

砂時計のシミュレーション

陰山 聡[†]、中島 涼輔[†]、中戸 昂明[‡]

[†] 神戸大学システム情報学研究科、[‡] 神戸大学システム情報学部

September 21, 2025

Abstract

砂時計の砂が落ちている間、砂時計の重さはわずかに重くなることが知られている。その重さの変化はとても小さいので、この効果の実験的な検証は容易ではない。ソフトスフィアモデルに基づいた個別要素法シミュレーションにより、砂時計の重さの変化を再現した。

1 はじめに

砂時計を手に持ち、目をつむって重さを感じてみよう。砂時計の砂が落ち始める前の砂時計全体の重さと、砂がすべて落ちきった後の砂時計全体の重さはもちろん変わらない。では、砂が落ちている最中の砂時計の重さはどうかだろうか。この問題は古くから知られていて、砂時計はわずかに重くなることがわかっている。

Scientific American 誌の有名な Mathematical Games の連載記事で Gardner が砂時計を使ったおもちゃを紹介したときがこの問題に注目を集めた最初であろう [1]。その後すぐに、落下した砂が砂時計の底面に与える力積（つまり砂時計を重くする効果）が、落下中の砂の分だけ砂時計の重さが軽くなる効果とちょうどキャンセルするという指摘がされた [3]。そこでは、この問題は力学教育のよい題材になるであろうとも指摘された。その議論は以下のように簡単なものである：砂時計のオリフィスから質量 m の砂が落下し、 τ_f だけの時間をかけて下面に到達するあいだ、重力 mg の分だけ砂時計は軽くなる。1 秒間に μ 個の砂が落ちる砂時計であれば $\mu\tau_f$ 個の砂が浮いているので、砂時計は $\mu\tau_f mg$ だけ軽くなる。一方、一つの砂が底面到達したときにもつ運動量は $m g \tau$ なので、落下する砂が 1 秒あたりに底面に与える力積、つまり力は $m\mu g \tau_f$ であり、浮いている砂の重力とちょうどキャンセルする。この議論は直感的で、説得力があるので、その後、多くの人が、砂時計の重さは変わらないと信じてきた。

ところが、その後、より詳しく解析すれば、砂が落ちている間、砂時計はわずかながら重くなることが指摘された [5]。著者等は理論解析に加えて実験も行い、ガラスの粉末を使った「砂」時計の重量を測定してガラス粉末の総質量の 10^{-3} 倍程度というわずかな割合だけ実際に重くなることを示した。

砂が落ちている間、砂時計の重さが変化するのであることは、砂の重心の運動から容易に予想される。最初の砂が落ち始める前、砂時計の上部で静止状態にあった重心は、砂が落ち始めると下部に移動しはじめ、全ての砂が落ちきった後には砂時計の下部で静止状態になる。あきらかに砂の重心は上下方向に加速度運

動をしている。つまり砂時計が砂に力（抗力）を及ぼしているの、それが砂時計全体の重さに反映されるはずである。ただし、重心移動の距離はわずか（最大でも砂時計の高さ程度）であり、しかもかなり時間をかけたゆっくりとした移動（砂時計が3分計であれば3分間）なので、その加速度は必然的に小さく、したがって砂時計全体の重さに与える影響は小さいことは予想できる。

日常目にする砂時計は真ん中がくびれていて、オリフィスの一つである。当然、落下する砂粒の流れも一本なので、オリフィスよりも上の部分ではそれぞれの砂粒は水平方向に運動する。また、下面に降り積もった砂もまた複雑な水平運動をする。この複雑さを回避するために、Tuinstra等は単一のオリフィスではなく多数（230個）の穴を持つ「ふるい」で区切られた円筒状の砂時計モデルを作成し、（本物の）砂 1.6 kg を使った実験を行った [6]。理論的には 0.116 g の重さの増加が期待され、測定結果は 0.121 g であった。

金属粉末を使った実験で、砂時計の重さの時間変化が詳細に解析されている [4]。時間変化は主に3つの時期に分けることができる。最初期、砂が落ち始めた直後から最初の砂粒が下面に到達するまでの短い間、砂時計の重量は軽くなる。これは空中にいる砂粒の重量分だけ重みがかからないためである。また、最終期、最後の砂粒が落ちている短い間は、砂時計は重くなる。これは下面を叩く砂粒達が与える力積をキャンセルするだけの数の砂が空中にないためである。この二つ短い遷移時間の間、浮いている砂粒の軽さと床面に衝突する砂粒が与える力積がキャンセルするが、冒頭に述べた重心に移動効果により、重量が一定の値でわずかに重くなる時期が続く。

砂時計の重さの問題は、多くの非自明な要因が関係する力学の問題として興味深いだけでなく、質量が時間変化する系の典型例として教育的にも重要であると指摘されている [2]。

コンピュータシミュレーションでこの効果、つまり砂が落下している最中の砂時計がわずかに重くなる効果を実証した研究はまだないようである。本研究の目的は、簡単でありながら高精度な砂時計のコンピュータシミュレーションモデルを開発することである。我々のモデルは、落下中の砂の分だけ軽くなる効果と落下した砂が与える力積がちょうどキャンセルするという基本的な効果を再現することはもちろん、砂の重心移動によるわずかな重さの変化という微弱な効果も定量的に再現する。このシミュレーションはプログラミング初心者にも扱えるようデザインされた Processing 言語¹で書かれており、そのソースコードは公開する予定である²。ノート PC で実行可能なほど小規模なシミュレーションなので、この興味深い力学問題を直接体験することができる。

¹<https://processing.org>

²<https://github.com/akageyama/lab-project-hourglass>

2 理論

3 運動方程式に基づく抗力の正確な評価

T_0 秒間を測る砂時計を考える。重力加速度を g 、砂粒の総数を N_0 、砂全体の質量を M_0 とすると、砂粒一つの質量 m は、

$$m = \frac{M_0}{N_0} \quad (1)$$

である。1 秒間に落ちる砂粒の数を

$$\mu = \frac{N_0}{T_0} \quad (2)$$

とする。 m と μ は

鉛直上向きに y 軸をとり、砂が落ちる位置すなわちオリフィスの位置を $y = 0$ とする。最初の砂粒が落下する距離、つまり砂時計の底面の位置を $y = -H_0$ とする。

砂時計の床面に働く抗力を求めるために運動方程式を立てる。オリフィスよりも上にある砂の層を質量 $M_1(t)$ をもつ物体 1、下に落下して静止した砂の層を質量 $M_2(t)$ をもつ物体 2、落下中の砂粒全体を物体 3 とみなす。これは可変質量の物体が相互作用する力学の問題である。

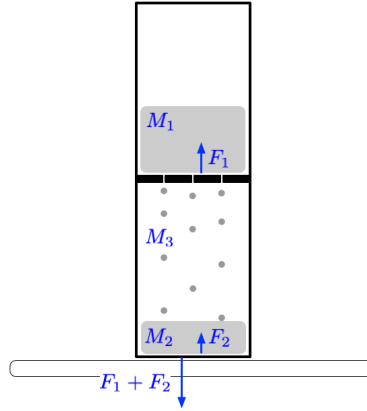


Figure 1: CAPTION.

簡単のため、オリフィス付近を除いた砂時計の断面積は一定とする。計時を開始する前の砂の層の厚さを K_0 、砂粒の高さあたりの質量密度を σ とすると

$$\sigma = \frac{M_0}{K_0} \quad (3)$$

である。

$$\frac{m\mu}{\sigma} = \frac{K_0}{T_0} \quad (4)$$

という関係がある。

4 物体 1（落下前の上の砂層）

計時開始時刻を $t = 0$ とすると、時刻 t では μt 個の砂粒がオリフィスから落下しているので、この時刻にオリフィスの上部分にある砂、つまりまだ落下していない砂の数は

$$N_1(t) = N_0 - \mu t \quad (5)$$

である。したがってオリフィス上部の砂の質量は

$$M_1(t) = m(N_0 - \mu t) \quad (6)$$

である。この時刻におけるオリフィス上部の砂層の厚さは

$$K_1(t) = \frac{M_1(t)}{\sigma} = \frac{m}{\sigma}(N_0 - \mu t) \quad (7)$$

である。上の層の厚さは一定の割合で減少する。

$$\dot{K}_1(t) = -\frac{m\mu}{\sigma} \quad (8)$$

この層の重心の y 座標を $Y_1(t)$ とすると

$$Y_1(t) = \frac{K_1(t)}{2} = \frac{m}{2\sigma}(N_0 - \mu t) \quad (9)$$

物体 1 の運動量は

$$P_1(t) = M_1(t)\dot{Y}_1(t) \quad (10)$$

その時間微分は

$$\dot{P}_1(t) = \dot{M}_1(t)\dot{Y}_1(t) = \frac{m^2\mu^2}{2\sigma} \quad (11)$$

である。運動量 P_1 は下向き ($P_1 < 0$) であるが、その時間変化 \dot{P}_1 は上向き ($\dot{P}_1 > 0$) である。

4.1 物体 2（落下後の下の砂層）

同様に下の砂層の厚さを $K_2(t)$ 、質量を $M_2(t)$ とする。これらの量が正になるのは時刻 $t = 0$ に落下した最初の砂粒が下の床に到達するまでの時間、つまり自由落下時間

$$\tau_{f0} = \sqrt{\frac{2H_0}{g}} \quad (12)$$

以降である。時刻 $t > \tau_{f0}$ では下の層に砂粒が μ の割合で降り注ぐので、

$$M_2(t) = m\mu(t - \tau_{f0}) \quad (13)$$

と書ける。実がこれは正確ではないが、その誤差は小さい。詳細は Appendix A 参照。

下の砂層の厚さは

$$K_2(t) = \frac{M_2(t)}{\sigma} = \frac{m\mu}{\sigma}(t - \tau_{f0}) \quad (14)$$

その時間微分は

$$\dot{K}_2(t) = \frac{m\mu}{\sigma} \quad (15)$$

である。下の砂層の重心の y 座標は

$$Y_2(t) = -H_0 + \frac{K_2(t)}{2} \quad (16)$$

である。物体 2 の運動量は

$$P_2(t) = M_2(t)\dot{Y}_2(t) \quad (17)$$

その時間微分は

$$\dot{P}_2(t) = \dot{M}_2(t)\dot{Y}_2(t) = \frac{m^2\mu^2}{2\sigma} \quad (18)$$

である。

Appendix A にしめすように、式 (15) には誤差がある。正しくは

$$\dot{K}_2 = \frac{m\mu}{\sigma} \left(1 + \frac{\epsilon}{2\sqrt{1 - \beta(t - \tau_{f0})}} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (19)$$

である。ここで

$$\epsilon = \frac{K_0/T_0}{\sqrt{2gH_0}} \ll 1 \quad (20)$$

は微小量である。(Appendix A 参照)。運動量の時間変化に与えるこの誤差の影響は小さい。

$$\dot{P}_2 = \dot{M}_2 \frac{\dot{K}_2}{2} = \frac{\sigma}{2} (\dot{K}_2)^2 = \frac{\sigma}{2} \frac{m^2\mu^2}{\sigma^2} \left(1 + \frac{\epsilon}{\sqrt{1 - \beta t}} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (21)$$

$$\dot{P}_2 = \frac{m^2\mu^2}{2\sigma} \left(1 + \frac{\epsilon}{\sqrt{1 - \beta t}} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (22)$$

4.2 物体 3 (落下中の砂粒)

$t \geq \tau_{f0}$ のある時刻 t に落下している最中の砂粒は、高さ

$$K_3(t) = H_0 - K_2(t) \quad (23)$$

に分布している。

物体 3 の運動量を評価するためにまず、物体 3 内部の運動量分布は高さ y に
よらず一定であることに注意する。位置 y を速度 $v_y(y)$ で下方 ($v_y < 0$) に通過す
る砂粒の数は常に μ 個なので、砂粒の数密度を $n(y)$ とすると、

$$n(y)v_y(t) = -\mu = \text{const.} \quad (24)$$

である。したがって物体 3 の運動量の密度は

$$p_3 = mn(y)v_y(y) = -m\mu = \text{const.} \quad (25)$$

は一定である。したがって物体 3 の運動量は

$$P_3(t) = p_3 K_3(t) = -m\mu(H_0 - K_2(t)) \quad (26)$$

である。その時間変化は

$$\dot{P}_3(t) = m\mu\dot{K}_2(t) = \frac{m^2\mu^2}{\sigma} \quad (27)$$

である。

$\mathcal{O}(\epsilon)$ の補正の影響は小さい。

$$\dot{P}_3 = m\mu\dot{K}_2 = \frac{m^2\mu^2}{\sigma} \left(1 + \frac{\epsilon}{2\sqrt{1-\beta t}} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (28)$$

4.3 運動方程式

$F_1(>0)$ を砂時計の構造体が（オリフィスのある面で）物体 1 を支える抗力、
 $F_2(>0)$ を砂時計の構造体が（底面で）物体 2 を支える抗力とする。この二つの
和 $F = F_1 + F_2$ は砂時計の構造体が砂を支える力である。砂が落ちている間に F
が砂にかかる重力 M_0g よりも大きければ砂時計は重くなる。

物体 1 と物体 3 の間に作用する力を F_{13} 、物体 2 と物体 3 の間に作用する力を
 F_{32} とすると、この系の運動方程式は

$$\dot{P}_1(t) = -M_1(t)g + F_{13} + F_1 \quad (29)$$

$$\dot{P}_2(t) = -M_2(t)g + F_{32} + F_2 \quad (30)$$

$$\dot{P}_3(t) = -M_3(t)g - F_{13} - F_{32} \quad (31)$$

上の 3 つの式の両辺を足し、式 (11), (18), (27) を使うと

$$2\frac{m^2\mu^2}{\sigma} = -(M_1 + M_2 + M_3)g + F_1 + F_2 \quad (32)$$

したがって

$$F = F_1 + F_2 = M_0g + 2\frac{m^2\mu^2}{\sigma} \quad (33)$$

つまり計時中の砂時計が砂を支える抗力は、右辺第 2 項

$$\Delta F = 2\frac{m^2\mu^2}{\sigma} = 2\frac{M_0K_0}{T_0^2} \quad (34)$$

だけ大きくなる。最後の式変形では式 (4) と $m\mu = M_0/T_0$ を使った。力ではなく重さで表現すれば

$$\Delta W = 2 \frac{M_0 K_0}{g T_0^2} \quad (35)$$

である。

Tuinstra 等はいくびれのない円筒形の容器を作り、その真ん中に設置した多数の穴をもつ「ふるい」状の板を通過して落下する砂柱の同時落下で実験を行った [6]。その実験では $M_0 = 1.6$ (kg)、 $T_0 = 23.6$ (s)、 $K_0 = 0.198$ (m) である。式 (35) から評価される重さの変化は $\Delta W = 1.16 \times 10^{-4}$ (kg) である。彼らの測定値は $\Delta W = (1.21 \pm 0.06) \times 10^{-4}$ (kg) であった。相対的にこれほど微小な重さの差を検出するためには高精度の重量計と洗練された実験技術が必要である。

5 シミュレーションモデル

5.1 砂粒のモデル

我々は粒子法（個別要素法）に基づくシミュレーションによって砂時計の重さの変化を再現する。第 3 節で述べた理論は、砂粒の水平方向の運動は全く寄与しておらず、この現象は本質的に 1 次元運動であることから、このシミュレーションにおいても 1 次元モデルを採用する。落下する砂は複数の本数があるが、それぞれの砂柱は常に鉛直方向に 1 次元運動をする。下の砂層に到達した砂粒は水平方向に動くことはなく、落ちた順番に上に積み上がっていく。砂粒同士の接触相互作用は上下二つの隣の砂粒とだけ考えればよい。

砂粒同士の相互作用および砂粒と床面との相互作用はソフトスフェアモデルで表現する。一つの砂粒を半径 a 、質量 m の球とする。 i 番目の砂粒と、下方にいる隣の砂粒 $i-1$ との距離が $2a$ よりも大きい場合は互いに力をおよぼすことはない。各砂粒は自然長 a 、ばね定数 k のバネがあるものとする。したがって粒子間距離が $2a$ 未満になった場合にバネによる反発力が生じる。また、粒子同士の相対速度の大きさ v に比例して bv の抵抗力が生じるダンパーを想定する。

砂時計の中の砂粒が砂時計の床面、あるいは他の砂粒に高速で衝突したときもほとんど跳ね返ることなく静止する。完全非弾性衝突に近いこのような現象をソフトスフェアモデルで再現するためには適切な k と b を設定するだけでなく、十分に細かい時間刻み幅 Δt をとる必要がある。本シミュレーションでは時間積分法として陽的 4 次ルンゲ・クッタ法を採用した。

砂時計のオリフィスの位置から床面までの距離を H_0 とする。最初の砂粒は高さ H_0 から自由落下し、速度

$$v_{f0} = \sqrt{2gH_0} \quad (36)$$

で砂時計の床面に衝突し、静止する。ここで g は重力加速度である。本シミュレーションでは $g = 9.80665$ (m/s²) とした。砂粒の半径と自由落下速度できまる時間スケールは

$$\tau_{f0} = \frac{a}{v_{f0}} \quad (37)$$

である。時間刻み幅は

$$\Delta t = \alpha \tau_{f0} \quad (38)$$

として決める。ここで係数 α は十分小さい値で、本シミュレーションでは $\alpha = 10^{-3}$ とした。バネ定数 k は単振動の周期が τ_{f0} と等しくなるよう

$$k = m \left(\frac{2\pi}{\tau_{f0}} \right)^2 \quad (39)$$

と設定する。ダンパーの減衰係数は定数 β を

$$b = \beta b_0 \quad (40)$$

として与える。ここで $b_0 = 2\sqrt{mk}$ は臨界減衰係数で、 β は定数である。本シミュレーションでは $\beta = 10$ とした。

5.2 砂時計のモデル

砂時計は二つの床面をもつ「2階建て」構造をもつ。床面は $y = 0$ と $y = -H_0$ にあり、ここでは前者を U_F (Upper floor)、後者を L_F (Lower floor) と呼ぶ。 $t = 0$ に最初の砂粒が落ち始める時刻に、上の床は全部で N_p 本の砂柱 (sand pile) を支えている。各砂柱には固有の整数 p ($0 \leq p < N_p$) を割り当てる。一本の砂柱は N_s 個の砂粒から構成される。砂粒には固有の番号 i ($0 \leq i < N_s$) をつける。0 番目の砂粒が一番下で、 $N_s - 1$ 番目の砂粒が一番上である。砂粒が落下し、衝突しても、各砂粒の上下の位置関係が変わることはない。

シミュレーション開始時に、すべての砂柱を U_F よりも上方に配置し、 $t = 0$ から全部で $N_0 = N_p N_s$ 個の砂粒の運動方程式を解く。

ある一つの砂柱の中の i 番目の砂粒の y 座標を y_i と書くと、その運動方程式は、

$$m \frac{d^2 y_i}{dt^2} = -mg + F_{i,U_F} + F_{i,L_F} - F_{i,i+1} + F_{i,i-1} \quad (41)$$

である。ここで F_{i,U_F} , F_{i,L_F} , $F_{i,i+1}$, $F_{i,i-1}$ は、それぞれ上の床 U_F から受ける抗力、下の床 L_F から受ける抗力、上の砂粒と接触した場合に受ける下向きの力 (バネ力とダンパー力の和)、下の砂粒と接触した場合に受ける上向きの力である。

上の床 U_F と接触している粒子は常に 0 個または 1 個である。粒子 i が U_F と接触していなければ $F_{i,U_F} = 0$ である。下の床 L_F についても同様である。

各砂柱は、上の床 U_F と接触する可能性のある粒子番号を保持している。シミュレーション開始時にはその番号は $i = 0$ (砂柱の中で一番下に位置する砂粒) である。シミュレーション開始時に $i = 0$ の砂粒が U_F から半径 a よりも大きな距離だけ離れている、つまり接触していない場合でも、時間の経過と共にこの粒子 0 は落下し、いずれ U_F と接触する。この粒子 0 は U_F から上向きの力 F_{i,U_F} の力を受けて減速し、やがて静止するが、静止する前、あるいはまだ動いている間に、上方から別の粒子 $i = 1$ が落下し、衝突して下向きの力 $-F_{01}$ を粒子 0 に及ぼす。そしてこの粒子 1 もまたその上の粒子 2 によって上から押さえつけられる。

十分に時間が経過すると、この砂柱の粒子はすべて静止する。この状態では、一番下の粒子 0 は自分自身の重みに加えて、上に積まれた $(N_s - 1)$ 個の粒子の重みによって下方に押さえつけられ、その力は床 U_F とのバネ力 F_{0,U_F} とつり合っている。つまり $F_{0,U_F} = N_s mg$ であり、床 U_F が砂柱を支える抗力がこの F_{0,U_F} である。

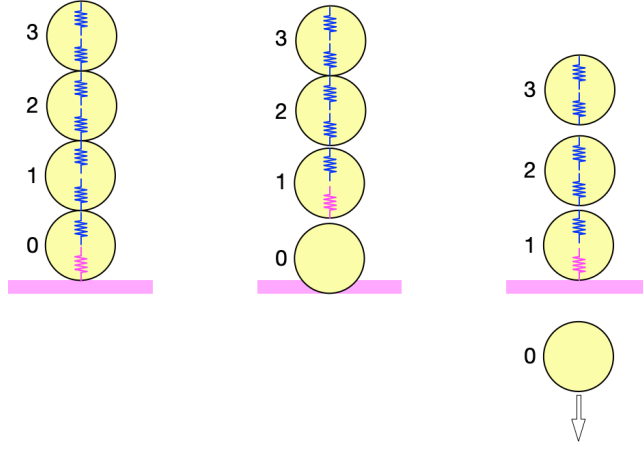


Figure 2: CAPTION.

オリフィスを通過して落下する砂粒の数が時間的に一定というであることが砂時計の基本性質（Beverloo 則）である。このを本研究では次の方法で実装した。一本の砂柱の砂粒には 0 番から順番に上に向かって番号がつけてあるので、当初は粒子 0 は上方で粒子 1 と、下方で床面と相互作用する。床面が粒子 0 を支えることで、全ての粒子が床面の上に直線上に積み重なった状態で静止する。あらかじめ指定した一定の時間 μ^{-1} が経過すると、床面と相互作用する粒子が 1 に切り替わる。その結果、粒子 0 は（床面をすり抜けて）下方に落下する。粒子 1 は床面と衝突するとダンパーによる緩和を経て静止する。以下同様に μ^{-1} の時間が経過するごとに床面と相互作用する粒子の番号が切り替わる。ここでは $y = 0$ にある床面 U_F について説明したが、 $y = -H_0$ にある下の床面 L_F についても同様に粒子 0 は L_F と衝突し、バネ・ダンパーモデルによる緩和を経て静止する。下の床面 L_F は常に粒子 0 と相互作用するので、粒子 0 が（したがって全ての砂が）さらに下に落ちることはない。

床 U_F が相互作用する相手の粒子番号を周期 μ^{-1} で切り替えるわけであるが、 N_P 本ある砂柱でその切り替えの位相をずらすことで砂粒の落下をバラバラにする。図??は $N_P = 4$ で各砂柱中の粒子数 $N_S = 20$ のときのシミュレーションのスナップショットである。

6 まとめ

References

- [1] Martin Gardner, *MATHEMATICAL GAMES*, Scientific American **215** (1966), no. 2, 96–99.
- [2] Vladimir V Kassandrov and Zurab K Silagadze, *Hourglass of constant weight as an illustrative example of a system with a variable mass*, Granul. Matter **25** (2023) (en).

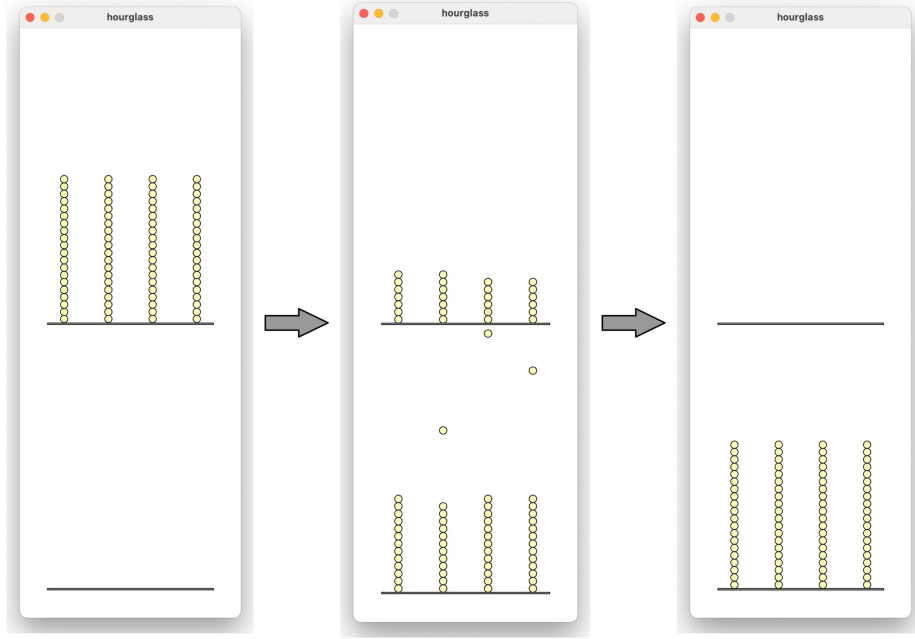


Figure 3: CAPTION.

- [3] Walter P Reid, *Weight of an hourglass*, Am. J. Phys. **35** (1967), 351–352 (en).
- [4] Achim Sack and Thorsten Pöschel, *Weight of an hourglass—theory and experiment in quantitative comparison*, Am. J. Phys. **85** (2017), 98–107 (en).
- [5] K Y Shen and Bruce L Scott, *The hourglass problem*, Am. J. Phys. 53, 787 – 788 (1985) **53**, 787–788.
- [6] Fokke Tuinstra and Bouke F Tuinstra, *The weight of an hourglass*, Europhys. News **41** (2010), 25–28.

A 下の砂層の厚さの時間変化

落下中の砂の総数は

$$N_3(t) = \mu \tau_f(t) = \mu \sqrt{\frac{2K_3(t)}{g}} = \mu \sqrt{\frac{2(H_0 - K_2(t))}{g}} = \mu \sqrt{\frac{2}{g}} \sqrt{H_0 - K_2(t)} \quad (42)$$

である。したがってその質量は

$$M_3(t) = m N_3(t) = m \mu \sqrt{\frac{2}{g}} \sqrt{H_0 - K_2(t)} \quad (43)$$

である。

砂の総質量は

$$M_0 = M_1(t) + M_2(t) + M_3(t) \quad (44)$$

は定数である。

$$K_0 = K_1(t) + K_2(t) + \frac{m\mu}{\sigma} \sqrt{\frac{2}{g}} \sqrt{H_0 - K_2(t)} \quad (45)$$

この式の時間微分をとる。

$$0 = \dot{K}_1(t) + \dot{K}_2(t) + \frac{m\mu}{\sigma} \sqrt{\frac{2}{g}} \frac{d}{dt} \sqrt{H_0 - K_2(t)} \quad (46)$$

式 (8) より

$$0 = -\frac{m\mu}{\sigma} + \dot{K}_2(t) + \frac{m\mu}{\sigma} \sqrt{\frac{2}{g}} \frac{d}{dt} \sqrt{H_0 - K_2(t)} \quad (47)$$

両辺を H_0 で割ると

$$0 = -\frac{m\mu}{\sigma H_0} + \frac{\dot{K}_2(t)}{H_0} + \frac{m\mu}{\sigma} \sqrt{\frac{2}{g H_0}} \frac{d}{dt} \sqrt{1 - \frac{K_2(t)}{H_0}} \quad (48)$$

ここで $K_2(t)$ を H_0 で規格化し

$$k_2(t) = \frac{K_2(t)}{H_0} \quad (49)$$

を導入する。さらに時間の逆数の次元をもつ定数

$$\beta = \frac{m\mu}{\sigma H_0} \quad (50)$$

と無次元定数

$$\epsilon = \frac{m\mu}{\sigma} \sqrt{\frac{2}{g H_0}} = 2 \frac{K_0/T_0}{v_{f0}} \quad (51)$$

を定義する。右辺最終項の分子は砂時計の速度スケール（砂層の初期高さと計時時間の比）で、分母は砂粒の（最大）自由落下速度である。したがって ϵ は微少量である。

$$\epsilon \ll 1 \quad (52)$$

あとで $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ を無視する近似を行う。すると $k_2(t)$ に対する微分方程式

$$\beta = \dot{k}_2(t) + \epsilon \frac{d}{dt} \sqrt{1 - k_2(t)} \quad (53)$$

を得る。これを解くために変数変換をする

$$\zeta(t) = \sqrt{1 - k_2(t)} \quad (54)$$

つまり

$$k_2(t) = 1 - \zeta^2(t) \quad (55)$$

である。解くべき微分方程式は

$$\beta = -2\zeta\dot{\zeta} + \epsilon\dot{\zeta} \quad (56)$$

つまり

$$(2\zeta - \epsilon)\dot{\zeta} = -\beta \quad (57)$$

である。これを解く。

$$(2\zeta - \epsilon) d\zeta = -\beta dt \quad (58)$$

$$\int (2\zeta - \epsilon) d\zeta = - \int \beta dt \quad (59)$$

$$\zeta^2 - \epsilon\zeta = -\beta t + C \quad (60)$$

K_2 (つまり ζ) は $t \geq \tau_{f0}$ から変化し始めるので、初期条件として $t = \tau_{f0}$ をとるべきだが、今は簡単のため時刻の原点をずらして $t = 0$ での初期条件を $\zeta = 1$ (つまり $K_2 = 0$) とした解を求め、最後に時刻を平行移動して元に戻す。初期条件 $\zeta(0) = 1$ より積分定数が $C = 1 - \epsilon$ と決まるので、

$$\zeta^2 - \epsilon\zeta + \beta t = 1 - \epsilon \quad (61)$$

$$\zeta^2 - \epsilon\zeta + \beta t + \epsilon - 1 = 0 \quad (62)$$

この 2 次方程式を解く

$$\zeta = \frac{1}{2} \left(\epsilon \pm \sqrt{\epsilon^2 - 4(\beta t + \epsilon - 1)} \right) \quad (63)$$

$$\zeta = \frac{1}{2} \left(\epsilon \pm \sqrt{\epsilon^2 - 4\beta t - 4\epsilon + 4} \right) \quad (64)$$

$$\zeta = \frac{1}{2} \left(\epsilon \pm \sqrt{(2 - \epsilon)^2 - 4\beta t} \right) \quad (65)$$

初期条件から複合は+をとる。

$$\zeta = \frac{1}{2} \left(\epsilon + \sqrt{(2 - \epsilon)^2 - 4\beta t} \right) \quad (66)$$

式 (55) より

$$k_2 = 1 - \frac{1}{4} \left(\epsilon + \sqrt{(2 - \epsilon)^2 - 4\beta t} \right)^2 \quad (67)$$

これから $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ を無視する近似を行う。 ϵ は上の式の右辺、最後の項の中だけにあり、しかもこの項は括弧の中が 2 乗されているので、今の近似のためにはこの括弧の中の ϵ の 1 次までとればよい。

$$k_2 = 1 - \frac{1}{4} \left(\epsilon + \sqrt{4 - 4\epsilon - 4\beta t} \right)^2 + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (68)$$

$$k_2 = 1 - \frac{1}{4} \left(\epsilon + 2\sqrt{1 - \epsilon - \beta t} \right)^2 + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (69)$$

$$k_2 = 1 - \frac{1}{4} \left(\epsilon + 2\sqrt{1 - \beta t - \epsilon} \right)^2 + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (70)$$

$$k_2 = 1 - \frac{1}{4} \left(\epsilon + 2\sqrt{(1 - \beta t)\left(1 - \frac{\epsilon}{1 - \beta t}\right)} \right)^2 + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (71)$$

$$k_2 = 1 - \frac{1}{4} \left(\epsilon + 2\sqrt{1 - \beta t} \sqrt{1 - \frac{\epsilon}{1 - \beta t}} \right)^2 + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (72)$$

$$k_2 = 1 - \frac{1}{4} \left(\epsilon + 2\sqrt{1 - \beta t} \left(1 - \frac{\epsilon}{2(1 - \beta t)} \right) \right)^2 + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (73)$$

$$k_2 = 1 - \frac{1}{4} \left(\epsilon + 2\sqrt{1 - \beta t} - \frac{\epsilon}{\sqrt{1 - \beta t}} \right)^2 + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (74)$$

$$k_2 = 1 - \frac{1}{4} \left(2\sqrt{1 - \beta t} + \epsilon - \frac{\epsilon}{\sqrt{1 - \beta t}} \right)^2 + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (75)$$

$$k_2 = 1 - \frac{1}{4} \left(2\sqrt{1 - \beta t} \left(1 + \frac{\epsilon}{2\sqrt{1 - \beta t}} - \frac{\epsilon}{2(1 - \beta t)} \right) \right)^2 + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (76)$$

$$k_2 = 1 - \frac{1}{4} 4(1 - \beta t) \left(1 + \frac{\epsilon}{\sqrt{1 - \beta t}} - \frac{\epsilon}{(1 - \beta t)} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (77)$$

$$k_2 = 1 - (1 - \beta t) \left(1 + \frac{\epsilon}{\sqrt{1 - \beta t}} - \frac{\epsilon}{(1 - \beta t)} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (78)$$

$$k_2 = 1 - (1 - \beta t) - \epsilon\sqrt{1 - \beta t} + \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (79)$$

$$k_2 = \beta t + \epsilon \left(1 - \sqrt{1 - \beta t} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (80)$$

時間微分は

$$\dot{k}_2 = \beta + \frac{\beta\epsilon}{2\sqrt{1 - \beta t}} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (81)$$

である。\$K_2\$ にもどすと、

$$K_2 = \frac{m\mu}{\sigma} t + \epsilon H_0 \left(1 - \sqrt{1 - \beta t} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (82)$$

$$\dot{K}_2 = \frac{m\mu}{\sigma} \left(1 + \frac{\epsilon}{2\sqrt{1 - \beta t}} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (83)$$

以上の解は微分方程式を $t = 0$ で $K_2 = 0$ ($\zeta = 1$) という初期条件で解いたものであったが、本来は $t = \tau_{f0}$ で $K_2 = 0$ とすべきであった。つまり

$$K_2 = \frac{m\mu}{\sigma}(t - \tau_{f0}) + \epsilon H_0 \left(1 - \sqrt{1 - \beta(t - \tau_{f0})} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (84)$$

$$\dot{K}_2 = \frac{m\mu}{\sigma} \left(1 + \frac{\epsilon}{2\sqrt{1 - \beta(t - \tau_{f0})}} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (85)$$