

# Çoklu Doğrusal Regresyon Modeli: Tahmin

## Ekonometri I

Dr. Ömer Kara<sup>1</sup>

<sup>1</sup>İktisat Bölümü  
Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

3 Kasım 2021

# Taslak

- 1 Motivasyon
- 2 Çoklu Doğrusal Regresyon Modeli
  - $k$  Bağımsız Değişkenli ÇDR Modeli
  - Gauss–Markov Varsayımları
  - Anakütle Regresyon Fonksiyonu
- 3 Çoklu Doğrusal Regresyon Modeli Tahmini
  - Örneklem Regresyon Fonksiyonu
  - Tahmin Yöntemleri
  - SEKK Parametre Tahmincileri
  - Yorumlama ve Örnekler
  - Tahmin Edilen Değerler ve Kalıntılar
  - BDR ve ÇDR Tahminlerinin Karşılaştırılması
  - Kareler Toplamları ve Determinasyon Katsayısı
  - SEKK Parametre Tahmincilerinin Varyansı
- 4 SEKK Parametre Tahmincilerinin Özellikleri
  - SEKK Parametre Tahmincilerinin Sapmasızlığı
  - SEKK Parametre Tahmincilerinin Etkinliği
  - Gauss–Markov Teoremi
- 5 Modelleme Sorunları
  - Orijinden Geçen Regresyon
  - Modele Gereksiz Bağımsız Değişken Eklenmesi
  - Gerekli Bağımsız Değişkenin Model Dışında Bırakılması

# Motivasyon

Bu bölümde, sırasıyla aşağıdaki konular incelenecektir.

- Çoklu Doğrusal Regresyon modeli
- Çoklu Doğrusal Regresyon modelinde Gauss–Markov varsayımları
- Çoklu Doğrusal Regresyon modelinin tahminine ait yöntemler
- Sıradan En Küçük Kareler parametre tahmincileri
- Basit Doğrusal Regresyon ve çoklu doğrusal regresyon tahminlerinin karşılaştırılması
- Determinasyon Katsayısı
- Sıradan En Küçük Kareler parametre tahmincilerinin özellikleri
- Çoklu Doğrusal Regresyon modelinde Gauss–Markov teoremi
- Çoklu Doğrusal Regresyonda modelleme sorunları

## Motivasyon - BDR.5

- Basit Doğrusal Regresyon (BDR) analizinde kilit varsayım olan BDR.5 varsayımı çoğu zaman gerçekçi olmayan bir varsayımdır.

### BDR.5: Sıfır Koşullu Ortalama

$$E(u|\mathbf{x}) = E(u) = 0$$

$$\text{Cov}(x, u) = 0, \quad \text{Corr}(x, u) = 0 \quad \text{ve} \quad E(xu) = 0$$

Sonuç:  $u$  ve  $x$  ortalama bağımsızdır. Yani  $u$  ve  $x$  doğrusal olarak ilişkisizdir.

## Motivasyon - BDR.5

- BDR.5 varsayımı ile,  $y$ 'yi etkileyen diğer tüm faktörler (gözlenemeyen hata terimi  $u$ )  $x$  ile ilişkisizdir (ceteris paribus).
- Bu faktörler spesifik (kesin) olarak kontrol edilemez. Sadece, bu faktörlerin ortalama olarak değişmediği varsayılır ( $\Delta u = 0$ ).
- İktisadi değişkenlerin bir çoğu birbiriyle ilişkili olduğundan bağımsız bir değişken  $x$ 'in bağımlı değişken  $y$  üzerindeki yalın etkisini bulmak için bazı faktörlerin spesifik olarak kontrol edilmesi gerekir.
- BDR analizinde spesifik kontrol mümkün olmadığından dolayı ceteris paribus varsayımını uygulamak çok zordur.
- Bu nedenle BDR analizinde çoğu zaman BDR.5 varsayımı ihlal edilir ve parametre tahmincileri ( $\beta_0$  ve  $\beta_1$ ) sapmalı olur.
- Çoklu Doğrusal Regresyon (ÇDR) analizinde ise açıkça diğer birçok faktör spesifik olarak kontrol edildiğinden ceteris paribus varsayımına uygundur.

## Motivasyon - Fonksiyonel Form

- ÇDR analizinde bağımlı değişkeni ( $y$ ) eşanlı olarak etkileyen pek çok etkeni ( $x$ ) kontrol edebiliriz. Kısacası, çok sayıda bağımsız değişkeni ( $x$ ) kullanabiliriz.
- Modele yeni bağımsız değişkenler ekleyerek  $y$ 'deki değişimin daha büyük bir kısmını açıklayabiliriz. Yani,  $y$ 'nin tahmini için daha üstün/iyi modeller geliştirebiliriz.
- ÇDR analizinde regresyonun biçimini, yani fonksiyonel formunu, belirlemede çok daha geniş olanaklara sahip oluruz.
- Kısacası, ÇDR modeli bize daha zengin bir analiz imkanı sunar.

# ÇDR Modeli: Örnek 1

## 2 Bağımsız Değişkenli ÇDR Modeli

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u$$

## Ücret Modeli

$$wage = \beta_0 + \beta_1 educ + \beta_2 exper + u$$

*wage*: saatlik ücret (dolar); *educ*: eğitim düzeyi (yıl); *exper*: tecrübe düzeyi (yıl)

- $\beta_1$ , ücretleri etkileyen diğer tüm faktörler sabit tuttuğumuzda ( $\Delta exper$  ve  $\Delta u = 0$ ), eğitimin ücretler üzerindeki etkisini ölçer.
- $\beta_2$ , ücretleri etkileyen diğer tüm faktörler sabit tuttuğumuzda ( $\Delta educ$  ve  $\Delta u = 0$ ), tecrübenin ücretler üzerindeki etkisini ölçer.
- Yukarıdaki regresyonda tecrübeyi sabit tutarak eğitimin ücretlere etkisini ölçebiliyoruz. Basit Doğrusal Regresyonda bu olanak yoktu. Sadece *educ* ile *u* ilişkisizdir diye varsayıyorduk. Yani sadece  $\Delta u = 0$  diyebiliyorduk.

# ÇDR Modeli: Örnek 2

## Sınav Başarı Modeli

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u$$

$$avgscore = \beta_0 + \beta_1 expend + \beta_2 avginc + u$$

*avgscore*: ortalama sınav sonucu; *expend*: öğrencinin eğitim harcaması; *avginc*: ortalama aile geliri

- Eğer ortalama aile gelirini (*avginc*) modele doğrudan sokmazsak (yanlış modeli kullanırsak), onu yanlış modeldeki hata teriminin ( $v$ ) içine almış oluruz.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \quad (\text{Doğru Model})$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + v \quad (\text{Yanlış Model})$$

$$v = \beta_2 x_2 + u \quad (\text{Yanlış Model Hata Terimi})$$



## ÇDR Modeli: Örnek 2

- Doğru ve yanlış modelden elde edeceğimiz tahminler farklı olacağından, modeller ve onların Örneklem Regresyon Fonksiyonları (ÖRF) aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \longrightarrow \hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 \quad (\text{Doğru Model ve ÖRF})$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + v \longrightarrow \tilde{y} = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x_1 \quad (\text{Yanlış Model ve ÖRF})$$

$$v = \beta_2 x_2 + u \quad (\text{Yanlış Model Hata Terimi})$$

- Ortalama aile geliri (*avginc*), öğrencinin harcaması (*expend*) ile yakından ilişkili olduğundan yanlış model kullanıldığında:
  - $x_1$  ile  $v$  ilişkili olacaktır.  $\longrightarrow \text{Corr}(x_1, v) \neq 0$
  - BDR.5 varsayımı ihlal edilecektir.  $\longrightarrow E(v|\mathbf{x}) \neq 0$
  - Sonuç olarak  $\tilde{\beta}_1$  sapmalı tahmin edilecektir.  $\longrightarrow E(\tilde{\beta}_1) \neq \beta_1$
- Eğer doğru modeli (*avginc* değişkenini modele ekleyerek) kullanırsak hem *avginc*'i doğrudan kontrol etme olanağına kavuşmuş olacağız hem de sapmasız parametre tahmincileri elde edeceğiz.

## ÇDR Modeli: Örnek 3

### Tüketim Modeli: Karesel Fonksiyon

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \longrightarrow y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_1^2 + u$$

$$cons = \beta_0 + \beta_1 inc + \beta_2 inc^2 + u$$

*cons*: tüketim; *inc*: gelir;  $x_1 = inc$ ;  $x_2 = inc^2$ ;  $x_2 = x_1^2$

- Bu modelde  $\beta_1$ 'in yorumu farklı olacaktır. Geliri (*inc*) değiştirirken, gelirin karesini ( $inc^2$ ) sabit ( $\Delta inc^2 = 0$ ) tutamayız. Çünkü, gelir değişirse karesi de değişir.
- Burada, gelirdeki bir birim değişimin tüketim üzerindeki etkisi, yani marjinal tüketim eğilimi (marginal propensity to consume) şu şekilde hesaplanabilir:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x_1} \cong \beta_1 + 2\beta_2 x_1 \longrightarrow \frac{\Delta cons}{\Delta inc} \cong \beta_1 + 2\beta_2 inc$$

# $k$ Bağımsız Değişkenli ÇDR Modeli

## Model

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + u \quad (\text{İndekssiz})$$

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_k x_{ik} + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{İndeksli})$$

- $k$ : bağımsız değişken sayısı  $\longrightarrow j = 1, 2, \dots, k$
- $k + 1$ : bilinmeyen sabit  $\beta$  parametre sayısı  $\longrightarrow \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$
- $n$ : gözlem (veri) sayısı  $\longrightarrow i = 1, 2, \dots, n$  ve  $s = 1, 2, \dots, n, i \neq s$
- $y$ : bağımlı değişken
- $x_j$ :  $j$ 'inci bağımsız değişken  $\longrightarrow x_1, x_2, \dots, x_k$
- $u$ : Hata terimi,  $x$ 'ler dışında modele dahil edilmemiş tüm faktörlerin ortak etkisi
- $\beta_0$ : Kesim parametresi (1 tane var), sabit terim olarak da adlandırılır
- $\beta_j$ :  $x_j$  bağımsız değişkeni için eğim parametresi ( $k$  tane var)
- $\mathbf{x}$ : Tüm bağımsız değişkenlerin temsili  $\longrightarrow \mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$
- Yukarıdaki model bazen **anakütle modeli** olarak da bilinir.

# $k$ Bağımsız Değişkenli ÇDR Modeli

## Model

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + u \quad (\text{İndekssiz})$$

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_k x_{ik} + u_i \quad (\text{İndeksli})$$

- $u$ : Bağımlı değişken  $y$  üzerinde etkili olan bağımsız değişken  $x$ 'ler dışındaki diğer gözlenemeyen faktörleri temsil eder.
- $\beta_0$ :  $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_k = 0$  iken  $y$ 'nin alacağı değeri gösterir.
- $\beta_j$ :  $y$ 'yi etkileyen diğer tüm faktörler sabit tutulduğunda  $x_j$ 'deki değişimin  $y$ 'de yaratacağı yalın etkiyi/değişmeyi gösterir.
- $\beta_1$ :  $y$ 'yi etkileyen diğer tüm faktörler, yani diğer  $x$ 'ler ve  $u$ 'da içerilen faktörler, sabitken ( $\Delta x_2 = \Delta x_3 = \cdots = \Delta x_k = \Delta u = 0$ ),  $x_1$ 'deki değişimin  $y$ 'de yaratacağı yalın etkiyi/değişmeyi gösterir.
  - Parametreleri yorumlarken fonksiyonel forma dikkat edilmelidir.
  - Düzey-Düzey, Log-Log, Log-Düzey ve Düzey-Log fonksiyonel formlarındaki yorumlama farklarını hatırlayın!
- Modele ne kadar çok farklı  $x$  bağımsız değişkeni eklenirse eklensin dışarıda bırakılmış ya da gözlenemeyen faktörler her zaman olacaktır.

# Gauss–Markov Varsayımları

## ÇDR.1: Gözlem Sayısı

Gözlem sayısı  $n$  tahmin edilecek anakütle parametre sayısından büyük ya da en azından eşit olmalıdır.

$$n \geq k + 1$$

## ÇDR.2: Parametrelerde Doğrusallık

Model parametrelerde doğrusaldır.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + u \quad \checkmark$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \quad \checkmark$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_1^2 + u \quad \checkmark$$

$$y = \beta_0 + \beta_1^2 x_1 + \beta_2 x_2 + u \quad \times$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \sqrt{\beta_2} x_2 + u \quad \times$$

[► Detay](#)

# Gauss–Markov Varsayımları

## ÇDR.3: Rassallık

Tahminde kullanılan  $n$  tane gözlem ilgili anakütleden rassal örnekleme yoluyla seçilmiştir. Yani gözlemler stokastiktir (rassal), yani deterministik (kesin) değildir.

$$\{(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}, y_i) : i = 1, 2, \dots, n\}$$

## ÇDR.4: Tam Çoklu Doğrusal Bağıntının Olmaması

Örnekleme (ve bu nedenle anakütlerde) bağımsız değişken  $x$ 'lerin hiçbiri kendi içinde sabit değildir (yeterli değişkenlik vardır) ve bağımsız değişkenler arasında tam çoklu doğrusal bağıntı (TÇDB) yoktur.

$$\sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)^2 > 0, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \quad \longrightarrow \quad x_2 = 2x_1 \quad \text{TÇDB VAR ✗}$$

$$\longrightarrow \quad x_2 = x_1^2 \quad \text{TÇDB YOK ✓}$$

► Detay

# Gauss–Markov Varsayımları

## ÇDR.5: Sıfır Koşullu Ortalama

Bağımsız değişkenlerin herhangi bir değeri verildiğinde,  $u$  hata teriminin beklenen değeri sıfıra eşittir.

$$E(u|x_1, x_2, \dots, x_k) = E(u|\mathbf{x}) = 0$$

[► Detay](#)

- BDR’de yaptığımız gibi Yinelenen Beklentiler Kanunu ve koşullu beklenen değerin 5. özelliği kullanılarak ÇDR için Sıfır Koşullu Ortalama varsayımı yeniden tanımlanabilir.

## ÇDR.5: Sıfır Koşullu Ortalama

$$E(u|\mathbf{x}) = E(u) = 0$$

$$\text{Cov}(x_j, u) = 0, \quad \text{Corr}(x_j, u) = 0 \quad \text{ve} \quad E(x_j u) = 0, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$$

Sonuç:  $u$  ve  $x_j$  ortalama bağımsızdır. Yani  $u$  ve  $x_j$  doğrusal olarak ilişkisizdir.

[► Ek Bilgi](#)

# Gauss–Markov Varsayımları

## ÇDR.6: Otokorelasyon Olmaması

Hata terimleri arasında otokorelasyon yoktur.

$$\text{Corr}(u_i, u_s | x_1, x_2, \dots, x_k) = 0, \quad i \neq s$$

$$\text{Corr}(u_i, u_s | \mathbf{x}) = 0, \quad i \neq s$$

$$\text{Corr}(u_i, u_s) = 0, \quad i \neq s$$

- ÇDR.6 varsayımı, yatay-kesit verilerindeki rassallık varsayımı (ÇDR.3) nedeniyle aslında otomatik olarak sağlanır. Fakat çok ekstrem durumlarda gereklidir ve bu nedenle diğer birçok kaynaktan farklı olarak eklenmiştir.
- ÇDR.6 varsayımı aşağıdaki eşitlikleri de sağlar.

## ÇDR.6: Otokorelasyon Olmaması

$$\text{Cov}(u_i, u_s | \mathbf{x}) = 0 \quad \text{ve} \quad \text{Cov}(u_i, u_s) = 0, \quad i \neq s$$

$$E(u_i u_s | \mathbf{x}) = 0 \quad \text{ve} \quad E(u_i u_s) = 0, \quad i \neq s$$

► Ek Bilgi



# Gauss–Markov Varsayımları

## ÇDR.7: Sabit Varyans (Homoscedasticity)

$u$  hata teriminin bağımsız değişken  $x$ 'lere göre koşullu varyansı sabittir.

$$\text{Var}(u|x_1, x_2, \dots, x_k) = \sigma^2$$

$$\text{Var}(u|\mathbf{x}) = \sigma^2$$

$$\text{Var}(u) = \sigma^2$$

[► Detay](#)

- ÇDR.7 varsayımı aşağıdaki eşitlikleri de sağlar.

## ÇDR.7: Sabit Varyans (Homoscedasticity)

$$E(u^2|\mathbf{x}) = \sigma^2 \quad \text{ve} \quad E(u^2) = \sigma^2$$

[► Ek Bilgi](#)

- $\sigma$  **regresyonun standart sapması**dır (bilinmiyor, bu nedenle tahmin edilecek).

# Gauss–Markov Varsayımları

- Yukarıda verilen **Gauss–Markov Varsayımları** yatay-kesit verisi ile yapılan regresyon için geçerli varsayımlardır.
- Zaman serileri ile yapılan regresyonlarda bu varsayımların değiştirilmesi gerekir.
- Gauss–Markov Varsayımları, **ÇDR Varsayımları** olarak da anılır.
- Bazı ÇDR Varsayımlarının detayı ilerleyen slaytlarda konu akışı içinde verilmiştir.
- Gauss–Markov Varsayımları daha sonra **Gauss–Markov Teoremi**'ni oluşturmada kullanılacaktır.
- Gauss–Markov Teoremi ise ÇDR modelinin **Sıradan En Küçük Kareler Yöntemi** ya da **Momentler Yöntemi** ile tahmini için teorik dayanak sağlamada kullanılacaktır. Bakınız Slayt 84.

# Anakütle Regresyon Fonksiyonu

- **Anakütle Regresyon Fonksiyonu (ARF)**, ÇDR.5 varsayımı altında, bağımlı değişken  $y$ 'nin bağımsız değişken  $\mathbf{x}$ 'lere göre koşullu ortalamasıdır.
- ARF tektir ve bilinmez.

## Anakütle Regresyon Fonksiyonu (ARF)

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + u \quad (\text{Model})$$

$$E(y|\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k \quad (\text{ARF - İndekssiz})$$

$$E(y_i|\mathbf{x}_i) = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_k x_{ik} \quad (\text{ARF - İndeksli})$$

# Anakütle Regresyon Fonksiyonu

- ÇDR.5 ve ÇDR.7 varsayımları altında bağımlı değişken  $y$ 'nin bağımsız değişken  $\mathbf{x}$ 'lere göre koşullu dağılımı aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

## $y$ 'nin $\mathbf{x}$ 'e Göre Koşullu Dağılımı

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + u \quad (\text{Model})$$

$$E(y|\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k \quad (\text{ARF})$$

$$\text{Var}(y|\mathbf{x}) = \sigma^2$$

$$y|\mathbf{x} \sim \underbrace{(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k)}_{\text{Ortalama}}, \underbrace{\sigma^2}_{\text{Varyans}} \quad (y|\mathbf{x}'\text{in dağılımı})$$

[► Ek Bilgi](#)

# Örneklem Regresyon Fonksiyonu: Amaç

- ÇDR tahminindeki asıl amacımız:
  - Öncelikle, iktisat teorisine göre model oluşturmak.
  - Sonra, Gauss–Markov varsayımları kullanarak ARF’yi oluşturmak.
  - Son olarak, ARF’yi rassal örnekleme yoluyla seçtiğimiz belli sayıdaki veriyi kullanarak tahmin etmektir.
- ARF’nin tahmini ise **Örneklem Regresyon Fonksiyonu**’dur ve bu tahmin örneklemden örnekleme değişir.

## Model

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + u$$

## Anakütle Regresyon Fonksiyonu (ARF)

$$E(y|\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k$$

## Örneklem Regresyon Fonksiyonu (ÖRF)

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \cdots + \hat{\beta}_k x_k$$

# Örneklem Regresyon Fonksiyonu: Amaç

## Model

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + u \quad (\text{İndekssiz})$$

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_k x_{ik} + u_i \quad (\text{İndeksli})$$

## Anakütle Regresyon Fonksiyonu (ARF)

$$E(y|\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k \quad (\text{İndekssiz})$$

$$E(y_i|\mathbf{x}_i) = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_k x_{ik} \quad (\text{İndeksli})$$

## Örneklem Regresyon Fonksiyonu (ÖRF)

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \cdots + \hat{\beta}_k x_k \quad (\text{İndekssiz})$$

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} + \cdots + \hat{\beta}_k x_{ik} \quad (\text{İndeksli})$$

# Örneklem Regresyon Fonksiyonu

## Örneklem Regresyon Fonksiyonu (ÖRF)

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \cdots + \hat{\beta}_k x_k \quad (\text{İndekssiz})$$

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} + \cdots + \hat{\beta}_k x_{ik} \quad (\text{İndeksli})$$

$$\underbrace{y_i}_{\text{Gözlenen Değer}} = \underbrace{\hat{y}_i}_{\text{Tahmin Edilen Değer}} + \underbrace{\hat{u}_i}_{\substack{\text{Kalıntı (Artık)} \\ \text{Rassal Değer (Deterministik)}}}$$

- $\hat{y}_i$ :  $y_i$  bağımlı değişkeninin tahmini
- Parametre tahmincileri/tahmin edicileri örneklemden örnekleme değişir, yani rassaldır.
  - $\hat{\beta}_0$ :  $\beta_0$  kesim parametresinin tahmini (1 tane var)
  - $\hat{\beta}_j$ :  $\beta_j$  eğim parametresinin tahmini ( $k$  tane var)
- $\hat{u}_i$ : Kalıntı (artık) olarak adlandırılır. Gözlenen değer  $y_i$  ile tahmin edilen değer  $\hat{y}_i$  arasındaki farkı belirtir. Rassal değildir, tahmin sırasında hesaplanır. Hata terimi  $u_i$ 'nin örneklem analoğu olarak yorumlanabilir fakat kesinlikle aynı şeyler değildir.

# Örneklem Regresyon Fonksiyonu

- Model, ARF ve ÖRF denklemleri arasında dikkat edilmesi gereken farklar vardır.

## Model, ARF ve ÖRF

$$\underbrace{y_i}_{\text{Gözlenen Değer}} = \underbrace{\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_k x_{ik}}_{E(y_i | \mathbf{x}_i) \text{ (Sistematik Kısım)}} + \underbrace{u_i}_{\text{Rassal Hata Terimi (Sistematik Olmayan Kısım)}} \quad (\text{Model})$$

$$E(y_i | \mathbf{x}_i) = \underbrace{\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_k x_{ik}}_{\text{Sistematik Kısım}} \quad (\text{ARF})$$

$$\underbrace{\hat{y}_i}_{\text{Tahmin Edilen Değer}} = \underbrace{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} + \cdots + \hat{\beta}_k x_{ik}}_{\text{Sistematik Kısımın Tahmini}} \quad (\text{ÖRF})$$

$$\underbrace{y_i}_{\text{Gözlenen Değer}} = \underbrace{\hat{y}_i}_{\text{Tahmin Edilen Değer}} + \underbrace{\hat{u}_i}_{\text{Kalıntı (Artık) Rassal Değil (Deterministik)}}$$



# Örneklem Regresyon Fonksiyonu: Tahmin Yöntemleri

## Model, ARF ve ÖRF

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + u \quad (\text{Model})$$

$$E(y|\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k \quad (\text{ARF})$$

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \cdots + \hat{\beta}_k x_k \quad (\text{ÖRF})$$

- Örneklem Regresyon Fonksiyonu (ÖRF), iki yöntemle tahmin edilebilir.
  - Sıradan En Küçük Kareler (SEKK) Yöntemi
  - Momentler Yöntemi
- İki yöntem de aynı tahmin sonuçlarını verir.

# Sıradan En Küçük Kareler Yöntemi

- **Sıradan En Küçük Kareler Yöntemi**, kalıntı kareleri toplamını (SSR) en küçük yapan parametre tahmincilerini hesaplamaya çalışır.

## Örneklem Regresyon Fonksiyonu (ÖRF)

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \cdots + \hat{\beta}_k x_k$$

## Gözlenen Değer, Tahmin Edilen Değer ve Kalıntı

$$y_i = \hat{y}_i + \hat{u}_i \quad \longrightarrow \quad \hat{u}_i = y_i - \hat{y}_i$$

## SEKK Amaç Fonksiyonu

$$\min_{\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_j} SSR = \min_{\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_j} \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2 = \min_{\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_j} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2} - \cdots - \hat{\beta}_k x_{ik})^2$$

# Sıradan En Küçük Kareler Yöntemi

## SEKK Birinci Sıra Koşulları

$$\frac{\partial SSR}{\partial \hat{\beta}_0} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2} - \cdots - \hat{\beta}_k x_{ik}) = 0$$

$$\frac{\partial SSR}{\partial \hat{\beta}_1} = -2 \sum_{i=1}^n x_{i1} (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2} - \cdots - \hat{\beta}_k x_{ik}) = 0$$

$$\frac{\partial SSR}{\partial \hat{\beta}_2} = -2 \sum_{i=1}^n x_{i2} (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2} - \cdots - \hat{\beta}_k x_{ik}) = 0$$

$$\vdots = \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots = 0$$

$$\frac{\partial SSR}{\partial \hat{\beta}_k} = -2 \sum_{i=1}^n x_{ik} (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2} - \cdots - \hat{\beta}_k x_{ik}) = 0$$

# Sıradan En Küçük Kareler Yöntemi

## SEKK Birinci Sıra Koşulları

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2} - \cdots - \hat{\beta}_k x_{ik}) = 0 \longrightarrow \sum_{i=1}^n \hat{u}_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n x_{i1} (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2} - \cdots - \hat{\beta}_k x_{ik}) = 0 \longrightarrow \sum_{i=1}^n x_{i1} \hat{u}_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n x_{i2} (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2} - \cdots - \hat{\beta}_k x_{ik}) = 0 \longrightarrow \sum_{i=1}^n x_{i2} \hat{u}_i = 0$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots = 0 \longrightarrow \vdots = 0$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ik} (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2} - \cdots - \hat{\beta}_k x_{ik}) = 0 \longrightarrow \sum_{i=1}^n x_{ik} \hat{u}_i = 0$$

- Birinci sıra koşullarından elde edilen  $k + 1$  tane denklemin çözümünden parametre tahmincileri  $\hat{\beta}_0$  ve  $\hat{\beta}_j$ 'lar (toplamda  $k + 1$  tane) bulunur.

# Momentler Yöntemi

- Anakütle moment koşulları ÇDR.5 varsayımı kullanılarak yazılabilir.
- Daha sonra anakütle moment koşullarını kullanarak örneklem moment koşulları elde edilebilir.

## ÇDR.5: Sıfır Koşullu Ortalama

$$E(u|\mathbf{x}) = E(u) = 0$$

$$\text{Cov}(x_j, u) = 0, \quad \text{Corr}(x_j, u) = 0 \quad \text{ve} \quad E(x_j u) = 0, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$$

Sonuç:  $u$  ve  $x_j$  ortalama bağımsızdır. Yani  $u$  ve  $x_j$  doğrusal olarak ilişkisizdir.

# Momentler Yöntemi

## Anakütle Moment Koşulları ve Örneklem Moment Koşulları

Anakütle		Örneklem
$E(u) = 0$	$\longrightarrow$	$\sum_{i=1}^n \hat{u}_i = 0$
$E(x_1 u) = 0$	$\longrightarrow$	$\sum_{i=1}^n x_{i1} \hat{u}_i = 0$
$E(x_2 u) = 0$	$\longrightarrow$	$\sum_{i=1}^n x_{i2} \hat{u}_i = 0$
$\vdots = 0$	$\longrightarrow$	$\vdots = 0$
$E(x_k u) = 0$	$\longrightarrow$	$\sum_{i=1}^n x_{ik} \hat{u}_i = 0$

# Momentler Yöntemi

- Örneklem moment koşullarından elde edilen  $k + 1$  tane denklemin çözümünden parametre tahmincileri  $\hat{\beta}_0$  ve  $\hat{\beta}_j$ 'lar (toplamda  $k + 1$  tane) bulunur.
- SEKK birinci sıra koşulları ve örneklem moment koşulları aslında aynı denklemler kümesini verir.
- Bu nedenle, SEKK Yöntemi ve **Momentler Yöntemi** ile ÇDR modeli tahmin edildiğinde aynı sonuçlara ulaşılır.
- Genellikle kullanılan yöntem SEKK'dır. Bu nedenle parametre tahmincileri  $\hat{\beta}_0$  ve  $\hat{\beta}_j$ 'lar genellikle **SEKK parametre tahmincileri** ya da **SEKK tahmincileri** olarak adlandırılır.
- Bu yöntemlerin tek çözüm vermesi için ÇDR.4 (Tam Çoklu Doğrusal Bağıntının Olmaması) varsayımının sağlanması gereklidir. Bakınız Slayt 14.

# SEKK Parametre Tahmincileri: 2 Bağımsız Değişken

## Ana Model

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + u_i \quad (\text{Model - İndeksli})$$

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} \quad (\text{ÖRF - İndeksli})$$

- $\beta_0$  kesim parametresinin tahmini  $\hat{\beta}_0$ :

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{x}_2$$

[► Ek Bilgi](#)

- $\beta_1$  eğim parametresinin tahmini, ya da  $x_1$ 'in eğim parametresinin tahmincisi,  $\hat{\beta}_1$ :

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} y_i}{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2}$$



## SEKK Parametre Tahmincileri: 2 Bağımsız Değişken

- $\beta_1$  eğim parametresinin tahmini, ya da  $x_1$ 'in eğim parametresinin tahmincisi,  $\hat{\beta}_1$ :

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} y_i}{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2}$$

burada  $\hat{r}_{i1}$ ,  $x_1$ 'in  $x_2$  üzerine uygulanan regresyondan (1. yardımcı regresyon) elde edilen kalıntılardır.

### 1. Yardımcı Regresyon Tahmini

$$x_{i1} = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 x_{i2} + \hat{r}_{i1} \quad (\text{İndeksli})$$

- 1. yardımcı regresyondan elde edilen kalıntı  $\hat{r}_1$ ,  $x_1$  içindeki  $x_2$ 'nin etkisi çıkarıldıktan sonraki  $x_1$ 'i ifade eder.
- Bu işlemdeki amaç, bağımsız değişkenler  $x_1$  ve  $x_2$  arasındaki doğrusal bağıntı nedeniyle bağımlı değişken  $y$  üzerinde oluşabilecek dolaylı etkiyi kaldırmaktır.

## SEKK Parametre Tahmincileri: 2 Bağımsız Değişken

- Amacımız  $x_1$ 'in  $y$ 'yi yalın/kısmi olarak ne kadar etkilediğini yani  $\hat{\beta}_1$ 'yi bulmaktır.
- Öyleyse  $\hat{\beta}_1$ ,  $y$ 'nin  $\hat{r}_1$  üzerine uygulanan regresyondan (2. yardımcı regresyon) elde edilen eğim parametresinin tahminidir.

### 2. Yardımcı Regresyon Tahmini

$$y_i = \hat{\delta}_0 + \hat{\beta}_1 \hat{r}_{i1} + \hat{\epsilon}_i \quad (\text{İndeksli})$$

- $\hat{\epsilon}_i$  ve  $\hat{\delta}_0$ , sırasıyla 2. yardımcı regresyondaki kalıntıları ve kesim parametresi tahminini ifade eder. Bu değerler bizim ilgi alanımızda değildir.
- 2. yardımcı regresyon basit doğrusal regresyon olduğundan, daha önceden bildiğimiz eğim parametresi tahmincisinin formülünü kullanabiliriz.

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})y_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

## SEKK Parametre Tahmincileri: 2 Bağımsız Değişken

- $\hat{r}_j$ , 2. yardımcı regresyonda bağımsız değişken olarak görev yaptığı için formüldeki  $x$ 'ler yerine konulabilir.

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})y_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \longrightarrow \hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{r}_{i1} - \bar{\hat{r}}_1)y_i}{\sum_{i=1}^n (\hat{r}_{i1} - \bar{\hat{r}}_1)^2}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{r}_{i1} - \overbrace{\bar{\hat{r}}_1}^{=0})y_i}{\sum_{i=1}^n (\hat{r}_{i1} - \underbrace{\bar{\hat{r}}_1}_{=0})^2} \longrightarrow \hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}y_i}{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2} \quad (1. \text{ Yardımcı Regresyondan})$$

- Kısacası  $\hat{\beta}_1$ ,  $x_1$  içindeki  $x_2$ 'nin etkisi çıkarıldıktan sonraki  $x_1$ 'nin bağımlı değişken  $y$ 'yi etkileyen yalın/kısmi yani ceteris paribus etkisini ifade eder.

# SEKK Parametre Tahmincileri: $k$ Bağımsız Değişken

## Ana Model

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_k x_{ik} + u_i \quad (\text{Model - İndeksli})$$

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} + \cdots + \hat{\beta}_k x_{ik} \quad (\text{ÖRF - İndeksli})$$

- $\beta_0$  kesim parametresinin tahmini  $\hat{\beta}_0$  (1 tane var):

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{x}_2 - \cdots - \hat{\beta}_k \bar{x}_k$$

► Ek Bilgi

- $\beta_j$  eğim parametresinin tahmini, ya da  $x_j$ 'nin eğim parametresinin tahmincisi,  $\hat{\beta}_j$  ( $k$  tane var):

$$\hat{\beta}_j = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{ij} y_i}{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{ij}^2}, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$$

# SEKK Parametre Tahmincileri: $k$ Bağımsız Değişken

- $x_j$ 'nin eğim parametresinin tahmincisi  $\hat{\beta}_j$  ( $k$  tane var):

$$\hat{\beta}_j = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{ij} y_i}{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{ij}^2}, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$$

burada  $\hat{r}_{ij}$ ,  $x_j$ 'nin diğer tüm  $x$ 'ler ( $x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_k$ ) üzerine uygulanan regresyondan (1. yardımcı regresyon) elde edilen kalıntılardır.

## 1. Yardımcı Regresyon Tahmini

$$x_{ij} = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 x_{i1} + \hat{\alpha}_2 x_{i2} + \dots + \hat{\alpha}_{j-1} x_{i,j-1} + \hat{\alpha}_{j+1} x_{i,j+1} + \dots + \hat{\alpha}_k x_{ik} + \hat{r}_{ij} \quad (\text{İndeksli})$$

- 1. yardımcı regresyondan elde edilen kalıntı  $\hat{r}_{ij}$ ,  $x_j$  içindeki diğer tüm  $x$ 'lerin ( $x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_k$ ) etkisi çıkarıldıktan sonraki  $x_j$ 'yi ifade eder.
- Bu işlemdeki amaç, bağımsız değişken  $x$ 'ler arasındaki çoklu doğrusal bağıntı nedeniyle bağımlı değişken  $y$  üzerinde oluşabilecek dolaylı etkiyi kaldırmaktır.

# SEKK Parametre Tahmincileri: $k$ Bağımsız Değişken

- Amacımız  $x_j$ 'nin  $y$ 'yi yalın/kısmi olarak ne kadar etkilediğini yani  $\hat{\beta}_j$ 'yi bulmaktır.
- Öyleyse  $\hat{\beta}_j$ ,  $y$ 'nin  $\hat{r}_j$  üzerine uygulanan regresyondan (2. yardımcı regresyon) elde edilen eğim parametresinin tahminidir.

## 2. Yardımcı Regresyon Tahmini

$$y_i = \hat{\delta}_0 + \hat{\beta}_j \hat{r}_{ij} + \hat{\epsilon}_i \quad (\text{İndeksli})$$

- $\hat{\epsilon}_i$  ve  $\hat{\delta}_0$ , sırasıyla 2. yardımcı regresyondaki kalıntıları ve kesim parametresi tahminini ifade eder. Bu değerler bizim ilgi alanımızda değildir.
- 2. yardımcı regresyon basit doğrusal regresyon olduğundan, daha önceden bildiğimiz eğim parametresi tahmircisi  $\hat{\beta}_1$ 'in alternatif formülünü kullanabiliriz.

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})y_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

# SEKK Parametre Tahmincileri: $k$ Bağımsız Değişken

- $\hat{r}_j$ , 2. yardımcı regresyonda bağımsız değişken olarak görev yaptığı için formüldeki  $x$ 'ler yerine konulabilir.

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})y_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \longrightarrow \hat{\beta}_j = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{r}_{ij} - \bar{\hat{r}}_j)y_i}{\sum_{i=1}^n (\hat{r}_{ij} - \bar{\hat{r}}_j)^2}$$

$$\hat{\beta}_j = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{r}_{ij} - \overbrace{\bar{\hat{r}}_j}^{=0})y_i}{\sum_{i=1}^n (\underbrace{\hat{r}_{ij} - \bar{\hat{r}}_j}_{=0})^2} \longrightarrow \hat{\beta}_j = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{ij}y_i}{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{ij}^2} \quad (1. \text{ Yardımcı Regresyondan})$$

- Kısacası  $\hat{\beta}_j, x_j$  içindeki diğer tüm  $x$ 'lerin  $(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_k)$  etkisi çıkarıldıktan sonraki  $x_j$ 'nin bağımlı değişken  $y$ 'yi etkileyen yalın/kısmi yani ceteris paribus etkisini ifade eder.

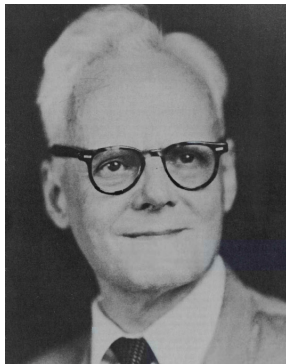
## SEKK Parametre Tahmincileri: Frisch–Waugh Teoremi

- Önceki slaytlarda 2 bağımsız ve  $k$  bağımsız değişkenli ÇDR modellerinde  $\hat{\beta}_j$ 'yi, yani  $x_j$ 'nin bağımlı değişken  $y$ 'yi etkileyen yalın/kısmi etkisini, hesaplamak için kullandığımız prosedür ekonometride **Frisch–Waugh Teoremi** olarak anılır.



Ragnar Frisch (1895–1973)

Kaynak: Wikipedia



Frederick V. Waugh (1898–1974)

Kaynak: AgEcon



# Sıfır Koşullu Ortalama Varsayımı (ÇDR.5) Yorumu

## 2 Bağımsız Değişkenli Model

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u$$

- 2 bağımsız değişkenli modelde,  $u$ 'nun  $x$ 'lerle ilişkisiz olması varsayımını, yani ÇDR.5, şu şekilde formüle edebiliriz.

$$E(u|x_1, x_2) = E(u|\mathbf{x}) = 0$$

- Yani  $x_1$  ve  $x_2$ 'nin anakütledeki tüm kombinasyonları için  $u$ 'nun beklenen değeri sıfırdır.
- Örneğin, ücret modelinde (Slayt 7) ÇDR.5 varsayımını aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$wage = \beta_0 + \beta_1 educ + \beta_2 exper + u \quad (\text{Model})$$

$$E(u|educ, exper) = 0 \quad (\text{ÇDR.5})$$

- Bu ücretleri etkileyen diğer faktörlerin ( $u$ ) ortalama olarak  $educ$  ve  $exper$  ile ilişkisiz olduğu anlamına gelir.
- Örneğin, doğuştan gelen yetenek (ability)  $u$ 'nun bir parçası ise, ortalama yetenek düzeyi, eğitim ve tecrübenin tüm kombinasyonlarında aynıdır (sabittir).

## Sıfır Koşullu Ortalama Varsayımı (ÇDR.5) Yorumu

- Sınav başarı modelinde (Slayt 8), ÇDR.5 varsayımı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$avgscore = \beta_0 + \beta_1 expend + \beta_2 avginc + u \quad (\text{Model})$$

$$E(u|expend, avginc) = 0 \quad (\text{ÇDR.5})$$

- Yani, ortalama sınav sonucunu etkileyen diğer faktörler (okula ya da öğrenciye özgü vs.), ortalama olarak, *expend* ve *avginc* değişkenleriyle ilişkisizdir.
- Tüketim modelinde (Slayt 10), ÇDR.5 varsayımı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$cons = \beta_0 + \beta_1 inc + \beta_2 inc^2 + u \quad (\text{Model})$$

$$E(u|inc, inc^2) = E(u|inc) = 0 \quad (\text{ÇDR.5})$$

- Burada *inc* biliniyorken, *inc*<sup>2</sup> otomatik olarak bilineceğinden ayrıca koşullu beklenti içinde yazmaya gerek yoktur.

# Regresyonun Yorumu: 2 Bağımsız Değişken

## Model ve ÖRF

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \quad (\text{Model})$$

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 \quad (\text{ÖRF})$$

$$\Delta \hat{y} = \hat{\beta}_1 \Delta x_1 + \hat{\beta}_2 \Delta x_2 \quad (\text{Değişim Cinsinden})$$

- Eğim parametresi tahmincisi  $\hat{\beta}_1$ , bağımsız değişken  $x_1$ 'in  $y$  üzerindeki yalın/kısmi yani ceteris paribus etkisini verir.
- $\hat{\beta}_1$ 'nin yorumu:  $x_2$  sabitken, yani  $\Delta x_2 = 0$  iken

$$\Delta \hat{y} = \hat{\beta}_1 \Delta x_1$$

- $x_2$  sabitken,  $x_1$ 'de meydana gelen 1 birimlik değişimin  $y$ 'de meydana getireceği ortalama değişim  $\hat{\beta}_1$  kadardır.
  - Parametreleri yorumlarken fonksiyonel forma dikkat edilmelidir.
- Benzer şekilde  $\hat{\beta}_2$ 'nin yorumu:  $x_1$  sabitken, yani  $\Delta x_1 = 0$  iken

$$\Delta \hat{y} = \hat{\beta}_2 \Delta x_2$$

# Regresyonun Yorumu: $k$ Bağımsız Değişken

## Model ve ÖRF

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + u \quad (\text{Model})$$

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \cdots + \hat{\beta}_k x_k \quad (\text{ÖRF})$$

$$\Delta \hat{y} = \hat{\beta}_1 \Delta x_1 + \hat{\beta}_2 \Delta x_2 + \cdots + \hat{\beta}_k \Delta x_k \quad (\text{Değişim Cinsinden})$$

- Eğim paramtresi tahmincisi  $\hat{\beta}_j$ , bağımsız değişken  $x_j$ 'nin  $y$  üzerindeki yalın/kısmi yani ceteris paribus etkisini verir.
- $\hat{\beta}_j$ 'nin yorumu: diğer tüm bağımsız değişkenler  $(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_k)$  sabitken, yani  $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \cdots = \Delta x_{j-1} = \Delta x_{j+1} = \cdots = \Delta x_k = 0$  iken

$$\Delta \hat{y} = \hat{\beta}_j \Delta x_j$$

- Diğer tüm bağımsız değişkenler  $(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_k)$  sabitken,  $x_j$ 'de meydana gelen 1 birimlik değişimin  $y$ 'de meydana getireceği ortalama değişim  $\hat{\beta}_j$  kadardır.
  - Parametreleri yorumlarken fonksiyonel forma dikkat edilmelidir.

# Örnek: Üniversite Başarı Modeli

## Üniversite Başarı Modeli (ÇDR)

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 \quad (\text{ÖRF})$$

$$\widehat{colGPA} = 1.29 + 0.453 \, hsGPA + 0.009 \, ACT \quad (\text{ÖRF})$$

$n = 141$  öğrenci;  $colGPA$ : üniversite genel not ortalaması (4 üzerinden);  $hsGPA$ : lise not ortalaması;  $ACT$ : genel yetenek sınav sonucu

- Kesim parametresi  $\hat{\beta}_0 = 1.29$  olarak tahmin edilmiştir.
  - $hsGPA = 0$  ve  $ACT = 0$  olduğunda modelce tahmin edilen üniversite genel not ortalaması  $\widehat{colGPA}$ 'yı ifade eder. Ancak örneklemede  $hsGPA$  ve  $ACT$ 'si 0 olan öğrenci olmadığından yorumlanması anlamsızdır.
- $ACT$ 'yi sabit tutarak lise not ortalaması  $hsGPA$ 'yı 1 puan arttırdığımızda üniversite genel not ortalaması  $colGPA$  0.453 puan artar.
- $hsGPA$ 'yı sabit tutarak genel yetenek sınav sonucu  $ACT$ 'yi 1 puan arttırdığımızda üniversite genel not ortalaması  $colGPA$  0.009 puan artar.

## Örnek: Üniversite Başarı Modeli

- Sadece genel yetenek sınav sonucu  $ACT$ 'yi kullanarak basit regresyon tahmin etseydik:

### Üniversite Başarı Modeli (BDR)

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_2 x_2 \quad (\text{ÖRF})$$

$$\widehat{colGPA} = 2.4 + 0.027 ACT \quad (\text{ÖRF})$$

- $ACT$ 'nin parametre tahmincisi  $\hat{\beta}_2$  önceki çoklu regresyonda bulunandan 3 kat daha yüksek çıktı.
- Bu regresyon, bize lise not ortalaması ( $hsGPA$ ) aynı olan iki öğrenciyi ortalama olarak karşılaştırma olanağı vermiyor fakat önceki regresyonda veriyordu.
- Lise not ortalaması  $hsGPA$ 'yı kontrol ettiğimizde genel yetenek sınav sonucu  $ACT$ 'nin üniversite genel not ortalaması  $colGPA$  üzerindeki önemi/etkisi azalıyor.

# Örnek: Logaritmik Ücret Modeli

## Logaritmik Ücret Modeli

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \hat{\beta}_3 x_3 \quad (\text{ÖRF})$$

$$\widehat{\ln wage} = 0.284 + 0.092 educ + 0.004 exper + 0.022 tenure \quad (\text{ÖRF})$$

$n = 526$  çalışan;  $wage$ : saatlik ücret (dolar);  $educ$ : eğitim düzeyi (yıl);  $exper$ : tecrübe düzeyi (yıl);  $tenure$ : kıdem (yıl)

- Bağımlı değişken logaritmik ve bağımsız değişkenler düzey (log-düzey) olarak modelde yer aldığından parametre tahmincileri 100 ile çarpılarak % olarak ceteris paribus yorumlanmalıdır.
- Örneğin,  $exper$  ve  $tenure$  sabit tutulduğunda  $educ$  bir yıl arttırılırsa  $wage$  ortalama olarak %9.2 ( $\%0.092 \times 100$ ) artar.
- Başka bir ifadeyle,  $exper$  ve  $tenure$  düzeyleri aynı olan iki çalışandan birinin  $educ$  düzeyi diğerinden bir yıl fazlaysa, bu iki çalışan için tahmin edilen ücret farkı ortalama olarak %9.2'dir.
- Burada somut iki işçiden değil ortalama durumdan bahsedilmektedir.

## Diğer Değişkenleri Sabit Tutmanın Anlamı

- ÇDR'de parametre tahmincilerini *ceteris paribus* koşulu altında bağımsız değişkenlerin  $y$  üzerindeki yalın/kısmi etkileri olarak yorumluyoruz.
- Örneğin, logaritmik ücret modelinde (Slayt 47)  $\hat{\beta}_1 = 0.092$  olması, *exper* ve *tenure* düzeyleri aynı olan iki çalışandan birinin *educ* düzeyi 1 yıl fazla olanın ortalama olarak %9.2 daha yüksek ücret alacağı şeklinde yorumlanmıştır.
- Bu yorum, verinin bu şekilde toplandığı anlamına gelmez, yani *exper* ve *tenure* düzeyleri aynı olan işçiler özellikle seçilip veri toplanmamıştır.
  - Veri rassal seçilmiş 526 çalışana ait *wage*, *educ*, *exper* ve *tenure* bilgilerinden oluşuyor.
  - *exper* ve *tenure* düzeyi aynı olan çalışanları ayrıca gruplandırmıyoruz.
- Aslında elimizde *exper* ve *tenure* düzeyleri aynı olan çalışanlardan oluşan bir örneklem olsaydı, *exper* ve *tenure* bağımsız değişkenlerini modele koymaya gerek kalmazdı.
  - Fakat, bu durum uygulamada çoğunlukla mümkün değildir.
  - Ayrıca ÇDR analizinde yalın/kısmi yani *ceteris paribus* etki hesaplandığından zaten yukarıdaki gibi bir duruma gerek yoktur.



# Birden Fazla Bağımsız Değişkeni Aynı Anda Değiştirmek

- Bazen bağımsız değişken  $x$ 'lerden birkaçını aynı anda değiştirerek  $y$ 'de meydana gelen ortalama değişimi ölçmek isteriz.
- Bazı durumlarda ise bağımsız değişken  $x$ 'lerden biri değiştirildiğinde diğeri de otomatik olarak değişir.
- Örneğin, logaritmik ücret modelinde (Slayt 47) *tenure* 1 yıl arttırıldığında *exper* de otomatik olarak 1 yıl artar.

$$\begin{aligned}\Delta \ln wage &= 0.284\Delta educ + 0.0041\Delta exper + 0.022\Delta tenure \quad (\text{Değişim Cins.}) \\ &= 0.284 \times 0 + 0.004 \times 1 + 0.022 \times 1 \\ &= 0.026\end{aligned}$$

- Burada 0.026, *educ* sabit tutulduğunda *tenure* ve *exper* 1 yıl arttırılırsa  $\ln wage$ 'de meydana gelen ortalama etkiyi belirtir.
  - Model log-düzey formunda olduğundan bulunan bu değer 100 ile çarpılarak % olarak ceteris paribus yorumlanmalıdır.
  - Yani, *educ* sabit tutulduğunda *tenure* ve *exper* 1 yıl arttırılırsa *wage* ortalama olarak %2.6 ( $\%0.026 \times 100$ ) artar.

# Tahmin Edilen Değerler ve Kalıntılar

$i$ 'inci Gözlem İçin Tahmin Edilen  $\hat{y}_i$  Değeri

$$\underbrace{\hat{y}_i}_{\text{Tahmin Edilen Değer}} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} + \cdots + \hat{\beta}_k x_{ik} \quad (\text{ÖRF})$$

- $x_{ij}$  değerlerini tahmin edilen regresyonda (ÖRF'de) yerine koyarsak tahmin edilen bağımsız değişken değerlerini yani  $\hat{y}_i$ 'yi elde ederiz.

Kalıntılar (Artıklar)

$$\underbrace{\hat{u}_i}_{\text{Kalıntı (Artık)}} = \underbrace{y_i}_{\text{Gözlenen Değer}} - \underbrace{\hat{y}_i}_{\text{Tahmin Edilen Değer}}$$

- Gözlenen  $y_i$  değerleriyle tahmin edilen değerler  $\hat{y}_i$  arasındaki fark kalıntıları  $\hat{u}_i$  verir.
- $\hat{u}_i > 0$  ise  $y_i > \hat{y}_i$ , eksik tahmin yapılmıştır.
- $\hat{u}_i < 0$  ise  $y_i < \hat{y}_i$ , fazla tahmin yapılmıştır.

# Tahmin Edilen Değerler ve Kalıntıların Cebirsel Özellikleri

- SEKK kalıntılarının toplamı ve dolayısıyla da örneklem ortalaması sıfıra eşittir.

$$\sum_{i=1}^n \hat{u}_i = 0 \quad \text{ve} \quad \bar{\hat{u}} = 0$$

- Bu durum SEKK birinci sıra koşullarından ilkinin (aynı zamanda örneklem moment koşullarından ilkinin) bir sonucudur. Bakınız Slayt 30.
- Anakütledeki hata terimleri  $u$ 'nun örneklemdeki analogu kalıntılar  $\hat{u}$  olarak yorumlanabilir fakat kesinlikle aynı şeyler değildir.

$$\underbrace{u}_{\text{Anakütle}} \longrightarrow \underbrace{\hat{u}}_{\text{Örneklem}}$$

$$\underbrace{E(u) = 0}_{\text{Anakütle}} \longrightarrow \underbrace{E(\hat{u}) = 0, \sum_{i=1}^n \hat{u}_i = 0 \quad \text{ve} \quad \bar{\hat{u}} = 0}_{\text{Örneklem}}$$

# Tahmin Edilen Değerler ve Kalıntıların Cebirsel Özellikleri

- 2 Bağımsız değişken  $x_j$  ile kalıntı terimleri  $\hat{u}$  arasındaki örneklem kovaryansı ve korelasyon katsayısı sıfırdır.

$$Cov(x_j, \hat{u}) = 0 \quad \text{ve} \quad Corr(x_j, \hat{u}) = 0, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$$

- Bu durum diğer SEKK birinci sıra koşullarının ( $k$  tane) ve ayrıca diğer örneklem moment koşullarının ( $k$  tane) bir sonucudur. Bakınız Slayt 30.
- Bağımsız değişken  $x_j$ 'lerle kalıntı  $\hat{u}$ 'ların doğrusal olarak ilişkisizliği çıkarılabilir.

$$Cov(x_j, u) = 0 \quad \text{ve} \quad Corr(x_j, u) = 0 \quad \longrightarrow \quad E(x_j u) = 0 \quad (\text{Anakütle})$$

$$Cov(x_j, \hat{u}) = 0 \quad \text{ve} \quad Corr(x_j, \hat{u}) = 0 \quad \longrightarrow \quad E(x_j \hat{u}) = 0 \quad (\text{Örneklem})$$

$$\underbrace{E(x_j u) = 0}_{\text{Anakütle}} \quad \longrightarrow \quad \underbrace{E(x_j \hat{u}) = 0 \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^n x_{ij} \hat{u}_i = 0}_{\text{Örneklem}}$$

# Tahmin Edilen Değerler ve Kalıntıların Cebirsel Özellikleri

- 1. ve 2. cebirsel özelliklerin bir sonucu olarak tahmin edilen değerler  $\hat{y}$  ile kalıntı terimleri  $\hat{u}$  arasındaki örneklem kovaryansı ve korelasyon katsayısı sıfırdır.

$$Cov(\hat{y}, \hat{u}) = 0 \quad \text{ve} \quad Corr(\hat{y}, \hat{u}) = 0$$

- Bu özellikten tahmin edilen değerler  $\hat{y}$  ile kalıntı terimleri  $\hat{u}$ 'ların doğrusal olarak ilişkisizliği çıkarılabilir.

$$\underbrace{Cov(\hat{y}, \hat{u}) = 0 \quad \text{ve} \quad Corr(\hat{y}, \hat{u}) = 0}_{\text{Örneklem}} \quad \longrightarrow \quad \underbrace{E(\hat{y}\hat{u}) = 0 \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^n \hat{y}_i \hat{u}_i = 0}_{\text{Örneklem}}$$

► Ek Bilgi

# Tahmin Edilen Değerler ve Kalıntıların Cebirsel Özellikleri

- 4 Tahmin edilen  $\hat{y}_i$  değerlerinin ortalaması gözlenen  $y_i$  değerlerinin ortalamasına eşittir.

$$y_i = \hat{y}_i + \hat{u}_i$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i=1}^n \hat{y}_i + \underbrace{\sum_{i=1}^n \hat{u}_i}_{=0} \quad (1. \text{ Cebirsel Özellik})$$

$$n\bar{\hat{y}} = n\bar{y}$$

$$\bar{\hat{y}} = \bar{y}$$

- 5  $(\bar{x}_j, \bar{y} : j = 1, 2, \dots, k)$  noktası daima ÖRF'den geçer (üzerine düşer).

$$(\bar{x}_j, \bar{y} : j = 1, 2, \dots, k) \longrightarrow \bar{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{x}_1 + \hat{\beta}_2 \bar{x}_2 + \dots + \hat{\beta}_k \bar{x}_k + u$$

# BDR ve ÇDR Tahminlerinin Karşılaştırılması

## Basit vs. Çoklu Doğrusal Regresyon (2 Bağımsız Değişkenli) Tahmini

$$y = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x_1 + \tilde{u} \quad \text{vs.} \quad y = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \hat{u} \quad (\text{Tahmin})$$

- Yukarıda verilen regresyonlar arasındaki temel fark, soldaki regresyonda (BDR'de) bağımsız değişken  $x_2$ 'nin modele dahil edilmemesidir.
- $\tilde{\beta}_1$  ve  $\hat{\beta}_1$  arasındaki ilişki şu şekildedir:  $\tilde{\beta}_1 = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \tilde{\delta}_1$
- $\tilde{\delta}_1, x_2$ 'nin  $x_1$  üzerine uygulanan regresyondaki eğim parametresi tahminidir.
- Yukarıdaki regresyonlar genelde farklı sonuçlar verir.
- Ancak şu iki durumda eğim parametresi tahminleri  $\tilde{\beta}_1$  ve  $\hat{\beta}_1$  aynı olur.
  - $x_2$ 'nin  $y$  üzerindeki yalın/kısmi etkisi sıfırdır, yani  $\hat{\beta}_2 = 0$ 'dır.
  - Örnekleme  $x_1$  ve  $x_2$  doğrusal olarak ilişkisizdir, yani  $\tilde{\delta}_1 = 0$ 'dır.

# BDR ve ÇDR Tahminlerinin Karşılaştırılması

## BDR Bilgileri - Tahmin

$$y = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x_1 + \tilde{u} \quad \longrightarrow \quad \tilde{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1) y_i}{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2}$$

## ÇDR (2 Bağımsız Değişkenli) Bilgileri - Tahmin

$$y = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \hat{u} \quad \longrightarrow \quad \sum_{i=1}^n x_{i1} \hat{u}_i = 0 \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^n \hat{u}_i = 0 \quad (\text{Ana Model})$$

$$x_2 = \tilde{\delta}_0 + \tilde{\delta}_1 x_1 + \tilde{r}_2 \quad \longrightarrow \quad \tilde{\delta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1) x_{i2}}{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2} \quad (\text{Yardımcı Model})$$



# BDR ve ÇDR Tahminlerinin Karşılaştırılması

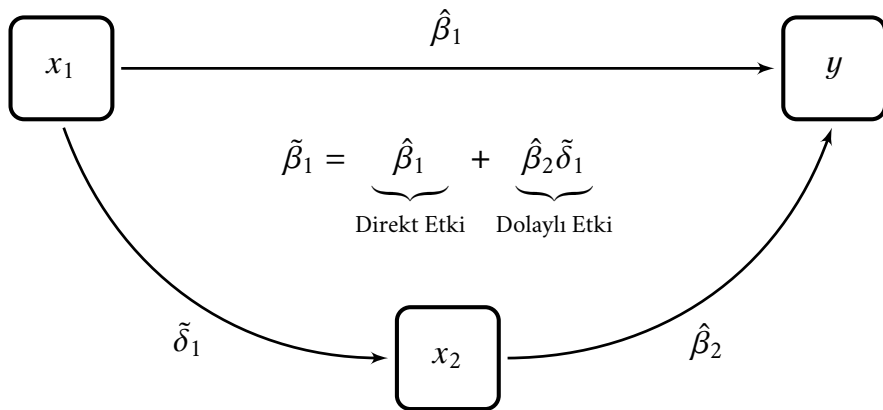
- Şimdi BDR'deki eğim parametresi tahmincisi  $\tilde{\beta}_1$ 'nin verilen formülünü
  - ÇDR modelini
  - ÇDR modelinden elde ettiğimiz cebirsel özellikleri
  - Yardımcı modeldeki eğim parametresi tahmincisi  $\tilde{\delta}_1$ 'nin verilen formülünü
 kullanarak değiştirelim ve  $\tilde{\beta}_1$  ve  $\hat{\beta}_1$  arasındaki ilişkiyi bulalım.

$$\begin{aligned}
 \tilde{\beta}_1 &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1) y_i}{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1) (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} + \hat{u}_i)}{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2} \\
 &= \frac{\hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)}{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2} + \frac{\hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1) x_{i1}}{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2} + \frac{\hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1) x_{i2}}{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2} + \frac{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1) \hat{u}_i}{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2}
 \end{aligned}$$

# BDR ve ÇDR Tahminlerinin Karşılaştırılması

$$\begin{aligned}
 \tilde{\beta}_1 &= \frac{\overbrace{\hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)}^{=0}}{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2} + \frac{\overbrace{\hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)x_{i1}}^{= \sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2}}{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2} + \frac{\hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)x_{i2}}{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2} + \frac{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)\hat{u}_i}{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2} \\
 &= \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \frac{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)x_{i2}}{\underbrace{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2}_{\tilde{\delta}_1}} + \frac{\overbrace{\sum_{i=1}^n x_{i1}\hat{u}_i}^{=0} - \bar{x}_1 \overbrace{\sum_{i=1}^n \hat{u}_i}^{=0}}{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2} \\
 \tilde{\beta}_1 &= \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \tilde{\delta}_1
 \end{aligned}$$

# BDR ve ÇDR Tahminlerinin Karşılaştırılması



Şekil 1:  $x_1$ 'in  $y$  Üzerindeki Direkt ve Dolaylı Etkisi

# $k - 1$ vs. $k$ Değişkenli ÇDR Tahminlerinin Karşılaştırılması

## $k - 1$ vs. $k$ Değişkenli Çoklu Doğrusal Regresyon Tahmini

$$y = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x_1 + \tilde{\beta}_2 x_2 + \cdots + \tilde{\beta}_{k-1} x_{k-1} + \tilde{u}$$

vs.

$$y = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \cdots + \hat{\beta}_{k-1} x_{k-1} + \hat{\beta}_k x_k + \hat{u} \quad (\text{Tahmin})$$

- Yukarıda verilen regresyonlar arasındaki temel fark, soldaki regresyonda bağımsız değişken  $x_k$ 'nin modele dahil edilmemesidir.
- $\tilde{\beta}_j$  ve  $\hat{\beta}_j$  arasındaki ilişki şu şekildedir:  $\tilde{\beta}_j = \hat{\beta}_j + \hat{\beta}_k \tilde{\delta}_j$
- $\tilde{\delta}_j, x_k$ 'nin  $x_j$  üzerine uygulanan regresyondaki eğim parametresi tahminidir.
- Yukarıdaki regresyonlar genelde farklı sonuçlar verir.
- Ancak şu iki durumda eğim parametresi tahminleri  $\tilde{\beta}_j$  ve  $\hat{\beta}_j$  aynı olur.
  - $x_k$ 'nin  $y$  üzerindeki yalın/kısmi etkisi sıfırdır, yani  $\hat{\beta}_k = 0$ 'dır.
  - Örneklemede  $x_j$  ve  $x_k$  doğrusal olarak ilişkisizdir, yani  $\tilde{\delta}_j = 0$ 'dır.

## Kareler Toplamları (Sum of Squares)

- Her bir  $i$  gözlemi için gözlenen değer, tahmin edilen değer ve kalıntı arasındaki ilişki aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$y_i = \hat{y}_i + \hat{u}_i$$

- Her iki tarafın örneklem ortalamalarından sapmalarının karesini alıp toplarsak

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n [(\hat{y}_i - \bar{\hat{y}}) + (\hat{u}_i - \bar{\hat{u}})]^2$$

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n [(\hat{y}_i - \bar{y}) + \hat{u}_i]^2 \quad (1. \text{ ve } 4. \text{ Cebirsel Öz.})$$

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2 + 2 \underbrace{\sum_{i=1}^n \hat{u}_i \hat{y}_i}_{=0} - 2\bar{y} \underbrace{\sum_{i=1}^n \hat{u}_i}_{=0} \quad (3. \text{ Cebirsel Öz.})$$

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2$$

## Kareler Toplamları (Sum of Squares)

- **Toplam Kareler Toplamı:** SST (Total Sum of Squares)  $y$ 'deki toplam değişkenliği verir.

$$SST = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$$

$Var(y) = SST / (n - 1)$  olduğuna dikkat edin.

- **Açıklanan Kareler Toplamı:** SSE (Explained Sum of Squares) modelce açıklanan kısımdaki, yani  $\hat{y}$ , değişkenliği verir.

$$SSE = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2$$

- **Kalıntı Kareleri Toplamı:** SSR (Residual Sum of Squares) kalıntılardaki, yani  $\hat{u}$ , değişkenliği verir.

$$SSR = \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2$$

## Kareler Toplamları (Sum of Squares)

- $y$ 'deki toplam değişkenlik aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$SST = SSE + SSR$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}_{SST} = \underbrace{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}_{SSE} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2}_{SSR}$$

# Determinasyon Katsayısı

- $y'$ deki toplam değişkenlik denkleminin her iki tarafını SST'ye bölersek

$$SST = SSE + SSR$$

$$1 = \frac{SSE}{SST} + \frac{SSR}{SST}$$

- Açıklanan kısmın değişkenliğinin toplam değişkenlik içindeki payı regresyonun **determinasyon katsayısı** ya da **belirlilik katsayısı**dır (coefficient of determination) ve  $R^2$  ile gösterilir.

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST}$$

- SSE hiçbir zaman SST'den büyük olamayacağı için  $0 \leq R^2 \leq 1$
- $R^2$ ,  $y'$ deki değişkenliğin  $x$  tarafından açıklanan kısmının yüzdesini verir. Regresyonun açıklama gücü yükseldikçe  $R^2$ , 1'e yaklaşır.
- $R^2$  modelin açıklama gücünü (ne kadar iyi fit edildiğini) belirttiği için bazen **uyum iyiliği** (goodness-of-fit) olarak da adlandırılır.
- $R^2$  şu şekilde de hesaplanabilir:  $R^2 = \text{Corr}(y, \hat{y})^2$



# Determinasyon Katsayısı

- Determinasyon katsayısı

$$R^2 = \frac{SSE}{SST} = 1 - \frac{SSR}{SST}$$

- Regresyona yeni bir bağımsız değişken  $x$  eklendiğinde  $R^2$  her zaman artar (ya da çok nadir aynı kalır). Ya da başka bir deyişle SSE'nin her zaman artmasıdır.
- Örneğin daha önce verilen ÇDR Ücret Modeli'ne (Slayt 7) modelle alakasız bir değişken eklendiğinde dahi  $R^2$  artacaktır.
  - Modele  $SSN$  adlı kişinin sosyal güvenlik numarasının son hanesini belirten yeni bir değişken eklediğimizi düşünelim.
  - Emek ekonomisine göre kişinin alacağı ücretin,  $SSN$  ile hiçbir ilişkisi yoktur.
  - Fakat  $SSN$ 'nin modele eklenmesi matematiksel olarak  $R^2$  değerini arttıracaktır.
- Bu nedenle yeni bir değişkenin modele olan katkısının belirlenmesinde ve ÇDR modellerinde modelin açıklama gücünün belirlenmesinde  $R^2$  iyi bir ölçüt değildir.
- Bu sebeple ÇDR modellerinde **düzeltilmiş  $R^2$  yani  $\bar{R}^2$**  kullanılır.
- $\bar{R}^2$  detaylı olarak daha sonra incelenecektir. O zamana kadar modelin açıklama gücünü belirlemede  $R^2$  değerini kullanacağız.

# Determinasyon Katsayısı: Örnek

## Üniversite Başarı Modeli (ÇDR)

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 \quad (\text{ÖRF})$$

$$\widehat{colGPA} = 1.29 + 0.453 \, hsGPA + 0.009 \, ACT \quad (\text{ÖRF})$$

$$n = 141, \quad R^2 = 0.176$$

- Determinasyon katsayısı 0.176 olarak tahmin edilmiştir.
- Üniversite genel not ortalaması *colGPA*'daki değişkenliğin yaklaşık %17.6'sı *hsGPA* ve *ACT* değişkenleriyle açıklanabilmektedir.
- Dışarıda bırakılan birçok faktör olduğundan üniversite genel not ortalaması *colGPA*'nın küçük bir kısmı açıklanabilmektedir.
- Üniversite genel not ortalaması *colGPA*'yı etkileyen bu modelde yer almayan başka birçok değişken olduğu unutulmamalıdır.

# SEKK Parametre Tahmincilerinin Varyansı

## ÇDR.7: Sabit Varyans (Homoscedasticity)

$u$  hata teriminin bağımsız değişken  $x$ 'lere göre koşullu varyansı sabittir.

$$\text{Var}(u|x_1, x_2, \dots, x_k) = \sigma^2$$

$$\text{Var}(u|\mathbf{x}) = \sigma^2$$

$$\text{Var}(u) = \sigma^2$$

- Bu varsayımın sağlanmadığı duruma **değişen varyans** (heteroscedasticity) denir.
- Bu varsayım SEKK parametre tahmincilerinin varyanslarının ve standart hatalarının türetilmesinde ve etkinlik özelliklerinin belirlenmesinde kullanılır.
- SEKK parametre tahmincilerinin sapmasızlığı için **sabit varyans** varsayımına ihtiyaç yoktur.
- Örneğin, ücret modelinde (Slayt 7) bu varsayım, model dışında bırakılan faktörler  $u$ 'nun değişkenliğinin modele dahil edilen tüm bağımsız değişkenlere (*educ* ve *exper*) bağlı olmadığını söylemektedir.

# SEKK Parametre Tahmincilerinin Varyansı

## Teorem: $\hat{\beta}_j$ 'lerin Varyansları

Gauss–Markov varsayımları (ÇDR.1 - ÇDR.7) altında

$$\text{Var}(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma^2}{SST_j(1 - R_j^2)}, \quad SST_j = \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)^2, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$$

► Ek Bilgi

- $\sigma^2$  gözlenemeyen hata terimi  $u$ 'nun varyansıdır. Bu nedenle  $\sigma^2$  **hata varyansı**,  $\sigma$  ise **regresyonun standart sapması** olarak adlandırılır.
- $SST_j$ ,  $x_j$ 'deki örneklem değişkenliğini ifade eder.
- $R_j^2$  ise  $x_j$ 'nin diğer tüm  $x$  değişkenlerine regresyonundan (kesim parametresi içeren) elde edilen belirlilik katsayısıdır.
- $\text{Var}(\hat{\beta}_j)$ ,  $\sigma^2$  ile aynı yönde ilişkilidir.  $\sigma^2$ 'yi düşürmenin tek yolu güçlü bağımsız değişkenleri modele eklemektir.
- $\text{Var}(\hat{\beta}_j)$ ,  $SST_j$  ile ters yönde ilişkilidir.  $SST_j$ 'yi arttırmanın tek yolu gözlem sayısını arttırmaktır.

# SEKK Parametre Tahmincilerinin Varyansı

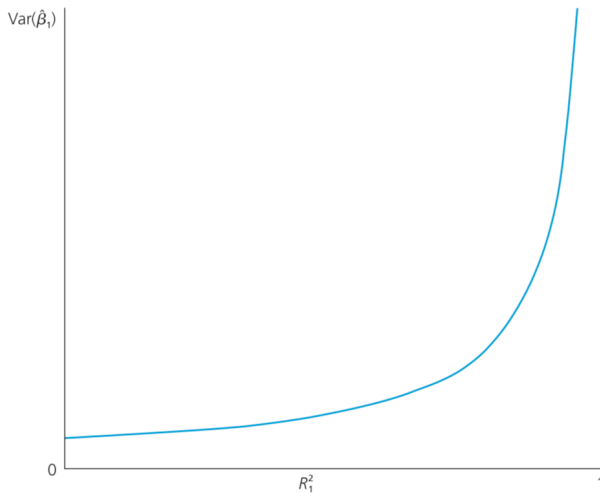
## Teorem: $\hat{\beta}_j$ 'lerin Varyansları

Gauss–Markov varsayımları (ÇDR.1 - ÇDR.7) altında

$$\text{Var}(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma^2}{SST_j(1 - R_j^2)}, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$$

- $\text{Var}(\hat{\beta}_j)$ , diğer tüm bağımsız değişken  $x_j$  ile korelasyon düzeyini belirten  $R_j^2$  terimine de bağlıdır.
  - $R_j^2$  arttıkça  $\text{Var}(\hat{\beta}_j)$  sınırsız artar. Bakınız Şekil 2.
  - Limitte  $R_j^2 = 1$  olduğunda varyans sonsuz olur (ayrıca  $\hat{\beta}_j$  belirsiz olur). Ancak tam çoklu doğrusal bağıntının olmaması varsayımı (ÇDR.4) bu durumu engeller.
- Kısacası, bağımsız değişken  $x$ 'lerin birbirleriyle doğrusal ilişki düzeyi (çoklu doğrusal bağıntının gücü) arttıkça SEKK parametre tahmincilerinin varyansı artar.
- Bu nedenle istenmeyen durum tam çoklu doğrusal bağıntı iken dikkat edilmesi gereken durum ise çoklu doğrusal bağıntı gücünün yüksek olmasıdır.

# SEKK Parametre Tahmincilerinin Varyansı



Kaynak: Wooldridge (2016)

Şekil 2: Varyans ve  $R_j^2$  ilişkisi

# SEKK Parametre Tahmincilerinin Varyansı

## Teorem: $\hat{\beta}_j$ 'lerin Varyansları

Gauss–Markov varsayımları (ÇDR.1 - ÇDR.7) altında

$$Var(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma^2}{SST_j(1 - R_j^2)}, \quad SST_j = \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)^2, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$$

- ÇDR için verilen yukarıdaki  $Var(\hat{\beta}_j)$  formülü aynı zamanda tek bağımsız değişken içeren modeldeki (BDR) parametre tahmincilerinin varyans formülünün çıkartılmasında kullanılabilir.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + u \quad (\text{Model})$$

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 \quad (\text{ÖRF})$$

$$x_1 = \hat{\alpha}_0 + \hat{r}_1, \quad R_1^2 = 0 \quad (1. \text{ Yardımcı Regresyon Tahmini})$$

$$Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{SST_1(1 - R_1^2)} = \frac{\sigma^2}{SST_1} \longrightarrow Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{SST_x} = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

# SEKK Parametre Tahmincilerinin Varyansı

## Teorem: $\hat{\beta}_j$ 'lerin Varyansları

Gauss–Markov varsayımları (ÇDR.1 - ÇDR.7) altında

$$\text{Var}(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma^2}{SST_j(1 - R_j^2)}, \quad SST_j = \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)^2, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$$

- Hata terimi  $u$  gözlenemediği için hata varyansı  $\sigma^2$  bilinmez.
- Bu nedenle, SEKK parametre tahmincilerinin varyansı  $\text{Var}(\hat{\beta}_j)$ 'lerin tahmini için öncelikle hata varyansı  $\sigma^2$ 'nin tahmin edilmesi gerekir.
- Buradaki önemli nokta,  $\text{Var}(\hat{\beta}_j)$ 'lerin sapmasız tahmin edilmesi gerekir. Bu nedenle,  $\sigma^2$ 'nin de aynı şekilde sapmasız tahmin edilmesi gerekir.



# SEKK Parametre Tahmincilerinin Varyansı

## Hata Varyansı $\sigma^2$

ÇDR.5 varsayımı altında hata varyansı  $\sigma^2$  aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\text{Var}(u) = \sigma^2 = E(u^2) - \underbrace{E(u)^2}_{= 0 \text{ (ÇDR.5)}} \quad (\text{Varyans Formülü})$$

$$\sigma^2 = E(u^2)$$

- $\sigma^2$ 'nin sapmasız tahmincisi hata terimi  $u$ 'nun örneklem ortalaması  $n^{-1} \sum_{i=1}^n u_i^2$ 'dir.
- Fakat, hata terimi  $u$  gözlenemediği için  $\sigma^2$ 'nin tahmininde hata terimi  $u$ 'nun yerine onun örneklem analogu olan kalıntı  $\hat{u}$  kullanılır.  $n^{-1} \sum_{i=1}^n u_i^2 \longrightarrow n^{-1} \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2$
- Fakat  $n^{-1} \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2$  sapmalı bir tahmincidir. Bu nedenle,  $\sigma^2$ 'nin sapmasız tahmincisini hesaplamak için BDR'de yaptığımız gibi bu değer serbestlik derecesi kullanılarak düzeltilmesi gerekir.

# SEKK Parametre Tahmincilerinin Varyansı

## Teorem: Hata Varyansı $\sigma^2$ 'nin Sapmasız Tahmini

Gauss–Markov varsayımları (ÇDR.1 - ÇDR.7) altında hata varyansı  $\sigma^2$ 'nin sapmasız bir tahmincisi:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2}{n - k - 1} = \frac{SSR}{n - k - 1}$$

- **Serbestlik derecesi** (bağımsız bilgi sayısı)  $\longrightarrow s.d. = n - (k + 1) = n - k - 1$ 
  - Serbestlik derecesi, SEKK birinci sıra koşullarından  $(k + 1)$  tane gelmektedir. Bu koşullar kalıntı  $\hat{u}$ 'nın üzerine  $k + 1$  tane kısıt koyar.
  - $n$  tane kalıntıdan  $n - (k + 1)$  tanesi biliniyorsa, geriye kalan  $k + 1$  kalıntı otomatik olarak bilinecektir. Bu nedenle kalıntıların serbestlik derecesi  $n - k - 1$ 'dir.
- $\hat{\sigma}$  **regresyonun standart sapması**  $\sigma$ 'nın bir tahmincisidir ve **regresyonun standart hatası** ya da **ortalama karesel hata** olarak adlandırılır.
- Regresyona yeni bir bağımsız değişken eklendiğinde  $\hat{\sigma}$  azalabilir ya da artabilir.
  - Modele yeni bir bağımsız değişken eklendiğinde  $SSR$  düşecektir fakat aynı zamanda serbestlik derecesi de 1 düşecektir.  $SSR$  payda, serbestlik derecesi ise payda olduğundan hangi değişimin daha fazla etkiye sahip olduğunu kestiremeyiz.

# SEKK Parametre Tahmincilerinin Varyansı

- $\hat{\sigma}^2$  tahmin edildikten sonra  $Var(\hat{\beta}_j)$ 'nin formülünde yerine koyulup  $Var(\hat{\beta}_j)$ 'nin sapmsız bir tahmincisi hesaplanabilir.

## $\hat{\beta}_j$ 'lerin Varyans Tahminleri

$$Var(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma^2}{SST_j(1 - R_j^2)} \quad \longrightarrow \quad \widehat{Var(\hat{\beta}_j)} = \frac{\hat{\sigma}^2}{SST_j(1 - R_j^2)}, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$$

- Genelde,  $Var(\hat{\beta}_j)$  ve  $\widehat{Var(\hat{\beta}_j)}$  arasındaki ayrım yazımda net olarak gösterilmez.
  - $\hat{\beta}_j$ 'lerin varyansı tahmini denildiğinde  $\widehat{Var(\hat{\beta}_j)}$  kastedilmesine rağmen yazıdaki gösterimde genelde  $Var(\hat{\beta}_j)$  kullanılır.
  - Bu derste aynı yolu izleyip  $\hat{\beta}_j$ 'lerin varyans tahminini  $Var(\hat{\beta}_j)$  ile göstereceğiz.

$$Var(\hat{\beta}_j) = \frac{\hat{\sigma}^2}{SST_j(1 - R_j^2)}, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$$

- $Var(\hat{\beta}_j)$  direkt olarak  $\hat{\sigma}$ 'ya bağlı olduğundan aynen  $\hat{\beta}_j$ 'lar gibi  $Var(\hat{\beta}_j)$ 'nin da örneklem dağılımı vardır ve örneklemde örneklem değişir.

# SEKK Parametre Tahmincilerinin Varyansı

## $\hat{\beta}_j$ 'lerin Standart Sapmaları (sd)

$$sd(\hat{\beta}_j) = \sqrt{Var(\hat{\beta}_j)} \longrightarrow sd(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma}{\sqrt{SST_j(1 - R_j^2)}}, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$$

## $\hat{\beta}_j$ 'lerin Standart Hataları (se)

$$se(\hat{\beta}_j) = \sqrt{Var(\hat{\beta}_j)} \longrightarrow se(\hat{\beta}_j) = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{SST_j(1 - R_j^2)}}, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$$

- $se(\hat{\beta}_j)$  güven aralıklarının hesaplanmasında ve hipotez testlerinde kullanılır.
- $se(\hat{\beta}_j)$  direkt olarak  $\hat{\sigma}$ 'ya bağlı olduğundan aynen  $\hat{\beta}_j$ 'lar gibi  $se(\hat{\beta}_j)$ 'nin da örneklem dağılımı vardır ve örneklemden örnekleme değişir.
- $se(\hat{\beta}_j)$ , ÇDR.7 (sabit varyans) varsayımına dayanan  $Var(\hat{\beta}_j)$  formülünden türetildiği için ÇDR.7 varyasyonunun sağlanmaması durumunda, yani değişen varyans varsa,  $Var(\hat{\beta}_j)$  ve  $se(\hat{\beta}_j)$  tahminleri sapmalı olur.
- Değişen varyans durumunda SEKK parametre tahmincilerinin varyansları ve dolayısıyla standart hataları geçersizdir ve bu nedenle düzeltilmeleri gerekir.

# SEKK Parametre Tahmincilerinin Sapmasızlığı

## Teorem: SEKK Parametre Tahmincilerinin Sapmasızlığı

ÇDR.1 - ÇDR.5 varsayımları altında SEKK parametre tahmincileri sapmasızdır.

$$E(\hat{\beta}_0) = \beta_0$$

$$E(\hat{\beta}_j) = \beta_j, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$$

► Ek Bilgi

- **Sapmasızlık**, SEKK parametre tahmincilerinin örneklem dağılımlarının ortalamasının (beklenen değerinin) bilinmeyen anakütle parametrelerine eşit olduğunu söyler.
- İlerleyen slaytlarda sapmasızlık için gerekli olan varsayımların bazıları hakkındaki detaylar verilmiştir.

# SEKK Tahmincilerinin Sapmasızlığı İçin Gerekli Varsayımlar

## ÇDR.1: Gözlem Sayısı

Gözlem sayısı  $n$  tahmin edilecek anakütle parametre sayısından büyük ya da en azından eşit olmalıdır.

$$n \geq k + 1$$

## ÇDR.2: Parametrelerde Doğrusallık

Model parametrelerde doğrusaldır.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + u \quad \checkmark$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \quad \checkmark$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_1^2 + u \quad \checkmark$$

$$y = \beta_0 + \beta_1^2 x_1 + \beta_2 x_2 + u \quad \times$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \sqrt{\beta_2} x_2 + u \quad \times$$

# SEKK Tahmincilerinin Sapmasızlığı İçin Gerekli Varsayımlar

## Doğrusal Parametre Tahmincileri

$\hat{\beta}_j$  parametre tahmincisi aşağıdaki gibi yazılabiliyorsa doğrusaldır.

$$\hat{\beta}_j = \sum_{i=1}^n w_{ij} y_i, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$$

- Burada  $w_{ij}$  tüm bağımsız değişken  $x$ 'lerin bir fonksiyonudur.
- SEKK parametre tahmincileri aşağıdaki gibi yazılabildiğinden doğrusaldır:

$$\hat{\beta}_j = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{ij} y_i}{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{ij}^2} = \sum_{i=1}^n w_{ij} y_i, \quad \text{burada} \quad w_{ij} = \frac{\hat{r}_{ij}}{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{ij}^2}$$

- $\hat{r}_{ij}, x_j$ 'nin tüm diğer bağımsız değişkenler üzerine regresyonundan elde edilen kalıntı terimidir.

# SEKK Tahmincilerinin Sapmasızlığı İçin Gerekli Varsayımlar

## ÇDR.3: Rassallık

Tahminde kullanılan  $n$  tane gözlem ilgili anakütleden rassal örnekleme yoluyla seçilmiştir. Yani gözlemler stokastiktir (rassal), yani deterministik (kesin) değildir.

$$\{(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}, y_i) : i = 1, 2, \dots, n\}$$

## ÇDR.4: Tam Çoklu Doğrusal Bağıntının Olmaması

Örnekleme (ve bu nedenle anaküttelede) bağımsız değişken  $x$ 'lerin hiçbirisi kendi içinde sabit değildir (yeterli değişkenlik vardır) ve bağımsız değişkenler arasında tam çoklu doğrusal bağıntı (TÇDB) yoktur.

$$\sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)^2 > 0, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \quad \longrightarrow \quad x_2 = 2x_1 \quad \text{TÇDB VAR ✗}$$

$$\longrightarrow \quad x_2 = x_1^2 \quad \text{TÇDB YOK ✓}$$



# SEKK Tahmincilerinin Sapmasızlığı İçin Gerekli Varsayımlar

## ÇDR.4: Tam Çoklu Doğrusal Bağıntının Olmaması

Bu varsayım bağımsız değişken  $x$ 'ler arasında tam doğrusal bir ilişkinin olmaması gerektiğini söyler. Herhangi bir  $x$  diğer  $x$ 'lerin doğrusal bir kombinasyonu olarak yazılamaz. Yani  $x$ 'ler arasındaki korelasyon katsayısı 1 olamaz.

- ÇDR.4 varsayımı bağımsız değişken  $x$ 'lerin arasındaki doğrusal olmayan ilişki hakkında hiçbir kısıtlamada bulunmaz.
- ÇDR.4 varsayımı bağımsız değişken  $x$ 'lerin doğrusal ilişkili olmasına izin verir. Fakat izin verilmeyen tek durum tam doğrusal ilişkinin olmasıdır.
- $x$ 'ler tam ilişkili olursa SEKK parametre tahmincilerinin hesaplanması matematiksel olarak mümkün olmaz (parametre tahmincileri belirsiz olur).
- Bu varsayıma göre bağımsız değişkenler doğrusal ilişkili olabilirler. Zaten,  $x$ 'ler arasında doğrusal ilişkiye (1'den düşük korelasyona) izin vermezsek ÇDR'den istediğimiz faydayı alamayız.
- Örneğin, sınav başarı modelinde (Slayt 8) ortalama aile geliri *avginc* ve öğrencinin eğitim harcaması *expend* arasında ilişki olduğunu bilerek bu değişkenleri modele sokuyoruz. Amaç ortalama aile geliri *avginc*'i kontrol etmektir.

# SEKK Tahmincilerinin Sapmasızlığı İçin Gerekli Varsayımlar

## ÇDR.5: Sıfır Koşullu Ortalama

$$E(u|\mathbf{x}) = E(u) = 0$$

$$Cov(x_j, u) = 0, \quad Corr(x_j, u) = 0 \quad \text{ve} \quad E(x_j u) = 0, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$$

Sonuç:  $u$  ve  $x_j$  ortalama bağımsızdır. Yani  $u$  ve  $x_j$  doğrusal ilişkisizdir.

- ÇDR.5 varsayımı hata terimi  $u$ 'nun bağımsız değişken  $x$ 'lerle ilişkisiz olduğunu, yani  $x$ 'lerin **kesin dışsal** (exogenous) olduğunu, söyler.
- Eğer  $u$ ,  $x$ 'lerden biriyle ilişkiliyse, yani ÇDR.5 sağlanmazsa, SEKK parametre tahmincileri sapmalı olur. Bu durumda tahmin sonuçları güvenilir olmaz.
- ÇDR.5 varsayımının sağlanmadığı durumlar nelerdir?
  - Modelin **fonksiyon kalıbının yanlış kurulması** (functional form misspecification)
  - Önemli bir **değişkenin model dışında bırakılması** (omitted variable)
  - Bağımsız değişkenlerde yapılan **ölçme hataları** (measurement error)
- ÇDR.5 varsayımı sağlanmıyorsa **içsel değişkenler** (endogenous variables), yani **içsellik** (endogeneity), söz konusudur.

# SEKK Parametre Tahmincilerinin Etkinliği

## Teorem: SEKK Parametere Tahmincilerinin Etkinliği

ÇDR.6 - ÇDR.7 varsayımları altında SEKK parametre tahmincileri etkindir.

$$Var(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma^2}{SST_j(1 - R_j^2)}, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$$

► Ek Bilgi

- SEKK parametre tahmincileri  $\hat{\beta}_j$ 'ların **etkin** olması **en küçük/minimum varyanslı** olması anlamına gelir.
- Küçük varyans ve dolayısıyla küçük standart hata  $se(\hat{\beta}_j)$  istenen bir özelliktir.
  - Küçük varyansa sahip parametre tahmincileri  $\hat{\beta}_j$ 'ların farklı örneklemelerde elde edilen değerleri gerçek parametre  $\beta_j$  değerinden (beklenen değeri) çok fazla uzaklaşmaz, yani ortalamadan sapma azdır.
  - Bu nedenle küçük varyansa sahip parametre tahmincileri  $\hat{\beta}_j$ 'lar daha **hassas** bir tahmin verir.
  - Küçük standart hata  $se(\hat{\beta}_j)$ 'ya sahip ve dolayısıyla daha hassas olan  $\hat{\beta}_j$ 'ların güven aralıklarının hesaplanmasında ve hipotez testlerinin yapılmasında daha **kesin istatistiki sonuçlara** varabiliriz.

# Gauss–Markov Teoremi

## Gauss–Markov Teoremi

ÇDR.1 - ÇDR.7 varsayımları altında SEKK parametre tahmincileri, tüm doğrusal sapmasız tahminciler arasında etkin/en iyi (minimum varyanslı) olanlarıdır.

Başka bir ifadeyle, ÇDR.1 - ÇDR.7 varsayımları altında SEKK parametre tahmincileri  $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_k$  anakütle parametreleri  $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ 'nın **Doğrusal En İyi Sapmasız Tahmin Edicileridir** (DESTE ya da BLUE—**B**est **L**inear **U**nbiased **E**stimator).

- Gauss–Markov Teoremi regresyon modelinin SEKK yöntemiyle tahmini için teorik dayanak sağlar.
- Eğer bu varsayımlar sağlanıyorsa SEKK yöntemi dışında başka bir tahmin yöntemine başvurmamıza gerek yoktur. SEKK yöntemi bize **doğrusal, sapmasız ve varyanslı en düşük** (en iyi) tahmincileri vermektedir.
- ÇDR.1 - ÇDR.7 varsayımlarından biri bile ihlal edilirse Gauss–Markov Teoremi geçersiz olur.
- ÇDR.5 sağlanmazsa SEKK parametre tahmincilerinin sapmasızlık özelliği, ÇDR.6 ve ÇDR.7 sağlanmazsa etkinlik özelliği kaybolur.

# Gauss–Markov Teoremi



Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

*Kaynak: Wikipedia*



Andrey Markov (1856-1922)

*Kaynak: Wikipedia*

# Orijinden Geçen Regresyon

## Orijinden Geçen Regresyon

Bazen Ekonomi Teorisi, kesim parametresi  $\beta_0$ 'ın sıfır olması gerektiğini söyler. Böyle bir durumda  $\beta_0$  modelden çıkartılarak tahmin yapılır.

$$y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + u \quad (\text{Model})$$

$$\tilde{y} = \tilde{\beta}_1 x_1 + \tilde{\beta}_2 x_2 + \cdots + \tilde{\beta}_k x_k \quad (\text{ÖRF})$$

- Orijinden geçen regresyonda

- Parametre tahmincileri  $\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_k$ 'ların, kesim parametresi  $\beta_0$ 'ın bulunduğu regresyondaki  $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_k$ 'lerden farklı değerler alacağı unutulmamalıdır.
- $x$ 'ler 0 olduğunda tahmin edilen  $y$  değeri ( $\hat{y}$ ) 0'dır.
- Cebirsel özellikler geçersizdir.
- $R^2$  negatif çıkabilir, yani  $y$ 'nin örneklem ortalaması ( $\bar{y}$ )  $y$ 'deki değişkenliği açıklamada modeldeki bağımsız değişken  $x$ 'lerden daha başarılıdır.
- $R^2$  negatif ise,  $R^2 = 0$  kabul edilir ya da regresyona kesim parametresi eklenerek tahmin yapılır.

# Orijinden Geçen Regresyon

## Orijinden Geçen Regresyon

Bazen Ekonomi Teorisi, kesim parametresi  $\beta_0$ 'ın sıfır olması gerektiğini söyler. Böyle bir durumda  $\beta_0$  modelden çıkartılarak tahmin yapılır.

$$y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + u \quad (\text{Model})$$

$$\tilde{y} = \tilde{\beta}_1 x_1 + \tilde{\beta}_2 x_2 + \cdots + \tilde{\beta}_k x_k \quad (\text{ÖRF})$$

- Gerçekte (ARF'de) kesim parametresi  $\beta_0$  sıfırdan farklı olmasına ( $\beta_0 \neq 0$ ) rağmen orijinden geçen regresyon tahmin edilirse eğim parametresi tahmincileri sapmalı olur.  $\rightarrow E(\tilde{\beta}_j) \neq \beta_j$
- Gerçekte (ARF'de) kesim parametresi  $\beta_0$  sıfır olmasına ( $\beta_0 = 0$ ) rağmen sıfır değilmiş gibi regresyona dahil edilirse eğim parametresi tahmincilerinin varyansları yükseltir.  $\rightarrow Var(\hat{\beta}_j) \uparrow$
- Gözlem sayısı  $n$  arttırılarak parametre tahmincilerinin varyansları düşürülebilirken sapmalı parametre tahminci probleminden kurtulamayız. Bu nedenle uygulamada genelde kesim parametresi  $\beta_0$  direkt olarak modele eklenir.

# Modele Gereksiz Bağımsız Değişken Eklenmesi

- Modele gerekli olmadığı halde bir bağımsız değişken  $x$  eklersek SEKK parametre tahmincileri  $\hat{\beta}$ 'lar ve onların varyansları bundan nasıl etkilenir?
- Modele gereksiz bir bağımsız değişken  $x$ 'in eklenmesi ARF'de bu değişkenin yalın/kısmi etkisinin sıfır olduğu anlamına gelmektedir.
- Yani, model **fazla kurulmuştur** (overspecification).
- Örneğin, aşağıdaki doğru modelin bilinmediğini ve bağımsız değişken  $x_3$ 'ü modele gereksiz yere ekleyerek yanlış modelin kullanıldığını düşünelim.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \quad (\text{Doğru Model})$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + u \quad (\text{Yanlış Model})$$

- Yanlış modelin ÇDR.1 - ÇDR.7 varsayımlarını sağladığını varsayalım.
- $x_3$ 'ün yalın/kısmi etkisi sıfır olmasına ( $\beta_3 = 0$ ) rağmen modele koyulduğunda, yani yanlış model kullanıldığında ARF aşağıdaki gibi olur.

$$E(y|x_1, x_2, x_3) = E(y|x_1, x_2) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 \quad (\text{ARF})$$

- Bu ARF'nin bilinmediğini ve araştırmacının modele  $x_3$ 'ü katsayısı sıfır ( $\beta_3 = 0$ ) olduğu halde eklediğini varsayıyoruz.



# Modele Gereksiz Bağımsız Değişken Eklenmesi

- Bu durumda ÖRF aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \hat{\beta}_3 x_3 \quad (\text{ÖRF})$$

- SEKK parametre tahmincileri hala sapmasızdır. Bu sonuç Slayt 77'de verilen teorem ve ek bilgi yardımıyla kolayca çıkarılabilir.

$$E(\hat{\beta}_0) = \beta_0, \quad E(\hat{\beta}_1) = \beta_1, \quad E(\hat{\beta}_2) = \beta_2, \quad E(\hat{\beta}_3) = 0$$

- Gereksiz eklenen bağımsız değişken  $x_3$ 'ün katsayısının doğru değeri sıfırdır.  $\hat{\beta}_3$ 'ün kendisi hiçbir zaman sıfır olmayacak olsa da,  $x_3$  değişkenin bir açıklayıcılığı olmadığından tahmincisinin beklenen değeri de 0 olacaktır.
- Modele gereksiz bir bağımsız değişkenin eklenmesi durumunda SEKK parametre tahmincileri hala sapmasız olsa da parametre tahmincilerinin varyansları yükselir.
  - Modele yeni bağımsız değişken  $x_j$  eklenince  $R_j^2$  artacağından  $Var(\hat{\beta}_j)$  de artar.

$$Var(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma^2}{SST_j(1 - R_j^2)}, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$$

# Gerekli Bağımsız Değişkenin Model Dışında Bırakılması

- Modelede yer alması gerektiği halde bir bağımsız değişken  $x$ 'i modelden dışlarsak SEKK parametre tahmincileri  $\hat{\beta}$ 'lar ve onların varyansları bundan nasıl etkilenir?
- Gerekli bir bağımsız değişken  $x$ 'in modelden dışlanması ARF'de bu değişkenin yalın/kısmi etkisinin sıfır olmadığı anlamına gelmektedir.
- Yani, model **eksik kurulmuştur** (underspecification).
- Örneğin, ÇDR.1 - ÇDR.7 varsayımlarının sağlandığı doğru modelin  $x_1$  ve  $x_2$  bağımsız değişkenlerini içerdiğini varsayalım.
- Fakat, araştırmacının bağımsız değişken  $x_2$ 'yi gözleyemediği için model dışında bırakıp yanlış modeli tahmin ettiğini düşünelim.
- Eğer  $x_2$ 'yi modele doğrudan sokmazsak (yanlış modeli kullanırsak), onu yanlış modeledeki hata teriminin ( $v$ ) içine almış oluruz.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \quad (\text{Doğru Model})$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + v \quad (\text{Yanlış Model})$$

$$v = \beta_2 x_2 + u \quad (\text{Yanlış Model Hata Terimi})$$

# Gerekli Bağımsız Değişkenin Model Dışında Bırakılması

- Doğru ve yanlış modelden elde edeceğimiz tahminler farklı olacağından, modeller ve onların ÖRF'leri aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \longrightarrow \hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 \quad (\text{Doğru Model ve ÖRF})$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + v \longrightarrow \tilde{y} = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x_1 \quad (\text{Yanlış Model ve ÖRF})$$

$$v = \beta_2 x_2 + u \quad (\text{Yanlış Model Hata Terimi})$$

- Yanlış model tahmin edildiğinde  $x_1$ 'in eğim paramteresi  $\beta_1$ 'in parametre tahminicisi  $\tilde{\beta}_1$  hala sapmasız mıdır?
- Yanlış modelde  $\beta_1$ 'in parametre tahminicisi  $\tilde{\beta}_1$ :

$$\tilde{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1) y_i}{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2}$$

## Gerekli Bağımsız Değişkenin Model Dışında Bırakılması

- $\tilde{\beta}_1$ 'nin sapmalı bir tahminci olup olmadığını ve eğer sapmalı ise sapmanın boyutunu belirlemek için  $\tilde{\beta}_1$  formülünde  $y$  yerine doğru modeli yazıp, yeniden düzenleyelim.

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}_1 &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1) y_i}{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1) (\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + u_i)}{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2} \\ &= \frac{\overbrace{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)}^{=0} \beta_0}{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2} + \frac{\overbrace{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1) x_{i1}}^{= \sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2} \beta_1}{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2} + \frac{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1) x_{i2} \beta_2}{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2} + \frac{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1) u_i}{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2}\end{aligned}$$

## Gerekli Bağımsız Değişkenin Model Dışında Bırakılması

- $\tilde{\beta}_1$ 'nin yeniden düzenlenen formülü aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\tilde{\beta}_1 = \beta_1 + \frac{\beta_2 \sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1) x_{i2}}{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2} + \frac{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1) u_i}{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2}$$

- $\tilde{\beta}_1$ 'nin yeniden düzenlenen formülünün tüm  $x$ 'lere ( $\mathbf{x}$ ) göre koşullu beklenen değerini alalım.

$$\begin{aligned} E(\tilde{\beta}_1 | \mathbf{x}) &= E(\beta_1 | \mathbf{x}) + E \left( \frac{\beta_2 \sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1) x_{i2}}{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2} \middle| \mathbf{x} \right) + E \left( \frac{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1) u_i}{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2} \middle| \mathbf{x} \right) \\ &= 0 \text{ (ÇDR.5)} \\ &= \beta_1 + \beta_2 \frac{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1) x_{i2}}{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2} + \frac{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1) \overbrace{E(u_i | \mathbf{x})}}{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2} \end{aligned}$$

# Gerekli Bağımsız Değişkenin Model Dışında Bırakılması

- $\tilde{\beta}_1$ 'nin tüm  $x$ 'lere ( $\mathbf{x}$ ) göre koşullu beklenen değeri aşağıdaki gibi olacaktır.

$$E(\tilde{\beta}_1|\mathbf{x}) = \beta_1 + \beta_2 \frac{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)x_{i2}}{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2}$$

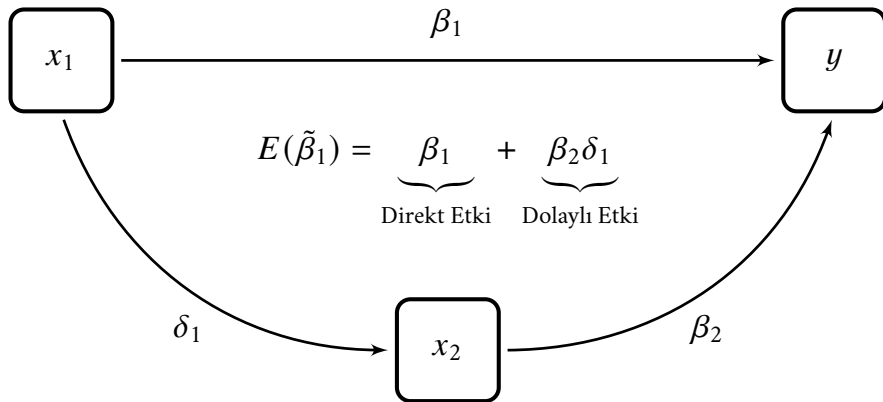
- $\beta_2$ 'nin yanında yer alan terim  $x_2$ 'nin  $x_1$  üzerine regresyonundan (yardımcı model) elde edilen eğim parametresi tahmincisi  $\tilde{\delta}_1$ 'dir.

$$x_2 = \tilde{\delta}_0 + \tilde{\delta}_1 x_1 + \tilde{r}_2 \quad \longrightarrow \quad \tilde{\delta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)x_{i2}}{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2} \quad (\text{Yardımcı Model Tahmini})$$

- SEKK parametre tahmincilerinin sapmasızlığı tüm  $x$ 'lere ( $\mathbf{x}$ ) göre koşullu hesaplanmasına rağmen genelde koşulsuz olarak gösterilir. Böylece,  $\tilde{\beta}_1$ 'nin beklenen değeri aşağıdaki gibi olur.

$$E(\tilde{\beta}_1|\mathbf{x}) = \beta_1 + \beta_2 \tilde{\delta}_1 \quad \longrightarrow \quad E(\tilde{\beta}_1) = \beta_1 + \beta_2 \tilde{\delta}_1$$

# Gerekli Bağımsız Değişkenin Model Dışında Bırakılması



Şekil 3:  $x_1$ 'in  $y$  Üzerindeki Direkt ve Dolaylı Etkisi

## Dışlanmış Değişken Sapması

- $E(\tilde{\beta}_1)$  ve  $\beta_1$  arasındaki farka **dışlanmış değişken sapması** (omitted variable bias) adı verilir.

$$E(\tilde{\beta}_1) = \beta_1 + \beta_2 \tilde{\delta}_1 \quad \longrightarrow \quad \text{sapma} = E(\tilde{\beta}_1) - \beta_1 = \beta_2 \tilde{\delta}_1$$

- Şu iki durumda sapma 0, yani  $\tilde{\beta}_1$  sapmasız, olur.
  - $x_2$ 'nin  $y$  üzerindeki yalın/kısmi etkisi sıfırdır, yani  $\beta_2 = 0$ 'dır. Doğru modelde bağımsız değişken  $x_2$  bulunmamalıdır.
  - $x_1$  ve  $x_2$  doğrusal olarak ilişkisizdir, yani  $\tilde{\delta}_1 = 0$ .
- Sapmanın işareti hem  $\beta_2$ 'ye hem de dışlanan bağımsız değişken  $x_2$  ile modele dahil edilen değişken  $x_1$  arasındaki korelasyona, yani  $\text{Corr}(x_1, x_2) = \tilde{\delta}_1$ , bağlıdır.
- Dışlanan bağımsız değişken  $x_2$  gözlenemiyorsa bu korelasyon hesaplanamaz.
- Aşağıdaki tablo sapmanın yönüne ilişkin dört olası durumu özetlemektedir.

$\beta_2$	$\tilde{\delta}_1$	
	$\tilde{\delta}_1 > 0$	$\tilde{\delta}_1 < 0$
$\beta_2 > 0$	Pozitif Sapma	Negatif Sapma
$\beta_2 < 0$	Negatif Sapma	Pozitif Sapma

Notlar:  $\text{Corr}(x_1, x_2) = \tilde{\delta}_1$



## Dışlanmış Değişken Sapması

$$sapma = E(\tilde{\beta}_1) - \beta_1 = \beta_2 \tilde{\delta}_1$$

- Sapmanın işaretinin yanı sıra boyutu da önemlidir. Sapmanın boyutu hem  $\tilde{\delta}_1$ 'ya hem de  $\beta_2$ 'ye bağlıdır.
- $\beta_1$ 'in büyüklüğüne kıyasla küçük bir sapma uygulamada sorun yaratmayabilir. Örneğin, anakütle eğim parametresi  $\beta_1$ 'in değeri 8.6 iken tahmin sonucunda elde edilen sapma 0.1 ise.
- Uygulamada,  $\beta_2$  bilinmeyen anakütle parametresi olduğundan sapmanın büyüklüğünü hesaplamak çoğunlukla mümkün olmaz.
- Buna rağmen bazı durumlarda sapmanın yönü/işareti hakkında bir fikir elde edebiliriz.
- Örneğin, bağımsız değişken  $x_2$ 'yi gözleyemediğimize rağmen
  - $x_2$ 'nin  $y$  üzerindeki yalın/kısmi etkisinin yönünü, yani  $\beta_2$ 'nin işaretini
  - $x_1$  ve  $x_2$  arasındaki doğrusal ilişkinin yönünü, yani  $\tilde{\delta}_1$ 'nin işaretinibildiğimizi düşünelim.
- Bu durumda sapmanın yönü/işareti hakkında yorumda bulunabiliriz.
  - $E(\tilde{\beta}_1) > \beta_1$  ise  $\tilde{\beta}_1$ 'da **yukarı sapma** vardır.
  - $E(\tilde{\beta}_1) < \beta_1$  ise  $\tilde{\beta}_1$ 'da **aşağı sapma** vardır.

## Dışlanmış Değişken Sapması

- Örneğin, ücreti açıklamak doğru modelin hem eğitim (*educ*) hem de doğuştan gelen yetenek (*ability*) bağımsız değişkenlerini içerdiğini düşünelim.
- Yetenek (*ability*) bağımsız değişkenini gözleyemediğimiz için model dışında bırakıp yanlış modeli tahmin ettiğimizi düşünelim.

$$wage = \beta_0 + \beta_1 educ + \beta_2 ability + u \quad (\text{Doğru Model})$$

$$wage = \beta_0 + \beta_1 educ + v \longrightarrow \widehat{wage} = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 educ \quad (\text{Yanlış Model ve ÖRF})$$

$$v = \beta_2 ability + u \quad (\text{Yanlış Model Hata Terimi})$$

$$ability = \tilde{\delta}_0 + \tilde{\delta}_1 educ + \tilde{r}_{ability} \quad (\text{Yardımcı Model Tahmini})$$

- Yanlış model tahmin edildiğinde, *educ*'e ait eğim parametresi tahmincisi  $\tilde{\beta}_1$ 'deki sapmanın işaretinin pozitif olacağı söylenebilir. Çünkü,
  - Yetenek (*ability*) ücretlerle (*wage*) pozitif ilişkilidir, yani  $\beta_2 > 0$ 'dır.
  - Eğitilmiş (*educ*) insanlar daha yetenekli (*ability*) olma eğilimindedir, yani  $\tilde{\delta}_1 > 0$ 'dır.

$$sapma = E(\tilde{\beta}_1) - \beta_1 = \underbrace{\beta_2}_{+} \underbrace{\tilde{\delta}_1}_{+}$$

- $E(\tilde{\beta}_1) > \beta_1$  olduğundan  $\tilde{\beta}_1$ 'da **yukarı sapma** vardır.

# Dışlanmış Değişken Sapması

$$wage = \beta_0 + \beta_1 educ + \beta_2 ability + u \quad (\text{Doğru Model})$$

$$wage = \beta_0 + \beta_1 educ + v \longrightarrow \widehat{wage} = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 educ \quad (\text{Yanlış Model ve ÖRF})$$

$$v = \beta_2 ability + u \quad (\text{Yanlış Model Hata Terimi})$$

$$ability = \tilde{\delta}_0 + \tilde{\delta}_1 educ + \tilde{r}_{ability} \quad (\text{Yardımcı Model Tahmini})$$

- Yetenek (*ability*) ve eğitim (*educ*) yakından ilişkili,  $\tilde{\delta}_1 \neq 0$ , olduğundan yanlış model kullanıldığında:

- $educ$  ile  $v$  ilişkili olacaktır.  $\longrightarrow Corr(educ, v) \neq 0$
- ÇDR.5 varsayımı ihlal edilecektir.  $\longrightarrow E(v|educ) \neq 0$
- $\tilde{\beta}_1$  sapmalı tahmin edilecektir.  $\longrightarrow E(\tilde{\beta}_1) \neq \beta_1$

Sonuç olarak bağımsız değişken *educ* içseldir.

- Yeteneğin dışlanıp yanlış modelin kullanılması durumunda, eğitimin ücret (*wage*) üzerindeki etkisi, yani  $\tilde{\beta}_1$ , abartılı tahmin edilir. Yani, aslında yanlış modeldeki eğitimin etkisinin bir kısmı doğuştan gelen yeteneğe bağlıdır.

# Dışlanmış Değişken Sapması

- Daha fazla bağımsız değişken içeren modellerde gerekli bir değişkenin model dışında bırakılması SEKK parametre tahmincilerinin genellikle sapmalı olmasına neden olur.
- Doğru modelin aşağıdaki gibi olduğunu varsayalım.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + u \quad (\text{Doğru Model})$$

- $x_3$ 'ü dışarıda bırakarak aşağıdaki yanlış modeli tahmin ettiğimizi düşünelim.

$$\tilde{y} = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x_1 + \tilde{\beta}_2 x_2 \quad (\text{Yanlış Model - ÖRF})$$

- $x_3$ 'ün,  $x_1$  ile doğrusal ilişkili fakat  $x_2$  ile doğrusal ilişkisiz olsun. Eğer,
  - $x_1$  ve  $x_2$  doğrusal ilişkili ise, bu durumda  $\tilde{\beta}_1$  ve  $\tilde{\beta}_2$  sapmalı olur.
  - $x_1$  ve  $x_2$  doğrusal ilişkisiz ise, bu durumda  $\tilde{\beta}_1$  sapmalı fakat  $\tilde{\beta}_2$  sapmasız olur.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Corr}(x_3, x_1) \neq 0 \\ \text{Corr}(x_3, x_2) = 0 \\ \text{Corr}(x_1, x_2) \neq 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} E(\tilde{\beta}_1) \neq \beta_1 \\ E(\tilde{\beta}_2) \neq \beta_2 \end{array} \quad \text{vs.} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Corr}(x_3, x_1) \neq 0 \\ \text{Corr}(x_3, x_2) = 0 \\ \text{Corr}(x_1, x_2) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} E(\tilde{\beta}_1) \neq \beta_1 \\ E(\tilde{\beta}_2) = \beta_2 \end{array}$$

# Model Seçimi: Sapmasızlık vs. Küçük Varyans

- Modele bir bağımsız değişkenin eklenip eklenmemesi kararı SEKK parametre tahmincilerinin sapması ve varyansındaki değişim karşılaştırılarak verilmelidir.
- Olası modeller ve onların ÖRF'lerinin aşağıdaki gibi olduğunu varsayalım.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \longrightarrow \hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 \quad (1. \text{ Model ve ÖRF})$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + v \longrightarrow \tilde{y} = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x_1 \quad (2. \text{ Model ve ÖRF})$$

$$v = \beta_2 x_2 + u \quad (2. \text{ Model Hata Terimi})$$

$$x_2 = \tilde{\delta}_0 + \tilde{\delta}_1 x_1 + \tilde{r}_2 \quad (\text{Yardımcı Model Tahmini})$$

- Bağımsız değişkenler genellikle doğrusal olarak ilişkili olduğundan,  $x_1$  ve  $x_2$ 'in de doğrusal ilişkili, yani  $Corr(x_1, x_2) = \tilde{\delta}_1 \neq 0$  olduğunu varsayalım.
- 1. model tahmininden elde edilen  $\hat{\beta}_1$  eğer,
  - $\beta_2 = 0$  ise, bağımsız değişken  $x_2$  gereksiz olarak modele eklenmiştir (bakınız Slayt 88) ve bu nedenle  $\hat{\beta}_1$  sapmasızdır.  $\longrightarrow E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$
  - $\beta_2 \neq 0$  ise, bağımsız değişken  $x_2$  doğru olarak modele eklenmiştir ve bu nedenle  $\hat{\beta}_1$  sapmasızdır.  $\longrightarrow E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$

## Model Seçimi: Sapmasızlık vs. Küçük Varyans

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \longrightarrow \hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 \quad (1. \text{ Model ve ÖRF})$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + v \longrightarrow \tilde{y} = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x_1 \quad (2. \text{ Model ve ÖRF})$$

$$v = \beta_2 x_2 + u \quad (2. \text{ Model Hata Terimi})$$

$$x_2 = \tilde{\delta}_0 + \tilde{\delta}_1 x_1 + \tilde{r}_2 \quad (\text{Yardımcı Model Tahmini})$$

- 2. model tahmininden elde edilen  $\tilde{\beta}_1$  eğer,
  - $\beta_2 = 0$  ise, bağımsız değişken  $x_2$  doğru olarak modelden çıkarılmıştır ve bu nedenle  $\tilde{\beta}_1$  sapmasızdır.  $\longrightarrow E(\tilde{\beta}_1) = \beta_1$
  - $\beta_2 \neq 0$  ise, bağımsız değişken  $x_2$  gerekli olduğu halde modelden çıkarılmıştır (bakınız Slayt 90) ve bu nedenle  $\tilde{\beta}_1$  sapmalıdır.  $\longrightarrow E(\tilde{\beta}_1) \neq \beta_1$
- Bu nedenle model seçiminde eğer sapmasızlık tek kriter ise, 1. model tahminindeki  $\hat{\beta}_1$  her durumda sapmasız olduğu için  $\tilde{\beta}_1$ 'e göre tercih edilir.
- Fakat sapmasızlığa göre bir model tercihi, varyans da düşünüldüğünde her zaman doğru değildir.

# Model Seçimi: Sapmasızlık vs. Küçük Varyans

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \longrightarrow \hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 \quad (1. \text{ Model ve ÖRF})$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + v \longrightarrow \tilde{y} = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x_1 \quad (2. \text{ Model ve ÖRF})$$

- 1. modelde 2. modele göre daha fazla bağımsız değişken olduğundan  $Var(\tilde{\beta}_1) < Var(\hat{\beta}_1)$ 'dir (bakınız Slayt 89).
- Eğer  $\beta_2 = 0$  ise,
  - 1. model tahminindeki  $\hat{\beta}_1$  sapmasızdır.  $\longrightarrow E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$
  - 2. model tahminindeki  $\tilde{\beta}_1$  sapmasızdır.  $\longrightarrow E(\tilde{\beta}_1) = \beta_1$
  - $\tilde{\beta}_1$  sapmasız ve  $\hat{\beta}_1$ 'e göre daha küçük varyanslı olduğundan 2. model, yani  $\tilde{\beta}_1$ , tercih edilir.
- Eğer  $\beta_2 \neq 0$  ise,
  - 1. model tahminindeki  $\hat{\beta}_1$  sapmasızdır.  $\longrightarrow E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$
  - 2. model tahminindeki  $\tilde{\beta}_1$  sapmalıdır.  $\longrightarrow E(\tilde{\beta}_1) \neq \beta_1$
  - $\hat{\beta}_1$  sapmasız olduğundan ve gözlem sayısı  $n$  arttırılarak varyansı yeteri kadar küçüleceğinden 1. model, yani  $\hat{\beta}_1$ , tercih edilir.
- Kısacası sapmasızlık olmazsa olmaz şart iken varyans gözlem sayısı  $n$  arttırılarak düşürebilir.

# Kaynaklar

Gujarati, D.N. (2009). *Basic Econometrics*. Tata McGraw-Hill Education.

Stock, J.H. ve M.W. Watson (2015). *Introduction to Econometrics*.

Tastan, H. (2020). *Lecture on Econometrics I. Personal Collection of H. Tastan*. Retrieved from Online.

Wooldridge, J.M. (2016). *Introductory Econometrics: A Modern Approach*. Nelson Education.



# Ek Bilgiler

## ÇDR.5: Sıfır Koşullu Ortalama

$$E(u|\mathbf{x}) = E(u) = 0$$

$$Cov(x_j, u) = 0, \quad Corr(x_j, u) = 0 \quad \text{ve} \quad E(x_j u) = 0, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$$

$$Cov(x_j, u) = E(x_j u) - E(x_j) \underbrace{E(u)}_{=0} = 0$$

$$= E(x_j u) = 0$$

# Ek Bilgiler

## ÇDR.6: Otokorelasyon Olmaması

$$Cov(u_i, u_s | \mathbf{x}) = 0 \quad \text{ve} \quad Cov(u_i, u_s) = 0, \quad i \neq s$$

$$E(u_i u_s | \mathbf{x}) = 0 \quad \text{ve} \quad E(u_i u_s) = 0, \quad i \neq s$$

$$\begin{aligned} Cov(u_i, u_s | \mathbf{x}) &= E(u_i u_s | \mathbf{x}) - \underbrace{E(u_i | \mathbf{x})}_{=0} \underbrace{E(u_s | \mathbf{x})}_{=0} = 0 \\ &= E(u_i u_s | \mathbf{x}) = 0 \end{aligned}$$

# Ek Bilgiler

## ÇDR.7: Sabit Varyans (Homoscedasticity)

$$E(u^2|\mathbf{x}) = \sigma^2 \quad \text{ve} \quad E(u^2) = \sigma^2$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(u|\mathbf{x}) &= E(u^2|\mathbf{x}) - \underbrace{E(u|\mathbf{x})^2}_{=0} = \sigma^2 \\ &= E(u^2|\mathbf{x}) = \sigma^2 \end{aligned}$$

# Ek Bilgiler

## Anakütle Regresyon Fonksiyonu (ARF)

$$E(y|\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k \quad (\text{ARF})$$

$$\text{Var}(y|\mathbf{x}) = \sigma^2$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + u$$

$$E(y|\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + \underbrace{E(u|\mathbf{x})}_{=0}$$

$$E(y|\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k \quad (\text{ARF})$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + u$$

$$\text{Var}(y|\mathbf{x}) = \text{Var}(u|\mathbf{x})$$

$$\text{Var}(y|\mathbf{x}) = \sigma^2$$

# Ek Bilgiler

## Parametre Tahmincileri: 2 Bağımsız Değişken

$\beta_0$  kesim parametresinin tahmini  $\hat{\beta}_0$ :

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{x}_2$$

- $\hat{\beta}_0$ 'nın formülü

- SEKK birinci sıra koşullarından ya da örneklem moment koşullarından ilki (Slayt 30)
- Kalıntı  $\hat{u}$ 'nın denklemi
- İndeksli haldeki model denklemi

kullanılarak çıkarılabilir.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \hat{u}_i &= \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i) = 0 \\&= \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n \hat{\beta}_0 - \sum_{i=1}^n \hat{\beta}_1 x_{i1} - \sum_{i=1}^n \hat{\beta}_2 x_{i2} = 0 \\&= n\bar{y} - n\hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 n\bar{x}_1 - \hat{\beta}_2 n\bar{x}_2 = 0 \\&= \bar{y} - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \bar{x}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{x}_2 = 0\end{aligned}$$

**Sonuç:**  $\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{x}_2$

# Ek Bilgiler

## Parametre Tahmincileri: $k$ Bağımsız Değişken

$\beta_0$  kesim parametresinin tahmini  $\hat{\beta}_0$  (1 tane var):

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{x}_2 - \cdots - \hat{\beta}_k \bar{x}_k$$

- $\hat{\beta}_0$ 'nın formülü

- SEKK birinci sıra koşulları ya da örneklem moment koşullarından ilki (Slayt 30)
- Kalıntı  $\hat{u}$ 'nın denklemi
- İndeksli haldeki model denklemi

kullanılarak çıkarılabilir.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \hat{u}_i &= \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i) = 0 \\&= \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n \hat{\beta}_0 - \sum_{i=1}^n \hat{\beta}_1 x_{i1} - \sum_{i=1}^n \hat{\beta}_2 x_{i2} - \cdots - \sum_{i=1}^n \hat{\beta}_k x_{ik} = 0 \\&= n\bar{y} - n\hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 n\bar{x}_1 - \hat{\beta}_2 n\bar{x}_2 - \cdots - \hat{\beta}_k n\bar{x}_k = 0 \\&= \bar{y} - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \bar{x}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{x}_2 - \cdots - \hat{\beta}_k \bar{x}_k = 0\end{aligned}$$

**Sonuç:**  $\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{x}_2 - \cdots - \hat{\beta}_k \bar{x}_k$

# Ek Bilgiler

## Tahmin Edilen Değerler ve Kalıntıların Cebirsel Özellikleri - 2

$$Cov(x_j, \hat{u}) = E(x_j \hat{u}) - E(x_j) \underbrace{E(\hat{u})}_{=0} = 0 \quad (1. \text{ Cebirsel Özellik})$$

$$= E(x_j \hat{u}) = 0$$

ya da

$$Cov(x_j, \hat{u}) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)(\hat{u}_i - \bar{\hat{u}})}{n - 1} = 0$$

$$Cov(x_j, \hat{u}) = \sum_{i=1}^n x_{ij} \underbrace{(\hat{u}_i - \bar{\hat{u}})}_{=0} = 0 \quad (1. \text{ Cebirsel Özellik})$$

$$= \sum_{i=1}^n x_{ij} \hat{u}_i = 0$$

# Ek Bilgiler

## Tahmin Edilen Değerler ve Kalıntıların Cebirsel Özellikleri - 3

$$\begin{aligned} Cov(\hat{y}, \hat{u}) &= Cov(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \cdots + \hat{\beta}_k x_k, \hat{u}) \\ &= \hat{\beta}_1 \underbrace{Cov(x_1, \hat{u})}_{=0} + \hat{\beta}_2 \underbrace{Cov(x_2, \hat{u})}_{=0} + \cdots + \hat{\beta}_k \underbrace{Cov(x_k, \hat{u})}_{=0} = 0 \quad (2. \text{ Cebirsel Öz.}) \\ &= E(\hat{y}\hat{u}) = 0 \quad (\text{Kovaryans formülü ve 1. Cebirsel Özellik}) \end{aligned}$$

ve

$$Cov(\hat{y}, \hat{u}) = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})(\hat{u}_i - \underbrace{\bar{\hat{u}}}_{=0}) = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})\hat{u}_i = 0 \quad (1. \text{ Cebirsel Özellik})$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^n \hat{y}_i \hat{u}_i - \bar{y} \underbrace{\sum_{i=1}^n \hat{u}_i}_{=0} = 0 \quad (1. \text{ Cebirsel Özellik}) \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^n \hat{y}_i \hat{u}_i = 0$$



# Ek Bilgiler

## SEKK Parametre Tahmincilerinin Varyansı

$\hat{\beta}_j$ 'lerin varyansları:

$$\text{Var}(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma^2}{SST_j(1 - R_j^2)}, \quad SST_j = \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)^2, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$$

- $\hat{\beta}_j$ 'lerin varyans formülünü çıkartmada işimizi kolaylaştırmak için 2 bağımsız değişkenli ÇDR modelini kullanacağız.

## 2 Bağımsız Değişkenli ÇDR Modeli

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + u_i \quad (\text{Model - İndeksli})$$

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} \quad (\text{ÖRF - İndeksli})$$

- 2 bağımsız değişkenli ÇDR modelinde, spesifik olarak  $\hat{\beta}_1$ 'nin varyans formülünü çıkartacağız.
- Daha sonra bulduğumuz bu formülü  $k$  bağımsız değişkenli ÇDR modelindeki  $\hat{\beta}_j$ 'lerin varyans formülünü çıkartmada kullanacağız.

# Ek Bilgiler

## 2 Bağımsız Değişkenli ÇDR Modeli

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + u_i \quad (\text{Model - İndeksli})$$

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} \quad (\text{ÖRF - İndeksli})$$

## 1. Yardımcı Regresyon Tahmini

$$x_{i1} = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 x_{i2} + \hat{r}_{i1} \quad (\text{İndeksli})$$

$$\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} = 0 \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^n x_{i2} \hat{r}_{i1} = 0 \quad (\text{Cebirsel Özellikler})$$

$$\sum_{i=1}^n x_{i1} \hat{r}_{i1} = \sum_{i=1}^n (\hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 x_{i2} + \hat{r}_{i1}) \hat{r}_{i1} = \hat{\alpha}_0 \sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} + \hat{\alpha}_1 \sum_{i=1}^n x_{i2} \hat{r}_{i1} + \sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2$$

$$\sum_{i=1}^n x_{i1} \hat{r}_{i1} = \sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2 \quad (\text{Sonra Kullanılacak})$$

$$\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2 = SSR_1 = SST_1 (1 - R_1^2) \quad (R^2 \text{ Formülünden})$$

# Ek Bilgiler

- $\hat{\beta}_1$ 'nin varyans formülü
  - $\hat{\beta}_1$ 'nin formülü (Slayt 38)
  - 2 bağımsız değişkenli ÇDR model denklemi (Slayt 104),
  - Otokorelasyon olmaması varsayımı, ÇDR.6 (Slayt 16),
  - Sabit varyans varsayımı, ÇDR.7 (Slayt 17),
  - Varyansın bir özelliği  $\rightarrow Var(\sum a_i u_i) = \sum a_i^2 Var(u_i)$ , burada  $a_i$ 'ler sabit sayılardır ve  $u_i$ 'ler ikili olarak ilişkisizdir.
  - $R^2$  formülü

kullanılarak çıkarılabilir.

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} y_i}{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2} = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} (\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + u_i)}{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\overbrace{\beta_0 \sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}}^{=0} + \beta_1 \overbrace{\sum_{i=1}^n x_{i1} \hat{r}_{i1}}^{\sum \hat{r}_{i1}^2} + \beta_2 \overbrace{\sum_{i=1}^n x_{i2} \hat{r}_{i1}}^{=0} + \sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} u_i}{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2} = \beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} u_i}{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2}$$

# Ek Bilgiler

- Alternatif  $\hat{\beta}_1$  formülü şimdi  $\hat{\beta}_j$  için yazılabilir:

$$\hat{\beta}_1 = \beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} u_i}{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2} \longrightarrow \hat{\beta}_j = \beta_j + \frac{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{ij} u_i}{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{ij}^2}$$

- Şimdi, alternatif  $\hat{\beta}_1$  formülünün tüm  $x$ 'lere ( $\mathbf{x}$ ) göre koşullu varyansını alalım.

$$\begin{aligned} Var(\hat{\beta}_1 | \mathbf{x}) &= Var \left( \beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} u_i}{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2} \middle| \mathbf{x} \right) = \frac{1}{\left( \sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2 \right)^2} Var \left( \sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} u_i | \mathbf{x} \right) \\ &= \frac{1}{\left( \sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2 \right)^2} \left( \sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2 \underbrace{Var(u_i | \mathbf{x})}_{= \sigma^2 \text{ (ÇDR.7)}} \right) = \frac{1}{\left( \sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2 \right)^2} \sigma^2 \sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2 = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2} \end{aligned}$$

# Ek Bilgiler

- $\hat{\beta}_1$ 'nin varyans formülü

$$Var(\hat{\beta}_1|\mathbf{x}) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2} = \frac{\sigma^2}{SST_1(1 - R_1^2)}$$

- $\hat{\beta}_1$ 'nin varyans formülü tüm  $x$ 'lere ( $\mathbf{x}$ ) göre koşullu hesaplanmasına rağmen genelde koşulsuz olarak gösterilir:

$$Var(\hat{\beta}_1|\mathbf{x}) = \frac{\sigma^2}{SST_1(1 - R_1^2)} \quad \longrightarrow \quad Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{SST_1(1 - R_1^2)}$$

- $Var(\hat{\beta}_1)$  formülü şimdi  $Var(\hat{\beta}_j)$  için yazılabilir:

$$Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{SST_1(1 - R_1^2)} \quad \longrightarrow \quad Var(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma^2}{SST_j(1 - R_j^2)}$$

# Ek Bilgiler

## SEKK Parametere Tahmincilerinin Sapmasızlığı

$$E(\hat{\beta}_0) = \beta_0$$

$$E(\hat{\beta}_j) = \beta_j, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$$

- $\hat{\beta}_0$  ve  $\hat{\beta}_j$ 'lerin sapmasızlığını kanıtlamada işimizi kolaylaştırmak için 2 bağımsız değişkenli ÇDR modelini kullanacağız.

## 2 Bağımsız Değişkenli ÇDR Modeli

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + u_i \quad (\text{Model - İndeksli})$$

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} \quad (\text{ÖRF - İndeksli})$$

- 2 bağımsız değişkenli ÇDR modelinde, spesifik olarak  $\hat{\beta}_0$  ve  $\hat{\beta}_1$ 'nin sapmasızlığını kanıtlayacağız.
- Böylelikle,  $k$  bağımsız değişkenli ÇDR modelindeki  $\hat{\beta}_0$  ve  $\hat{\beta}_j$ 'lerin sapmasızlığını kanıtlamış olacağız.

# Ek Bilgiler

- $\hat{\beta}_1$ 'nin sapmasızlığı
  - $\hat{\beta}_1$ 'nin Slayt 104'de gösterilen alternatif formülünün tüm  $x$ 'lere ( $\mathbf{x}$ ) göre koşullu beklenen değerini alıp
  - Sıfır koşullu ortalama varsayımı, ÇDR.5 (Slayt 15), kullanılarak gösterilebilir.

$$\hat{\beta}_1 = \beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} u_i}{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2} \quad (\hat{\beta}_1 \text{'nin Alternatif Formülü})$$

$$E(\hat{\beta}_1 | \mathbf{x}) = E \left( \beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} u_i}{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2} \middle| \mathbf{x} \right) = \beta_1 + \frac{\left( \sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} \overbrace{E(u_i | \mathbf{x})}^{=0} \right)}{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2} = \beta_1$$

$$E(\hat{\beta}_1 | \mathbf{x}) = \beta_1$$

# Ek Bilgiler

- $\hat{\beta}_0$ 'nın sapmasızlığı
  - $\hat{\beta}_0$ 'nın Slayt 32'deki formülünün tüm  $x$ 'lere ( $\mathbf{x}$ ) göre koşullu beklenen değerini alıp
  - Model denkleminin toplamaları alınarak elde edilen denklem

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + u_i \quad \longrightarrow \quad \sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i=1}^n (\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + u_i)$$

$$n\bar{y} = n\beta_0 + \beta_1 n\bar{x}_1 + \beta_2 n\bar{x}_2$$

$$\bar{y} = \beta_0 + \beta_1 \bar{x}_1 + \beta_2 \bar{x}_2$$

kullanılarak gösterilebilir.

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{x}_2 \quad (\text{Slayt 32})$$

$$E(\hat{\beta}_0 | \mathbf{x}) = E(\bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{x}_2 | \mathbf{x})$$

$$E(\hat{\beta}_0 | \mathbf{x}) = \bar{y} - \underbrace{E(\hat{\beta}_1 | \mathbf{x})}_{=\beta_1} \bar{x}_1 - \underbrace{E(\hat{\beta}_2 | \mathbf{x})}_{=\beta_2} \bar{x}_2$$

$$E(\hat{\beta}_0 | \mathbf{x}) = \bar{y} - \beta_1 \bar{x}_1 - \beta_2 \bar{x}_2$$

$$E(\hat{\beta}_0 | \mathbf{x}) = \beta_0$$



# Ek Bilgiler

- $\hat{\beta}_0$  ve  $\hat{\beta}_1$ 'nin sapmasızlığı tüm  $x$ 'lere ( $\mathbf{x}$ ) göre koşullu hesaplanmasına rağmen genelde koşulsuz olarak gösterilir:

$$E(\hat{\beta}_0|\mathbf{x}) = \beta_0 \quad \longrightarrow \quad E(\hat{\beta}_0) = \beta_0$$

$$E(\hat{\beta}_1|\mathbf{x}) = \beta_1 \quad \longrightarrow \quad E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$$

- $\hat{\beta}_1$ 'nin sapmasızlığı şimdi  $\hat{\beta}_j$  için yazılabilir:

$$E(\hat{\beta}_1) = \beta_1 \quad \longrightarrow \quad E(\hat{\beta}_j) = \beta_j, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$$

## SEKK Parametere Tahmincilerinin Sapmasızlığı

$$E(\hat{\beta}_0) = \beta_0$$

$$E(\hat{\beta}_j) = \beta_j, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$$

# Ek Bilgiler

## Teorem: SEKK Parametere Tahmincilerinin Etkinliği

ÇDR.6 - ÇDR.7 varsayımları altında SEKK parametre tahmincileri etkindir.

$$\text{Var}(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma^2}{SST_j(1 - R_j^2)}, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$$

- $\hat{\beta}_0$  ve  $\hat{\beta}_j$ 'lerin etkinliğini kanıtlamada işimizi kolaylaştırmak için 2 bağımsız değişkenli ÇDR modelini kullanacağız.

## 2 Bağımsız Değişkenli ÇDR Modeli

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + u_i \quad (\text{Model - İndeksli})$$

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} \quad (\text{ÖRF - İndeksli})$$

- 2 bağımsız değişkenli ÇDR modelinde, spesifik olarak  $\hat{\beta}_1$ 'nin etkinliğini kanıtlayacağız.
- Böylelikle,  $k$  bağımsız değişkenli ÇDR modelindeki  $\hat{\beta}_j$ 'lerin etkinliğini kanıtlamış olacağız.

# Ek Bilgiler

- $\hat{\beta}_1$ 'nin etkinliğini kanıtlayabilmek için  $\beta_1$ 'in herhangi bir doğrusal sapmasız tahmincisi olan  $\tilde{\beta}_1$ 'nin  $\hat{\beta}_1$ 'e göre daha büyük varyanslı olduğunun gösterilmesi gerekir.  $\rightarrow Var(\tilde{\beta}_1) \geq Var(\hat{\beta}_1)$
- Bu nedenle  $\hat{\beta}_1$  ve  $\tilde{\beta}_1$ 'nin varyanslarının hesaplanarak karşılaştırılması gereklidir.
- $\hat{\beta}_1$ 'nin tüm  $x$ 'lere ( $\mathbf{x}$ ) göre koşullu varyansı (bakınız Slayt 104)

$$Var(\hat{\beta}_1|\mathbf{x}) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2} = \frac{\sigma^2}{SST_1(1 - R_1^2)}$$

- $\tilde{\beta}_1$ 'nin tüm  $x$ 'lere ( $\mathbf{x}$ ) göre koşullu varyansı
  - $\hat{\beta}_1$ 'nin Slayt 104'de gösterilen alternatif formülü önce  $\tilde{\beta}_1$  için yazılıp tüm  $x$ 'lere ( $\mathbf{x}$ ) göre koşullu varyansını alındıktan sonra
  - Varyansın bir özelliği  $\rightarrow Var(\sum a_i u_i) = \sum a_i^2 Var(u_i)$ , burada  $a_i$ 'ler sabit sayılardır ve  $u_i$ 'ler ikili olarak ilişkisizdir.

kullanılarak hesaplanabilir.

## Ek Bilgiler

$$\hat{\beta}_1 = \beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} u_i}{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2} \longrightarrow \tilde{\beta}_1 = \beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} u_i}{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2} \quad (\hat{\beta}_1 \text{ ve } \tilde{\beta}_1 \text{'nin Alternatif Formülü})$$

$$\tilde{\beta}_1 = \beta_1 + \sum_{i=1}^n w_{i1} u_i, \quad \text{burada} \quad w_{i1} = \frac{\hat{r}_{i1}}{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2} \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^n w_{i1} \hat{r}_{i1} = 1$$

$$\begin{aligned} Var(\tilde{\beta}_1 | \mathbf{x}) &= Var\left(\beta_1 + \sum_{i=1}^n w_{i1} u_i | \mathbf{x}\right) = Var\left(\sum_{i=1}^n w_{i1} u_i | \mathbf{x}\right) \\ &= \sum_{i=1}^n w_{i1}^2 \underbrace{Var(u_i | \mathbf{x})}_{= \sigma^2 \text{ (ÇDR.7)}} \end{aligned}$$

$$Var(\tilde{\beta}_1 | \mathbf{x}) = \sigma^2 \sum_{i=1}^n w_{i1}^2 \quad (\tilde{\beta}_1 \text{'nin Varyansı})$$

## Ek Bilgiler

- Şimdi, ÇDR.1 - ÇDR.7 varsayımları altında  $Var(\tilde{\beta}_1|\mathbf{x})$  ve  $Var(\hat{\beta}_1|\mathbf{x})$  arasındaki farkı inceleyelim.

$$\begin{aligned} Var(\tilde{\beta}_1|\mathbf{x}) - Var(\hat{\beta}_1|\mathbf{x}) &= \sigma^2 \sum_{i=1}^n w_{i1}^2 - \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2} = \sigma^2 \left( \sum_{i=1}^n w_{i1}^2 - \frac{1}{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2} \right) \\ &= \sigma^2 \left( \sum_{i=1}^n w_{i1}^2 - \frac{\left( \sum_{i=1}^n w_{i1} \hat{r}_{i1} \right)^2}{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2} \right) \quad (\sum w_{i1} \hat{r}_{i1} = 1) \\ &= \sigma^2 \sum_{i=1}^n (w_{i1} - \hat{\gamma}_1 \hat{r}_{i1})^2, \quad \text{burada} \quad \hat{\gamma}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n w_{i1} \hat{r}_{i1}}{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2} \end{aligned}$$

## Ek Bilgiler

$$\text{Var}(\tilde{\beta}_1|\mathbf{x}) - \text{Var}(\hat{\beta}_1|\mathbf{x}) = \sigma^2 \sum_{i=1}^n (w_{i1} - \hat{\gamma}_1 \hat{r}_{i1})^2, \quad \text{burada} \quad \hat{\gamma}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n w_{i1} \hat{r}_{i1}}{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}^2}$$

- $\sigma^2$  her zaman pozitif olan bir değerdir.
- $\sum_{i=1}^n (w_{i1} - \hat{\gamma}_1 \hat{r}_{i1})^2$  değeri,  $w_{i1}$ 'in  $\hat{r}_{i1}$  üzerine uygulanan regresyondan elde edilen kalıntı kareleri toplamıdır ve her zaman pozitif olan bir değerdir.
  - $\hat{\gamma}_1$  ise aynı regresyondan elde edilen eğim parametresi tahmincisidir.
- Bu nedenle  $\text{Var}(\tilde{\beta}_1) \geq \text{Var}(\hat{\beta}_1)$ 'dır.
- $\hat{\beta}_1$  doğrusal sapmasız tahminciler içinde en küçük varyansa sahiptir, yani etkindir.
- $\hat{\beta}_1$ 'nin etkinliği şimdi  $\hat{\beta}_j$  için yazılabilir:

### Teorem: SEKK Parametere Tahmincilerinin Etkinliği

ÇDR.6 - ÇDR.7 varsayımları altında SEKK parametre tahmincileri etkindir.

$$\text{Var}(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma^2}{SST_j(1 - R_j^2)}, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$$