

運動方程式と数値積分

総合演習 B

神戸大学

陰山

力と運動

▶ ニュートンの運動方程式

$$ma = F$$

質量 加速度 力

- 線形バネの力

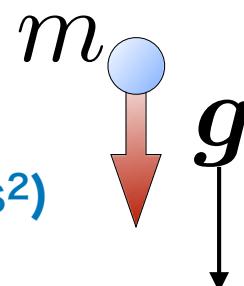
$$F = -k(\ell - \ell_0)$$

バネ定数 バネの長さ バネの自然長

- 重力

$$\mathbf{F} = mg$$

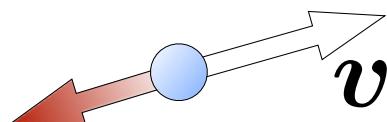
重力加速度 (9.8 m/s^2)



- 空気抵抗

$$\mathbf{F} = -cv$$

速度



エネルギー

散逸（摩擦、空気抵抗）がなければ系の全エネルギーは保存する

- ▶ 運動エネルギー

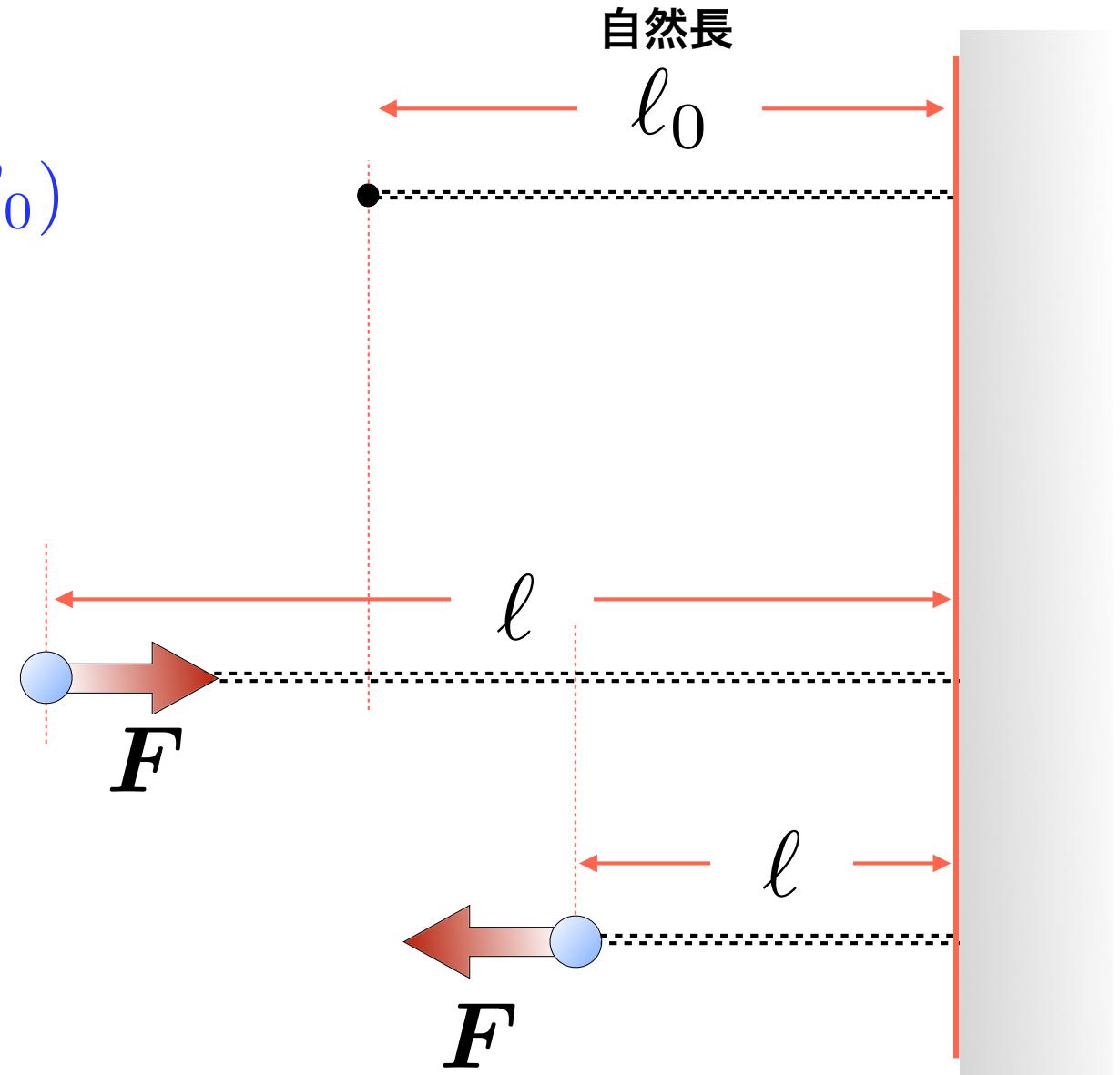
$$K = \frac{m}{2}v^2$$

- ▶ 重力のポテンシャルエネルギー（位置エネルギー）

$$U = mgy$$

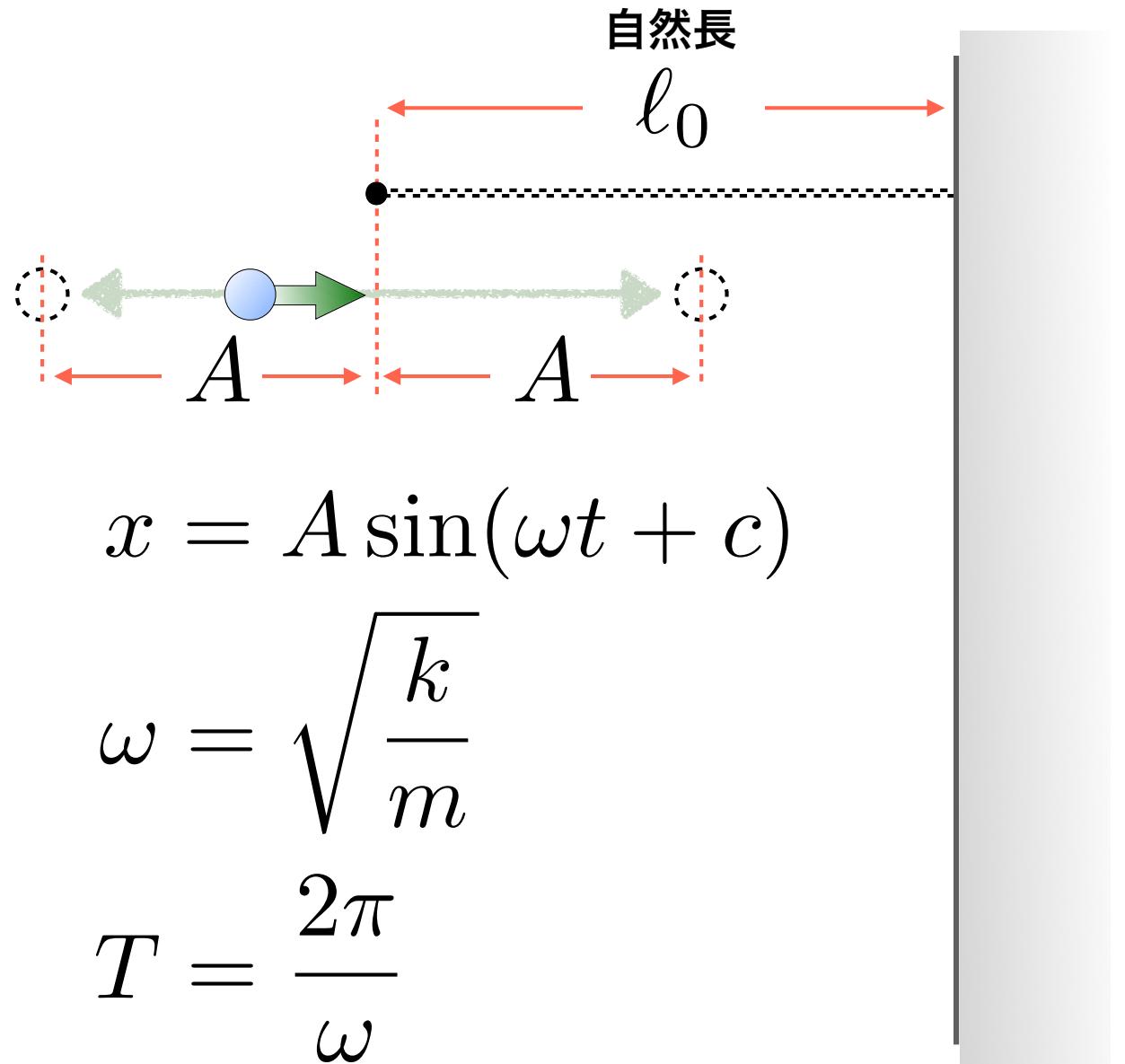
線形バネ

$$F = -k(\ell - \ell_0)$$



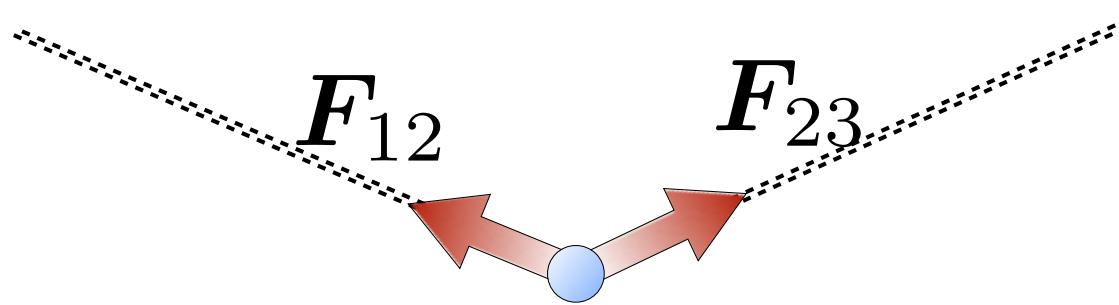
調和振動

- ▶ 单振動
- ▶ A: 振幅 (amplitude)
- ▶ ω : 角振動数
- ▶ T: 单振動の周期



合力

$$F = F_{12} + F_{23}$$



運動方程式

i 番目の粒子の位置座標

$$\boldsymbol{r}^i = \begin{pmatrix} x^i \\ y^i \\ z^i \end{pmatrix}$$

i 番目の粒子の速度

$$\boldsymbol{v}^i = \begin{pmatrix} v_x^i \\ v_y^i \\ v_z^i \end{pmatrix}$$

▶ 運動方程式

$$\text{for } i = 1, N \quad \frac{d\boldsymbol{r}^i}{dt} = \boldsymbol{v}^i$$

$$\frac{d\boldsymbol{v}^i}{dt} = \frac{\boldsymbol{F}^i}{m}$$

連立一次微分方程式

$$\frac{d}{dt}q_1(t) = f_1(q_1, q_2, \dots, q_{3N})$$

$$\frac{d}{dt}q_2(t) = f_2(q_1, q_2, \dots, q_{3N})$$

⋮
⋮
⋮

$$\frac{d}{dt}q_{3N}(t) = f_{3N}(q_1, q_2, \dots, q_{3N})$$

これを数値積分する

1次オイラー法

$$\frac{dq(t)}{dt} = f(q, t)$$

- ▶ 解きたい微分方程式
 - ▶ 時間の離散化
 - ▶ 時間刻み
-
- $$t_j = \Delta t \times j$$
- $$q_j = q(t_j)$$
- $$f_j = f(q_j, t_j)$$

1次オイラー法

$$\frac{dq(t)}{dt} = f(q, t)$$

- ▶ 解きたい微分方程式
- ▶ 時間の離散化
- ▶ 時間刻み
- ▶ 一次（陽的）オイラー法

$$\begin{aligned}t_j &= \Delta t \times j \\q_j &= q(t_j) \\f_j &= f(q_j, t_j)\end{aligned}$$
$$\frac{q_{j+1} - q_j}{\Delta t} = f_j$$
$$q_{j+1} = q_j + \Delta t \times f_j$$

オイラー法は精度が低すぎる

- ▶ 1次（陽的）オイラー法

$$q_{j+1} = q_j + \Delta t \times f_j$$

- ▶ 1次（陽的）オイラー法の精度（低すぎる）

$$\mathcal{O}(\Delta t)$$

4次ルンゲ・クッタ法

- ▶ 1次（陽的）オイラー法

$$q_{j+1} = q_j + \Delta t \times f_j$$

- ▶ 1次（陽的）オイラー法の精度（低すぎる）

$$\mathcal{O}(\Delta t)$$

- ▶ 4次ルンゲ・クッタ法

$$q_{j+1} = q_j + \frac{\Delta t}{6}k_1 + \frac{\Delta t}{3}k_2 + \frac{\Delta t}{3}k_3 + \frac{\Delta t}{6}k_4$$

- ▶ 4次ルンゲ・クッタ法の精度（十分高い）

$$\mathcal{O}(\Delta t^4)$$

4次ルンゲ・クッタ法

$$q_{j+1} = q_j + \frac{\Delta t}{6}k_1 + \frac{\Delta t}{3}k_2 + \frac{\Delta t}{3}k_3 + \frac{\Delta t}{6}k_4$$

$$k_1 = f(q_j, t_j)$$

$$k_2 = f\left(q_j + \frac{\Delta t}{2}k_1, t_j + \frac{\Delta t}{2}\right)$$

$$k_3 = f\left(q_j + \frac{\Delta t}{2}k_2, t_j + \frac{\Delta t}{2}\right)$$

$$k_4 = f(q_j + \Delta t k_3, t_j + \Delta t)$$

時間刻み幅についての注意

- ▶ ルンゲ=クッタ法では時間刻み幅 Δt の上限がある
⇒ CFL条件 これを超えると計算が破綻（発散）する
- ▶ 一つの質点とバネの系の運動（単振動）の周期よりも十分に小さいであろうことは容易に予想できる
 - 一回の振動が正確に記述できないといけないから
- ▶ 多数の質点がバネでつながれたこの系のCFL条件はあとで数値的に（実験的に）見つけよう