Basit Doğrusal Regresyon Modeli

Ekonometri I

Dr. Ömer Kara[1]

[1]İktisat Bölümü
Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

3 Kasım 2021

Taslak

Motivasyon

Bu bölümde, sırasıyla aşağıdaki konular incelenecektir.

- Basit Doğrusal Regresyon modeli
- Basit Doğrusal Regresyon modelinde Gauss–Markov varsayımları
- Basit Doğrusal Regresyon modelinin tahminine ait yöntemler
- Sıradan En Küçük Kareler parametre tahmincileri
- Determinasyon Katsayısı
- Sıradan En Küçük Kareler parametre tahmincilerinin özellikleri
- Basit Doğrusal Regresyon modelinde Gauss–Markov teoremi

Motivasyon

- Basit Doğrusal Regresyon (BDR) iki farklı değişken arasındaki ilişkiyi incelemek için kullanılır.
- Daha sonra göreceğimiz nedenlerden dolayı, ugulamalı analizde genel bir araç olarak kullanıldığında BDR modelinin kısıtları vardır.
- Buna rağmen, BDR modelinin nasıl yorumlanacağını öğrenmek, sonraki bölümlerde yapacağımız Çoklu Doğrusal Regresyon (ÇDR) modelini temelden anlamak için üzerinde durulması gereken bir konudur.
- BDR modelinin kısıtları ve ÇDR modeli hakkındaki detaylı bilgi "Ekonometri I - Çoklu Doğrusal Regresyon Modeli: Tahmin" konusunda bulunabilir.

Basit Doğrusal Regresyon Modelinin Mantığı

- Uygulamalı ekonometrik analizlerin çoğu şu önermeyle başlar:

Temel Ekonometrik Önerme

y ve x, bir anakütleyi temsil eden iki rassal değişkendir ve biz, "y'yi x cinsinden açıklamak" veya "y'nin x'teki değişikliklerle nasıl değiştiğini incelemekle" ilgileniyoruz.

- "Ekonometri I - Matematik ve İstatistik Gözden Geçirme" konusunda y ve x arasındaki **kesin ilişkiyi** gösteren fonksiyonları incelemiştik.
- Fakat sosyal bilimlerde iki değişken arasındaki ilişki hiçbir zaman kesin değildir.
- Bu nedenle, "y'yi x cinsinden açıklayacak" bir model yazarken üç sorun vardır.
  1. İki değişken arasında hiçbir zaman kesin bir ilişki olmadığına göre, **diğer faktörler**in y'yi etkilemesine nasıl izin verebiliriz?
  2. y ve x arasındaki ilişkiyi belirten **fonksiyonel form** nedir?
  3. y ve x arasında bir **ceteris paribus** ilişkisi yakaladığımızdan nasıl emin olabiliriz?
- Bu sorunları, y'den x'e ilişkin bir denklem yazarak Slayt 6'deki gibi çözebiliriz.

Basit Doğrusal Regresyon Modeli

Model

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + u \qquad \text{(İndekssiz)}$$

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_1 + u_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad \text{(İndeksli)}$$

- k: bağımsız değişken sayısı $\longrightarrow k = 1$
- $k + 1$: bilinmeyen sabit β parametre sayısı $\longrightarrow \beta_0, \beta_1$
- n: gözlem (veri) sayısı $\longrightarrow i = 1, 2, \ldots, n$ ve $s = 1, 2, \ldots, n, \quad i \neq s$
- y: bağımlı değişken
- x: bağımsız değişken
- u: Hata terimi, x dışında modele dahil edilmemiş tüm faktörlerin ortak etkisi
- β_0: Kesim parametresi (1 tane var), sabit terim olarak da adlandırılır
- β_1: x bağımsız değişkeni için eğim parametresi (1 tane var)
- $\mathbf{x}$: Tüm bağımsız değişkenlerin temsili $\longrightarrow \mathbf{x} = \{x\}$
- Yukarıdaki model bazen **anakütle modeli** olarak da bilinir.

Basit Doğrusal Regresyon Modeli

Model

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + u \qquad \text{(İndekssiz)}$$

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad \text{(İndeksli)}$$

- u: Bağımlı değişken y üzerinde etkili olan bağımsız değişken x dışındaki diğer gözlenemeyen faktörleri temsil eder.
- β_0: $x = 0$ iken y'nin alacağı değeri gösterir.
- β_1: y'yi etkileyen diğer tüm faktörler, yani u'da içerilen faktörler, sabitken ($\Delta u = 0$), x'deki değişmenin y'de yaratacağı yalın etkiyi/değişmeyi gösterir.

$$\Delta y = \beta_1 \Delta x + \Delta u$$

$$\Delta y = \beta_1 \Delta x \quad \text{eğer} \quad \Delta u = 0$$

  - Parametreleri yorumlarken fonksiyonel forma dikkat edilmelidir.
  - Düzey-Düzey, Log-Log, Log-Düzey ve Düzey-Log fonksiyonel formlarındaki yorumlama farklarını hatırlayın!
- $\Delta u = 0$ olduğunda, u'nun içinde bulunan tüm gözlenemeyen faktörlerin ayrı ayrı sabit olduğu değil, ortalama olarak değişimin olmadığı kastedilir. Yani, negatif ve pozitif işaretli u'lar birbirini götürdüğünde ortalama olarak değişim olmayacaktır.

Basit Doğrusal Regresyon Modeli

- Regresyon modellerinde değişkenler için kullanılan terminoloji aşağıda verilmiştir.

Tablo 1: Değişkenler Terminolojisi

y	x
Bağımlı Değişken	Bağımsız Değişken
Açıklanan Değişken	Açıklayıcı Değişken
Tepki Değişkeni	Kontrol Değişkeni
Tahmin Edilen Değişken	Tahmin Eden Değişken
Regresand	Regressor

Basit Doğrusal Regresyon Modeli - Örnek 1

Tarımsal Çıktı vs. Gübre Miktarı Modeli

Gübre miktarının üretilen buğday miktarı üzerindeki yalın etkisini araştırmak istediğimizi düşünelim. Yani, kullanılan gübre miktarının üretilen buğday miktarı üzerindeki etkisini ayrıştırmak istiyoruz.

$$output = \beta_0 + \beta_1 fert + u$$

$output$: buğday çıktı miktarı; $fert$: gübre miktarı

- **Eğim Parametresi** β_1: Ceteris paribus gübre miktarındaki 1 birimlik değişimin, çıktı miktarında meydana getireceği değişimi belirtir.

$$\Delta output = \beta_1 \Delta fert + \Delta u$$

$$\Delta output = \beta_1 \Delta fert \quad \text{eğer} \quad \Delta u = 0$$

- **Rassal Hata Terimi** u: Çıktı miktarını etkileyen, gübre miktarı dışındaki yağmur miktarı ve toprağın kalitesi gibi tüm faktörlerin ortak etkisini gösterir. Ceteris Parıbus $\Leftrightarrow$ Diğer tüm faktörlerin sabit tutulması $\Leftrightarrow$ $\Delta u = 0$

Basit Doğrusal Regresyon Modeli - Örnek 2

Ücret vs. Eğitim Modeli

Bir çalışanın fazladan 1 yıl eğitim aldığında ücretinin ne kadar arttığını araştırmak istediğimizi düşünelim. Yani, eğitimin ücret üzerindeki etkisini ayrıştırmak istiyoruz.

$$wage = \beta_0 + \beta_1 educ + u$$

$wage$: saat başına ücret; $educ$: eğitim düzeyi (yıl)

- **Eğim Parametresi** β_1: Ceteris paribus eğitim düzeyindeki 1 birimlik değişimin, saat başına ücretinde meydana getireceği değişimi belirtir.

$$\Delta wage = \beta_1 \Delta educ + \Delta u$$

$$\Delta wage = \beta_1 \Delta educ \quad \text{eğer} \quad \Delta u = 0$$

- **Rassal Hata Terimi** u: Saat başına ücreti etkileyen, eğitim düzeyi dışındaki tecrübe, kıdem, doğuştan gelen yetenek, cinsiyet ve yaş gibi tüm faktörlerin ortak etkisini gösterir.
  Ceteris Parıbus $\Leftrightarrow$ Diğer tüm faktörlerin sabit tutulması $\Leftrightarrow$ $\Delta u = 0$

Doğrusal Model

- Regresyon modelinin doğrusal olması şu anlama gelir: x'deki değişmenin y'de meydana getireceği etki, x'in başlangıç değeri ne olursa olsun aynıdır, yani sabittir.
- Uygulamadaki bu sabit etki varsayımı çoğu zaman gerçeklere uymaz. Örneğin:
  - Ölçeğe göre artan ya da azalan getiri doğrusal regresyon modelleriyle açıklanamaz.
  - Slayt 10'de verilen ücret vs. eğitim modelinde, ilave bir yıl eğitimin etkisi önceki eğitim düzey(ler)ine göre aynıdır, fakat gerçekte daha fazla olması beklenir.
  - Tecrübenin ücret üzerindeki etkisini araştıran bir modelde ise gerşekte tecrübe düzeyinin ücretler üzerinde önce artan sonra azalan bir etkiye sahip olması beklenir.
- Doğrusal modellerin bu kısıtına rağmen Ekonometri Teorisi'nde basitliği ve kolay anlaşılması nedeniyle sıklıkla kullanılır.
- Sabit olmayan etkilerin nasıl modelleneceğini daha sonra göreceğiz.

Gauss–Markov Varsayımları

BDR.1: Gözlem Sayısı

Gözlem sayısı n tahmin edilecek anakütle parametre sayısından büyük ya da en azından eşit olmalıdır.

$$n \geq k + 1$$

BDR.2: Parametrelerde Doğrusallık

Model parametrelerde doğrusaldır.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + u \; ✔$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x^2 + u \; ✔$$

$$y = \beta_0 + \beta_1^2 x + u \; ✘$$

$$y = \beta_0 + \sqrt{\beta_1} x + u \; ✘$$

Detay

Gauss–Markov Varsayımları

BDR.3: Rassallık

Tahminde kullanılan n tane gözlem ilgili anakütleden rassal örnekleme yoluyla seçilmiştir. Yani gözlemler stokhastiktir (rassal), yani deterministik (kesin) değildir.

$$\{(x_i, y_i) : i = 1, 2, \ldots, n\}$$

BDR.4: Bağımsız Değişkenin Sabit Olmaması

Örneklemde (ve bu nedenle anakütlede) bağımsız değişken kendi içinde sabit değildir (yeterli değişenlik vardır).

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 > 0$$

Detay

Gauss–Markov Varsayımları

BDR.5: Sıfır Koşullu Ortalama

Bağımsız değişkenin herhangi bir değeri verildiğinde, u hata teriminin beklenen değeri sıfıra eşittir.

$$E(u|x) = E(u|\mathbf{x}) = 0$$

Detay

- Yinelenen Beklentiler Kanunu ve koşullu beklenen değerin 5. özelliği kullanılarak Sıfır Koşullu Ortalama varsayımı yeniden tanımlanabilir.

Ek Bilgi

BDR.5: Sıfır Koşullu Ortalama

$$E(u|\mathbf{x}) = E(u) = 0$$

$$Cov(x,u) = 0, \quad Corr(x,u) = 0 \quad \text{ve} \quad E(xu) = 0$$

Sonuç: u ve x ortalama bağımsızdır. Yani u ve x doğrusal olarak ilişkisizdir.

Ek Bilgi

Gauss–Markov Varsayımları

BDR.6: Otokorelasyon Olmaması

Hata terimleri arasında otokorelasyon yoktur.

$$Corr(u_i, u_s|x) = 0, \quad i \neq s$$

$$Corr(u_i, u_s|\mathbf{x}) = 0, \quad i \neq s$$

$$Corr(u_i, u_s) = 0, \quad i \neq s$$

- BDR.6 varsayımı, yatay-kesit verilerindeki rassallık varsayımı (BDR.3) nedeniyle aslında otomatik olarak sağlanır. Fakat çok ekstrem durumlarda gereklidir ve bu nedenle diğer birçok kaynaktan farklı olarak eklenmiştir.
- BDR.6 varsayımı aşağıdaki eşitlikleri de sağlar.

BDR.6: Otokorelasyon Olmaması

$$Cov(u_i, u_s|\mathbf{x}) = 0 \quad \text{ve} \quad Cov(u_i, u_s) = 0, \quad i \neq s$$

$$E(u_i u_s|\mathbf{x}) = 0 \quad \text{ve} \quad E(u_i u_s) = 0, \quad i \neq s$$

Ek Bilgi

Gauss–Markov Varsayımları

BDR.7: Sabit Varyans (Homoscedasticity)

u hata teriminin bağımsız değişken x'e göre koşullu varyansı sabittir.

$$Var(u|x) = \sigma^2$$

$$Var(u|\mathbf{x}) = \sigma^2$$

$$Var(u) = \sigma^2$$

Detay

- BDR.7 varsayımı aşağıdaki eşitlikleri de sağlar.

BDR.7: Sabit Varyans (Homoscedasticity)

$$E(u^2|\mathbf{x}) = \sigma^2 \quad \text{ve} \quad E(u^2) = \sigma^2$$

Ek Bilgi

- σ **regresyonun standart sapması**dır (bilinmiyor, bu nedenle tahmin edilecek).

Gauss–Markov Varsayımları

- Yukarıda verilen **Gauss–Markov Varsayımları** yatay-kesit verisi ile yapılan regresyon için geçerli varsayımlardır.
- Zaman serileri ile yapılan regresyonlarda bu varsayımların değiştirilmesi gerekir.
- Gauss–Markov Varsayımları, **BDR Varsayımları** olarak da anılır.
- Bazı BDR Varsayımlarının detayı ilerleyen slaytlarda konu akışı içinde verilmiştir.
- Gauss–Markov Varsayımları daha sonra **Gauss–Markov Teoremi**'ni oluşturmada kullanılacaktır.
- Gauss–Markov Teoremi ise BDR modelinin **Sıradan En Küçük Kareler Yöntemi** ya da **Momentler Yöntemi** ile tahmini için teorik dayanak sağlamada kullanılacaktır. Bakınız Slayt **??**.

Anakütle Regresyon Fonksiyonu

- **Anakütle Regresyon Fonksiyonu (ARF)**, BDR.5 varsayımı altında, bağımlı değişken y'nin bağımsız değişken x'e göre koşullu ortalamasıdır.
- ARF tektir ve bilinmez.

Anakütle Regresyon Fonksiyonu (ARF)

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + u \qquad \text{(Model)}$$

$$E(y|x) = \beta_0 + \beta_1 x \qquad \text{(ARF - İndekssiz)}$$

$$E(y|\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 x \qquad \text{(ARF - İndekssiz)}$$

$$E(y_i|\mathbf{x}_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i \qquad \text{(ARF - İndeksli)}$$

Anakütle Regresyon Fonksiyonu

- BDR.5 ve BDR.7 varsayımları altında bağımlı değişken y'nin bağımsız değişken x'e göre koşullu dağılımı aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

y'nin x'e Göre Koşullu Dağılımı

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + u \qquad \text{(Model)}$$

$$E(y|\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 x \qquad \text{(ARF)}$$

$$Var(y|\mathbf{x}) = \sigma^2$$

$$y|\mathbf{x} \sim (\underbrace{\beta_0 + \beta_1 x}_{\text{Ortalama}}, \underbrace{\sigma^2}_{\text{Varyans}}) \qquad (y|\mathbf{x}\text{'in dağılımı})$$

Ek Bilgi

Örneklem Regresyon Fonksiyonu: Amaç

- BDR tahminindeki asıl amacımız:
  - Öncelikle, iktisat teorisine göre model oluşturmak.
  - Sonra, Gauss–Markov varsayımları kullanarak ARF'yi oluşturmak.
  - Son olarak, ARF'yi rassal örnekleme yoluyla seçtiğimiz belli sayıdaki veriyi kullanarak tahmin etmektir.
- ARF'nin tahmini ise **Örneklem Regresyon Fonksiyonu**'dur ve bu tahmin örneklemden örnekleme değişir.

Model

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + u$$

Anakütle Regresyon Fonksiyonu (ARF)

$$E(y|\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 x$$

Örneklem Regresyon Fonksiyonu (ÖRF)

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$$

Örneklem Regresyon Fonksiyonu: Amaç

Model

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + u \qquad \text{(İndekssiz)}$$

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i \qquad \text{(İndeksli)}$$

Anakütle Regresyon Fonksiyonu (ARF)

$$E(y|\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 x \qquad \text{(İndekssiz)}$$

$$E(y_i|\mathbf{x}_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i \qquad \text{(İndeksli)}$$

Örneklem Regresyon Fonksiyonu (ÖRF)

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x \qquad \text{(İndekssiz)}$$

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i \qquad \text{(İndeksli)}$$

Örneklem Regresyon Fonksiyonu

Örneklem Regresyon Fonksiyonu (ÖRF)

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x \qquad \text{(İndekssiz)}$$

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i \qquad \text{(İndeksli)}$$

$$\underbrace{y_i}_{\text{Gözlenen Değer}} = \underbrace{\hat{y}_i}_{\text{Tahmin Edilen Değer}} + \underbrace{\hat{u}_i}_{\substack{\text{Kalıntı (Artık)} \\ \text{Rassal Değil (Deterministik)}}}$$

- $\hat{y}_i$: y_i bağımlı değişkeninin tahmini
- Paramete tahmincileri/tahmin edicileri örneklemden örnekleme değişir, yani rassaldır.
  - $\hat{\beta}_0$: β_0 kesim parametresinin tahmini (1 tane var)
  - $\hat{\beta}_1$: β_1 eğim parametresinin tahmini (1 tane var)
- $\hat{u}_i$: Kalıntı (artık) olarak adlandırılır. Gözlenen değer y_i ile tahmin edilen değer $\hat{y}_i$ arasındakı farkı belirtir. Rassal değildir, tahmin sırasında hesaplanır. Hata terimi u_i'nun örneklem analoğu olarak yorumlanabilir fakat kesinlikle aynı şeyler değildir.

Örneklem Regresyon Fonksiyonu

- Model, ARF ve ÖRF denklemleri arasında dikkat edilmesi gereken farklar vardır.

Model, ARF ve ÖRF

$$\underbrace{y_i}_{\text{Gözlenen Değer}} = \underbrace{\beta_0 + \beta_1 x_i}_{\substack{E(y_i|\mathbf{x}_i) \\ \text{(Sistemetik Kısım)}}} + \underbrace{u_i}_{\substack{\text{Rassal Hata Terimi} \\ \text{(Sistematik Olmayan Kısım)}}} \qquad \text{(Model)}$$

$$E(y_i|\mathbf{x}_i) = \underbrace{\beta_0 + \beta_1 x_i}_{\text{Sistemetik Kısım}} \qquad \text{(ARF)}$$

$$\underbrace{\hat{y}_i}_{\text{Tahmin Edilen Değer}} = \underbrace{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i}_{\text{Sistemetik Kısmın Tahmini}} \qquad \text{(ÖRF)}$$

$$\underbrace{y_i}_{\text{Gözlenen Değer}} = \underbrace{\hat{y}_i}_{\text{Tahmin Edilen Değer}} + \underbrace{\hat{u}_i}_{\substack{\text{Kalıntı (Artık)} \\ \text{Rassal Değil (Deterministik)}}}$$

Örneklem Regresyon Fonksiyonu: Tahmin Yöntemleri

Model, ARF ve ÖRF

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + u \qquad \text{(Model)}$$

$$E(y|\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 x \qquad \text{(ARF)}$$

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x \qquad \text{(ÖRF)}$$

- Örneklem Regresyon Fonksiyonu (ÖRF), iki yöntemle tahmin edilebilir.
  - Sıradan En Küçük Kareler (SEKK) Yöntemi
  - Momentler Yöntemi
- İki yöntem de aynı tahmin sonuçlarını verir.

Sıradan En Küçük Kareler Yöntemi

- **Sıradan En Küçük Kareler Yöntemi**, kalıntı kareleri toplamını (SSR) en küçük yapan parametre tahmincilerini hesaplamaya çalışır.

Örneklem Regresyon Fonksiyonu (ÖRF)

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$$

Gözlenen Değer, Tahmin Edilen Değer ve Kalıntı

$$y_i = \hat{y}_i + \hat{u}_i \quad \longrightarrow \quad \hat{u}_i = y_i - \hat{y}_i$$

SEKK Amaç Fonksiyonu

$$\min_{\hat{\beta}_0,\,\hat{\beta}_1} SSR = \min_{\hat{\beta}_0,\,\hat{\beta}_1} \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2 = \min_{\hat{\beta}_0,\,\hat{\beta}_1} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i)^2$$

Sıradan En Küçük Kareler Yöntemi

SEKK Birinci Sıra Koşulları

$$\frac{\partial SSR}{\partial \hat{\beta}_0} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i) \quad = 0$$

$$\frac{\partial SSR}{\partial \hat{\beta}_1} = -2\sum_{i=1}^{n}x_i(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i) = 0$$

Sıradan En Küçük Kareler Yöntemi

SEKK Birinci Sıra Koşulları

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i) = 0 \quad \longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i) = 0 \quad \longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n}x_i\hat{u}_i = 0$$

- Birinci sıra koşullarından elde edilen $k+1$ tane denklemin çözümünden parametre tahmincileri $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$ (toplamda $k+1=2$ tane) bulunur.

Momentler Yöntemi

- Anakütle moment koşulları BDR.5 varsayımı kullanılarak yazılabilir.
- Daha sonra anakütle moment koşullarını kullanarak örneklem moment koşulları elde edilebilir.

BDR.5: Sıfır Koşullu Ortalama

$$E(u|\mathbf{x}) = E(u) = 0$$

$$Cov(x,u) = 0, \quad Corr(x,u) = 0 \quad \text{ve} \quad E(xu) = 0$$

Sonuç: u ve x ortalama bağımsızdır. Yani u ve x doğrusal olarak ilişkisizdir.

Momentler Yöntemi

Anakütle Moment Koşulları ve Örneklem Moment Koşulları

$$\overbrace{E(u) = 0}^{\text{Anakütle}} \longrightarrow \overbrace{\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i = 0}^{\text{Örneklem}}$$

$$E(xu) = 0 \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \hat{u}_i = 0$$

Momentler Yöntemi

- Örneklem moment koşullarından elde edilen $k + 1$ tane denklemin çözümünden parametre tahmincileri $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$ (toplamda $k + 1 = 2$ tane) bulunur.
- SEKK birinci sıra koşulları ve örneklem moment koşulları aslında aynı denklemler kümesini verir.
- Bu nedenle, SEKK Yöntemi ve **Momentler Yöntemi** ile BDR modeli tahmin edildiğinde aynı sonuçlara ulaşılır.
- Genellikle kullanılan yöntem SEKK'dır. Bu nedenle parametre tahmincileri $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$ genellikle **SEKK parametre tahmincileri** ya da **SEKK tahmincileri** olarak adlandırılır.
- Bu yöntemlerin tek çözüm vermesi için BDR.4 (Bağımsız Değişkenin Sabit Olmaması) varsayımının sağlanması gereklidir. Bakınız Slayt 13.

SEKK Parametre Tahmincileri

Ana Model

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i \qquad \text{(Model - İndeksli)}$$

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i \qquad \text{(ÖRF - İndeksli)}$$

- β_0 kesim parametresinin tahmini $\hat{\beta}_0$:

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

▸ Ek Bilgi

- β_1 eğim parametresinin tahmini, ya da x'in eğim parametresinin tahmincisi, $\hat{\beta}_1$:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

▸ Ek Bilgi 1

▸ Ek Bilgi 2

Kaynaklar

Gujarati, D.N. (2009). *Basic Econometrics*. Tata McGraw-Hill Education.
Stock, J.H. ve M.W. Watson (2015). *Introduction to Econometrics*.
Tastan, H. (2020). *Lecture on Econometrics I. Personal Collection of H. Tastan*. Retrieved from Online.
Wooldridge, J.M. (2016). *Introductory Econometrics: A Modern Approach*. Nelson Education.

Ek Bilgiler

BDR.5: Sıfır Koşullu Ortalama

$$E(u|\mathbf{x}) = 0$$

- Daha önce gördüğümüz Yinelenen Beklentiler Kanunu'nu hatırlayalım.

Yinelenen Beklentiler Kanunu

$$E[E(u|\mathbf{x})] = E(u)$$

Ek Bilgiler

- Yinelenen Beklentiler Kanunu kullanılarak BDR.5 varsayımı yeniden tanımlanabilir.

$$\begin{aligned} E[\underbrace{E(u|\mathbf{x})}_{=0}] &= E(u) \\ E[0] &= E(u) \\ 0 &= E(u) \end{aligned}$$

BDR.5: Sıfır Koşullu Ortalama

$$E(u|\mathbf{x}) = E(u) = 0$$

Yani, hata terimi u'nun bağımsız değişken x'e göre koşullu ve koşulsuz ortalaması sıfırdır.

Ek Bilgiler

- Koşullu beklenen değerin 5. özelliğini kullanarak u ve x arasındaki ilişki hakkında daha fazla yorumda bulunabiliriz.

Koşullu Beklenen Değer: Özellik 5

$$E(u|\mathbf{x}) = E(u) \quad \text{ise} \quad Cov(x,u) = 0 \quad \text{ve} \quad Corr(x,u) = 0$$

Yani, bağımsız değişken x'in her doğrusal fonksiyonu hata terimi u ile ilişkisizdir.

BDR.5: Sıfır Koşullu Ortalama

$$E(u|\mathbf{x}) = E(u) = 0$$

$$Cov(x,u) = 0, \quad Corr(x,u) = 0 \quad \text{ve} \quad E(xu) = 0$$

Sonuç: u ve x ortalama bağımsızdır. Yani u ve x doğrusal olarak ilişkisizdir.

Sunuma Geri Dön

Ek Bilgiler

BDR.5: Sıfır Koşullu Ortalama Varsayımı

$$E(u|\mathbf{x}) = E(u) = 0$$

$$Cov(x,u) = 0, \quad Corr(x,u) = 0 \quad \text{ve} \quad E(xu) = 0$$

$$Cov(x,u) = E(xu) - E(x)\underbrace{E(u)}_{=0} = 0$$

$$= E(xu) = 0$$

Sunuma Geri Dön

Ek Bilgiler

BDR.6: Otokorelasyon Olmaması

$$Cov(u_i, u_s|\mathbf{x}) = 0 \quad \text{ve} \quad Cov(u_i, u_s) = 0, \quad i \neq s$$

$$E(u_i u_s|\mathbf{x}) = 0 \quad \text{ve} \quad E(u_i u_s) = 0, \quad i \neq s$$

$$Cov(u_i, u_s|\mathbf{x}) = E(u_i u_s|\mathbf{x}) - \underbrace{E(u_i|\mathbf{x})}_{=0} \underbrace{E(u_s|\mathbf{x})}_{=0} = 0$$

$$= E(u_i u_s|\mathbf{x}) = 0$$

Sunuma Geri Dön

Ek Bilgiler

BDR.7: Sabit Varyans (Homoscedasticity)

$$E(u^2|\mathbf{x}) = \sigma^2 \quad \text{ve} \quad E(u^2) = \sigma^2$$

$$\begin{aligned} Var(u|\mathbf{x}) &= E(u^2|\mathbf{x}) - \underbrace{E(u|\mathbf{x})^2}_{=0} = \sigma^2 \\ &= E(u^2|\mathbf{x}) = \sigma^2 \end{aligned}$$

Sunuma Geri Dön

Ek Bilgiler

Anakütle Regresyon Fonksiyonu (ARF)

$$E(y|\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 x \qquad \text{(ARF)}$$

$$Var(y|\mathbf{x}) = \sigma^2$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + u$$

$$E(y|\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 x + \underbrace{E(u|\mathbf{x})}_{=0}$$

$$E(y|\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 x \qquad \text{(ARF)}$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + u$$

$$Var(y|\mathbf{x}) = Var(u|\mathbf{x})$$

$$Var(y|\mathbf{x}) = \sigma^2$$

Sunuma Geri Dön

Ek Bilgiler

Parametre Tahmincileri

β_0 kesim parametresinin tahmini $\hat{\beta}_0$:

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}_1$$

- $\hat{\beta}_0$'nın formülü
  - SEKK birinci sıra koşulları ya da örneklem moment koşullarından ilki (Slayt 29)
  - Kalıntı $\hat{u}$'nın denklemi
  - İndeksli haldeki model denklemi

kullanılarak çıkarılabilir.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i) &= 0 \\
= \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} \hat{\beta}_0 - \sum_{i=1}^{n} \hat{\beta}_1 x_i &= 0 \\
= n\bar{y} - n\hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 n\bar{x} &= 0 \\
= \bar{y} - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \bar{x} &= 0
\end{aligned}$$

Sonuç: $\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$

Sunuma Geri Dön

Ek Bilgiler

Parametre Tahmincileri

β_1 eğim parametresinin tahmini $\hat{\beta}_1$:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

- $\hat{\beta}_1$'nın formülü
  - SEKK birinci sıra koşulları ya da örneklem moment koşullarından ikincisi (Slayt 29)
  - Kalıntı $\hat{u}$'nın denklemi
  - β_0 kesim parametresinin tahmini $\hat{\beta}_0$
  - Ortalamadan sapmaların kareleri toplamı

kullanılarak çıkarılabilir.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \hat{u}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i) = 0$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i (y_i - (\bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}) - \hat{\beta}_1 x_i) = 0$$

Ek Bilgiler

$$\sum_{i=1}^{n} x_i (y_i - (\bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}) - \hat{\beta}_1 x_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y} + \sum_{i=1}^{n} \hat{\beta}_1 x_i \bar{x} - \sum_{i=1}^{n} \hat{\beta}_1 x_i x_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i (y_i - \bar{y}) = \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i (x_i - \bar{x})$$

Sonuç: $$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

Sunuma Geri Dön

burada

$$\sum_{i=1}^{n} x_i (y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

Ek Bilgiler

Parametre Tahmincileri

β_1 eğim parametresinin tahmini $\hat{\beta}_1$'in alternatif formülü:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})y_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

Sunuma Geri Dön

burada

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})y_i$$