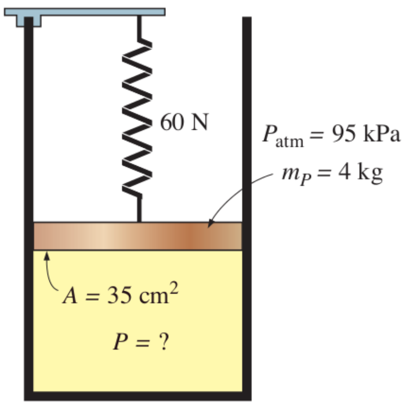
# Transporte de Calor e Massa
# Lista 2

Rafael Lima

November 24, 2016

**Questão 1:**




A pressão total dentro do cilindro $P$ será dada pela soma da pressão atmosférica $P_{atm}$, mais a pressão exercida pela mola $P_m$ e da exercida pelo peso do pistão $P_p$. Dado que pressão exercída pela mola é $P_m = \frac{F_m}{A} = 17.1429\ kPa$ , a pressão exercida pelo peso do pistão é $P_p = \frac{gm_p}{A} = 11.2114\ kPa$ e a presão atmosférica é $P_{atm} = 95.0\ kPa$, temos $P = P_{atm} + P_m + P_p = 95000.0 + 11211.4286 + 17142.8571$ e portanto: $P = 123354.2857 = 123.3543\ kPa$

**Questão 2:**

**(a)**

Com base na figura **??**, percebe-se que a pressão exercída pelo duto de ar é maior que a pressão atmosférica.

**(b)**

Podemos verificar e fenomeno observado no item (a) tomando dois pontos na mesma altura, um na inteface entre o mercúrio e o duto de ar e outro no meio da coluna de mercúrio.

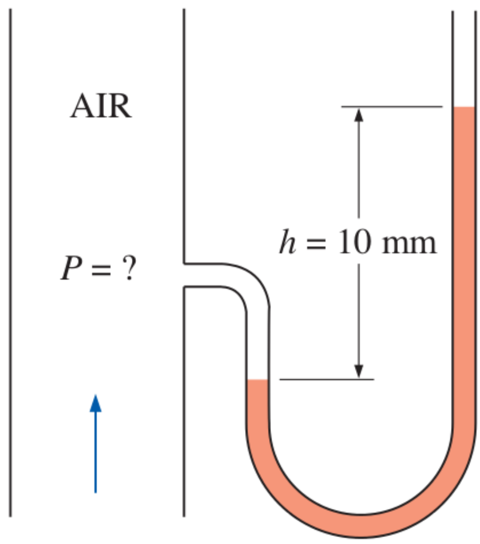



Figure 1: Manômetro a mercúrio

Desta forma temos que a pressão no tubo será dado por $P_c = h\rho_m + P_{atm}$ e portanto $P_c = 0.136 + 100.0 = 100.136\ kPa$

**Questão 3:**

A partir do princípio de Pascal temos

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_1}{A_2}$$

Como a variação de pressão na coluna é $P = \frac{F_1}{A_2} = h\rho$ e que $F_1 = gm$, então

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{gm}{A_1} = gh\rho$$

Dividindo por $g$ e isolando $h$ temos

$$h = \frac{gm}{A_1\rho} = 0.5668\ m$$

## Questão 4:

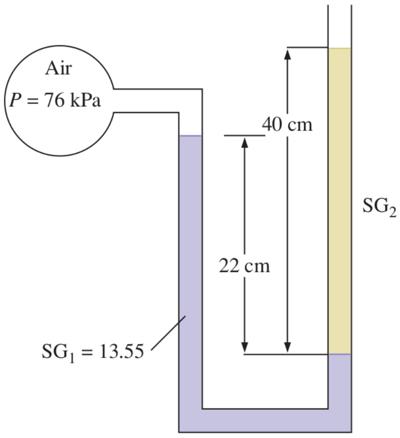



Figure 2: Manômetro com duplo fluído

Tomando um ponto em cada lado do manômetro na altura aonde ocorre a interface entre os dois flúidos temos:

$$P_c + gh_1\rho_1 = P_{atm} + gh_2\rho_2 \tag{1}$$

Isolando $\rho_2$ em (1) temos:

$$\rho_2 = \frac{h_1\rho_1}{h_2} - \frac{P_{atm} - P_c}{gh_2}$$

Dividindo pela densidade da água:

$$\frac{\rho_2}{\rho_a} = \frac{h_1\rho_1}{h_2\rho_a} - \frac{P_{atm} - P_c}{gh_2\rho_a}$$

Dado que $g_1 = \frac{\rho_1}{\rho_a}$ e $g_2 = \frac{\rho_2}{\rho_a}$, substituindo em

$$g_2 = \frac{g_1 h_1}{h_2} - \frac{P_{atm} - P_c}{gh_2\rho_a} \tag{2}$$

Substituindo os valores de $g_1 = 13.55$ , $P_{atm} = 100000.0\ Pa$ , $P_c = 76000.0 Pa$ , $h_1 = 0.22m$ , $h_2 = 0.4m$ , $g = 9.81 Kgm/s^2$ e $\rho_a = 1000.0\ Kg/m^3$ na equação (2) temos que $g_2 = 1.3363$.

## Questão 5:

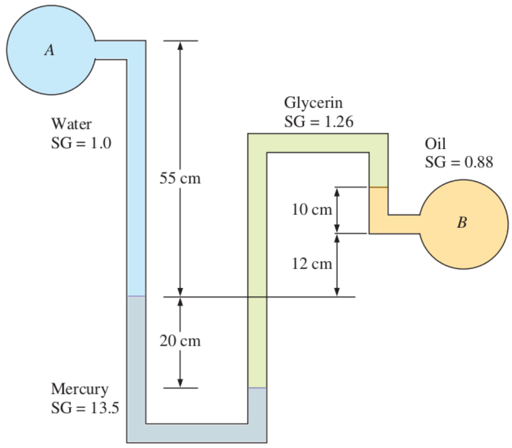



Figure 3: Manômetro com duplo fluído

Tomando dois pontos de referência de pressão $P_1$ e $P_2$ temos

$$\begin{cases} P_2 = P_A - gh_A\rho_A - gh_m\rho_m \\ P_1 = P_2 + gh_g\rho_g \\ P_B = P_1 - gh_B\rho_B \end{cases}$$

Resolvendo o sistema e isolando $P_A - P_B$ temos

$$P_A - P_B = g\left(h_A\rho_A + h_B\rho_B - h_g\rho_g + h_m\rho_m\right) \tag{3}$$

Dividindo tudo pela densidade da água $\rho_a$

$$\frac{1}{\rho_a}\left(P_A - P_B\right) = \frac{g}{\rho_a}\left(h_A\rho_A + h_B\rho_B - h_g\rho_g + h_m\rho_m\right)$$

Logo podemos calcular $P_A - P_B$ como

$$P_A - P_B = g\left(SG_A h_A + SG_B h_B - SG_g h_g + SG_m h_m\right) \tag{4}$$

Portanto o valor da diferença de pressão é $P_A - P_B = 27.5543\ kPa$.

## Questão 6:

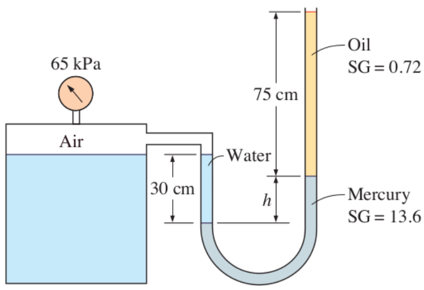



Figure 4

$$\begin{cases} P_0 + gh_A\rho_a = P_1 \\ P_{atm} + g\left(h_0\rho_0 + h_m\rho_m\right) = P_1 \end{cases} \tag{5}$$

Subtraindo as duas expressões em (5) temos

$$-P_0 + P_{atm} - gh_A\rho_a + g\left(h_0\rho_0 + h_m\rho_m\right) = 0$$

$$hm = \frac{P_B - P_{atm}}{2g\rho_m} \tag{6}$$

$$\frac{1}{SG_m}\left(SG_0h_0 - SG_Ah_A\right) + \frac{P_0 - P_{atm}}{SG_m g\rho_a} \tag{7}$$

## Questão 7: Manômetro de Tubos Inclinados

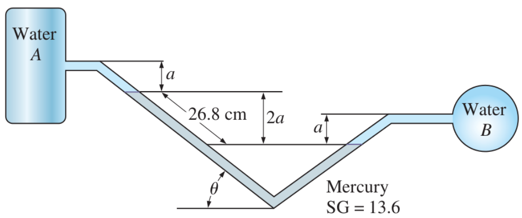



Figure 5: Manômetro com tubos inclinados

$$\begin{cases} P_A + ag\rho_a + 2ag\rho_m = P_0 \\ P_B + ag\rho_a = P_0 \end{cases} \tag{8}$$

Subtraindo as duas expressões em (13) temos

$$-P_A + P_B - 2ag\rho_m = 0$$

$$a = \frac{-P_A + P_B}{2g\rho_m} \tag{9}$$

Subsitituindo $\rho_m = SG_m\rho_a$ em (9)

$$a = \frac{-P_A + P_B}{2SG_m g\rho_a} = \frac{20000.0}{2 \cdot 13.5 \cdot 1000.0}$$

$$a = 7.5509 \cdot 10^{-2}\ m = 7.5509\ cm \tag{10}$$

## Questão 8: Pressão Manométrica

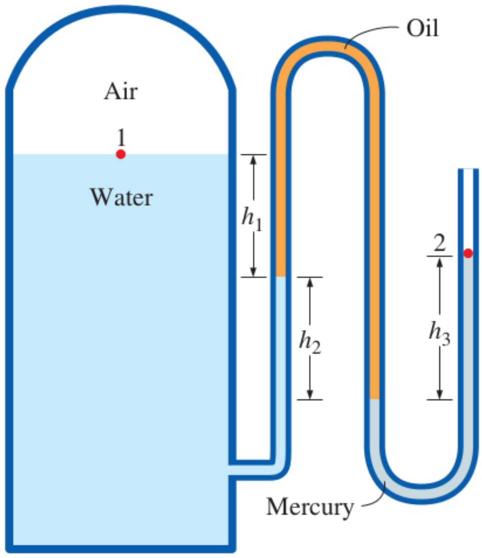



Figure 6: Tanque

$$\begin{cases} P_{atm} + gh_3\rho_m = P_0 \\ P_1 + gh_2\rho_0 = P_0 \\ P_B + gh_1\rho_A = P_1 \end{cases} \tag{11}$$

Substituindo $P_1$

$$\begin{cases} P_{atm} + gh_3\rho_m = P_0 \\ P_B + gh_1\rho_A + gh_2\rho_0 = P_0 \end{cases}$$

Igualando as duas expressões:

$$P_B + gh_1\rho_A + gh_2\rho_0 = P_{atm} + gh_3\rho_m$$

Isolando $P_B - P_{atm}$

$$P_B - P_{atm} = g\left(-h_1\rho_A - h_2\rho_0 + h_3\rho_m\right) \tag{12}$$

Substituindo os valores das densidades $\rho_m = 13600.0\ kg/m^3$ , $\rho_A = 1000.0\ kg/m^3$ , $\rho_0 = 850.0\ kg/m^3$ , da altura das colunas $h_1 = 0.4\ m$ , $h_3 = 0.8\ m$ , $h_2 = 0.6\ m$ e de $g = 9.81\ m/s^2$, a pressão manométrica será $P_B - P_{atm} = 97.8057\ kPa$.

**Questão 9: Sonda**

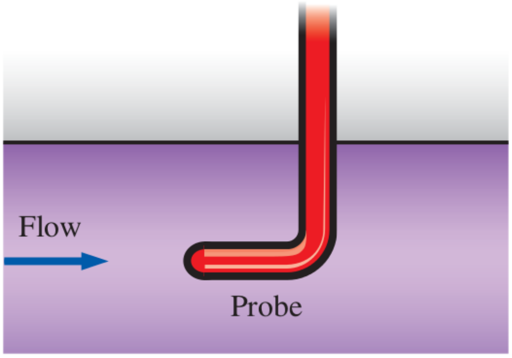



Figure 7: Sonda

A medida da pressão e da temperatura em função do tempo através da sonda mostrada na figura ?? segue a descrição euclidiana pois leva em consideração apenas o estado do fluído no local de interesse, no caso a ponta da sonda, em relação ao tempo analisado. Esta análise se assemelha a análise de volume de controle, sendo observado o comportamento do flúido mediante a entrada e saída do fluxo do escoamento do flúido em relação a região observada.

**Questão 10: Escoamento em Duto**

**Questão 11:**

**Questão 12:**

**Questão 13:**

**Questão 14:**

**Questão 15:**

**Questão 16:**

A vazão volumétrica é a medida da quantidade de volume de escoamento por unidade de tempo, equannto a vazão mássica é a medida da quantidade de massa que passa por uma seção por unidade tempo. Podemos relacionar o volume de saída com a massa de saída a partir da densidade. Para um escoamento unidirecional, sendo a vazão volumétrica , $Q_m$ a vazão mássica, temos:$Q_v = \frac{dV}{dt}$ , $Q_m = \frac{dM}{dt}$. Dado que $M = V\rho$ onde $\rho$ é a densidade de fluído, podemos reescrever $Q_m$ como $Q_m = \frac{d(V\rho)}{dt}$. Considerando um fluído incomepreensível e portanto com densidade constante temos:

$$Q_m = \rho\frac{d(V)}{dt} = \rho \cdot Q_v$$

. Assim a vazão mássica será igual ao produto da densidade pela vazão volumétrica.

**Questão 17:**

Dado o campo vectorial definido $\vec{G}$ como:

$$\vec{G} = 2xy + \frac{1}{2}x^2 - z^2$$

O rotacional de $\vec{G}$ será definido como:

$$\nabla\vec{G} = \frac{\delta(2xy)}{\delta x} + \frac{\delta\left(\frac{1}{2}x^2\right)}{\delta y} + \frac{\delta(-z^2)}{\delta z}$$

$$\nabla\vec{G} = (2z) + (0) + (-2z) = 0$$

**Questão 18:**

$$\vec{\nabla} \cdot (f\vec{G}) = \vec{G} \cdot \nabla f + f\vec{\nabla} \cdot \vec{G} \tag{13}$$

Calculando $\nabla f \cdot \vec{G}$:

$$\nabla f = \frac{\delta f}{\delta x} + \frac{\delta f}{\delta y} + \frac{\delta f}{\delta z}$$

$$\nabla f \cdot \vec{G} = \frac{\delta f}{\delta x}G_x + \frac{\delta f}{\delta y}G_y + \frac{\delta f}{\delta z}G_z \tag{14}$$

Calculando $\vec{\nabla} \cdot \vec{G}$:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{G} = \frac{\delta G_x}{\delta x} + \frac{\delta G_y}{\delta y} + \frac{\delta G_z}{\delta z} \tag{15}$$

Calculando $\vec{\nabla} \cdot (f\vec{G})$

$$f\vec{G} = (fG_x, fG_y, fG_z)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (f\vec{G}) = \frac{\delta(fG_x)}{\delta x} + \frac{\delta(fG_y)}{\delta y} + \frac{\delta(fG_z)}{\delta z}$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot (f\vec{G}) = \frac{\delta f}{\delta x}G_x + \frac{\delta f}{\delta y}G_y + \frac{\delta f}{\delta z}G_z \\ + f\left(\frac{\delta G_x}{\delta x} + \frac{\delta G_y}{\delta y} + \frac{\delta G_z}{\delta z}\right)\end{aligned} \tag{16}$$

Substituindo (14) e (15) em (13) o que equivale a expressão (16).

**Questão 19: Tanque Cilíndrico**

**(a)**

Relacionando a altura $h$ com o volume do tanque $M$, a varição do volume de água será dada por

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\pi h}{4}D_0^2 = \frac{\pi D_0^2}{4}\frac{dh}{dt} \tag{17}$$

Assumindo o escoamento como incompreensível a vazão total do tanque será

$$\frac{dM}{dt} = Q_1 + Q_2 + Q_3 \tag{18}$$

Combinando as equações (17) e (18)

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = \frac{\pi D_0^2}{4}\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi D_0^2}(4Q_1 + 4Q_2 + 4Q_3) \tag{19}$$

**(b)**

Assumindo $\frac{dh}{dt} = 0$.

$$0 = \frac{1}{\pi D_0^2}(4Q_1 + 4Q_2 + 4Q_3)$$

$$Q_1 + Q_3 = Q_2$$

Sabendo-se que $Q_1 = \frac{\pi V_1}{4}D_1^2$ e $Q_2 = \frac{\pi V_2}{4}D_2^2$

$$\frac{\pi V_1}{4}D_1^2 + Q_3 = \frac{\pi V_2}{4}D_2^2$$

Isolando $V_2$

$$V_2 = \frac{D_1^2 V_1}{D_2^2} + \frac{4Q_3}{\pi D_2^2}$$

**Questão 20:**

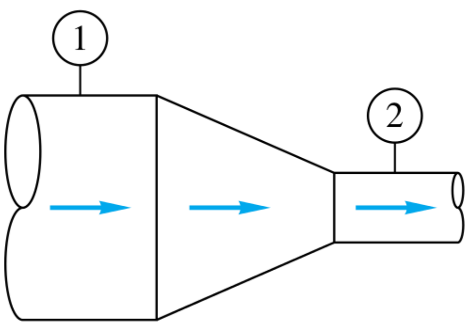



Figure 8: Duto de água

Considerando um escoamento incompreesível, temos que $Q_1 = Q_2$, logo $Q_2 = \frac{\pi V_1}{4}D_1^2 = 0.0402\ m^3/s$ e $\dot{m} = Q_1\rho = \frac{\pi V_1}{4}D_1^2\rho = 40.2061\ kg/s$ e portanto a velocidade em 2 será $V_2 = \frac{D_1^2 V_1}{D_2^2} = 20.4768\ m/s$.

**Questão 21:**

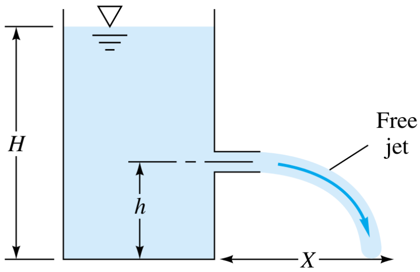



Figure 9: Jato de água

Calculando a distância:

$$X = tV_2 = \sqrt{\left(\frac{2h}{g}\right)2gh(H-h)}$$

$$X = 2\sqrt{h(H-h)} \tag{20}$$

Supondo $h = ha$, substituindo em (20)

$$X = 2\sqrt{Ha(H-Ha)} = 2H\sqrt{a-a^2}$$

Podemos avaliar o ponto máximo para o parâmetro $a$, fazendo $\frac{dX}{da} = 0$ logo

$$0 = \frac{d(2H\sqrt{a-a^2})}{da} \Rightarrow 0 = 2H(1-2a)$$

Como $2H$ é constante e diferente de 0 então $a = 1/2$ .

## Questão 22:

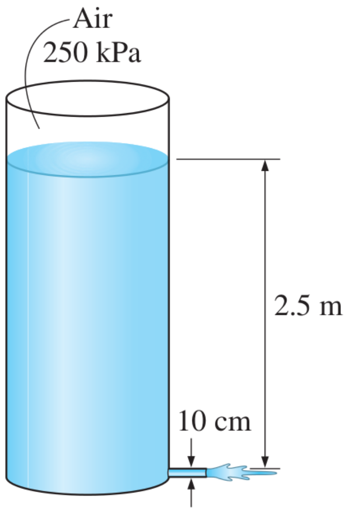



Figure 10: Jato de água

Com base na equação de Bernouli, avaliando as velocidades do ar ao longo do tubo para dois pontos na mesma altura, temos:

$$P_2 + V_2^2 \rho_{ar} = P_1 + gh\rho_{aq}$$

$$V_2 = \sqrt{2gh + \frac{1}{\rho_{aq}}(2P_0 - 2P_1)}$$

$$Q_2 = \frac{\pi V_2}{4} d_2^2$$

$$Q_2 = \frac{\pi d_2^2}{4}\sqrt{2gh + \frac{1}{\rho_{aq}}(2P_1 - 2P_2)}$$

Substituindo os valores $P_1 = 250.0\ kPa$, $P_2 = 100.0\ kPa$, $h = 2.5\ m$, $d_2 = 0.1\ m$, $h = 2.5\ m$, $\rho_{aq} = 1000.0\ kg/m^3$ então $Q_2 = 0.1467$

## Questão 23:

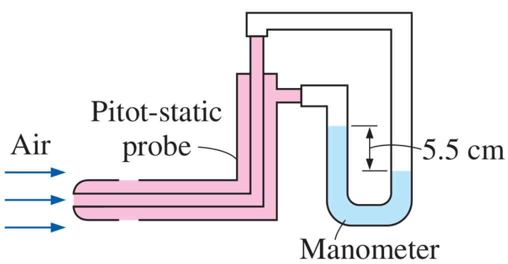



Figure 11: Tubo de Pitot

Com base na equação de Bernouli, avaliando as velocidades do ar ao longo do tubo para dois pontos na mesma altura, temos:

$$P_0 + V_0^2 \rho_{ar} + g\rho_{ar} z_0 = P + V^2 \rho_{ar} + g\rho_{ar} z$$

Como $z_0 = z$ e $V_0 = 0$ na região do manomêtro, temos

$$P_0 = P + V^2 \rho_{ar}$$

$$V = \sqrt{\frac{1}{\rho_{ar}}(-2P + 2P_0)} \tag{21}$$

Avaliando as pressões na manômetro temos $P_0 + gh\rho_{aq} = P$ logo a medida da diferença de pressão será

$$-P + P_0 = gh\rho_{aq} \tag{22}$$

Substituindo o valor medido da diferença de pressão nos dois pontos:

$$V = \sqrt{2}\sqrt{\frac{gh}{\rho_{ar}}\rho_{aq}} \tag{23}$$

Logo, a velocidade médida para $h = 5.5\ cm$, considerando $\rho_{ar} = 1.16\ kg/m^3$ , $\rho_{aq} = 1000.0\ kg/m^3$ e $g = 9.81\ m/s^2$ será de $V = 30.5001\ m/s^2$.

## Questão 24:

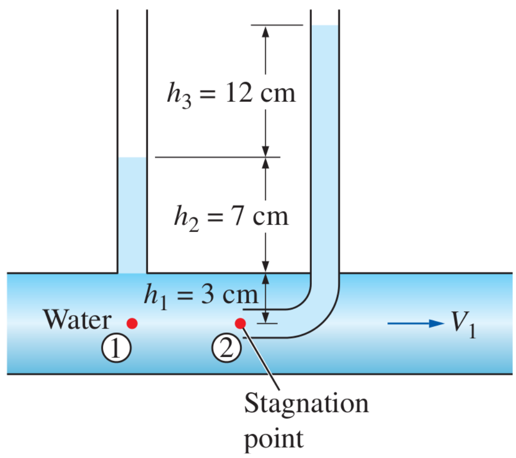



Figure 12: Tubo de Pitot

Com base na equação de Bernouli, avaliando as velocidades do ar ao longo do tubo para dois pontos na mesma altura, temos:

$$P_0 + \frac{V_1^2 \rho_{ar}}{4} + g\rho_{ar} z_0 = P_2 + \frac{V_2^2 \rho_{ar}}{4} + g\rho_{ar} z_2$$

Como $z_0 = 0$, $z_2 = g\left(h_1 + h_2 + h_3\right)$

$$P_0 + V_1^2 \rho_{ar} = P_3 + g\rho_{ar}\left(h_1 + h_2 + h_3\right)$$

Isolando $V_1$

$$V_1 = \sqrt{2g\left(h_1 + h_2 + h_3\right) + \frac{1}{\rho_{ar}}\left(-2P_0 + 2P_3\right)} \tag{24}$$

Avaliando as pressões na manômetro temos $P_0 + gh\rho_{aq} = P$ logo a medida da diferença de pressão será

$$-P + P_0 = gh\rho_{aq} \tag{25}$$

Substituindo o valor medido da diferença de pressão nos dois pontos:

$$V = \sqrt{\frac{gh}{\rho_{ar}}\rho_{aq}} \tag{26}$$

Logo, a velocidade médida para $h = 5.5\ cm$, considerando $\rho_{ar} = 1.16\ kg/m^3$ , $\rho_{aq} = 1000.0\ kg/m^3$ e $g = 9.81\ m/s^2$ será de $V = 21.5669\ m/s^2$.

**Questão 25:**

Sejam dois vetores $A$ e $B$ tais que

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

O produto escalar entre $A$ e $B$ será

$$A \cdot B = B \cdot A = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 = 0$$

O produto vetorial entre $A$ e $B$ será

$$A \times B = \begin{pmatrix} A_2B_3 - A_3B_2 \\ -A_1B_3 + A_3B_1 \\ A_1B_2 - A_2B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ 6 \end{pmatrix}$$

O produto vetorial entre $B$ e $A$ será

$$B \times A = -(A \times B) = \begin{pmatrix} -A_2B_3 + A_3B_2 \\ A_1B_3 - A_3B_1 \\ -A_1B_2 + A_2B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix}$$

O produto tensorial entre $A$ e $B$ será

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 & A_1B_3 \\ A_2B_1 & A_2B_2 & A_2B_3 \\ A_3B_1 & A_3B_2 & A_3B_3 \end{pmatrix}$$

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & 2 \\ -9 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

O produto tensorial entre $B$ e $A$ será

$$B \otimes A = \begin{pmatrix} A_1B_1 & A_2B_1 & A_3B_1 \\ A_1B_2 & A_2B_2 & A_3B_2 \\ A_1B_3 & A_2B_3 & A_3B_3 \end{pmatrix}$$

$$B \otimes A = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$