Matematik ve İstatistik: Gözden Geçirme

Ekonometri I

Dr. Ömer Kara[1]

[1] İktisat Bölümü
Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

19 Ekim 2021

Taslak

Motivasyon

Bu bölümde, sırasıyla aşağıdaki konular incelenecektir.

- Temel matematiksel araçlar
- Olasılık ve dağılım teorisine ait temel bilgiler
- İstatiksel çıkarsama

Toplam Operatörü ve Özellikleri

Toplam Operatörü

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

burada i indeks; n ise gözlem sayısıdır.

a, b, ve c sabit sayılar ise;

1. Sabit bir sayının toplamı:

$$\sum_{i=1}^{n} c = nc$$

2. Sabit sayı ile çarpılan bir serinin toplamı:

$$\sum_{i=1}^{n} cx_i = c\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Toplam Operatörü ve Özellikleri

3. Sabit sayı ile çarpılan iki farklı serinin toplamı:

$$\sum_{i=1}^{n}(ax_i + by_i) = a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} y_i$$

4. İki serinin bölümünün toplamı ile toplamlarının bölümü:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{y_i} \neq \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} y_i}$$

5. Serinin karesinin toplamı ile toplamının karesi:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \neq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$$

Bazı Betimsel İstatistikler

Örneklem Ortalaması

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

burada n gözlem sayısı, $\bar{x}$ ise örneklem ortalamasıdır.

1. Ortalamadan sapmaların toplamı sıfırdır.

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) = 0$$

İspat:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} \bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i - n\bar{x} = n\bar{x} - n\bar{x}$$

$$= 0$$

Bazı Betimsel İstatistikler

2. Ortalamadan sapmaların kareleri toplamı (tek seri için):

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n(\bar{x})^2$$

İspat:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 &= \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i + n(\bar{x})^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2n(\bar{x})^2 + n(\bar{x})^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n(\bar{x})^2
\end{aligned}$$

Bazı Betimsel İstatistikler

3. Ortalamadan sapmaların kareleri toplamı (çift seri için):

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y} \qquad \text{(Özellik 3.1)}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i (y_i - \bar{y}) \qquad \text{(Özellik 3.2)}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) y_i \qquad \text{(Özellik 3.3)}$$

Değişkenlerde Değişim

Başlangıç değeri x_0 ve son değeri ise x_1 olan bir x değişkeninde

1. Oransal Değişim (Proportional Change)

$$\frac{(x_1 - x_0)}{x_0} = \frac{\Delta x}{x_0}$$

2. Yüzdesel Değişim (Percentage Change)

$$\%\Delta x = 100(\Delta x / x_0)$$

3. Yüzdesel Puan Değişimi (Percentage Point Change)

$$\%\Delta x_1 - \%\Delta x_0$$

Örnek: Enflasyon %30'dan sonra %45'e yükseldiğinde, %45 − %30 = %15 puan değişmiş olur. Oysa, yüzdesel değişim, $\%\Delta x = 100(45 - 30)/30 = \%50$ olacaktır.

Doğrusal Fonksiyonlar

- **Doğrusal fonksiyonlar** (linear functions), yorumlanması ve manipüle edilmesi basit oldukları için ekonometride önemli bir rol oynar.

Doğrusal (Lineer) Fonksiyon

Eğer x ve y değişkenleri aşağıdaki gibi ilişkili ise y, x'in doğrusal bir fonksiyonudur.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x$$

β_0 ve β_1, y ve x değişkenleri arasındaki ilişkiyi tanımlayan rakamsal parametrelerdir.

- β_0 kesim (sabit) parametresi ($x = 0$ olduğunda y'nin değerini belirtir), β_1 ise eğim parametresi olarak bilinir.
- Doğrusal fonksiyonun tanımlayıcı özelliği y'deki değişim her zaman β_1 çarpı x'deki değişim kadar olmasıdır. Diğer bir deyişle, x'in y üzerindeki **marjinal etki**si (marginal effect) sabittir ve β_1'e eşittir.

$$\Delta y = \beta_1 \Delta x$$

Doğrusal Fonksiyonlar

- Aylık ev harcaması ve gelir arasındaki ilişkinin aşağıdaki doğrusal fonksiyonla gösterildiğini varsayalım.

Doğrusal Fonksiyon: Ev Harcaması vs. Gelir

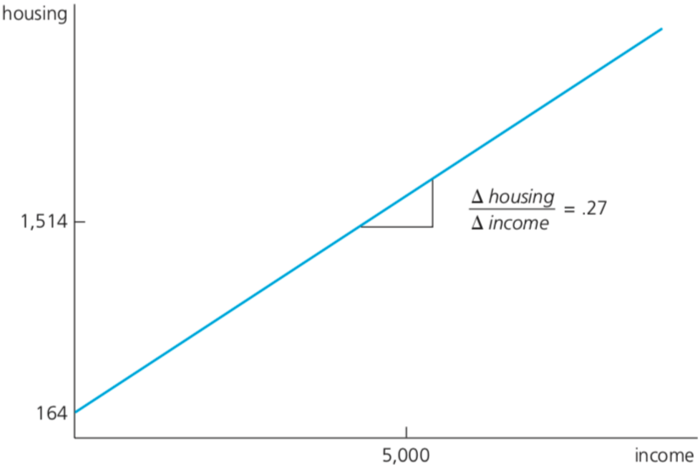
$$housing = \beta_0 + \beta_1 income$$

$$housing = 164 + 0.27\, income$$

housing: ev için yapılan harcama; *income*: gelir

- Fonksiyona göre her 1 dolarlık ekstra gelir için, 27 centlik ev harcaması yapılıyor. Örneğin, eğer ailenin geliri \$200 artarsa, bu durumda ev harcaması $0.27 \times 200 = \$54$ artar.
- Bu doğrusal fonksiyona ait grafik Şekil 1'de gösterilmiştir.

Doğrusal Fonksiyonlar



Şekil 1: Doğrusal Fonksiyon: Ev Harcaması vs. Gelir

Kaynak: Wooldridge (2016)

Doğrusal Fonksiyonlar

- Lineer fonksiyonlar ikiden fazla değişken kullanılarak da kolayca tanımlanabilir.
- y'nin x_1 ve x_2 gibi iki farklı değişkene bağlı olduğunu varsaydığımız doğrusal fonksiyonun genel formu aşağıdaki gibi olacaktır.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$$

- Üç-boyutlu grafiği olan bu fonksiyonu iki boyutlu düzlemde göstermek zor olsa da
  - β_0 hala kesim (sabit) parametresidir ($x_1 = 0$ ve $x_2 = 0$ iken y'nin değerini belirtir).
  - β_1 ve β_2 ise x_1 ve x_2 değişkenlerine ait eğim parametresi olarak bilinir.
- Fonksiyon denklemi kullanarak, x_1 ve x_2'deki değişiklere karşılık gelen y'deki değişim aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$$

$$\Delta y = \beta_1 \Delta x_1 + \beta_2 \Delta x_1$$

Doğrusal Fonksiyonlar

- Eğer, x_2 sabit ise, yani $\Delta x_2 = 0$ ise, y'deki değişim:

$$\Delta y = \beta_1 \Delta x_1 + \beta_2 \Delta x_1$$

$$\Delta y = \beta_1 \Delta x_1 \quad \text{eğer} \quad \Delta x_2 = 0$$

  - β_1, x_1 ile y arasındaki ilişkiyi belirten eğim parametresidir.
  - β_1, x_2'i sabit tutuğumuzda x_1'deki değişime karşılık y'nin nasıl değiştiğini gösterdiğinden x_1'in y üzerindeki **kısmi etki**si (partial effect) olarak da adlandırılır.

$$\beta_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x_1} \quad \text{eğer} \quad \Delta x_2 = 0$$

  - Kısmi etki diğer faktörlerin sabit tutulmasını içerdiğinden dolayı **ceteris paribus** kavramıyla yakından ilişkilidir.

- β_2 parametresin de yorumlaması benzerdir. β_2, x_2'in y üzerindeki kısmi etkisini gösterir.

$$\beta_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x_2} \quad \text{eğer} \quad \Delta x_1 = 0$$

Doğrusal Olmayan Fonksiyonlar

- Doğrusal fonksiyonlarda, denklemin sağ tarafında bulunan x'deki bir birimlik değişim denklemin sol tarafındaki y'de x'in başlangıç değerinden bağımsız olarak her zaman aynı etkiye sahiptir. Yani, x'in y üzerindeki marjinal etkisi sabittir.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x \quad \longrightarrow \quad \beta_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x_1}$$

- Bu durum, birçok iktisadi değişken arasındaki ilişki için gerçekçi değildir, örneğin azalan marjinal getiri (diminishing marginal returns).
- İktisadi değişkenler arasındaki bu tarz farklı ilişkileri de modelleyebilmek için **doğrusal olmayan fonksiyonlar**ı (nonlinear functions) kullanmamız gerekir.
- Doğrusal olmayan fonksiyonlardaki temel mantık, x'deki bir birimlik değişim y'de x'in başlangıç değerine bağlı olarak etki yapar. Yani, x'in y üzerindeki marjinal etkisi x'in başlangıç değerine göre değişir.
- Ekonometride bazı doğrusal olmayan fonksiyonlar sıklıkla kullanılır ve bu nedenle bu fonksiyonların nasıl yorumlanacağının bilinmesi çok önemlidir.

Karesel Fonksiyonlar

- Değişen marjinal etkiyi modelleyebilmek için ekonometride doğrusal olmayan fonksiyon olarak sıklıkla **karesel fonksiyonlar** (quadratic functions) kullanılır.

Karesel Fonksiyon

x ve y değişkenleri aşağıdaki gibi ilişkili ise y, x'in karesel bir fonksiyonudur.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$$

β_0, β_1, ve β_2 y ve x değişkenleri arasındaki ilişkiyi tanımlayan rakamsal parametrelerdir.

- y'nin x'e göre kısmi türevini alarak karasel fonksiyonun eğimi m yaklaşık olarak aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approxeq \beta_1 + 2\beta_2 x$$

- Burada dikkat edilmesi gereken nokta, yukarıdaki eğim hesabı yaklaşıktır. Kesin bir hesaplama için ilk ve son x değerlerini bilmek gerekir.

Karesel Fonksiyonlar

- Karesel fonksiyona ait grafik β_1 ve β_2 parametrelerin işaretine göre değişir.
  - Örneğin, $\beta_1 > 0$ ve $\beta_2 < 0$ olduğunda y ve x arasındaki ilişki Şekil 2'deki gibi parabolik bir şekil alacaktır.
- $\beta_1 > 0$ ve $\beta_2 < 0$ olduğunda, fonksiyonu maksimum yapan, yani eğimin sıfır olduğu ($m = 0$), x^* değeri aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

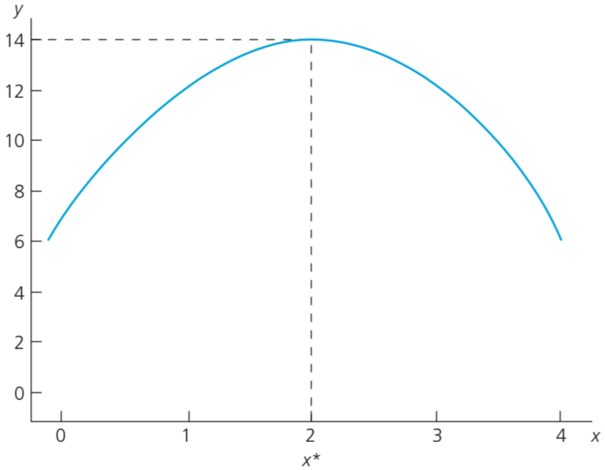
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approxeq \beta_1 + 2\beta_2 x = 0 \quad \longrightarrow \quad x^* = \frac{\beta_1}{-2\beta_2}$$

  - Örneğin, Şekil 2'deki karesel fonksiyonu maksimum ($y = 14$) yapan x^* değeri 2'dir.

$$\beta_0 = 6,\ \beta_1 = 8,\ \beta_2 = -2 \quad \longrightarrow \quad y = 6 + 8x - 2x^2 \quad \longrightarrow \quad x^* = \frac{\beta_1}{-2\beta_2} = 2$$

- Şekil 2'deki karesel fonksiyon incelendiğinde x'in y üzerindeki **azalan marjinal etki**si (diminishing marginal effect) açıkça gözlenmektedir. Başka bir deyişle fonksiyonun eğimi, x arttıkça azalmaktadır.
  - Karesel fonksiyon β_1 ve β_2 parametrelerin işaretlerine göre farklı şekillerde olabilir.
  - Örneğin, $\beta_1 < 0$ ve $\beta_2 > 0$ olduğunda, karesel fonksiyon "U" şeklinde olur ve x'in y üzerindeki **artan marjinal etki**si (increasing marginal effect) gözlenir.

Karesel Fonksiyonlar



Şekil 2: Karesel Fonksiyon: $y = 6 + 8x - 2x^2$

Kaynak: Wooldridge (2016)

Doğal Eksponansiyel Fonksiyon

- Ekonometrik analizde sıklıkla kullanılan bir diğer doğrusal olmayan fonksiyon ise **doğal eksponansiyel fonksiyon**dur (natural exponential function).
- Doğal eksponansiyel fonksiyon “exp” ya da “e” (euler sayısı) ile gösterilir.
- Euler sayıs $e \approxeq 2.71$'in çıkarılışını incelemek için “Ek Bilgi” butonuna basınız.

Ek Bilgi

Doğal Eksponansiyel Fonksiyon

$$y = exp(x) = e^x$$

- Doğal eksponansiyel fonksiyon Slayt 21'de gösterilen doğal logaritmanın tersidir.

$$e^{\ln x} = x \quad \text{eğer} \quad x > 0 \quad \text{ve} \quad \ln(e^x) = x$$

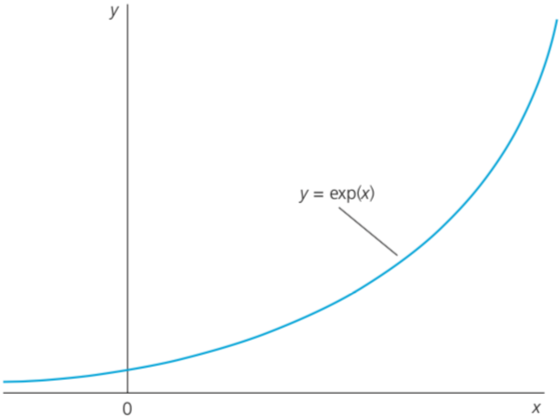
$$y = exp\,(\beta_0 + \beta_1 x) = e^{\beta_0 + \beta_1 x} \quad \longrightarrow \quad \ln y = \beta_0 + \beta_1 x$$

- Şekil 3'de grafiği verilen doğal eksponansiyel fonksiyonun özellikleri:

$$e^0 = 1 \qquad e^1 = 2.7183$$

$$e^{x+y} = e^x e^y \qquad e^{xy} = (e^x)^y \qquad e^{c \ln x} = x^c \qquad \frac{\partial e^x}{\partial x} = e^x$$

Doğal Eksponansiyel Fonksiyon



Şekil 3: Doğal Eksponansiyel Fonksiyon: $y = e^x$

Kaynak: Wooldridge (2016)

Doğal Logaritma

- Ekonometrik analizde en önemli rolü oynayan doğrusal olmayan fonksiyon **doğal logaritma**dır (natural logaritm), yani e tabanında logaritmadır.
- Doğal logaritma için "$\log_e$" ya da "ln" kullanılır. Fakat biz "ln" ile göstereceğiz.

Doğal Logaritma

$$y = \log_e x = \ln x$$

sadece $x > 0$ durumda tanımlıdır.

- Şekil 4'de grafiği verilen doğal logaritmanın özellikleri:

$$\ln x = \begin{cases} -\infty & \text{eğer} \quad x \leq 0 \\ < 0 & \text{eğer} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{eğer} \quad x = 1 \\ > 0 & \text{eğer} \quad x > 1 \end{cases}$$

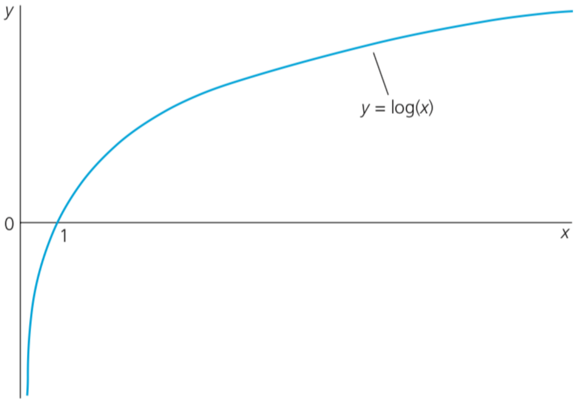
$$\ln x_1 x_2 = \ln x_1 + \ln x_2, \quad x_1, x_2 > 0$$

$$\ln x_1/x_2 = \ln x_1 - \ln x_2, \quad x_1, x_2 > 0$$

$$\ln x^c = c \ln x, \quad x > 0 \text{ ve } c \in \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial \ln x}{\partial x} = \frac{1}{x}$$

Doğal Logaritma



Şekil 4: Doğal Logaritma: $y = \ln x$

Kaynak: Wooldridge (2016)

Doğal Logaritma

- Doğal logaritma Slayt 19'de gösterilen doğal exponansiyel fonksiyonun tersidir.
- Doğal logaritmada x arttıkça eğim azalarak gittikçe sıfıra yaklaşır fakat hiçbir zaman sıfır veya negatif olmaz. Bir başka deyişle, x'in y üzerindeki marjinal etkisi azalır fakat hiçbir zaman sıfır veya negatif olmaz.
- Fakat, karesel fonksiyonda β_1 ve β_2 parametrelerin işaretlerine göre bu etki sıfır veya negatif olabilir, Şekil 2'deki gibi.
- Logaritmik yakınsama özelliği ile logaritmik formdaki veride oluşan **küçük değişimler**, düzey formundaki veride oransal ya da yüzdesel değişim olarak yorumlanabilir. x_0 ve x_1 pozitif sayılar olduğunda:

$$\ln x_1 - \ln x_0 \approxeq (x_1 - x_0)/x_0 \qquad \text{(logaritmik yakınsama)}$$

$$\Delta \ln x \approxeq \Delta x/x_0 \qquad \text{(oransal değişim)}$$

$$100\,\Delta \ln x \approxeq 100\,\Delta x/x_0 \qquad \text{(100 ile çarpım)}$$

$$100\,\Delta \ln x \approxeq \%\Delta x \qquad \text{(yüzdesel değişim)}$$

- Logaritmik yakınsama sadece küçük değişimler için kullanılmalıdır. Büyük değişimlerde logaritmik yakınsama doğru sonuç vermez.

Esneklik

- Eğer sadece küçük değişimler için geçerli ise Slayt 23'de verilen logaritmik yakınsama özelliğine ekonometrik analizlerde neden ihtiyaç duyuyoruz?
- Bu soruyu cevaplamak için uygulamalı ekonometrinin birçok alanında kritik önemi olan **esneklik** (elasticity) kavramını inceleyelim.

Esneklik

y'nin x'e göre esnekliği x'de %1'lik bir artış olduğunda y'de meydana gelen yüzdesel değişmeyi ifade eder.

$$E = \frac{\%\Delta y}{\%\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}\frac{x}{y}$$

- Slayt 23'de verilen logaritmik yakınsama özelliğini kullanarak yaklaşık esneklik formülünü yazabiliriz.

$$E = \frac{\%\Delta y}{\%\Delta x} \approxeq \frac{100\,\Delta \ln y}{100\,\Delta \ln x} = \frac{\Delta \ln y}{\Delta \ln x}$$

Fonksiyonel Form

- Ekonometride sıklıkla tercih edilen 4 farklı **fonksiyonel form** (functional form) ile y ve x değişkenleri arasındaki ilişkiyi yorumlayıp esnekliği hesaplayalım.

Düzey-Düzey Fonksiyonel Formu

$$y = \beta_0 + \beta_1 x \qquad \text{(fonksiyon)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \beta_1 \qquad \text{(türev)}$$

$$\Delta y = \beta_1 \Delta x \qquad \text{(yorumlama)}$$

ceteris paribus koşulu altında, x'deki 1 birimlik artış, y'de ortalama olarak β_1 birim kadar değişime neden olur.

$$E = \frac{\Delta y}{\Delta x}\frac{x}{y} = \beta_1 \frac{x}{y} = \beta_1 \frac{x}{\beta_0 + \beta_1 x} \qquad \text{(esneklik)}$$

y'nin x'e göre esnekliği hem parametreler β_0 ve β_1'e hem de x'e bağlıdır, yani esneklik sabit değildir. Uygulamada esnekliği sabit bir değer olarak hesaplamak için yukarıdaki formülde genellikle verilerin ortalaması kullanılır, yani $\bar{x}$ ve $\bar{y}$.

Fonksiyonel Form

Düzey-Log Fonksiyonel Formu

$$y = \beta_0 + \beta_1 \ln x \qquad \text{(fonksiyon)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta \ln x} = \beta_1 \qquad \text{(türev)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta \ln x} = \frac{100\,\Delta y}{100\,\Delta \ln x} \approx \frac{100\,\Delta y}{\%\Delta x} \approx \beta_1 \quad \longrightarrow \quad \Delta y_t \approx (\beta_1/100)\%\Delta x_t \qquad \text{(yorumlama)}$$

ceteris paribus koşulu altında, x'deki %1'lik artış, y'de ortalama olarak $\beta_1/100$ birim kadar değişime neden olur.

$$E = \frac{\Delta y}{\Delta x}\frac{x}{y} = \frac{\Delta y}{\Delta x/x}\frac{1}{y} = \frac{\Delta y}{\Delta \ln x}\frac{1}{y} = \frac{\beta_1}{y} = \frac{\beta_1}{\beta_0 + \beta_1 \ln x} \qquad \text{(esneklik)}$$

y'nin x'e göre esnekliği hem parametreler β_0 ve β_1'e hem de x'e bağlıdır, yani esneklik sabit değildir. Uygulamada esnekliği sabit bir değer olarak hesaplamak için yukarıdaki formülde genellikle verilerin ortalaması kullanılır, yani $\bar{x}$ ve $\bar{y}$.

Fonksiyonel Form

Log-Düzey Fonksiyonel Formu

$$\ln y = \beta_0 + \beta_1 x \qquad \text{(fonksiyon)}$$

$$\frac{\Delta \ln y}{\Delta x} = \beta_1 \qquad \text{(türev)}$$

$$\frac{\Delta \ln y}{\Delta x} = \frac{100\, \Delta \ln y}{100\, \Delta x} \approxeq \frac{\%\Delta y}{100\, \Delta x} \approxeq \beta_1 \quad \longrightarrow \quad \%\Delta y \approxeq (100\, \beta_1)\Delta x \qquad \text{(yorumlama)}$$

ceteris paribus koşulu altında, x'deki 1 birimlik artış, y'de ortalama olarak $\%100\,\beta_1$ kadar değişime neden olur. $100\,\beta_1$, y'nin x'e göre **yarı-esnekliği** (semi elasticity) olarak adlandırılır ve y ve x gibi verilere bağlı olmadığı için sabittir.

$$E = \frac{\Delta y}{\Delta x}\,\frac{x}{y} = \frac{\Delta y / y}{\Delta x}\, x = \frac{\Delta \ln y}{\Delta x}\, x = \beta_1 x \qquad \text{(esneklik)}$$

y'nin x'e göre esnekliği hem parametre β_1'e hem de x'e bağlıdır, yani esneklik sabit değildir. Uygulamada esnekliği sabit bir değer olarak hesaplamak için yukarıdaki formülde genellikle verilerin ortalaması kullanılır, yani $\bar{x}$ ve $\bar{y}$.

Fonksiyonel Form

Log-Log Fonksiyonel Formu

$$\ln y = \beta_0 + \beta_1 \ln x \qquad \text{(fonksiyon)}$$

$$\frac{\Delta \ln y}{\Delta \ln x} = \beta_1 \qquad \text{(türev)}$$

$$\frac{\Delta \ln y}{\Delta \ln x} = \frac{100\,\Delta \ln y}{100\,\Delta \ln x} \approxeq \frac{\%\Delta y}{\%\Delta x} = \beta_1 \quad \longrightarrow \quad \%\Delta y \approxeq \beta_1 \%\Delta x \qquad \text{(yorumlama)}$$

ceteris paribus koşulu altında, x'deki %1'lik artış, y'de ortalama olarak $\%\beta_1$ kadar değişime neden olur. β_1, y'nin x'e göre esnekliğini yaklaşık olarak verir. y ve x gibi verilere bağlı olmadığı için sabittir. Bu nedenle **sabit esneklik** (constant elasticity) olarak adlandırılır.

$$E = \frac{\%\Delta y}{\%\Delta x} \approxeq \frac{100\,\Delta \ln y}{100\,\Delta \ln x} = \frac{\Delta \ln y}{\Delta \ln x} = \beta_1 \qquad \text{(esneklik)}$$

y'nin x'e göre esnekliği (yaklaşık) sadece parametre β_1'e bağlıdır, yani esneklik sabittir. Bu nedenle Log-Log fonksiyonel formu sabit esneklik modeli olarak da bilinir.

Rassal Değişkenler

Rassal Değişken

Alacağı değer belli bir rassal (random) deneyin (experiment) sonucuna bağlı olan değişkenlere **rassal değişken** denir.

$$X = \{x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots x_n\}$$

burada i indeks; n gözlem sayısı; X rassal değişken; x_i ise X rassal değişkeninin aldığı belli bir değeri ifade eder.

Kesikli Rassal Değişken

Alacağı değerler sayılabilir (sonlu ya da sonsuz) olan rassal değişkendir.

Sürekli Rassal Değişken

Belli bir aralıkta (örneğin reel sayı doğrusu üzerinde) herhangi bir değeri alan rassal değişkendir.

Olasılık Yoğunluk ve Kümülatif Dağılım Fonksiyonu

Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu (PDF)

Herhangi bir rassal değişkenin olası değerlerinin ve o olası değerlere karşılık gelen olasılıklarla ilgili bilgilerin özetlendiği fonksiyona **olasılık yoğunluk fonksiyonu** (probability density function) ya da kısaca **PDF** denir. Örneğin, rassal değişken X'in PDF'si $f(x)$, $f(x_i)$ ya da $f_X(x_i)$ ile gösterilebilir.

Kümülatif Dağılım Fonksiyonu (CDF)

Herhangi bir rassal değişkenin belli bir değeri aşmama olasılığını gösteren fonksiyona **kümülatif dağılım fonksiyonu** (cumulative distribution function) ya da kısaca **CDF** denir. Örneğin, rassal değişken X'in CDF'i $F(x)$ ya da $F(x_i)$ ile gösterilebilir.

- PDF ve CDF arasındaki ilişki aşağıda verildiği gibidir.

$$f(x) = \frac{\partial F x}{\partial x}$$

Kesikli Rassal Değişkenler

- Herhangi bir kesikli rassal değişken, alabileceği olası değerler ve o olası değerlere karşılık gelen olasılıklar listelenerek yani PDF kullanılarak tamamen tanımlanabilir.
- Örneğin, X kesikli rassal değişkeninin $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ gibi n adet olası değeri varsa, bu olası değerlere karşılık gelen olasılıklar $p_1, p_2, \ldots, p_n$ aşağıdaki gibi PDF kullanılarak tanımlanabilir.

$$f(x_i) = p_i = P(X = x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

burada X'in x_i değerini alma olasılığı $f(x_i) = p_i$'ye eşittir ve

$$0 \leq f(x_i) \leq 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) = 1$$

- X kesikli rassal değişkeninin x_i değerini aşmamasını gösteren olasılık yani CDF ise aşağıdaki gibi tanımlabilir.

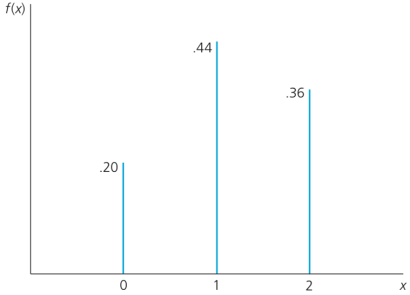
$$P(X \leq x_i) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) = \sum_{x \leq x_i}^{n} f(x) = F(x_i)$$

Kesikli Rassal Değişkenler - Örnek

- Bir basketçinin iki atış yaptığını ve X kesikli rassal değişkeninin başarılı atış sayısını gösterdiğini düşünelim. X'in alabileceği değerler $\{0, 1, 2\}$ olsun. Olasılık şöyle verilmiş olsun:

$$f(0) = 0.2, \quad f(1) = 0.44, \quad f(2) = 0.36$$

- Bu dağılımın grafiği şöyledir.



Şekil 5: İki Atışdaki Başarılı Atışları Gösteren Kesikli Rassal Değişkenin PDFt'si

Kaynak: Wooldridge (2016)

Kesikli Rassal Değişkenler - Örnek

- Bu basketçinin en az bir başarılı atış yapma olasılığı nedir?

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= f(1) + f(2) \\ &= 0.44 + 0.36 \\ &= 0.80 \end{aligned}$$

- Bu basketçinin en fazla bir başarılı atış yapma olasılığı nedir?

$$\begin{aligned} P(X \leq 1) &= P(X = 0) + P(X = 1) \\ &= f(0) + f(1) \\ &= 0.20 + 0.44 \\ &= 0.64 \end{aligned}$$

Sürekli Rassal Değişkenler

- Aynı kesikli rassal değişkenlerde olduğu gibi sürekli rassal değişkenler için de rassal değişkenin olası sonuçları hakkında bilgi veren olasılık yoğunluk fonksiyonunu tanımlayabiliriz.
- Kesikli rassal değişkenlerden farklı olarak, sürekli rassal değişkenler sayılamaz. Bu nedenle sürekli rassal değişkenin belli bir değere eşit olma olasılığı sıfırdır. Örneğin, sürekli rassal değişken X'in belirli bir değer olan x'i alma olasılığı:

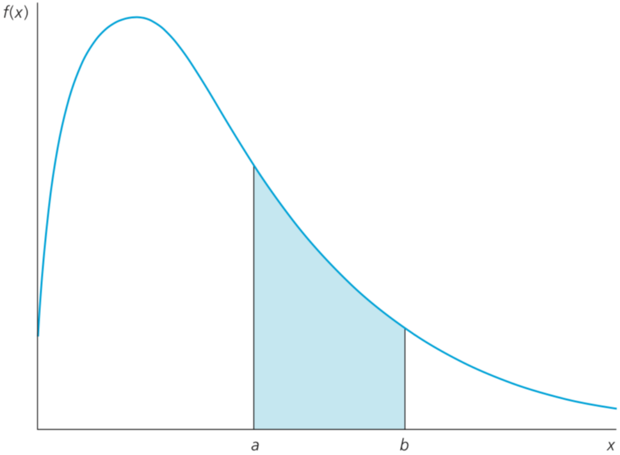
$$f(x) = P(X = x_i) = 0$$

- Bu nedenle, sürekli rassal değişkenin PDF'sini yalnızca bir dizi değer içeren olayları yani aralıkları hesaplamak için kullanırız. Örneğin, sürekli rassal değişken X'in a ve b gibi sabit sayıların arasında değer alma olasılığı aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

- Sürekli rassal değişken X'in PDF'si ve X'in a ve b arasında olma olasılığı Şekil 6'deki taralı alanda gösterilmiştir.

Sürekli Rassal Değişkenler



Şekil 6: Sürekli Rassal Değişken X'in PDF'si

Kaynak: Wooldridge (2016)

Sürekli Rassal Değişkenler

- Sürekli rassal değişken X'in PDF'si ve aralık olasılıkları aşağıdaki koşulları sağlar.

$$f(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

$$P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b)$$

- X sürekli rassal değişkeninin x değerini aşmamasını gösteren olasılık yani CDF ise aşağıdaki gibi tanımlabilir.

$$P(X \leq x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x$$

- Olasılıkları hesaplarken CDF ile ilgili aşağıdaki özellikler sıklıkla kullanılır.

$$P(X > c) = 1 - F(c), \quad c \in \mathbb{R}$$

$$P(a < X < a) = F(b) - F(a), \quad a, b \in \mathbb{R} \text{ ve } a < b$$

Beklenen Değer

Beklenen Değer

Rassal değişken X'in olası değerlerinin ağırlıklı ortalamasını ifade eden değere **beklenen değer** (expected value) denir ve $E(X)$, μ ya da μ_X ile gösterilir. Beklenen değer hesaplanırken ağırlıklar, olasılık yoğunluk fonksiyonu tarafından belirlenir.

$$E(X) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \cdots + x_n f(x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) \quad \text{(Kesikli Rassal Değişken)}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, \mathrm{d}x \quad \text{(Sürekli Rassal Değişken)}$$

Beklenen Değer Hesaplaması - Örnek 1

X kesikli rassal değişkeni $-1, 0, 2$ değerlerini sırasıyla $\frac{1}{8}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}$ olasıklarıyla alıyorsa, $E(X)$ nedir?

$$\begin{aligned} E(X) &= (-1) \times \frac{1}{8} + 0\frac{1}{2} + 2 \times \frac{3}{8} \\ &= 5/8 \end{aligned}$$

Beklenen Değer

- Rassal değişken X'in bir fonksiyonunun beklenen değeri:

$$E[g(X)] = \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\, f_X(x_i) \qquad \text{(Kesikli Rassal Değişken)}$$

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f_X(x)\, \mathrm{d}x \qquad \text{(Sürekli Rassal Değişken)}$$

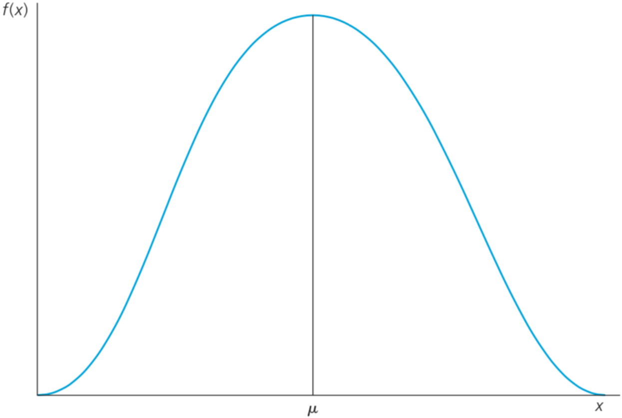
Beklenen Değer Hesaplaması - Örnek 2

X kesikli rassal değişkeni $-1, 0, 2$ değerlerini sırasıyla $\frac{1}{8}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}$ olasıklarıyla alıyorsa, $E(X^2)$ nedir?

$$\begin{aligned} E(X) &= (-1)^2 \times \frac{1}{8} + 0^2 \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{3}{8} \\ &= 13/8 \end{aligned}$$

- Sürekli rassal değişken X'in simetrik olan PDF'si ve beklenen değeri $E(X) = \mu$, Şekil 7'de gösterilmiştir. X'in simetrik dağıldığına dikkat edin.

Beklenen Değer



Şekil 7: Sürekli Rassal Değişken X'in PDF'si

Kaynak: Wooldridge (2016)

Beklenen Değerin Özellikleri

1. c sabit bir sayı ise

$$E(c) = c$$

2. X rassal bir değişken, a ve b sabit sayılar ise

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

3. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ rassal değişkenler ve $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sabit sayılar ise

$$E(a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n) = a_1E(X_1) + a_2E(X_2) + \cdots + a_nE(X_n)$$

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} a_iX_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_iE(X_i)$$

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) \quad \text{eğer} \quad a_i = 1$$

Varyans

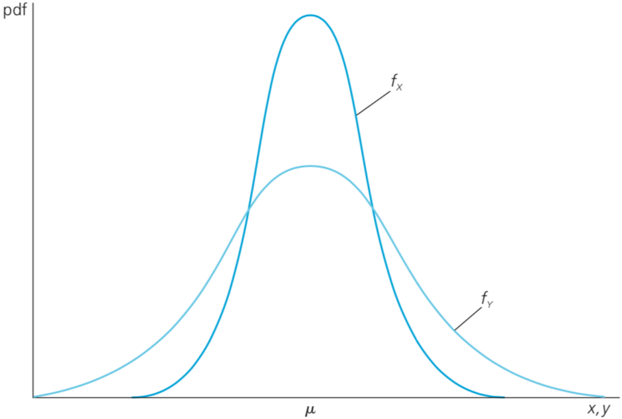
Varyans

Rassal değişken X'in kendi beklenen değeri $E(X) = \mu$ çevresindeki değişkenliği ifade eden değere **varyans** (variance) denir ve $Var(X)$, σ^2 ya da σ_X^2 ile gösterilir.

$$\begin{aligned} Var(X) &= E[(X-\mu)^2] \\ &= E[X^2 - 2X\mu + \mu^2] \\ &= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 \\ &= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 \\ &= E(X^2) - \mu^2 \end{aligned}$$

- Aynı ortalamaya yani beklenen değere fakat farklı varyansa sahip iki farklı sürekli rassal değişken X ve Y'nin PDF'leri Şekil 7'de gösterilmiştir.

Varyans



Şekil 8: Sürekli Rassal Değişkenler X ve Y'nin PDF'leri

Kaynak: Wooldridge (2016)

Varyansın Özellikleri

1. $0 \leq \text{Var} \leq +\infty$
2. c sabit bir sayı ise

$$Var(c) = 0$$

   Yani, sabit bir sayının varyansı sıfırdır.

3. X rassal bir değişken ve a sabit bir sayı ise

$$Var(aX) = a^2 Var(X)$$

   Yani, rassal bir değişken sabit bir sayıyla çarpılırsa, o rassal değişkenin varyansı sabit sayının karesiyle çarpılır.

4. X rassal bir değişken, a ve b sabit sayılar ise

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$

   Yani, rassal bir değişkene sabit bir sayının eklenmesi o rassal değişkenin varyansı değiştirmez.

Varyans

Varyans Hesabı

Rassal değişken x'in varyansı anakütle ve örneklem için:

$$Var(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n} \qquad \text{(Anakütle)}$$

$$\widehat{Var(x)} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1} \qquad \text{(Örneklem)}$$

burada n gözlem sayısıdır.

Standart Sapma

Standart Sapma

Rassal değişken X'in varyansının karekökünü ifade eden değere **standart sapma** (standard deviation) denir ve $sd(X)$, σ ya da σ_X ile gösterilir.

$$
\begin{aligned}
sd(X) &= +\sqrt{Var(X)} \\
&= +\sqrt{\sigma^2}
\end{aligned}
$$

Standart Sapmanın Özellikleri

1. $0 \leq \text{sd} \leq +\infty$
2. c sabit bir sayı ise

$$sd(c) = 0$$

   Yani, sabit bir sayının standart sapması sıfırdır.

3. X rassal bir değişken ve a sabit bir sayı ise

$$sd(aX) = |a| sd(X)$$

   Yani, rassal bir değişken sabit bir sayıyla çarpılırsa, o rassal değişkenin standart sapması sabit sayının mutlak değeri ile çarpılır.

4. X rassal bir değişken, a ve b sabit sayılar ise

$$sd(aX + b) = |a| sd(X)$$

   Yani, rassal bir değişkene sabit bir sayının eklenmesi o rassal değişkenin standart sapmasını değiştirmez.

Rassal Değişkeni Standardize Etmek

Rassal Değişkeni Standardize Etmek

Herhang bir dağılıma sahip, $X \sim (\mu, \sigma^2)$ rassal değişkeninin değerlerinden ortalamayı çıkartıp standart sapmaya bölersek elde edeceğimiz yeni rassal değişken $Z \sim (0, 1)$ dağılımına sahip olur. Bu sürece rassal değişken X'in **standardize edilme**si ve Z değişkenine ise **standardize edilmiş rassal değişken** denir.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad \longrightarrow \quad Z \sim (0, 1)$$

İspat: $Z = aX + b, \quad a = \frac{1}{\sigma}$ ve $b = \frac{-\mu}{\sigma}$ olarak tanımlanırsa:

$$\begin{aligned} E(Z) &= E(aX + b) \\ &= E(aX) + E(b) \\ &= aE(X) + b \\ &= a\mu + b \\ &= \frac{\mu}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(Z) &= Var(aX + b) \\ &= Var(aX) \\ &= a^2 Var(X) \\ &= \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1 \end{aligned}$$

Kovaryans

Kovaryans

İki rassal değişken X ve Y'nin ortalamada birbirlerine göre nasıl değiştiğini yani bu rassal değişkenlerin arasındaki ilişkiyi ifade eden değere **kovaryans** (covariance) denir ve $Cov(X,Y)$ ya da σ_{XY} ile gösterilir.

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] \\ &= E[(X-\mu_X)Y] \\ &= E[X(Y-\mu_Y)] \\ &= E(XY)-\mu_X\mu_Y \end{aligned}$$

- Kovaryans, iki rassal değişken arasındaki **doğrusal ilişki**nin (linear relationship) yönünü belirtir. Pozitif kovaryans, iki rassal değişkenin aynı yönde hareket ettiğini, negatif kovaryans ise zıt yönlerde hareket ettiğini gösterir.
- Kovaryans nedensellik belirtmez.
- Kovaryans, rassal değişkenlerin ölçü birimlerine bağlı olduğundan iki rassal değişken arasındaki doğrusal ilişkinin gücünü belirtmez. Bunun için korelasyon kavramını kullanacağız.

Kovaryansın Özellikleri

1. $-\infty \leq \text{Cov} \leq +\infty$
2. X ve Y rassal değişkenleri bağımsız ise

$$Cov(X, Y) = 0$$

   Fakat, bunun tersini doğru değildir. Yani aralarındaki kovaryansın sıfır, yani doğrusal olarak ilişkisiz, olması X ve Y'nin bağımsız olduğu anlamına gelmez. İki rassal değişkenin bağımsız olması için hem doğrusal hem de doğrusal olmayan şekilde ilişkisiz olması gerekir.
3. X ve Y rassal değişkenler, a_1, a_2, b_1 ve b_2 sabit sayılar ise

$$Cov(a_1X + b_1, a_2X + b_2) = a_1a_2Cov(X, Y)$$

4. **Cauchy-Schwartz Eşitsizliği**: X ve Y rassal değişkenler ise

$$|Cov(X, Y)| \leq sd(X)sd(Y)$$

Kovaryans

Kovaryans Hesabı

Rassal değişkenler x ve y'nin kovaryansı anakütle ve örneklem için:

$$Cov(x,y) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n} \qquad \text{(Anakütle)}$$

$$\widehat{Cov(x,y)} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n-1} \qquad \text{(Örneklem)}$$

burada n gözlem sayısıdır.

Korelasyon

Korelasyon

İki rassal değişken X ve Y'nin arasındaki doğrusal ilişkinin gücünü ifade eden değere **korelasyon** (correlation) denir ve $Corr(X,Y)$, ρ ya da ρ_{XY} ile gösterilir.

$$Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{sd(X)\ sd(Y)} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\ \sigma_Y}$$

- Korelasyon, rassal değişkenlerin ölçü birimlerine bağlı olmadığından kovaryansın aksine iki rassal değişken arasındaki doğrusal ilişkinin gücünü belirtir.
- Korelasyon nedensellik belirtmez.
- σ_X ve σ_Y her zaman pozitif olduğundan, $Cov(X,Y)$ ve $Corr(X,Y)$ her zaman aynı işarete sahiptir.
- Sadece ve sadece eğer $Cov(X,Y) = 0$ ise $Corr(X,Y) = 0$ olur.

Korelasyonun Özellikleri

1. $-1 \leq \text{Corr} \leq 1$
2. X ve Y rassal değişkenleri bağımsız ise

$$Corr(X,Y) = 0$$

   Fakat, bunun tersini doğru değildir. Yani aralarındaki korelasyonun sıfır, yani doğrusal olarak ilişkisiz, olması X ve Y'nin bağımsız olduğu anlamına gelmez. İki rassal değişkenin bağımsız olması için hem doğrusal hem de doğrusal olmayan şekilde ilişkisiz olması gerekir.
3. X ve Y rassal değişkenler ise

$$-1 \leq Corr(X,Y) \leq 1$$

4. X ve Y rassal değişkenler, a_1, a_2, b_1 ve b_2 sabit sayılar ise

$$Cov(a_1X + b_1, a_2X + b_2) = Cov(X,Y) \quad \text{eğer} \quad a_1a_1 > 0$$

$$Cov(a_1X + b_1, a_2X + b_2) = -Cov(X,Y) \quad \text{eğer} \quad a_1a_1 < 0$$

Rassal Değişkenlerin Toplamının Varyansı

1. X ve Y rassal değişkenler, a ve b sabit sayılar ise

$$Var(aX + bY) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y) + 2abCov(X, Y)$$

2. X ve Y rassal değişkenleri doğrusal ilişkisiz, yani $Cov(X, Y) = 0$, a ve b sabit sayılar ise

$$Var(aX + bY) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y)$$

$$Var(X + Y) = Var(X - Y) = Var(X) + Var(Y)$$

3. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ikili olarak doğrusal ilişkisiz rassal değişkenler ve $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sabit sayılar ise

$$Var(a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n) = a_1^2 Var(X_1) + a_2^2 Var(X_2) + \cdots + a_n^2 Var(X_n)$$

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(X_i)$$

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) \quad \text{eğer} \quad a_i = 1$$

Koşullu Beklenen Değer

- Kovaryans ve korelasyon iki rassal değişken arasındaki doğrusal ilişkiyi ölçer ve değişkenleri simetrik olarak ele alır, yani X ve Y aynı konumdadır.
- Oysa, çoğu kez X'i bağımsız ve Y'yi bağımsız değişken alarak, belli bir X değeri verilmişken Y'nin alacağı değeri bulmak isteriz. Böyle bir ilişki doğrusal olmayan türden olacaktır.
- Yani, koşullu beklenen değer kovaryans ve korelasyonun yakalayamayacağı doğrusal olmayan ilişkileri de gösterir.
- Koşullu beklenen değer için kovaryans ve korelasyondaki gibi tek bir sayıdan ibaret bir ölçü bulamayacağız. Onun yerine, X'in verilmiş değeri için Y'nin **koşullu beklenen değer**ine (conditional expected value) bakacağız.
- Koşullu beklenen değer $E(Y|X=x)$, $E(Y|x)$ ya da $E(Y|X)$ ile gösterilir.

Koşullu Beklenen Değer

Koşullu Beklenen Değer

Koşullu beklenen değer $E(Y|X)$, X'in bir fonksiyonudur ve Y'nin beklenen değerinin X ile birlikte nasıl değiştiğini gösterir.

$$E(Y|X) = \sum_{i=1}^{n} y_i f_{Y|X}(y_i|x) \qquad \text{(Kesikli Rassal Değişken)}$$

$$E(Y|X) = \int_{-\infty}^{+\infty} y_i f_{Y|X}(y_i|x)\, \mathrm{d}y \qquad \text{(Sürekli Rassal Değişken)}$$

Koşullu Beklenen Değer

Koşullu Beklenen Değer: Ücret vs. Eğitim Yılı

Farklı eğitim seviyeleri için ücretin beklenen değerini hesaplamak, ücretler ve eğitimin nasıl ilişkili olduğu konusunda önemli bilgiler sağlar. Varsayalım ki ücretin eğitim yılına göre koşullu beklenen değerini gösteren denklem aşağıdaki gibi doğrusal bir fonksiyon olsun.

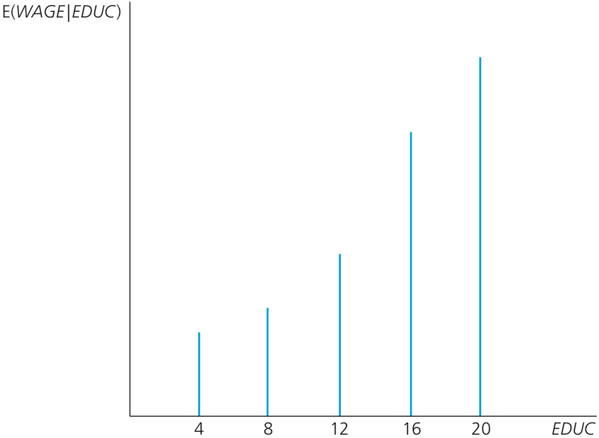
$$E(wage|educ) = \beta_0 + \beta_1 educ$$

$$E(wage|educ) = 1.05 + 0.45\, educ$$

$wage$: ücret; $educ$: eğitim yılı

- Yukarıda verilen ücretin eğitim yılına göre koşullu beklenen değeri Şekil 9'de gösterilmiştir.

Koşullu Beklenen Değer



Şekil 9: Ücretin Eğitim Yılına Göre Koşullu Beklenen Değeri

Kaynak: Wooldridge (2016)

Koşullu Beklenen Değerin Özellikleri

1. X rassal bir değişken ve $c(X)$ ise X'in herhangi bir fonksiyonu ise

$$E[c(X)|X] = c(X)$$

   Yani, X'e göre koşullu beklenen değer alıyorsak, X'in fonksiyonları sabit gibi düşünülebilir. Sabitin beklenen değeri kendisine eşittir.
   Örnek: $E(X^2|X) = X^2$

2. X ve Y rassal değişkenler, $a(X)$ ve $b(X)$ ise X'in herhangi bir fonksiyonu ise

$$E[a(X)Y + b(X)|X] = a(X)E(Y|X) + b(X)$$

   Örnek: $E(XY + 2X^2|X) = X\,E(Y|X) + 2X^2$

3. X ve Y bağımsız rassal değişkenler ise

$$E(Y|X) = E(Y)$$

   Yani, X ve Y bağımsızsa, Y'nin X'e göre koşullu beklenen değeri X'e bağlı değildir. X'in değeri ne olursa olsun Y'nin koşullu beklentisi koşulsuz beklentiye eşit olur.

Koşullu Beklenen Değerin Özellikleri

4. **Yinelenen Beklentiler Kanunu** (Law of Iterated Expectation): X ve Y rassal değişkenler ise

$$E[E(Y|X)] = E(Y)$$

Yani, eğer önce $E(Y|X)$'i X'in bir fonksiyonu olarak hesaplar ve daha sonra X'e göre koşullu beklentisini alırsak $E(Y)$'nin beklenen değerine göre ulaşırız. Bu özelliğin daha genel bir versiyonu: $E(Y|X) = E[E(Y|X,Z)|X]$

5. X ve Y rassal değişkenler ve $E(Y|X) = E(Y)$ ise

$$Cov(X,Y) = 0 \;\text{ ve }\; Corr(X,Y) = 0$$

Yani, X'in her fonksiyonu Y ile ilişkisizdir.

- U ve X rassal değişkenler ve $E(U|X) = 0$ ise

$$E[E(U|X)] = E(U) = 0 \quad \longrightarrow \quad E(U|X) = E(U) = 0 \qquad \text{(4. Özellik)}$$

$$E(U|X) = E(U) \quad \longrightarrow \quad Corr(U,X) = 0 \;\text{ ve }\; Corr(U,X) = 0 \qquad \text{(5. Özellik)}$$

Koşullu Varyans

Koşullu Varyans

Koşullu varyans $Var(Y|X)$, X'in bir fonksiyonudur ve Y'nin varyansının X ile birlikte nasıl değiştiğini gösterir.

$$\begin{aligned} Var(Y|X) &= E\left[(Y - E(Y|X))^2|X\right] \\ &= E(Y^2|X) - E(Y|X)^2 \end{aligned}$$

Eğer X ve Y bağımsız ise

$$Var(Y|X) = Var(Y)$$

Normal Dağılım

- X sürekli rassal değişkeni **normal dağılıma** (normal distribution) uyuyorsa herhangi bir değeri alabilir.
- Normal dağılım ve ondan türetilen diğer dağılımlar, olasılık hesaplamalarını ve istatiksel çıkarımı oldukça basitleştirdiği için istatistik ve ekonometride yaygın olarak kullanılır.
- Normal dağılım Carl Friedrich Gauss nedeniyle bazen **Gauss dağılımı** (Gaussian distribution) olarak da adlandırılır.
- Normal dağılımın iki paremetresi vardır.

$$E(X) = \mu \qquad \text{(Beklenen Değer)}$$

$$Var(X) = \sigma^2 \qquad \text{(Varyans)}$$

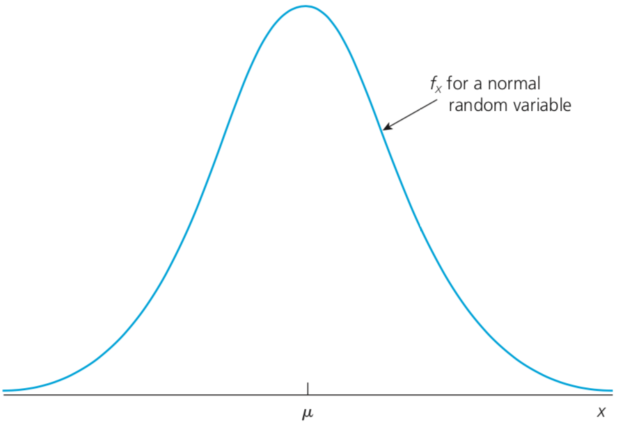
- Normal dağılım bu iki parametre kullanılarak kısaca aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

- Genel şekli Şekil 10'de verilen ve genel grafiği simetrik ve çan şekilinde olan normal dağılıma ait PDF'nin formülü aşağıdaki gibidir.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-(x-\mu)^2/2\sigma^2\right], \quad -\infty < x < \infty$$

Normal Dağılım



Şekil 10: Normal Dağılıma Ait PDF'nin Genel Şekli

Kaynak: Wooldridge (2016)

Standart Normal Dağılım

- Normal dağılıma sahip Z sürekli rassal değişkeninin beklenen değeri 0, yani $E(Z) = 0$, ve varyansı 1, yani $Var(Z) = 1$, ise Z sürekli rassal değişkeni **standart normal dağılım**a (standard normal distribution) sahiptir.

$$E(Z) = 0 \qquad \text{(Beklenen Değer)}$$

$$Var(Z) = 1 \qquad \text{(Varyans)}$$

- Bu yönüyle standart normal dağılım, normal dağılımın özel bir durumudur ve yine iki parametre kullanılarak aşağıdaki gibi gösterilebilir.

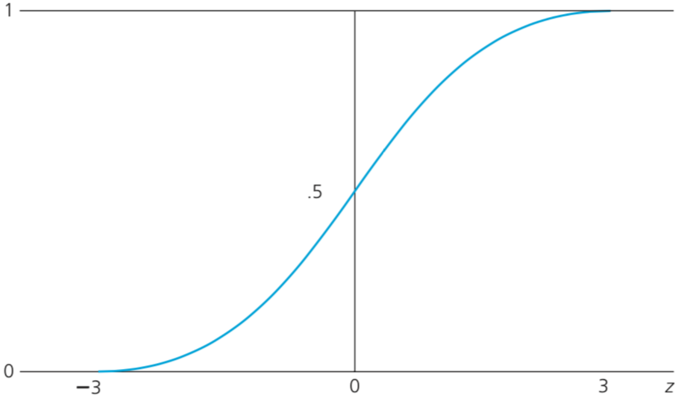
$$Z \sim N(0, 1)$$

- Standart normal dağılıma ait PDF'nin formülü aşağıdaki gibidir.

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-z^2/2\right), \quad -\infty < z < \infty$$

- Standart normal dağılıma ait CDF'nin şekli Şekil 11'de verilmiştir.

Standart Normal Dağılım



Şekil 11: Standart Normal Dağılıma Ait CDF

Kaynak: Wooldridge (2016)

Normal Dağılımın Özellikleri

1. X rassal bir değişken ve $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ise

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \quad \longrightarrow \quad Z \sim N(0,1)$$

İspat: $Z = aX + b$, $a = \frac{1}{\sigma}$ ve $b = \frac{-\mu}{\sigma}$ olarak tanımlanırsa:

$$\begin{aligned} E(Z) &= E(aX+b) \\ &= E(aX) + E(b) \\ &= aE(X) + b \\ &= a\mu + b \\ &= \frac{\mu}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(Z) &= Var(aX+b) \\ &= Var(aX) \\ &= a^2 Var(X) \\ &= \frac{\sigma^2}{\sigma^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Yani, herhangi bir normal dağılıma sahip olan X rassal değişkeni standardize edildiğinde standard normal dağılıma sahip olur.

Normal Dağılımın Özellikleri

2. X rassal bir değişken ve $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ise

$$W = aX + b \quad \longrightarrow \quad W \sim N(a\mu + b,\ a^2\sigma^2)$$

İspat:

$$\begin{aligned} E(W) &= E(aX + b) \\ &= E(aX) + E(b) \\ &= aE(X) + b \\ &= a\mu + b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(W) &= Var(aX + b) \\ &= Var(aX) \\ &= a^2 Var(X) \\ &= a^2\sigma^2 \end{aligned}$$

Yani, herhangi bir normal dağılıma sahip olan X rassal değişkeni doğrusal transformasyona uğradığında yine normal dağılıma sahip olan başka bir rassal değişken elde edilir.

Normal Dağılımın Özellikleri

3. X ve Y bağımsız ve özdeş normal dağılıma sahip rassal değişkenler, yani $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ve $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ ise,

$$W = X + 2Y \quad \longrightarrow \quad W \sim N(3\mu,\ 5\sigma^2)$$

İspat:

$$\begin{aligned} E(W) &= E(X + 2Y) \\ &= E(X) + E(2Y) \\ &= E(X) + 2E(Y) \\ &= \mu + 2\mu \\ &= 3\mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(W) &= Var(X + 2Y) \\ &= Var(X) + 4Var(Y) \\ &= \sigma^2 + 4\sigma^2 \\ &= 5\sigma^2 \end{aligned}$$

Yani, bağımsız ve özdeş normal dağılıma sahip rassal değişkenlerin herhangi bir doğrusal kombinasyonu yine normal dağılıma sahip olur.

Normal Dağılımın Özellikleri

4. $X_1, X_1, \ldots, X_n$ bağımsız ve özdeş normal dağılıma sahip rassal değişkenler, yani $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ ise,

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \quad \longrightarrow \quad \bar{X} \sim N(\mu,\ \sigma^2/n)$$

İspat:

$$\begin{aligned} E(\bar{X}) &= E\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right) \\ &= \frac{E(X_1) + \cdots + E(X_n)}{n} \\ &= \frac{n\mu}{n} \\ &= \mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(\bar{X}) &= Var\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right) \\ &= \frac{Var(X_1) + \cdots + Var(X_n)}{n^2} \\ &= \frac{n\sigma^2}{n^2} \\ &= \sigma^2/n \end{aligned}$$

Yani, bağımsız ve özdeş normal dağılıma sahip rassal değişkenlerin ortalaması yine normal dağılıma sahip olur.

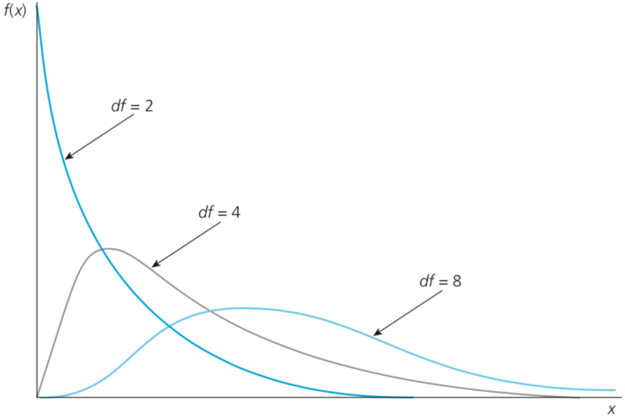
Ki-Kare Dağılımı

- $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ bağımsız standart normal dağılıma sahip rassal değişkenler, yani $Z_i \sim N(0,1)$ ise bunların karelerinin toplamı ile ifade edilen X rassal değişkeni n **serbestlik derecesi** (degrees of freedom-df) ile **ki-kare dağılımı**na (chi-square distribution) uyar. Ki-kare dağılımı kısaca aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$X = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \quad \longrightarrow \quad X \sim \chi_n^2$$

- Bağımsız bilgi sayısını ifade eden serbestlik derecesi kavramı, ekonometrik analizde önemli bir rol oynar.
- Ki-kare dağılımındaki serbestlik derecesi (s.d.), toplamdaki terimlerin sayısına karşılık gelir.
- Şekil 12'de farklı serbestlik derecesine sahip ki-kare dağılımının PDF'lerinden görüldüğü üzere ki-kare dağılımı hiçbir zaman negatif değildir ve ayrıca normal dağılım gibi simetrik de değildir.

Ki-Kare Dağılımı



Şekil 12: Farklı Serbestlik Derecesine Sahip Ki-Kare Dağılımına Ait PDF'ler

Kaynak: Wooldridge (2016)

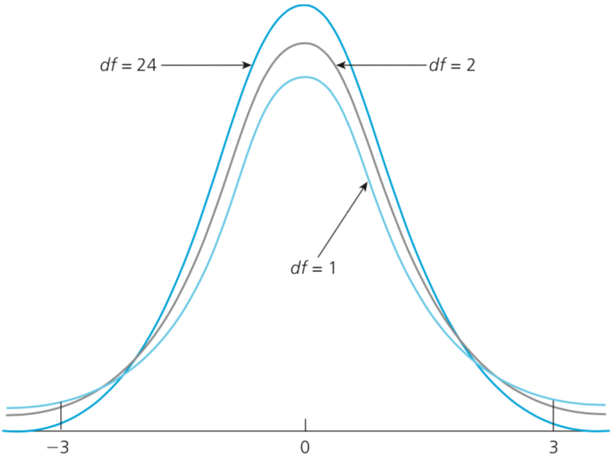
t-Dağılımı

- Z standart normal dağılıma ve X ise n serbestlik derecesi ile ki-kare dağılımına sahip bağımsız rassal değişkenler olduğunda, yani $Z \sim N(0, 1)$ ve $X \sim \chi^2_n$, aşağıdaki gibi tanımlanan T rassal değişkeni n serbestlik derecesi ile **t-dağılımı**na (t-distribution) uyar. t-dağılımı kısaca aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$T = \frac{Z}{\sqrt{X/n}} \quad \longrightarrow \quad T \sim t_n$$

- t-dağılımı, serbestlik derecesini paydadaki ki-kare rassal değişkeninden alır.
- Şekil 13'de farklı serbestlik derecelerine sahip t-dağılımının PDF'lerinden görüldüğü üzere t-dağılımı, standart normal dağılıma benzer bir şekle sahiptir. Fakat, standart normal dağılıma göre PDF'si daha fazla yayılmıştır ve bu nedenle kuyruklarda daha fazla alana sahiptir.
- Serbestlik derecesi büyüdükçe t-dağılımı standart normal dağılıma yakınsar.

t-Dağılımı



Şekil 13: Farklı Serbestlik Derecesine Sahip t-Dağılımına Ait PDF'ler

Kaynak: Wooldridge (2016)

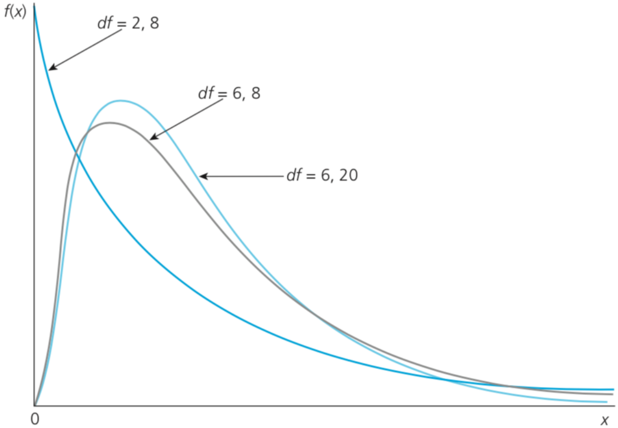
F-Dağılımı

- X_1 ve X_2 sırasıyla k_1 ve k_2 serbestlik derecesi ile ki-kare dağılımına sahip bağımsız rassal değişkenler olduğunda, yani $X_1 \sim \chi^2_{k_1}$ ve $X_2 \sim \chi^2_{k_2}$, aşağıdaki gibi tanımlanan F rassal değişkeni k_1 ve k_2 serbestlik dereceleri ile **F-dağılımı**na (F-distribution) uyar. F-dağılımı kısaca aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$F = \frac{X_1/k_1}{X_2/k_2} \quad \longrightarrow \quad F \sim F_{k_1,k_2}$$

- F-dağılımı, serbestlik derecelerini pay ve paydadaki ki-kare rassal değişkenlerinden alır.
- F_{k_1,k_2}, serbestlik derecelerinin sırası çok önemlidir. k_1 tamsayısı paydaki serbestlik derecesi olarak adlandırılır çünkü paydaki ki-kare rassal değişkeni ile ilişkilidir. Aynı şekilde, k_2 tamsayısı paydadaki serbestlik derecesi olarak adlandırılır çünkü paydadaki ki-kare rassal değişkeni ile ilişkilidir
- Şekil 14'de farklı serbestlik derecelerine sahip F-dağılımının PDF'lerinden görüldüğü üzere F-dağılımı hiçbir zaman negatif değildir ve ayrıca normal dağılım gibi simetrik de değildir.

F-Dağılımı



Şekil 14: Farklı Serbestlik Derecelerine Sahip F-Dağılımına Ait PDF'ler

Kaynak: Wooldridge (2016)

Kaynaklar

Gujarati, D.N. (2009). *Basic Econometrics*. Tata McGraw-Hill Education.
Stock, J.H. ve M.W. Watson (2015). *Introduction to Econometrics*.
Tastan, H. (2020). *Lecture on Econometrics I. Personal Collection of H. Tastan*. Retrieved from Online.
Wooldridge, J.M. (2016). *Introductory Econometrics: A Modern Approach*. Nelson Education.

Ek Bilgiler

- Euler sayısı e'yi hesaplayabilmek için birleşik faiz hesabını kullanacağız.

$$A = P(1+r)^n$$

A dönem sonu miktar; P anapara miktarı; r faiz oranı; n ise dönem sayısıdır.

- Varsayalım ki 1 TL anaparanız var ve yıllık faiz oranı %100.
  - Anaparanızı yıllık faize verdiğinizde, faiz oranı $\frac{1}{1}$ = %100 olacak ve yıl sonunda elde edeceğiniz miktar: $A = 1\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2$ TL
  - Aynı miktarı aylık faize verdiğinizde, faiz oranı $\frac{1}{12}$ = %8.33 olacak ve yıl sonunda elde edeceğiniz miktar: $A = 1\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} = 2.61$ TL
  - Aynı miktarı günlük faize verdiğinizde, faiz oranı $\frac{1}{365}$ = %0.27 olacak ve yıl sonunda elde edeceğiniz miktar: $A = 1\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365} = 2.71$ TL
  - Aynı miktar sürekli faiz işleyecek şekilde yatırılırsa, yıl sonunda elde edeceğiniz miktar: $A = 1\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{x\to\infty} = 2.718281828\ldots$ TL
- Kısaca euler sayıs e şu şekilde hesaplanabilir.

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots$$

Sunuma Geri Dön