運動方程式と数値積分

総合演習 B
神戸大学
陰山

力と運動

- ニュートンの運動方程式

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$$

力

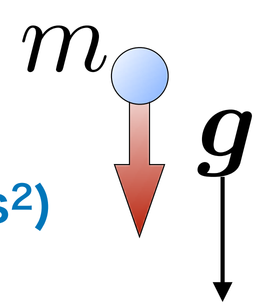
質量　加速度

  - 線形バネの力　$F = -k(\ell - \ell_0)$

バネ定数　バネの長さ　バネの自然長

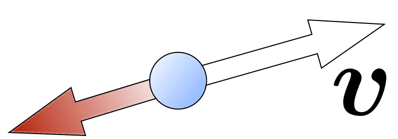
  - 重力　$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g}$

重力加速度 (9.8 m/s²)



  - 空気抵抗　$\boldsymbol{F} = -c\boldsymbol{v}$

速度



エネルギー

散逸（摩擦、空気抵抗）がなければ系の全エネルギーは保存する

- 運動エネルギー

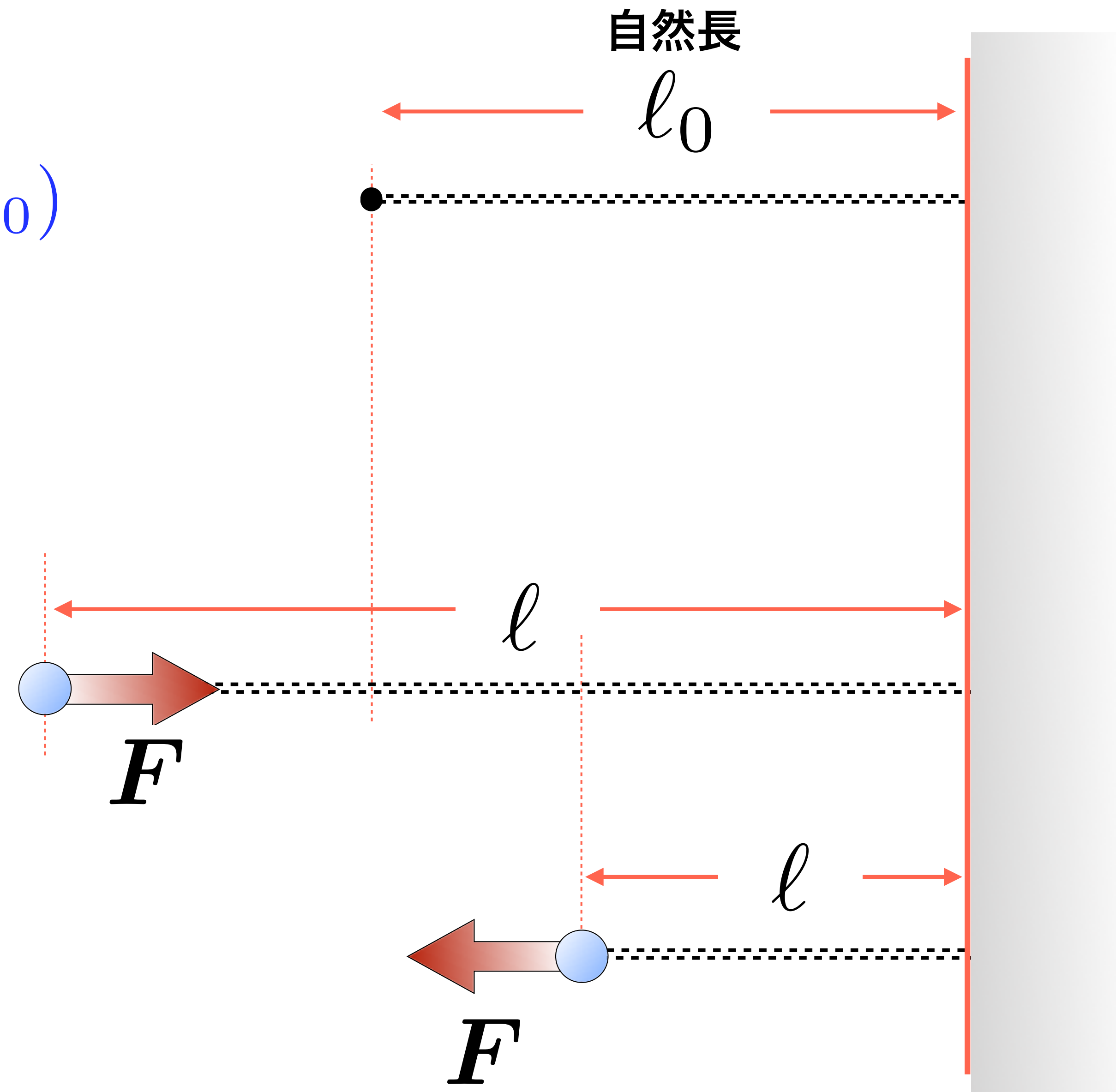
$$K = \frac{m}{2}\boldsymbol{v}^2$$

- 重力のポテンシャルエネルギー（位置エネルギー）

$$U = mgy$$

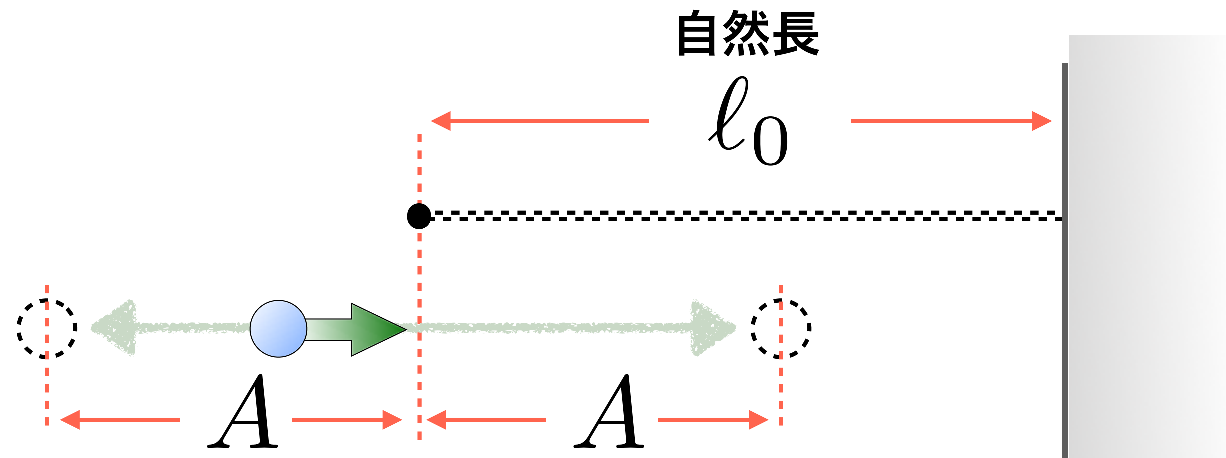
線形バネ

$$F = -k(\ell - \ell_0)$$



調和振動

- 単振動
- A: 振幅（amplitude）
- ω: 角振動数
- T: 単振動の周期



$$x = A\sin(\omega t + c)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

運動方程式

i 番目の粒子の位置座標

$$\boldsymbol{r}^i = \left(\begin{array}{c} x^i \\ y^i \\ z^i \end{array} \right)$$

i 番目の粒子の速度

$$\boldsymbol{v}^i = \left(\begin{array}{c} v_x^i \\ v_y^i \\ v_z^i \end{array} \right)$$

- 運動方程式

for `i = 1 , N`

$$\frac{d\boldsymbol{r}^i}{dt} = \boldsymbol{v}^i$$

$$\frac{d\boldsymbol{v}^i}{dt} = \frac{\boldsymbol{F}^i}{m}$$

連立一次微分方程式

$$\frac{d}{dt}q_1(t) = f_1(q_1, q_2, \ldots, q_{3N})$$

$$\frac{d}{dt}q_2(t) = f_2(q_1, q_2, \ldots, q_{3N})$$

$$\vdots$$

$$\frac{d}{dt}q_{3N}(t) = f_{3N}(q_1, q_2, \ldots, q_{3N})$$

これを数値積分する

1次オイラー法

$$\frac{dq(t)}{dt} = f(q, t)$$

- 解きたい微分方程式
- 時間の離散化
- 時間刻み

$$t_j = \underline{\triangle t} \times j$$

$$q_j = q(t_j)$$

$$f_j = f(q_j, t_j)$$

1次オイラー法

$$\frac{dq(t)}{dt} = f(q,t)$$

- 解きたい微分方程式
- 時間の離散化
- 時間刻み
- 一次（陽的）オイラー法

$$t_j = \underline{\triangle t} \times j$$

$$q_j = q(t_j)$$

$$f_j = f(q_j, t_j)$$

$$\frac{q_{j+1} - q_j}{\triangle t} = f_j$$

$$q_{j+1} = q_j + \triangle t \times f_j$$

オイラー法は精度が低すぎる

- 1次（陽的）オイラー法

$$q_{j+1} = q_j + \triangle t \times f_j$$

- 1次（陽的）オイラー法の精度（低すぎる）

$$\mathcal{O}(\triangle t)$$

4次ルンゲ・クッタ法

- 1次（陽的）オイラー法

$$q_{j+1} = q_j + \triangle t \times f_j$$

- 1次（陽的）オイラー法の精度（低すぎる）

$$\mathcal{O}(\triangle t)$$

- 4次ルンゲ・クッタ法

$$q_{j+1} = q_j + \frac{\triangle t}{6} k_1 + \frac{\triangle t}{3} k_2 + \frac{\triangle t}{3} k_3 + \frac{\triangle t}{6} k_4$$

- 4次ルンゲ・クッタ法の精度（十分高い）

$$\mathcal{O}(\triangle t^4)$$

4次ルンゲ・クッタ法

$$q_{j+1} = q_j + \frac{\triangle t}{6}k_1 + \frac{\triangle t}{3}k_2 + \frac{\triangle t}{3}k_3 + \frac{\triangle t}{6}k_4$$

$$k_1 = f(q_j, t_j)$$

$$k_2 = f(q_j + \frac{\triangle t}{2}k_1, t_j + \frac{\triangle t}{2})$$

$$k_3 = f(q_j + \frac{\triangle t}{2}k_2, t_j + \frac{\triangle t}{2})$$

$$k_4 = f(q_j + \triangle t k_3, t_j + \triangle t)$$

時間刻み幅についての注意

- ルンゲ=クッタ法では時間刻み幅△tの上限がある

  ⇒ CFL条件　これを超えると計算が破綻（発散）する