UNB - Universidade de Brasília
MAT - Departamento de Matemática
Disciplina: Cálculo Numérico
Professor: Yuri Durmaresq Sobral

Interpolação Polinomial

Aluno	*Matrícula*
Diógenes Oliveira	10/0009972
Felipe Bressan	11/0116593
Rafael Lima	10/0131093

1 Parte 1

Table 1: Dados - tabela 1

i	x_i	y_i
1	0.1	8.3827801
2	0.2	8.9531612
3	0.3	1.2518859
4	0.4	7.7934885
5	0.5	1.7538714
6	0.6	1.6550660
7	0.7	5.3359199
8	0.8	0.42043209
9	0.9	2.8155446
10	1.0	0.11795521
11	1.1	5.7835269
12	1.2	4.6180773
13	1.3	2.5036669
14	1.4	2.6098585
15	1.5	3.3071423
16	1.6	3.3925891
17	1.7	4.1093898

Questão 1: A partir dos dados da tabela **??** , foram calculados as aproximações polinomiais nos graus 1, 3, 5 e 10. Obteve-se as curvas ilustradas no gráfico **??**

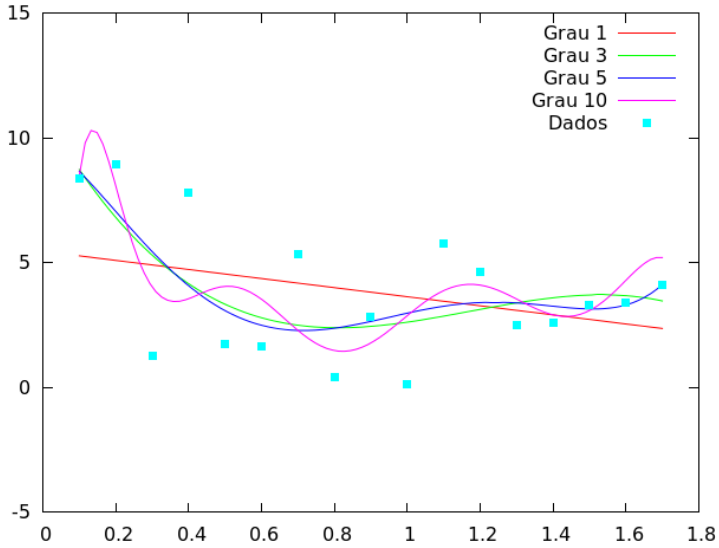

Figure 1: Gráfico das curvas de ajuste polinômial

As quais são definidas pelas expressões registradas na tabela **??**

Table 2: Polinômios gerados

i	$f_i(x)$
1	$-1.82 \cdot x^1 + 5.45$
3	$-7.00 \cdot x^3 + 24.61 \cdot x^2 - 26.10 \cdot x^1 + 11.10$
5	$+17.15 \cdot x^5 - 72.63 \cdot x^4 + 102.12 \cdot x^3 - 44.82 \cdot x^2 - 8.73 \cdot x^1 + 9.88$
10	$-510.75 \cdot x^{10} + 5574.13 \cdot x^9 - 26416.33 \cdot x^8 + 70953.66 \cdot x^7 - 118397.47 \cdot x^6 + 126703.19 \cdot x^5 - 86777.05 \cdot x^4 + 36862.61 \cdot x^3 - 9055.24 \cdot x^2 + 1107.13 \cdot x^1 - 41.01$

Questão 2: Procendendo de maneira similar à primeira questão, buscou-se um polinômio de grau 16 que melhor aproxima-se a função. Tal polinômio, tendo grau igual ao número de pontos usado a menos de um, é denominado *Polinômio Interpolador* pela propriedade de passar exatamente por todos os pontos dos dados. Encontrando-se representado na figura **??**

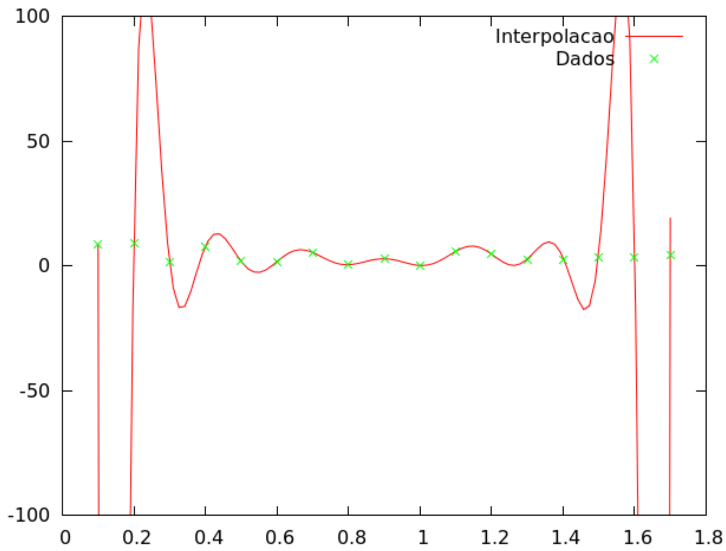

Figure 2: Gráfico do polinômio interpolador

Em que o polinômio interpolador é definido pela expressão:
$P(x) = +44923123.03 \cdot x^{16} - 647191901.27 \cdot x^{15} + 4279362750.70 \cdot x^{14} - 17215003096.08 \cdot x^{13} + 47084000146.94 \cdot x^{12} - 92677107329.64 \cdot x^{11} + 135535435033.46 \cdot x^{10} - 149890502590.02 \cdot x^{9} + 126361098905.36 \cdot x^{8} - 81231850609.07 \cdot x^{7} + 39551053960.00 \cdot x^{6} - 14372130048.45 \cdot x^{5} + 3801935724.32 \cdot x^{4} - 703384607.42 \cdot x^{3} + 85140891.36 \cdot x^{2} - 5959234.05 \cdot x^{1} + 178880.95$

Nota-se que tal função, não representa uma boa aproximação para a função pois seus valores tem uma variação muito grande entre os pontos definidos pelos dados iniciais. Fato observado no gráfico pela grande diferença entre a amplitude dos pontos de máximo mínimo da função e a distribuição dos valores dos dados. Em que enquanto os dados variam entre valores contidos no intervalo de 0 a 10, o polinômio interpolador claramente ultrapassa o intervalo de -100 a 100.

Questão 3: Com base no método de diferenças finitas podemos aproximar as derivadas da função tomando por base a variação dos valores em x e y. Tomando $h = \Delta x$, temos que a primeira e a segunda derivada podem ser aproximadas por

$$\frac{d}{dx_i} y_i \cong \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2 \cdot h} \tag{1}$$

$$\frac{d^2}{dx_i{}^2} y_i \cong \frac{x_{i+1} - 2 \cdot x_i + x_{i-1}}{h^2} \tag{2}$$

Tais aproximações para derivada assim calculadas são denominadas derivadas centrais, no entanto para os ponto de fronteira, isto é para $i = 1$ e $i = 17$ não temos todos os termos da expressão. Para tais casos, a melhor aproximação da derivada varia conforme as características do problema. Neste trabalho, adotaremos a aproximação pelas derivas adiantas e atrasadas, dadas por:

$$\frac{dy_1}{dx} \cong \frac{-3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 - x_3}{2 \cdot h} \tag{3a}$$

$$\frac{dy_{17}}{dx} \cong \frac{-3 \cdot x_{17} + 4 \cdot x_{16} - x_{15}}{2 \cdot h} \tag{3b}$$

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} \cong \frac{2 \cdot x_1 - 5 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 - x_4}{h^2} \tag{4a}$$

$$\frac{d^2y_{17}}{dx^2} \cong \frac{2 \cdot x_{17} - 5 \cdot x_{16} + 4 \cdot x_{15} - x_{14}}{h^2} \tag{4b}$$

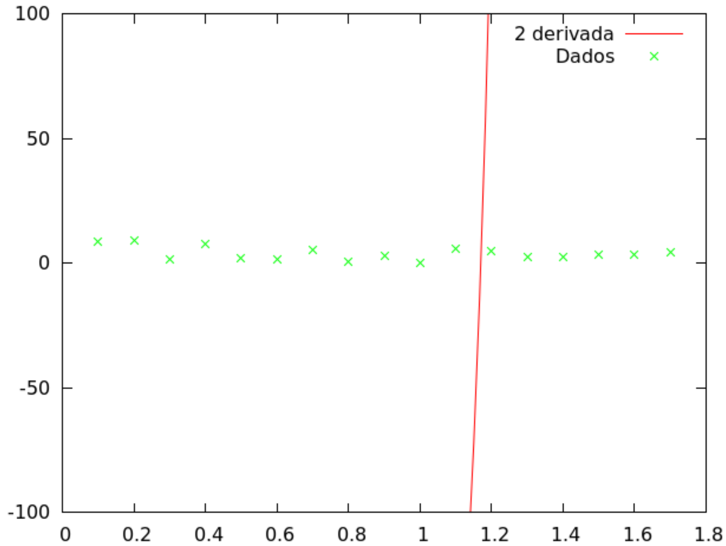

Figure 3: Gráfico da segunda derivada

Questão 4: Calculando a integral a partir dos dados obteve-se os seguintes valores para os métodos do *Trapézio* e $\frac{1}{3}$*Simpson*:

Table 3: Comparativo do valor da integral

Trapézio	$\frac{1}{3}$*Simpson*
5.855827075	5.96857388333

2 Parte 2

Questão 5: Supondo que cada par de pontos (t_i, y_i) e (t_{i+1}, y_{i+1}) do conjunto esteja relacionado com uma curva paramétrica $(T_i(s), Y_i(s))$ com $s \in [0,1]$. Sendo as funções $T_i(s)$ e $Y_i(s)$ dadas por:

$$T_i(s) = \alpha_i s^3 + \beta_i s^2 + \lambda_i s + \delta_i \tag{5}$$

$$Y_i(s) = a_i s^3 + b_i s^2 + c_i s + d_i \tag{6}$$

$$\begin{array}{l} Y_i(s)\big|_{s=0} = y_i \\ Y_i(s)\big|_{s=1} = y_{i+1} \\ Y_i'(s)\big|_{s=0} = D_i \\ Y_i'(s)\big|_{s=1} = D_{i+1} \end{array} \tag{7}$$

A partir do qual temos:

$$\begin{array}{l} Y_i(s)|_{s=0} = y_i = a_i(0)^3 + b_i(0)^2 + c_i(0) + d_i \\ Y_i(s)|_{s=1} = y_{i+1} = a_i \cdot (1)^3 + b_i \cdot (1)^2 + c_i \cdot (1) + d_i \\ Y_i'(s)|_{s=0} = D_i = 3 \cdot a_i \cdot (0)^2 + 2 \cdot b_i \cdot (0) + c_i \\ Y_i'(s)|_{s=1} = D_{i+1} = 3 \cdot a_i \cdot (1)^2 + 2 \cdot b_i \cdot (1) + c_i \end{array} \tag{8}$$

Que pode ser traduzido no sistema:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ ci \\ d_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_i \\ y_{i+1} \\ D_i \\ D_{i+1} \end{bmatrix} \tag{9}$$

Em que as a variáveis a_i , b_i , c_i e d_i estão interamente determinadas e tem como solução, pelo sistema:

$$\begin{array}{l} a_i = 2 \cdot y_i - 2 \cdot y_{i+1} + D_i + D_{i+1} \\ b_i = -3 \cdot y_i + 3 \cdot y_{i+1} - 2 \cdot D_i - D_{i+1} \\ c_i = D_i \\ d_i = y_i \end{array} \tag{10}$$

Questão 6: Impondo a continuidade da segunda derivada de $T_i(s)$ e $Y_i(s)$, temos que $Y_i''(s)|_{s=1} = Y_{i+1}''(s)|_{s=0}$ logo:

$$6 \cdot a_i \cdot (1) + 2 \cdot b_i = 6 \cdot a_{i+1} \cdot (0) + 2 \cdot b_{i+1}$$

A partir do resultado na expressão **??** temos:

$$3\cdot(2\cdot y_i - 2\cdot y_{i+1} + D_i + D_{i+1}) + (-3\cdot y_i + 3\cdot y_{i+1} - 2\cdot D_i - D_{i+1}) = (-3\cdot y_{i+1} + 3\cdot y_{i+2} - 2\cdot D_i - D_{i+2})$$

$$y_i(6-3) + y_{i+1}(-6+3+3) + y_{1+2}(-3) + D_i(3-2) + D_{i+1}(3-1+2) + D_{i+2} = 0$$

$$D_i + 4 \cdot D_{i+1} + D_{i+2} = -y_i + 3 \cdot y_{i+2} \tag{11a}$$

$$\begin{aligned} Y_1''(0) = 0 = 6 \cdot a_0 \cdot (0) + 2 \cdot b_0 \\ Y_n''(1) = 0 = 6 \cdot a_n \cdot (1) + 2 \cdot b_n \end{aligned} \tag{11b}$$

Logo para $Y_1''(0)$ temos:

$$0 = -3 \cdot y_1 + 3 \cdot y_2 - 2 \cdot D_1 - D_2$$

$$2 \cdot D_1 + D_2 = -3 \cdot y_1 + 3 \cdot y_2$$

E para $Y_n''(1)$:

$$0 = 3 \cdot a_n + b_n$$

$$6 \cdot y_n - 6 \cdot y_{n+1} + 3 \cdot D_n + 3 \cdot D_{n+1} - 3 \cdot y_n + 3 \cdot y_{n+1} - 2 \cdot D_n - D_{n+1} = 0$$

$$3 \cdot y_n - 3 \cdot y_{n+1} + D_n + 2 \cdot D_{n+1}$$