



2022-2023 学 年 第 一 学 期

考 试 统 一 答 题 册

题 号	一	二	三	四	五	总 分
成 绩						
阅卷人签字						
校对人签字						

考试课程 _____ 常微分方程 _____

班 级 _____ 学 号 _____

姓 名 _____ 成 绩 _____

2022年12月22日

一、填空题. 请在空格处写上正确答案(本题共20分, 每个空4分)

(1) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, 则矩阵指数函数 $e^{At} =$ _____.

(2) 已知函数 $f(x) = \cos x$ 的拉普拉斯变换 $L[\cos x] = \frac{s}{s^2+1}$ ($s > 0$), 则

$L[x \cos x] =$ _____.

(3) 方程 $y' = y(1 - y)$ 的满足初值条件 $y(0) = 2$ 的解 $y(x; 0, 2)$ 的饱和定义区间为 _____.

(4) 曲线族 $y = Cx + C^2$ 有包络线吗? 如果有, 请写出表达式

_____.

(5) 方程 $(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0$ 的通解为 _____.

二、解下列微分方程(本题共40分, 每小题8分)

(1) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^3}{xy^2-2}$.

$$(2) \quad x^3 y^{(3)} + x^2 y'' - 4xy' = x^2.$$

$$(3) \quad yy'' - (y')^2 = 3x^2 y^2.$$

$$(4) \quad y' = e^{xy'}.$$

(5) $x^3y'' - xy' + y = 0$.

三、(本题15分)

确定方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - xy^4 \\ \frac{dy}{dt} = -x^5 \end{cases}$$

的零解的稳定性,并说明此方程不存在闭轨.

四、(本题15分)

求下列方程组的通解、说明奇点的类型、并画出相图

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y \\ \frac{dy}{dt} = -4x - 2y \end{cases}.$$

五、(本题10分)

假设 $y = \varphi(x; x_0, y_0)$ 为微分方程

$$\frac{dy}{dx} = y \sin(xy)$$

的满足初值条件 $y(x_0) = y_0$ 的解.

(1) 证明:如果 $y_0 > 0$,则 $\varphi(x; x_0, y_0) > 0$;

(2) 计算: $\left. \frac{\partial \varphi(x; x_0, y_0)}{\partial x_0} \right|_{\substack{x_0=0, \\ y_0=0}}, \left. \frac{\partial \varphi(x; x_0, y_0)}{\partial y_0} \right|_{\substack{x_0=0, \\ y_0=0}}.$