Çoklu Doğrusal Regresyon Modeli: Tahmin

Ekonometri I

Dr. Ömer Kara[1]

[1] İktisat Bölümü
Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

8 Eylül 2025

Taslak

Motivasyon

Bu bölümde, sırasıyla aşağıdaki konular incelenecektir.

- Çoklu Doğrusal Regresyon modeli
- Çoklu Doğrusal Regresyon modelinde Gauss–Markov varsayımları
- Çoklu Doğrusal Regresyon modelinin tahminine ait yöntemler
- Sıradan En Küçük Kareler parametre tahmincileri
- Basit Doğrusal Regresyon ve çoklu doğrusal regresyon tahminlerinin karşılaştırılması
- Determinasyon Katsayısı
- Sıradan En Küçük Kareler parametre tahmincilerinin özellikleri
- Çoklu Doğrusal Regresyon modelinde Gauss–Markov teoremi
- Çoklu Doğrusal Regresyonda modelleme sorunları

Motivasyon - BDR.5

- Basit Doğrusal Regresyon (BDR) analizinde kilit varsayım olan BDR.5 varsayımı çoğu zaman gerçekçi olmayan bir varsayımdır.

BDR.5: Sıfır Koşullu Ortalama

$$E(u|\mathbf{x}) = E(u) = 0$$

$$Cov(x, u) = 0, \quad Corr(x, u) = 0 \quad \text{ve} \quad E(xu) = 0$$

Sonuç: u ve x ortalama bağımsızdır. Yani u ve x doğrusal olarak ilişkisizdir.

Motivasyon - BDR.5

- BDR.5 varsayımı ile, y'yi etkileyen diğer tüm faktörler (gözlenemeyen hata terimi u) x ile ilişkisizdir (ceteris paribus).
- Bu faktörler spesifik (kesin) olarak kontrol edilemez. Sadece, bu faktörlerin ortalama olarak değişmediği varsayılır ($\Delta u = 0$).
- İktisadi değişkenlerin bir çoğu birbiriyle ilişkili olduğundan bağımsız bir değişken x'in bağımlı değişken y üzerindeki yalın etkisini bulmak için bazı faktörlerin spesifik olarak kontrol edilmesi gerekir.
- BDR analizinde spesifik kontrol mümkün olmadığından dolayı ceteris paribus varsayımını uygulamak çok zordur.
- Bu nedenle BDR analizinde çoğu zaman BDR.5 varsayımı ihlal edilir ve parametre tahmincileri (β_0 ve β_1) sapmalı olur.
- Çoklu Doğrusal Regresyon (ÇDR) analizinde ise açıkça diğer birçok faktör spesifik olarak kontrol edildiğinden ceteris paribus varsayımına uygundur.

Motivasyon - Fonksiyonel Form

- ÇDR analizinde bağımlı değişkeni (y) eşanlı olarak etkileyen pek çok etkeni (x) kontrol edebiliriz. Kısacası, çok sayıda bağımsız değişkeni (x) kullanabiliriz.
- Modele yeni bağımsız değişkenler ekleyerek y'deki değişimin daha büyük bir kısmını açıklayabiliriz. Yani, y'nin tahmini için daha üstün/iyi modeller geliştirebiliriz.
- ÇDR analizinde regresyonun biçimini, yani fonksiyonel formunu, belirlemede çok daha geniş olanaklara sahip oluruz.
- Kısacası, ÇDR modeli bize daha zengin bir analiz imkanı sunar.

ÇDR Modeli: Örnek 1

2 Bağımsız Değişkenli ÇDR Modeli

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u$$

Ücret vs. Eğitim Modeli

$$wage = \beta_0 + \beta_1 educ + \beta_2 exper + u$$

$wage$: saatlik ücret (dolar); $educ$: eğitim düzeyi (yıl); $exper$: tecrübe düzeyi (yıl)

- β_1, ücretleri etkileyen diğer tüm faktörler sabit tuttuğumuzda ($\Delta exper$ ve $\Delta u = 0$), eğitimin ücretler üzerindeki etkisini ölçer.
- β_2, ücretleri etkileyen diğer tüm faktörler sabit tuttuğumuzda ($\Delta educ$ ve $\Delta u = 0$), tecrübenin ücretler üzerindeki etkisini ölçer.
- Yukarıdaki regresyonda tecrübeyi sabit tutarak eğitimin ücretlere etkisini ölçebiliyoruz. Basit Doğrusal Regresyonda bu olanak yoktu. Sadece $educ$ ile u ilişkisizdir diye varsayıyorduk. Yani sadece $\Delta u = 0$ diyebiliyorduk.

ÇDR Modeli: Örnek 2

Sınav Başarı Modeli

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u$$

$$avgscore = \beta_0 + \beta_1 expend + \beta_2 avginc + u$$

$avgscore$: ortalama sınav sonucu; $expend$: öğrencinin eğitim harcaması; $avginc$: ortalama aile geliri

- Eğer ortalama aile gelirini ($avginc$) modele doğrudan sokmazsak (yanlış modeli kullanırsak), onu yanlış modeledeki hata teriminin (v) içine almış oluruz.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \qquad \text{(Doğru Model)}$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + v \qquad \text{(Yanlış Model)}$$

$$v = \beta_2 x_2 + u \qquad \text{(Yanlış Model Hata Terimi)}$$

ÇDR Modeli: Örnek 2

- Doğru ve yanlış modelden elde edeceğimiz tahminler farklı olacağından, modeller ve onların Örneklem Regresyon Fonksiyonları (ÖRF) aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \longrightarrow \hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 \quad \text{(Doğru Model ve ÖRF)}$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + v \longrightarrow \tilde{y} = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x_1 \quad \text{(Yanlış Model ve ÖRF)}$$

$$v = \beta_2 x_2 + u \quad \text{(Yanlış Model Hata Terimi)}$$

- Ortalama aile geliri (*avginc*), öğrencinin harcaması (*expend*) ile yakından ilişkili olduğundan yanlış model kullanıldığında:
  - x_1 ile v ilişkili olacaktır. $\longrightarrow Corr(x_1, v) \neq 0$
  - BDR.5 varsayımı ihlal edilecektir. $\longrightarrow E(v|\mathbf{x}) \neq 0$
  - Sonuç olarak $\tilde{\beta}_1$ sapmalı tahmin edilecektir. $\longrightarrow E(\tilde{\beta}_1) \neq \beta_1$
- Eğer doğru modeli (*avginc* değişkenini modele ekleyerek) kullanırsak hem *avginc*'i doğrudan kontrol etme olanağına kavuşmuş olacağız hem de sapmasız parametre tahmincileri elde edeceğiz.

ÇDR Modeli: Örnek 3

Tüketim Modeli: Karesel Fonksiyon

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \longrightarrow y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_1^2 + u$$

$$cons = \beta_0 + \beta_1 inc + \beta_2 inc^2 + u$$

$cons$: tüketim; inc: gelir; $x_1 = inc$; $x_2 = inc^2$; $x_2 = x_1^2$

- Bu modelde β_1'in yorumu farklı olacaktır. Geliri (inc) değiştirirken, gelirin karesini (inc^2) sabit ($\Delta inc^2 = 0$) tutamayız. Çünkü, gelir değişirse karesi de değişir.
- Burada, gelirdeki bir birim değişmenin tüketim üzerindeki etkisi, yani marjinal tüketim eğilimi (marginal propensity to consume) şu şekilde hesaplanabilir:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x_1} \approxeq \beta_1 + 2\beta_2 x_1 \quad \longrightarrow \quad \frac{\Delta cons}{\Delta inc} \approxeq \beta_1 + 2\beta_2 inc$$

k Bağımsız Değişkenli ÇDR Modeli

Model

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + u \qquad \text{(İndekssiz)}$$

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_k x_{ik} + u_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad \text{(İndeksli)}$$

- k: bağımsız değişken sayısı $\longrightarrow j = 1, 2, \ldots, k$
- $k + 1$: bilinmeyen sabit β parametre sayısı $\longrightarrow \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k$
- n: gözlem (veri) sayısı $\longrightarrow i = 1, 2, \ldots, n$ ve $s = 1, 2, \ldots, n, \quad i \neq s$
- y: bağımlı değişken
- x_j: j'inci bağımsız değişken $\longrightarrow x_1, x_2, \ldots, x_k$
- u: Hata terimi, x'ler dışında modele dahil edilmemiş tüm faktörlerin ortak etkisi
- β_0: Kesim parametresi (1 tane var), sabit terim olarak da adlandırılır
- β_j: x_j bağımsız değişkeni için eğim parametresi (k tane var)
- $\mathbf{x}$: Tüm bağımsız değişkenlerin temsili $\longrightarrow \mathbf{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$
- Yukarıdaki model bazen **anakütle modeli** olarak da bilinir.

k Bağımsız Değişkenli ÇDR Modeli

Model

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + u \qquad \text{(İndekssiz)}$$

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_k x_{ik} + u_i \qquad \text{(İndeksli)}$$

- u: Bağımlı değişken y üzerinde etkili olan bağımsız değişken x'ler dışındaki diğer gözlenemeyen faktörleri temsil eder.
- β_0: $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_k = 0$ iken y'nin alacağı değeri gösterir.
- β_j: y'yi etkileyen diğer tüm faktörler sabit tutulduğunda x_j'deki değişmenin y'de yaratacağı yalın etkiyi/değişmeyi gösterir.
- β_1: y'yi etkileyen diğer tüm faktörler, yani diğer x'ler ve u'da içerilen faktörler, sabitken ($\Delta x_2 = \Delta x_3 = \cdots = \Delta x_k = \Delta u = 0$), x_1'deki değişmenin y'de yaratacağı yalın etkiyi/değişmeyi gösterir.
    - Parametreleri yorumlarken fonksiyonel forma dikkat edilmelidir.
    - Farklı fonksiyonel formların yorumlamaları hakkındaki detaylı bilgi "Ekonometri I - Basit Doğrusal Regresyon Modeli" konusunda bulunabilir.
- Modele ne kadar çok farklı x bağımsız değişkeni eklenirse eklensin dışarıda bırakılmış ya da gözlenemeyen faktörler her zaman olacaktır.

Gauss–Markov Varsayımları

ÇDR.1: Gözlem Sayısı

Gözlem sayısı n tahmin edilecek anakütle parametre sayısından büyük ya da en azından eşit olmalıdır.

$$n \geq k + 1$$

ÇDR.2: Parametrelerde Doğrusallık

Model parametrelerde doğrusaldır.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + u \checkmark$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \checkmark$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_1^2 + u \checkmark$$

$$y = \beta_0 + \beta_1^2 x_1 + \beta_2 x_2 + u \times$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \sqrt{\beta_2} x_2 + u \times$$

Detay

Gauss–Markov Varsayımları

ÇDR.3: Rassallık

Tahminde kullanılan n tane gözlem ilgili anakütleden rassal örnekleme yoluyla seçilmiştir. Yani gözlemler stokhastiktir (rassal), yani deterministik (kesin) değildir.

$$\{(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik}, y_i) : i = 1, 2, \ldots, n\}$$

ÇDR.4: Tam Çoklu Doğrusal Bağıntının Olmaması

Örneklemde (ve bu nedenle anakütlede) bağımsız değişken x'lerin hiçbiri kendi içinde sabit değildir (yeterli değişenlik vardır) ve bağımsız değişkenler arasında tam çoklu doğrusal bağıntı (TÇDB) yoktur.

$$\sum_{i=1}^{n} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2 > 0, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \quad \longrightarrow \quad x_2 = 2x_1 \quad \text{TÇDB VAR ✘}$$

$$\longrightarrow \quad x_2 = x_1^2 \quad \text{TÇDB YOK ✔}$$

▸ Detay

Gauss–Markov Varsayımları

ÇDR.5: Sıfır Koşullu Ortalama

Bağımsız değişkenlerin herhangi bir değeri verildiğinde, u hata teriminin beklenen değeri sıfıra eşittir.

$$E(u|x_1, x_2, \ldots, x_k) = E(u|\mathbf{x}) = 0$$

Detay

- BDR'de yaptığımız gibi Yinelenen Beklentiler Kanunu ve koşullu beklenen değerin 5. özelliği kullanılarak ÇDR için Sıfır Koşullu Ortalama varsayımı yeniden tanımlanabilir.

ÇDR.5: Sıfır Koşullu Ortalama

$$E(u|\mathbf{x}) = E(u) = 0$$

$$Cov(x_j, u) = 0, \quad Corr(x_j, u) = 0 \quad \text{ve} \quad E(x_j u) = 0, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

Sonuç: u ve x_j ortalama bağımsızdır. Yani u ve x_j doğrusal olarak ilişkisizdir.

Ek Bilgi

Gauss–Markov Varsayımları

ÇDR.6: Otokorelasyon Olmaması

Hata terimleri arasında otokorelasyon yoktur.

$$Corr(u_i, u_s | x_1, x_2, \ldots, x_k) = 0, \quad i \neq s$$

$$Corr(u_i, u_s | \mathbf{x}) = 0, \quad i \neq s$$

$$Corr(u_i, u_s) = 0, \quad i \neq s$$

- ÇDR.6 varsayımı, yatay-kesit analizindeki rassallık varsayımı (ÇDR.3) nedeniyle genellikle otomatik olarak sağlanır. Fakat çok ekstrem durumlarda gereklidir ve bu nedenle diğer birçok kaynaktan farklı olarak eklenmiştir.
- ÇDR.6 varsayımı aşağıdaki eşitlikleri de sağlar.

ÇDR.6: Otokorelasyon Olmaması

$$Cov(u_i, u_s | \mathbf{x}) = 0 \quad \text{ve} \quad Cov(u_i, u_s) = 0, \quad i \neq s$$

$$E(u_i u_s | \mathbf{x}) = 0 \quad \text{ve} \quad E(u_i u_s) = 0, \quad i \neq s$$

Ek Bilgi

Gauss–Markov Varsayımları

ÇDR.7: Sabit Varyans (Homoscedasticity)

u hata teriminin bağımsız değişken x'lere göre koşullu varyansı sabittir.

$$Var(u|x_1, x_2, \ldots, x_k) = \sigma^2$$

$$Var(u|\mathbf{x}) = \sigma^2$$

$$Var(u) = \sigma^2$$

Detay

- ÇDR.7 varsayımı aşağıdaki eşitlikleri de sağlar.

ÇDR.7: Sabit Varyans (Homoscedasticity)

$$E(u^2|\mathbf{x}) = \sigma^2 \quad \text{ve} \quad E(u^2) = \sigma^2$$

Ek Bilgi

- σ **regresyonun standart sapması**dır (bilinmiyor, bu nedenle tahmin edilecek).

Gauss–Markov Varsayımları

- Yukarıda verilen **Gauss–Markov Varsayımları** yatay-kesit verisi ile yapılan regresyon için geçerli varsayımlardır.
- Zaman serileri ile yapılan regresyonlarda bu varsayımların değiştirilmesi gerekir.
- Gauss–Markov Varsayımları, **ÇDR Varsayımları** olarak da anılır.
- Bazı ÇDR Varsayımlarının detayı ilerleyen slaytlarda konu akışı içinde verilmiştir.
- Gauss–Markov Varsayımları daha sonra **Gauss–Markov Teoremi**'ni oluşturmada kullanılacaktır.
- Gauss–Markov Teoremi ise ÇDR modelinin **Sıradan En Küçük Kareler Yöntemi** ya da **Momentler Yöntemi** ile tahmini için teorik dayanak sağlamada kullanılacaktır. Bakınız Slayt 84.

Anakütle Regresyon Fonksiyonu

- **Anakütle Regresyon Fonksiyonu (ARF)**, ÇDR.5 varsayımı altında, bağımlı değişken y'nin bağımsız değişken $\mathbf{x}$'lere göre koşullu ortalamasıdır.

Anakütle Regresyon Fonksiyonu (ARF)

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + u \quad \text{(Model)}$$

$$E(y|\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k \quad \text{(ARF - İndekssiz)}$$

$$E(y_i|\mathbf{x}_i) = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_k x_{ik} \quad \text{(ARF - İndeksli)}$$

- ARF tektir ve bilinmez.
- ARF, bağımsız değişken x'lerin doğrusal bir fonksiyonudur.

Anakütle Regresyon Fonksiyonu

- ÇDR.5 ve ÇDR.7 varsayımları altında bağımlı değişken y'nin bağımsız değişken $\mathbf{x}$'lere göre koşullu dağılımı aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

y'nin $\mathbf{x}$'e Göre Koşullu Dağılımı

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + u \qquad \text{(Model)}$$

$$E(y|\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k \qquad \text{(ARF)}$$

$$Var(y|\mathbf{x}) = \sigma^2$$

$$y|\mathbf{x} \sim (\underbrace{\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k}_{\text{Ortalama}}, \underbrace{\sigma^2}_{\text{Varyans}}) \qquad (y|\mathbf{x}\text{'in dağılımı})$$

Ek Bilgi

- Verilmiş bağımsız değişken x'ler düzeyinde bağımlı değişken y'nin dağılımının ortalaması $E(y|\mathbf{x})$ ve varyansı σ^2'dir.

Örneklem Regresyon Fonksiyonu: Amaç

- ÇDR tahminindeki asıl amacımız sırasıyla:
  - Öncelikle, iktisat teorisine göre model oluşturmak.
  - Gauss–Markov varsayımları kullanarak ARF'yi oluşturmak.
  - ARF'yi rassal örneklemeyle seçtiğimiz belli sayıdaki veriyi kullanarak tahmin etmektir.
- ARF'nin tahmini ise **Örneklem Regresyon Fonksiyonu**'dur ve bu tahmin örneklemden örnekleme değişir.

Model

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + u$$

Anakütle Regresyon Fonksiyonu (ARF)

$$E(y|\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k$$

Örneklem Regresyon Fonksiyonu (ÖRF)

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \cdots + \hat{\beta}_k x_k$$

- ARF'deki parametreler (β_0, β_j'ler) bilinmeyen sabit sayılarken, ÖRF'deki parametreler ($\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$'lar) örneklemden örnekleme değişen rassal değişkenlerdir.

Örneklem Regresyon Fonksiyonu: Amaç

Model

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + u \qquad \text{(İndekssiz)}$$

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_k x_{ik} + u_i \qquad \text{(İndeksli)}$$

Anakütle Regresyon Fonksiyonu (ARF)

$$E(y|\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k \qquad \text{(İndekssiz)}$$

$$E(y_i|\mathbf{x}_i) = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_k x_{ik} \qquad \text{(İndeksli)}$$

Örneklem Regresyon Fonksiyonu (ÖRF)

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \cdots + \hat{\beta}_k x_k \qquad \text{(İndekssiz)}$$

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} + \cdots + \hat{\beta}_k x_{ik} \qquad \text{(İndeksli)}$$

Örneklem Regresyon Fonksiyonu

Örneklem Regresyon Fonksiyonu (ÖRF)

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \cdots + \hat{\beta}_k x_k \qquad \text{(İndekssiz)}$$

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} + \cdots + \hat{\beta}_k x_{ik} \qquad \text{(İndeksli)}$$

$$\underbrace{y_i}_{\text{Gözlenen Değer}} = \underbrace{\hat{y}_i}_{\text{Tahmin Edilen Değer}} + \underbrace{\hat{u}_i}_{\substack{\text{Kalıntı (Artık)} \\ \text{Rassal Değil (Deterministik)}}}$$

- $\hat{y}_i$: y_i bağımlı değişkeninin tahmini
- Paramete tahmincileri örneklemden örnekleme değişir, yani rassaldır.
  - $\hat{\beta}_0$: β_0 kesim parametresinin tahmini (1 tane var)
  - $\hat{\beta}_j$: β_j eğim parametresinin tahmini (k tane var)
- $\hat{u}_i$: Kalıntı (artık) olarak adlandırılır. Gözlenen değer y_i ile tahmin edilen değer $\hat{y}_i$'nın farktır. Rassal değildir, tahmin sırasında hesaplanır. Hata terimi u_i'nun örneklem analoğu olarak yorumlanabilir fakat kesinlikle aynı şeyler değildir.
- Hata terimi u ve kalıntı $\hat{u}$ arasındaki farklar için Slayt 25'i inceleyin.

Örneklem Regresyon Fonksiyonu

- Model, ARF ve ÖRF denklemleri arasında dikkat edilmesi gereken farklar vardır.

Model, ARF ve ÖRF

$$\underbrace{y_i}_{\text{Gözlenen Değer}} = \underbrace{\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_k x_{ik}}_{\substack{E(y_i|\mathbf{x}_i) \\ \text{(Sistemetik Kısım)}}} + \underbrace{u_i}_{\substack{\text{Rassal Hata Terimi} \\ \text{(Sistematik Olmayan Kısım)}}} \quad \text{(Model)}$$

$$E(y_i|\mathbf{x}_i) = \underbrace{\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_k x_{ik}}_{\text{Sistemetik Kısım}} \quad \text{(ARF)}$$

$$\underbrace{\hat{y}_i}_{\text{Tahmin Edilen Değer}} = \underbrace{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} + \cdots + \hat{\beta}_k x_{ik}}_{\text{Sistemetik Kısmın Tahmini}} \quad \text{(ÖRF)}$$

$$\underbrace{y_i}_{\text{Gözlenen Değer}} = \underbrace{\hat{y}_i}_{\text{Tahmin Edilen Değer}} + \underbrace{\hat{u}_i}_{\substack{\text{Kalıntı (Artık)} \\ \text{Rassal Değil (Deterministik)}}}$$

Hata Terimi u ve Kalıntı $\hat{u}$ Arasındaki Farklar

- Kalıntı $\hat{u}$, hata terimi u'nun örneklem analoğu olarak yorumlanabilir fakat kesinlikle aynı şeyler değildir. Bu nedenle kesinlikle birbirine karıştırılmamalıdır.
- Hata terimi u:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_k x_{ik} + \underbrace{u_i}_{\text{Hata Terimi}}$$

  - Tıpkı anakütle parametreleri β_0 ve β_1 gibi gözlenemez ve bu nedenle bilinemez.
  - Rassaldır.
- Kalıntı $\hat{u}$:

$$y_i = \underbrace{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} + \cdots + \hat{\beta}_k x_{ik}}_{\text{Tahmin Edilen Değer } \hat{y}_i} + \underbrace{\hat{u}_i}_{\text{Kalıntı}}$$

  - Tahmin sırasında veriler kullanılarak hesaplanır ve bu nedenle bilinir.
  - Rassal değildir.

Örneklem Regresyon Fonksiyonu: Tahmin Yöntemleri

Model, ARF ve ÖRF

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + u \qquad \text{(Model)}$$

$$E(y|\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k \qquad \text{(ARF)}$$

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \cdots + \hat{\beta}_k x_k \qquad \text{(ÖRF)}$$

- Örneklem Regresyon Fonksiyonu (ÖRF), iki yöntemle tahmin edilebilir.
  - Sıradan En Küçük Kareler (SEKK) Yöntemi
  - Momentler Yöntemi
- İki yöntem de aynı tahmin sonuçlarını verir.

Sıradan En Küçük Kareler Yöntemi

- **Sıradan En Küçük Kareler Yöntemi**, kalıntı kareleri toplamını (SSR) en küçük yapan parametre tahmincilerini hesaplamaya çalışır.

Örneklem Regresyon Fonksiyonu (ÖRF)

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \cdots + \hat{\beta}_k x_k$$

Gözlenen Değer, Tahmin Edilen Değer ve Kalıntı

$$y_i = \hat{y}_i + \hat{u}_i \quad \longrightarrow \quad \hat{u}_i = y_i - \hat{y}_i$$

SEKK Amaç Fonksiyonu

$$\min_{\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_j} SSR = \min_{\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_j} \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2 = \min_{\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_j} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2} - \cdots - \hat{\beta}_k x_{ik})^2$$

Sıradan En Küçük Kareler Yöntemi

SEKK Birinci Sıra Koşulları

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial SSR}{\partial \hat{\beta}_0} &= -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2} - \cdots - \hat{\beta}_k x_{ik}) &= 0 \\
\frac{\partial SSR}{\partial \hat{\beta}_1} &= -2\sum_{i=1}^{n}x_{i1}(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2} - \cdots - \hat{\beta}_k x_{ik}) &= 0 \\
\frac{\partial SSR}{\partial \hat{\beta}_2} &= -2\sum_{i=1}^{n}x_{i2}(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2} - \cdots - \hat{\beta}_k x_{ik}) &= 0 \\
\vdots \quad &= \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots &= 0 \\
\frac{\partial SSR}{\partial \hat{\beta}_k} &= -2\sum_{i=1}^{n}x_{ik}(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2} - \cdots - \hat{\beta}_k x_{ik}) &= 0
\end{aligned}
$$

Sıradan En Küçük Kareler Yöntemi

SEKK Birinci Sıra Koşulları

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2} - \cdots - \hat{\beta}_k x_{ik}) &= 0 &\longrightarrow&& \sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i &= 0 \\
\sum_{i=1}^{n}x_{i1}(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2} - \cdots - \hat{\beta}_k x_{ik}) &= 0 &\longrightarrow&& \sum_{i=1}^{n}x_{i1}\hat{u}_i &= 0 \\
\sum_{i=1}^{n}x_{i2}(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2} - \cdots - \hat{\beta}_k x_{ik}) &= 0 &\longrightarrow&& \sum_{i=1}^{n}x_{i2}\hat{u}_i &= 0 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad &= 0 &\longrightarrow&& \vdots \qquad &= 0 \\
\sum_{i=1}^{n}x_{ik}(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2} - \cdots - \hat{\beta}_k x_{ik}) &= 0 &\longrightarrow&& \sum_{i=1}^{n}x_{ik}\hat{u}_i &= 0
\end{aligned}
$$

- Birinci sıra koşullarından elde edilen $k + 1$ tane denklemin çözümünden parametre tahmincileri $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_j$'lar (toplamda $k + 1$ tane) bulunur.

Momentler Yöntemi

- Anakütle moment koşulları ÇDR.5 varsayımı kullanılarak yazılabilir.
- Daha sonra anakütle moment koşullarını kullanarak örneklem moment koşulları elde edilebilir.

ÇDR.5: Sıfır Koşullu Ortalama

$$E(u|\mathbf{x}) = E(u) = 0$$

$$Cov(x_j, u) = 0, \quad Corr(x_j, u) = 0 \quad \text{ve} \quad E(x_j u) = 0, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

Sonuç: u ve x_j ortalama bağımsızdır. Yani u ve x_j doğrusal olarak ilişkisizdir.

Momentler Yöntemi

Anakütle Moment Koşulları ve Örneklem Moment Koşulları

$$
\begin{aligned}
\overbrace{}^{\text{Anakütle}} & & & \overbrace{\phantom{\sum x_{ik}\hat{u}_i}}^{\text{Örneklem}} \\
E(u) &= 0 &\longrightarrow& \quad \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i &= 0 \\
E(x_1 u) &= 0 &\longrightarrow& \quad \sum_{i=1}^{n} x_{i1}\hat{u}_i &= 0 \\
E(x_2 u) &= 0 &\longrightarrow& \quad \sum_{i=1}^{n} x_{i2}\hat{u}_i &= 0 \\
\vdots\ &= 0 &\longrightarrow& \quad \vdots &= 0 \\
E(x_k u) &= 0 &\longrightarrow& \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ik}\hat{u}_i &= 0
\end{aligned}
$$

Momentler Yöntemi

- Örneklem moment koşullarından elde edilen $k + 1$ tane denklemin çözümünden parametre tahmincileri $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_j$'lar (toplamda $k + 1$ tane) bulunur.
- SEKK birinci sıra koşulları ve örneklem moment koşulları aslında aynı denklemler kümesini verir.
- Bu nedenle, SEKK Yöntemi ve **Momentler Yöntemi** ile ÇDR modeli tahmin edildiğinde aynı sonuçlara ulaşılır.
- Genellikle kullanılan yöntem SEKK'dır. Bu nedenle parametre tahmincileri $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_j$'lar genellikle **SEKK parametre tahmincileri** ya da **SEKK tahmincileri** olarak adlandırılır.
- Bu yöntemlerin tek çözüm vermesi için ÇDR.4 (Tam Çoklu Doğrusal Bağıntının Olmaması) varsayımının sağlanması gereklidir. Bakınız Slayt 14.

SEKK Parametre Tahmincileri: 2 Bağımsız Değişken

Ana Model

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + u_i \qquad \text{(Model - İndeksli)}$$

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} \qquad \text{(ÖRF - İndeksli)}$$

- β_0 kesim parametresinin tahmini $\hat{\beta}_0$:

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{x}_2$$

Ek Bilgi

- β_1 eğim parametresinin tahmini, ya da x_1'in eğim parametresinin tahmincisi, $\hat{\beta}_1$:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1} y_i}{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1}^2}$$

SEKK Parametre Tahmincileri: 2 Bağımsız Değişken

- β_1 eğim parametresinin tahmini, ya da x_1'in eğim parametresinin tahmincisi, $\hat{\beta}_1$:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1} y_i}{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1}^2}$$

burada $\hat{r}_{i1}$, x_1'in x_2 üzerine uygulanan regresyondan (1. yardımcı regresyon) elde edilen kalıntılardır.

1. Yardımcı Regresyon Tahmini

$$x_{i1} = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 x_{i2} + \hat{r}_{i1} \qquad \text{(İndeksli)}$$

- 1. yardımcı regresyondan elde edilen kalıntı $\hat{r}_1$, x_1 içindeki x_2'nin etkisi çıkarıldıktan sonraki x_1'i ifade eder.
- Bu işlemdeki amaç, bağımsız değişkenler x_1 ve x_2 arasındaki doğrusal bağıntı nedeniyle bağımlı değişken y üzerinde oluşabilecek dolaylı etkiyi kaldırmaktır.

SEKK Parametre Tahmincileri: 2 Bağımsız Değişken

- Amacımız x_1'in y'yi yalın/kısmi olarak ne kadar etkilediğini yani $\hat{\beta}_1$'yı bulmaktı.
- Öyleyse $\hat{\beta}_1$, y'nin $\hat{r}_1$ üzerine uygulanan regresyondan (2. yardımcı regresyon) elde edilen eğim parametresinin tahminidir.

2. Yardımcı Regresyon Tahmini

$$y_i = \hat{\delta}_0 + \hat{\beta}_1 \hat{r}_{i1} + \hat{\epsilon}_i \qquad \text{(İndeksli)}$$

- $\hat{\epsilon}_i$ ve $\hat{\delta}_0$, sırasıyla 2. yardımcı regresyondaki kalıntıları ve kesim parametresi tahminini ifade eder. Bu değerler bizim ilgi alanımızda değildir.
- 2. yardımcı regresyon basit doğrusal regresyon olduğundan, daha önceden bildiğimiz eğim parametresi tahmicisinin formülünü kullanabiliriz.

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})y_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

SEKK Parametre Tahmincileri: 2 Bağımsız Değişken

- $\hat{r}_j$, 2. yardımcı regresyonda bağımsız değişken olarak görev yaptığı için formüldeki x'ler yerine konulabilir.

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})y_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \longrightarrow \hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{r}_{i1} - \bar{\hat{r}}_1)y_i}{\sum_{i=1}^{n}(\hat{r}_{i1} - \bar{\hat{r}}_1)^2}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{r}_{i1} - \overbrace{\bar{\hat{r}}_1}^{=0})y_i}{\sum_{i=1}^{n}(\hat{r}_{i1} - \underbrace{\bar{\hat{r}}_1}_{=0})^2} \longrightarrow \hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\hat{r}_{i1}y_i}{\sum_{i=1}^{n}\hat{r}_{i1}^2} \quad \text{(1. Yardımcı Regresyondan)}$$

- Kısacası $\hat{\beta}_1$, x_1 içindeki x_2'nin etkisi çıkarıldıktan sonraki x_1'nin bağımlı değişken y'yi etkileyen yalın/kısmi yani ceteris paribus etkisini ifade eder.

SEKK Parametre Tahmincileri: k Bağımsız Değişken

Ana Model

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_k x_{ik} + u_i \qquad \text{(Model - İndeksli)}$$

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} + \cdots + \hat{\beta}_k x_{ik} \qquad \text{(ÖRF - İndeksli)}$$

- β_0 kesim parametresinin tahmini $\hat{\beta}_0$ (1 tane var):

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{x}_2 - \cdots - \hat{\beta}_k \bar{x}_k$$

Ek Bilgi

- β_j eğim parametresinin tahmini, ya da x_j'nin eğim parametresinin tahmincisi, $\hat{\beta}_j$ (k tane var):

$$\hat{\beta}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{ij} y_i}{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{ij}^2}, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

SEKK Parametre Tahmincileri: k Bağımsız Değişken

- x_j'nin eğim parametresinin tahmincisi $\hat{\beta}_j$ (k tane var):

$$\hat{\beta}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{ij} y_i}{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{ij}^2}, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

burada $\hat{r}_{ij}$, x_j'nin diğer tüm x'ler $(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_k)$ üzerine uygulanan regresyondan (1. yardımcı regresyon) elde edilen kalıntılardır.

1. Yardımcı Regresyon Tahmini

$$x_{ij} = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 x_{i1} + \hat{\alpha}_2 x_{i2} + \cdots + \hat{\alpha}_{j-1} x_{ij-1} + \hat{\alpha}_{j+1} x_{ij+1} + \cdots + \hat{\alpha}_k x_{ik} + \hat{r}_{ij} \quad \text{(İndeksli)}$$

- 1. yardımcı regresyondan elde edilen kalıntı $\hat{r}_j$, x_j içindeki diğer tüm x'lerin $(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_k)$ etkisi çıkarıldıktan sonraki x_j'yi ifade eder.
- Bu işlemdeki amaç, bağımsız değişken x'ler arasındaki çoklu doğrusal bağıntı nedeniyle bağımlı değişken y üzerinde oluşabilecek dolaylı etkiyi kaldırmaktır.

SEKK Parametre Tahmincileri: k Bağımsız Değişken

- Amacımız x_j'nin y'yi yalın/kısmi olarak ne kadar etkilediğini yani $\hat{\beta}_j$'yı bulmaktı.
- Öyleyse $\hat{\beta}_j$, y'nin $\hat{r}_j$ üzerine uygulanan regresyondan (2. yardımcı regresyon) elde edilen eğim parametresinin tahminidir.

2. Yardımcı Regresyon Tahmini

$$y_i = \hat{\delta}_0 + \hat{\beta}_j \hat{r}_{ij} + \hat{\epsilon}_i \qquad \text{(İndeksli)}$$

- $\hat{\epsilon}_i$ ve $\hat{\delta}_0$, sırasıyla 2. yardımcı regresyondaki kalıntıları ve kesim parametresi tahminini ifade eder. Bu değerler bizim ilgi alanımızda değildir.
- 2. yardımcı regresyon basit doğrusal regresyon olduğundan, daha önceden bildiğimiz eğim parametresi tahmicisi $\hat{\beta}_1$'nın BDR'deki alternatif formülünü kullanabiliriz.

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})y_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

SEKK Parametre Tahmincileri: k Bağımsız Değişken

- $\hat{r}_j$, 2. yardımcı regresyonda bağımsız değişken olarak görev yaptığı için formüldeki x'ler yerine konulabilir.

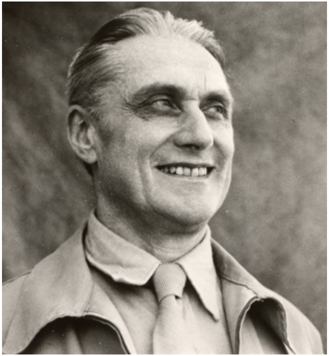
$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})y_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \longrightarrow \hat{\beta}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{r}_{ij} - \bar{\hat{r}}_j)y_i}{\sum_{i=1}^{n}(\hat{r}_{ij} - \bar{\hat{r}}_j)^2}$$

$$\hat{\beta}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{r}_{ij} - \overbrace{\bar{\hat{r}}_j}^{=0})y_i}{\sum_{i=1}^{n}(\hat{r}_{ij} - \underbrace{\bar{\hat{r}}_j}_{=0})^2} \longrightarrow \hat{\beta}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n}\hat{r}_{ij}y_i}{\sum_{i=1}^{n}\hat{r}_{ij}^2} \quad \text{(1. Yardımcı Regresyondan)}$$

- Kısacası $\hat{\beta}_j$, x_j içindeki diğer tüm x'lerin $(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_k)$ etkisi çıkarıldıktan sonraki x_j'nin bağımlı değişken y'yi etkileyen yalın/kısmi yani ceteris paribus etkisini ifade eder.

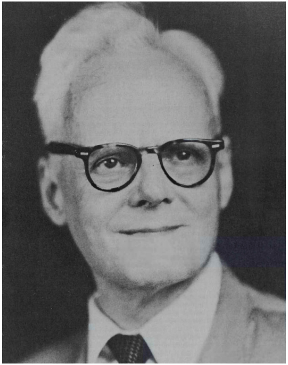
SEKK Parametre Tahmincileri: Frisch–Waugh Teoremi

- Önceki slaytlarda 2 bağımsız ve k bağımsız değişkenli ÇDR modellerinde $\hat{\beta}_j$'yi, yani x_j'nin bağımlı değişken y'yi etkileyen yalın/kısmi etkisini, hesaplamak için kullandığımız prosedür ekonometride **Frisch–Waugh Teoremi** olarak anılır.



Ragnar Frisch (1895-1973)

Kaynak: Wikipedia



Frederick V. Waugh (1898–1974)

Kaynak: AgEcon

Sıfır Koşullu Ortalama Varsayımı (ÇDR.5) Yorumu

2 Bağımsız Değişkenli Model

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u$$

- 2 bağımsız değişkenli modelde, u'nun x'lerle ilişkisiz olması varsayımını, yani ÇDR.5, şu şekilde formüle edebilirz.

$$E(u|x_1, x_2) = E(u|\mathbf{x}) = 0$$

- Yani x_1 ve x_2'nin anakütledeki tüm kombinasyonları için u'nun beklenen değeri sıfırdır.
- Örneğin, ücret modelinde (Slayt 7) ÇDR.5 varsayımı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$wage = \beta_0 + \beta_1 educ + \beta_2 exper + u \qquad \text{(Model)}$$

$$E(u|educ, exper) = 0 \qquad \text{(ÇDR.5)}$$

- Bu ücretleri etkileyen diğer faktörlerin (u) ortalama olarak $educ$ ve $exper$ ile ilişkisiz olduğu anlamına gelir.
- Örneğin, doğuştan gelen yetenek (ability) u'nun bir parçası ise, ortalama yetenek düzeyi, eğitim ve tecrübenin tüm kombinasyonlarında aynıdır (sabittir).

$$E(ability|educ, exper) = 0$$

Sıfır Koşullu Ortalama Varsayımı (ÇDR.5) Yorumu

- Sınav başarı modelinde (Slayt 8), ÇDR.5 varsayımı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$avgscore = \beta_0 + \beta_1 expend + \beta_2 avginc + u \qquad \text{(Model)}$$

$$E(u|expend, avginc) = 0 \qquad \text{(ÇDR.5)}$$

- Yani, ortalama sınav sonucunu etkileyen diğer faktörler (okula ya da öğrenciye özgü vs.), ortalama olarak, $expend$ ve $avginc$ değişkenleriyle ilişkisizdir.
- Tüketim modelinde (Slayt 10), ÇDR.5 varsayımı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$cons = \beta_0 + \beta_1 inc + \beta_2 inc^2 + u \qquad \text{(Model)}$$

$$E(u|inc, inc^2) = E(u|inc) = 0 \qquad \text{(ÇDR.5)}$$

- Burada inc biliniyorken, inc^2 otomatik olarak bilineceğinden ayrıca koşullu beklenti içinde yazmaya gerek yoktur.

Regresyonun Yorumu: 2 Bağımsız Değişken

Model ve ÖRF

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \qquad \text{(Model)}$$

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 \qquad \text{(ÖRF)}$$

$$\Delta\hat{y} = \hat{\beta}_1 \Delta x_1 + \hat{\beta}_2 \Delta x_2 \qquad \text{(Değişim Cinsinden)}$$

- Eğim paramtresi tahmincisi $\hat{\beta}_1$, bağımsız değişken x_1'in y üzerindeki yalın/kısmi yani ceteris paribus etkisini verir.
- $\hat{\beta}_1$'nın yorumu: x_2 sabitken, yani $\Delta x_2 = 0$ iken

$$\Delta\hat{y} = \hat{\beta}_1 \Delta x_1$$

- x_2 sabitken, x_1'de meydana gelen 1 birimlik değişmenin y'de meydana getireceği ortalama değişim $\hat{\beta}_1$ kadardır.
    - Parametreleri yorumlarken fonksiyonel forma dikkat edilmelidir.
    - Farklı fonksiyonel formların yorumlamaları hakkındaki detaylı bilgi "Ekonometri I - Basit Doğrusal Regresyon Modeli" konusunda bulunabilir.
- Benzer şekilde $\hat{\beta}_2$'nın yorumu: x_1 sabitken, yani $\Delta x_1 = 0$ iken

$$\Delta\hat{y} = \hat{\beta}_2 \Delta x_2$$

Regresyonun Yorumu: k Bağımsız Değişken

Model ve ÖRF

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + u \quad \text{(Model)}$$

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \cdots + \hat{\beta}_k x_k \quad \text{(ÖRF)}$$

$$\Delta\hat{y} = \hat{\beta}_1 \Delta x_1 + \hat{\beta}_2 \Delta x_2 + \cdots + \hat{\beta}_k \Delta x_k \quad \text{(Değişim Cinsinden)}$$

- Eğim paramtresi tahmincisi $\hat{\beta}_j$, bağımsız değişken x_j'nin y üzerindeki yalın/kısmi yani ceteris paribus etkisini verir.
- $\hat{\beta}_j$'nın yorumu: diğer tüm bağımsız değişkenler $(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_k)$ sabitken, yani $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \cdots = \Delta x_{j-1} = \Delta x_{j+1} = \cdots = \Delta x_k = 0$ iken

$$\Delta\hat{y} = \hat{\beta}_j \Delta x_j$$

- Diğer tüm bağımsız değişkenler $(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_k)$ sabitken, x_j'de meydana gelen 1 birimlik değişmenin y'de meydana getireceği ortalama değişim $\hat{\beta}_j$ kadardır.
  - Parametreleri yorumlarken fonksiyonel forma dikkat edilmelidir.
  - Farklı fonksiyonel formların yorumlamaları hakkındaki detaylı bilgi "Ekonometri I - Basit Doğrusal Regresyon Modeli" konusunda bulunabilir.

Örnek: Üniversite Başarı Modeli

Üniversite Başarı Modeli (ÇDR)

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 \qquad \text{(ÖRF)}$$

$$\widehat{colGPA} = 1.29 + 0.453\, hsGPA + 0.009\, ACT \qquad \text{(ÖRF)}$$

$$n = 141$$

$colGPA$: üniversite genel not ortalaması (4 üzerinden); $hsGPA$: lise not ortalaması; ACT: genel yetenek sınav sonucu

- Kesim parametresi $\hat{\beta}_0 = 1.29$ olarak tahmin edilmiştir.
  - $hsGPA = 0$ ve $ACT = 0$ olduğunda modelce tahmin edilen üniversite genel not ortalaması $\widehat{colGPA}$'yı ifade eder. Ancak örneklemde $hsGPA$ ve ACT'si 0 olan öğrenci olmadığından yorumlanması anlamsızdır.
- ACT'yi sabit tutarak lise not ortalaması $hsGPA$'yı 1 puan arttırdığımızda üniversite genel not ortalaması $colGPA$ 0.453 puan artar.
- $hsGPA$'yı sabit tutarak genel yetenek sınav sonucu ACT'yi 1 puan arttırdığımızda üniversite genel not ortalaması $colGPA$ 0.009 puan artar.

Örnek: Üniversite Başarı Modeli

- Sadece genel yetenek sınav sonucu ACT'yi kullanarak basit regresyon tahmin etseydik:

Üniversite Başarı Modeli (BDR)

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_2 x_2 \qquad \text{(ÖRF)}$$

$$\widehat{colGPA} = 2.4 + 0.027\,ACT \qquad \text{(ÖRF)}$$

- ACT'nin paramatre tahmincisi $\hat{\beta}_2$ önceki çoklu regresyonda bulunandan 3 kat daha yüksek çıktı.
- Bu regresyon, bize lise not ortalaması ($hsGPA$) aynı olan iki öğrenciyi ortalama olarak karşılaştırma olanağı vermiyor fakat önceki regresyonda veriyordu.
- Lise not ortalaması $hsGPA$'yı kontrol ettiğimizde genel yetenek sınav sonucu ACT'nin üniversite genel not ortalaması $colGPA$ üzerindeki önemi/etkisi azalıyor.

Örnek: Logaritmik Ücret Modeli

Logaritmik Ücret Modeli

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \hat{\beta}_3 x_3 \qquad \text{(ÖRF)}$$

$$\widehat{\ln wage} = 0.284 + 0.092\, educ + 0.004\, exper + 0.022\, tenure \qquad \text{(ÖRF)}$$

$$n = 526$$

$wage$: saatlik ücret (dolar); $educ$: eğitim düzeyi (yıl); $exper$: tecrübe düzeyi (yıl); $tenure$: kıdem (yıl)

- Bağımlı değişken logaritmik ve bağımsız değişkenler düzey (log-düzey) olarak modelde yer aldığından paramtere tahmincileri 100 ile çarpılarak % olarak ceteris paribus yorumlanmalıdır.
- Örneğin, $exper$ ve $tenure$ sabit tutulduğunda $educ$ bir yıl arttırılırsa $wage$ ortalama olarak %9.2 (%0.092 $\times$ 100) artar.
- Başka bir ifadeyle, $exper$ ve $tenure$ düzeyleri aynı olan iki çalışandan birinin $educ$ düzeyi diğerinden bir yıl fazlaysa, bu iki çalışan için tahmin edilen ücret farkı ortalama olarak %9.2'dir.
- Burada somut iki işçiden değil ortalama durumdan bahsedilmektedir.

Diğer Değişkenleri Sabit Tutmanın Anlamı

- ÇDR'de parametre tahmincilerini ceteris paribus koşulu altında bağımsız değişkenlerin y üzerindeki yalın/kısmi etkileri olarak yorumluyoruz.
- Örneğin, logaritmik ücret modelinde (Slayt 48) $\hat{\beta}_1 = 0.092$ olması, $exper$ ve $tenure$ düzeyleri aynı olan iki çalışandan birinin $educ$ düzeyi 1 yıl fazla olanın ortalama olarak %9.2 daha yüksek ücret alacağı şeklinde yorumlanmıştı.
- Bu yorum, verinin bu şekilde toplandığı anlamına gelmez, yani $exper$ ve $tenure$ düzeyleri aynı olan işçiler özellikle seçilip veri toplanmamıştır.
  - Veri rassal seçilmiş 526 çalışana ait $wage$, $educ$, $exper$ ve $tenure$ bilgilerinden oluşuyor.
  - $exper$ ve $tenure$ düzeyi aynı olan çalışanları ayrıca gruplandırmıyoruz.
- Aslında elimizde $exper$ ve $tenure$ düzeyleri aynı olan çalışanlardan oluşan bir örneklem olsaydı, $exper$ ve $tenure$ bağımsız değişkenlerini modele koymaya gerek kalmazdı.
  - Fakat, bu durum uygulamada çoğunlukla mümkün değildir.
  - Ayrıca ÇDR analizinde yalın/kısmi yani ceteris paribus etki hesaplandığından zaten yukarıdaki gibi bir duruma gerek yoktur.

Birden Fazla Bağımsız Değişkeni Aynı Anda Değiştirmek

- Bazen bağımsız değişken x'lerden birkaçını aynı anda değiştirerek y'de meydana gelen ortalama değişimi ölçmek isteriz.
- Bazı durumlarda ise bağımsız değişken x'lerden biri değiştirildiğinde diğeri de otomatik olarak değişir.
- Örneğin, logaritmik ücret modelinde (Slayt 48) $tenure$ 1 yıl arttırıldığında $exper$ de otomatik olarak 1 yıl artar.

$$\begin{aligned}
\Delta \widehat{\ln wage} &= 0.092\Delta educ + 0.004\Delta exper + 0.022\Delta tenure \qquad \text{(Değişim Cins.)} \\
&= 0.092 \times 0 + 0.004 \times 1 + 0.022 \times 1 \\
&= 0.026
\end{aligned}$$

- Burada 0.026, $educ$ sabit tutulduğunda $tenure$ ve $exper$ 1 yıl arttırılırsa $\ln wage$'de meydana gelen ortalama etkiyi belirtir.
    - Model log-düzey formunda olduğundan bulunan bu değer 100 ile çarpılarak % olarak ceteris paribus yorumlanmalıdır.
    - Yani, $educ$ sabit tutulduğunda $tenure$ ve $exper$ 1 yıl arttırılırsa $wage$ ortalama olarak %2.6 (%0.026 × 100) artar.

Tahmin Edilen Değer ve Kalıntı

i'inci Gözlem İçin Tahmin Edilen $\hat{y}_i$ Değeri

$$\underbrace{\hat{y}_i}_{\text{Tahmin Edilen Değer}} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} + \cdots + \hat{\beta}_k x_{ik} \qquad \text{(ÖRF)}$$

- x_{ij} değerini tahmin edilen regresyonda (ÖRF'de) yerine koyarsak tahmin edilen değer $\hat{y}_i$'yi elde ederiz.

Kalıntı (Artık)

$$\underbrace{\hat{u}_i}_{\text{Kalıntı (Artık)}} = \underbrace{y_i}_{\text{Gözlenen Değer}} - \underbrace{\hat{y}_i}_{\text{Tahmin Edilen Değer}}$$

- Gözlenen y_i değeriyle tahmin edilen değer $\hat{y}_i$ arasındaki fark kalıntı $\hat{u}_i$'yi verir.
- $\hat{u}_i > 0$ ise $y_i > \hat{y}_i$, eksik tahmin yapılmıştır.
- $\hat{u}_i < 0$ ise $y_i < \hat{y}_i$, fazla tahmin yapılmıştır.

Tahmin Edilen Değer ve Kalıntıların Cebirsel Özellikleri

1. SEKK kalıntılarının toplamı ve dolayısıyla da örneklem ortalaması sıfıra eşittir.

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i = 0 \quad \text{ve} \quad \bar{\hat{u}} = 0$$

- Bu durum SEKK birinci sıra koşullarından ilkinin (aynı zamanda örneklem moment koşullarından ilkinin) bir sonucudur. Bakınız Slayt 29 ve Slayt 31.
- Anakütledeki hata terimi u'nun örneklemdeki analoğu kalıntı $\hat{u}$ olarak yorumlanabilir fakat kesinlikle aynı şeyler değildir.

$$\underbrace{u}_{\text{Anakütle}} \longrightarrow \underbrace{\hat{u}}_{\text{Örneklem}}$$

$$\underbrace{E(u) = 0}_{\text{Anakütle}} \longrightarrow \underbrace{E(\hat{u}) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i = 0 \quad \text{ve} \quad \bar{\hat{u}} = 0}_{\text{Örneklem}}$$

Tahmin Edilen Değer ve Kalıntıların Cebirsel Özellikleri

2. Bağımsız değişken x_j ile kalıntı $\hat{u}$ arasındaki örneklem kovaryansı ve korelasyon katsayısı sıfırdır.

$$Cov(x_j, \hat{u}) = 0 \quad \text{ve} \quad Corr(x_j, \hat{u}) = 0, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

- Bu durum diğer SEKK birinci sıra koşullarının (aynı zamanda diğer örneklem moment koşullarının) bir sonucudur (k tane var). Bakınız Slayt 29 ve Slayt 31.
- Bağımsız değişken x_j'lerle kalıntı $\hat{u}$'nın doğrusal olarak ilişkisizliği çıkarılabilir.

$$Cov(x_j, u) = 0 \quad \text{ve} \quad Corr(x_j, u) = 0 \quad \longrightarrow \quad E(x_j u) = 0 \qquad \text{(Anakütle)}$$

$$Cov(x_j, \hat{u}) = 0 \quad \text{ve} \quad Corr(x_j, \hat{u}) = 0 \quad \longrightarrow \quad E(x_j \hat{u}) = 0 \qquad \text{(Örneklem)}$$

$$\underbrace{E(x_j u) = 0}_{\text{Anakütle}} \quad \longrightarrow \quad \underbrace{E(x_j \hat{u}) = 0 \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij}\hat{u}_i = 0}_{\text{Örneklem}}$$

Ek Bilgi

Tahmin Edilen Değer ve Kalıntıların Cebirsel Özellikleri

3. 1. ve 2. cebirsel özelliklerin bir sonucu olarak tahmin edilen değer $\hat{y}$ ile kalıntı $\hat{u}$ arasındaki örneklem kovaryansı ve korelasyon katsayısı sıfırdır.

$$Cov(\hat{y}, \hat{u}) = 0 \quad \text{ve} \quad Corr(\hat{y}, \hat{u}) = 0$$

- Bu özellikten tahmin edilen değer $\hat{y}$ ile kalıntı $\hat{u}$'nun doğrusal olarak ilişkisizliği çıkarılabilir.

$$\underbrace{Cov(\hat{y}, \hat{u}) = 0 \quad \text{ve} \quad Corr(\hat{y}, \hat{u}) = 0}_{\text{Örneklem}} \longrightarrow \underbrace{E(\hat{y}\hat{u}) = 0 \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i \hat{u}_i = 0}_{\text{Örneklem}}$$

Ek Bilgi

Tahmin Edilen Değer ve Kalıntıların Cebirsel Özellikleri

4. Tahmin edilen değer $\hat{y}_i$'lerin ortalaması gözlenen değer y_i'lerin ortalamasına eşittir.

$$y_i = \hat{y}_i + \hat{u}_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i}_{=0} \qquad \text{(1. Cebirsel Özellik)}$$

$$n\bar{\hat{y}} = n\bar{y}$$

$$\bar{\hat{y}} = \bar{y}$$

5. $(\bar{x}_j, \bar{y} : j = 1, 2, \ldots, k)$ noktası daima ÖRF'den geçer (ÖRF üzerindedir).

$$(\bar{x}_j, \bar{y} : j = 1, 2, \ldots, k) \quad \longrightarrow \quad \bar{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1\bar{x}_1 + \hat{\beta}_2\bar{x}_2 + \cdots + \hat{\beta}_k\bar{x}_k$$

Kareler Toplamları

- Her bir i gözlemi için gözlenen değer, tahmin edilen değer ve kalıntı arasındaki ilişki aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$y_i = \hat{y}_i + \hat{u}_i$$

- Her iki tarafın örneklem ortalamalarından sapmalarının karesini alıp toplarsak

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{n}\left[(\hat{y}_i - \bar{\hat{y}}) + (\hat{u}_i - \bar{\hat{u}})\right]^2$$

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{n}\left[(\hat{y}_i - \bar{y}) + \hat{u}_i\right]^2 \qquad \text{(1. ve 4. Cebirsel Öz.)}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2 + 2\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i\hat{y}_i}_{=0} - 2\bar{y}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i}_{=0} \qquad \text{(3. Cebirsel Öz.)}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2$$

Kareler Toplamları

- **Toplam Kareler Toplamı**: SST (Total Sum of Squares) y'deki toplam değişkenliği verir.

$$SST = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$$

$Var(y) = SST/(n-1)$ olduğuna dikkat edin.

- **Açıklanan Kareler Toplamı**: SSE (Explained Sum of Squares) model tarafından açıklanan kısımdaki, yani tahmin edilen değer $\hat{y}$'lardaki, değişkenliği verir.

$$SSE = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y})^2$$

- **Kalıntı Kareleri Toplamı**: SSR (Residual Sum of Squares) model tarafından açıklanamayan kısımdaki, yani kalıntı $\hat{u}$'lardaki, değişkenliği verir.

$$SSR = \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2$$

Kareler Toplamları

- y'deki toplam değişkenlik aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$SST = SSE + SSR$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}_{\text{SST}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2}_{\text{SSE}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2}_{\text{SSR}}$$

Determinasyon Katsayısı

- y'deki toplam değişkenlik denkleminin her iki tarafını SST'ye bölersek

$$SST = SSE + SSR$$

$$1 = \frac{SSE}{SST} + \frac{SSR}{SST}$$

- Açıklanan kısmın değişkenliğinin toplam değişkenlik içindeki payı regresyonun **determinasyon katsayısı** ya da **belirlilik katsayısı**dır (coefficient of determination) ve R^2 ile gösterilir.

$$R^2 = \frac{SSE}{SST} = 1 - \frac{SSR}{SST}$$

- SSE hiçbir zaman SST'den büyük olamayacağı için $0 \leq R^2 \leq 1$
- R^2, y'deki değişkenliğin x'ler tarafından açıklanan kısmının oranını verir. Regresyonun açıklama gücü yükseldikçe R^2, 1'e yaklaşır.
- R^2'yi yorumlarken, yüzdeye dönüştürmek için genellikle 100 ile çarparız: $100 \times R^2$, y'deki değişkenliğin x'ler tarafından açıklanan kısmının yüzdesini verir.
- R^2 modelin açıklama gücünü (ne kadar iyi fit edildiğini) belirttiği için bazen **uyum iyiliği** (goodness-of-fit) olarak da adlandırılır.
- R^2 şu şekilde de hesaplanabilir: $R^2 = Corr(y, \hat{y})^2$

Determinasyon Katsayısı

- Determinasyon katsayısı

$$R^2 = \frac{SSE}{SST} = 1 - \frac{SSR}{SST}$$

- Regresyona yeni bir bağımsız değişken x eklendiğinde R^2 her zaman artar (ya da çok nadir aynı kalır). Bunun nedeni SSE'nin artmasındandır.
- Örneğin daha önce verilen Ücret Modeli'ne (Slayt 7) modelle alakasız bir değişken eklendiğinde dahi R^2 artacaktır.
    - Modele kişinin sosyal güvenlik numarasının son hanesini belirten yeni bir değişken, SSN, eklediğimizi düşünelim.
    - Emek ekonomisine göre kişinin alacağı ücretin, SSN ile hiçbir ilişkisi yoktur.
    - Fakat SSN'nin modele eklenmesi matematiksel olarak R^2 değerini arttıracaktır.
- Bu nedenle yeni bir değişkenin modele olan katkısının belirlenmesinde ve ÇDR modellerinde modelin açıklama gücünün belirlenmesinde R^2 iyi bir ölçüt değildir.
- Bu sebeple ÇDR modellerinde **düzeltilmiş R^2 yani $\bar{R}^2$** kullanılır.
- $\bar{R}^2$ detaylı olarak daha sonra incelenecektir. O zamana kadar modelin açıklama gücünü belirlemede R^2 değerini kullanacağız.

Determinasyon Katsayısı: Örnek

Üniversite Başarı Modeli

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 \qquad \text{(ÖRF)}$$

$$\widehat{colGPA} = 1.29 + 0.453\, hsGPA + 0.009\, ACT \qquad \text{(ÖRF)}$$

$$n = 141, \quad R^2 = 0.176$$

- Determinasyon katsayısı 0.176 olarak tahmin edilmiştir.
- Üniversite genel not ortalaması $colGPA$'daki değişkenliğin yaklaşık %17.6'sı $hsGPA$ ve ACT değişkenleriyle açıklanabilmektedir. Diğer bir deyişle, $colGPA$'daki değişkenliğin yaklaşık %82.4'ü açıklanamamıştır.
- Dışarıda bırakılan birçok faktör (hata terimi u'nun içinde) olduğundan üniversite genel not ortalaması $colGPA$'nın küçük bir kısmı açıklanabilmiştir.
- Üniversite genel not ortalaması $colGPA$'yı etkileyen ve bu modelde yer almayan başka birçok değişken olduğu unutulmamalıdır.

SEKK Parametre Tahmincilerinin Beklenen Değeri

- SEKK parametre tahmincileri $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_j$'lar örneklemden örnekleme değiştiği için bunlara ait dağılımın özelliklerinin incelenmesi gerekir.
- İncelenecek dağılım özellikleri:
  - **Beklenen değer**
  - **Varyans**

Teorem: $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_j$'ların Beklenen Değeri

ÇDR.1 - ÇDR.5 varsayımları altında

$$E(\hat{\beta}_0) = \beta_0$$

$$E(\hat{\beta}_j) = \beta_j, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

Ek Bilgi

- Yani, ÇDR.1 - ÇDR.5 varsayımları altında SEKK parametre tahmincilerinin örneklem dağılımlarının ortalaması (beklenen değeri) bilinmeyen anakütle parametrelerine eşittir.

SEKK Parametre Tahmincilerinin Varyansı

- SEKK parametre tahmincilerinin varyans formülünün çıkartılmasında otokorelasyonun olmaması (ÇDR.6) ve sabit varyans (ÇDR.7) varsayımları önemli bir rol oyanar.
- Burada, sadece hatırlatmak amaçlı sabit varyans (ÇDR.7) varsayımından kısaca bahsedilecektir.
- Otokorelasyonun olmaması ve sabit varyans varsayımları hakkındaki detaylı bilgi "Ekonometri I - Basit Doğrusal Regresyon Modeli" konusunda bulunabilir.

SEKK Parametre Tahmincilerinin Varyansı

ÇDR.7: Sabit Varyans (Homoscedasticity)

u hata teriminin bağımsız değişken x'lere göre koşullu varyansı sabittir.

$$Var(u|x_1, x_2, \ldots, x_k) = \sigma^2$$

$$Var(u|\mathbf{x}) = \sigma^2$$

$$Var(u) = \sigma^2$$

- Bu varsayım SEKK parametre tahmincilerinin varyansının ve standart hatasının türetilmesinde ve etkinlik özelliklerinin belirlenmesinde kullanılır.
  - SEKK parametre tahmincilerinin sapmasızlığı için ÇDR.7 varsayımına ihtiyaç yoktur.
- Örneğin, ücret modelinde (Slayt 7) bu varsayım, model dışında bırakılan faktörler u'daki değişkenliğin modele dahil edilen tüm bağımsız değişkenlere ($educ$ ve $exper$) bağlı olmadığını söyler.
- ÇDR.5 ve ÇDR.7 varsayımları kullanılarak Slayt 20'deki gibi bağımlı değişken y'nin bağımsız değişken x'lere göre koşullu varyansının da sabit olduğu gösterilebilir.

$$Var(y|\mathbf{x}) = \sigma^2$$

- ÇDR.7'nin sağlanmadığı duruma **değişen varyans** (heteroscedasticity) denir.

SEKK Parametre Tahmincilerinin Varyansı

Teorem: $\hat{\beta}_j$'ların Varyansı

Gauss–Markov varsayımları (ÇDR.1 - ÇDR.7) altında

$$Var(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma^2}{SST_j(1-R_j^2)}, \quad SST_j = \sum_{i=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x}_j)^2, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

▸ Ek Bilgi

- Ekonometrik analizde ana odak $\hat{\beta}_j$'lar olduğundan, $\hat{\beta}_0$'nın varyansı verilmemiştir.
- σ^2 gözlenemeyen hata terimi u'nun varyansıdır. Bu nedenle σ^2 **hata varyansı**, σ ise **regresyonun standart sapması** olarak adlandırılır.
- SST_j, x_j'deki örneklem değişkenliğini ifade eder.
- R_j^2 ise x_j'nin diğer tüm x değişkenlerine regresyonundan (kesim parametresi içeren) elde edilen belirlilik katsayısıdır.
- SEKK parametre tahmincilerine ait varyansın olabildiğinde küçük olması istenir, çünkü küçük varyans tahminin hassaslığını arttırır. Bakınız Slayt 82.
- $Var(\hat{\beta}_j)$, σ^2 ile aynı yönde ilişkilidir. σ^2'yi düşürmenin tek yolu güçlü bağımsız değişkenleri modele eklemektir. Daha büyük bir σ^2, y'yi etkileyen gözlenemeyen hata terimi u'ya ait dağılımın daha fazla yayılmış olduğu anlamına gelir.

SEKK Parametre Tahmincilerinin Varyansı

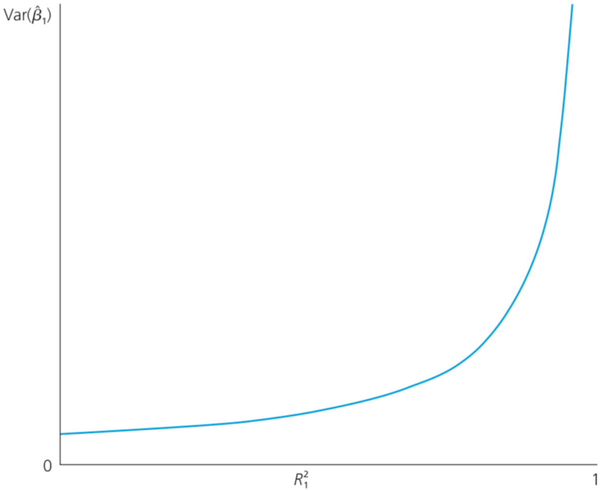
Teorem: $\hat{\beta}_j$'ların Varyansı

Gauss–Markov varsayımları (ÇDR.1 - ÇDR.7) altında

$$Var(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma^2}{SST_j(1 - R_j^2)}, \quad SST_j = \sum_{i=1}^{n}(x_{ij} - \bar{x}_j)^2, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

- $Var(\hat{\beta}_j)$, SST_j ile ters yönde ilişkilidir. SST_j'yi arttırmanın tek yolu gözlem sayısını arttırmaktır.
- $Var(\hat{\beta}_j)$, diğer tüm bağımsız değişken x'lerin x_j ile korelasyon düzeyini belirten R_j^2 terimine de bağlıdır.
  - R_j^2 arttıkça $Var(\hat{\beta}_j)$ sınırsız artar. Bakınız Şekil 1.
  - Limitte $R_j^2 = 1$ olduğunda varyans sonsuz olur (ayrıca $\hat{\beta}_j$ belirsiz olur). Ancak tam çoklu doğrusal bağıntının olmaması varsayımı (ÇDR.4) bu durumu engeller.
- Kısacası, bağımsız değişken x'lerin birbirleriyle doğrusal ilişki düzeyi (çoklu doğrusal bağıntının gücü) arttıkça SEKK parametre tahmincilerinin varyansı artar.
- Bu nedenle istenmeyen durum tam çoklu doğrusal bağıntı iken dikkat edilmesi gereken durum ise çoklu doğrusal bağıntı gücünün yüksek olmasıdır.

SEKK Parametre Tahmincilerinin Varyansı



Şekil 1: Varyans ve R_j^2 İlişkisi

Kaynak: Wooldridge (2016)

SEKK Parametre Tahmincilerinin Varyansı

Teorem: $\hat{\beta}_j$'ların Varyansı

Gauss–Markov varsayımları (ÇDR.1 - ÇDR.7) altında

$$Var(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma^2}{SST_j(1-R_j^2)}, \quad SST_j = \sum_{i=1}^{n}(x_{ij} - \bar{x}_j)^2, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

- ÇDR için verilen yukarıdaki $Var(\hat{\beta}_j)$ formülü aynı zamanda tek bağımsız değişken içeren modeldeki (BDR) parametre tahmincilerinin varyans formülünün çıkartılmasında kullanılabilir.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + u \qquad \text{(Model)}$$

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 \qquad \text{(ÖRF)}$$

$$x_1 = \hat{\alpha}_0 + \hat{r}_1, \quad R_1^2 = 0 \qquad \text{(1. Yardımcı Regresyon Tahmini)}$$

$$Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{SST_1(1-R_1^2)} = \frac{\sigma^2}{SST_1} \quad \longrightarrow \quad Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{SST_x} = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

SEKK Parametre Tahmincilerinin Varyansı

Teorem: $\hat{\beta}_j$'ların Varyansı

Gauss–Markov varsayımları (ÇDR.1 - ÇDR.7) altında

$$Var(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma^2}{SST_j(1 - R_j^2)}, \quad SST_j = \sum_{i=1}^{n} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

- Hata terimi u gözlenemediği için hata varyansı σ^2 bilinmez.
- Bu nedenle, SEKK parametre tahmincilerinin varyansı $Var(\hat{\beta}_j)$'ların tahmini için öncelikle hata varyansı σ^2'nin tahmin edilmesi gerekir.
- Buradaki önemli nokta, $Var(\hat{\beta}_j)$'ların sapmasız tahmin edilmesi gerekir. Bu nedenle, σ^2'nin de aynı şekilde sapmasız tahmin edilmesi gerekir.

SEKK Parametre Tahmincilerinin Varyansı

Hata Varyansı σ^2

ÇDR.5 varsayımı altında hata varyansı σ^2 aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$Var(u) = \sigma^2 = E(u^2) - \underbrace{E(u)^2}_{=0\ (\text{ÇDR.5})} \qquad \text{(Varyans Formülü)}$$

$$\sigma^2 = E(u^2)$$

- σ^2'nin sapmasız tahmincisi hata terimi u'nun örneklem ortalaması $n^{-1}\sum_{i=1}^{n} u_i^2$'dır.
- Fakat, hata terimi u gözlenemediği için σ^2'nin tahmininde hata terimi u'nun yerine onun örneklem analoğu olan kalıntı $\hat{u}$ kullanılır. $n^{-1}\sum_{i=1}^{n} u_i^2 \longrightarrow n^{-1}\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2$
- Fakat $n^{-1}\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2$ sapmalı bir tahmincidir. Bu nedenle, σ^2'nin sapmasız tahmincisini hesaplamak için, BDR'de yaptığımız gibi, bu değerin serbestlik derecesi kullanılarak düzeltilmesi gerekir.

SEKK Parametre Tahmincilerinin Varyansı

Teorem: Hata Varyansı σ^2'nin Sapmasız Tahmini

Gauss–Markov varsayımları (ÇDR.1 - ÇDR.7) altında hata varyansı σ^2'nin sapmasız bir tahmincisi:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2}{n-k-1} = \frac{SSR}{n-k-1}$$

- **Serbestik derecesi** (bağımsız bilgi sayısı)
  - Bağımsız bilgi sayısı $\longrightarrow s.d. = n - (k+1) = n - k - 1$
  - Serbestlik derecesi, SEKK birinci sıra koşullarından ($k+1$ tane) gelmektedir. Bu koşullar n tane kalıntı $\hat{u}$'nın üzerine $k+1$ tane kısıt koyar.
  - n tane kalıntıdan $n - (k+1)$ tanesi biliniyorsa, geriye kalan $k+1$ kalıntı otomatik olarak bilinecektir. Bu nedenle kalıntıların serbestlik derecesi $n-k-1$'dir.
- $\hat{\sigma}$, regresyonun standart sapması σ'nın bir tahmincisidir ve **regresyonun standart hatası** olarak adlandırılır.
- Regresyona yeni bir bağımsız değişken eklendiğinde $\hat{\sigma}$ azalabilir ya da artabilir.
  - Modele yeni bir bağımsız değişken eklendiğinde SSR düşecektir fakat aynı zamanda serbestklik derecesi de 1 düşecektir. SSR payda, serbestlik derecesi ise paydada olduğundan hangi değişimin daha fazla etkiye sahip olacağını kestiremeyiz.

SEKK Parametre Tahmincilerinin Varyansı

- $\hat{\sigma}^2$ tahmin edildikten sonra $Var(\hat{\beta}_j)$'nın formülünde yerine koyulup $Var(\hat{\beta}_j)$'nın sapmsız bir tahmincisi hesaplanabilir.

$\hat{\beta}_j$'ların Varyans Tahmini

$$Var(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma^2}{SST_j(1-R_j^2)} \longrightarrow \widehat{Var(\hat{\beta}_j)} = \frac{\hat{\sigma}^2}{SST_j(1-R_j^2)}, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

- Genelde, $Var(\hat{\beta}_j)$ ve $\widehat{Var(\hat{\beta}_j)}$ arasındaki ayrım yazımda net olarak gösterilmez.
  - $\hat{\beta}_j$'ların varyans tahmini denildiğinde $\widehat{Var(\hat{\beta}_j)}$ kastedilmesine rağmen yazıdaki gösterimde genelde $Var(\hat{\beta}_j)$ kullanılır.
  - Bu derste aynı yolu izleyip $\hat{\beta}_j$'ların varyans tahminini $Var(\hat{\beta}_j)$ ile göstereceğiz.

$$Var(\hat{\beta}_j) = \frac{\hat{\sigma}^2}{SST_j(1-R_j^2)}, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

- $Var(\hat{\beta}_j)$ direkt olarak $\hat{\sigma}$'ya bağlı olduğundan aynen $\hat{\beta}_j$'lar gibi $Var(\hat{\beta}_j)$'nın da örneklem dağılımı vardır ve örneklemden örnekleme değişir.

SEKK Parametre Tahmincilerinin Varyansı

$\hat{\beta}_j$'ların Standart Sapmaları (sd)

$$sd(\hat{\beta}_j) = \sqrt{Var(\hat{\beta}_j)} \quad \longrightarrow \quad sd(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma}{\sqrt{SST_j(1 - R_j^2)}}, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

$\hat{\beta}_j$'ların Standart Hataları (se)

$$se(\hat{\beta}_j) = \sqrt{\widehat{Var}(\hat{\beta}_j)} \quad \longrightarrow \quad se(\hat{\beta}_j) = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{SST_j(1 - R_j^2)}}, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

- $se(\hat{\beta}_j)$ güven aralıklarının hesaplanmasında ve hipotez testlerinde kullanılır.
- $se(\hat{\beta}_j)$ direkt olarak $\hat{\sigma}$'ya bağlı olduğundan aynen $\hat{\beta}_j$'lar gibi $se(\hat{\beta}_j)$'nın da örneklem dağılımı vardır ve örneklemden örnekleme değişir.
- $se(\hat{\beta}_j)$, ÇDR.7 (sabit varyans) varsayımına dayanan $Var(\hat{\beta}_j)$ formülünden türetildiği için ÇDR.7 varyasımının sağlanmaması durumunda, yani değişen varyans varsa, $Var(\hat{\beta}_j)$ ve $se(\hat{\beta}_j)$ tahminleri sapmalı olur.
- Değişen varyans durumunda SEKK parametre tahmincilerinin varyansları ve dolayısıyla standart hataları geçersizdir ve bu nedenle düzeltilmeleri gerekir.

SEKK Parametre Tahmincilerinin Özellikleri

- Anakütleden çekilen birbirinden farklı ve tekrarlanan **rassal örneklem**leri (random samples) kullanarak elde edeceğimiz SEKK parametre tahmincileri $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_j$'ların **örneklem dağılımları**nın (sampling distributions) özellikleri nelerdir?
- Bu bölümde, SEKK parametre tahmincileri $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_j$'ların **küçük örneklem** (small sample) özellikleri detaylı olarak incelenecektir. Bu özellikler:
  - **Sapmasızlık**: İlgili parametre tahmin edicisinin örneklem dağılımı ortalamasının (beklenen değerin) anakütle bilinmeyen değerine eşit olmasıdır.
  - **Etkinlik**: İlgili parametre tahmin edicisinin örneklem dağılımı varyansının o tahmin ediciler kümesi içinde (genelde sapmasız tahminci kümesi içinde) en küçük olmasıdır.
- SEKK parametre tahmincileri $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_j$'ların
  - **büyük örneklem** (asimptotik) özellikleri daha sonra ayrıca incelenecektir.
  - küçük örneklem ve büyük örneklem özellikleri birbirine karıştırılmamalıdır.
- Sapmasızlık ve etkinlik ile ilgili grafiksel gösterim "Ekonometri I - Basit Doğrusal Regresyon Modeli" konusunda bulunabilir.

SEKK Parametre Tahmincilerinin Sapmasızlığı

Teorem: SEKK Parametre Tahmincilerinin Sapmasızlığı

ÇDR.1 - ÇDR.5 varsayımları altında SEKK parametre tahmincileri sapmasızdır.

$$E(\hat{\beta}_0) = \beta_0$$

$$E(\hat{\beta}_j) = \beta_j, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

- **Sapmasızlık**, SEKK parametre tahmincilerinin örneklem dağılımlarının ortalamasının (beklenen değerinin) bilinmeyen anakütle parametrelerine eşit olduğunu söyler.
- Sapmasızlık tekrarlanan örneklemlerden elde edilen çok sayıdaki $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_j$'lar tahminlerine ait örneklem dağılımlarının bir özelliğidir.
- Dolayısıyla, tek bir örneklem kullanılarak hesaplanan $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_j$'larla ilgili olarak hiçbir şey söylemez. Çünkü, bilinmeyen anakütle parametreleri β_0 ve β_j'lerden çok uzak bir tahmin de elde edebiliriz.
- İlerleyen slaytlarda sapmasızlık için gerekli olan varsayımlar gösterilmiş ve bazıları hakkındaki detaylar verilmiştir. Bu varsayımlardan biri veya bir kaçı sağlanmazsa sapmasızlık özelliği kaybolur ve sapmalı tahmin ediciler elde edilir.

Sapmasızlık İçin Gerekli Varsayımlar: ÇDR.1 ve ÇDR.2

ÇDR.1: Gözlem Sayısı

Gözlem sayısı n tahmin edilecek anakütle parametre sayısından büyük ya da en azından eşit olmalıdır.

$$n \geq k + 1$$

ÇDR.2: Parametrelerde Doğrusallık

Model parametrelerde doğrusaldır.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + u \checkmark$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \checkmark$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_1^2 + u \checkmark$$

$$y = \beta_0 + \beta_1^2 x_1 + \beta_2 x_2 + u \times$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \sqrt{\beta_2} x_2 + u \times$$

Sapmasızlık İçin Gerekli Varsayımlar: ÇDR.2

Doğrusal Parametre Tahmincileri

$\hat{\beta}_j$ parametre tahmincisi aşağıdaki gibi yazılabiliyorsa doğrusaldır.

$$\hat{\beta}_j = \sum_{i=1}^{n} w_{ij} y_i, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

- Burada w_{ij} tüm bağımsız değişken x'lerin bir fonksiyonudur.
- SEKK parametre tahmincileri aşağıdaki gibi yazılabildiğinden doğrusaldır:

$$\hat{\beta}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{ij} y_i}{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{ij}^2} = \sum_{i=1}^{n} w_{ij} y_i, \quad \text{burada} \quad w_{ij} = \frac{\hat{r}_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{ij}^2}$$

- $\hat{r}_{ij}$, x_j'nin tüm diğer bağımsız değişkenler üzerine regresyonundan elde edilen kalıntılardır.
- Ekonometrik analizde ana odak $\hat{\beta}_j$'lar olduğundan, $\hat{\beta}_0$ üzerinde durulmamıştır.

Sapmasızlık İçin Gerekli Varsayımlar: ÇDR.3 ve ÇDR.4

ÇDR.3: Rassallık

Tahminde kullanılan n tane gözlem ilgili anakütleden rassal örnekleme yoluyla seçilmiştir. Yani gözlemler stokhastiktir (rassal), yani deterministik (kesin) değildir.

$$\{(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik}, y_i) : i = 1, 2, \ldots, n\}$$

ÇDR.4: Tam Çoklu Doğrusal Bağıntının Olmaması

Örneklemde (ve bu nedenle anakütlede) bağımsız değişken x'lerin hiçbiri kendi içinde sabit değildir (yeterli değişenlik vardır) ve bağımsız değişkenler arasında tam çoklu doğrusal bağıntı (TÇDB) yoktur.

$$\sum_{i=1}^{n} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2 > 0, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \quad \longrightarrow \quad x_2 = 2x_1 \quad \text{TÇDB VAR ✘}$$

$$\longrightarrow \quad x_2 = x_1^2 \quad \text{TÇDB YOK ✔}$$

Sapmasızlık İçin Gerekli Varsayımlar: ÇDR.4

ÇDR.4: Tam Çoklu Doğrusal Bağıntının Olmaması

Bu varsayım bağımsız değişken x'ler arasında tam doğrusal bir ilişkinin olmaması gerektiğini söyler. Herhangi bir x diğer x'lerin doğrusal bir kombinasyonu olarak yazılamaz. Yani x'ler arasındaki korelasyon katsayısı 1 olamaz.

- ÇDR.4 varsayımı bağımsız değişken x'lerin arasındaki doğrusal olmayan ilişki hakkında hiçbir kısıtlamada bulunmaz.
- ÇDR.4 varsayımı bağımsız değişken x'lerin doğrusal ilişkili olmasına izin verir. Fakat izin verilmeyen tek durum tam doğrusal ilişkinin olmasıdır.
- x'ler tam ilişkili olursa SEKK parametre tahmincilerinin hesaplanması matematiksel olarak mümkün olmaz (parametre tahmincileri belirsiz olur).
- Bu varsayıma göre bağımsız değişkenler doğrusal ilişkili olabilirler. Zaten, x'ler arasında doğrusal ilişkiye (1'den düşük korelasyona) izin vermezsek ÇDR'den istediğimiz faydayı alamayız.
- Örneğin, sınav başarı modelinde (Slayt 8) ortalama aile geliri $avginc$ ve öğrencinin eğitim harcaması $expend$ arasında ilişki olduğunu bilerek bu değişkenleri modele sokuyoruz. Amaç ortalama aile geliri $avginc$'i kontrol etmektir.

Sapmasızlık İçin Gerekli Varsayımlar: ÇDR.5

ÇDR.5: Sıfır Koşullu Ortalama

$$E(u|\mathbf{x}) = E(u) = 0$$

$$Cov(x_j, u) = 0, \quad Corr(x_j, u) = 0 \quad \text{ve} \quad E(x_j u) = 0, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

Sonuç: u ve x_j ortalama bağımsızdır. Yani u ve x_j doğrusal ilişkisizdir.

- ÇDR.5 varsayımı hata terimi u'nun bağımsız değişken x'lerle ilişkisiz olduğunu, yani x'lerin **kesin dışsal** (exogenous) olduğunu, söyler.
- Eğer u ve x'lerden biri ilişkiliyse, yani ÇDR.5 sağlanmazsa, SEKK parametre tahmincileri sapmalı olur. Bu durumda tahmin sonuçları güvenilir olmaz.
- ÇDR.5 varsayımının sağlanmadığı durumlar nelerdir?
  - Modelin **fonksiyon kalıbının yanlış kurulması** (functional form misspecification)
  - Önemli bir **değişkenin model dışında bırakılması** (omitted variable)
  - Bağımsız değişkenlerde yapılan **ölçme hataları** (measurement error)
- ÇDR.5 varsayımı sağlanmıyorsa **içsel değişkenler** (endogenous variables), yani **içsellik** (endogeneity), söz konusudur.

SEKK Parametre Tahmincilerinin Etkinliği

- Sapmasızlık ile beraber SEKK parametre tahmincilerinin, örneğin $\hat{\beta}_1$'nın, örneklem dağılımının β_1 etrafında merkezlendiğini gösterdik.
- Fakat, $\hat{\beta}_1$'nın ortalama β_1'den ne kadar uzakta olacağını da bilmek önemlidir.
- Bir diğer deyişle, tahminin hassalığını arttırmak ve daha kesin istatistiki sonuçlara ulaşmak için sapmasız tahminciler arasında ortalamadan en az sapan, yani varyansı en düşük, parametre tahmincisini bulmak isteriz.
- Bunun için de SEKK parametre tahmincilerinin örneklem dağılımındaki yayılımın ölçüsü olan varyans kullanılmalıdır.

SEKK Parametre Tahmincilerinin Etkinliği

Teorem: SEKK Parametere Tahmincilerinin Etkinliği

ÇDR.6 - ÇDR.7 varsayımları altında SEKK parametre tahmincileri etkindir.

$$Var(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma^2}{SST_j(1 - R_j^2)}, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

Ek Bilgi

- SEKK paramatre tahmincileri $\hat{\beta}_j$'ların **etkin** olması **en küçük/minimum varyanslı** olması anlamına gelir.
- Küçük varyans ve dolayısıyla küçük standart hata $se(\hat{\beta}_j)$ istenen bir özelliktir.
    - Küçük varyansa sahip parametre tahmincileri $\hat{\beta}_j$'ların farklı örneklemlerde elde edilen değerleri gerçek parametre β_j değerinden (beklenen değeri) çok fazla uzaklaşmaz, yani ortalamadan sapma azdır.
    - Bu nedenle küçük varyansa sahip parametre tahmincileri $\hat{\beta}_j$'lar daha **hassas** bir tahmin verir.
    - Küçük standart hata $se(\hat{\beta}_j)$'ya sahip ve dolayısıyla daha hassas olan $\hat{\beta}_j$'ların güven aralıklarının hesaplanmasında ve hipotez testlerinin yapılmasında daha **kesin istatistiki sonuçlar**a varabiliriz.

Etkinlik İçin Gerekli Varsayımlar: ÇDR.6 ve ÇDR.7

- Etkinlik için ÇDR.1 - ÇDR.5 varsayımlarının yanı sıra ÇDR.6 - ÇDR.7 varsayımları da gereklidir.

ÇDR.6: Otokorelasyon Olmaması

Hata terimleri arasında otokorelasyon yoktur.

$$Corr(u_i, u_s | x_1, x_2, \ldots, x_k) = 0, \quad i \neq s$$

$$Corr(u_i, u_s | \mathbf{x}) = 0, \quad i \neq s$$

$$Corr(u_i, u_s) = 0, \quad i \neq s$$

ÇDR.7: Sabit Varyans (Homoscedasticity)

u hata teriminin bağımsız değişken x'lere göre koşullu varyansı sabittir.

$$Var(u | x_1, x_2, \ldots, x_k) = \sigma^2$$

$$Var(u | \mathbf{x}) = \sigma^2$$

$$Var(u) = \sigma^2$$

- Otokorelasyonun olmaması ve sabit varyans varsayımları hakkındaki detaylı bilgi "Ekonometri I - Basit Doğrusal Regresyon Modeli" konusunda bulunabilir.

Gauss–Markov Teoremi

Gauss–Markov Teoremi

ÇDR.1 - ÇDR.7 varsayımları altında SEKK parametre tahmincileri, tüm doğrusal sapmasız tahminciler arasında etkin/en iyi (minimum varyanslı) olanlarıdır.

Başka bir ifadeyle, ÇDR.1 - ÇDR.7 varsayımları altında SEKK parametre tahmincileri $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \ldots, \hat{\beta}_k$ anakütle parametreleri $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$'nın **D**oğrusal **E**n **İ**yi **S**apmasız **T**ahmin **E**dicileridir (DESTE ya da BLUE—**B**est **L**inear **U**nbiased **E**stimator).

- Gauss–Markov Teoremi regresyon modelinin SEKK yöntemiyle tahmini için teorik dayanak sağlar.
- Eğer bu varsayımlar sağlanıyorsa SEKK yöntemi dışında başka bir tahmin yöntemine başvurmamıza gerek yoktur. SEKK yöntemi bize **doğrusal, sapmasız ve varyansı en düşük** (en iyi) tahmincileri vermektedir.
- ÇDR.1 - ÇDR.7 varsayımlarından biri bile ihlal edilirse Gaus-Markov Teoremi geçersiz olur.
- ÇDR.5 sağlanmazsa SEKK parametre tahmincilerinin sapmasızlık özelliği kaybolur ve sapmalı tahmin ediciler elde edilir. Bakınız Slayt 96.
- ÇDR.6 ve ÇDR.7 sağlanmazsa etkinlik özelliği kaybolur ve minimum varyans elde edilemez, yani varyans olması gerekenden daha büyük olur. Bakınız Slayt 94.

Gauss–Markov Teoremi

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Kaynak: Wikipedia

Andrey Markov (1856-1922)

Kaynak: Wikipedia

Orijinden Geçen Regresyon

Orijinden Geçen Regresyon

Bazen Ekonomi Teorisi, kesim parametresi β_0'ın sıfır olması gerektiğini söyler. Böyle bir durumda β_0 modelden çıkartılarak tahmin yapılır.

$$y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + u \quad \text{(Model)}$$

$$\tilde{y} = \tilde{\beta}_1 x_1 + \tilde{\beta}_2 x_2 + \cdots + \tilde{\beta}_k x_k \quad \text{(ÖRF)}$$

- Orijinden geçen regresyonda
  - Parametre tahmincileri $\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \ldots, \tilde{\beta}_k$'ların, kesim parametresi β_0'ın bulunduğu regresyondaki $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \ldots, \hat{\beta}_k$'lardan farklı değerler alacağı unutmulmamalıdır.
  - x'ler 0 olduğunda tahmin edilen y değeri, yani $\hat{y}$, 0'dır.
  - Cebirsel özellikler geçersizdir.
  - R^2 negatif çıkabilir, yani y'nin örneklem ortalaması, yani $\bar{y}$, y'deki değişkenliği açıklamada modeldeki bağımsız değişken x'lerden daha başarılıdır.
  - R^2 negatif ise, $R^2 = 0$ kabul edilir ya da regresyona kesim parametresi eklenerek tahmin yapılır.

Orijinden Geçen Regresyon

Orijinden Geçen Regresyon

Bazen Ekonomi Teorisi, kesim parametresi β_0'ın sıfır olması gerektiğini söyler. Böyle bir durumda β_0 modelden çıkartılarak tahmin yapılır.

$$y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + u \qquad \text{(Model)}$$

$$\tilde{y} = \tilde{\beta}_1 x_1 + \tilde{\beta}_2 x_2 + \cdots + \tilde{\beta}_k x_k \qquad \text{(ÖRF)}$$

- Gerçekte (ARF'de) kesim parametresi β_0 sıfırdan farklı olmasına ($\beta_0 \neq 0$) rağmen orijinden geçen regresyon tahmin edilirse eğim parametresi tahmincileri sapmalı olur. $\longrightarrow E(\tilde{\beta}_j) \neq \beta_j$
- Gerçekte (ARF'de) kesim parametresi β_0 sıfır olmasına ($\beta_0 = 0$) rağmen sıfır değilmiş gibi regresyona dahil edilirse eğim parametresi tahmincilerinin varyansları yükseltir. $\longrightarrow Var(\hat{\beta}_j) \uparrow$
- Gözlem sayısı n arttırılarak parametre tahmincilerinin varyansları düşürülebilirken sapmalı parametre tahminci probleminden kurtulamayız. Bu nedenle uygulamada genelde kesim parametresi β_0 direkt olarak modele eklenir.

BDR ve ÇDR Tahminlerinin Karşılaştırılması

Basit vs. Çoklu Doğrusal Regresyon (2 Bağımsız Değişkenli) Tahmini

$$y = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x_1 + \tilde{u} \quad \text{vs.} \quad y = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \hat{u} \qquad \text{(Tahmin)}$$

- Yukarıda verilen regresyonlar arasındaki temel fark, soldaki regresyonda (BDR'de) bağımsız değişken x_2'nin modele dahil edilmemesidir.
- $\tilde{\beta}_1$ ve $\hat{\beta}_1$ arasındaki ilişki şu şekildedir: $\tilde{\beta}_1 = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \tilde{\delta}_1$
- $\tilde{\delta}_1$, x_2'nin x_1 üzerine uygulanan regresyondaki eğim parametresi tahminidir.
- Yukarıdaki regresyonlar genelde farklı sonuçlar verir.
- Ancak şu iki durumda eğim parametresi tahminleri $\tilde{\beta}_1$ ve $\hat{\beta}_1$ aynı olur.
    - x_2'nin y üzerindeki yalın/kısmi etkisi sıfırdır, yani $\hat{\beta}_2 = 0$'dır.
    - Örneklemde x_1 ve x_2 doğrusal olarak ilişkisizdir, yani $\tilde{\delta}_1 = 0$'dır.

BDR ve ÇDR Tahminlerinin Karşılaştırılması

BDR Bilgileri - Tahmin

$$y = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x_1 + \tilde{u} \quad \longrightarrow \quad \tilde{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_{i1} - \bar{x}_1) y_i}{\sum_{i=1}^{n} (x_{i1} - \bar{x}_1)^2}$$

ÇDR (2 Bağımsız Değişkenli) Bilgileri - Tahmin

$$y = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \hat{u} \quad \longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} x_{i1} \hat{u}_i = 0 \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i = 0 \qquad \text{(Ana Model)}$$

$$x_2 = \tilde{\delta}_0 + \tilde{\delta}_1 x_1 + \tilde{r}_2 \quad \longrightarrow \quad \tilde{\delta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_{i1} - \bar{x}_1) x_{i2}}{\sum_{i=1}^{n} (x_{i1} - \bar{x}_1)^2} \qquad \text{(Yardımcı Model)}$$

BDR ve ÇDR Tahminlerinin Karşılaştırılması

- Şimdi BDR'deki eğim parametresi tahmincisi $\tilde{\beta}_1$'nın verilen formülünü
  - ÇDR modelini
  - ÇDR modelinden elde ettiğimiz cebirsel özellikleri
  - Yardımcı modeldeki eğim parametresi tahmincisi $\tilde{\delta}_1$'nın verilen formülünü

  kullanarak değiştirelim ve $\tilde{\beta}_1$ ve $\hat{\beta}_1$ arasındaki ilişkiyi bulalım.

$$\tilde{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)y_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)(\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1x_{i1}+\hat{\beta}_2x_{i2}+\hat{u}_i)}{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)^2}$$

$$= \frac{\hat{\beta}_0\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)}{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)^2} + \frac{\hat{\beta}_1\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)x_{i1}}{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)^2} + \frac{\hat{\beta}_2\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)x_{i2}}{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)\hat{u}_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)^2}$$

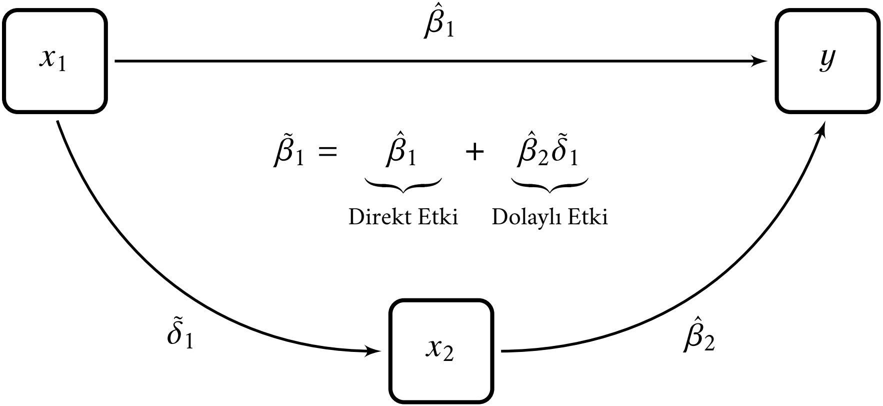
BDR ve ÇDR Tahminlerinin Karşılaştırılması

$$\tilde{\beta}_1 = \frac{\hat{\beta}_0 \overbrace{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)}^{=0}}{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)^2} + \frac{\hat{\beta}_1 \overbrace{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)x_{i1}}^{=\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)^2}}{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)^2} + \frac{\hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)x_{i2}}{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)\hat{u}_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)^2}$$

$$= \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)x_{i2}}{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)^2}}_{\tilde{\delta}_1} + \frac{\overbrace{\sum_{i=1}^{n}x_{i1}\hat{u}_i}^{=0} - \bar{x}_1 \overbrace{\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i}^{=0}}{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)^2}$$

$$\tilde{\beta}_1 = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2\tilde{\delta}_1$$

BDR ve ÇDR Tahminlerinin Karşılaştırılması



Şekil 2: x_1'in y Üzerindeki Direkt ve Dolaylı Etkisi

$k-1$ vs. k Değişkenli ÇDR Tahminlerinin Karşılaştırılması

$k-1$ vs. k Değişkenli Çoklu Doğrusal Regresyon Tahmini

$$y = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x_1 + \tilde{\beta}_2 x_2 + \cdots + \tilde{\beta}_{k-1} x_{k-1} + \tilde{u}$$

vs.

$$y = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \cdots + \hat{\beta}_{k-1} x_{k-1} + \hat{\beta}_k x_k + \hat{u} \qquad \text{(Tahmin)}$$

- Yukarıda verilen regresyonlar arasındaki temel fark, alttaki regresyonda bağımsız değişken x_k'nin modele dahil edilmemesidir.
- $\tilde{\beta}_j$ ve $\hat{\beta}_j$ arasındaki ilişki şu şekildedir: $\tilde{\beta}_j = \hat{\beta}_j + \hat{\beta}_k \tilde{\delta}_j$
- $\tilde{\delta}_j$, x_k'nın x_j üzerine uygulanan regresyondaki eğim parametresi tahminidir.
- Yukarıdaki regresyonlar genelde farklı sonuçlar verir.
- Ancak şu iki durumda eğim parametresi tahminleri $\tilde{\beta}_j$ ve $\hat{\beta}_j$ aynı olur.
  - x_k'nin y üzerindeki yalın/kısmi etkisi sıfırdır, yani $\hat{\beta}_k = 0$'dır.
  - Örneklemde x_j ve x_k doğrusal olarak ilişkisizdir, yani $\tilde{\delta}_j = 0$'dır.

Modele Gereksiz Bağımsız Değişken Eklenmesi

- Modele gerekli olmadığı halde bir bağımsız değişken x eklersek SEKK parametre tahmincileri $\hat{\beta}$'lar ve onların varyansları bundan nasıl etkilenir?
- Modele gereksiz bir bağımsız değişken x'in eklenmesi ARF'de bu değişkenin yalın/kısmi etkisinin sıfır olduğu anlamına gelmektedir.
- Yani, model **fazla kurulmuş**tur (overspecification).
- Örneğin, aşağıdaki doğru modelin bilinmediğini ve bağımsız değişken x_3'ü modele gereksiz yere ekleyerek yanlış modelin kullanıldığını düşünelim.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \qquad \text{(Doğru Model)}$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + u \qquad \text{(Yanlış Model)}$$

- Yanlış modelin ÇDR.1 - ÇDR.7 varsayımlarını sağladığını varsayalım.
- x_3'ün yalın/kısmi etkisi sıfır olmasına ($\beta_3 = 0$) rağmen modele koyulduğunda, yani yanlış model kullanıldığında ARF aşağıdaki gibi olur.

$$E(y|x_1, x_2, x_3) = E(y|x_1, x_2) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 \qquad \text{(ARF)}$$

- Bu ARF'nin bilinmediğini ve araştırmacının modele x_3'ü katsayısı sıfır ($\beta_3 = 0$) olduğu halde eklediğini varsayıyoruz.

Modele Gereksiz Bağımsız Değişken Eklenmesi

- Bu durumda ÖRF aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \hat{\beta}_3 x_3 \qquad \text{(ÖRF)}$$

- SEKK parametre tahmincileri hala sapmasızdır. Bu sonuç Slayt 75'de verilen teorem ve ek bilgi yardımıyla kolayca çıkarılabilir.

$$E(\hat{\beta}_0) = \beta_0, \quad E(\hat{\beta}_1) = \beta_1, \quad E(\hat{\beta}_2) = \beta_2, \quad E(\hat{\beta}_3) = 0$$

- Gereksiz eklenen bağımsız değişken x_3'ün katsayısının doğru değeri sıfırdır. $\hat{\beta}_3$'nın kendisi hiçbir zaman sıfır olmayacak olsa da, x_3 değişkenin bir açıklayıcılığı olmadığından tahmincisinin beklenen değeri de 0 olacaktır.
- Modele gereksiz bir bağımsız değişkenin eklenmesi durumda SEKK parametre tahmincileri hala sapmasız olsa da parametre tahmincilerinin varyansları yükselir.
  - Modele yeni bağımsız değişken x_j eklenince R_j^2 artacağından $Var(\hat{\beta}_j)$ de artar.

$$Var(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma^2}{SST_j(1 - R_j^2)}, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

Gerekli Bağımsız Değişkenin Model Dışında Bırakılması

- Modelede yer alması gerektiği halde bir bağımsız değişken x'i modelden dışlarsak SEKK parametre tahmincileri $\hat{\beta}$'lar ve onların varyansları bundan nasıl etkilenir?
- Gerekli bir bağımsız değişken x'in modelden dışlanması ARF'de bu değişkenin yalın/kısmi etkisinin sıfır olmadığı anlamına gelmektedir.
- Yani, model **eksik kurulmuş**tur (underspecification).
- Örneğin, ÇDR.1 - ÇDR.7 varsayımlarının sağlandığı doğru modelin x_1 ve x_2 bağımsız değişkenlerini içerdiğini varsayalım.
- Fakat, araştırmacının bağımsız değişken x_2'yi gözleyemediği için model dışında bırakıp yanlış modeli tahmin ettiğini düşünelim.
- Eğer x_2'yi modele doğrudan sokmazsak (yanlış modeli kullanırsak), onu yanlış modeledeki hata teriminin (v) içine almış oluruz.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \qquad \text{(Doğru Model)}$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + v \qquad \text{(Yanlış Model)}$$

$$v = \beta_2 x_2 + u \qquad \text{(Yanlış Model Hata Terimi)}$$

Gerekli Bağımsız Değişkenin Model Dışında Bırakılması

- Doğru ve yanlış modelden elde edeceğimiz tahminler farklı olacağından, modeller ve onların ÖRF'leri aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \longrightarrow \hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 \quad \text{(Doğru Model ve ÖRF)}$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + v \longrightarrow \tilde{y} = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x_1 \quad \text{(Yanlış Model ve ÖRF)}$$

$$v = \beta_2 x_2 + u \quad \text{(Yanlış Model Hata Terimi)}$$

- Yanlış model tahmin edildiğinde x_1'in eğim paramteresi β_1'in parametre tahminicisi $\tilde{\beta}_1$ hala sapmasız mıdır?
- Yanlış modelde β_1'in parametre tahminicisi $\tilde{\beta}_1$:

$$\tilde{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_{i1} - \bar{x}_1) y_i}{\sum_{i=1}^{n} (x_{i1} - \bar{x}_1)^2}$$

Gerekli Bağımsız Değişkenin Model Dışında Bırakılması

- $\tilde{\beta}_1$'nın sapmalı bir tahminci olup olmadığını ve eğer sapmalı ise sapmanın boyutunu belirlemek için $\tilde{\beta}_1$ formülünde y yerine doğru modeli yazıp, yeniden düzenleyelim.

$$\tilde{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)y_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)(\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2+u)}{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)^2}$$

$$= \frac{\beta_0 \overbrace{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)}^{=0}}{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)^2} + \frac{\beta_1 \overbrace{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)x_{i1}}^{=\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)^2}}{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)^2} + \frac{\beta_2 \sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)x_{i2}}{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)u_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)^2}$$

Gerekli Bağımsız Değişkenin Model Dışında Bırakılması

- $\tilde{\beta}_1$'nın yeniden düzenlenen formülü aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\tilde{\beta}_1 = \beta_1 + \frac{\beta_2 \sum_{i=1}^{n}(x_{i1} - \bar{x}_1)x_{i2}}{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1} - \bar{x}_1)^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1} - \bar{x}_1)u_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1} - \bar{x}_1)^2}$$

- $\tilde{\beta}_1$'nın yeniden düzenlenen formülünün tüm x'lere ($\mathbf{x}$) göre koşullu beklenen değerini alalım.

$$E(\tilde{\beta}_1|\mathbf{x}) = E(\beta_1|\mathbf{x}) + E\left(\left.\frac{\beta_2 \sum_{i=1}^{n}(x_{i1} - \bar{x}_1)x_{i2}}{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1} - \bar{x}_1)^2}\right|\mathbf{x}\right) + E\left(\left.\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1} - \bar{x}_1)u_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1} - \bar{x}_1)^2}\right|\mathbf{x}\right)$$

$$= \beta_1 + \beta_2 \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1} - \bar{x}_1)x_{i2}}{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1} - \bar{x}_1)^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1} - \bar{x}_1)\overbrace{E(u_i|\mathbf{x})}^{=0\ (\text{ÇDR.5})}}{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1} - \bar{x}_1)^2}$$

Gerekli Bağımsız Değişkenin Model Dışında Bırakılması

- $\tilde{\beta}_1$'nın tüm x'lere ($\mathbf{x}$) göre koşullu beklenen değeri aşağıdaki gibi olacaktır.

$$E(\tilde{\beta}_1|\mathbf{x}) = \beta_1 + \beta_2 \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1} - \bar{x}_1)x_{i2}}{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1} - \bar{x}_1)^2}$$

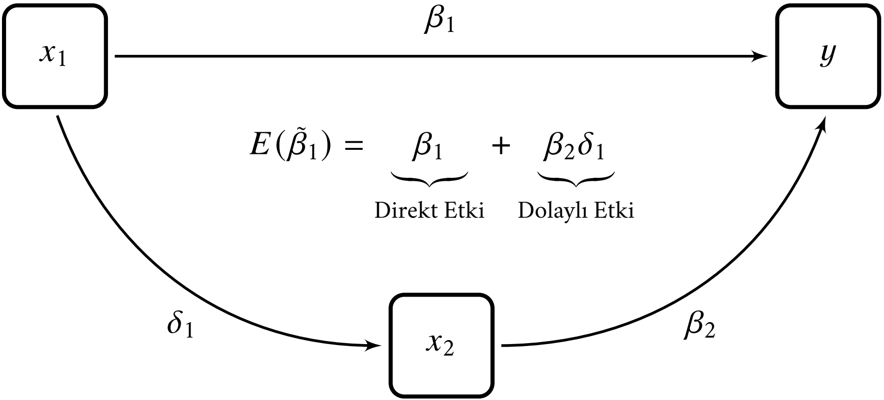
- β_2'nin yanında yer alan terim x_2'nin x_1 üzerine regresyonundan (yardımcı model) elde edilen eğim parametresi tahmincisi $\tilde{\delta}_1$'dir.

$$x_2 = \tilde{\delta}_0 + \tilde{\delta}_1 x_1 + \tilde{r}_2 \quad \longrightarrow \quad \tilde{\delta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1} - \bar{x}_1)x_{i2}}{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1} - \bar{x}_1)^2} \quad \text{(Yardımcı Model Tahmini)}$$

- SEKK parametre tahmincilerinin sapmasızlığı tüm x'lere ($\mathbf{x}$) göre koşullu hesaplanmasına rağmen genelde koşulsuz olarak gösterilir. Böylece, $\tilde{\beta}_1$'nın beklenen değeri aşağıdaki gibi olur.

$$E(\tilde{\beta}_1|\mathbf{x}) = \beta_1 + \beta_2\tilde{\delta}_1 \quad \longrightarrow \quad E(\tilde{\beta}_1) = \beta_1 + \beta_2\tilde{\delta}_1$$

Gerekli Bağımsız Değişkenin Model Dışında Bırakılması



Şekil 3: x_1'in y Üzerindeki Direkt ve Dolaylı Etkisi

Dışlanmış Değişken Sapması

- $E(\tilde{\beta}_1)$ ve β_1 arasındaki farka **dışlanmış değişken sapması** (omitted variable bias) adı verilir.

$$E(\tilde{\beta}_1) = \beta_1 + \beta_2\tilde{\delta}_1 \quad \longrightarrow \quad \text{sapma} = E(\tilde{\beta}_1) - \beta_1 = \beta_2\tilde{\delta}_1$$

- Şu iki durumda sapma 0, yani $\tilde{\beta}_1$ sapmasız, olur.
  - x_2'nin y üzerindeki yalın/kısmi etkisi sıfırdır, yani $\beta_2 = 0$'dır. Doğru modelde bağımsız değişken x_2 bulunmamalıdır.
  - x_1 ve x_2 doğrusal olarak ilişkisizdir, yani $\tilde{\delta}_1 = 0$.
- Sapmanın işareti hem β_2'ye hem de dışlanan bağımsız değişken x_2 ile modele dahil edilen değişken x_1 arasındaki korelasyona, yani $Corr(x_1, x_2) = \tilde{\delta}_1$, bağlıdır.
- Dışlanan bağımsız değişken x_2 gözlenemiyorsa bu korelasyon hesaplanamaz.
- Aşağıdaki tablo sapmanın yönüne ilişkin dört olası durumu özetlemektedir.

	$\tilde{\delta}_1$	
β_2	$\tilde{\delta}_1 > 0$	$\tilde{\delta}_1 < 0$
$\beta_2 > 0$	Pozitif Sapma	Negatif Sapma
$\beta_2 < 0$	Negatif Sapma	Pozitif Sapma

Notlar: $Corr(x_1, x_2) = \tilde{\delta}_1$

Dışlanmış Değişken Sapması

$$sapma = E(\tilde{\beta}_1) - \beta_1 = \beta_2\tilde{\delta}_1$$

- Sapmanın işaretinin yanı sıra boyutu da önemlidir. Sapmanın boyutu hem $\tilde{\delta}_1$'ya hem de β_2'ye bağlıdır.
- β_1'in büyüklüğüne kıyasla küçük bir sapma uygulamada sorun yaratmayabilir. Örneğin, anakütle eğim parametresi β_1'ın değeri 8.6 iken tahmin sonucunda elde edilen sapma 0.1 ise.
- Uygulamada, β_2 bilinmeyen anakütle parametresi olduğundan sapmanın büyüklüğünü hesaplamak çoğunlukla mümkün olmaz.
- Buna rağmen bazı durumlarda sapmanın yönü/işareti hakkında bir fikir elde edebiliriz.
- Örneğin, bağımsız değişken x_2'yi gözleyemediğimize rağmen
  - x_2'nin y üzerindeki yalın/kısmi etkisinin yönünü, yani β_2'nin işaretini
  - x_1 ve x_2 arasındaki doğrusal ilişkinin yönünü, yani $\tilde{\delta}_1$'nin işaretini

  bildiğimizi düşünelim.
- Bu durumda sapmanın yönü/işareti hakkında yorumda bulunabiliriz.
  - $E(\tilde{\beta}_1) > \beta_1$ ise $\tilde{\beta}_1$'da **yukarı sapma** vardır.
  - $E(\tilde{\beta}_1) < \beta_1$ ise $\tilde{\beta}_1$'da **aşağı sapma** vardır.

Dışlanmış Değişken Sapması

- Örneğin, ücreti açıklamak doğru modelin hem eğitim ($educ$) hem de doğuştan gelen yetenek ($ability$) bağımsız değişkenlerini içerdiğini düşünelim.
- Yetenek ($ability$) bağımsız değişkenini gözleyemediğimiz için model dışında bırakıp yanlış modeli tahmin ettiğimizi düşünelim.

$$
\begin{aligned}
wage &= \beta_0 + \beta_1 educ + \beta_2 ability + u && \text{(Doğru Model)} \\
wage &= \beta_0 + \beta_1 educ + v \;\longrightarrow\; \widehat{wage} = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 educ && \text{(Yanlış Model ve ÖRF)} \\
v &= \beta_2 ability + u && \text{(Yanlış Model Hata Terimi)} \\
ability &= \tilde{\delta}_0 + \tilde{\delta}_1 educ + \tilde{r}_{ability} && \text{(Yardımcı Model Tahmini)}
\end{aligned}
$$

- Yanlış model tahmin edildiğinde, $educ$'e ait eğim parametresi tahmincisi $\tilde{\beta}_1$'deki sapmanın işaretinin pozitif olacağı söylenebilir. Çünkü,
  - Yetenek ($ability$) ücretlerle ($wage$) pozitif ilişkilidir, yani $\beta_2 > 0$'dır.
  - Eğitimli ($educ$) insanlar daha yetenekli ($ability$) olma eğilimindedir, yani $\tilde{\delta}_1 > 0$'dır.

$$sapma = E(\tilde{\beta}_1) - \beta_1 = \underbrace{\beta_2}_{+} \; \underbrace{\tilde{\delta}_1}_{+}$$

- $E(\tilde{\beta}_1) > \beta_1$ olduğundan $\tilde{\beta}_1$'da **yukarı sapma** vardır.

Dışlanmış Değişken Sapması

$$wage = \beta_0 + \beta_1 educ + \beta_2 ability + u \qquad \text{(Doğru Model)}$$

$$wage = \beta_0 + \beta_1 educ + v \;\longrightarrow\; \widetilde{wage} = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 educ \qquad \text{(Yanlış Model ve ÖRF)}$$

$$v = \beta_2 ability + u \qquad \text{(Yanlış Model Hata Terimi)}$$

$$ability = \tilde{\delta}_0 + \tilde{\delta}_1 educ + \tilde{r}_{ability} \qquad \text{(Yardımcı Model Tahmini)}$$

- Yetenek ($ability$) ve eğitim ($educ$) yakından ilişkili, $\tilde{\delta}_1 \neq 0$, olduğundan yanlış model kullanıldığında:
  - $educ$ ile v ilişkili olacaktır. $\longrightarrow Corr(educ, v) \neq 0$
  - ÇDR.5 varsayımı ihlal edilecektir. $\longrightarrow E(v|educ) \neq 0$
  - $\tilde{\beta}_1$ sapmalı tahmin edilecektir. $\longrightarrow E(\tilde{\beta}_1) \neq \beta_1$

  Sonuç olarak bağımsız değişken $educ$ içseldir.
- Yeteneğin dışlanıp yanlış modelin kullanılması durumunda, eğitimin ücret ($wage$) üzerindeki etkisi, yani $\tilde{\beta}_1$, abartılı tahmin edilir. Yani, aslında yanlış modeldeki eğitimin etkisinin bir kısmı doğuştan gelen yeteneğe bağlıdır.

Dışlanmış Değişken Sapması

- Daha fazla bağımsız değişken içeren modellerde gerekli bir değişkenin model dışında bırakılması SEKK parametre tahmincilerinin genellikle sapmalı olmasına neden olur.
- Doğru modelin aşağıdaki gibi olduğunu varsayalım.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + u \qquad \text{(Doğru Model)}$$

- x_3'ü dışarıda bırakarak aşağıdaki yanlış modeli tahmin ettiğimizi düşünelim.

$$\tilde{y} = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x_1 + \tilde{\beta}_2 x_2 \qquad \text{(Yanlış Model - ÖRF)}$$

- x_3'ün, x_1 ile doğrusal ilişkili fakat x_2 ile doğrusal ilişkisiz olsun. Eğer,
  - x_1 ve x_2 doğrusal ilişkili ise, bu durumda $\tilde{\beta}_1$ ve $\tilde{\beta}_2$ sapmalı olur.
  - x_1 ve x_2 doğrusal ilişkisiz ise, bu durumda $\tilde{\beta}_1$ sapmalı fakat $\tilde{\beta}_2$ sapmasız olur.

$$\left.\begin{array}{l} Corr(x_3, x_1) \neq 0 \\ Corr(x_3, x_2) = 0 \\ Corr(x_1, x_2) \neq 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} E(\tilde{\beta}_1) \neq \beta_1 \\ E(\tilde{\beta}_2) \neq \beta_2 \end{array} \quad \text{vs.} \quad \left.\begin{array}{l} Corr(x_3, x_1) \neq 0 \\ Corr(x_3, x_2) = 0 \\ Corr(x_1, x_2) = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} E(\tilde{\beta}_1) \neq \beta_1 \\ E(\tilde{\beta}_2) = \beta_2 \end{array}$$

Model Seçimi: Sapmasızlık vs. Küçük Varyans

- Modele bir bağımsız değişkenin eklenip eklenmemesi kararı SEKK parametre tahmincilerinin sapması ve varyansındaki değişim karşılaştırılarak verilmelidir.
- Olası modeller ve onların ÖRF'lerinin aşağıdaki gibi olduğunu varsayalım.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \longrightarrow \hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 \qquad \text{(1. Model ve ÖRF)}$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + v \longrightarrow \tilde{y} = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x_1 \qquad \text{(2. Model ve ÖRF)}$$

$$v = \beta_2 x_2 + u \qquad \text{(2. Model Hata Terimi)}$$

$$x_2 = \tilde{\delta}_0 + \tilde{\delta}_1 x_1 + \tilde{r}_2 \qquad \text{(Yardımcı Model Tahmini)}$$

- Bağımsız değişkenler genellikle doğrusal olarak ilişkili olduğundan, x_1 ve x_2'in de doğrusal ilişkili, yani $Corr(x_1, x_2) = \tilde{\delta}_1 \neq 0$ olduğunu varsayalım.
- 1. model tahmininden elde edilen $\hat{\beta}_1$ eğer,
  - $\beta_2 = 0$ ise, bağımsız değişken x_2 gereksiz olarak modele eklenmiştir (bakınız Slayt 94) ve bu nedenle $\hat{\beta}_1$ sapmasızdır. $\longrightarrow E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$
  - $\beta_2 \neq 0$ ise, bağımsız değişken x_2 doğru olarak modele eklenmiştir ve bu nedenle $\hat{\beta}_1$ sapmasızdır. $\longrightarrow E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$

Model Seçimi: Sapmasızlık vs. Küçük Varyans

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \longrightarrow \hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 \qquad \text{(1. Model ve ÖRF)}$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + v \longrightarrow \tilde{y} = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x_1 \qquad \text{(2. Model ve ÖRF)}$$

$$v = \beta_2 x_2 + u \qquad \text{(2. Model Hata Terimi)}$$

$$x_2 = \tilde{\delta}_0 + \tilde{\delta}_1 x_1 + \tilde{r}_2 \qquad \text{(Yardımcı Model Tahmini)}$$

- 2. model tahmininden elde edilen $\tilde{\beta}_1$ eğer,
  - $\beta_2 = 0$ ise, bağımsız değişken x_2 doğru olarak modelden çıkarılmıştır ve bu nedenle $\tilde{\beta}_1$ sapmasızdır. $\longrightarrow E(\tilde{\beta}_1) = \beta_1$
  - $\beta_2 \neq 0$ ise, bağımsız değişken x_2 gerekli olduğu halde modelden çıkarılmıştır (bakınız Slayt 96) ve bu nedenle $\tilde{\beta}_1$ sapmalıdır. $\longrightarrow E(\tilde{\beta}_1) \neq \beta_1$
- Bu nedenle model seçiminde eğer sapmasızlık tek kriter ise, 1. model tahminindeki $\hat{\beta}_1$ her durumda sapmasız olduğu için $\tilde{\beta}_1$'e göre tercih edilir.
- Fakat sapmasızlığa göre bir model tercihi, varyans da düşünüldüğünde her zaman doğru degildir.

Model Seçimi: Sapmasızlık vs. Küçük Varyans

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \longrightarrow \hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 \qquad \text{(1. Model ve ÖRF)}$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + v \longrightarrow \tilde{y} = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x_1 \qquad \text{(2. Model ve ÖRF)}$$

- 1. modelde 2. modele göre daha fazla bağımsız değişken olduğundan $Var(\tilde{\beta}_1) < Var(\hat{\beta}_1)$'dır (bakınız Slayt 95).
- Eğer $\beta_2 = 0$ ise,
  - 1. model tahminindeki $\hat{\beta}_1$ sapmasızdır. $\longrightarrow E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$
  - 2. model tahminindeki $\tilde{\beta}_1$ sapmasızdır. $\longrightarrow E(\tilde{\beta}_1) = \beta_1$
  - $\tilde{\beta}_1$ sapmasız ve $\hat{\beta}_1$'e göre daha küçük varyanslı olduğundan 2. model, yani $\tilde{\beta}_1$, tercih edilir.
- Eğer $\beta_2 \neq 0$ ise,
  - 1. model tahminindeki $\hat{\beta}_1$ sapmasızdır. $\longrightarrow E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$
  - 2. model tahminindeki $\tilde{\beta}_1$ sapmalıdır. $\longrightarrow E(\tilde{\beta}_1) \neq \beta_1$
  - $\hat{\beta}_1$ sapmasız olduğundan ve gözlem sayısı n arttırılarak varyansı yeteri kadar küçüleceğinden 1. model, yani $\hat{\beta}_1$, tercih edilir.
- Kısacası sapmasızlık olmazsa olmaz şart iken varyans gözlem sayısı n arttırılarak düşürebilir.

Kaynaklar

Gujarati, D.N. (2009). *Basic Econometrics*. Tata McGraw-Hill Education.
Stock, J.H. ve M.W. Watson (2015). *Introduction to Econometrics*.
Tastan, H. (2020). *Lecture on Econometrics I. Personal Collection of H. Tastan*. Retrieved from Online.
Wooldridge, J.M. (2016). *Introductory Econometrics: A Modern Approach*. Nelson Education.

Ek Bilgiler

ÇDR.5: Sıfır Koşullu Ortalama

$$E(u|\mathbf{x}) = E(u) = 0$$

$$Cov(x_j, u) = 0, \quad Corr(x_j, u) = 0 \quad \text{ve} \quad E(x_j u) = 0, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

$$Cov(x_j, u) = E(x_j u) - E(x_j)\underbrace{E(u)}_{=0} = 0$$

$$= E(x_j u) = 0$$

Sunuma Geri Dön

Ek Bilgiler

ÇDR.6: Otokorelasyon Olmaması

$$Cov(u_i, u_s|\mathbf{x}) = 0 \quad \text{ve} \quad Cov(u_i, u_s) = 0, \quad i \neq s$$
$$E(u_i u_s|\mathbf{x}) = 0 \quad \text{ve} \quad E(u_i u_s) = 0, \quad i \neq s$$

$$Cov(u_i, u_s|\mathbf{x}) = E(u_i u_s|\mathbf{x}) - \underbrace{E(u_i|\mathbf{x})}_{=0}\underbrace{E(u_s|\mathbf{x})}_{=0} = 0$$
$$= E(u_i u_s|\mathbf{x}) = 0$$

Sunuma Geri Dön

Ek Bilgiler

ÇDR.7: Sabit Varyans (Homoscedasticity)

$$E(u^2|\mathbf{x}) = \sigma^2 \quad \text{ve} \quad E(u^2) = \sigma^2$$

$$Var(u|\mathbf{x}) = E(u^2|\mathbf{x}) - \underbrace{E(u|\mathbf{x})^2}_{=0} = \sigma^2$$

$$= E(u^2|\mathbf{x}) = \sigma^2$$

Sunuma Geri Dön

Ek Bilgiler

Anakütle Regresyon Fonksiyonu (ARF)

$$E(y|\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k \qquad \text{(ARF)}$$

$$Var(y|\mathbf{x}) = \sigma^2$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + u$$

$$E(y|\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + \underbrace{E(u|\mathbf{x})}_{=0}$$

$$E(y|\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k \qquad \text{(ARF)}$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + u$$

$$Var(y|\mathbf{x}) = Var(u|\mathbf{x})$$

$$Var(y|\mathbf{x}) = \sigma^2$$

Sunuma Geri Dön

Ek Bilgiler

Parametre Tahmincileri: 2 Bağımsız Değişken

β_0 kesim parametresinin tahmini $\hat{\beta}_0$ (1 tane var):

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{x}_2$$

- $\hat{\beta}_0$'nın formülü
  - SEKK birinci sıra koşullarından ya da örneklem moment koşullarından ilki (Slayt 31)
  - Kalıntı $\hat{u}$'nın denklemi
  - İndeksli haldeki model denklemi

kullanılarak çıkarılabilir.

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i) = 0$$

$$= \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} \hat{\beta}_0 - \sum_{i=1}^{n} \hat{\beta}_1 x_{i1} - \sum_{i=1}^{n} \hat{\beta}_2 x_{i2} = 0$$

$$= n\bar{y} - n\hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 n\bar{x}_1 - \hat{\beta}_2 n\bar{x}_2 = 0$$

$$= \bar{y} - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \bar{x}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{x}_2 = 0$$

Sonuç: $\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{x}_2$

Sunuma Geri Dön

Ek Bilgiler

Parametre Tahmincileri: k Bağımsız Değişken

β_0 kesim parametresinin tahmini $\hat{\beta}_0$ (1 tane var):

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1\bar{x}_1 - \hat{\beta}_2\bar{x}_2 - \cdots - \hat{\beta}_k\bar{x}_k$$

- $\hat{\beta}_0$'nın formülü
    - SEKK birinci sıra koşulları ya da örneklem moment koşullarından ilki (Slayt 31)
    - Kalıntı $\hat{u}$'nın denklemi
    - İndeksli haldeki model denklemi

kullanılarak çıkarılabilir.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i &= \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i) = 0 \\
&= \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n}\hat{\beta}_0 - \sum_{i=1}^{n}\hat{\beta}_1 x_{i1} - \sum_{i=1}^{n}\hat{\beta}_2 x_{i2} - \cdots - \sum_{i=1}^{n}\hat{\beta}_k x_{ik} = 0 \\
&= n\bar{y} - n\hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 n\bar{x}_1 - \hat{\beta}_2 n\bar{x}_2 - \cdots - \hat{\beta}_k n\bar{x}_k = 0 \\
&= \bar{y} - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1\bar{x}_1 - \hat{\beta}_2\bar{x}_2 - \cdots - \hat{\beta}_k\bar{x}_k = 0
\end{aligned}$$

Sonuç: $\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1\bar{x}_1 - \hat{\beta}_2\bar{x}_2 - \cdots - \hat{\beta}_k\bar{x}_k$

Sunuma Geri Dön

Ek Bilgiler

Tahmin Edilen Değer ve Kalıntıların Cebirsel Özellikleri - 2

$$Cov(x_j, \hat{u}) = E(x_j\hat{u}) - E(x_j)\underbrace{E(\hat{u})}_{=0} = 0 \qquad \text{(1. Cebirsel Özellik)}$$

$$= E(x_j\hat{u}) = 0$$

ya da

$$Cov(x_j, \hat{u}) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{ij} - \bar{x}_j)(\hat{u}_i - \bar{\hat{u}})}{n-1} = 0$$

$$Cov(x_j, \hat{u}) = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}(\hat{u}_i - \underbrace{\bar{\hat{u}}}_{=0}) = 0 \qquad \text{(1. Cebirsel Özellik)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_{ij}\hat{u}_i = 0$$

Sunuma Geri Dön

Ek Bilgiler

Tahmin Edilen Değer ve Kalıntıların Cebirsel Özellikleri - 3

$$
\begin{aligned}
Cov(\hat{y},\hat{u}) &= Cov(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \cdots + \hat{\beta}_k x_k, \hat{u}) \\
&= \hat{\beta}_1 \underbrace{Cov(x_1,\hat{u})}_{=0} + \hat{\beta}_2 \underbrace{Cov(x_2,\hat{u})}_{=0} + \cdots + \hat{\beta}_k \underbrace{Cov(x_k,\hat{u})}_{=0} = 0 \\
& \qquad \text{(2. Cebirsel Öz.)} \\
&= E(\hat{y}\hat{u}) = 0 \qquad \text{(Kovaryans formülü ve 1. Cebirsel Özellik)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Cov(\hat{y},\hat{u}) &= \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y})(\hat{u}_i - \underbrace{\bar{\hat{u}}}_{=0}) = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y})\hat{u}_i = 0 \qquad \text{(1. Cebirsel Özellik)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i \hat{u}_i - \bar{y} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i}_{=0} = 0 \qquad \text{(1. Cebirsel Özellik)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i \hat{u}_i = 0
\end{aligned}
$$

Sunuma Geri Dön

Ek Bilgiler

SEKK Parametre Tahmincilerinin Beklenen Değeri

$$E(\hat{\beta}_0) = \beta_0$$

$$E(\hat{\beta}_j) = \beta_j, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

- $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_j$'ların beklenen değer formülünü çıkartmada işimizi kolaylaştırmak için 2 bağımsız değişkenli ÇDR modelini kullanacağız.

2 Bağımsız Değişkenli ÇDR Modeli

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + u_i \qquad \text{(Model - İndeksli)}$$

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} \qquad \text{(ÖRF - İndeksli)}$$

- 2 bağımsız değişkenli ÇDR modelinde, spesifik olarak $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$'nın beklenen değer formülünü çıkartacağız.
- Daha sonra bulduğumuz bu formülü k bağımsız değişkenli ÇDR modelindeki $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_j$'ların beklenen değer formülünü çıkartmada kullanacağız.

Ek Bilgiler

- $\hat{\beta}_0$'nın beklenen değer formülü
  - $\hat{\beta}_0$'nın Slayt 33'deki formülünün tüm x'lere ($\mathbf{x}$) göre koşullu beklenen değerini alıp
  - Model denkleminin toplamları alınarak elde edilen denklem

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + u_i \quad \longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} (\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + u_i)$$

$$n\bar{y} = n\beta_0 + \beta_1 n\bar{x}_1 + \beta_2 n\bar{x}_2$$

$$\bar{y} = \beta_0 + \beta_1 \bar{x}_1 + \beta_2 \bar{x}_2$$

kullanılarak gösterilebilir.

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{x}_2 \qquad \text{(Slayt 33)}$$

$$E(\hat{\beta}_0|\mathbf{x}) = E(\bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{x}_2|\mathbf{x})$$

$$E(\hat{\beta}_0|\mathbf{x}) = \bar{y} - \underbrace{E(\hat{\beta}_1|\mathbf{x})}_{=\beta_1} \bar{x}_1 - \underbrace{E(\hat{\beta}_2|\mathbf{x})}_{=\beta_2} \bar{x}_2$$

$$E(\hat{\beta}_0|\mathbf{x}) = \bar{y} - \beta_1 \bar{x}_1 - \beta_2 \bar{x}_2$$

$$E(\hat{\beta}_0|\mathbf{x}) = \beta_0$$

Ek Bilgiler

- $\hat{\beta}_1$'nın beklenen değer formülü
  - $\hat{\beta}_1$'nın formülü (Slayt 36)
  - 2 bağımsız değişkenli ÇDR model denklemi (Slayt 119)
  - Sıfır koşullu ortalama varsayımı, ÇDR.5 (Slayt 15),

kullanılarak gösterilebilir.

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1} y_i}{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1}^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1} (\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + u_i)}{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1}^2}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\beta_0 \overbrace{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1}}^{=0} + \beta_1 \overbrace{\sum_{i=1}^{n} x_{i1} \hat{r}_{i1}}^{\sum \hat{r}_{i1}^2} + \beta_2 \overbrace{\sum_{i=1}^{n} x_{i2} \hat{r}_{i1}}^{=0} + \sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1} u_i}{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1}^2} = \beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1} u_i}{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1}^2}$$

Ek Bilgiler

- Alternatif $\hat{\beta}_1$ formülü:

$$\hat{\beta}_1 = \beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1} u_i}{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1}^2} \qquad (\hat{\beta}_1\text{'nın Alternatif Formülü})$$

- Alternatif $\hat{\beta}_1$ formülünün tüm x'lere ($\mathbf{x}$) göre koşullu beklenen değerini alalım.

$$E(\hat{\beta}_1|\mathbf{x}) = E\left(\beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1} u_i}{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1}^2}\middle|\mathbf{x}\right) = \beta_1 + \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1} \overbrace{E(u_i|\mathbf{x})}^{=0}\right)}{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1}^2} = \beta_1$$

$$E(\hat{\beta}_1|\mathbf{x}) = \beta_1$$

Ek Bilgiler

- $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$'nın beklenen değer formülü tüm x'lere ($\mathbf{x}$) göre koşullu hesaplanmasına rağmen genelde koşulsuz olarak gösterilir:

$$E(\hat{\beta}_0|\mathbf{x}) = \beta_0 \quad \longrightarrow \quad E(\hat{\beta}_0) = \beta_0$$
$$E(\hat{\beta}_1|\mathbf{x}) = \beta_1 \quad \longrightarrow \quad E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$$

- $\hat{\beta}_1$'nın beklenen değer formülü şimdi $\hat{\beta}_j$ için yazılabilir:

$$E(\hat{\beta}_1) = \beta_1 \quad \longrightarrow \quad E(\hat{\beta}_j) = \beta_j, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

Sunuma Geri Dön

Ek Bilgiler

SEKK Parametre Tahmincilerinin Varyansı

$\hat{\beta}_j$'ların varyansı:

$$Var(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma^2}{SST_j(1 - R_j^2)}, \quad SST_j = \sum_{i=1}^{n}(x_{ij} - \bar{x}_j)^2, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

- $\hat{\beta}_j$'ların varyans formülünü çıkartmada işimizi kolaylaştırmak için 2 bağımsız değişkenli ÇDR modelini kullanacağız.

2 Bağımsız Değişkenli ÇDR Modeli

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + u_i \qquad \text{(Model - İndeksli)}$$

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} \qquad \text{(ÖRF - İndeksli)}$$

- 2 bağımsız değişkenli ÇDR modelinde, spesifik olarak $\hat{\beta}_1$'nın varyans formülünü çıkartacağız.
- Daha sonra bulduğumuz bu formülü k bağımsız değişkenli ÇDR modelindeki $\hat{\beta}_j$'ların varyans formülünü çıkartmada kullanacağız.

Ek Bilgiler

2 Bağımsız Değişkenli ÇDR Modeli

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + u_i \qquad \text{(Model - İndeksli)}$$

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} \qquad \text{(ÖRF - İndeksli)}$$

1. Yardımcı Regresyon Tahmini

$$x_{i1} = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 x_{i2} + \hat{r}_{i1} \qquad \text{(İndeksli)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1} = 0 \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^{n} x_{i2}\hat{r}_{i1} = 0 \qquad \text{(Cebirsel Özellikler)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i1}\hat{r}_{i1} = \sum_{i=1}^{n} (\hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 x_{i2} + \hat{r}_{i1})\hat{r}_{i1} = \hat{\alpha}_0 \sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1} + \hat{\alpha}_1 \sum_{i=1}^{n} x_{i2}\hat{r}_{i1} + \sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1}^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i1}\hat{r}_{i1} = \sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1}^2 \qquad \text{(Sonra Kullanılacak)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1}^2 = SSR_1 = SST_1(1 - R_1^2) \qquad \text{(}R^2\text{ Formülünden)}$$

Ek Bilgiler

- $\hat{\beta}_1$'nın varyans formülü
  - $\hat{\beta}_1$'nın Slayt 122'de gösterilen alternatif formülü
  - Otokorelasyon olmaması varsayımı, ÇDR.6 (Slayt 16),
  - Sabit varyans varsayımı, ÇDR.7 (Slayt 17),
  - Varyansın bir özelliği $\longrightarrow Var(\sum a_i u_i) = \sum a_i^2 Var(u_i)$, burada a_i'ler sabit sayılardır ve u_i'ler ikili olarak ilişkisizdir.
  - R^2 formülü

  kullanılarak çıkarılabilir.
- Alternatif $\hat{\beta}_1$ formülünün tüm x'lere ($\mathbf{x}$) göre koşullu varyansını alalım.

$$Var(\hat{\beta}_1|\mathbf{x}) = Var\left(\beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^{n}\hat{r}_{i1}u_i}{\sum_{i=1}^{n}\hat{r}_{i1}^2}\middle|\mathbf{x}\right) = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n}\hat{r}_{i1}^2\right)^2} Var\left(\sum_{i=1}^{n}\hat{r}_{i1}u_i|\mathbf{x}\right)$$

$$= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n}\hat{r}_{i1}^2\right)^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\hat{r}_{i1}^2\underbrace{Var(u_i|\mathbf{x})}_{=\sigma^2\ (\text{ÇDR.7})}\right) = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n}\hat{r}_{i1}^2\right)^2}\sigma^2\sum_{i=1}^{n}\hat{r}_{i1}^2 = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}\hat{r}_{i1}^2}$$

Ek Bilgiler

- $\hat{\beta}_1$'nın varyans formülü

$$Var(\hat{\beta}_1|\mathbf{x}) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1}^2} = \frac{\sigma^2}{SST_1(1-R_1^2)}$$

- $\hat{\beta}_1$'nın varyans formülü tüm x'lere ($\mathbf{x}$) göre koşullu hesaplanmasına rağmen genelde koşulsuz olarak gösterilir:

$$Var(\hat{\beta}_1|\mathbf{x}) = \frac{\sigma^2}{SST_1(1-R_1^2)} \longrightarrow Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{SST_1(1-R_1^2)}$$

- $Var(\hat{\beta}_1)$ formülü şimdi $Var(\hat{\beta}_j)$ için yazılabilir:

$$Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{SST_1(1-R_1^2)} \longrightarrow Var(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma^2}{SST_j(1-R_j^2)}$$

Sunuma Geri Dön

Ek Bilgiler

Teorem: SEKK Parametere Tahmincilerinin Etkinliği

ÇDR.6 - ÇDR.7 varsayımları altında SEKK parametre tahmincileri etkindir.

$$Var(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma^2}{SST_j(1 - R_j^2)}, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

- $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_j$'ların etkinliğini kanıtlamada işimizi kolaylaştırmak için 2 bağımsız değişkenli ÇDR modelini kullanacağız.

2 Bağımsız Değişkenli ÇDR Modeli

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + u_i \qquad \text{(Model - İndeksli)}$$

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} \qquad \text{(ÖRF - İndeksli)}$$

- 2 bağımsız değişkenli ÇDR modelinde, spesifik olarak $\hat{\beta}_1$'nın etkinliğini kanıtlacağız.
- Böylelikle, k bağımsız değişkenli ÇDR modelindeki $\hat{\beta}_j$'ların etkinliğini kanıtlamış olacağız.

Ek Bilgiler

- $\hat{\beta}_1$'nın etkinliğini kanıtlayabilmek için β_1'in herhangi bir doğrusal sapmasız tahmincisi olan $\tilde{\beta}_1$'nın $\hat{\beta}_1$'e göre daha büyük varyanslı olduğunun gösterilmesi gerekir. $\longrightarrow Var(\tilde{\beta}_1) \geq Var(\hat{\beta}_1)$
- Bu nedenle $\hat{\beta}_1$ ve $\tilde{\beta}_1$'nın varyanslarının hesaplanarak karşılaştırılması gereklidir.
- $\hat{\beta}_1$'nın tüm x'lere ($\mathbf{x}$) göre koşullu varyansı (bakınız Slayt 127)

$$Var(\hat{\beta}_1|\mathbf{x}) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1}^2} = \frac{\sigma^2}{SST_1(1 - R_1^2)}$$

- $\tilde{\beta}_1$'nın tüm x'lere ($\mathbf{x}$) göre koşullu varyansı
    - $\hat{\beta}_1$'nın Slayt 122'de gösterilen alternatif formülü önce $\tilde{\beta}_1$ için yazılıp tüm x'lere ($\mathbf{x}$) göre koşullu varyansını alındıktan sonra
    - Varyansın bir özelliği $\longrightarrow Var(\sum a_i u_i) = \sum a_i^2 Var(u_i)$, burada a_i'ler sabit sayılardır ve u_i'ler ikili olarak ilişkisizdir.

kullanılarak hesaplanabilir.

Ek Bilgiler

$$\hat{\beta}_1 = \beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1} u_i}{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1}^2} \quad \longrightarrow \quad \tilde{\beta}_1 = \beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1} u_i}{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1}^2} \quad (\hat{\beta}_1 \text{ ve } \tilde{\beta}_1\text{'nın Alternatif Formülü})$$

$$\tilde{\beta}_1 = \beta_1 + \sum_{i=1}^{n} w_{i1} u_i, \quad \text{burada} \quad w_{i1} = \frac{\hat{r}_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1}^2} \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^{n} w_{i1} \hat{r}_{i1} = 1$$

$$Var(\tilde{\beta}_1 | \mathbf{x}) = Var\left(\beta_1 + \sum_{i=1}^{n} w_{i1} u_i | \mathbf{x}\right) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} w_{i1} u_i | \mathbf{x}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} w_{i1}^2 \underbrace{Var(u_i | \mathbf{x})}_{= \sigma^2 \text{ (ÇDR.7)}}$$

$$Var(\tilde{\beta}_1 | \mathbf{x}) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} w_{i1}^2 \qquad (\tilde{\beta}_1\text{'nın Varyansı})$$

Ek Bilgiler

- Şimdi, ÇDR.1 - ÇDR.7 varsayımları altında $Var(\tilde{\beta}_1|\mathbf{x})$ ve $Var(\hat{\beta}_1|\mathbf{x})$ arasındaki farkı inceleyelim.

$$Var(\tilde{\beta}_1|\mathbf{x}) - Var(\hat{\beta}_1|\mathbf{x}) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} w_{i1}^2 - \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1}^2} = \sigma^2 \left(\sum_{i=1}^{n} w_{i1}^2 - \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1}^2} \right)$$

$$= \sigma^2 \left(\sum_{i=1}^{n} w_{i1}^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} w_{i1}\hat{r}_{i1} \right)^2}{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1}^2} \right) \qquad \left(\sum w_{i1}\hat{r}_{i1} = 1\right)$$

$$= \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} (w_{i1} - \hat{\gamma}_1 \hat{r}_{i1})^2, \quad \text{burada} \quad \hat{\gamma}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_{i1}\hat{r}_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1}^2}$$

Ek Bilgiler

$$Var(\tilde{\beta}_1|\mathbf{x}) - Var(\hat{\beta}_1|\mathbf{x}) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} (w_{i1} - \hat{\gamma}_1 \hat{r}_{i1})^2, \quad \text{burada} \quad \hat{\gamma}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_{i1}\hat{r}_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1}^2}$$

- σ^2 her zaman pozitif olan bir değerdir.
- $\sum_{i=1}^{n} (w_{i1} - \hat{\gamma}_1 \hat{r}_{i1})^2$ değeri, w_{i1}'in $\hat{r}_{i1}$ üzerine uygulanan regresyondan elde edilen kalıntı kareleri toplamıdır ve her zaman pozitif olan bir değerdir.
  - $\hat{\gamma}_1$ ise aynı regresyondan elde edilen eğim parametresi tahmincisidir.
- Bu nedenle $Var(\tilde{\beta}_1) \geq Var(\hat{\beta}_1)$'dır.
- $\hat{\beta}_1$ doğrusal sapmasız tahminciler içinde en küçük varyansa sahiptir, yani etkindir.
- $\hat{\beta}_1$'nın etkinliği şimdi $\hat{\beta}_j$ için yazılabilir:

Teorem: SEKK Parametere Tahmincilerinin Etkinliği

ÇDR.6 - ÇDR.7 varsayımları altında SEKK parametre tahmincileri etkindir.

$$Var(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma^2}{SST_j(1 - R_j^2)}, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

Sunuma Geri Dön