

Çoklu Doğrusal Regresyon Modeli: Tahmin

Ekonometri I

Dr. Ömer Kara¹

¹İktisat Bölümü
Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

18 Ekim 2021

Taslak

1 Çoklu Doğrusal Regresyon Modeli

- Motivasyon
- k Bağımsız Değişkenli ÇDR Modeli
- Gauss–Markov Varsayımları
- Anakütle Regresyon Fonksiyonu

2 Çoklu Doğrusal Regresyon Modeli Tahmini

- Örneklem Regresyon Fonksiyonu
- Tahmin Yöntemleri
- SEKK Parametre Tahmincileri
- Yorumlama ve Örnekler
- Tahmin Edilen Değerler ve Kalıntılar
- BDR ve ÇDR Tahminlerinin Karşılaştırılması
- Kareler Toplamları ve Uyum İyiliği
- SEKK Parametre Tahmincilerinin Varyansı

3 SEKK Parametre Tahmincilerinin Özellikleri

- SEKK Parametre Tahmincilerinin Sapmasızlığı
- SEKK Parametre Tahmincilerinin Etkinliği
- Gauss–Markov Teoremi

4 Modelleme Sorunları

- Orijinden Geçen Regresyon
- Modele Gereksiz Bağımsız Değişken Eklenmesi
- Gerekli Bağımsız Değişkenin Model Dışında Bırakılması

Motivasyon - BDR.5

- Basit Doğrusal Regresyon (BDR) analizinde kilit varsayım olan BDR.5 varsayımı çoğu zaman gerçekçi olmayan bir varsayımdır.

BDR.5: Sıfır Koşullu Ortalama Varsayımı

$$E(u|\mathbf{x}) = 0$$

- Daha önce gördüğümüz Yinelenen Beklentiler Kanunu'nu hatırlayalım.

Yinelenen Beklentiler Kanunu

$$E[E(u|\mathbf{x})] = E(u)$$

Motivasyon - BDR.5

- Yinelenen Beklentiler Kanunu kullanılarak BDR.5 varsayımı yeniden tanımlanabilir.

$$E[\underbrace{E(u|\mathbf{x})}_{=0}] = E(u)$$

$$E[0] = E(u)$$

$$0 = E(u)$$

BDR.5: Sıfır Koşullu Ortalama Varsayımı

$$E(u|\mathbf{x}) = E(u) = 0$$

Yani, hata terimi u 'nun bağımsız değişken x 'e göre koşullu ve koşulsuz ortalaması sıfırdır.

Motivasyon - BDR.5

- Koşullu beklenen değerin 5. özelliğini kullanarak u ve x arasındaki ilişki hakkında daha fazla yorumda bulunabiliriz.

Koşullu Beklenen Değer: Özellik 5

$$E(u|\mathbf{x}) = E(u) \quad \text{ise} \quad Cov(x, u) = 0 \quad \text{ve} \quad Corr(x, u) = 0$$

Yani, bağımsız değişken x 'in her fonksiyonu hata terimi u ile ilişkisizdir.

- Korelasyondan farklı olarak, koşullu beklenen değer u ve x arasındaki non-linear ilişkiyi de kapsadığından BDR.5 varsayımı hata terimi u ve bağımsız değişken x rassal olduğunda (BDR.3 sağlandığında) yeniden tanımlanabilir.

BDR.5: Sıfır Koşullu Ortalama Varsayımı

$$E(u|\mathbf{x}) = E(u) = 0$$

$$Cov(x, u) = 0, \quad Corr(x, u) = 0 \quad \text{ve} \quad E(xu) = 0$$

Sonuç: u ve x bağımsızdır. Yani u ve x hem lineer hem de non-linear olarak ilişkisizdir.

► Ek Bilgi

Motivasyon - BDR.5

- BDR.5 varsayımı ile, y 'yi etkileyen diğer tüm faktörler (gözlenemeyen hata terimi u) x ile ilişkisizdir (ceteris paribus).
- Bu faktörler spesifik (kesin) olarak kontrol edilemez. Sadece, bu faktörlerin ortalama olarak değişmediği varsayılır ($\Delta u = 0$).
- İktisadi değişkenlerin bir çoğu birbiriyle ilişkili olduğundan bağımsız bir değişken x 'in bağımlı değişken y üzerindeki yalın etkisini bulmak için bazı faktörlerin spesifik olarak kontrol edilmesi gerekir.
- BDR analizinde spesifik kontrol mümkün olmadığından dolayı ceteris paribus varsayımını uygulamak çok zordur.
- Bu nedenle BDR analizinde çoğu zaman BDR.5 varsayımı ihlal edilir ve parametre tahmincileri (β_0 ve β_1) sapmalı olur.
- Çoklu Doğrusal Regresyon analizinde ise açıkça diğer birçok faktör spesifik olarak kontrol edildiğinden ceteris paribus varsayımına uygundur.

Motivasyon - Fonksiyonel Form

- Çoklu Doğrusal Regresyon (ÇDR) analizinde bağımlı değişkeni (y) eşanlı olarak etkileyen pek çok etkeni (x) kontrol edebiliriz. Kısacası, çok sayıda bağımsız değişkeni (x) kullanabiliriz.
- Modele yeni bağımsız değişkenler ekleyerek y 'deki değişimin daha büyük bir kısmını açıklayabiliriz. Yani, y 'nin tahmini için daha üstün/iyi modeller geliştirebiliriz.
- ÇDR analizinde regresyonun biçimini, yani fonksiyonel formunu, belirlemede çok daha geniş olanaklara sahip oluruz.
- Kısacası, ÇDR modeli bize daha zengin bir analiz imkanı sunar.

ÇDR Modeli: Örnek 1

2 Bağımsız Değişkenli ÇDR Modeli

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u$$

Ücret Modeli

$$wage = \beta_0 + \beta_1 educ + \beta_2 exper + u$$

wage: saatlik ücret (dolar); *educ*: eğitim düzeyi (yıl); *exper*: tecrübe düzeyi (yıl)

- β_1 , ücretleri etkileyen diğer tüm faktörler sabit tuttuğumuzda ($\Delta exper$ ve $\Delta u = 0$), eğitimin ücretler üzerindeki etkisini ölçer.
- β_2 , ücretleri etkileyen diğer tüm faktörler sabit tuttuğumuzda ($\Delta educ$ ve $\Delta u = 0$), tecrübenin ücretler üzerindeki etkisini ölçer.
- Yukarıdaki regresyonda tecrübeyi sabit tutarak eğitimin ücretlere etkisini ölçebiliyoruz. Basit regresyonda bu olanak yoktu. Sadece *educ* ile *u* ilişkisizdir diye varsayıyorduk. Yani sadece $\Delta u = 0$ diyebiliyorduk.

ÇDR Modeli: Örnek 2

Sınav Başarı Modeli

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u$$

$$avgscore = \beta_0 + \beta_1 expend + \beta_2 avginc + u$$

avgscore: ortalama sınav sonucu; *expend*: öğrencinin eğitim harcaması; *avginc*: ortalama aile geliri

- Eğer ortalama aile gelirini (*avginc*) modele doğrudan sokmazsak (yanlış modeli kullanırsak), onu yanlış modeldeki hata teriminin (v) içine almış oluruz.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \quad (\text{Doğru Model})$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + v \quad (\text{Yanlış Model})$$

$$v = \beta_2 x_2 + u \quad (\text{Yanlış Model Hata Terimi})$$

ÇDR Modeli: Örnek 2

- Doğru ve yanlış modelden elde edeceğimiz tahminler farklı olacağından, modeller ve onların ÖRF'leri aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \longrightarrow \hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 \quad (\text{Doğru Model ve ÖRF})$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + v \longrightarrow \tilde{y} = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x_1 \quad (\text{Yanlış Model ve ÖRF})$$

$$v = \beta_2 x_2 + u \quad (\text{Yanlış Model Hata Terimi})$$

- Ortalama aile geliri (*avginc*), öğrencinin harcaması (*expend*) ile yakından ilişkili olduğundan yanlış model kullanıldığında:
 - x_1 ile v ilişkili olacaktır. $\longrightarrow \text{Corr}(x_1, v) \neq 0$
 - BDR.5 varsayımı ihlal edilecektir. $\longrightarrow E(v|\mathbf{x}) \neq 0$
 - Sonuç olarak $\tilde{\beta}_1$ sapmalı tahmin edilecektir. $\longrightarrow E(\tilde{\beta}_1) \neq \beta_1$
- Eğer doğru modeli (*avginc* değişkenini modele ekleyerek) kullanırsak hem *avginc*'i doğrudan kontrol etme olanağına kavuşmuş olacağız hem de sapmasız parametre tahmincileri elde edeceğiz.

ÇDR Modeli: Örnek 3

Tüketim Modeli: Karesel (Quadratic) Fonksiyonel Form

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \longrightarrow y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_1^2 + u$$

$$cons = \beta_0 + \beta_1 inc + \beta_2 inc^2 + u$$

cons: tüketim; *inc*: gelir; $x_1 = inc$; $x_2 = inc^2$; $x_2 = x_1^2$

- Bu modelde β_1 'in yorumu farklı olacaktır. Geliri (*inc*) değiştirirken, gelirin karesini (inc^2) sabit ($\Delta inc^2 = 0$) tutamayız. Çünkü, gelir değişirse karesi de değişir.
- Burada, gelirdeki bir birim değişimin tüketim üzerindeki etkisi, yani marjinal tüketim eğilimi (marginal propensity to consume) şu şekilde hesaplanabilir:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x_1} \cong \beta_1 + 2\beta_2 x_1 \longrightarrow \frac{\Delta cons}{\Delta inc} \cong \beta_1 + 2\beta_2 inc$$

k Bağımsız Değişkenli ÇDR Modeli

Model

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + u \quad (\text{İndekssiz})$$

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_k x_{ik} + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{İndeksli})$$

- k : bağımsız değişken sayısı $\longrightarrow j = 1, 2, \dots, k$
- $k + 1$: bilinmeyen sabit β parametre sayısı $\longrightarrow \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$
- n : gözlem (veri) sayısı $\longrightarrow i = 1, 2, \dots, n$ ve $s = 1, 2, \dots, n, i \neq s$
- y : bağımlı değişken
- x_j : j 'inci bağımsız değişken $\longrightarrow x_1, x_2, \dots, x_k$
- u : Hata terimi. x 'ler dışında modele dahil edilmemiş tüm faktörlerin ortak etkisi
- β_0 : Kesim parametresi (1 tane var), sabit terim olarak da adlandırılır
- β_j : x_j bağımsız değişkeni için eğim parametresi (k tane var)
- \mathbf{x} : Tüm bağımsız değişkenlerin temsili $\longrightarrow \mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$
- Yukarıdaki model bazen **anakütle modeli** olarak da bilinir.

k Bağımsız Değişkenli ÇDR Modeli

Model

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + u \quad (\text{İndekssiz})$$

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_k x_{ik} + u_i \quad (\text{İndeksli})$$

- β_j : y 'yi etkileyen diğer tüm faktörler sabit tutulduğunda x_j 'deki değişimin y 'de yaratacağı etkiyi/değişmeyi gösterir.
- β_1 : y 'yi etkileyen diğer tüm faktörler, yani diğer x 'ler ve u 'da içerilen faktörler, sabitken ($\Delta x_2 = \Delta x_3 = \cdots = \Delta x_k = \Delta u = 0$), x_1 'deki değişimin y 'de yaratacağı etkiyi/değişmeyi gösterir.
 - Parametreleri yorumlarken fonksiyonel forma dikkat edilmelidir.
 - Düzey-Düzey, Log-Log, Log-Düzey ve Düzey-Log fonksiyonel formlarındaki yorumlama farklarını hatırlayın!
- Modele ne kadar çok x bağımsız değişkeni eklenirse eklensin dışarıda bırakılmış ya da gözlenemeyen faktörler her zaman olacaktır.

Gauss–Markov Varsayımları

ÇDR.1: Gözlem Sayısı

Gözlem sayısı n tahmin edilecek anakütle parametre sayısından büyük ya da en azından eşit olmalıdır.

$$n \geq k + 1$$

ÇDR.2: Parametrelerde Doğrusallık

Model parametrelerde doğrusaldır.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + u \quad \checkmark$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \quad \checkmark$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_1^2 + u \quad \checkmark$$

$$y = \beta_0 + \beta_1^2 x_1 + \beta_2 x_2 + u \quad \times$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \sqrt{\beta_2} x_2 + u \quad \times$$

[► Detay](#)

Gauss–Markov Varsayımları

ÇDR.3: Rassallık

Tahminde kullanılan n tane gözlem ilgili anakütleden rassal örnekleme yoluyla seçilmiştir. Yani gözlemler stokastiktir (rassal), deterministik (kesin) değil.

$$\{(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}, y_i) : i = 1, 2, \dots, n\}$$

ÇDR.4: Tam Çoklu Doğrusal Bağıntının Olmaması

Örnekleme (ve bu nedenle anakütlerde) bağımsız değişkenlerin hiçbiri kendi içinde sabit değildir (yeterli değişkenlik vardır) ve bağımsız değişkenler arasında tam çoklu doğrusal bağıntı (TÇDB) yoktur.

$$\sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)^2 > 0, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \quad \longrightarrow \quad x_2 = 2x_1 \quad \text{TÇDB VAR ✗}$$

$$\longrightarrow \quad x_2 = x_1^2 \quad \text{TÇDB YOK ✓}$$

► Detay

Gauss–Markov Varsayımları

ÇDR.5: Sıfır Koşullu Ortalama

u hata teriminin bağımsız değişkenlerin herhangi bir değeri verildiğinde beklenen değeri sıfıra eşittir.

$$E(u|x_1, x_2, \dots, x_k) = E(u|\mathbf{x}) = 0$$

[► Detay](#)

- Yinelenen Beklentiler Kanunu (Slayt 4) ve koşullu beklenen değer 6. özelliği (Slayt 5) kullanılarak Sıfır Koşullu Ortalama varsayımı hata terimi u ve bağımsız değişken x rassal olduğunda (ÇDR.3 sağlandığında) yeniden tanımlanabilir.

ÇDR.5: Sıfır Koşullu Ortalama

$$E(u|\mathbf{x}) = E(u) = 0$$

$$\text{Cov}(x_j, u) = 0, \quad \text{Corr}(x_j, u) = 0 \quad \text{ve} \quad E(x_j u) = 0, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$$

Sonuç: u ve x_j bağımsızdır. Yani u ve x_j hem lineer hem de non-lineer olarak ilişkisizdir.

[► Ek Bilgi](#)

Gauss–Markov Varsayımları

ÇDR.6: Otokorelasyon Olmaması

Hata terimleri arasında otokorelasyon yoktur.

$$\text{Corr}(u_i, u_s | x_1, x_2, \dots, x_k) = 0, \quad i \neq s$$

$$\text{Corr}(u_i, u_s | \mathbf{x}) = 0, \quad i \neq s$$

$$\text{Corr}(u_i, u_s) = 0, \quad i \neq s \quad (u \text{ ve } x\text{'ler bağımsız olduğundan})$$

- ÇDR.6 varsayımı, yatay-kesit verilerindeki rassallık varsayımı (ÇDR.3) nedeniyle aslında otomatik olarak sağlanır. Fakat çok ekstrem durumlarda gereklidir ve bu nedenle diğer birçok kaynaktan farklı olarak eklenmiştir.
- ÇDR.6 varsayımı aşağıdaki eşitlikleri de sağlar.

ÇDR.6: Otokorelasyon Olmaması

$$\text{Cov}(u_i, u_s | \mathbf{x}) = 0 \quad \text{ve} \quad \text{Cov}(u_i, u_s) = 0, \quad i \neq s$$

$$E(u_i u_s | \mathbf{x}) = 0 \quad \text{ve} \quad E(u_i u_s) = 0, \quad i \neq s$$

► Ek Bilgi

Gauss–Markov Varsayımları

ÇDR.7: Sabit Varyans (Homoscedasticity)

u hata teriminin bağımsız değişken x 'lere göre koşullu varyansı sabittir.

$$\text{Var}(u|x_1, x_2, \dots, x_k) = \sigma^2$$

$$\text{Var}(u|\mathbf{x}) = \sigma^2$$

$$\text{Var}(u) = \sigma^2$$

(u ve x 'ler bağımsız olduğundan)

[► Detay](#)

- ÇDR.7 varsayımı aşağıdaki eşitlikleri de sağlar.

ÇDR.7: Sabit Varyans (Homoscedasticity)

$$E(u^2|\mathbf{x}) = \sigma^2 \quad \text{ve} \quad E(u^2) = \sigma^2$$

[► Ek Bilgi](#)

- σ regresyonun standart sapmasıdır (bilinmiyor, bu nedenle tahmin edilecek).

Gauss–Markov Varsayımları

- Yukarıda verilen Gauss–Markov varsayımları yatay-kesit verisi ile yapılan regresyon için geçerli varsayımlardır.
- Zaman serileri ile yapılan regresyonlarda bu varsayımların değiştirilmesi gerekir.
- Gauss–Markov Varsayımları, ÇDR Varsayımları olarak da anılır.
- Bazı ÇDR varsayımlarının detayı ilerleyen slatlarda konu akışı içinde verilmiştir.
- Gauss–Markov Varsayımları daha sonra Gauss–Markov Teoremi’ni oluşturmada kullanılacaktır.
- Gauss–Markov Teoremi ise ÇDR modelinin Sıradan En Küçük Kareler Yöntemi ya da Momentler Yöntemi ile tahmini için teorik dayanak sağlamada kullanılacaktır. Bakınız Slayt 85.

Anakütle Regresyon Fonksiyonu

- ÇDR.5 ve ÇDR.7 varsayımları altında bağımlı değişken y 'nin x 'e göre koşullu dağılımı aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

y 'nin \mathbf{x} 'e Göre Koşullu Dağılımı

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + u \quad (\text{Model})$$

$$E(y|\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k \quad (\text{ARF})$$

$$\text{Var}(y|\mathbf{x}) = \sigma^2$$

$$y|\mathbf{x} \sim \underbrace{(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k)}_{\text{Ortalama}}, \underbrace{\sigma^2}_{\text{Varyans}} \quad (y\text{'nin dağılımı})$$

[► Ek Bilgi](#)

Anakütle Regresyon Fonksiyonu

- Anakütle Regresyon Fonksiyonu (ARF) bağımlı değişken y 'nin x 'e göre koşullu ortalamasıdır.

Anakütle Regresyon Fonksiyonu (ARF)

$$E(y|\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k \quad (\text{İndekssiz})$$

$$E(y_i|\mathbf{x}_i) = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_k x_{ik} \quad (\text{İndeksli})$$

Örneklem Regresyon Fonksiyonu: Amaç

- ÇDR tahminindeki asıl amacımız:
 - Öncelikle, iktisat teorisine göre model oluşturmak.
 - Sonra, Gauss–Markov varsayımları kullanarak ARF’yi oluşturmak.
 - Son olarak, ARF’yi rassal örnekleme yoluyla seçtiğimiz belli sayıdaki veriyi kullanarak tahmin etmektir.
- ARF’nin tahmini ise Örneklem Regresyon Fonksiyonu’dur ve bu tahmin örneklemden örnekleme değişir.

Model

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + u$$

Anakütle Regresyon Fonksiyonu (ARF)

$$E(y|\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k$$

Örneklem Regresyon Fonksiyonu (ÖRF)

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \cdots + \hat{\beta}_k x_k$$

Örneklem Regresyon Fonksiyonu: Amaç

Model

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + u \quad (\text{İndekssiz})$$

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_k x_{ik} + u_i \quad (\text{İndeksli})$$

Anakütle Regresyon Fonksiyonu (ARF)

$$E(y|\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k \quad (\text{İndekssiz})$$

$$E(y_i|\mathbf{x}_i) = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_k x_{ik} \quad (\text{İndeksli})$$

Örneklem Regresyon Fonksiyonu (ÖRF)

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \cdots + \hat{\beta}_k x_k \quad (\text{İndekssiz})$$

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} + \cdots + \hat{\beta}_k x_{ik} \quad (\text{İndeksli})$$

Örneklem Regresyon Fonksiyonu

Örneklem Regresyon Fonksiyonu (ÖRF)

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \cdots + \hat{\beta}_k x_k \quad (\text{İndekssiz})$$

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} + \cdots + \hat{\beta}_k x_{ik} \quad (\text{İndeksli})$$

$$\underbrace{y_i}_{\text{Gözlenen Değer}} = \underbrace{\hat{y}_i}_{\text{Tahmin Edilen Değer}} + \underbrace{\hat{u}_i}_{\substack{\text{Kalıntı (Artık)} \\ \text{Rassal Değil (Deterministik)}}$$

- \hat{y}_i : y_i bağımlı değişkenin tahmini
- Parametre tahmincileri/tahmin edicileri örneklemden örnekleme değişir, yani rassaldır.
 - $\hat{\beta}_0$: β_0 kesim parametresinin tahmini (1 tane var)
 - $\hat{\beta}_j$: β_j eğim parametresinin tahmini (k tane var)
- \hat{u}_i : Kalıntı (artık) olarak adlandırılır. Rassal değildir, tahmin sırasında hesaplanır. Hata terimi u_i 'nin örneklem analogu olarak yorumlanabilir fakat kesinlikle aynı şeyler değildir.

Örneklem Regresyon Fonksiyonu

- Model, ARF ve ÖRF denklemleri arasında dikkat edilmesi gereken farklar vardır.

Model, ARF ve ÖRF

$$\underbrace{y_i}_{\text{Gözlenen Değer}} = \underbrace{\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_k x_{ik}}_{E(y_i | \mathbf{x}_i) \text{ (Sistematik Kısım)}} + \underbrace{u_i}_{\text{Rassal Hata Terimi (Sistematik Olmayan Kısım)}} \quad (\text{Model})$$

$$E(y_i | \mathbf{x}_i) = \underbrace{\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_k x_{ik}}_{\text{Sistematik Kısım}} \quad (\text{ARF})$$

$$\underbrace{\hat{y}_i}_{\text{Tahmin Edilen Değer}} = \underbrace{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} + \cdots + \hat{\beta}_k x_{ik}}_{\text{Sistematik Kısımın Tahmini}} \quad (\text{ÖRF})$$

$$\underbrace{y_i}_{\text{Gözlenen Değer}} = \underbrace{\hat{y}_i}_{\text{Tahmin Edilen Değer}} + \underbrace{\hat{u}_i}_{\text{Kalıntı (Artık) Rassal Değil (Deterministik)}}$$

Örneklem Regresyon Fonksiyonu: Tahmin Yöntemleri

Model, ARF ve ÖRF

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + u \quad (\text{Model})$$

$$E(y|\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k \quad (\text{ARF})$$

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \cdots + \hat{\beta}_k x_k \quad (\text{ÖRF})$$

- Örneklem Regresyon Fonksiyonu (ÖRF), iki yöntemle tahmin edilebilir.
 - Sıradan En Küçük Kareler (SEKK) Yöntemi
 - Momentler Yöntemi
- İki yöntem de aynı tahmin sonuçlarını verir.

Sıradan En Küçük Kareler Yöntemi

- Sıradan En Küçük Kareler Yöntemi, kalıntı kareleri toplamını (SSR) en küçük yapan parametre tahmincilerini hesaplamaya çalışır.

Örneklem Regresyon Fonksiyonu (ÖRF)

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \cdots + \hat{\beta}_k x_k$$

Gözlenen Değer, Tahmin Edilen Değer ve Kalıntı

$$y_i = \hat{y}_i + \hat{u}_i \quad \longrightarrow \quad \hat{u}_i = y_i - \hat{y}_i$$

SEKK Amaç Fonksiyonu

$$\min_{\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_j} SSR = \min_{\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_j} \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2 = \min_{\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_j} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2} - \cdots - \hat{\beta}_k x_{ik})^2$$

Sıradan En Küçük Kareler Yöntemi

SEKK Birinci Sıra Koşulları

$$\frac{\partial SSR}{\partial \hat{\beta}_0} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2} - \cdots - \hat{\beta}_k x_{ik}) = 0$$

$$\frac{\partial SSR}{\partial \hat{\beta}_1} = -2 \sum_{i=1}^n x_{i1} (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2} - \cdots - \hat{\beta}_k x_{ik}) = 0$$

$$\frac{\partial SSR}{\partial \hat{\beta}_2} = -2 \sum_{i=1}^n x_{i2} (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2} - \cdots - \hat{\beta}_k x_{ik}) = 0$$

$$\vdots = \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots = 0$$

$$\frac{\partial SSR}{\partial \hat{\beta}_k} = -2 \sum_{i=1}^n x_{ik} (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2} - \cdots - \hat{\beta}_k x_{ik}) = 0$$

Sıradan En Küçük Kareler Yöntemi

SEKK Birinci Sıra Koşulları

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2} - \cdots - \hat{\beta}_k x_{ik}) = 0 \longrightarrow \sum_{i=1}^n \hat{u}_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n x_{i1} (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2} - \cdots - \hat{\beta}_k x_{ik}) = 0 \longrightarrow \sum_{i=1}^n x_{i1} \hat{u}_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n x_{i2} (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2} - \cdots - \hat{\beta}_k x_{ik}) = 0 \longrightarrow \sum_{i=1}^n x_{i2} \hat{u}_i = 0$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots = 0 \longrightarrow \vdots = 0$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ik} (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2} - \cdots - \hat{\beta}_k x_{ik}) = 0 \longrightarrow \sum_{i=1}^n x_{ik} \hat{u}_i = 0$$

- Birinci sıra koşullarından elde edilen $k + 1$ tane denklemin çözümünden parametre tahmincileri $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_j$ 'lar (toplamda $k + 1$ tane) bulunur.

Momentler Yöntemi

- Anakütle moment koşulları ÇDR.5 varsayımı kullanılarak yazılabilir.
- Daha sonra anakütle moment koşullarını kullanarak örneklem moment koşulları elde edilebilir.

ÇDR.5: Sıfır Koşullu Ortalama

$$E(u|\mathbf{x}) = E(u) = 0$$

$$\text{Cov}(x_j, u) = 0, \quad \text{Corr}(x_j, u) = 0 \quad \text{ve} \quad E(x_j u) = 0, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$$

Sonuç: u ve x_j bağımsızdır. Yani u ve x_j hem lineer hem de non-lineer olarak ilişkisizdir.

Momentler Yöntemi

Anakütle Moment Koşulları ve Örneklem Moment Koşulları

Anakütle		Örneklem
$E(u) = 0$	\longrightarrow	$\sum_{i=1}^n \hat{u}_i = 0$
$E(x_1 u) = 0$	\longrightarrow	$\sum_{i=1}^n x_{i1} \hat{u}_i = 0$
$E(x_2 u) = 0$	\longrightarrow	$\sum_{i=1}^n x_{i2} \hat{u}_i = 0$
$\vdots = 0$	\longrightarrow	$\vdots = 0$
$E(x_k u) = 0$	\longrightarrow	$\sum_{i=1}^n x_{ik} \hat{u}_i = 0$

Momentler Yöntemi

- Örneklem moment koşullarından elde edilen $k + 1$ tane denklemin çözümünden parametre tahmincileri $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_j$ 'lar (toplamda $k + 1$ tane) bulunur.
- SEKK birinci sıra koşulları ve örneklem moment koşulları aslında aynı denklemler kümesini verir.
- Bu nedenle, SEKK Yöntemi ve Momentler Yöntemi ile ÇDR modeli tahmin edildiğinde aynı sonuçlara ulaşılır.
- Genellikle kullanılan yöntem SEKK'dır. Bu nedenle parametre tahmincileri $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_j$ 'lar genellikle SEKK parametre tahmincileri ya da SEKK tahmincileri olarak adlandırılır.
- Bu yöntemlerin tek çözüm vermesi için ÇDR.4 (Tam Çoklu Doğrusal Bağıntının Olmaması) varsayımının sağlanması gereklidir. Bakınız Slayt 15.

SEKK Parametre Tahmincileri: 2 Bağımsız Değişken

Ana Model

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + u_i \quad (\text{Model - İndeksli})$$

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} \quad (\text{ÖRF - İndeksli})$$

- β_0 kesim parametresinin tahmini $\hat{\beta}_0$:

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{x}_2$$

► Ek Bilgi

- β_1 eğim parametresinin tahmini, ya da x_1 'nin eğim parametresinin tahmincisi, $\hat{\beta}_1$:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} y_i}{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2}$$

SEKK Parametre Tahmincileri: 2 Bağımsız Değişken

- β_1 eğim parametresinin tahmini, ya da x_1 'in eğim parametresinin tahmincisi, $\hat{\beta}_1$:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} y_i}{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2}$$

burada \hat{r}_{i1} , x_1 'in x_2 üzerine uygulanan regresyondan (1. yardımcı regresyon) elde edilen kalıntılardır.

1. Yardımcı Regresyon Tahmini

$$x_{i1} = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 x_{i2} + \hat{r}_{i1} \quad (\text{İndeksli})$$

- 1. yardımcı regresyondan elde edilen kalıntı \hat{r}_1 , x_1 içindeki x_2 'nin etkisi çıkarıldıktan sonraki x_1 'i ifade eder.
- Bu işlemdeki amaç, bağımsız değişkenler x_1 ve x_2 arasındaki doğrusal bağıntı nedeniyle bağımlı değişken y üzerinde oluşabilecek dolaylı etkiyi kaldırmaktır.

SEKK Parametre Tahmincileri: 2 Bağımsız Değişken

- Amacımız x_1 'in y 'yi yalın/kısmi olarak ne kadar etkilediğini yani $\hat{\beta}_1$ 'yi bulmaktır.
- Öyleyse $\hat{\beta}_1$, y 'nin \hat{r}_1 üzerine uygulanan regresyondan (2. yardımcı regresyon) elde edilen eğim parametresinin tahminidir.

2. Yardımcı Regresyon Tahmini

$$y_i = \hat{\delta}_0 + \hat{\beta}_1 \hat{r}_{i1} + \hat{\epsilon}_i \quad (\text{İndeksli})$$

- $\hat{\epsilon}_i$ ve $\hat{\delta}_0$, sırasıyla 2. yardımcı regresyondaki kalıntıları ve kesim parametresi tahminini ifade eder. Bu değerler bizim ilgi alanımızda değildir.
- 2. yardımcı regresyon basit doğrusal regresyon olduğundan, daha önceden bildiğimiz eğim parametresi tahmincisinin formülünü kullanabiliriz.

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})y_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

SEKK Parametre Tahmincileri: 2 Bağımsız Değişken

- \hat{r}_j , 2. yardımcı regresyonda bağımsız değişken olarak görev yaptığı için formüldeki x 'ler yerine konulabilir.

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})y_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \longrightarrow \hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{r}_{i1} - \bar{\hat{r}}_1)y_i}{\sum_{i=1}^n (\hat{r}_{i1} - \bar{\hat{r}}_1)^2}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{r}_{i1} - \overbrace{\bar{\hat{r}}_1}^{=0})y_i}{\sum_{i=1}^n (\hat{r}_{i1} - \underbrace{\bar{\hat{r}}_1}_{=0})^2} \longrightarrow \hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}y_i}{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2} \quad (1. \text{ Yardımcı Regresyondan})$$

- Kısacası $\hat{\beta}_1$, x_1 içindeki x_2 'nin etkisi çıkarıldıktan sonraki x_1 'nin bağımlı değişken y 'yi etkileyen yalın/kısmi yani ceteris paribus etkisini ifade eder.

SEKK Parametre Tahmincileri: k Bağımsız Değişken

Ana Model

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_k x_{ik} + u_i \quad (\text{Model - İndeksli})$$

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} + \cdots + \hat{\beta}_k x_{ik} \quad (\text{ÖRF - İndeksli})$$

- β_0 kesim parametresinin tahmini $\hat{\beta}_0$ (1 tane var):

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{x}_2 - \cdots - \hat{\beta}_k \bar{x}_k$$

► Ek Bilgi

- β_j eğim parametresinin tahmini, ya da x_j 'nin eğim parametresinin tahmincisi, $\hat{\beta}_j$ (k tane var):

$$\hat{\beta}_j = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{ij} y_i}{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{ij}^2}, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$$

SEKK Parametre Tahmincileri: k Bağımsız Değişken

- x_j 'nin eğim parametresinin tahmincisi $\hat{\beta}_j$ (k tane var):

$$\hat{\beta}_j = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{ij} y_i}{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{ij}^2}, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$$

burada \hat{r}_{ij} , x_j 'nin diğer tüm x 'ler ($x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_k$) üzerine uygulanan regresyondan (1. yardımcı regresyon) elde edilen kalıntılardır.

1. Yardımcı Regresyon Tahmini

$$x_{ij} = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 x_{i1} + \hat{\alpha}_2 x_{i2} + \dots + \hat{\alpha}_{j-1} x_{ij-1} + \hat{\alpha}_{j+1} x_{ij+1} + \dots + \hat{\alpha}_k x_{ik} + \hat{r}_{ij} \quad (\text{İndeksli})$$

- 1. yardımcı regresyondan elde edilen kalıntı \hat{r}_{ij} , x_j içindeki diğer tüm x 'lerin ($x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_k$) etkisi çıkarıldıktan sonraki x_j 'yi ifade eder.
- Bu işlemdeki amaç, bağımsız değişken x 'ler arasındaki çoklu doğrusal bağıntı nedeniyle bağımlı değişken y üzerinde oluşabilecek dolaylı etkiyi kaldırmaktır.

SEKK Parametre Tahmincileri: k Bağımsız Değişken

- Amacımız x_j 'nin y 'yi yalın/kısmi olarak ne kadar etkilediğini yani $\hat{\beta}_j$ 'yi bulmaktır.
- Öyleyse $\hat{\beta}_j$, y 'nin \hat{r}_j üzerine uygulanan regresyondan (2. yardımcı regresyon) elde edilen eğim parametresinin tahminidir.

2. Yardımcı Regresyon Tahmini

$$y_i = \hat{\delta}_0 + \hat{\beta}_j \hat{r}_{ij} + \hat{\epsilon}_i \quad (\text{İndeksli})$$

- $\hat{\epsilon}_i$ ve $\hat{\delta}_0$, sırasıyla 2. yardımcı regresyondaki kalıntıları ve kesim parametresi tahminini ifade eder. Bu değerler bizim ilgi alanımızda değildir.
- 2. yardımcı regresyon basit doğrusal regresyon olduğundan, daha önceden bildiğimiz eğim parametresi tahmincisinin formülünü kullanabiliriz.

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})y_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

SEKK Parametre Tahmincileri: k Bağımsız Değişken

- \hat{r}_j , 2. yardımcı regresyonda bağımsız değişken olarak görev yaptığı için formüldeki x 'ler yerine konulabilir.

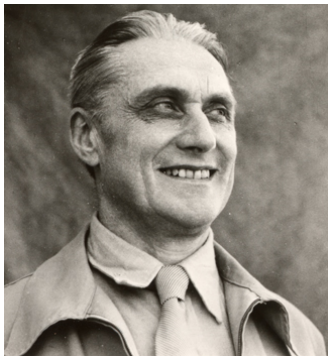
$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})y_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \longrightarrow \hat{\beta}_j = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{r}_{ij} - \bar{\hat{r}}_j)y_i}{\sum_{i=1}^n (\hat{r}_{ij} - \bar{\hat{r}}_j)^2}$$

$$\hat{\beta}_j = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{r}_{ij} - \overbrace{\bar{\hat{r}}_j}^{=0})y_i}{\sum_{i=1}^n (\underbrace{\hat{r}_{ij} - \bar{\hat{r}}_j}_{=0})^2} \longrightarrow \hat{\beta}_j = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{ij}y_i}{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{ij}^2} \quad (1. \text{ Yardımcı Regresyondan})$$

- Kısacası $\hat{\beta}_j, x_j$ içindeki diğer tüm x 'lerin $(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_k)$ etkisi çıkarıldıktan sonraki x_j 'nin bağımlı değişken y 'yi etkileyen yalın/kısmi yani ceteris paribus etkisini ifade eder.

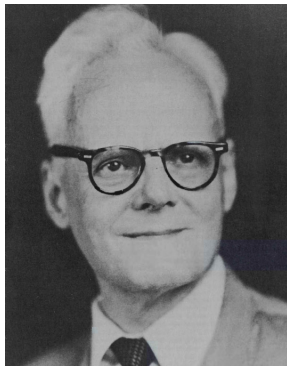
SEKK Parametre Tahmincileri: Frisch–Waugh Teoremi

- Önceki slaytlarda 2 bağımsız ve k bağımsız değişkenli ÇDR modellerinde $\hat{\beta}_j$ 'yi, yani x_j 'nin bağımlı değişken y 'yi etkileyen yalın/kısmi etkisini, hesaplamak için kullandığımız prosedür ekonometride **Frisch–Waugh Teoremi** olarak anılır.



Ragnar Frisch (1895–1973)

Kaynak: Wikipedia



Frederick V. Waugh (1898–1974)

Kaynak: AgEcon

Sıfır Koşullu Ortalama Varsayımı (ÇDR.5) Yorumu

2 Bağımsız Değişkenli Model

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u$$

- 2 bağımsız değişkenli modelde, u 'nun x 'lerle ilişkisiz olması varsayımını, yani ÇDR.5, şu şekilde formüle edebiliriz.

$$E(u|x_1, x_2) = E(u|\mathbf{x}) = 0$$

- Yani x_1 ve x_2 'nin anakütledeki tüm kombinasyonları için u 'nun beklenen değeri sıfırdır.
- Örneğin, ücret modelinde (Slayt 8) ÇDR.5 varsayımı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$wage = \beta_0 + \beta_1 educ + \beta_2 exper + u \quad (\text{Model})$$

$$E(u|educ, exper) = 0 \quad (\text{ÇDR.5})$$

- Bu ücretleri etkileyen diğer faktörlerin (u) ortalama olarak $educ$ ve $exper$ ile ilişkisiz olduğu anlamına gelir.
- Örneğin, doğuştan gelen yetenek (ability) u 'nun bir parçası ise, ortalama yetenek düzeyi, eğitim ve tecrübenin tüm kombinasyonlarında aynıdır (sabittir).

Sıfır Koşullu Ortalama Varsayımı (ÇDR.5) Yorumu

- Sınav başarı modelinde (Slayt 9), ÇDR.5 varsayımı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$avgscore = \beta_0 + \beta_1 expend + \beta_2 avginc + u \quad (\text{Model})$$

$$E(u|expend, avginc) = 0 \quad (\text{ÇDR.5})$$

- Yani, ortalama sınav sonucunu etkileyen diğer faktörler (okula ya da öğrenciye özgü vs.), ortalama olarak, *expend* ve *avginc* değişkenleriyle ilişkisizdir.
- Tüketim modelinde (Slayt 11), ÇDR.5 varsayımı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$cons = \beta_0 + \beta_1 inc + \beta_2 inc^2 + u \quad (\text{Model})$$

$$E(u|inc, inc^2) = E(u|inc) = 0 \quad (\text{ÇDR.5})$$

- Burada *inc* biliniyorken, *inc*² otomatik olarak bilineceğinden ayrıca koşullu beklenti içinde yazmaya gerek yoktur.

Regresyonun Yorumu: 2 Bağımsız Değişken

Model ve ÖRF

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \quad (\text{Model})$$

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 \quad (\text{ÖRF})$$

$$\Delta \hat{y} = \hat{\beta}_1 \Delta x_1 + \hat{\beta}_2 \Delta x_2 \quad (\text{Değişim Cinsinden})$$

- Eğim parametresi tahmincisi $\hat{\beta}_1$, bağımsız değişken x_1 'in y üzerindeki yalın/kısmi yani ceteris paribus etkisini verir.
- $\hat{\beta}_1$ 'nin yorumu: x_2 sabitken, yani $\Delta x_2 = 0$ iken

$$\Delta \hat{y} = \hat{\beta}_1 \Delta x_1$$

- x_2 sabitken, x_1 'de meydana gelen 1 birimlik değişimin y 'de meydana getireceği ortalama değişim $\hat{\beta}_1$ kadardır.
 - Parametreleri yorumlarken fonksiyonel forma dikkat edilmelidir.
- Benzer şekilde $\hat{\beta}_2$ 'nin yorumu: x_1 sabitken, yani $\Delta x_1 = 0$ iken

$$\Delta \hat{y} = \hat{\beta}_2 \Delta x_2$$

Regresyonun Yorumu: k Bağımsız Değişken

Model ve ÖRF

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + u \quad (\text{Model})$$

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \cdots + \hat{\beta}_k x_k \quad (\text{ÖRF})$$

$$\Delta \hat{y} = \hat{\beta}_1 \Delta x_1 + \hat{\beta}_2 \Delta x_2 + \cdots + \hat{\beta}_k \Delta x_k \quad (\text{Değişim Cinsinden})$$

- Eğim paramtresi tahmincisi $\hat{\beta}_j$, bağımsız değişken x_j 'nin y üzerindeki yalın/kısmi yani ceteris paribus etkisini verir.
- $\hat{\beta}_j$ 'nin yorumu: diğer tüm bağımsız değişkenler $(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_k)$ sabitken, yani $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \cdots = \Delta x_{j-1} = \Delta x_{j+1} = \cdots = \Delta x_k = 0$ iken

$$\Delta \hat{y} = \hat{\beta}_j \Delta x_j$$

- Diğer tüm bağımsız değişkenler $(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_k)$ sabitken, x_j 'de meydana gelen 1 birimlik değişimin y 'de meydana getireceği ortalama değişim $\hat{\beta}_j$ kadardır.
 - Parametreleri yorumlarken fonksiyonel forma dikkat edilmelidir.

Örnek: Üniversite Başarı Modeli

Üniversite Başarı Modeli (ÇDR)

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 \quad (\text{ÖRF})$$

$$\widehat{colGPA} = 1.29 + 0.453 \, hsGPA + 0.0094 \, ACT \quad (\text{ÖRF})$$

$n = 141$ öğrenci; $colGPA$: üniversite genel not ortalaması (4 üzerinden); $hsGPA$: lise not ortalaması; ACT : genel yetenek sınav sonucu

- Kesim parametresi $\hat{\beta}_0 = 1.29$ olarak tahmin edilmiştir.
 - $hsGPA = 0$ ve $ACT = 0$ olduğunda modelce tahmin edilen üniversite genel not ortalaması \widehat{colGPA} 'yı ifade eder. Ancak örneklemede $hsGPA$ ve ACT 'si 0 olan öğrenci olmadığından yorumlanması anlamsızdır.
- ACT 'yi sabit tutarak lise not ortalaması $hsGPA$ 'yı 1 puan arttırdığımızda üniversite genel not ortalaması $colGPA$ 0.453 puan artar.
- $hsGPA$ 'yı sabit tutarak genel yetenek sınav sonucu ACT 'yi 1 puan arttırdığımızda üniversite genel not ortalaması $colGPA$ 0.0094 puan artar.

Örnek: Üniversite Başarı Modeli

- Sadece genel yetenek sınav sonucu ACT 'yi kullanarak basit regresyon tahmin etseydik:

Üniversite Başarı Modeli (BDR)

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_2 x_2 \quad (\text{ÖRF})$$

$$\widehat{colGPA} = 2.4 + 0.0271 ACT \quad (\text{ÖRF})$$

- ACT 'nin parametre tahmincisi $\hat{\beta}_2$ önceki çoklu regresyonda bulunandan 3 kat daha yüksek çıktı.
- Bu regresyon, bize lise not ortalaması ($hsGPA$) aynı olan iki öğrenciyi ortalama olarak karşılaştırma olanağı vermiyor fakat önceki regresyonda veriyordu.
- Lise not ortalaması $hsGPA$ 'yı kontrol ettiğimizde genel yetenek sınav sonucu ACT 'nin üniversite genel not ortalaması $colGPA$ üzerindeki önemi/etkisi azalıyor.

Örnek: Logaritmik Ücret Modeli

Logaritmik Ücret Modeli

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \hat{\beta}_3 x_3 \quad (\text{ÖRF})$$

$$\widehat{\ln wage} = 0.284 + 0.092 educ + 0.0041 exper + 0.022 tenure \quad (\text{ÖRF})$$

$n = 526$ çalışan; $wage$: saatlik ücret (dolar); $educ$: eğitim düzeyi (yıl); $exper$: tecrübe düzeyi (yıl); $tenure$: kıdem (yıl)

- Bağımlı değişken logaritmik ve bağımsız değişkenler düzey (log-düzey) olarak modelde yer aldığından parametre tahmincileri 100 ile çarpılarak % olarak ceteris paribus yorumlanmalıdır.
- Örneğin, $exper$ ve $tenure$ sabit tutulduğunda $educ$ bir yıl arttırılırsa $wage$ ortalama olarak %9.2 ($\%0.092 \times 100$) artar.
- Başka bir ifadeyle, $exper$ ve $tenure$ düzeyleri aynı olan iki çalışandan birinin $educ$ düzeyi diğerinden bir yıl fazlaysa, bu iki çalışan için tahmin edilen ücret farkı ortalama olarak %9.2'dir.
- Burada somut iki işçiden değil ortalama durumdan bahsedilmektedir.

Diğer Değişkenleri Sabit Tutmanın Anlamı

- ÇDR'de parametre tahmincilerini *ceteris paribus* koşulu altında bağımsız değişkenlerin y üzerindeki yalın/kısmi etkileri olarak yorumluyoruz.
- Örneğin, logaritmik ücret modelinde (Slayt 48) $\hat{\beta}_1 = 0.092$ olması, *exper* ve *tenure* düzeyleri aynı olan iki çalışandan birinin *educ* düzeyi 1 yıl fazla olanın ortalama olarak %9.2 daha yüksek ücret alacağı şeklinde yorumlanmıştır.
- Bu yorum, verinin bu şekilde toplandığı anlamına gelmez, yani *exper* ve *tenure* düzeyleri aynı olan işçiler özellikle seçilip veri toplanmamıştır.
 - Veri rassal seçilmiş 526 çalışana ait *wage*, *educ*, *exper* ve *tenure* bilgilerinden oluşuyor.
 - *exper* ve *tenure* düzeyi aynı olan çalışanları ayrıca gruplandırmıyoruz.
- Aslında elimizde *exper* ve *tenure* düzeyleri aynı olan çalışanlardan oluşan bir örneklem olsaydı, *exper* ve *tenure* bağımsız değişkenlerini modele koymaya gerek kalmazdı.
 - Fakat, bu durum uygulamada çoğunlukla mümkün değildir.
 - Ayrıca ÇDR analizinde yalın/kısmi yani *ceteris paribus* etki hesaplandığından zaten yukarıdaki gibi bir duruma gerek yoktur.

Birden Fazla Bağımsız Değişkeni Aynı Anda Değiştirmek

- Bazen bağımsız değişken x 'lerden birkaçını aynı anda değiştirerek y 'de meydana gelen ortalama değişimi ölçmek isteriz.
- Bazı durumlarda ise bağımsız değişken x 'lerden biri değiştirildiğinde diğeri de otomatik olarak değişir.
- Örneğin, logaritmik ücret modelinde (Slayt 48) *tenure* 1 yıl arttırıldığında *exper* de otomatik olarak 1 yıl artar.

$$\begin{aligned}\Delta \ln wage &= 0.284\Delta educ + 0.0041\Delta exper + 0.022\Delta tenure \quad (\text{Değişim Cins.}) \\ &= 0.0041 \times 0 + 0.0041 \times 1 + 0.0022 \times 1 \\ &= 0.0261\end{aligned}$$

- Burada 0.0261, *educ* sabit tutulduğunda *tenure* ve *exper* 1 yıl arttırılırsa $\ln wage$ 'de meydana gelen ortalama etkiyi belirtir.
 - Model log-düzey formunda olduğundan bulunan bu değer 100 ile çarpılarak % olarak ceteris paribus yorumlanmalıdır.
 - Yani, *educ* sabit tutulduğunda *tenure* ve *exper* 1 yıl arttırılırsa *wage* ortalama olarak %2.61 (0.0261×100) artar.

Tahmin Edilen Değerler ve Kalıntılar

i 'inci Gözlem İçin Tahmin Edilen \hat{y}_i Değeri

$$\underbrace{\hat{y}_i}_{\text{Tahmin Edilen Değer}} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} + \cdots + \hat{\beta}_k x_{ik} \quad (\text{ÖRF})$$

- x_{ij} değerlerini tahmin edilen regresyonda (ÖRF'de) yerine koyarsak tahmin edilen bağımsız değişken değerlerini yani \hat{y}_i 'yi elde ederiz.

Kalıntılar (Artıklar)

$$\underbrace{\hat{u}_i}_{\text{Kalıntı (Artık)}} = \underbrace{y_i}_{\text{Gözlenen Değer}} - \underbrace{\hat{y}_i}_{\text{Tahmin Edilen Değer}}$$

- Gözlenen y_i değerleriyle tahmin edilen değerler \hat{y}_i arasındaki fark kalıntıları \hat{u}_i verir.
- $\hat{u}_i > 0$ ise $y_i > \hat{y}_i$, eksik tahmin yapılmıştır.
- $\hat{u}_i < 0$ ise $y_i < \hat{y}_i$, fazla tahmin yapılmıştır.

Tahmin Edilen Değerler ve Kalıntıların Cebirsel Özellikleri

- SEKK kalıntılarının toplamı ve dolayısıyla da örneklem ortalaması sıfıra eşittir.

$$\sum_{i=1}^n \hat{u}_i = 0 \quad \text{ve} \quad \bar{\hat{u}} = 0$$

- Bu durum SEKK birinci sıra koşullarından ilkinin (aynı zamanda örneklem moment koşullarından ilkinin) bir sonucudur. Bakınız Slayt 31.
- Anakütledeki hata terimleri u 'nun örneklemdeki analogu kalıntılar \hat{u} olarak yorumlanabilir fakat kesinlikle aynı şeyler değildir.

$$\underbrace{u}_{\text{Anakütle}} \longrightarrow \underbrace{\hat{u}}_{\text{Örneklem}}$$

$$\underbrace{E(u) = 0}_{\text{Anakütle}} \longrightarrow \underbrace{E(\hat{u}) = 0, \sum_{i=1}^n \hat{u}_i = 0 \quad \text{ve} \quad \bar{\hat{u}} = 0}_{\text{Örneklem}}$$

Tahmin Edilen Değerler ve Kalıntıların Cebirsel Özellikleri

- 2 Bağımsız değişken x_j ile kalıntı terimleri \hat{u} arasındaki örneklem kovaryansı ve korelasyon katsayısı sıfırdır.

$$Cov(x_j, \hat{u}) = 0 \quad \text{ve} \quad Corr(x_j, \hat{u}) = 0, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$$

- Bu durum diğer SEKK birinci sıra koşullarının (k tane) ve ayrıca diğer örneklem moment koşullarının (k tane) bir sonucudur. Bakınız Slayt 31.
- Bağımsız değişken x_j 'lerle kalıntı \hat{u} 'ların lineer olarak ilişkisizliği çıkarılabilir.

$$Cov(x_j, u) = 0 \quad \text{ve} \quad Corr(x_j, u) = 0 \quad \longrightarrow \quad E(x_j u) = 0 \quad (\text{Anakütle})$$

$$Cov(x_j, \hat{u}) = 0 \quad \text{ve} \quad Corr(x_j, \hat{u}) = 0 \quad \longrightarrow \quad E(x_j \hat{u}) = 0 \quad (\text{Örneklem})$$

$$\underbrace{E(x_j u) = 0}_{\text{Anakütle}} \quad \longrightarrow \quad \underbrace{E(x_j \hat{u}) = 0 \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^n x_{ij} \hat{u}_i = 0}_{\text{Örneklem}}$$

Tahmin Edilen Değerler ve Kalıntıların Cebirsel Özellikleri

- 1. ve 2. cebirsel özelliklerin bir sonucu olarak tahmin edilen değerler \hat{y} ile kalıntı terimleri \hat{u} arasındaki örneklem kovaryansı ve korelasyon katsayısı sıfırdır.

$$Cov(\hat{y}, \hat{u}) = 0 \quad \text{ve} \quad Corr(\hat{y}, \hat{u}) = 0$$

- Bu özellikten tahmin edilen değerler \hat{y} ile kalıntı terimleri \hat{u} 'ların lineer olarak ilişkisizliği çıkarılabilir.

$$\underbrace{Cov(\hat{y}, \hat{u}) = 0 \quad \text{ve} \quad Corr(\hat{y}, \hat{u}) = 0}_{\text{Örneklem}} \quad \longrightarrow \quad \underbrace{E(\hat{y}\hat{u}) = 0 \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^n \hat{y}_i \hat{u}_i = 0}_{\text{Örneklem}}$$

► Ek Bilgi

Tahmin Edilen Değerler ve Kalıntıların Cebirsel Özellikleri

- 4 Tahmin edilen \hat{y}_i değerlerinin ortalaması gözlenen y_i değerlerinin ortalamasına eşittir.

$$y_i = \hat{y}_i + \hat{u}_i$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i=1}^n \hat{y}_i + \underbrace{\sum_{i=1}^n \hat{u}_i}_{=0} \quad (1. \text{ Cebirsel Özellik})$$

$$n\bar{\hat{y}} = n\bar{y}$$

$$\bar{\hat{y}} = \bar{y}$$

- 5 $(\bar{x}_j, \bar{y} : j = 1, 2, \dots, k)$ noktası daima ÖRF'den geçer (üzerine düşer).

$$(\bar{x}_j, \bar{y} : j = 1, 2, \dots, k) \longrightarrow \bar{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{x}_1 + \hat{\beta}_2 \bar{x}_2 + \dots + \hat{\beta}_k \bar{x}_k + u$$

BDR ve ÇDR Tahminlerinin Karşılaştırılması

Basit vs. Çoklu Doğrusal Regresyon (2 Bağımsız Değişkenli) Tahmini

$$y = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x_1 + \tilde{u} \quad \text{vs.} \quad y = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \hat{u} \quad (\text{Tahmin})$$

- Yukarıda verilen regresyonlar arasındaki temel fark, soldaki regresyonda (BDR'de) bağımsız değişken x_2 'nin modele dahil edilmemesidir.
- $\tilde{\beta}_1$ ve $\hat{\beta}_1$ arasındaki ilişki şu şekildedir: $\tilde{\beta}_1 = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \tilde{\delta}_1$
- $\tilde{\delta}_1, x_2$ 'nin x_1 üzerine uygulanan regresyondaki eğim parametresi tahminidir.
- Yukarıdaki regresyonlar genelde farklı sonuçlar verir.
- Ancak şu iki durumda eğim parametresi tahminleri $\tilde{\beta}_1$ ve $\hat{\beta}_1$ aynı olur.
 - x_2 'nin y üzerindeki yalın/kısmi etkisi sıfırdır, yani $\hat{\beta}_2 = 0$ 'dır.
 - Örnekleme x_1 ve x_2 lineer (doğrusal) olarak ilişkisizdir, yani $\tilde{\delta}_1 = 0$ 'dır.

BDR ve ÇDR Tahminlerinin Karşılaştırılması

BDR Bilgileri - Tahmin

$$y = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x_1 + \tilde{u} \quad \longrightarrow \quad \tilde{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1) y_i}{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2}$$

ÇDR (2 Bağımsız Değişkenli) Bilgileri - Tahmin

$$y = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \hat{u} \quad \longrightarrow \quad \sum_{i=1}^n x_{i1} \hat{u}_i = 0 \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^n \hat{u}_i = 0 \quad (\text{Ana Model})$$

$$x_2 = \tilde{\delta}_0 + \tilde{\delta}_1 x_1 + \tilde{r}_2 \quad \longrightarrow \quad \tilde{\delta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1) x_{i2}}{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2} \quad (\text{Yardımcı Model})$$

BDR ve ÇDR Tahminlerinin Karşılaştırılması

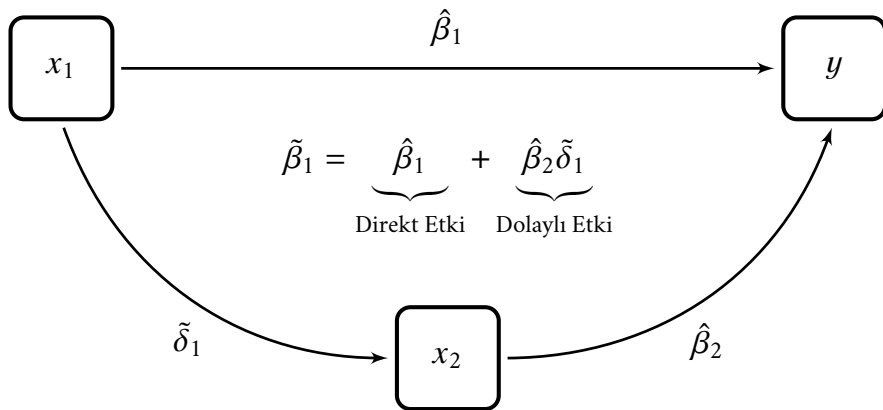
- Şimdi BDR'deki eğim parametresi tahmincisi $\tilde{\beta}_1$ 'nin verilen formülünü
 - ÇDR modelini
 - ÇDR modelinden elde ettiğimiz cebirsel özellikleri
 - Yardımcı modeldeki eğim parametresi tahmincisi $\tilde{\delta}_1$ 'nin verilen formülünü
 kullanarak değiştirelim ve $\tilde{\beta}_1$ ve $\hat{\beta}_1$ arasındaki ilişkiyi bulalım.

$$\begin{aligned}
 \tilde{\beta}_1 &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1) y_i}{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1) (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} + \hat{u}_i)}{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2} \\
 &= \frac{\hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)}{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2} + \frac{\hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1) x_{i1}}{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2} + \frac{\hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1) x_{i2}}{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2} + \frac{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1) \hat{u}_i}{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2}
 \end{aligned}$$

BDR ve ÇDR Tahminlerinin Karşılaştırılması

$$\begin{aligned}
 \tilde{\beta}_1 &= \frac{\overbrace{\hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)}^{=0}}{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2} + \frac{\overbrace{\hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)x_{i1}}^{= \sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2}}{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2} + \frac{\hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)x_{i2}}{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2} + \frac{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)\hat{u}_i}{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2} \\
 &= \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \frac{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)x_{i2}}{\underbrace{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2}_{\tilde{\delta}_1}} + \frac{\overbrace{\sum_{i=1}^n x_{i1}\hat{u}_i}^{=0} - \bar{x}_1 \overbrace{\sum_{i=1}^n \hat{u}_i}^{=0}}{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2} \\
 \tilde{\beta}_1 &= \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \tilde{\delta}_1
 \end{aligned}$$

BDR ve ÇDR Tahminlerinin Karşılaştırılması



Şekil 1: x_1 'in y Üzerindeki Direkt ve Dolaylı Etkisi

$k - 1$ vs. k Değişkenli ÇDR Tahminlerinin Karşılaştırılması

$k - 1$ vs. k Değişkenli Çoklu Doğrusal Regresyon Tahmini

$$y = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x_1 + \tilde{\beta}_2 x_2 + \cdots + \tilde{\beta}_{k-1} x_{k-1} + \tilde{u}$$

vs.

$$y = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \cdots + \hat{\beta}_{k-1} x_{k-1} + \hat{\beta}_k x_k + \hat{u} \quad (\text{Tahmin})$$

- Yukarıda verilen regresyonlar arasındaki temel fark, soldaki regresyonda bağımsız değişken x_k 'nin modele dahil edilmemesidir.
- $\tilde{\beta}_j$ ve $\hat{\beta}_j$ arasındaki ilişki şu şekildedir: $\tilde{\beta}_j = \hat{\beta}_j + \hat{\beta}_k \tilde{\delta}_j$
- $\tilde{\delta}_j, x_k$ 'nin x_j üzerine uygulanan regresyondaki eğim parametresi tahminidir.
- Yukarıdaki regresyonlar genelde farklı sonuçlar verir.
- Ancak şu iki durumda eğim parametresi tahminleri $\tilde{\beta}_j$ ve $\hat{\beta}_j$ aynı olur.
 - x_k 'nin y üzerindeki yalın/kısmi etkisi sıfırdır, yani $\hat{\beta}_k = 0$ 'dır.
 - Örneklemede x_j ve x_k lineer (doğrusal) olarak ilişkisizdir, yani $\tilde{\delta}_j = 0$ 'dır.

Karaler Toplamları (Sum of Squares)

- Her bir i gözlemi için gözlenen değer, tahmin edilen değer ve kalıntı arasındaki ilişki aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$y_i = \hat{y}_i + \hat{u}_i$$

- Her iki tarafın örneklem ortalamalarından sapmalarının karesini alıp toplarsak

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n [(\hat{y}_i - \bar{\hat{y}}) + (\hat{u}_i - \bar{\hat{u}})]^2$$

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n [(\hat{y}_i - \bar{y}) + \hat{u}_i]^2 \quad (1. \text{ ve } 4. \text{ Cebirsel Öz.})$$

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2 + 2 \underbrace{\sum_{i=1}^n \hat{u}_i \hat{y}_i}_{=0} - 2\bar{y} \underbrace{\sum_{i=1}^n \hat{u}_i}_{=0} \quad (3. \text{ Cebirsel Öz.})$$

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2$$

Karaler Toplamları (Sum of Squares)

- Toplam Kareler Toplamı: SST (Total Sum of Squares) y 'deki toplam değişkenliği verir.

$$SST = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$$

$Var(y) = SST / (n - 1)$ olduğuna dikkat edin.

- Açıklanan Kareler Toplamı: SSE (Explained Sum of Squares) modelce açıklanan kısımdaki, yani \hat{y} , değişkenliği verir.

$$SSE = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2$$

- Kalıntı Kareleri Toplamı: SSR (Residual Sum of Squares) kalıntılardaki, yani \hat{u} , değişkenliği verir.

$$SSR = \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2$$

Karaler Toplamları (Sum of Squares)

- y 'deki toplam değişkenlik aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$SST = SSE + SSR$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}_{SST} = \underbrace{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}_{SSE} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2}_{SSR}$$

Uyum İyiği (Goodness-of-fit)

- y 'deki toplam değişkenlik denkleminin her iki tarafını SST'ye bölersek

$$SST = SSE + SSR$$

$$1 = \frac{SSE}{SST} + \frac{SSR}{SST}$$

- Açıklanan kısmın değişkenliğinin toplam değişkenlik içindeki payı regresyonun determinasyon (belirlilik) katsayısıdır ve R^2 ile gösterilir.

$$R^2 = \frac{SSE}{SST} = 1 - \frac{SSR}{SST}$$

- SSE hiçbir zaman SST'den büyük olamayacağı için $0 \leq R^2 \leq 1$
- R^2 , y 'deki değişkenliğin x tarafından açıklanan kısmının yüzdesini verir. Regresyonun açıklama gücü yükseldikçe R^2 , 1'e yaklaşır.
- R^2 modelin açıklama gücünü (ne kadar iyi fit edildiğini) belirttiği için bazen Uyum İyiği olarak da adlandırılır.
- R^2 şu şekilde de hesaplanabilir: $R^2 = \text{Corr}(y, \hat{y})^2$

Uyum İyiliği (Goodness-of-fit)

- Determinasyon katsayısı

$$R^2 = \frac{SSE}{SST} = 1 - \frac{SSR}{SST}$$

- Regresyona yeni bir bağımsız değişken x eklendiğinde R^2 her zaman artar (ya da çok nadir aynı kalır). Ya da başka bir deyişle SSE'nin her zaman artmasıdır.
- Örneğin daha önce verilen ÇDR Ücret Modeli'ne (Slayt 8) modelle alakasız bir değişken eklendiğinde dahi R^2 artacaktır.
 - Modele SSN adlı kişinin sosyal güvenlik numarasının son hanesini belirten yeni bir değişken eklediğimizi düşünelim.
 - Emek ekonomisine göre kişinin alacağı ücretin, SSN ile hiçbir ilişkisi yoktur.
 - Fakat SSN 'nin modele eklenmesi matematiksel olarak R^2 değerini arttıracaktır.
- Bu nedenle yeni bir değişkenin modele olan katkısının belirlenmesinde ve ÇDR modellerinde modelin açıklama gücünün belirlenmesinde R^2 iyi bir ölçüt değildir.
- Bu sebeple ÇDR modellerinde düzeltilmiş R^2 yani \bar{R}^2 kullanılır.
- \bar{R}^2 detaylı olarak daha sonra incelenecektir. O zamana kadar modelin açıklama gücünü belirlemede R^2 değerini kullanacağız.

Uyum İyiği (Goodness-of-fit): Örnek

Üniversite Başarı Modeli (ÇDR)

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 \quad (\text{ÖRF})$$

$$\widehat{colGPA} = 1.29 + 0.453 \, hsGPA + 0.0094 \, ACT \quad (\text{ÖRF})$$

$$n = 141, \quad R^2 = 0.176$$

- Determinasyon katsayısı 0.176 olarak tahmin edilmiştir.
- Üniversite genel not ortalaması *colGPA*'daki değişkenliğin yaklaşık %17.6'sı *hsGPA* ve *ACT* değişkenleriyle açıklanabilmektedir.
- Dışarıda bırakılan birçok faktör olduğundan üniversite genel not ortalaması *colGPA*'nın küçük bir kısmı açıklanabilmiştir.
- Üniversite genel not ortalaması *colGPA*'yı etkileyen bu modelde yer almayan başka birçok değişken olduğu unutulmamalıdır.

SEKK Parametre Tahmincilerinin Varyansı

ÇDR.7: Sabit Varyans (Homoscedasticity)

u hata teriminin bağımsız değişken x 'lere göre koşullu varyansı sabittir.

$$Var(u|x_1, x_2, \dots, x_k) = \sigma^2$$

$$Var(u|\mathbf{x}) = \sigma^2$$

$$Var(u) = \sigma^2 \quad (u \text{ ve } x\text{'ler bağımsız olduğundan})$$

- Bu varsayımın sağlanmadığı duruma değişen varyans (heteroscedasticity) denir.
- Bu varsayım SEKK parametre tahmincilerinin varyanslarının ve standart hatalarının türetilmesinde ve etkinlik özelliklerinin belirlenmesinde kullanılır.
- Sapmasızlık için sabit varyans varsayımına ihtiyaç yoktur.
- Örneğin, ücret modelinde (Slayt 8) bu varsayım, model dışında bırakılan faktörler u 'nun değişkenliğinin modele dahil edilen tüm bağımsız değişkenlere (*educ* ve *exper*) bağlı olmadığını söylemektedir.

SEKK Parametre Tahmincilerinin Varyansı

Teorem: $\hat{\beta}_j$ 'lerin Varyansları

Gauss–Markov varsayımları (ÇDR.1 - ÇDR.7) altında

$$\text{Var}(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma^2}{SST_j(1 - R_j^2)}, \quad SST_j = \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)^2, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$$

► Ek Bilgi

- σ^2 gözlenemeyen hata terimi u 'nun varyansıdır. Bu nedenle σ^2 hata varyansı, σ ise regresyonun standart sapması olarak adlandırılır.
- SST_j , x_j 'deki örneklem değişkenliğini ifade eder.
- R_j^2 ise x_j 'nin diğer tüm x değişkenlerine regresyonundan (kesim parametresi içeren) elde edilen belirlilik katsayısıdır.
- $\text{Var}(\hat{\beta}_j)$, σ^2 ile aynı yönde ilişkilidir. σ^2 'yi düşürmenin tek yolu güçlü bağımsız değişkenleri modele eklemektir.
- $\text{Var}(\hat{\beta}_j)$, SST_j ile ters yönde ilişkilidir. SST_j 'yi arttırmanın tek yolu gözlem sayısını arttırmaktır.

SEKK Parametre Tahmincilerinin Varyansı

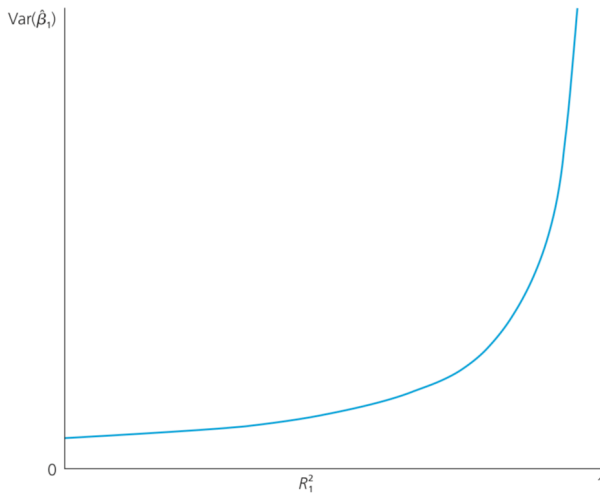
Teorem: $\hat{\beta}_j$ 'lerin Varyansları

Gauss–Markov varsayımları (ÇDR.1 - ÇDR.7) altında

$$\text{Var}(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma^2}{SST_j(1 - R_j^2)}, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$$

- $\text{Var}(\hat{\beta}_j)$, diğer tüm bağımsız değişken x_j ile korelasyon düzeyini belirten R_j^2 terimine de bağlıdır.
 - R_j^2 arttıkça $\text{Var}(\hat{\beta}_j)$ sınırsız artar. Bakınız Şekil 2.
 - Limitte $R_j^2 = 1$ olduğunda varyans sonsuz olur (ayrıca $\hat{\beta}_j$ belirsiz olur). Ancak tam çoklu doğrusal bağıntının olmaması varsayımı (ÇDR.4) bu durumu engeller.
- Kısacası, bağımsız değişken x 'lerin birbirleriyle doğrusal ilişki düzeyi (çoklu doğrusal bağıntının gücü) arttıkça SEKK parametre tahmincilerinin varyansı artar.
- Bu nedenle istenmeyen durum tam çoklu doğrusal bağıntı iken dikkat edilmesi durum ise çoklu doğrusal bağıntı gücünün yüksek olmasıdır.

SEKK Parametre Tahmincilerinin Varyansı



Kaynak: Wooldridge (2016)

Şekil 2: Varyans ve R_j^2 ilişkisi

SEKK Parametre Tahmincilerinin Varyansı

Teorem: $\hat{\beta}_j$ 'lerin Varyansları

Gauss–Markov varsayımları (ÇDR.1 - ÇDR.7) altında

$$Var(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma^2}{SST_j(1 - R_j^2)}, \quad SST_j = \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)^2, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$$

- ÇDR için verilen yukarıdaki $Var(\hat{\beta}_j)$ formülü aynı zamanda tek bağımsız değişken içeren modeldeki (BDR) parametre tahmincilerinin varyans formülünün çıkartılmasında kullanılabilir.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + u \quad (\text{Model})$$

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 \quad (\text{ÖRF})$$

$$x_1 = \hat{\alpha}_0 + \hat{r}_1, \quad R_1^2 = 0 \quad (1. \text{ Yardımcı Regresyon Tahmini})$$

$$Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{SST_1(1 - R_1^2)} = \frac{\sigma^2}{SST_1} \longrightarrow Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{SST_x} = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

SEKK Parametre Tahmincilerinin Varyansı

Teorem: $\hat{\beta}_j$ 'lerin Varyansları

Gauss–Markov varsayımları (ÇDR.1 - ÇDR.7) altında

$$\text{Var}(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma^2}{SST_j(1 - R_j^2)}, \quad SST_j = \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)^2, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$$

- Hata terimi u gözlenemediği için hata varyansı σ^2 bilinmez.
- Bu nedenle, SEKK parametre tahmincilerinin varyansı $\text{Var}(\hat{\beta}_j)$ 'lerin tahmini için öncelikle hata varyansı σ^2 'nin tahmin edilmesi gerekir.
- Buradaki önemli nokta, $\text{Var}(\hat{\beta}_j)$ 'lerin sapmasız tahmin edilmesi gereklidir. Bu nedenle, σ^2 'nin de aynı şekilde sapmasız tahmin edilmesi gerekir.

SEKK Parametre Tahmincilerinin Varyansı

Hata Varyansı σ^2

ÇDR.5 varsayımı altında hata varyansı σ^2 aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\text{Var}(u) = \sigma^2 = E(u^2) - \underbrace{E(u)^2}_{= 0 \text{ (ÇDR.5)}} \quad (\text{Varyans Formülü})$$

$$\sigma^2 = E(u^2)$$

- σ^2 'nin sapmasız tahmincisi hata terimi u 'nun örneklem ortalaması $n^{-1} \sum_{i=1}^n u_i^2$ 'dir.
- Fakat, hata terimi u gözlenemediği için σ^2 'nin tahmininde hata terimi u 'nun yerine onun örneklem analogu olan kalıntı \hat{u} kullanılır. $n^{-1} \sum_{i=1}^n u_i^2 \longrightarrow n^{-1} \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2$
- Fakat $n^{-1} \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2$ sapmalı bir tahmincidir. Bu nedenle, σ^2 'nin sapmasız tahmincisini hesaplamak için BDR'de yaptığımız gibi bu değer serbestlik derecesi kullanılarak düzeltilmesi gerekir.

SEKK Parametre Tahmincilerinin Varyansı

Teorem: Hata Varyansı σ^2 'nin Sapmasız Tahmini

Gauss–Markov varsayımları (ÇDR.1 - ÇDR.7) altında hata varyansı σ^2 'nin sapmasız bir tahmincisi:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2}{n - k - 1} = \frac{SSR}{n - k - 1}$$

- Serbestlik derecesi (bağımsız bilgi sayısı) $\longrightarrow s.d. = n - (k + 1) = n - k - 1$
 - Serbestlik derecesi SEKK birinci sıra koşullarından $(k + 1)$ tane gelmektedir. Bu koşullar kalıntı \hat{u} 'nın üzerine $k + 1$ tane kısıt koyar.
 - n tane kalıntıdan $n - (k + 1)$ tanesi biliniyorsa geriye kalan $k + 1$ kalıntı otomatik olarak bilinecektir. Bu nedenle kalıntıların serbestlik derecesi $n - k - 1$ 'dir.
- $\hat{\sigma}$ regresyonun standart sapması σ 'nın bir tahmincisidir ve regresyonun standart hatası ya da ortalama karesel hata olarak adlandırılır.
- Regresyona yeni bir bağımsız değişken eklendiğinde $\hat{\sigma}$ azalabilir ya da artabilir.
 - Modele yeni bir bağımsız değişken eklendiğinde SSR düşecektir fakat aynı zamanda serbestlik dereceside 1 düşecektir. SSR payda, serbestlik derecesi ise payda olduğundan hangi değişimin daha fazla etkiye sahip olduğunu kestiremeyiz.

SEKK Parametre Tahmincilerinin Varyansı

- $\hat{\sigma}^2$ tahmin edildikten sonra $Var(\hat{\beta}_j)$ 'nin formülünde yerine koyulup $Var(\hat{\beta}_j)$ 'nin sapmsız bir tahmincisi hesaplanabilir.

$\hat{\beta}_j$ 'lerin Varyans Tahminleri

$$Var(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma^2}{SST_j(1 - R_j^2)} \quad \longrightarrow \quad \widehat{Var(\hat{\beta}_j)} = \frac{\hat{\sigma}^2}{SST_j(1 - R_j^2)}, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$$

- Genelde, $Var(\hat{\beta}_j)$ ve $\widehat{Var(\hat{\beta}_j)}$ arasındaki ayrım yazımda net olarak gösterilmez.
 - $\hat{\beta}_j$ 'lerin varyans tahmini denildiğinde $\widehat{Var(\hat{\beta}_j)}$ kastedilmesine rağmen yazıdaki gösterimde genelde $Var(\hat{\beta}_j)$ kullanılır.
 - Bu derste aynı yolu izleyip $\hat{\beta}_j$ 'lerin varyans tahminini $Var(\hat{\beta}_j)$ ile göstereceğiz.

$$Var(\hat{\beta}_j) = \frac{\hat{\sigma}^2}{SST_j(1 - R_j^2)}, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$$

SEKK Parametre Tahmincilerinin Varyansı

$\hat{\beta}_j$ 'ların Standart Sapmaları (sd)

$$sd(\hat{\beta}_j) = \sqrt{Var(\hat{\beta}_j)} \longrightarrow sd(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma}{\sqrt{SST_j(1 - R_j^2)}}, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$$

$\hat{\beta}_j$ 'ların Standart Hataları (se)

$$se(\hat{\beta}_j) = \sqrt{Var(\hat{\beta}_j)} \longrightarrow se(\hat{\beta}_j) = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{SST_j(1 - R_j^2)}}, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$$

- $se(\hat{\beta}_j)$ güven aralıklarının hesaplanmasında ve hipotez testlerinde kullanılır.
 - $se(\hat{\beta}_j)$ direkt olarak $\hat{\sigma}$ 'ya bağlı olduğundan aynen SEKK parametre tahmincileri $\hat{\beta}_j$ 'lar gibi $se(\hat{\beta}_j)$ 'nın da örneklem dağılımı vardır ve örneklemden örnekleme değişir.
 - $se(\hat{\beta}_j)$, ÇDR.7 (sabit varyans) varsayımına dayanan $Var(\hat{\beta}_j)$ formülünden türetildiği için ÇDR.7 varyasyonunun sağlanmaması durumunda, yani değişen varyans varsa, $Var(\hat{\beta}_j)$ ve $se(\hat{\beta}_j)$ tahminleri sapmalı olur.
 - Değişen varyans durumunda SEKK parametre tahmincilerinin varyansları geçersizdir ve bu nedenle düzeltilmeleri gerekir.

SEKK Parametre Tahmincilerinin Sapmasızlığı

Teorem: SEKK Parametre Tahmincilerinin Sapmasızlığı

ÇDR.1 - ÇDR.5 varsayımları altında SEKK parametre tahmincileri sapmasızdır.

$$E(\hat{\beta}_0) = \beta_0$$

$$E(\hat{\beta}_j) = \beta_j, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$$

► Ek Bilgi

- Sapmasızlık, SEKK parametre tahmincilerinin örneklem dağılımlarının ortalamasının (beklenen değerinin) bilinmeyen anakütle parametrelerine eşit olduğunu söyler.
- İlerleyen slaytlarda sapmasızlık için gerekli olan varsayımların bazıları hakkındaki detaylar verilmiştir.

SEKK Tahmincilerinin Sapmasızlığı İçin Gerekli Varsayımlar

ÇDR.1: Gözlem Sayısı

Gözlem sayısı n tahmin edilecek anakütle parametre sayısından büyük ya da en azından eşit olmalıdır.

$$n \geq k + 1$$

ÇDR.2: Parametrelerde Doğrusallık

Model parametrelerde doğrusaldır.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + u \quad \checkmark$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \quad \checkmark$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_1^2 + u \quad \checkmark$$

$$y = \beta_0 + \beta_1^2 x_1 + \beta_2 x_2 + u \quad \times$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \sqrt{\beta_2} x_2 + u \quad \times$$

SEKK Tahmincilerinin Sapmasızlığı İçin Gerekli Varsayımlar

Doğrusal Parametre Tahmincileri

$\hat{\beta}_j$ parametre tahmincisi aşağıdaki gibi yazılabiliyorsa doğrusaldır.

$$\hat{\beta}_j = \sum_{i=1}^n w_{ij} y_i, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$$

- Burada w_{ij} tüm bağımsız değişken x 'lerin bir fonksiyonudur.
- SEKK parametre tahmincileri aşağıdaki gibi yazılabildiğinden doğrusaldır:

$$\hat{\beta}_j = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{ij} y_i}{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{ij}^2} = \sum_{i=1}^n w_{ij} y_i, \quad \text{burada} \quad w_{ij} = \frac{\hat{r}_{ij}}{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{ij}^2}$$

- \hat{r}_{ij}, x_j 'nin tüm diğer bağımsız değişkenler üzerine regresyonundan elde edilen kalıntı terimidir.

SEKK Tahmincilerinin Sapmasızlığı İçin Gerekli Varsayımlar

ÇDR.3: Rassallık

Tahminde kullanılan n tane gözlem ilgili anakütleden rassal örnekleme yoluyla seçilmiştir. Yani gözlemler stokastiktir (rassal), deterministik (kesin) değil.

$$\{(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}, y_i) : i = 1, 2, \dots, n\}$$

ÇDR.4: Tam Çoklu Doğrusal Bağıntının Olmaması

Örnekleme (ve bu nedenle anaküttelede) bağımsız değişkenlerin hiçbirisi kendi içinde sabit değildir (yeterli değişkenlik vardır) ve bağımsız değişkenler arasında tam çoklu doğrusal bağıntı (TÇDB) yoktur.

$$\sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)^2 > 0, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \quad \longrightarrow \quad x_2 = 2x_1 \quad \text{TÇDB VAR ✗}$$

$$\longrightarrow \quad x_2 = x_1^2 \quad \text{TÇDB YOK ✓}$$

SEKK Tahmincilerinin Sapmasızlığı İçin Gerekli Varsayımlar

ÇDR.4: Tam Çoklu Doğrusal Bağıntının Olmaması

Bu varsayım bağımsız değişken x 'ler arasında tam doğrusal bir ilişkinin olmaması gerektiğini söyler. Herhangi bir x diğer x 'lerin lineer bir kombinasyonu olarak yazılamaz. Yani x 'ler arasındaki korelasyon katsayısı 1 olamaz.

- ÇDR.4 varsayımı bağımsız değişken x 'lerin arasındaki non-lineer ilişki hakkında hiçbir kısıtlamada bulunmaz.
- ÇDR.4 varsayımı bağımsız değişken x 'lerin doğrusal ilişkili olmasına izin verir. Fakat izin verilmeyen tek durum tam doğrusal ilişkinin olmamasıdır.
- x 'ler tam ilişkili olursa SEKK parametre tahmincilerinin hesaplanması matematiksel olarak mümkün olmaz (parametre tahmincileri belirsiz olur).
- Bu varsayıma göre bağımsız değişkenler doğrusal ilişkili olabilirler. Zaten, x 'ler arasında doğrusal ilişkiye (1'den düşük korelasyona) izin vermezsek ÇDR'den istediğimiz faydayı alamayız.
- Örneğin, sınav başarı modelinde (Slayt 9) ortalama aile geliri *avginc* ve öğrencinin eğitim harcaması *expend* arasında ilişki olduğunu bilerek bu değişkenleri modele sokuyoruz. Amaç ortalama aile geliri *avginc*'i kontrol etmektir.

SEKK Tahmincilerinin Sapmasızlığı İçin Gerekli Varsayımlar

ÇDR.5: Sıfır Koşullu Ortalama

$$E(u|\mathbf{x}) = E(u) = 0$$

$$Cov(x_j, u) = 0, \quad Corr(x_j, u) = 0 \quad \text{ve} \quad E(x_j u) = 0, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$$

Sonuç: u ve x_j bağımsızdır. Yani u ve x_j hem lineer hem de non-lineer olarak ilişkisizdir.

- ÇDR.5 varsayımı hata terimi u 'nun bağımsız değişken x 'lerle ilişkisiz olduğunu, yani x 'lerin kesin dışsal (exogenous) olduğunu, söyler.
- Eğer u , x 'lerden biriyle ilişkiliyse, yani ÇDR.5 sağlanmazsa, SEKK parametre tahmincileri sapmalı olur. Bu durumda tahmin sonuçları güvenilir olmaz.
- ÇDR.5 varsayımının sağlanmadığı durumlar nelerdir?
 - Modelin fonksiyon kalıbının yanlış kurulması (functional form misspecification)
 - Önemli bir değişkenin model dışında bırakılması (omitted variable)
 - Bağımsız değişkenlerde yapılan ölçme hataları (measurement error)
- ÇDR.5 varsayımı sağlanmıyorsa içsel değişkenler (endogenous variables), yani içsellik, söz konusudur.

SEKK Parametre Tahmincilerinin Etkinliği

Teorem: SEKK Parametere Tahmincilerinin Etkinliği

ÇDR.6 - ÇDR.7 varsayımları altında SEKK parametre tahmincileri etkindir.

$$Var(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma^2}{SST_j(1 - R_j^2)}, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$$

► Ek Bilgi

- SEKK parametre tahmincileri $\hat{\beta}_j$ 'ların etkin olması en küçük/minimum varyanslı olması anlamına gelir.
- Küçük varyans ve dolayısıyla küçük standart hata $se(\hat{\beta}_j)$ istenen bir özelliktir.
 - Küçük varyansa sahip parametre tahmincileri $\hat{\beta}_j$ 'ların farklı örneklemelerde elde edilen değerleri gerçek parametre β_j değerinden (beklenen değeri) çok fazla uzaklaşmaz, yani ortalamadan sapma azdır.
 - Bu nedenle küçük varyansa sahip parametre tahmincileri $\hat{\beta}_j$ 'lar daha hassas bir tahmin verir.
 - Küçük standart hata $se(\hat{\beta}_j)$ 'ya sahip ve dolayısıyla daha hassas olan $\hat{\beta}_j$ 'ların güven aralıklarının hesaplanmasında ve hipotez testlerinin yapılmasında daha kesin istatistiki sonuçlara varabiliriz.

Gauss–Markov Teoremi

Gauss–Markov Teoremi

ÇDR.1 - ÇDR.7 varsayımları altında SEKK parametre tahmincileri, tüm doğrusal sapmasız tahminciler arasında etkin/en iyi (minimum varyanslı) olanlarıdır.

Başka bir ifadeyle, ÇDR.1 - ÇDR.7 varsayımları altında SEKK parametre tahmincileri $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_k$ anakütle parametreleri $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ 'nin **Doğrusal En İyi Sapmasız Tahmin Edicileridir** (DESTE ya da BLUE—**B**est **L**inear **U**nbiased **E**stimator).

- Gauss–Markov Teoremi regresyon modelinin SEKK yöntemiyle tahmini için teorik dayanak sağlar.
- Eğer bu varsayımlar sağlanıyorsa SEKK yöntemi dışında başka bir tahmin yöntemine başvurmamıza gerek yoktur. SEKK yöntemi bize doğrusal, sapmasız ve varyansı en düşük (en iyi) tahmincileri vermektedir.
- ÇDR.1 - ÇDR.7 varsayımlarından biri bile ihlal edilirse Gauss–Markov Teoremi geçersiz olur.
- ÇDR.5 sağlanmazsa SEKK parametre tahmincilerinin sapmasızlık özelliği, ÇDR.6 ve ÇDR.7 sağlanmazsa etkinlik özelliği kaybolur.

Gauss–Markov Teoremi



Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Kaynak: Wikipedia



Andrey Markov (1856-1922)

Kaynak: Wikipedia

Orijinden Geçen Regresyon

Orijinden Geçen Regresyon

Bazen Ekonomi Teorisi, kesim parametresi β_0 'ın sıfır olması gerektiğini söyler. Böyle bir durumda β_0 modelden çıkartılarak tahmin yapılır.

$$y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + u \quad (\text{Model})$$

$$\tilde{y} = \tilde{\beta}_1 x_1 + \tilde{\beta}_2 x_2 + \cdots + \tilde{\beta}_k x_k \quad (\text{ÖRF})$$

- Orijinden geçen regresyonda

- Parametre tahmincileri $\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_k$ 'ların, kesim parametresi β_0 'ın bulunduğu regresyondaki $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_k$ 'lerden farklı değerler alacağı unutulmamalıdır.
- x 'ler 0 olduğunda tahmin edilen y değeri (\hat{y}) 0'dır.
- Cebirsel özellikler geçersizdir.
- R^2 negatif çıkabilir, yani y 'nin örneklem ortalaması (\bar{y}) y 'deki değişkenliği açıklamada modeldeki bağımsız değişken x 'lerden daha başarılıdır.
- R^2 negatif ise, $R^2 = 0$ kabul edilir ya da regresyona kesim parametresi eklenerek tahmin yapılır.

Orijinden Geçen Regresyon

Orijinden Geçen Regresyon

Bazen Ekonomi Teorisi, kesim parametresi β_0 'ın sıfır olması gerektiğini söyler. Böyle bir durumda β_0 modelden çıkartılarak tahmin yapılır.

$$y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + u \quad (\text{Model})$$

$$\tilde{y} = \tilde{\beta}_1 x_1 + \tilde{\beta}_2 x_2 + \cdots + \tilde{\beta}_k x_k \quad (\text{ÖRF})$$

- Gerçekte (ARF'de) kesim parametresi β_0 sıfırdan farklı olmasına ($\beta_0 \neq 0$) rağmen orijinden geçen regresyon tahmin edilirse eğim parametresi tahmincileri sapmalı olur. $\rightarrow E(\tilde{\beta}_j) \neq \beta_j$
- Gerçekte (ARF'de) kesim parametresi β_0 sıfır olmasına ($\beta_0 = 0$) rağmen sıfır değilmiş gibi regresyona dahil edilirse eğim parametresi tahmincilerinin varyansları yükseltir. $\rightarrow Var(\hat{\beta}_j) \uparrow$
- Gözlem sayısı n arttırılarak parametre tahmincilerinin varyansları düşürülebilirken sapmalı parametre tahminci probleminden kurtulamayız. Bu nedenle uygulamada genelde kesim parametresi β_0 direkt olarak modele eklenir.

Modele Gereksiz Bağımsız Değişken Eklenmesi

- Modele gerekli olmadığı halde bir bağımsız değişken x eklersek SEKK parametre tahmincileri $\hat{\beta}$ 'lar ve onların varyansları bundan nasıl etkilenir?
- Modele gereksiz bir bağımsız değişken x 'in eklenmesi ARF'de bu değişkenin yalın/kısmi etkisinin sıfır olduğu anlamına gelmektedir.
- Yani, model fazla kurulmuştur (overspecification).
- Örneğin, aşağıdaki doğru modelin bilinmediğini ve bağımsız değişken x_3 'ü modele gereksiz yere ekleyerek yanlış modelin kullanıldığını düşünelim.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \quad (\text{Doğru Model})$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + u \quad (\text{Yanlış Model})$$

- Yanlış modelin ÇDR.1 - ÇDR.7 varsayımlarını sağladığını varsayalım.
- x_3 'ün yalın/kısmi etkisi sıfır olmasına ($\beta_3 = 0$) rağmen modele koyulduğunda, yani yanlış model kullanıldığında ARF aşağıdaki gibi olur.

$$E(y|x_1, x_2, x_3) = E(y|x_1, x_2) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 \quad (\text{ARF})$$

- Bu ARF'nin bilinmediğini ve araştırmacının modele x_3 'ü katsayısı sıfır ($\beta_3 = 0$) olduğu halde eklediğini varsayıyoruz.

Modele Gereksiz Bağımsız Değişken Eklenmesi

- Bu durumda ÖRF aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \hat{\beta}_3 x_3 \quad (\text{ÖRF})$$

- SEKK parametre tahmincileri hala sapmasızdır. Bu sonuç Slayt 78'de verilen teorem ve ek bilgi yardımıyla kolayca çıkarılabilir.

$$E(\hat{\beta}_0) = \beta_0, \quad E(\hat{\beta}_1) = \beta_1, \quad E(\hat{\beta}_2) = \beta_2, \quad E(\hat{\beta}_3) = 0$$

- Gereksiz eklenen bağımsız değişken x_3 'ün katsayısının doğru değeri sıfırdır. $\hat{\beta}_3$ 'ün kendisi hiçbir zaman sıfır olmayacak olsa da, x_3 değişkenin bir açıklayıcılığı olmadığından tahmincisinin beklenen değeri de 0 olacaktır.
- Modele gereksiz bir bağımsız değişkenin eklenmesi durumunda SEKK parametre tahmincileri hala sapmasız olsa da parametre tahmincilerinin varyansları yükselir.
 - Modele yeni bağımsız değişken x_j eklenince R_j^2 artacağından $Var(\hat{\beta}_j)$ de artar.

$$Var(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma^2}{SST_j(1 - R_j^2)}, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$$

Gerekli Bağımsız Değişkenin Model Dışında Bırakılması

- Modelede yer alması gerektiği halde bir bağımsız değişken x 'i modelden dışlarsak SEKK parametre tahmincileri $\hat{\beta}$ 'lar ve onların varyansları bundan nasıl etkilenir?
- Gerekli bir bağımsız değişken x 'in modelden dışlanması ARF'de bu değişkenin yalın/kısmi etkisinin sıfır olmadığı anlamına gelmektedir.
- Yani, model eksik kurulmuştur (underspecification).
- Örneğin, ÇDR.1 - ÇDR.7 varsayımlarının sağlandığı doğru modelin x_1 ve x_2 bağımsız değişkenlerini içerdiğini varsayalım.
- Fakat, araştırmacının bağımsız değişken x_2 'yi gözleyemediği için model dışında bırakıp yanlış modeli tahmin ettiğini düşünelim.
- Eğer x_2 'yi modele doğrudan sokmazsak (yanlış modeli kullanırsak), onu yanlış modeledeki hata teriminin (v) içine almış oluruz.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \quad (\text{Doğru Model})$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + v \quad (\text{Yanlış Model})$$

$$v = \beta_2 x_2 + u \quad (\text{Yanlış Model Hata Terimi})$$

Gerekli Bağımsız Değişkenin Model Dışında Bırakılması

- Doğru ve yanlış modelden elde edeceğimiz tahminler farklı olacağından, modeller ve onların ÖRF'leri aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \longrightarrow \hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 \quad (\text{Doğru Model ve ÖRF})$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + v \longrightarrow \tilde{y} = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x_1 \quad (\text{Yanlış Model ve ÖRF})$$

$$v = \beta_2 x_2 + u \quad (\text{Yanlış Model Hata Terimi})$$

- Yanlış model tahmin edildiğinde x_1 'in eğim paramteresi β_1 'in parametre tahminicisi $\tilde{\beta}_1$ hala sapmasız mıdır?
- Yanlış modelde β_1 'in parametre tahminicisi $\tilde{\beta}_1$:

$$\tilde{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1) y_i}{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2}$$

Gerekli Bağımsız Değişkenin Model Dışında Bırakılması

- $\tilde{\beta}_1$ 'nin sapmalı bir tahminci olup olmadığını ve eğer sapmalı ise sapmanın boyutunu belirlemek için $\tilde{\beta}_1$ formülünde y yerine doğru modeli yazıp, yeniden düzenleyelim.

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}_1 &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1) y_i}{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1) (\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + u_i)}{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2} \\ &= \frac{\overbrace{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)}^{=0} \beta_0}{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2} + \frac{\overbrace{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1) x_{i1}}^{= \sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2} \beta_1}{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2} + \frac{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1) x_{i2} \beta_2}{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2} + \frac{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1) u_i}{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2}\end{aligned}$$

Gerekli Bağımsız Değişkenin Model Dışında Bırakılması

- $\tilde{\beta}_1$ 'nin yeniden düzenlenen formülü aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\tilde{\beta}_1 = \beta_1 + \frac{\beta_2 \sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1) x_{i2}}{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2} + \frac{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1) u_i}{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2}$$

- $\tilde{\beta}_1$ 'nin yeniden düzenlenen formülünün tüm x 'lere (\mathbf{x}) göre koşullu beklenen değerini alalım.

$$\begin{aligned} E(\tilde{\beta}_1 | \mathbf{x}) &= E(\beta_1 | \mathbf{x}) + E \left(\frac{\beta_2 \sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1) x_{i2}}{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2} \middle| \mathbf{x} \right) + E \left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1) u_i}{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2} \middle| \mathbf{x} \right) \\ &= 0 \text{ (ÇDR.5)} \\ &= \beta_1 + \beta_2 \frac{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1) x_{i2}}{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2} + \frac{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1) \overbrace{E(u_i | \mathbf{x})}}{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2} \end{aligned}$$

Gerekli Bağımsız Değişkenin Model Dışında Bırakılması

- $\tilde{\beta}_1$ 'nin tüm x 'lere (\mathbf{x}) göre koşullu beklenen değeri aşağıdaki gibi olacaktır.

$$E(\tilde{\beta}_1|\mathbf{x}) = \beta_1 + \beta_2 \frac{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)x_{i2}}{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2}$$

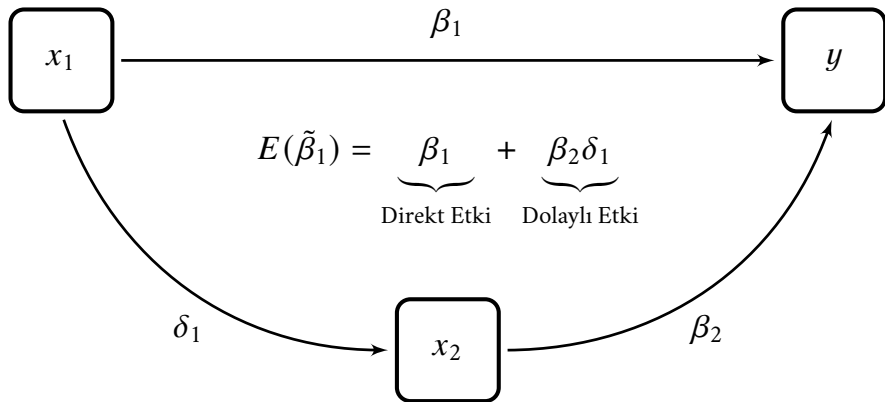
- β_2 'nin yanında yer alan terim x_2 'nin x_1 üzerine regresyonundan (yardımcı model) elde edilen eğim parametresi tahmincisi $\tilde{\delta}_1$ 'dir.

$$x_2 = \tilde{\delta}_0 + \tilde{\delta}_1 x_1 + \tilde{r}_2 \quad \longrightarrow \quad \tilde{\delta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)x_{i2}}{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2} \quad (\text{Yardımcı Model Tahmini})$$

- SEKK parametre tahmincilerinin sapmasızlığı tüm x 'lere (\mathbf{x}) göre koşullu hesaplanmasına rağmen genelde koşulsuz olarak gösterilir. Böylece, $\tilde{\beta}_1$ 'nin beklenen değeri aşağıdaki gibi olur.

$$E(\tilde{\beta}_1|\mathbf{x}) = \beta_1 + \beta_2 \tilde{\delta}_1 \quad \longrightarrow \quad E(\tilde{\beta}_1) = \beta_1 + \beta_2 \tilde{\delta}_1$$

Gerekli Bağımsız Değişkenin Model Dışında Bırakılması



Şekil 3: x_1 'in y Üzerindeki Direkt ve Dolaylı Etkisi

Dışlanmış Değişken Sapması

- $E(\tilde{\beta}_1)$ ve β_1 arasındaki farka **dışlanmış değişken sapması** (omitted variable bias) adı verilir.

$$E(\tilde{\beta}_1) = \beta_1 + \beta_2 \tilde{\delta}_1 \quad \longrightarrow \quad \text{sapma} = E(\tilde{\beta}_1) - \beta_1 = \beta_2 \tilde{\delta}_1$$

- Şu iki durumda sapma 0, yani $\tilde{\beta}_1$ sapmasız, olur.
 - x_2 'nin y üzerindeki yalın/kısmi etkisi sıfırdır, yani $\beta_2 = 0$ 'dır. Doğru modelde bağımsız değişken x_2 bulunmamalıdır.
 - x_1 ve x_2 lineer (doğrusal) olarak ilişkisizdir, yani $\tilde{\delta}_1 = 0$.
- Sapmanın işareti hem β_2 'ye hem de dışlanan bağımsız değişken x_2 ile modele dahil edilen değişken x_1 arasındaki korelasyona, yani $\text{Corr}(x_1, x_2) = \tilde{\delta}_1$, bağlıdır.
- Dışlanan bağımsız değişken x_2 gözlenemiyorsa bu korelasyon hesaplanamaz.
- Aşağıdaki tablo sapmanın yönüne ilişkin dört olası durumu özetlemektedir.

β_2	$\tilde{\delta}_1$	
	$\tilde{\delta}_1 > 0$	$\tilde{\delta}_1 < 0$
$\beta_2 > 0$	Pozitif Sapma	Negatif Sapma
$\beta_2 < 0$	Negatif Sapma	Pozitif Sapma

Notlar: $\text{Corr}(x_1, x_2) = \tilde{\delta}_1$

Dışlanmış Değişken Sapması

$$sapma = E(\tilde{\beta}_1) - \beta_1 = \beta_2 \tilde{\delta}_1$$

- Sapmanın işaretinin yanı sıra boyutu da önemlidir. Sapmanın boyutu hem $\tilde{\delta}_1$ 'ya hem de β_2 'ye bağlıdır.
- β_1 'in büyüklüğüne kıyasla küçük bir sapma uygulamada sorun yaratmayabilir. Örneğin, anakütle eğim parametresi β_1 'in değeri 8.6 iken tahmin sonucunda elde edilen sapma 0.1 ise.
- Uygulamada, β_2 bilinmeyen anakütle parametresi olduğundan sapmanın büyüklüğünü hesaplamak çoğunlukla mümkün olmaz.
- Buna rağmen bazı durumlarda sapmanın yönü/işareti hakkında bir fikir elde edebiliriz.
- Örneğin, bağımsız değişken x_2 'yi gözleyemediğimize rağmen
 - x_2 'nin y üzerindeki yalın/kısmi etkisinin yönünü, yani β_2 'nin işaretini
 - x_1 ve x_2 arasındaki lineer ilişkinin yönünü, yani $\tilde{\delta}_1$ 'nin işaretinibildiğimizi düşünelim.
- Bu durumda sapmanın yönü/işareti hakkında yorumda bulunabiliriz.
 - $E(\tilde{\beta}_1) > \beta_1$ ise $\tilde{\beta}_1$ 'da **yukarı sapma** vardır.
 - $E(\tilde{\beta}_1) < \beta_1$ ise $\tilde{\beta}_1$ 'da **aşağı sapma** vardır.

Dışlanmış Değişken Sapması

- Örneğin, ücreti açıklamak doğru modelin hem eğitim (*educ*) hem de doğuştan gelen yetenek (*ability*) bağımsız değişkenlerini içerdiğini düşünelim.
- Yetenek (*ability*) bağımsız değişkenini gözleyemediğimiz için model dışında bırakıp yanlış modeli tahmin ettiğimizi düşünelim.

$$wage = \beta_0 + \beta_1 educ + \beta_2 ability + u \quad (\text{Doğru Model})$$

$$wage = \beta_0 + \beta_1 educ + v \longrightarrow \widehat{wage} = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 educ \quad (\text{Yanlış Model ve ÖRF})$$

$$v = \beta_2 ability + u \quad (\text{Yanlış Model Hata Terimi})$$

$$ability = \tilde{\delta}_0 + \tilde{\delta}_1 educ + \tilde{r}_{ability} \quad (\text{Yardımcı Model Tahmini})$$

- Yanlış model tahmin edildiğinde, *educ*'e ait eğim parametresi tahmincisi $\tilde{\beta}_1$ 'deki sapmanın işaretinin pozitif olacağı söylenebilir. Çünkü,
 - Yetenek (*ability*) ücretlerle (*wage*) pozitif ilişkilidir, yani $\beta_2 > 0$ 'dır.
 - Eğitilmiş (*educ*) insanlar daha yetenekli (*ability*) olma eğilimindedir, yani $\tilde{\delta}_1 > 0$ 'dır.

$$sapma = E(\tilde{\beta}_1) - \beta_1 = \underbrace{\beta_2}_{+} \underbrace{\tilde{\delta}_1}_{+}$$

- $E(\tilde{\beta}_1) > \beta_1$ olduğundan $\tilde{\beta}_1$ 'da **yukarı sapma** vardır.

Dışlanmış Değişken Sapması

$$wage = \beta_0 + \beta_1 educ + \beta_2 ability + u \quad (\text{Doğru Model})$$

$$wage = \beta_0 + \beta_1 educ + v \longrightarrow \widehat{wage} = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 educ \quad (\text{Yanlış Model ve ÖRF})$$

$$v = \beta_2 ability + u \quad (\text{Yanlış Model Hata Terimi})$$

$$ability = \tilde{\delta}_0 + \tilde{\delta}_1 educ + \tilde{r}_{ability} \quad (\text{Yardımcı Model Tahmini})$$

- Yetenek (*ability*) ve eğitim (*educ*) yakından ilişkili, $\tilde{\delta}_1 \neq 0$, olduğundan yanlış model kullanıldığında:

- $educ$ ile v ilişkili olacaktır. $\longrightarrow Corr(educ, v) \neq 0$
- ÇDR.5 varsayımı ihlal edilecektir. $\longrightarrow E(v|educ) \neq 0$
- $\tilde{\beta}_1$ sapmalı tahmin edilecektir. $\longrightarrow E(\tilde{\beta}_1) \neq \beta_1$

Sonuç olarak bağımsız değişken *educ* içseldir.

- Yeteneğin dışlanıp yanlış modelin kullanılması durumunda, eğitimin ücret (*wage*) üzerindeki etkisi, yani $\tilde{\beta}_1$, abartılı tahmin edilir. Yani, aslında yanlış modeldeki eğitimin etkisinin bir kısmı doğuştan gelen yeteneğe bağlıdır.

Dışlanmış Değişken Sapması

- Daha fazla bağımsız değişken içeren modellerde gerekli bir değişkenin model dışında bırakılması SEKK parametre tahmincilerinin genellikle sapmalı olmasına neden olur.
- Doğru modelin aşağıdaki gibi olduğunu varsayalım.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + u \quad (\text{Doğru Model})$$

- x_3 'ü dışarıda bırakarak aşağıdaki yanlış modeli tahmin ettiğimizi düşünelim.

$$\tilde{y} = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x_1 + \tilde{\beta}_2 x_2 \quad (\text{Yanlış Model - ÖRF})$$

- x_3 'ün, x_1 ile lineer ilişkili fakat x_2 ile lineer ilişkisiz olsun. Eğer,
 - x_1 ve x_2 lineer ilişkili ise, bu durumda $\tilde{\beta}_1$ ve $\tilde{\beta}_2$ sapmalı olur.
 - x_1 ve x_2 lineer ilişkisiz ise, bu durumda $\tilde{\beta}_1$ sapmalı fakat $\tilde{\beta}_2$ sapmasız olur.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Corr}(x_3, x_1) \neq 0 \\ \text{Corr}(x_3, x_2) = 0 \\ \text{Corr}(x_1, x_2) \neq 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} E(\tilde{\beta}_1) \neq \beta_1 \\ E(\tilde{\beta}_2) \neq \beta_2 \end{array} \quad \text{vs.} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Corr}(x_3, x_1) \neq 0 \\ \text{Corr}(x_3, x_2) = 0 \\ \text{Corr}(x_1, x_2) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} E(\tilde{\beta}_1) \neq \beta_1 \\ E(\tilde{\beta}_2) = \beta_2 \end{array}$$

Model Seçimi: Sapmasızlık vs. Küçük Varyans

- Modele bir bağımsız değişkenin eklenip eklenmemesi kararı SEKK parametre tahmincilerinin sapması ve varyansındaki değişim karşılaştırılarak verilmelidir.
- Olası modeller ve onların ÖRF'lerinin aşağıdaki gibi olduğunu varsayalım.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \longrightarrow \hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 \quad (1. \text{ Model ve ÖRF})$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + v \longrightarrow \tilde{y} = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x_1 \quad (2. \text{ Model ve ÖRF})$$

$$v = \beta_2 x_2 + u \quad (2. \text{ Model Hata Terimi})$$

$$x_2 = \tilde{\delta}_0 + \tilde{\delta}_1 x_1 + \tilde{r}_2 \quad (\text{Yardımcı Model Tahmini})$$

- Bağımsız değişkenler genellikle lineer olarak ilişkili olduğundan, x_1 ve x_2 'in de lineer ilişkili, yani $Corr(x_1, x_2) = \tilde{\delta}_1 \neq 0$ olduğunu varsayalım.
- 1. model tahmininden elde edilen $\hat{\beta}_1$ eğer,
 - $\beta_2 = 0$ ise, bağımsız değişken x_2 gereksiz olarak modele eklenmiştir (bakınız Slayt 89) ve bu nedenle $\hat{\beta}_1$ sapmasızdır. $\longrightarrow E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$
 - $\beta_2 \neq 0$ ise, bağımsız değişken x_2 doğru olarak modele eklenmiştir ve bu nedenle $\hat{\beta}_1$ sapmasızdır. $\longrightarrow E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$

Model Seçimi: Sapmasızlık vs. Küçük Varyans

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \longrightarrow \hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 \quad (1. \text{ Model ve ÖRF})$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + v \longrightarrow \tilde{y} = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x_1 \quad (2. \text{ Model ve ÖRF})$$

$$v = \beta_2 x_2 + u \quad (2. \text{ Model Hata Terimi})$$

$$x_2 = \tilde{\delta}_0 + \tilde{\delta}_1 x_1 + \tilde{r}_2 \quad (\text{Yardımcı Model Tahmini})$$

- 2. model tahmininden elde edilen $\tilde{\beta}_1$ eğer,
 - $\beta_2 = 0$ ise, bağımsız değişken x_2 doğru olarak modelden çıkarılmıştır ve bu nedenle $\tilde{\beta}_1$ sapmasızdır. $\longrightarrow E(\tilde{\beta}_1) = \beta_1$
 - $\beta_2 \neq 0$ ise, bağımsız değişken x_2 gerekli olduğu halde modelden çıkarılmıştır (bakınız Slayt 91) ve bu nedenle $\tilde{\beta}_1$ sapmalıdır. $\longrightarrow E(\tilde{\beta}_1) \neq \beta_1$
- Bu nedenle model seçiminde eğer sapmasızlık tek kriter ise, 1. model tahminindeki $\hat{\beta}_1$ her durumda sapmasız olduğu için $\tilde{\beta}_1$ 'e göre tercih edilir.
- Fakat sapmasızlığa göre bir model tercihi, varyans da düşünüldüğünde her zaman doğru değildir.

Model Seçimi: Sapmasızlık vs. Küçük Varyans

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \longrightarrow \hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 \quad (1. \text{ Model ve ÖRF})$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + v \longrightarrow \tilde{y} = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x_1 \quad (2. \text{ Model ve ÖRF})$$

- 1. modelde 2. modele göre daha fazla bağımsız değişken olduğundan $Var(\tilde{\beta}_1) < Var(\hat{\beta}_1)$ 'dir (bakınız Slayt 90).
- Eğer $\beta_2 = 0$ ise,
 - 1. model tahminindeki $\hat{\beta}_1$ sapmasızdır. $\longrightarrow E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$
 - 2. model tahminindeki $\tilde{\beta}_1$ sapmasızdır. $\longrightarrow E(\tilde{\beta}_1) = \beta_1$
 - $\tilde{\beta}_1$ sapmasız ve $\hat{\beta}_1$ 'e göre daha küçük varyanslı olduğundan 2. model, yani $\tilde{\beta}_1$, tercih edilir.
- Eğer $\beta_2 \neq 0$ ise,
 - 1. model tahminindeki $\hat{\beta}_1$ sapmasızdır. $\longrightarrow E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$
 - 2. model tahminindeki $\tilde{\beta}_1$ sapmalıdır. $\longrightarrow E(\tilde{\beta}_1) \neq \beta_1$
 - $\hat{\beta}_1$ sapmasız olduğundan ve gözlem sayısı n arttırılarak varyansı yeteri kadar küçüleceğinden 1. model, yani $\hat{\beta}_1$, tercih edilir.
- Kısacası sapmasızlık olmazsa olmaz şart iken varyans gözlem sayısı n arttırılarak düşürebilir.

Kaynaklar

Gujarati, D.N. (2009). *Basic Econometrics*. Tata McGraw-Hill Education.

Stock, J.H. ve M.W. Watson (2015). *Introduction to Econometrics*.

Tastan, H. (2020). *Lecture on Econometrics I. Personal Collection of H. Tastan*. Retrieved from Online.

Wooldridge, J.M. (2016). *Introductory Econometrics: A Modern Approach*. Nelson Education.

Ek Bilgiler

BDR.5: Sıfır Koşullu Ortalama Varsayımı

$$E(u|\mathbf{x}) = E(u) = 0$$

$$Cov(x, u) = 0, \quad Corr(x, u) = 0 \quad \text{ve} \quad E(xu) = 0$$

$$Cov(x, u) = E(xu) - E(x) \underbrace{E(u)}_{=0} = 0$$

$$= E(xu) = 0$$

Ek Bilgiler

ÇDR.5: Sıfır Koşullu Ortalama Varsayımı

$$E(u|\mathbf{x}) = E(u) = 0$$

$$Cov(x_j, u) = 0, \quad Corr(x_j, u) = 0 \quad \text{ve} \quad E(x_j u) = 0, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$$

$$Cov(x_j, u) = E(x_j u) - E(x_j) \underbrace{E(u)}_{=0} = 0$$

$$= E(x_j u) = 0$$

Ek Bilgiler

ÇDR.6: Otokorelasyon Olmaması

$$Cov(u_i, u_s | \mathbf{x}) = 0 \quad \text{ve} \quad Cov(u_i, u_s) = 0, \quad i \neq s$$

$$E(u_i u_s | \mathbf{x}) = 0 \quad \text{ve} \quad E(u_i u_s) = 0, \quad i \neq s$$

$$\begin{aligned} Cov(u_i, u_s | \mathbf{x}) &= E(u_i u_s | \mathbf{x}) - \underbrace{E(u_i | \mathbf{x})}_{=0} \underbrace{E(u_s | \mathbf{x})}_{=0} = 0 \\ &= E(u_i u_s | \mathbf{x}) = 0 \end{aligned}$$

Ek Bilgiler

ÇDR.7: Sabit Varyans (Homoscedasticity)

$$E(u^2|\mathbf{x}) = \sigma^2 \quad \text{ve} \quad E(u^2) = \sigma^2$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(u|\mathbf{x}) &= E(u^2|\mathbf{x}) - \underbrace{E(u|\mathbf{x})^2}_{=0} = \sigma^2 \\ &= E(u^2|\mathbf{x}) = \sigma^2 \end{aligned}$$

Ek Bilgiler

Anakütle Regresyon Fonksiyonu (ARF)

$$E(y|\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k \quad (\text{ARF})$$

$$\text{Var}(y|\mathbf{x}) = \sigma^2$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + u$$

$$E(y|\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + \underbrace{E(u|\mathbf{x})}_{=0}$$

$$E(y|\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k \quad (\text{ARF})$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + u$$

$$\text{Var}(y|\mathbf{x}) = \text{Var}(u|\mathbf{x})$$

$$\text{Var}(y|\mathbf{x}) = \sigma^2$$

Ek Bilgiler

Parametre Tahmincileri: 2 Bağımsız Değişken

β_0 kesim parametresinin tahmini $\hat{\beta}_0$:

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{x}_2$$

- $\hat{\beta}_0$ 'nın formülü

- SEKK birinci sıra koşullarından ya da örneklem moment koşullarından ilki (Slayt 31)
- İndeksli haldeki model denklemi
- Kalıntı \hat{u} 'nın denklemi

kullanılarak çıkarılabilir.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \hat{u}_i &= \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i) = 0 \\&= \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n \hat{\beta}_0 - \sum_{i=1}^n \hat{\beta}_1 x_{i1} - \sum_{i=1}^n \hat{\beta}_2 x_{i2} = 0 \\&= n\bar{y} - n\hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 n\bar{x}_1 - \hat{\beta}_2 n\bar{x}_2 = 0 \\&= \bar{y} - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \bar{x}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{x}_2 = 0\end{aligned}$$

Sonuç: $\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{x}_2$

Ek Bilgiler

Parametre Tahmincileri: k Bağımsız Değişken

β_0 kesim parametresinin tahmini $\hat{\beta}_0$ (1 tane var):

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{x}_2 - \cdots - \hat{\beta}_k \bar{x}_k$$

- $\hat{\beta}_0$ 'nın formülü

- SEKK birinci sıra koşullarından ya da örneklem moment koşullarından ilki (Slayt 31)
- İndeksli haldeki model denklemi
- Kalıntı \hat{u} 'nın denklemi

kullanılarak çıkarılabilir.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \hat{u}_i &= \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i) = 0 \\&= \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n \hat{\beta}_0 - \sum_{i=1}^n \hat{\beta}_1 x_{i1} - \sum_{i=1}^n \hat{\beta}_2 x_{i2} - \cdots - \sum_{i=1}^n \hat{\beta}_k x_{ik} = 0 \\&= n\bar{y} - n\hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 n\bar{x}_1 - \hat{\beta}_2 n\bar{x}_2 - \cdots - \hat{\beta}_k n\bar{x}_k = 0 \\&= \bar{y} - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \bar{x}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{x}_2 - \cdots - \hat{\beta}_k \bar{x}_k = 0\end{aligned}$$

Sonuç: $\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{x}_2 - \cdots - \hat{\beta}_k \bar{x}_k$

Ek Bilgiler

Tahmin Edilen Değerler ve Kalıntıların Cebirsel Özellikleri - 2

$$Cov(x_j, \hat{u}) = E(x_j \hat{u}) - \underbrace{E(x_{ij}) E(\hat{u}_i)}_{=0} = 0 \quad (1. \text{ Cebirsel Özellik})$$

$$= E(x_j \hat{u}) = 0$$

ya da

$$Cov(x_j, \hat{u}) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)(\hat{u}_i - \bar{\hat{u}})}{n - 1} = 0$$

$$Cov(x_j, \hat{u}) = \sum_{i=1}^n x_{ij} \underbrace{(\hat{u}_i - \bar{\hat{u}})}_{=0} = 0 \quad (1. \text{ Cebirsel Özellik})$$

$$= \sum_{i=1}^n x_{ij} \hat{u}_i = 0$$

Ek Bilgiler

Tahmin Edilen Değerler ve Kalıntıların Cebirsel Özellikleri - 3

$$\begin{aligned} Cov(\hat{y}, \hat{u}) &= Cov(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \cdots + \hat{\beta}_k x_k, \hat{u}) \\ &= \hat{\beta}_1 \underbrace{Cov(x_1, \hat{u})}_{=0} + \hat{\beta}_2 \underbrace{Cov(x_2, \hat{u})}_{=0} + \cdots + \hat{\beta}_k \underbrace{Cov(x_k, \hat{u})}_{=0} = 0 \quad (2. \text{ Cebirsel Öz.}) \\ &= E(\hat{y}\hat{u}) = 0 \quad (\text{Kovaryans formülü ve 1. Cebirsel Özellik}) \end{aligned}$$

ve

$$Cov(\hat{y}, \hat{u}) = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y}) (\hat{u}_i - \underbrace{\bar{\hat{u}}}_{=0}) = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y}) \hat{u}_i = 0 \quad (1. \text{ Cebirsel Özellik})$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^n \hat{y}_i \hat{u}_i - \bar{y} \underbrace{\sum_{i=1}^n \hat{u}_i}_{=0} = 0 \quad (1. \text{ Cebirsel Özellik}) \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^n \hat{y}_i \hat{u}_i = 0$$

Ek Bilgiler

SEKK Parametre Tahmincilerinin Varyansı

$\hat{\beta}_j$ 'lerin varyansları:

$$\text{Var}(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma^2}{SST_j(1 - R_j^2)}, \quad SST_j = \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)^2, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$$

- $\hat{\beta}_j$ 'lerin varyans formülünü çıkartmada işimizi kolaylaştırmak için 2 bağımsız değişkenli ÇDR modelini kullanacağız.

2 Bağımsız Değişkenli ÇDR Modeli

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + u_i \quad (\text{Model - İndeksli})$$

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} \quad (\text{ÖRF - İndeksli})$$

- 2 bağımsız değişkenli ÇDR modelinde, spesifik olarak $\hat{\beta}_1$ 'nin varyans formülünü çıkartacağız.
- Daha sonra bulduğumuz bu formülü k bağımsız değişkenli ÇDR modelindeki $\hat{\beta}_j$ 'lerin varyans formülünü çıkartmada kullanacağız.

Ek Bilgiler

2 Bağımsız Değişkenli ÇDR Modeli

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + u_i \quad (\text{Model - İndeksli})$$

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} \quad (\text{ÖRF - İndeksli})$$

1. Yardımcı Regresyon Tahmini

$$x_{i1} = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 x_{i2} + \hat{r}_{i1} \quad (\text{İndeksli})$$

$$\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} = 0 \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^n x_{i2} \hat{r}_{i1} = 0 \quad (\text{Cebirsel Özellikler})$$

$$\sum_{i=1}^n x_{i1} \hat{r}_{i1} = \sum_{i=1}^n (\hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 x_{i2} + \hat{r}_{i1}) \hat{r}_{i1} = \hat{\alpha}_0 \sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} + \hat{\alpha}_1 \sum_{i=1}^n x_{i2} \hat{r}_{i1} + \sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2$$

$$\sum_{i=1}^n x_{i1} \hat{r}_{i1} = \sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2 \quad (\text{Sonra Kullanılacak})$$

$$\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2 = SSR_1 = SST_1 (1 - R_1^2) \quad (R^2 \text{ Formülünden})$$

Ek Bilgiler

- $\hat{\beta}_1$ 'nin varyans formülü
 - $\hat{\beta}_1$ 'nin formülü (Slayt 39)
 - 2 bağımsız değişkenli ÇDR model denklemi (Slayt 105),
 - Otokorelasyon olmaması varsayımı, ÇDR.6 (Slayt 17),
 - Sabit varyans varsayımı, ÇDR.7 (Slayt 18),
 - Varyansın bir özelliği $\rightarrow Var(\sum a_i u_i) = \sum a_i^2 Var(u_i)$, burada a_i 'ler sabit sayılardır ve u_i 'ler ikili olarak ilişkisizdir.
 - R^2 formülü

kullanılarak çıkarılabilir.

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} y_i}{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2} = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} (\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + u_i)}{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\overbrace{\beta_0 \sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}}^{=0} + \beta_1 \overbrace{\sum_{i=1}^n x_{i1} \hat{r}_{i1}}^{\sum \hat{r}_{i1}^2} + \beta_2 \overbrace{\sum_{i=1}^n x_{i2} \hat{r}_{i1}}^{=0} + \sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} u_i}{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2} = \beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} u_i}{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2}$$

Ek Bilgiler

- Alternatif $\hat{\beta}_1$ formülü şimdi $\hat{\beta}_j$ için yazılabilir:

$$\hat{\beta}_1 = \beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} u_i}{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2} \longrightarrow \hat{\beta}_j = \beta_j + \frac{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{ij} u_i}{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{ij}^2}$$

- Şimdi, alternatif $\hat{\beta}_1$ formülünün tüm x 'lere (\mathbf{x}) göre koşullu varyansını alalım.

$$\begin{aligned} Var(\hat{\beta}_1 | \mathbf{x}) &= Var \left(\beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} u_i}{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2} \middle| \mathbf{x} \right) = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2 \right)^2} Var \left(\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} u_i | \mathbf{x} \right) \\ &= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2 \right)^2} \left(\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2 \underbrace{Var(u_i | \mathbf{x})}_{= \sigma^2 \text{ (ÇDR.7)}} \right) = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2 \right)^2} \sigma^2 \sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2 = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2} \end{aligned}$$

Ek Bilgiler

- $\hat{\beta}_1$ 'nin varyans formülü

$$Var(\hat{\beta}_1|\mathbf{x}) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2} = \frac{\sigma^2}{SST_1(1 - R_1^2)}$$

- $\hat{\beta}_1$ 'nin varyans formülü tüm x 'lere (\mathbf{x}) göre koşullu hesaplanmasına rağmen genelde koşulsuz olarak gösterilir:

$$Var(\hat{\beta}_1|\mathbf{x}) = \frac{\sigma^2}{SST_1(1 - R_1^2)} \quad \longrightarrow \quad Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{SST_1(1 - R_1^2)}$$

- $Var(\hat{\beta}_1)$ formülü şimdi $Var(\hat{\beta}_j)$ için yazılabilir:

$$Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{SST_1(1 - R_1^2)} \quad \longrightarrow \quad Var(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma^2}{SST_j(1 - R_j^2)}$$

Ek Bilgiler

SEKK Parametere Tahmincilerinin Sapmasızlığı

$$E(\hat{\beta}_0) = \beta_0$$

$$E(\hat{\beta}_j) = \beta_j, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$$

- $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_j$ 'lerin sapmasızlığını kanıtlamada işimizi kolaylaştırmak için 2 bağımsız değişkenli ÇDR modelini kullanacağız.

2 Bağımsız Değişkenli ÇDR Modeli

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + u_i \quad (\text{Model - İndeksli})$$

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} \quad (\text{ÖRF - İndeksli})$$

- 2 bağımsız değişkenli ÇDR modelinde, spesifik olarak $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$ 'nin sapmasızlığını kanıtlayacağız.
- Böylelikle, k bağımsız değişkenli ÇDR modelindeki $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_j$ 'lerin sapmasızlığını kanıtlamış olacağız.

Ek Bilgiler

- $\hat{\beta}_1$ 'nin sapmasızlığı
 - $\hat{\beta}_1$ 'nin Slayt 105'de gösterilen alternatif formülünün tüm x 'lere (\mathbf{x}) göre koşullu beklenen değerini alıp
 - Sıfır koşullu ortalama varsayımı, ÇDR.5 (Slayt 16), kullanılarak gösterilebilir.

$$\hat{\beta}_1 = \beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} u_i}{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2} \quad (\hat{\beta}_1 \text{'nin Alternatif Formülü})$$

$$E(\hat{\beta}_1 | \mathbf{x}) = E \left(\beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} u_i}{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2} \middle| \mathbf{x} \right) = \beta_1 + \frac{\left(\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} \overbrace{E(u_i | \mathbf{x})}^{=0} \right)}{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2} = \beta_1$$

$$E(\hat{\beta}_1 | \mathbf{x}) = \beta_1$$

Ek Bilgiler

- $\hat{\beta}_0$ 'nın sapmasızlığı
 - $\hat{\beta}_0$ 'nın Slayt 33'deki formülünün tüm x 'lere (\mathbf{x}) göre koşullu beklenen değerini alıp
 - Model denkleminin toplamaları alınarak elde edilen denklem

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + u_i \quad \longrightarrow \quad \sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i=1}^n (\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + u_i)$$

$$n\bar{y} = n\beta_0 + \beta_1 n\bar{x}_1 + \beta_2 n\bar{x}_2$$

$$\bar{y} = \beta_0 + \beta_1 \bar{x}_1 + \beta_2 \bar{x}_2$$

kullanılarak gösterilebilir.

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{x}_2 \quad (\text{Slayt 33})$$

$$E(\hat{\beta}_0 | \mathbf{x}) = E(\bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{x}_2 | \mathbf{x})$$

$$E(\hat{\beta}_0 | \mathbf{x}) = \bar{y} - \underbrace{E(\hat{\beta}_1 | \mathbf{x})}_{=\beta_1} \bar{x}_1 - \underbrace{E(\hat{\beta}_2 | \mathbf{x})}_{=\beta_2} \bar{x}_2$$

$$E(\hat{\beta}_0 | \mathbf{x}) = \bar{y} - \beta_1 \bar{x}_1 - \beta_2 \bar{x}_2$$

$$E(\hat{\beta}_0 | \mathbf{x}) = \beta_0$$

Ek Bilgiler

- $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$ 'nin sapmasızlığı tüm x 'lere (\mathbf{x}) göre koşullu hesaplanmasına rağmen genelde koşulsuz olarak gösterilir:

$$E(\hat{\beta}_0|\mathbf{x}) = \beta_0 \quad \longrightarrow \quad E(\hat{\beta}_0) = \beta_0$$

$$E(\hat{\beta}_1|\mathbf{x}) = \beta_1 \quad \longrightarrow \quad E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$$

- $\hat{\beta}_1$ 'nin sapmasızlığı şimdi $\hat{\beta}_j$ için yazılabilir:

$$E(\hat{\beta}_1) = \beta_1 \quad \longrightarrow \quad E(\hat{\beta}_j) = \beta_j, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$$

SEKK Parametere Tahmincilerinin Sapmasızlığı

$$E(\hat{\beta}_0) = \beta_0$$

$$E(\hat{\beta}_j) = \beta_j, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$$

Ek Bilgiler

Teorem: SEKK Parametere Tahmincilerinin Etkinliği

ÇDR.6 - ÇDR.7 varsayımları altında SEKK parametre tahmincileri etkindir.

$$\text{Var}(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma^2}{SST_j(1 - R_j^2)}, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$$

- $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_j$ 'lerin etkinliğini kanıtlamada işimizi kolaylaştırmak için 2 bağımsız değişkenli ÇDR modelini kullanacağız.

2 Bağımsız Değişkenli ÇDR Modeli

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + u_i \quad (\text{Model - İndeksli})$$

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} \quad (\text{ÖRF - İndeksli})$$

- 2 bağımsız değişkenli ÇDR modelinde, spesifik olarak $\hat{\beta}_1$ 'nin etkinliğini kanıtlayacağız.
- Böylelikle, k bağımsız değişkenli ÇDR modelindeki $\hat{\beta}_j$ 'lerin etkinliğini kanıtlamış olacağız.

Ek Bilgiler

- $\hat{\beta}_1$ 'nin etkinliğini kanıtlayabilmek için β_1 'in herhangi bir doğrusal sapmasız tahmincisi olan $\tilde{\beta}_1$ 'nin $\hat{\beta}_1$ 'e göre daha büyük varyanslı olduğunun gösterilmesi gerekir. $\rightarrow Var(\tilde{\beta}_1) \geq Var(\hat{\beta}_1)$
- Bu nedenle $\hat{\beta}_1$ ve $\tilde{\beta}_1$ 'nin varyanslarının hesaplanarak karşılaştırılması gereklidir.
- $\hat{\beta}_1$ 'nin tüm x 'lere (\mathbf{x}) göre koşullu varyansı (bakınız Slayt 105)

$$Var(\hat{\beta}_1|\mathbf{x}) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2} = \frac{\sigma^2}{SST_1(1 - R_1^2)}$$

- $\tilde{\beta}_1$ 'nin tüm x 'lere (\mathbf{x}) göre koşullu varyansı
 - $\hat{\beta}_1$ 'nin Slayt 105'de gösterilen alternatif formülü önce $\tilde{\beta}_1$ için yazılıp tüm x 'lere (\mathbf{x}) göre koşullu varyansını alındıktan sonra
 - Varyansın bir özelliği $\rightarrow Var(\sum a_i u_i) = \sum a_i^2 Var(u_i)$, burada a_i 'ler sabit sayılardır ve u_i 'ler ikili olarak ilişkisizdir.

kullanılarak hesaplanabilir.

Ek Bilgiler

$$\hat{\beta}_1 = \beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} u_i}{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2} \longrightarrow \tilde{\beta}_1 = \beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} u_i}{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2} \quad (\hat{\beta}_1 \text{ ve } \tilde{\beta}_1 \text{'nin Alternatif Formülü})$$

$$\tilde{\beta}_1 = \beta_1 + \sum_{i=1}^n w_{i1} u_i, \quad \text{burada} \quad w_{i1} = \frac{\hat{r}_{i1}}{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2} \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^n w_{i1} \hat{r}_{i1} = 1$$

$$\begin{aligned} Var(\tilde{\beta}_1 | \mathbf{x}) &= Var\left(\beta_1 + \sum_{i=1}^n w_{i1} u_i | \mathbf{x}\right) = Var\left(\sum_{i=1}^n w_{i1} u_i | \mathbf{x}\right) \\ &= \sum_{i=1}^n w_{i1}^2 \underbrace{Var(u_i | \mathbf{x})}_{= \sigma^2 \text{ (ÇDR.7)}} \end{aligned}$$

$$Var(\tilde{\beta}_1 | \mathbf{x}) = \sigma^2 \sum_{i=1}^n w_{i1}^2 \quad (\tilde{\beta}_1 \text{'nin Varyansı})$$

Ek Bilgiler

- Şimdi, ÇDR.1 - ÇDR.7 varsayımları altında $Var(\tilde{\beta}_1|\mathbf{x})$ ve $Var(\hat{\beta}_1|\mathbf{x})$ arasındaki farkı inceleyelim.

$$\begin{aligned} Var(\tilde{\beta}_1|\mathbf{x}) - Var(\hat{\beta}_1|\mathbf{x}) &= \sigma^2 \sum_{i=1}^n w_{i1}^2 - \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2} = \sigma^2 \left(\sum_{i=1}^n w_{i1}^2 - \frac{1}{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2} \right) \\ &= \sigma^2 \left(\sum_{i=1}^n w_{i1}^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n w_{i1} \hat{r}_{i1} \right)^2}{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2} \right) \quad (\sum w_{i1} \hat{r}_{i1} = 1) \\ &= \sigma^2 \sum_{i=1}^n (w_{i1} - \hat{\gamma}_1 \hat{r}_{i1})^2, \quad \text{burada} \quad \hat{\gamma}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n w_{i1} \hat{r}_{i1}}{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2} \end{aligned}$$

Ek Bilgiler

$$Var(\tilde{\beta}_1|\mathbf{x}) - Var(\hat{\beta}_1|\mathbf{x}) = \sigma^2 \sum_{i=1}^n (w_{i1} - \hat{\gamma}_1 \hat{r}_{i1})^2, \quad \text{burada} \quad \hat{\gamma}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n w_{i1} \hat{r}_{i1}}{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2}$$

- σ^2 her zaman pozitif olan bir değerdir.
- $\sum_{i=1}^n (w_{i1} - \hat{\gamma}_1 \hat{r}_{i1})^2$ değeri, w_{i1} 'in \hat{r}_{i1} üzerine uygulanan regresyondan elde edilen kalıntı kareleri toplamıdır ve her zaman pozitif olan bir değerdir.
 - $\hat{\gamma}_1$ ise aynı regresyondan elde edilen eğim parametresi tahmincisidir.
- Bu nedenle $Var(\tilde{\beta}_1) \geq Var(\hat{\beta}_1)$ 'dır.
- $\hat{\beta}_1$ doğrusal sapmasız tahminciler içinde en küçük varyansa sahiptir, yani etkindir.
- $\hat{\beta}_1$ 'nin etkinliği şimdi $\hat{\beta}_j$ için yazılabilir:

Teorem: SEKK Parametere Tahmincilerinin Etkinliği

ÇDR.6 - ÇDR.7 varsayımları altında SEKK parametre tahmincileri etkindir.

$$Var(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma^2}{SST_j(1 - R_j^2)}, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$$