = \alpha_0 + \alpha_1 t$$

- Eğer $\alpha_1 > 0$ ise ortalamada y_t'de yukarı yönlü bir trend vardır ve zamanla artar.
- Eğer $\alpha_1 < 0$ ise ortalamada y_t'de aşağı yönlü bir trend vardır ve zamanla azalır.
- Ancak burada doğrusal bir şekilde (bir çizgi üzerinde) artan ya da azalan y_t değil onun ortalaması $E(y_t)$'dir.
  - Rassal seri ϵ_t nedeniyle y_t zigzaglar çizerek artacak ya da azalacaktır.
- Bu durumda ortalamanın aksine varyans zaman içinde sabittir.

$$Var(y_t) = Var(y_{t-1}) = \sigma_\epsilon^2$$

- Eğer ϵ_t *iid* seri ise y_t bağımsız bir seri olacak, ancak beklenen değeri t'ye göre değiştiği için özdeş dağılım yapmayacaktır.
- ϵ_t zaman içinde kendi geçmişi ile ilişkili olabilir. Bu durum yukarıda verilen doğrusal trend durumunu değiştirmeyecektir ve ayrıca daha gerçekçidir.

Üstel Trend Modeli

- Birçok ekonomik zaman serisi süreci zaman içinde sabit ortalama hızla artar, yani ortalama büyüme oranına sahiptir. Bu durumda **üstel trend modeli**ni kullanmak uygun olur.

Üstel Trend Modeli

$$y_t = exp(\beta_0 + \beta_1 t + \epsilon_t), \quad t = 1, 2, \ldots, n$$

- Eğer zaman serisi süreci hep pozitif değerler alıyorsa yukarıdaki denklemde her iki tarafın logaritmasını alarak, üstel trendi aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

Üstel Trend Modeli

$$\ln y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \epsilon_t, \quad t = 1, 2, \ldots, n$$

- Kısacası, logaritması alınmış zaman serisi süreci için doğrusal trend modeli uygulamak ile düzey formundaki zaman serisi süreci için üstel trend modeli uygulamak eş değerdir.

Üstel Trend Modeli

Üstel Trend Modeli

$$\ln y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \epsilon_t, \quad t = 1, 2, \ldots, n$$

- Ceteris paribus koşulu altında, yani $\Delta\epsilon_t = 0$ iken ve t zamanı sadece 1 dönem arttığında ($t-1$'den t'ye gittiğinde), β_1 şu şekilde tanımlanabilir.

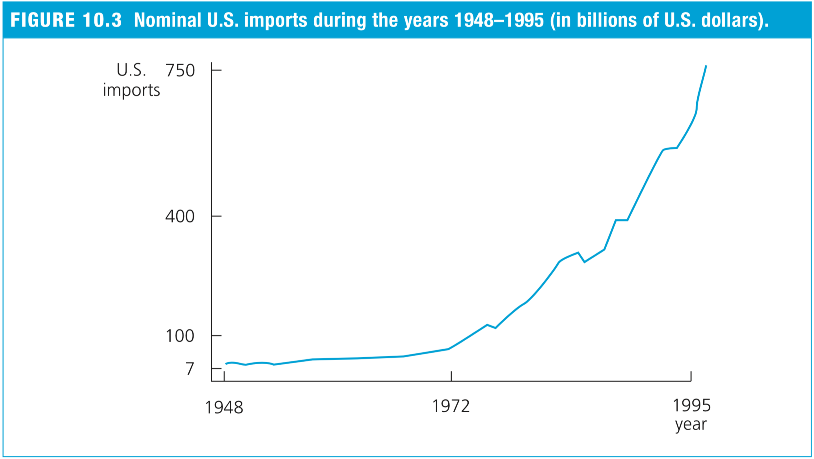
$$\frac{\Delta \ln y_t}{\Delta t} = \beta_1 \quad \longrightarrow \quad \Delta \ln y_t = \beta_1, \quad \forall t = 1, 2, \ldots, n$$

- Logaritmik yakınsama özelliğini kullarak β_1'in yaklaşık ortalama büyüme oranını ifade ettiğini gösterebiliriz.

$$\Delta \ln y_t = \ln y_t - \ln y_{t-1} \approxeq \frac{y_t - y_{t-1}}{y_t} \quad \longrightarrow \quad \beta_1 = \frac{y_t - y_{t-1}}{y_t}$$

- Kısacası, üstel trend modelinde β_1, y_t'deki yaklaşık ortalama **büyüme oranı**dır.
  - Örneğin, $\beta_1 = 0.027$ ise y_t her yıl ortalama olarak %2.7 (%100 × 0.027 ≊ %2.7) büyür.
- Üstel trende örnek olarak Şekil 3, Amerika'daki yıllık nominal ithalat verisini içermektedir. Bu zaman serisi, nominal ithalatın zaman artarak arttığını yansıtan açık bir üstel trendi göstermektedir.

Üstel Trend Modeli



Şekil 3: Yıllık Nominal İthalat: ABD, 1948-1995

Kaynak: Wooldridge (2016)

Karesel Trend Modeli

- Zaman serisi analizinde, doğrusal ve üstel trend modelleri en yaygın olarak kullanılan modeller olmalarına rağmen, zaman serisi süreçlerinde daha karmaşık trend modelleri de gerektiğinde kullanılabilir.
- Örneğin, bir zaman serisi sürecine ait trendin eğimi zaman içinde değişiyorsa (artıyor ya da azalıyorsa), yani büyüme giderek hızlanıyor ya da yavaşlıyorsa, t^2 terimi de modele eklenerek **karesel trend modeli** kullanılabilir.

Karesel Trend Modeli

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \epsilon_t, \quad t = 1, 2, \ldots, n$$

- Trendin eğiminin, zaman göre nasıl değiştiğini incelemek için yaklaşık trend eğimini $\Delta\epsilon_t = 0$ iken aşağıdaki gibi hesaplayabiliriz.

$$\frac{\Delta y_t}{\Delta t} = \alpha_1 + 2\alpha_2 t$$

- Eğer α_1 ve α_2 pozitif ise trendin eğimi t ile birlikte artacaktır.
- Eğer $\alpha_1 > 0$ ve $\alpha_2 < 0$ ise trend kambur şeklinde olacaktır ve trendin eğimi t ile birlikte azalacaktır.

Trende Sahip Değişkenlerin Regresyonda Kullanımı

- Trende sahip bağımlı ve bağımsız değişkenlerin zaman serisi analizinde regresyonda kullanılması oldukça basittir.
- Trende sahip değişkenlerin modele eklenmesi KDM varsayımlarını (ZS.1 - ZS.7) ihlal etmez.
- Ancak, y_t'yi etkileyen trende sahip gözlenemeyen faktörler, aynı zamanda bağımsız değişken x'lerle de ilişkili olabilir.
- Eğer, bu olasılığı göz ardı edersek y_t ile bir ya da birçok bağımsız değişken x arasında sahte bir ilişki bulabiliriz.
    - Örnegin, trende sahip gözlenemeyen faktörler nedeniyle zamanla hem bağımlı değişken y_t hem de bağımsız değişken x_t artıyor olsun. Her iki değişken de sadece trend nedeniyle zamanla artmasına rağmen aynı yönde hareket ettikleri için hatalı olarak ilişkili bulunabilir. Yani, sahte bir ilişki bulunabilir.
- Trende sahip iki veya daha fazla değişken arasında sahte bir ilişki bulunmasına **sahte regresyon** (spurious regression) denir.

Trende Sahip Değişkenlerin Regresyonda Kullanımı

- Modele trend değişkeni eklenerek sahte regresyon sorunu kolayca aşılabilir.

Trend Değişkenli Model

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + \beta_3 t + u_t, \quad t = 1, 2, \ldots, n$$

burada $t = x_{t3}$ olarak düşünülebilir.

- Modele eklenen trend değişkeni t'nin parametresi β_3, y_t'deki x'lerle ilişkili olmayan artışı ya da azalışı verecektir.
- Gerekli olduğu halde trend değişkeni t'nin modele eklenmemesi dışlanmış değişken sapmasına (omitted variable bias) yol açar.
- Şimdi, zaman serisi analizinde trende sahip değişkenlerin kullanılmasını iki farklı yöntem üzerinden inceleyelim.
  1. **Trend Değişkeni Eklenmesi**: Trende sahip tüm değişkenlerin (bağımlı ve bağımsız değişkenler) olduğu gibi kullanıldığı modele ek olarak trend değişkeninin eklenmesi, yani yukarıda verilen trend değişkenli modelin kullanılmasıdır.
  2. **Trendin Berteraf Edilmesi**: Trende sahip tüm değişkenlere (bağımlı ve bağımsız değişkenler) ait trendin berteraf edilerek (detrending) modelde kullanılmasıdır.

Trend Değişkeni Eklenmesi: Örnek 1

- Zaman serisi modellerinde trende sahip değişkenlerin **trend değişkeni eklenmesi** yöntemiyle kullanımına örnek vermek için yıllık veri ile fiyatların ev yatırımları üzerindeki etkisini araştıran Log-Log fonksiyonel formundaki statik modeli önce trend değişkeni olmadan (trendsiz) olarak ele alalım.

Statik Ev Yatırımları ve Fiyatlar Modeli (Trendsiz)

$$\ln(invpc_t) = \beta_0 + \beta_1 \ln(price_t) + u_t \qquad \text{(Trendsiz Model)}$$

invpc: reel kişi başı ev yatırımı; *price*: ev fiyatları indeksi (1982 baz yılı)

- Daha sonra aynı modeli trend değişkenini ekleyerek (trendli) olarak ele alacağız.

Statik Ev Yatırımları ve Fiyatlar Modeli (Trendli)

$$\ln(invpc_t) = \beta_0 + \beta_1 \ln(price_t) + \beta_2 t + u_t \qquad \text{(Trendli Model)}$$

invpc: reel kişi başı ev yatırımı; *price*: ev fiyatları indeksi (1982 baz yılı); t: zaman trendi

- Trendli model Log-Log fonksiyonel formunda olduğundan trende ait β_2 parametresi bağımlı değişken $invpc_t$'deki büyüme oranını ifade edecektir. Yani, üstel trend modeli kullanılmıştır. Bakınız Slayt 75.

Trend Değişkeni Eklenmesi: Örnek 1

Statik Ev Yatırımları ve Fiyatlar Modeli (Trendsiz)

$$\widehat{\ln(invpc_t)} = \underset{(0.043)}{-0.550} + \underset{(0.382)}{1.240}\ \ln(price_t)$$

$$n = 42, \quad R^2 = 0.208, \quad \bar{R}^2 = 0.188$$

- Tahmin sonuçlarına göre ceteris paribus koşulu altında
  - Fiyatlardaki %1'lik artış ev yatırımlarını %1.24 arttıracaktır.
  - $H_0 : \beta_1 = 0$ vs. $H_1 : \beta_1 \neq 0$ için t-değeri 3.245 ve p-değeri ise 0.002'dir.
  - $H_0 : \beta_1 = 1$ vs. $H_1 : \beta_1 \neq 1$ için t-değeri 0.630 ve p-değeri ise 0.532'dir.
  - Yani, ev yatırımlarının fiyatlara göre esnekliğini belirten $\hat{\beta}_1$ çok büyüktür ve istatistiki olarak anlamlıdır.
- Fakat, yukarıdaki modelde kullanılan bağımlı $\ln(invpc_t)$ ve bağımsız $\ln(price_t)$ değişkenleri trend içerebilir ve sahte regresyon problemi ortaya çıkabilir.
- Şimdi, önceki modelde sahte regresyon problemiyle karşılaşmamak için tüm bağımlı ve bağımsız değişkenleri trend değişkeni t üzerine regres ederek, bu değişkenlerin trende sahip olup olmadıklarını anlamaya çalışalım.

Trend Değişkeni Eklenmesi: Örnek 1

Ev Yatırımları vs. Trend

$$\ln(invpc_t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \epsilon_t$$

$$\widehat{\ln(invpc_t)} = \underset{(0.044)}{-0.841} + \underset{(0.001)}{0.008}\, t$$

$$n = 42, \quad R^2 = 0.335, \quad \bar{R}^2 = 0.318$$

Fiyatlar vs. Trend

$$\ln(price_t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \epsilon_t$$

$$\widehat{\ln(price_t)} = \underset{(0.010)}{-0.188} + \underset{(0.0004)}{0.004}\, t$$

$$n = 42, \quad R^2 = 0.728, \quad \bar{R}^2 = 0.722$$

- Tahmin sonuçlarına göre ceteris paribus koşulu altında
  - Her iki modelde de trend değişkeni t'nin parametre tahmincisi α_1 pozitif olduğundan $\ln(invpc_t)$ ve $\ln(price_t)$ değişkenlerinde yukarı yönlü bir trend mevcuttur.
- Yukarıdaki modellerde trend değişkeni nedeniyle çok güçlü bir otokorelasyon olduğundan dolayı parametre tahmincilerine ait standart hatalar güvenilir değildir. Bu sebeple trend değişkeni parametresine istatistiki testler uygulanmamıştır.
- Sonuç olarak, Slayt 82'de verilen statik ev yatırımları ve fiyatlar modelindeki bağımlı ve bağımsız değişkenler trend içerdiğinden sahte regresyon problemi vardır. Bu nedenle model trend değişkeni kullanılarak yeniden tahmin edilmelidir.

Trend Değişkeni Eklenmesi: Örnek 1

- Şimdi, Slayt 82'de verilen statik ev yatırımları ve fiyatlar modeline trend değişkeni ekleyerek yeniden tahmin edelim.

Statik Ev Yatırımları ve Fiyatlar Modeli (Trendli)

$$\widehat{\ln(invpc_t)} = \underset{(0.135)}{-0.913} - \underset{(0.678)}{0.308} \ln(price_t) + \underset{(0.003)}{0.009}\, t$$

$$n = 42, \quad R^2 = 0.340, \quad \bar{R}^2 = 0.306$$

- Tahmin sonuçlarına göre ceteris paribus koşulu altında
  - Fiyatlardaki %1'lik artış ev yatırımlarını %0.381 azaltacaktır.
  - $H_0 : \beta_1 = 0$ vs. $H_1 : \beta_1 \neq 0$ için t-değeri -0.561 ve p-değeri ise 0.577'dir.
  - Yani, ev yatırımlarının fiyatlara göre esnekliğini belirten $\hat{\beta}_1$, trend değişkeni eklendikten sonra küçülmüştür ve istatistiki olarak anlamsız hale gelmiştir.
- Trend değişkeni ile ilgili olarak şunlar söylenebilir:
  - Ev yatırımları yer yıl ortalama olarak %0.9 (%100 × 0.009 ≊ %0.9) büyüyor.
  - $H_0 : \beta_2 = 0$ vs. $H_1 : \beta_2 \neq 0$ için t-değeri 2.798 ve p-değeri ise 0.007'dir.

Trend Değişkeni Eklenmesi: Örnek 2

- Zaman serisi modellerinde **trend değişkeni eklenmesi** yöntemine başka bir örnek vermek için yıllık veri ile vergi muafiyeti, savaş ve doğum kontrol hapının doğurganlık üzerindeki etkisini araştıran statik modeli **karesel trend modeli**ni kullanarak ele alalım.

Statik Doğurganlık, Vergi Muafiyeti, Savaş ve Doğum Kontrol Hapı Modeli (Trendli)

$$gfr_t = \beta_0 + \beta_1 pe_t + \beta_2 ww2_t + \beta_3 pill_t + \beta_4 t + \beta_5 t^2 + u_t$$

gfr: doğurganlık oranı (doğurganlık yaşındaki 1000 kadına düşen bebek sayısı); pe: çocuk sahibi olmayı özendirmek için getirilen vergi muafiyeti; $ww2$: II. Dünya Savaşı yıllarını belirten kukla değişken (1941-1945 yılları için 1 diğer yıllar için 0); $pill$: doğum kontrol hapı kullanımının yasal olduğu yılları belirten kukla değişken (1963 ve sonrası için 1 diğer yıllar için 0); t: zaman trendi

- Daha sonra bu karesel trendli model tahminlerini Slayt 63'deki trendsiz model tahminleri ile karşılaştıralım.

Trend Değişkeni Eklenmesi: Örnek 2

Statik Doğurganlık, Vergi Muafiyeti, Savaş ve Doğum Kontrol Hapı Modeli (Trendsiz)

$$\widehat{gfr_t} = \underset{(3.208)}{98.681} + \underset{(0.029)}{0.082}\, pe_t - \underset{(7.458)}{24.238}\, ww2_t - \underset{(4.081)}{31.594}\, pill_t$$

$$n = 72, \quad R^2 = 0.473, \quad \bar{R}^2 = 0.450$$

Statik Doğurganlık, Vergi Muafiyeti, Savaş ve Doğum Kontrol Hapı Modeli (Trendli)

$$\widehat{gfr_t} = \underset{(4.360)}{124.091} + \underset{(0.040)}{0.347}\, pe_t - \underset{(5.707)}{35.880}\, ww2_t - \underset{(6.336)}{10.119}\, pill_t - \underset{(0.389)}{2.531}\, t + \underset{(0.004)}{0.019}\, t^2$$

$$n = 72, \quad R^2 = 0.726, \quad \bar{R}^2 = 0.705$$

- Trendsiz ve trendli model tahmin sonuçları karşılaştırıldığında
  - Vergi muafiyeti pe'ye ait parametre trendli modelde daha büyüktür ve istatistiki olarak daha anlamlıdır. $H_0 : \beta_1 = 0$ vs. $H_1 : \beta_1 \neq 0$ için p-değeri ise 0.000'dır.
  - II. Dünya Savaşı $ww2$'ye ait parametre trendli modelde daha büyüktür ve istatistiki olarak daha anlamlıdır. $H_0 : \beta_2 = 0$ vs. $H_1 : \beta_2 \neq 0$ için p-değeri ise 0.000'dır.
  - Doğum kontrol hapı $pill$'e ait parametre trendli modelde daha küçüktür ve istatistiki olarak anlamsızdır. $H_0 : \beta_3 = 0$ vs. $H_1 : \beta_3 \neq 0$ için p-değeri ise 0.115'dır.
  - Her iki trend değişkeni (t ve t^2) de istatisiki olarak anlamlıdır.

Trendin Berteraf Edilmesi

- Regresyona trend değişkeni eklemekle, önce bağımlı ve bağımsız değişkenler içindeki **trendin berteraf edilmesi** (detrending), daha sonra bu trendi içinden alınmış değişkenler kullanılarak regresyonun tahmin edilmesi aynı şeydir.
- Örnek olarak aşağıdaki trend değişkeni eklenmiş modeli ele alalım.

Trend Değişkenli Model

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + \beta_3 t + u_t$$

- Şimdi, yukarıdaki trendli modelde kullanılan tüm değişkenlerin trendini berteraf edelim ve trendten arındırılmış değişkenleri, yani kalıntıları hesaplayalım.

Trendin Berteraf Edilmesi

$$\begin{aligned}
y_t &= \alpha_0 + \alpha_1 t + e_t & \longrightarrow \quad \hat{e}_t &= \ddot{y}_t = y_t - \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 t \\
x_{t1} &= \theta_0 + \theta_1 t + h_t & \longrightarrow \quad \hat{h}_t &= \ddot{x}_{t1} = x_{t1} - \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 t \\
x_{t2} &= \gamma_0 + \gamma_1 t + v_t & \longrightarrow \quad \hat{v}_t &= \ddot{x}_{t2} = x_{t2} - \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 t
\end{aligned}$$

burada $\ddot{y}_t$, $\ddot{x}_{t1}$ ve $\ddot{x}_{t2}$ ilgili modellerden elde edilen kalıntılardır.

Trendin Berteraf Edilmesi

- Eğer elde edilen bu kalıntılar ($\ddot{y}_t$, $\ddot{x}_{1t}$ ve $\ddot{x}_{2t}$) trend değişkenli modelde ilgili değişkenlerin yerine konulur ve trend çıkartılarak tahmin yapılırsa

Kalıntıların Kullanıldığı Trendsiz Model

$$\ddot{y}_t = \delta_0 + \delta_1 \ddot{x}_{t1} + \delta_2 \ddot{x}_{t2} + u_t$$

- Kalıntıların kullanıldığı trendsiz modelden elde edilen eğim parametresi tahmincileri ($\hat{\delta}_1$ ve $\hat{\delta}_2$) trend değişkenli modelden elde edilecek eğim parametresi tahmincileri ($\hat{\beta}_1$ ve $\hat{\beta}_2$) ile aynı olacaktır.
- Yani, $\hat{\delta}_1 = \hat{\beta}_1$ ve $\hat{\delta}_2 = \hat{\beta}_2$ olacaktır.
- $\hat{\delta}_0 = 0$ olarak tahmin edilecektir.
- Trend değişkenli model hatırlatma amacıyla aşağıda tekrar verilmiştir.

Trend Değişkenli Model

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + \beta_3 t + u_t$$

Trende Sahip Değişkenlerin Regresyonda Kullanımı

- Trende sahip değişkenlerin regresyonda kullanımı hakkında önemli notlar:
  - Trende sahip değişkenlerin modelde kullanılması için literatürde en çok tercih edilen yöntem modele **trend değişkeni eklenmesi** yöntemidir.
  - Modele trend eklenmesi için modelde kullanılan tüm değişkenlerin trende sahip olması gerekmez. Yani modelde kullanılan değişkenlerden sadece birinin trend içermesi durumunda bile modele trend eklenmelidir.
  - Zaman serisi analizinde çoğu kez R^2 yatay-kesit analizine kıyasla çok daha yüksektir.
  - Bunun nedeni, zaman serileri analizinde verilerin genellikle toplulaştırılmış (aggregated) nitelikte (ör: Türkiye'deki ortalama ücret) olmasıdır.
    - Toplulaştırılmış verileri açıklamak bireysel verilere (ör: bireyin ücreti) göre daha kolaydır.
  - Ancak R^2'yi zaman serisi analizinde asıl yükselten faktör bağımlı değişken y'nin trende sahip olmasıdır, modele trend değişkeni eklenmiş olsa bile.
    - R^2, hata terimi varyansının y'nin varyansına göre görece büyüklüğünün bir ölçüsüdür.
    - $\overline{R}^2$ (düzeltilmiş R^2'nin) formülü incelenerek bu durum direkt olarak anlaşılabilir.

$$\overline{R}^2 = 1 - \frac{SSR/(n-k-1)}{SST/(n-1)} = 1 - \frac{\hat{\sigma}_u^2}{\hat{\sigma}_y^2}$$

    - y trende sahipken $\hat{\sigma}_y^2 = \frac{SST}{n-1}$ artık σ_y^2'nin sapmasız ve tutarlı bir tahmincisi değildir.
    - Bu durumda ya R^2 modifiye edilmelidir ya da trendi berteraf edilmiş değişkenlerin kullanıldığı modelin R^2'si kullanılmalıdır.
    - y trende sahipken R^2'nin hesaplanması için Wooldridge (2016)'a bakabilirsiniz.

Mevsimsellik

- Belli bir zaman aralığında (yıllık, çeyreklik, aylık, haftalık, günlük vb.) gözlenmiş ekonomik veriler genellikle **mevsimsellik** (seasonality) izler.
  - Örneğin, mevsimlere göre değişen iklim koşulları, tatillerin belli aylara toplanması (ör: aralık ayı için Christmas etkisi) gibi durumlar zaman serisi değişkenlerinde sistematik mevsimsel örüntü yaratır.
- Önemli ölçüde mevsimsel örüntü sergileyen zaman serileri **mevsimsel düzeltme**ye (seasonal adjustment) tabi tutulmalıdır.
- Veri, mevsimsel düzeltme yapılmamış yani ham olarak toplanmışsa mevsimselliğe sahip değişkenlerin kullanılmasını iki farklı yöntem üzerinden inceleyelim.
  1. **Mevsimsel Kukla Değişkenlerin Eklenmesi**: Mevsimselliğe sahip tüm değişkenlerin (bağımlı ve bağımsız değişkenler) olduğu gibi kullanıldığı modele ek olarak mevsimsel kukla değişkenlerin (seasonal dummies) eklenmesidir
  2. **Mevsimselliğin Berteraf Edilmesi**: Mevsimselliğe sahip tüm değişkenlere (bağımlı ve bağımsız değişkenler) ait mevsimselliğin berteraf edilerek (deseasonalizing) modelde kullanılmasıdır.
- Mevsimselliğe sahip değişkenlerin modelde kullanılması için literatürde en çok tercih edilen yöntem modele **mevsimsel kukla değişkenlerinin eklenmesi** yöntemidir. Bu nedenle sadece bu yöntem üzerinde durulacaktır.

Mevsimsel Kukla Değişkenlerinin Eklenmesi: Örnek 1

- Zaman serisi modellerinde mevsimselliğe sahip değişkenlerin **mevsimsel kukla değişkenlerin eklenmesi** yöntemiyle kullanımına örnek vermek için çeyreklik veri ile teorik olarak verilen aşağıdaki statik modeli ele alalım.

Statik Model (Mevsimsel Kuklalı)

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + \cdots + \beta_k x_{tk} + \delta_1 Q2_t + \delta_2 Q3_t + \delta_3 Q4_t + u_t$$

$Q2$, $Q3$ ve $Q4$ sırasıyla ikinci, üçüncü ve dördüncü çeyrekleri ifade eden kukla değişkenlerdir; 1. çeyrek baz dönem/kategori/gruptur.

- Çeyreklik verinin kullanıldığı yukarıdaki modelde 3 (grup sayısı -1) farklı çeyreğe ait çeyreklik kukla değişkenler kullanılmıştır.
  - Modele dahil etmediğimiz çeyrek (genellikle ilk dönem) baz dönem olur.
- y_t'de ve dolayısıyla modelde mevsimselliğin olup olmadığını anlamak için
  - Tüm mevsimsel kukla değişken parametrelerinin birlikte istatistiki olarak anlamlı olup olmadığı F-testi ile test edilir.

$$H_0 : \delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0 \ \text{ vs. } \ H_1 : H_0 \text{ doğru değil}$$

  - Eğer H_0 reddedilirse, modelde mevsimsellik vardır, yani mevsimsel kukla değişkenlere ihtiyaç vardır. Aksi durumda mevsimsel kukla değişkenler kullanılmamalıdır.

Kaynaklar

Hyndman, R.J. ve G. Athanasopoulos (2018). *Forecasting: Principles and Practice*. OTexts.
Tastan, H. (2020). *Lecture on Econometrics II. Personal Collection of H. Tastan*. Retrieved from Online.
Wooldridge, J.M. (2016). *Introductory Econometrics: A Modern Approach*. Nelson Education.

