

砂時計のシミュレーション

陰山 聡[†]、中島 涼輔[†]、中戸 昂明[‡]

[†] 神戸大学システム情報学研究科、[‡] 神戸大学システム情報学部

September 19, 2025

Abstract

砂時計の砂が落ちている間、砂時計の重さはわずかに重くなることが知られている。その重さの変化はとても小さいので、この効果の実験的な検証は容易ではない。ソフトスフィアモデルに基づいた個別要素法シミュレーションにより、砂時計の重さの変化を再現した。

1 はじめに

砂時計を重量計に乗せて、砂時計の重量を計る状況を考えよう。砂時計の砂が落ち始める前の砂時計全体の重さと、砂がすべて落ちきった後の砂時計全体の重さはもちろん変わらない。では、砂が落ちている最中の砂時計の重さはどうだろうか。これは大学で学ぶ力学、特に力積の概念を使うよい練習問題になりそうであるが、実際には力学の教科書などで取り上げられる例は少ない。それはこの問題の正解が「理論上は少しだけ重くなるが、実際上は変わらないといってよい」というあまりすっきりしないものであるために初学者には教育的でないからかもしれない。

砂が落ちている間、砂時計がわずかに重くなるであろうことは砂の重心の運動から容易に予想される。計時開始前には砂時計の上部にあった砂粒全体の重心は、計時後には下部に移動している。上部の砂層の厚さとそこに含まれる砂の質量は時間 t の線形で減少する一方、下部の砂層の厚さと質量は線形で増加する。したがって全体の重心位置は t の 2 次関数で減少（落下）するが、その 2 階微分（加速度）の向きは自由落下とは反対に上向きである。つまり砂時計全体は重くなるはずである。

ただし、重心移動の距離はわずかで最大でも砂時計の高さ程度あり、しかもかなり時間をかけたゆっくりとした移動（砂時計が 3 分計であれば 3 分間）なので、その加速度は必然的に小さく、したがって砂時計全体の重さに与える影響は小さいことは予想できる。

Gardner が Scientific American 誌で水中を浮力で浮かぶ砂時計を使ったおもちゃを紹介したときが砂時計の重さが大きな注目を集めた最初であろう [1]。その後すぐに、落下した砂が砂時計の底面に与える力積（つまり砂時計を重くする効果）が、落下中の砂の分だけ砂時計の重さが軽くなる効果とちょうどキャンセルするという指摘がされた [3]。そこでは、力学教育のよい題材にこの問題はなるであろうとも指摘されている。

その後、砂の重心の移動まで考慮に入れると砂時計はわずかに重くなることが指摘された [5]。著者等は理論解析に加えて実験を行い、ガラスの粉末を使った「砂」時計の重量を測定して、実際に重くなることを示した。重さの変化は、理論予想が 49 mg に対して実験結果は 30 ~ 80 mg の範囲であった。おそらくこれがこの効果を最初に実証した実験であろう。

日常目にする砂時計は真ん中がくびれていて、オリフィス一つである。当然、落下する砂粒の流れも一本なので、オリフィスよりも上の部分ではそれぞれの砂粒は水平方向に運動する。また、下面に降り積もった砂もまた複雑な水平運動をする。この複雑さを回避するために、Tuinstra 等は単一のオリフィスではなく多数 (230 個) の穴を持つ「ふるい」で区切られた円筒状の砂時計モデルを作成し、(本物の) 砂 1.6 kg を使った実験を行った [6]。理論的には 0.116 g の重さの増加が期待され、測定結果は 0.121 g であった。

金属粉末を使った実験で、砂時計の重さの時間変化が詳細に解析されている [4]。時間変化は主に 3 つの時期に分けることができる。最初期、砂が落ち始めた直後から最初の砂粒が下面に到達するまでの短い間、砂時計の重量は軽くなる。これは空中に falling している砂粒の重量分だけ重みがかからないためである。また、最終期、最後の砂粒が落ちてくる短い間は、砂時計は重くなる。これは下面を叩く砂粒達が与える力積をキャンセルするだけの数の砂が空中にないためである。この二つ短い遷移時間の間、浮いている砂粒の軽さと床面に衝突する砂粒が与える力積がキャンセルするが、冒頭に述べた重心に移動効果により、重量が一定の値でわずかに重くなる時期が続く。

砂時計の重さの問題は、多くの非自明な要因が関係する力学の問題として興味深いだけでなく、質量が時間変化する系の典型例として教育的にも重要であると指摘されている [2]。

コンピュータシミュレーションでこの効果、つまり砂が落下している最中の砂時計がわずかに重くなる効果を実証した研究はまだないようである。本研究の目的は、簡単でありながら高精度な砂時計のコンピュータシミュレーションモデルを開発することである。我々のモデルは、落下中の砂の分だけ軽くなる効果と落下した砂が与える力積がちょうどキャンセルするという基本的な効果を再現することはもちろん、砂の重心移動によるわずかな重さの変化という微弱な効果も定量的に再現する。このシミュレーションはプログラミング初心者にも扱えるようデザインされた Processing 言語¹で書かれており、そのソースコードは公開する予定である²。ノート PC で実行可能なほど小規模なシミュレーションなので、この興味深い力学問題を直接体験することができる。

2 理論

2.1 力積に基づく抗力の概算

T_0 秒間を測る砂時計を考える。重力加速度を g 、砂粒の総数を N_0 、砂全体の質量を M_0 とすると、砂粒一つの質量 m は、

$$m = \frac{M_0}{N_0} \quad (1)$$

¹<https://processing.org>

²<https://github.com/akageyama/lab-project-hourglass>

である。1 秒間に落ちる砂粒の数を

$$\mu = \frac{N_0}{T_0} \quad (2)$$

とする。 m と μ は

鉛直上向きに y 軸をとり、砂が落ちる位置すなわちオリフィスの位置を $y = 0$ とする。最初の砂粒が落下する距離、つまり砂時計の底面の位置を $y = -H_0$ とする。

一つの砂粒がオリフィスから落下し、下部に積み重なった砂の層の表面まで到達するのにかかる時間、つまり自由落下時間を τ_f とし、下に落ちた砂粒は跳ね返らずに短い時間で静止すると仮定する。落下した瞬間の砂粒の速さ（自由落下速度）は

$$V_F = g\tau_f \quad (3)$$

なので、落下によって静止した砂粒の運動量の変化は

$$p = mg\tau_f \quad (4)$$

である。 Δt 秒間に落下する $\mu\Delta t$ 個の砂粒が下面に与える運動量の総量 $p\mu\Delta t$ は力積 $F_1\Delta t$ に等しいので、床面に与える平均力は

$$F_1 = \mu mg\tau_f \quad (5)$$

である。

一方、ある瞬間に落下している途中、つまり砂時計のオリフィスから下面までの中空にいる砂粒は $\mu\tau_f$ 個ある。一つの砂粒にかかる重力は mg なので、砂時計全体の重さはこの落下中の砂粒の重さ

$$F_s = \mu\tau_f mg \quad (6)$$

だけ軽くなる。これは力積による平均力、つまり式 (5) と等しい。従って砂が落ちている最中の砂時計全体の重さは変わらない、という結論になりそうだが、以下に示すように厳密にはこれは正しくない。

2.2 運動方程式に基づく抗力の正確な評価

砂時計の床面に働く抗力を求めるために運動方程式を立てる。オリフィスよりも上にある砂の層を質量 $M_1(t)$ をもつ物体 1、下に落下して静止した砂の層を質量 $M_2(t)$ をもつ物体 2、落下中の砂粒全体を物体 3 とみなす。これは可変質量の物体が相互作用する力学の問題である。

簡単のため、オリフィス付近を除いた砂時計の断面積は一定とする。計時を開始する前の砂の層の厚さを K_0 、砂粒の高さあたりの質量密度を σ とすると

$$\sigma = \frac{M_0}{K_0} \quad (7)$$

である。

$$\frac{m\mu}{\sigma} = \frac{K_0}{T_0} \quad (8)$$

という関係がある。

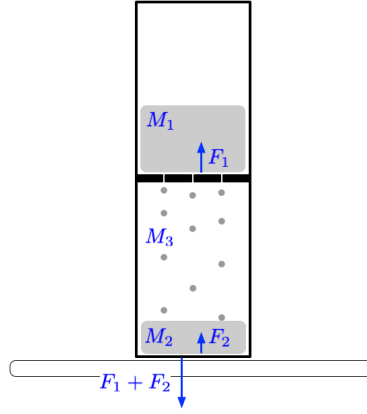


Figure 1: CAPTION.

2.2.1 物体 1（落下前の上の砂層）

計時開始時刻を $t = 0$ とすると、時刻 t では μt 個の砂粒がオリフィスから落下しているので、この時刻にオリフィスの上部分にある砂、つまりまだ落下していない砂の数は

$$N_1(t) = N_0 - \mu t \quad (9)$$

である。したがってオリフィス上部の砂の質量は

$$M_1(t) = m(N_0 - \mu t) \quad (10)$$

である。この時刻におけるオリフィス上部の砂層の厚さは

$$K_1(t) = \frac{M_1(t)}{\sigma} = \frac{m}{\sigma}(N_0 - \mu t) \quad (11)$$

である。上の層の厚さは一定の割合で減少する。

$$\dot{K}_1(t) = -\frac{m\mu}{\sigma} \quad (12)$$

この層の重心の y 座標を $Y_1(t)$ とすると

$$Y_1(t) = \frac{K_1(t)}{2} = \frac{m}{2\sigma}(N_0 - \mu t) \quad (13)$$

物体 1 の運動量は

$$P_1(t) = M_1(t)\dot{Y}_1(t) \quad (14)$$

その時間微分は

$$\dot{P}_1(t) = \dot{M}_1(t)\dot{Y}_1(t) = \frac{m^2\mu^2}{2\sigma} \quad (15)$$

である。運動量 P_1 は下向き ($P_1 < 0$) であるが、その時間変化 \dot{P}_1 は上向き ($\dot{P}_1 > 0$) である。

2.2.2 物体 2（落下後の下の砂層）

同様に下の砂層の厚さを $K_2(t)$ 、質量を $M_2(t)$ とする。これらの量が正になるのは時刻 $t = 0$ に落下した最初の砂粒が下の床に到達するまでの時間、つまり自由落下時間

$$\tau_{f0} = \sqrt{\frac{2H_0}{g}} \quad (16)$$

以降である。

$$M_2(t) = m\mu(t - \tau_{f0}) \quad (17)$$

と近似できる。 μ という一定の割合で砂粒が落ちてくるのだからこの式は自明のようにも思えるが、正確に言えばこの式は

$$\epsilon = \frac{K_0/T_0}{\sqrt{2gH_0}} \ll 1 \quad (18)$$

だけの誤差を含む（Appendix A 参照）。下の砂層の厚さは

$$K_2(t) = \frac{M_2(t)}{\sigma} = \frac{m\mu}{\sigma}(t - \tau_{f0}) \quad (19)$$

下の砂層の重心の y 座標は

$$Y_2(t) = -H_0 + \frac{K_2(t)}{2} \quad (20)$$

である。物体 2 の運動量は

$$P_2(t) = M_2(t)\dot{Y}_2(t) \quad (21)$$

その時間微分は

$$\dot{P}_2(t) = \dot{M}_2(t)\dot{Y}_2(t) = \frac{m^2\mu^2}{2\sigma} \quad (22)$$

である。

2.2.3 物体 3（落下中の砂粒）

$t \geq \tau_{f0}$ のある時刻 t に落下している最中の砂粒は、高さ

$$K_3(t) = H_0 - K_2(t) \quad (23)$$

に分布している。その総数は

$$N_3(t) = \mu\tau_f(t) = \mu\sqrt{\frac{2K_3(t)}{g}} = \mu\sqrt{\frac{2(H_0 - K_2(t))}{g}} = \mu\sqrt{\frac{2}{g}}\sqrt{H_0 - K_2(t)} \quad (24)$$

である。したがって質量は

$$M_3(t) = mN_3(t) = m\mu\sqrt{\frac{2}{g}}\sqrt{H_0 - K_2(t)} \quad (25)$$

である。

物体 3 の運動量を評価するためにまず、物体 3 内部の運動量分布は高さ y に
よらず一定であることに注意する。位置 y を速度 $v_y(y)$ で下方 ($v_y < 0$) に通過する
砂粒の数は常に μ 個なので、砂粒の数密度を $n(y)$ とすると、

$$n(y)v_y(t) = -\mu = \text{const.} \quad (26)$$

である。したがって物体 3 の運動量の密度は

$$p_3 = mn(y)v_y(y) = -m\mu = \text{const.} \quad (27)$$

は一定である。したがって物体 3 の運動量は

$$P_3(t) = p_3 K_3(t) = -m\mu(H_0 - K_2(t)) \quad (28)$$

である。その時間変化は

$$\dot{P}_3(t) = \frac{m^2\mu^2}{\sigma} \quad (29)$$

である。

2.2.4 運動方程式

$F_1(>0)$ を砂時計の構造体が（オリフィスのある面で）物体 1 を支える抗力、
 $F_2(>0)$ を砂時計の構造体が（底面で）物体 2 を支える抗力とする。この二つの
和 $F = F_1 + F_2$ は砂時計の構造体が砂を支える力である。砂が落ちている間に F
が砂にかかる重力 M_0g よりも大きければ砂時計は重くなる。

物体 1 と物体 3 の間に作用する力を F_{13} 、物体 2 と物体 3 の間に作用する力を
 F_{32} とすると、この系の運動方程式は

$$\frac{d}{dt}P_1(t) = -M_1(t)g + F_{13} + F_1 \quad (30)$$

$$\frac{d}{dt}P_2(t) = -M_2(t)g + F_{32} + F_2 \quad (31)$$

$$\frac{d}{dt}P_3(t) = -M_3(t)g - F_{13} - F_{32} \quad (32)$$

上の 3 つの式の両辺を足し、式 (15), (22), (29) を使うと

$$2\frac{m^2\mu^2}{\sigma} = -(M_1 + M_2 + M_3)g + F_1 + F_2 \quad (33)$$

したがって

$$F = F_1 + F_2 = M_0g + 2\frac{m^2\mu^2}{\sigma} \quad (34)$$

つまり計時中の砂時計が砂を支える抗力は、右辺第 2 項

$$\Delta F = 2\frac{m^2\mu^2}{\sigma} = 2\frac{M_0K_0}{T_0^2} \quad (35)$$

だけ大きくなる。最後の式変形では式 (8) と $m\mu = M_0/T_0$ を使った。力ではなく重さで表現すれば

$$\Delta W = 2 \frac{M_0 K_0}{g T_0^2} \quad (36)$$

である。

Tuinstra 等はくびれない円筒形の容器を作り、その真ん中に設置した多数の穴をもつ「ふるい」状の板を通過して落下する砂列の同時落下で実験を行った [6]。その実験では $M_0 = 1.6$ (kg)、 $T_0 = 23.6$ (s)、 $K_0 = 0.198$ (m) である。式 (36) から評価される重さの変化は $\Delta W = 1.16 \times 10^{-4}$ (kg) である。彼らの測定値は $\Delta W = (1.21 \pm 0.06) \times 10^{-4}$ (kg) である。

3 シミュレーションモデル

Tuinstra 等のモデルにならい、我々も 1 次元的な砂時計モデルを採用し、水平方向の運動を無視する。落下する砂は複数の本数があるが、それぞれの砂列は鉛直方向に 1 次元的な運動をする。砂列同士の相互作用は考慮しない。この 1 次元モデルでは各砂列の砂粒同士の相互作用を上下二つの隣とだけ考えれば良いので、

4 まとめ

References

- [1] Martin Gardner, *MATHEMATICAL GAMES*, Scientific American **215** (1966), no. 2, 96–99.
- [2] Vladimir V Kassandrov and Zurab K Silagadze, *Hourglass of constant weight as an illustrative example of a system with a variable mass*, Granul. Matter **25** (2023) (en).
- [3] Walter P Reid, *Weight of an hourglass*, Am. J. Phys. **35** (1967), 351–352 (en).
- [4] Achim Sack and Thorsten Pöschel, *Weight of an hourglass—theory and experiment in quantitative comparison*, Am. J. Phys. **85** (2017), 98–107 (en).
- [5] K Y Shen and Bruce L Scott, *The hourglass problem*, Am. J. Phys. **53**, 787 – 788 (1985) **53**, 787–788.
- [6] Fokke Tuinstra and Bouke F Tuinstra, *The weight of an hourglass*, Europhys. News **41** (2010), 25–28.

A 下の砂層の厚さの時間変化

砂の総質量は

$$M_0 = M_1(t) + M_2(t) + M_3(t) \quad (37)$$

は定数である。これは

$$\sigma K_0 = \sigma K_1(t) + \sigma K_2(t) + m\mu\sqrt{\frac{2}{g}}\sqrt{H_0 - K_2(t)} \quad (38)$$

この式の時間微分をとると、

$$0 = \sigma \dot{K}_1(t) + \sigma \dot{K}_2(t) + m\mu\sqrt{\frac{2}{g}}\frac{d}{dt}\sqrt{H_0 - K_2(t)} \quad (39)$$

式 (12) より

$$0 = -m\mu + \sigma \dot{K}_2(t) + m\mu\sqrt{\frac{2}{g}}\frac{d}{dt}\sqrt{H_0 - K_2(t)} \quad (40)$$

$$\frac{m\mu}{\sigma} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2g}}\frac{m\mu}{\sigma}\frac{1}{\sqrt{H_0 - K_2(t)}}\right)\dot{K}_2(t) \quad (41)$$

ここで定数

$$A = \frac{m\mu}{\sigma} \quad (42)$$

$$B = \frac{A}{\sqrt{2g}} \quad (43)$$

を導入すると微分方程式

$$A = \left(1 - \frac{B}{\sqrt{H_0 - K_2(t)}}\right)\dot{K}_2(t) \quad (44)$$

を得る。これは変数分離型なので、

$$A dt = \left(1 - \frac{B}{\sqrt{H_0 - K_2(t)}}\right) dK_2 \quad (45)$$

とすると

$$At + C = K_2(t) + 2B\sqrt{H_0 - K_2(t)} \quad (46)$$

とりあえずいまは $t = 0$ で $K_2 = 0$ という初期条件でこの微分方程式を解くと（あとで初期条件の時刻を $t = \tau_{f0}$ に平行移動する）、積分定数

$$C = 2B\sqrt{H_0} \quad (47)$$

を得る。したがって

$$At + 2B\sqrt{H_0} = K_2(t) + 2B\sqrt{H_0 - K_2(t)} \quad (48)$$

K_2 を変数変換し

$$S(t) = \sqrt{H_0 - K_2(t)} \quad (49)$$

つまり

$$K_2(t) = H_0 - S(t)^2 \quad (50)$$

とすると、

$$At + 2B\sqrt{H_0} = H_0 - S(t)^2 + 2BS(t) \quad (51)$$

$$S(t)^2 - 2BS(t) + 2B\sqrt{H_0} + At - H_0 = 0 \quad (52)$$

これを解くと

$$S(t) = B \pm \sqrt{B^2 - 2B\sqrt{H_0} - At + H_0} \quad (53)$$

$$S(t) = B \pm \sqrt{(\sqrt{H_0} - B)^2 - At} \quad (54)$$

$\sqrt{H_0} - B$ の符号をみるために $\epsilon = B/\sqrt{H_0}$ を評価すると

$$\epsilon = \frac{B}{\sqrt{H_0}} = \frac{m\mu}{\sigma\sqrt{2gH_0}} = \frac{K_0/T_0}{\sqrt{2gH_0}} \quad (\because \text{eq. (8)}) \quad (55)$$

右辺の分子は砂時計の速度スケール（砂層の初期高さ と 計時時間の比）で、分母は砂粒の（最大）自由落下速度である。したがって

$$\epsilon \ll 1 \quad (56)$$

としてよい。つまり

$$\sqrt{H_0} - B > 0 \quad (57)$$

である。 $t = 0$ で $s = \sqrt{H_0}$ になるので式 (55) の複号はプラスをとる

$$S(t) = B + \sqrt{(\sqrt{H_0} - B)^2 - At} \quad (58)$$

式 (51) より

$$K_2(t) = H_0 - \left\{ B + \sqrt{(\sqrt{H_0} - B)^2 - At} \right\}^2 \quad (59)$$

この解は複雑なので、式 (57) を用いて近似する。

$$K_2(t) = H_0 - \left\{ \epsilon\sqrt{H_0} + \sqrt{(\sqrt{H_0} - \epsilon\sqrt{H_0})^2 - At} \right\}^2 \quad (60)$$

$$= H_0 - H_0 \left\{ \sqrt{1 - \frac{At}{H_0}} \right\}^2 + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (61)$$

$$= H_0 - H_0 \left(1 - \frac{At}{H_0} \right) + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (62)$$

$$= At + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (63)$$

つまり $\mathcal{O}(\epsilon)$ の誤差で微分方程式 (45) の解は

$$K_2(t) = At \quad (64)$$

である。

この解は微分方程式 (45) を $t = 0$ で $K_2 = 0$ という初期条件で解いたものであったが、本来は $t = \tau_{f0}$ で $K_2 = 0$ とすべきであった。つまり解は

$$K_2(t) = \frac{A(t - \tau_{f0})}{H_0} = \frac{m\mu K_0}{M_0}(t - \tau_{f0}) \quad (65)$$

である。