

Matematik ve İstatistik: Gözden Geçirme

Ekonometri I

Dr. Ömer Kara¹

¹İktisat Bölümü
Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

6 Ağustos 2021

Taslak

- 1 Motivasyon
- 2 Temel Matematiksel Araçlar
 - Toplam Operatörü ve Betimsel İstatistikler
 - Değişkenlerde Değişim
 - Doğrusal ve Doğrusal Olmayan Fonksiyonlar
 - Esneklik
 - Fonksiyonel Form
- 3 Olasılık ve Dağılım Teorisi
- 4 İstatistiksel Çıkarsama

Motivasyon

Bu bölümde, sırasıyla aşağıdaki konular incelenecektir.

- Temel matematiksel araçlar
- Olasılık ve dağılım teorisine ait temel bilgiler
- İstatiksel çıkarsama

Toplam Operatörü ve Özellikleri

Toplam Operatörü

$$\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

burada i indeks; n ise gözlem sayısıdır.

a , b , ve c sabit sayılar olmak üzere

- 1 Sabit bir sayının toplamı:

$$\sum_{i=1}^n c = nc$$

- 2 Sabit sayı ile çarpılan bir serinin toplamı:

$$\sum_{i=1}^n c = nc$$

Toplam Operatörü ve Özellikleri

- 4 Sabit sayı ile çarpılan iki farklı serinin toplamı:

$$\sum_{i=1}^n ax_i + by_i = a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n y_i$$

- 5 İki serinin bölümünün toplamı ile toplamlarının bölümü:

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{y_i} \neq \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n y_i}$$

- 6 Serinin karesinin toplamı ile toplamının karesi:

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 \neq \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2$$

Bazı Betimsel İstatistikler

Örneklem Ortalaması

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

burada n gözlem sayısı, \bar{x} ise örneklem ortalamasıdır.

- ❶ Ortalamadan sapmaların toplamı sıfırdır.

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$$

İspat:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) &= \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i - n\bar{x} = n\bar{x} - n\bar{x} \\ &= 0\end{aligned}$$

Bazı Betimsel İstatistikler

- 2 Ortalamadan sapmaların kareleri toplamı (tek seri için):

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n(\bar{x})^2$$

İspat:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2) \\&= \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^n x_i + n(\bar{x})^2 \\&= \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2n(\bar{x})^2 + n(\bar{x})^2 \\&= \sum_{i=1}^n x_i^2 - n(\bar{x})^2\end{aligned}$$

Bazı Betimsel İstatistikler

- Ortalamadan sapmaların kareleri toplamı (çift seri için):

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i + n\bar{x}\bar{y} \quad (\text{Özellik 2.1})$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^n x_i (y_i - \bar{y}) \quad (\text{Özellik 2.2})$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) y_i \quad (\text{Özellik 2.3})$$

Değişkenlerde Değişim

Başlangıç değeri x_0 ve son değeri ise x_1 olan bir x değişkeninde

1 Oransal Değişim (Proportional Change)

$$\frac{(x_1 - x_0)}{x_0} = \frac{\Delta x}{x_0}$$

2 Yüzdesel Değişim (Percentage Change)

$$\% \Delta x = 100(\Delta x / x_0)$$

3 Yüzdesel Puan Değişimi (Percentage Point Change) Oransal şekilde ifade edilen bir değişkendeki mutlak değişimdir.

$$\% \Delta x_1 - \% \Delta x_0$$

Örnek: Enflasyon %30'dan sonra %45'e yükseldiğinde, $\%45 - \%30 = \%15$ puan değişmiş olur. Oysa, yüzdesel değişim, $\% \Delta x = 100(45 - 30)/30 = \%50$ olacaktır.

Doğrusal Fonksiyonlar

- **Doğrusal fonksiyonlar** (linear functions), yorumlanması ve manipüle edilmesi basit oldukları için ekonometride önemli bir rol oynar.

Doğrusal (Lineer) Fonksiyon

Eğer x ve y değişkenleri aşağıdaki gibi ilişkili ise y , x 'in doğrusal bir fonksiyonudur.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x$$

β_0 ve β_1 , y ve x değişkenleri arasındaki ilişkiyi tanımlayan rakamsal parametrelerdir.

- β_0 kesim (sabit) parametresi ($x_1 = 0$ olduğunda y 'nin değerini belirtir), β_1 ise eğim parametresi olarak bilinir.
- Doğrusal fonksiyonun tanımlayıcı özelliği y 'deki değişim her zaman β_1 çarpı x 'deki değişim çarpı kadar olmasıdır. Diğer bir deyişle, x 'in y üzerindeki **marjinal etkisi** (marginal effect) sabittir ve β_1 'e eşittir.

$$\Delta y = \beta_1 \Delta x$$

Doğrusal Fonksiyonlar

- Aylık ev harcaması ve gelir arasındaki ilişki aşağıdaki doğrusal fonksiyonla gösterildiğini varsayalım.

Doğrusal Fonksiyon: Ev Harcaması vs. Gelir

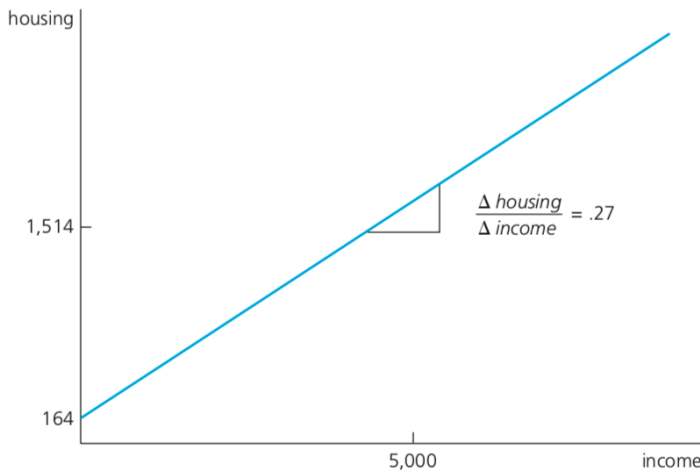
$$housing = \beta_0 + \beta_1 income$$

$$housing = 164 + 0.27 income$$

housing: ev için yapılan harcama; *income*: gelir

- Fonksiyona göre her 1 dolarlık ekstra gelir için, 27 centlik ev harcaması yapılıyor. Örneğin, eğer ailenin geliri \$200 artarsa, bu durumda ev harcaması $0.27 * 200 = \$54$ artar.
- Bu doğrusal fonksiyona ait grafik Şekil 1'de gösterilmiştir.

Doğrusal Fonksiyonlar



Şekil 1: Doğrusal Fonksiyon: Ev Harcaması vs. Gelir

Kaynak: Wooldridge (2016)

Doğrusal Fonksiyonlar

- Lineer fonksiyonlar ikiden fazla değişken kullanılarak da kolayca tanımlanabilir.
- y 'nin x_1 ve x_2 gibi iki farklı değişkene bağlı olduğunu varsaydığımız doğrusal fonksiyonun genel formu aşağıdaki gibi olacaktır.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$$

- Üç-boyutlu grafiği olan bu fonksiyonu iki boyutlu düzlemde göstermek zor olsa da
 - β_0 hala kesim (sabit) parametresidir ($x_1 = 0$ ve $x_2 = 0$ iken y 'nin değerini belirtir).
 - β_1 ve β_2 ise x_1 ve x_2 değişkenlerine ait eğim parametresi olarak bilinir.
- Fonksiyon denklemi kullanarak, x_1 ve x_2 'deki değişikliklere karşılık gelen y 'deki değişim aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$$

$$\Delta y = \beta_1 \Delta x_1 + \beta_2 \Delta x_2$$

Doğrusal Fonksiyonlar

- Eğer, x_2 sabit ise, yani $\Delta x_2 = 0$ ise, y 'deki değişim:

$$\Delta y = \beta_1 \Delta x_1 + \beta_2 \Delta x_2$$

$$\Delta y = \beta_1 \Delta x_1 \quad \text{eğer} \quad \Delta x_2 = 0$$

- β_1, x_1 ile y arasındaki ilişkiyi belirten eğim parametresidir.
- β_1, x_2 'i sabit tuttuğumuzda x_1 'deki değişime karşılık y 'nin nasıl değiştiğini gösterdiğinden x_1 'in y üzerindeki **kısmi etkisi** (partial effect) olarak da adlandırılır.

$$\beta_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x_1} \quad \text{eğer} \quad \Delta x_2 = 0$$

- Kısmi etki diğer faktörlerin sabit tutulmasını içerdiğinden dolayı **ceteris paribus** kavramıyla yakından ilişkilidir.
- β_2 parametresin de yorumlaması benzerdir. β_2, x_2 'in y üzerindeki kısmi etkisini gösterir.

$$\beta_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x_2} \quad \text{eğer} \quad \Delta x_1 = 0$$

Doğrusal Olmayan Fonksiyonlar

- Doğrusal fonksiyonlarda, denklemin sağ tarafında bulunan x 'deki bir birimlik değişim denklemin sol tarafındaki y 'de x 'in başlangıç değerinden bağımsız olarak her zaman aynı etkiye sahiptir. Yani, x 'in y üzerindeki marjinal etkisi sabittir.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x \quad \longrightarrow \quad \beta_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x_1}$$

- Bu durum, birçok iktisadi değişken arasındaki ilişki için gerçekçi değildir, örneğin azalan marjinal getiri (diminishing marginal returns).
- İktisadi değişkenler arasındaki bu tarz farklı ilişkileri de modelleyebilmek için **doğrusal olmayan fonksiyonları** (nonlinear functions) kullanmamız gerekir.
- Doğrusal olmayan fonksiyonlardaki temel mantık, x 'deki bir birimlik değişim y 'de x 'in başlangıç değerine bağlı olarak etki yapar. Yani, x 'in y üzerindeki marjinal etkisi x 'in başlangıç değerine göre değişir.
- Ekonometride bazı doğrusal olmayan fonksiyonlar sıklıkla kullanılır ve bu nedenle bu fonksiyonların nasıl yorumlanacağını bilmesi çok önemlidir.

Karesel Fonksiyonlar

- Değişen marjinal etkiyi modelleyebilmek için ekonometride doğrusal olmayan fonksiyon olarak sıklıkla **karesel fonksiyonlar** (quadratic functions) kullanılır.

Karesel Fonksiyon

x ve y değişkenleri aşağıdaki gibi ilişkili ise y , x 'in doğrusal olmayan bir fonksiyonudur.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$$

β_0 , β_1 , ve β_2 y ve x değişkenleri arasındaki ilişkiyi tanımlayan rakamsal parametrelerdir.

- y 'nin x 'e göre kısmi türevini alarak karesel fonksiyonun eğimi m yaklaşık olarak aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \beta_1 x + 2\beta_2 x$$

- Burada dikkat edilmesi gereken nokta, yukarıdaki eğim hesabı yaklaşıktır. Kesin bir hesaplama için ilk ve son x değerlerini bilmek gerekir.

Karesel Fonksiyonlar

- Karesel fonksiyona ait grafik β_1 ve β_2 parametrelerin işaretine göre değişir.
 - Örneğin, $\beta_1 > 0$ ve $\beta_2 < 0$ olduğunda y ve x arasındaki ilişki Şekil 2'deki gibi parabolik bir şekil alacaktır.
- $\beta_1 > 0$ ve $\beta_2 < 0$ olduğunda, fonksiyonu maksimum yapan, yani eğimin sıfır olduğu ($m = 0$), x^* değeri aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

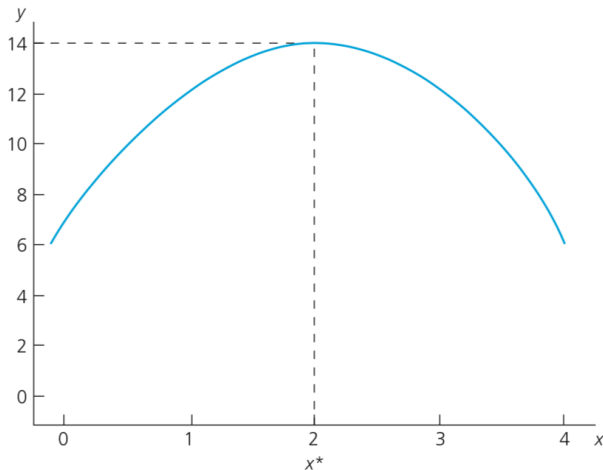
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \cong \beta_1 + 2\beta_2 x = 0 \quad \longrightarrow \quad x^* = \frac{\beta_1}{-2\beta_2}$$

- Örneğin, Şekil 2'deki karesel fonksiyonu maksimum ($y = 14$) yapan x^* değeri 2'dir.

$$\beta_0 = 6, \beta_1 = 8, \beta_2 = -2 \quad \longrightarrow \quad y = 6 + 8x - 2x^2 \quad \longrightarrow \quad x^* = \frac{\beta_1}{-2\beta_2} = 2$$

- Şekil 2'deki karesel fonksiyon incelendiğinde x 'in y üzerindeki **azalan marjinal etkisi** (diminishing marginal effect) açıkça gözlenmektedir. Başka bir deyişle fonksiyonun eğimi x arttıkça azalmaktadır.
 - Karesel fonksiyon β_1 ve β_2 parametrelerin işaretlerine göre farklı şekillerde olabilir.
 - Örneğin, $\beta_1 < 0$ ve $\beta_2 > 0$ olduğunda, karesel fonksiyon “U” şeklinde olur ve x 'in y üzerindeki **artan marjinal etkisi** (increasing marginal effect) gözlenir.

Karesel Fonksiyonlar



Şekil 2: Karesel Fonksiyon: $y = 6 + 8x - 2x^2$

Kaynak: Wooldridge (2016)

Doğal Eksponansiyel Fonksiyon

- Ekonometrik analizde sıklıkla kullanılan bir diğer doğrusal olmayan fonksiyon ise **doğal eksponansiyel fonksiyon**dur (natural exponential function).
- Doğal eksponansiyel fonksiyon “exp” ya da “e” (euler sayısı) ile gösterilir.
- Euler sayısı $e \approx 2.71$ 'nin çıkarılışını incelemek için “Ek Bilgi” butonuna basınız.

► Ek Bilgi

Doğal Eksponansiyel Fonksiyon

$$y = \exp(x) = e^x$$

- Doğal eksponansiyel fonksiyon Slayt 21’de gösterilen doğal logaritmanın tersidir.

$$e^{\ln x} = x \quad \text{eğer} \quad x > 0 \quad \text{ve} \quad \ln(e^x) = x$$

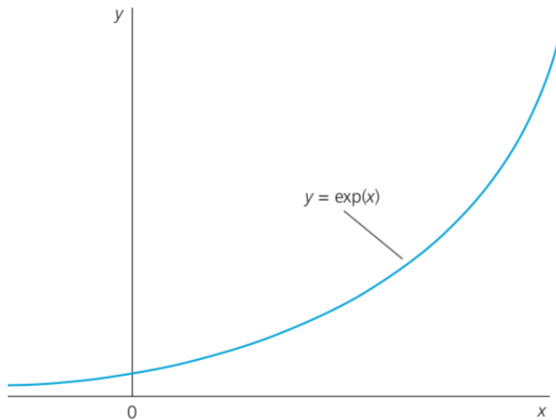
$$y = \exp(\beta_0 + \beta_1 x) = e^{\beta_0 + \beta_1 x} \quad \longrightarrow \quad \ln y = \beta_0 + \beta_1 x$$

- Şekil 3’de grafiği verilen doğal eksponansiyel fonksiyonun özellikleri:

$$e^0 = 1 \quad e^1 = 2.7183$$

$$e^{x+y} = e^x e^y \quad e^{xy} = (e^x)^y \quad e^{c \ln x} = x^c \quad \frac{\partial e^x}{\partial x} = e^x$$

Doğal Eksponansiyel Fonksiyon



Şekil 3: Doğal Eksponansiyel Fonksiyon: $y = e^x$

Kaynak: Wooldridge (2016)

Doğal Logaritma

- Ekonometrik analizde en önemli rolü oynayan doğrusal olmayan fonksiyon **doğal logaritmadır** (natural logaritma), yani e tabanında logaritmadır.
- Doğal logaritma için “ \log_e ” ya da “ \ln ” kullanılır. Fakat biz “ \ln ” ile göstereceğiz.

Doğal Logaritma

$$y = \log_e x = \ln x$$

sadece $x > 0$ durumunda tanımlıdır.

- Şekil 4’de grafiği verilen doğal logaritmanın özellikleri:

$$\ln x = \begin{cases} -\infty & \text{eğer } x \leq 0 \\ < 0 & \text{eğer } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{eğer } x = 1 \\ > 0 & \text{eğer } x > 1 \end{cases}$$

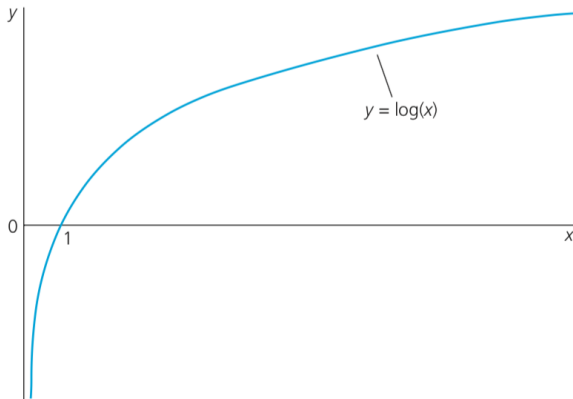
$$\ln x_1 x_2 = \ln x_1 + \ln x_2, \quad x_1, x_2 > 0$$

$$\ln x_1 / x_2 = \ln x_1 - \ln x_2, \quad x_1, x_2 > 0$$

$$\ln x^c = c \ln x, \quad x > 0 \text{ ve } c \in \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial \ln x}{\partial x} = \frac{1}{x}$$

Doğal Logaritma



Şekil 4: Doğal Logaritma: $y = \ln x$

Kaynak: Wooldridge (2016)

Doğal Logaritma

- Doğal logaritma Slayt 19'de gösterilen doğal exponansiyel fonksiyonun tersidir.
- Doğal logaritmada x arttıkça eğim azalarak gittikçe sığır yaklaşır fakat hiçbir zaman sıfır ve negatif olmaz. Bir başka deyişle x 'in y üzerindeki marjinal etkisi azalır fakat hiçbir zaman sıfır veya negatif olmaz.
- Fakat, karesel fonksiyonda β_1 ve β_2 parametrelerin işaretlerine göre bu etki sıfır veya negatif olabilir, Şekil 2'deki gibi.
- Logaritmik yakınsama özelliği ile logaritmik formdaki veride oluşan **küçük değişimler**, düzey formundaki veride oransal ya da yüzdesel değişim olarak yorumlanabilir. x_0 ve x_1 pozitif sayılar olduğunda:

$$\ln x_1 - \ln x_0 \approx (x_1 - x_0)/x_0 \quad (\text{logaritmik yakınsama})$$

$$\Delta \ln x \approx \Delta x/x_0 \quad (\text{oransal değişim})$$

$$100 \Delta \ln x \approx 100 \Delta x/x_0 \quad (100 \text{ ile çarpım})$$

$$100 \Delta \ln x \approx \% \Delta x \quad (\text{yüzdesel değişim})$$

- Logaritmik yakınsama sadece küçük değişimler için kullanılmalıdır. Büyük değişimlerde logaritmik yakınsama doğru sonuç vermez.

Esneklik

- Eğer sadece küçük değişimler için geçerli ise Slayt 23'de verilen logaritmik yakınsama özelliğine ekonometrik analizlerde neden ihtiyaç duyuyoruz?
- Bu soruyu cevaplamak için uygulamalı ekonometrinin birçok alanında kritik önemi olan **esneklik** (elasticity) kavramını inceleyelim.

Esneklik

y 'nin x 'e göre esnekliği x 'de %1'lik bir artış olduğunda y 'de meydana gelen yüzdesel değişmeyi ifade eder.

$$E = \frac{\% \Delta y}{\% \Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \frac{x}{y}$$

- Slayt 23'de verilen logaritmik yakınsama özelliğini kullanarak yaklaşık esneklik formülünü yazabiliriz.

$$E = \frac{\% \Delta y}{\% \Delta x} \approx \frac{100 \Delta \ln y}{100 \Delta \ln x} = \frac{\Delta \ln y}{\Delta \ln x}$$

Fonksiyonel Form

- Ekonometride sıklıkla tercih edilen 4 farklı **fonksiyonel form** (functional form) ile y ve x değişkenleri arasındaki ilişkiyi yorumlayıp esnekliği hesaplayalım.

Düzey-Düzey Fonksiyonel Formu

$$y = \beta_0 + \beta_1 x \quad (\text{fonksiyon})$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \beta_1 \quad (\text{türev})$$

$$\Delta y = \beta_1 \Delta x \quad (\text{yorumlama})$$

ceteris paribus koşulu altında, x 'deki 1 birimlik artış, y 'de β_1 birim kadar değişime neden olur.

$$E = \frac{\Delta y}{\Delta x} \frac{x}{y} = \beta_1 \frac{x}{y} = \beta_1 \frac{x}{\beta_0 + \beta_1 x} \quad (\text{esneklik})$$

y 'nin x 'e göre esnekliği hem parametreler β_0 ve β_1 'e hem de x 'e bağlıdır, yani esneklik sabit değildir. Uygulamada esnekliği sabit bir değer olarak hesaplamak için yukarıdaki formülde genellikle verilerin ortalaması kullanılır, yani \bar{x} ve \bar{y} .

Fonksiyonel Form

Düzey-Log Fonksiyonel Formu

$$y = \beta_0 + \beta_1 \ln x \quad (\text{fonksiyon})$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta \ln x} = \beta_1 \quad (\text{türev})$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta \ln x} = \frac{100 \Delta y}{100 \Delta \ln x} \approx \frac{100 \Delta y}{\% \Delta x} \approx \beta_1 \quad \longrightarrow \quad \Delta y_t \approx (\beta_1/100)\% \Delta x_t \quad (\text{yorumlama})$$

ceteris paribus koşulu altında, x 'deki %1'lik artış, y 'de $\beta_1/100$ birim kadar değişime neden olur.

$$E = \frac{\Delta y}{\Delta x} \frac{x}{y} = \frac{\Delta y}{\Delta x/x} \frac{1}{y} = \frac{\Delta y}{\Delta \ln x} \frac{1}{y} = \frac{\beta_1}{y} = \frac{\beta_1}{\beta_0 + \beta_1 \ln x} \quad (\text{esneklik})$$

y 'nin x 'e göre esnekliği hem parametreler β_0 ve β_1 'e hem de x 'e bağlıdır, yani esneklik sabit değildir. Uygulamada esnekliği sabit bir değer olarak hesaplamak için yukarıdaki formülde genellikle verilerin ortalaması kullanılır, yani \bar{x} ve \bar{y} .

Fonksiyonel Form

Log-Düzey Fonksiyonel Formu

$$\ln y = \beta_0 + \beta_1 x \quad (\text{fonksiyon})$$

$$\frac{\Delta \ln y}{\Delta x} = \beta_1 \quad (\text{türev})$$

$$\frac{\Delta \ln y}{\Delta x} = \frac{100 \Delta \ln y}{100 \Delta x} \approx \frac{\% \Delta y}{100 \Delta x} \approx \beta_1 \quad \longrightarrow \quad \% \Delta y \approx (100 \beta_1) \Delta x \quad (\text{yorumlama})$$

ceteris paribus koşulu altında, x 'deki 1 birimlik artış, y 'de $\%100 \beta_1$ kadar değişime neden olur. $100 \beta_1$, y 'nin x 'e göre **yarı-esnekliği** (semi elasticity) olarak adlandırılır ve y ve x gibi verilere bağlı olmadığı için sabittir.

$$E = \frac{\Delta y}{\Delta x} \frac{x}{y} = \frac{\Delta y/y}{\Delta x} x = \frac{\Delta \ln y}{\Delta x} x = \beta_1 x \quad (\text{esneklik})$$

y 'nin x 'e göre esnekliği hem parametre β_1 'e hem de x 'e bağlıdır, yani esneklik sabit değildir. Uygulamada esnekliği sabit bir değer olarak hesaplamak için yukarıdaki formülde genellikle verilerin ortalaması kullanılır, yani \bar{x} ve \bar{y} .

Fonksiyonel Form

Log-Log Fonksiyonel Formu

$$\ln y = \beta_0 + \beta_1 \ln x \quad (\text{fonksiyon})$$

$$\frac{\Delta \ln y}{\Delta \ln x} = \beta_1 \quad (\text{türev})$$

$$\frac{\Delta \ln y}{\Delta \ln x} = \frac{100 \Delta \ln y}{100 \Delta \ln x} \approx \frac{\% \Delta y}{\% \Delta x} = \beta_1 \quad \longrightarrow \quad \% \Delta y \approx \beta_1 \% \Delta x \quad (\text{yorumlama})$$

ceteris paribus koşulu altında, x 'deki %1'lik artış, y 'de β_1 kadar değişime neden olur. β_1 , y 'nin x 'e göre esnekliğini yaklaşık olarak verir. y ve x gibi verilere bağlı olmadığı için sabittir. Bu nedenle **sabit esneklik** (constant elasticity) olarak adlandırılır.

$$E = \frac{\% \Delta y}{\% \Delta x} \approx \frac{100 \Delta \ln y}{100 \Delta \ln x} = \frac{\Delta \ln y}{\Delta \ln x} = \beta_1 \quad (\text{esneklik})$$

y 'nin x 'e göre esnekliği (yaklaşık) sadece parametre β_1 'e bağlıdır, yani esneklik sabittir. Bu nedenle Log-Log fonksiyonel formu sabit esneklik modeli olarak da bilinir.

Kaynaklar

Gujarati, D.N. (2009). *Basic Econometrics*. Tata McGraw-Hill Education.

Stock, J.H. ve M.W. Watson (2015). *Introduction to Econometrics*.

Tastan, H. (2020). *Lecture on Econometrics I. Personal Collection of H. Tastan*. Retrieved from Online.

Wooldridge, J.M. (2016). *Introductory Econometrics: A Modern Approach*. Nelson Education.

Ek Bilgiler

- Euler sayısı e 'yi hesaplayabilmek için birleşik faiz hesabını kullanacağız.

$$A = P(1 + r)^n$$

A dönem sonu miktar; P anapara miktarı; r faiz oranı; n ise dönem sayısıdır.

- Varsayalım ki 1 TL anaparanız var ve yıllık faiz oranı %100.
 - Anaparanızı yıllık faize verdiğinizde, faiz oranı $\frac{1}{1} = \%100$ olacak ve yıl sonunda elde edeceğiniz miktar: $A = 1 \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2$ TL
 - Aynı miktarı aylık faize verdiğinizde, faiz oranı $\frac{1}{12} = \%8.33$ olacak ve yıl sonunda elde edeceğiniz miktar: $A = 1 \left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12} = 2.61$ TL
 - Aynı miktarı günlük faize verdiğinizde, faiz oranı $\frac{1}{365} = \%0.27$ olacak ve yıl sonunda elde edeceğiniz miktar: $A = 1 \left(1 + \frac{1}{365}\right)^{365} = 2.71$ TL
 - Aynı miktar sürekli faiz işleyecek şekilde yatırılırsa, yıl sonunda elde edeceğiniz miktar: $A = 1 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.718281828 \dots$ TL
 $x \rightarrow \infty$
- Kısaca euler sayısı e şu şekilde hesaplanabilir.

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots$$