

# Zaman Serileri - Basit Zaman Serisi Modelleri

Zaman Serileri Analizi

Ekonometrik Modelleme ve Zaman Serileri Analizi

Dr. Ömer Kara<sup>1</sup>

<sup>1</sup>İktisat Bölümü

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

12 Ağustos 2021

# Taslak

## 1 Motivasyon

## 2 Zaman Serisi Modelleri: Örnekler

- Statik Modeller
- FDL Modelleri

# Motivasyon

- Bu bölümde zaman serisi analizi uygulamalarında yararlı olan ve SEKK Yöntemi ile kolayca tahmin edilebilen iki basit zaman serisi modelini inceleyeceğiz.
  - Statik Modeller
  - Sonlu Dağıtılmış Gecikme Modelleri (Finite Distributed Lag Models) - FDL Modelleri
- Yukarıda bahsedilen modeller, daha sonra göreceğimiz zaman serileri verisiyişse regresyon analizi konusuna hazırlık olarak düşünülmelidir.

# Statik Model

## Statik Model

$y$  ve  $z$  eşanlı (contemporaneously) zaman indeksi taşıyan iki zaman serisi olsun.  $y$ 'yi  $z$  ile ilişkilendiren statik bir model aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 z_t + u_t, \quad t = 1, 2, \dots, n$$

- Statik model, değişkenlerin birinci farkları arasında da formüle edilebilir.

$$\Delta y_t = \beta_1 \Delta z_t + u_t, \quad t = 1, 2, \dots, n$$

- Buradaki statik kelimesi  $y$  ve  $z$  arasında eşanlı (yani aynı zamanlı) bir ilişki modellediğimizden dolayı kullanılmaktadır.
- Statik modeller genellikle  $z$ 'de  $t$  zamanında oluşan bir değişikliğin  $y$  üzerindeki etkisi hemen (yani  $t$  zamanında) gözleniyorsa kullanılır.

$$\Delta y_t = \beta_1 \Delta z_t, \quad \Delta u_t = 0 \quad \text{iken}$$

# Statik Model (Basit Doğrusal Regresyon): Örnek

- Statik Phillips Eğrisini statik zaman serisi modeline bir örnek olarak kullanabiliriz.

## Statik Phillips Eğrisi Modeli

$$\ln f_t = \beta_0 + \beta_1 unem_t + u_t$$

$\ln f$ : enflasyon oranı;  $unem$ : işsizlik oranı

- Bu formadaki bir Phillips Eğrisi modeli **doğal işsizlik oranı** (natural rate of unemployment) ve **beklenen enflasyonun** (expected inflation) sabit olduğunu varsayar.
- Bu model aracılığıyla  $\ln f_t$  ve  $unem_t$  değişkenleri arasındaki **eşanlı ödünümü** (contemporaneous tradeoff) inceleyebiliriz.

# Statik Model (Çoklu Doğrusal Regresyon): Örnek

- Statik bir regresyon modelinde çok sayıda farklı bağımsız değişken bulunabilir.
- Aşağıdaki model yıllara göre bir şehirdeki cinayet oranını etkileyen faktörleri statik olarak açıklamaya çalışıyor.

## Statik Cinayet Modeli

$$mrdрте_t = \beta_0 + \beta_1 convрте_t + \beta_2 unem_t + \beta_3 yngmle_t + u_t$$

*mrdрте*: şehirdeki 10000 kişi başına cinayet oranı; *convрте*: cinayetten hüküm giyme oranı; *unem*: işsizlik oranı; *yngmle*: 18-25 yaşları arasındaki erkeklerin oranı

- Yukarıdaki statik modeli kullanarak cinayetten hüküm giyme oranı *convрте*'nin cinayet oranı *mrdрте* üzerindeki ceteris paribus (yalın) etkisini tahmin edebiliriz.

# Sonlu Dağıtılmış Gecikme Modeli (FDL Modeli)

- Sonlu dağıtılmış gecikme modellerinde (Finite Distributed Lag Models) bağımlı değişken  $y_t$ 'yi bağımsız değişkenin belli bir gecikmesi (lag) ile etkileyen bir çok değişken mevcuttur.

## 1. Dereceden FDL Modeli: $FDL_{(1)}$

$y_t$ 'yi  $z_t$  ve  $z_t$ 'nin birinci gecikmesi  $z_{t-1}$  ile ilişkilendiren 1. dereceden FDL modeli aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$y_t = \alpha_0 + \delta_0 z_t + \delta_1 z_{t-1} + u_t, \quad t = 1, 2, \dots, n$$

## 2. Dereceden FDL Modeli: $FDL_{(2)}$

$y_t$ 'yi  $z_t$  ve  $z_t$ 'nin birinci ve ikinci gecikmeleri  $z_{t-1}$  ve  $z_{t-2}$  ile ilişkilendiren 2. dereceden FDL modeli aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$y_t = \alpha_0 + \delta_0 z_t + \delta_1 z_{t-1} + \delta_2 z_{t-2} + u_t, \quad t = 1, 2, \dots, n$$

- FDL modellerinde, bağımlı değişken  $y_t$ 'yi eşanlı ve gecikmeli olarak etkileyen bir çok farklı bağımsız değişken olabilir.

$$y_t = \alpha_0 + \delta_0 z_t + \delta_1 z_{t-1} + \delta_2 z_{t-2} + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + u_t$$

## 2. Dereceden FDL Modeli: Örnek

### FDL<sub>(2)</sub> Doğurganlık ve Vergi Muafiyeti Modeli

$$gfr_t = \alpha_0 + \delta_0 pe_t + \delta_1 pe_{t-1} + \delta_2 pe_{t-2} + u_t$$

$gfr$ : doğurganlık oranı (doğurganlık yaşındaki 1000 kadına düşen bebek sayısı);  $pe$ : çocuk sahibi olmayı özendirmek için getirilen vergi muafiyeti

- Vergi muafiyetinin doğurganlığa etkisini ele alan yukarıdaki model 2. dereceden FDL modeline bir örnektir.



# Etki Çarpanı

## 2. Dereceden FDL Modeli: $FDL_{(2)}$

$$y_t = \alpha_0 + \delta_0 z_t + \delta_1 z_{t-1} + \delta_2 z_{t-2} + u_t, \quad t = 1, 2, \dots, n$$

- Yukarıda verilen 2. dereceden FDL modelindeki parametreleri yorumlayabilmek için varsayalım ki  $t$  zamanından önceki tüm dönemlerde  $z$  sabit ve  $c$ 'ye eşit. Fakat  $t$  zamanında bir birim artarak  $c + 1$  oluyor ve  $t + 1$  zamanında tekrar eski değerine dönüyor. Yani  $t$  zamanında  $z$ 'de gerçekleşen **geçici** bir artış var.

$$\dots, z_{t-2} = c, z_{t-1} = c, z_t = c + 1, z_{t+1} = c, z_{t+2} = c, \dots$$

- Bu değişimin  $y$ 'de yaratacağı ceteris paribus (yalın) etkiye, **etki çarpanı** ya da **etki çoğaltanı** (impact multiplier) denir

# Etki Çarpanının Hesaplanması

## 2. Dereceden FDL Modeli: $FDL_{(2)}$

$$y_t = \alpha_0 + \delta_0 z_t + \delta_1 z_{t-1} + \delta_2 z_{t-2} + u_t, \quad t = 1, 2, \dots, n$$

- Şimdi yukarıda verilen 2. dereceden FDL modelindeki etki çarpanını hesaplayalım.
- $z$ 'nin  $y$  üzerindeki ceteris paribus (yalın) etkisine odaklanabilmek için her zaman periodunda hata terimi  $u_t$ 'nin sıfır olduğunu varsayalım.

$$y_{t-1} = \alpha_0 + \delta_0 c + \delta_1 c + \delta_2 c \quad (\text{zaman: } t-1)$$

$$y_t = \alpha_0 + \delta_0(c+1) + \delta_1 c + \delta_2 c \quad (\text{zaman: } t)$$

$$y_{t+1} = \alpha_0 + \delta_0 c + \delta_1(c+1) + \delta_2 c \quad (\text{zaman: } t+1)$$

$$y_{t+2} = \alpha_0 + \delta_0 c + \delta_1 c + \delta_2(c+1) \quad (\text{zaman: } t+2)$$

$$y_{t+3} = \alpha_0 + \delta_0 c + \delta_1 c + \delta_2 c \quad (\text{zaman: } t+3)$$

# Etki Çarpanının Hesaplanması

$$y_{t-1} = \alpha_0 + \delta_0 c + \delta_1 c + \delta_2 c \quad (\text{zaman: } t - 1)$$

$$y_t = \alpha_0 + \delta_0(c + 1) + \delta_1 c + \delta_2 c \quad (\text{zaman: } t)$$

$$y_{t+1} = \alpha_0 + \delta_0 c + \delta_1(c + 1) + \delta_2 c \quad (\text{zaman: } t + 1)$$

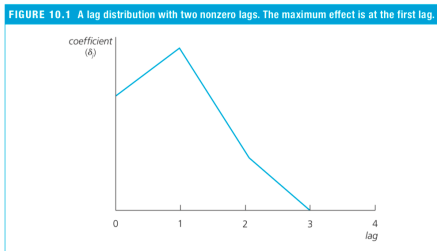
$$y_{t+2} = \alpha_0 + \delta_0 c + \delta_1 c + \delta_2(c + 1) \quad (\text{zaman: } t + 2)$$

$$y_{t+3} = \alpha_0 + \delta_0 c + \delta_1 c + \delta_2 c \quad (\text{zaman: } t + 3)$$

- İlk iki denklemden  $y_t - y_{t-1} = \delta_0$  olduğu rahatlıkla görülebilir.
- $\delta_0$ ,  $t$  döneminde (cari)  $z$ 'deki bir birim artışın  $y$  üzerindeki **ani etkisini** gösterir ve **etki çarpanı** olarak adlandırılır.
- Benzer şekilde  $y$ 'deki değişim, geçici değişimin olduğu  $t$  döneminden bir dönem sonra  $y_{t+1} - y_{t-1} = \delta_1$ 'e, iki dönem sonra ise  $y_{t+2} - y_{t-1} = \delta_2$ 'ye eşit olacaktır.
- $t + 2$  döneminden sonra, yani  $t + 3$  döneminde,  $y$  eski değerine geri dönecektir. Yani,  $y_{t-1} = y_{t+3}$ . Bunun nedeni şu an incelenen modelin sadece iki dönem gecikme barındıran 2. dereceden FDL modeli olmasıdır.

# Gecikme Dağılımı

- $\delta_j$ 'lerin  $j$  indeksine göre çizilen grafiği **gecikme dağılımını** (lag distribution) verecektir.
- Bu grafik,  $z$ 'de meydana gelen **geçici** (temporary) bir artışın  $y$  üzerindeki dinamik etkisini (dynamic effect) gösterecektir.
- 2. dereceden FDL modeli için olası bir gecikme dağılımı Şekil 1'de görülebilir.
- Elbette  $\delta_j$  parametrelerini bilemeyiz. Buna rağmen  $\delta_j$ 'leri tahmin edip bu tahminler üzerinden tahmini bir gecikme dağılımı çizebiliriz.



Şekil 1: Gecikme Dağılımı

Kaynak: Wooldridge (2016)

# Uzun Dönem Çarpanı

## 2. Dereceden FDL Modeli: $FDL_{(2)}$

$$y_t = \alpha_0 + \delta_0 z_t + \delta_1 z_{t-1} + \delta_2 z_{t-2} + u_t, \quad t = 1, 2, \dots, n$$

- $z'$ deki **kalıcı** (permanent) artışların  $y$  üzerindeki etkisini de bilmek isteriz.
- Yukarıda verilen 2. dereceden FDL modelindeki parametreleri yorumlayabilmek için varsayalım ki  $t$  zamanından önceki tüm dönemlerde  $z$  sabit ve  $c'$ ye eşit. Fakat  $t$  zamanından itibaren bir birim artarak kalıcı bir şekilde  $c + 1$  oluyor. Yani  $t$  zamanında  $z'$ de gerçekleşen **kalıcı** bir artış var.

$$\dots, z_{t-2} = c, z_{t-1} = c, z_t = c + 1, z_{t+1} = c + 1, z_{t+2} = c + 1, \dots$$

- Bu değişimin  $y'$ de yaratacağı uzun dönemli etkiye, **uzun dönem çarpanı** ya da **uzun dönem çoğaltanı** (long-run multiplier) denir.
- FDL modellerinde, uzun dönem çarpanı ilginin ana odağıdır.

# Uzun Dönem Çarpanın Hesaplanması

## 2. Dereceden FDL Modeli: $FDL_{(2)}$

$$y_t = \alpha_0 + \delta_0 z_t + \delta_1 z_{t-1} + \delta_2 z_{t-2} + u_t, \quad t = 1, 2, \dots, n$$

- Şimdi yukarıda verilen 2. dereceden FDL modelindeki uzun dönem çarpanını hesaplayalım.
- $z$ 'nin  $y$  üzerindeki uzun dönem etkisine odaklanabilmek için her zaman periodunda hata terimi  $u_t$ 'nin sıfır olduğunu varsayalım.

$$y_{t-1} = \alpha_0 + \delta_0 c + \delta_1 c + \delta_2 c \quad (\text{zaman: } t-1)$$

$$y_t = \alpha_0 + \delta_0(c+1) + \delta_1 c + \delta_2 c \quad (\text{zaman: } t)$$

$$y_{t+1} = \alpha_0 + \delta_0(c+1) + \delta_1(c+1) + \delta_2 c \quad (\text{zaman: } t+1)$$

$$y_{t+2} = \alpha_0 + \delta_0(c+1) + \delta_1(c+1) + \delta_2(c+1) \quad (\text{zaman: } t+2)$$

$$y_{t+3} = \alpha_0 + \delta_0(c+1) + \delta_1(c+1) + \delta_2(c+1) \quad (\text{zaman: } t+3)$$

# Uzun Dönem Çarpanın Hesaplanması

$$y_{t-1} = \alpha_0 + \delta_0 c + \delta_1 c + \delta_2 c \quad (\text{zaman: } t - 1)$$

$$y_t = \alpha_0 + \delta_0(c + 1) + \delta_1 c + \delta_2 c \quad (\text{zaman: } t)$$

$$y_{t+1} = \alpha_0 + \delta_0(c + 1) + \delta_1(c + 1) + \delta_2 c \quad (\text{zaman: } t + 1)$$

$$y_{t+2} = \alpha_0 + \delta_0(c + 1) + \delta_1(c + 1) + \delta_2(c + 1) \quad (\text{zaman: } t + 2)$$

$$y_{t+3} = \alpha_0 + \delta_0(c + 1) + \delta_1(c + 1) + \delta_2(c + 1) \quad (\text{zaman: } t + 3)$$

- İlk iki denklemden  $y_t - y_{t-1} = \delta_0$  olduğu rahatlıkla görülebilir.
- Benzer şekilde  $y'$ deki değişim, kalıcı değişimin olduğu  $t$  döneminden bir dönem sonra  $y_{t+1} - y_{t-1} = \delta_0 + \delta_1$ 'e, iki dönem sonra ise  $y_{t+2} - y_{t-1} = \delta_0 + \delta_1 + \delta_2$ 'ye eşit olacaktır.
- $t + 2$  döneminden sonra, yani  $t + 3$  dönemi ve sonrasında  $y'$ de daha fazla artış meydana gelmez. Yani,  $y_{t+2} = y_{t+3}$ . Bunun nedeni şu an incelenen modelin sadece iki dönem gecikme barındıran 2. dereceden FDL modeli olmasıdır.
- Cari ve gecikmeli  $z$  değişkeninin katsayıları toplamı, yani  $\delta_0 + \delta_1 + \delta_2$ ,  $t$  döneminde (cari)  $z'$ deki bir birimlik kalıcı bir artışın  $y$  üzerindeki **uzun dönemli etkisini** gösterir ve buna **uzun dönem çarpanı** denir.

# Etki Çarpanı ve Uzun Dönem Çarpanın Hesaplanması: Örnek

## FDL<sub>(2)</sub> Doğurganlık ve Vergi Muafiyeti Modeli

$$gfr_t = \alpha_0 + \delta_0 pe_t + \delta_1 pe_{t-1} + \delta_2 pe_{t-2} + u_t$$

*gfr*: doğurganlık oranı (doğurganlık yaşındaki 1000 kadına düşen bebek sayısı); *pe*: çocuk sahibi olmayı özendirmek için getirilen vergi muafiyeti

- Vergi muafiyetinin doğurganlığa etkisini ele alan yukarıdaki modelde  $\delta_0$ ,  $pe$ 'de 1 birimlik artışın doğurganlık oranında yaratacağı ani değişmeyi (etki çarpanı) ölçer. Bu etki biyolojik ve davranışsal nedenlerden ötürü, ya sıfır ya da çok küçük olacaktır.
- $\delta_1$  ve  $\delta_2$ , sırasıyla, bir dönem ve iki dönem önceki 1 birimlik  $pe$  artışının etkilerini ölçmektedir. Bu katsayıların pozitif olmalarını bekleyebiliriz.
- Eğer  $pe$ 'de  $t$  döneminden itibaren kalıcı olarak 1 birimlik artış olursa,  $gfr$ 'deki değişim, iki dönem sonra  $\delta_0 + \delta_1 + \delta_2$  (uzun dönem çarpanı) kadar olacaktır. İki dönemden sonra ise  $gfr$ 'de değişim olmayacaktır.



## q. Dereceden FDL Modeli: $FDL_{(q)}$

- $FDL_{(q)}$  modellerinde bağımlı değişken  $y$ 'yi bağımsız değişkenin  $q$  kadar gecikmesi (lag) ile etkileyen bir çok değişken mevcuttur.

### q. Dereceden FDL Modeli: $FDL_{(q)}$

$y_t$ 'yi  $z_t$  ve  $z_t$ 'nin gecikmeleri  $z_{t-1}, z_{t-2}, \dots, z_{t-q}$  ile ilişkilendiren  $q$ . dereceden FDL modeli aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$y_t = \alpha_0 + \delta_0 z_t + \delta_1 z_{t-1} + \dots + \delta_q z_{t-q} + u_t, \quad t = 1, 2, \dots, n$$

- Slayt 4'de tanıtilan statik model,  $FDL_{(q)}$  modelinin  $\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_q = 0$  eşitliklerini sağladığı özel bir halidir. Bu sebeple, FDL modelleri, bağımsız değişken  $z$ 'nin bağımlı değişken  $y$  üzerinde **gecikmeli etkisinin** (lagged effect) olup olmadığını görmemize yarar.
- $FDL_{(q)}$  modelinde, cari dönem değişkeni  $z_t$ 'nin katsayısı  $\delta_0$  etki çarpanıdır.
- $FDL_{(q)}$  modelinde, uzun dönem çarpanı tüm  $z_t, z_{t-1}, \dots, z_{t-q}$  değişkenlerine ait katsayıların toplamıdır.

$$\text{Uzun Dönem Çarpanı} = \delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_q$$

## q. Dereceden FDL Modeli: $FDL_{(q)}$

- $z_t$ 'nin gecikmeleri  $z_{t-1}, z_{t-2}, \dots, z_{t-q}$  arasında çoğu zaman yüksek korelasyon bulunur. Bu durum çoklu doğrusal bağıntı (ÇDB) problemine yol açar.
  - ÇDB de  $\delta_j$ 'lerin ayrı ayrı ve kesin bir şekilde tahmin edilmelerini güçleştirir.
- $FDL_{(q)}$  modellerinde birden fazla bağımsız değişken gecikmeli olarak bulunabilir.

$$y_t = \alpha_0 + \delta_0 z_t + \delta_1 z_{t-1} + \dots + \delta_q z_{t-q} + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \dots + \beta_q x_{t-q} + u_t$$

- Cari dönem değişkenleri de,  $x_t$  ve  $w_t$  gibi,  $FDL_{(q)}$  modellerine eklenebilir.
  - Örneğin, Slayt 16'deki doğurganlık ve vergi muafiyeti modeline, doğurganlık yaşındaki kadınların ortalama eğitim seviyesi  $educ_t$ 'yi ekleyebiliriz.
  - Böylelikle, kadınlardaki değişen eğitim seviyelerini kontrol etme olanağına kavuşuruz.

$$gfr_t = \alpha_0 + \delta_0 pe_t + \delta_1 pe_{t-1} + \delta_2 pe_{t-2} + \beta_1 educ_t + u_t$$

## q. Dereceden FDL Modeli: $FDL_{(q)}$

### Örnek Soru

Aşağıda yıllık verilerle tahmin edilmiş  $FDL_{(2)}$  modelinin etki çarpanını ve uzun dönem çarpanını bulun ve yorumlayın.

$$\widehat{int}_t = 1.6 + 0.48 enf_t - 0.15 enf_{t-1} + 0.32 enf_{t-2}$$

$int$ : faiz oranı;  $enf$ : enflasyon oranı

# Kaynaklar

- Hyndman, R.J. ve G. Athanasopoulos (2018). *Forecasting: Principles and Practice*. OTexts.
- Tastan, H. (2020). *Lecture on Econometrics II. Personal Collection of H. Tastan*. Retrieved from Online.
- Wooldridge, J.M. (2016). *Introductory Econometrics: A Modern Approach*. Nelson Education.