学号　　　　　　　　　　　　姓名　　　　　　　　　　　成绩______ _ __

考试日期:2020 年 6 月 10 日

考试科目：《微分几何试题》

注意事项：考试时间为三个小时（包括交卷时间）

题目：

一、本题 10 分(写出计算过程，二学位同学做，数学系不做)

如果曲线 $\Gamma: r = r(s)$ 有固定的非零挠率 τ，而 N, B 为 Γ 的主法向量和副法向量，其中 s 是曲线的弧长参数.

证明曲线 $\Gamma^*: r^* = \frac{1}{\tau}N - \int B\mathrm{d}s$，有固定曲率 $k^* = |\tau|$，并求 Γ^* 的挠率.

一、本题 10 分.(必须有计算过程，二学位同学不做)

已知两条曲线 $\Gamma: r = r(t), \Gamma^*: r = r^*(t)$ 的参数方程分别为

$$r(t) = (\frac{e^{-t}}{\sqrt{2}}, \frac{e^{t}}{\sqrt{2}}, t+1), r^*(t) = (\cosh u, \sinh u, u),$$

试证 Γ 和 Γ^* 是合同的。

二、 本题（15分）(写出计算过程，二学位同学只写第一问)

设常高斯曲率曲面S的第一基本形式为$I=\mathrm{d}u^2+c^2e^{\frac{2u}{a}}\mathrm{d}v^2$，其中$a,c$均为常数且$a$充分小.设曲面$\overline{S}$：$\overline{r}=r-ar_1,(r_1=r_u)$证明：

(1) $\overline{S}$和S在对应点处的切平面相互正交。

(2) $\overline{S}$ 和S 在对应点处的高斯曲率相等.

三、 本题（10 分）

已知两曲面 $r_i = r_i(u,v)(i=1,2)$ 等距，对应点具有相同的参数值.证明对任意不同时为零的常数 λ，μ, 两曲面 Σ_1： $r=\lambda r_1+\mu r_2$, Σ_2： $r=\mu r_1+\lambda r_2$ 等距.

四 、本题（10 分）（活动标架方法，自然标架计算得 0 分）

以 $\varphi = du^2+\cos^2 u dv^2$， $\phi = \cos^2 u du + dv^2$ 为第一基本形式与第二基本形式的曲面 S 是否存在?

五、本题(45 分)（二学位同学不做第 4、7 问）

已知曲面的第一第二基本形式分别为

$$I = \mathrm{d}u^2 + (u^2+4)\mathrm{d}v^2, \quad II = -\frac{4}{\sqrt{u^2+4}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

1. (5 分) 求曲面的一组正交活动标架$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$;

2. (5 分)求这组标架的相对分量$\{\omega^1, \omega^2, \omega_1^2, \omega_1^3, \omega_2^3\}$;

3. (5 分)求曲面曲线Γ_1:$\begin{cases} u = 3t, \\ v = t \end{cases}$ Γ_2:$\begin{cases} u = 3t, \\ v = -t \end{cases}$的夹角.

4. (10 分)求曲面在任意点处的主曲率和主方向.

5. (5 分)已知$\vec{W}=2uv\vec{r}_u+\dfrac{\sin^2 u}{\sqrt{u^2+4}}\vec{r}_v$，求向量场$\vec{W}$的协变微分$D\vec{W}$.

6. (5 分) 求曲面的 Laplace 算子的表达式.

7. (10 分）证明：曲面的测地线方程为 $v = k\int_{u_0}^{u} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+4-k^2}\sqrt{u^2+4}}$.

六、(10 分) **(不能用初等方法)**

在球面$S:\vec{r}(u,v)=R\{\cos u\cos v,\cos u\sin v,\sin u\}$上,求赤道在点$A(0,0)$处的单位切向量$\vec{w}_0$，沿闭曲线ABCDA逆时针方向平行移动一周后，回到A点后所得的向量.

其中$\angle \mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{2}$, CD是纬圆$u=\dfrac{\pi}{4}$上的弧段. (说清楚大小、方向.)