Zaman Serileri - Basit Zaman Serisi Modelleri

Zaman Serileri Analizi
Ekonometrik Modelleme ve Zaman Serileri Analizi

Dr. Ömer Kara[1]

[1] İktisat Bölümü
Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

31 Ocak 2025

Taslak

Motivasyon

- Bu bölümde zaman serisi analizi uygulamalarında yararlı olan ve SEKK Yöntemi ile kolayca tahmin edilebilen iki basit zaman serisi modelini inceleyeceğiz.
    - Statik Modeller
    - Sonlu Dağıtılmış Gecikme Modelleri (Finite Distributed Lag Models) - FDL Modelleri
- Yukarıda bahsedilen modeller, daha sonra göreceğimiz zaman serileri verisiyle regresyon analizi konusuna hazırlık olarak düşünülmelidir.

Statik Model

Statik Model

y ve z eşanlı (contemporaneously) zaman indeksi taşıyan iki zaman serisi olsun. y'yi z ile ilişkilendiren statik bir model aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 z_t + u_t, \quad t = 1, 2, \ldots, n$$

- Statik model, değişkenlerin birinci farkları arasında da formüle edilebilir.

$$\Delta y_t = \beta_1 \Delta z_t + u_t, \quad t = 1, 2, \ldots, n$$

- Buradaki statik kelimesi y ve z arasında eşanlı (yani aynı zamanlı) bir ilişki modellediğimizden dolayı kullanılmaktadır.
- Statik modeller genellikle z'de t zamanında oluşan bir değişikliğin y üzerindeki etkisi hemen (yani t zamanında) gözleniyorsa kullanılır.

$$\Delta y_t = \beta_1 \Delta z_t, \quad \Delta u_t = 0 \quad \text{iken}$$

Statik Model (Basit Doğrusal Regresyon): Örnek

- Statik Phillips Eğrisini statik zaman serisi modeline bir örnek olarak kullanabiliriz.

Statik Phillips Eğrisi Modeli

$$inf_t = \beta_0 + \beta_1 unem_t + u_t$$

inf: enflasyon oranı; $unem$: işsizlik oranı

- Bu formadaki bir Phillips Eğrisi modeli **doğal işsizlik oranı** (natural rate of unemployment) ve **beklenen enflasyonun** (expected inflation) sabit olduğunu varsayar.
- Bu model aracılığıyla inf_t ve $unem_t$ değişkenleri arasındaki **eşanlı ödünümü** (contemporaneous tradeoff) inceleyebiliriz.

Statik Model (Çoklu Doğrusal Regresyon): Örnek

- Statik bir regresyon modelinde çok sayıda farklı bağımsız değişken bulunabilir.
- Aşağıdaki model yıllara göre bir şehirdeki cinayet oranını etkileyen faktörleri statik olarak açıklamaya çalışıyor.

Statik Cinayet Modeli

$$mrdrte_t = \beta_0 + \beta_1 convrte_t + \beta_2 unem_t + \beta_3 yngmle_t + u_t$$

$mrdrte$: şehirdeki 10000 kişi başına cinayet oranı; $convrte$: cinayetten hüküm giyme oranı; $unem$: işsizlik oranı; $yngmle$: 18-25 yaşları arasındaki erkeklerin oranı

- Yukarıdaki statik modeli kullanarak cinayetten hüküm giyme oranı $convrte$'nın cinayet oranı $mrdrte$ üzerindeki ceteris paribus (yalın) etkisini tahmin edebiliriz.

Sonlu Dağıtılmış Gecikme Modeli (FDL Modeli)

- Sonlu dağıtılmış gecikme modellerinde (Finite Distributed Lag Models) bağımlı değişken y'yi bağımsız değişkenin belli bir gecikmesi (lag) ile etkileyen bir çok değişken mevcuttur.

1. Dereceden FDL Modeli: FDL$_{(1)}$

y_t'yi z_t ve z_t'nin birinci gecikmesi z_{t-1} ile ilişkilendiren 1. dereceden FDL modeli aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$y_t = \alpha_0 + \delta_0 z_t + \delta_1 z_{t-1} + u_t, \quad t = 1, 2, \ldots, n$$

2. Dereceden FDL Modeli: FDL$_{(2)}$

y_t'yi z_t ve z_t'nin birinci ve ikinci gecikmeleri z_{t-1} ve z_{t-2} ile ilişkilendiren 2. dereceden FDL modeli aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$y_t = \alpha_0 + \delta_0 z_t + \delta_1 z_{t-1} + \delta_2 z_{t-2} + u_t, \quad t = 1, 2, \ldots, n$$

- FDL modellerinde, bağımlı değişken y_t'yi eşanlı ve gecikmeli olarak etkilyen bir çok farklı bağımsız değişken olabilir.

$$y_t = \alpha_0 + \delta_0 z_t + \delta_1 z_{t-1} + \delta_2 z_{t-2} + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + u_t$$

2. Dereceden FDL Modeli: Örnek

FDL$_{(2)}$ Doğurganlık ve Vergi Muafiyeti Modeli

$$gfr_t = \alpha_0 + \delta_0 pe_t + \delta_1 pe_{t-1} + \delta_2 pe_{t-2} + u_t$$

gfr: doğurganlık oranı (doğurganlık yaşındaki 1000 kadına düşen bebek sayısı); pe: çocuk sahibi olmayı özendirmek için getirilen vergi muafiyeti

- Vergi muafiyetinin doğurganlığa etkisini ele alan yukarıdaki model 2. dereceden FDL modeline bir örnektir.

Etki Çarpanı

2. Dereceden FDL Modeli: $\text{FDL}_{(2)}$

$$y_t = \alpha_0 + \delta_0 z_t + \delta_1 z_{t-1} + \delta_2 z_{t-2} + u_t, \quad t = 1, 2, \ldots, n$$

- Yukarıda verilen 2. dereceden FDL modelindeki parametreleri yorumlayabilmek için varsayalım ki t zamanından önceki tüm dönemlerde z sabit ve c'ye eşit. Fakat t zamanında bir birim artarak $c+1$ oluyor ve $t+1$ zamanında tekrar eski değerine dönüyor. Yani t zamanında z'de gerçekleşen **geçici** bir artış var.

$$\ldots,\ z_{t-2} = c,\ z_{t-1} = c,\ z_t = c+1,\ z_{t+1} = c,\ z_{t+2} = c,\ \ldots$$

- Bu değişimin y'de yaratacağı ceteris paribus (yalın) etkiye, **etki çarpanı ya da etki çoğaltanı** (impact multiplier) denir

Etki Çarpanın Hesaplanması

2. Dereceden FDL Modeli: $\text{FDL}_{(2)}$

$$y_t = \alpha_0 + \delta_0 z_t + \delta_1 z_{t-1} + \delta_2 z_{t-2} + u_t, \quad t = 1, 2, \ldots, n$$

- Şimdi yukarıda verilen 2. dereceden FDL modelindeki etki çarpanını hesaplayalım.
- z'nin y üzerindeki ceteris paribus (yalın) etkisine odaklanabilmek için her zaman periodunda hata terimi u_t'nin sıfır olduğunu varsayalım.

$$\begin{aligned}
y_{t-1} &= \alpha_0 + \delta_0 c + \delta_1 c + \delta_2 c && \text{(zaman: } t-1\text{)} \\
y_t &= \alpha_0 + \delta_0 (c+1) + \delta_1 c + \delta_2 c && \text{(zaman: } t\text{)} \\
y_{t+1} &= \alpha_0 + \delta_0 c + \delta_1 (c+1) + \delta_2 c && \text{(zaman: } t+1\text{)} \\
y_{t+2} &= \alpha_0 + \delta_0 c + \delta_1 c + \delta_2 (c+1) && \text{(zaman: } t+2\text{)} \\
y_{t+3} &= \alpha_0 + \delta_0 c + \delta_1 c + \delta_2 c && \text{(zaman: } t+3\text{)}
\end{aligned}$$

Etki Çarpanın Hesaplanması

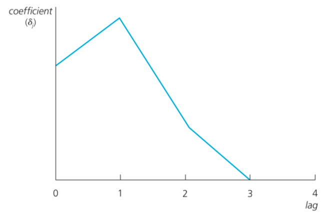
$$
\begin{aligned}
y_{t-1} &= \alpha_0 + \delta_0 c + \delta_1 c + \delta_2 c && \text{(zaman: } t-1\text{)} \\
y_t &= \alpha_0 + \delta_0 (c+1) + \delta_1 c + \delta_2 c && \text{(zaman: } t\text{)} \\
y_{t+1} &= \alpha_0 + \delta_0 c + \delta_1 (c+1) + \delta_2 c && \text{(zaman: } t+1\text{)} \\
y_{t+2} &= \alpha_0 + \delta_0 c + \delta_1 c + \delta_2 (c+1) && \text{(zaman: } t+2\text{)} \\
y_{t+3} &= \alpha_0 + \delta_0 c + \delta_1 c + \delta_2 c && \text{(zaman: } t+3\text{)}
\end{aligned}
$$

- İlk iki denklemden $y_t - y_{t-1} = \delta_0$ olduğu rahatlıkla görülebilir.
- δ_0, t döneminde (cari) z'deki bir birim artışın y üzerindeki **ani etkisini** gösterir ve **etki çarpanı** olarak adlandırılır.
- Benzer şekilde y'deki değişim, geçici değişmenin olduğu t döneminden bir dönem sonra $y_{t+1} - y_{t-1} = \delta_1$'e, iki dönem sonra ise $y_{t+2} - y_{t-1} = \delta_2$'ye eşit olacaktır.
- $t+2$ döneminden sonra, yani $t+3$ döneminde, y eski değerine geri dönecektir. Yani, $y_{t-1} = y_{t+3}$. Bunun nedeni şu an incelenen modelin sadece iki dönem gecikme barındıran 2. dereceden FDL modeli olmasıdır.

Gecikme Dağılımı

- δ_j'lerin j indeksine göre çizilen grafiği **gecikme dağılımını** (lag distribution) verecektir.
- Bu grafik, z'de meydana gelen **geçici** (temporary) bir artışın y üzerindeki dinamik etkisini (dynamic effect) gösterecektir.
- 2. dereceden FDL modeli için olası bir gecikme dağılımı Şekil 1'de görülebilir.
- Elbette δ_j parametrelerini bilemeyiz. Buna rağmen δ_j'leri tahmin edip bu tahminler üzerinden tahmini bir gecikme dağılımı çizebiliriz.

FIGURE 10.1 A lag distribution with two nonzero lags. The maximum effect is at the first lag.



Şekil 1: Gecikme Dağılımı

Kaynak: Wooldridge (2016)

Uzun Dönem Çarpanı

2. Dereceden FDL Modeli: FDL$_{(2)}$

$$y_t = \alpha_0 + \delta_0 z_t + \delta_1 z_{t-1} + \delta_2 z_{t-2} + u_t, \quad t = 1, 2, \ldots, n$$

- z'deki **kalıcı** (permanent) artışların y üzerindeki etkisini de bilmek isteriz.
- Yukarıda verilen 2. dereceden FDL modelindeki parametreleri yorumlayabilmek için varsayalım ki t zamanından önceki tüm dönemlerde z sabit ve c'ye eşit. Fakat t zamanından itibaren bir birim artarak kalıcı bir şekilde $c + 1$ oluyor. Yani t zamanında z'de gerçekleşen **kalıcı** bir artış var.

$$\ldots, \; z_{t-2} = c, \; z_{t-1} = c, \; z_t = c + 1, \; z_{t+1} = c + 1, \; z_{t+2} = c + 1, \; \ldots$$

- Bu değişimin y'de yaratacağı uzun dönemli etkiye, **uzun dönem çarpanı ya da uzun dönem çoğaltanı** (long-run multiplier) denir.
- FDL modellerinde, uzun dönem çarpanı ilginin ana odağıdır.

Uzun Dönem Çarpanın Hesaplanması

2. Dereceden FDL Modeli: FDL$_{(2)}$

$$y_t = \alpha_0 + \delta_0 z_t + \delta_1 z_{t-1} + \delta_2 z_{t-2} + u_t, \quad t = 1, 2, \ldots, n$$

- Şimdi yukarıda verilen 2. dereceden FDL modelindeki uzun dönem çarpanını hesaplayalım.
- z'nin y üzerindeki uzun dönem etkisine odaklanabilmek için her zaman periodunda hata terimi u_t'nin sıfır olduğunu varsayalım.

$$\begin{aligned}
y_{t-1} &= \alpha_0 + \delta_0 c + \delta_1 c + \delta_2 c && \text{(zaman: } t-1\text{)} \\
y_t &= \alpha_0 + \delta_0(c+1) + \delta_1 c + \delta_2 c && \text{(zaman: } t\text{)} \\
y_{t+1} &= \alpha_0 + \delta_0(c+1) + \delta_1(c+1) + \delta_2 c && \text{(zaman: } t+1\text{)} \\
y_{t+2} &= \alpha_0 + \delta_0(c+1) + \delta_1(c+1) + \delta_2(c+1) && \text{(zaman: } t+2\text{)} \\
y_{t+3} &= \alpha_0 + \delta_0(c+1) + \delta_1(c+1) + \delta_2(c+1) && \text{(zaman: } t+3\text{)}
\end{aligned}$$

Uzun Dönem Çarpanın Hesaplanması

$$
\begin{aligned}
y_{t-1} &= \alpha_0 + \delta_0 c + \delta_1 c + \delta_2 c && \text{(zaman: } t-1\text{)} \\
y_t &= \alpha_0 + \delta_0 (c+1) + \delta_1 c + \delta_2 c && \text{(zaman: } t\text{)} \\
y_{t+1} &= \alpha_0 + \delta_0 (c+1) + \delta_1 (c+1) + \delta_2 c && \text{(zaman: } t+1\text{)} \\
y_{t+2} &= \alpha_0 + \delta_0 (c+1) + \delta_1 (c+1) + \delta_2 (c+1) && \text{(zaman: } t+2\text{)} \\
y_{t+3} &= \alpha_0 + \delta_0 (c+1) + \delta_1 (c+1) + \delta_2 (c+1) && \text{(zaman: } t+3\text{)}
\end{aligned}
$$

- İlk iki denklemden $y_t - y_{t-1} = \delta_0$ olduğu rahatlıkla görülebilir.
- Benzer şekilde y'deki değişim, kalıcı değişmenin olduğu t döneminden bir dönem sonra $y_{t+1} - y_{t-1} = \delta_0 + \delta_1$'e, iki dönem sonra ise $y_{t+2} - y_{t-1} = \delta_0 + \delta_1 + \delta_2$'ye eşit olacaktır.
- $t+2$ döneminden sonra, yani $t+3$ dönemi ve sonrasında y'de daha fazla artış meydana gelmez. Yani, $y_{t+2} = y_{t+3}$. Bunun nedeni şu an incelenen modelin sadece iki dönem gecikme barındıran 2. dereceden FDL modeli olmasıdır.
- Cari ve gecikmeli z değişkeninin katsayıları toplamı, yani $\delta_0 + \delta_1 + \delta_2$, t döneminde (cari) z'deki bir birimlik kalıcı bir artışın y üzerindeki **uzun dönemli etkisini** gösterir ve buna **uzun dönem çarpanı** denir.

Etki Çarpanı ve Uzun Dönem Çarpanın Hesaplanması: Örnek

$\text{FDL}_{(2)}$ Doğurganlık ve Vergi Muafiyeti Modeli

$$gfr_t = \alpha_0 + \delta_0 pe_t + \delta_1 pe_{t-1} + \delta_2 pe_{t-2} + u_t$$

gfr: doğurganlık oranı (doğurganlık yaşındaki 1000 kadına düşen bebek sayısı); pe: çocuk sahibi olmayı özendirmek için getirilen vergi muafiyeti

- Vergi muafiyetinin doğurganlığa etkisini ele alan yukarıdaki modelde δ_0, pe'de 1 birimlik artışın doğurganlık oranında yaratacağı ani değişmeyi (etki çarpanı) ölçer. Bu etki biyolojik ve davranışsal nedenlerden ötürü, ya sıfır ya da çok küçük olacaktır.
- δ_1 ve δ_2, sırasıyla, bir dönem ve iki dönem önceki 1 birimlik pe artışının etkilerini ölçmektedir. Bu katsayıların pozitif olmalarını bekleyebiliriz.
- Eğer pe'de t döneminden itibaren kalıcı olarak 1 birimlik artış olursa, gfr'deki değişim, iki dönem sonra $\delta_0 + \delta_1 + \delta_2$ (uzun dönem çarpanı) kadar olacaktır. İki dönemden sonra ise gfr'de değişme olmayacaktır.

q. Dereceden FDL Modeli: $\text{FDL}_{(q)}$

- $\text{FDL}_{(q)}$ modellerinde bağımlı değişken y'yi bağımsız değişkenin q kadar gecikmesi (lag) ile etkileyen bir çok değişken mevcuttur.

q. Dereceden FDL Modeli: $\text{FDL}_{(q)}$

y_t'yi z_t ve z_t'nin gecikmeleri $z_{t-1}, z_{t-2}, \ldots, z_{t-q}$ ile ilişkilendiren q. dereceden FDL modeli aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$y_t = \alpha_0 + \delta_0 z_t + \delta_1 z_{t-1} + \cdots + \delta_q z_{t-q} + u_t, \quad t = 1, 2, \ldots, n$$

- Slayt 4'de tanıtılan statik model, $\text{FDL}_{(q)}$ modelinin $\delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_q = 0$ eşitliklerini sağladığı özel bir halidir. Bu sebeple, FDL modelleri, bağımsız değişken z'nin bağımlı değişken y üzerinde **gecikmeli etkisinin** (lagged effect) olup olmadığını görmemize yarar.
- $\text{FDL}_{(q)}$ modelinde, cari dönem değişkeni z_t'nin katsayısı δ_0 etki çarpanıdır.
- $\text{FDL}_{(q)}$ modelinde, uzun dönem çarpanı tüm $z_t, z_{t-1}, \ldots, z_{t-q}$ değişkenlerine ait katsayıların toplamıdır.

$$\text{Uzun Dönem Çarpanı} = \delta_0 + \delta_1 + \cdots + \delta_q$$

q. Dereceden FDL Modeli: $\text{FDL}_{(q)}$

- z_t'nin gecikmeleri $z_{t-1}, z_{t-2}, \ldots, z_{t-q}$ arasında çoğu zaman yüksek korelasyon bulunur. Bu durum çoklu doğrusal bağıntı (ÇDB) problemine yol açar.
    - ÇDB de δ_j'lerin ayrı ayrı ve kesin bir şekilde tahmin edilmelerini güçleştirir.
- $\text{FDL}_{(q)}$ modellerinde birden fazla bağımsız değişken gecikmeli olarak bulunabilir.

$$y_t = \alpha_0 + \delta_0 z_t + \delta_1 z_{t-1} + \cdots + \delta_q z_{t-q} + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \cdots + \beta_q x_{t-q} + u_t$$

- Cari dönem değişkenleri de, x_t ve w_t gibi, $\text{FDL}_{(q)}$ modellerine eklenebilir.
    - Örneğin, Slayt 16'deki doğurganlık ve vergi muafiyeti modeline, doğurganlık yaşındaki kadınların ortalama eğitim seviyesi $educ_t$'yi ekleyebiliriz.
    - Böylelikle, kadınlardaki değişen eğitim seviyelerini kontrol etme olanağına kavuşuruz.

$$gfr_t = \alpha_0 + \delta_0 pe_t + \delta_1 pe_{t-1} + \delta_2 pe_{t-2} + \beta_1 educ_t + u_t$$

q. Dereceden FDL Modeli: FDL$_{(q)}$

Örnek Soru

Aşağıda yıllık verilerle tahmin edilmiş FDL$_{(2)}$ modelinin etki çarpanını ve uzun dönem çarpanını bulun ve yorumlayın.

$$\widehat{int_t} = 1.6 + 0.48\, enf_t - 0.15\, enf_{t-1} + 0.32\, enf_{t-2}$$

int: faiz oranı; inf: enflasyon oranı

q. Dereceden FDL Modeli: $\text{FDL}_{(q)}$

Örnek Soru

Aşağıda yıllık verilerle tahmin edilmiş $\text{FDL}_{(2)}$ modelinin etki çarpanını ve uzun dönem çarpanını bulun ve yorumlayın.

$$\widehat{int_t} = 1.6 + 0.48\,enf_t - 0.15\,enf_{t-1} + 0.32\,enf_{t-2}$$

int: faiz oranı; inf: enflasyon oranı

- Etki çarpanı:

$$\begin{aligned}\text{Etki Çarpanı} &= \delta_0 \\ &= 0.48\end{aligned}$$

- Uzun dönem çarpanı:

$$\begin{aligned}\text{Uzun Dönem Çarpanı} &= \delta_0 + \delta_1 + \delta_2 \\ &= 0.48 + (-0.15) + 0.32 \\ &= 0.65\end{aligned}$$

Kaynaklar

Hyndman, R.J. ve G. Athanasopoulos (2018). *Forecasting: Principles and Practice*. OTexts.
Tastan, H. (2020). *Lecture on Econometrics II. Personal Collection of H. Tastan*. Retrieved from Online.
Wooldridge, J.M. (2016). *Introductory Econometrics: A Modern Approach*. Nelson Education.

