

2023-2024春北航偏微分方程期中（郑孝信）

赤木量子整理

一、填空题（每空6分，共36分）

1. Yamake方程($n \geq 3$), $-\Delta u = \frac{n(n-2)}{4} u^{\frac{n+2}{n-2}}, u > 0$ 是__阶__(线性、拟线性、半线性)偏微分方程.
2. 写出Helmholtz方程 $-\Delta u = \lambda u, (x, y) \in \mathbb{R}^2, (\lambda \text{是正常数})$ 的一个非零解是__.
3. 已知 Ω 是 \mathbb{R}^n 中的有界开集, 且 $-\Delta u + b \cdot \nabla u = 0, x \in \Omega$, 期中 b 是常向量, 给出方程的一个Neumann边界条件_.
4. 已知函数 $e^{-(x^2+y^2)}$ 的傅里叶变换是 $\frac{1}{2}e^{-\frac{\xi^2+\eta^2}{4}}$, 求函数 $e^{-2024(x^2+y^2)}$ 的逆变换是.
5. 写出 $n \geq 2$ 维空间中半无界区域 $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x_n < \infty\}$ 上调和函数的格林公式_____.

二、简答题(第1小题8分、第2小题6分、第3小题8分，共22分)

1. 叙述调和函数中的Liouville定理和Harnack不等式.
2. 对如下问题($n \geq 2$) (具体方程忘记了, 写个大概, 用傅里叶变换就行)

$$-\Delta u + \lambda u = \delta$$

3. 写出如下Dirichlet问题的解

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in B_2(0), \\ u = g, & x \in \partial B_2(0). \end{cases}$$

期中 $B_2(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 | |x| < 2\}$.

三、计算题（第1小题10分，第2小题各15分，共25分）

1. 求解如下Cauchy 问题:

$$\begin{cases} 2u_x + 3u_y + 5u_z = u, \\ u(x, y, 0) = 2xy. \end{cases}$$

2. 求解如下问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & 0 < x < 1, y > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = 0, \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=1} = 0, \\ u|_{y=0} = 1-x, u|_{y \rightarrow \infty} = 0. \end{cases}$$

3. 忘了, 肯定是简单的题。

四、证明题（17分）

给出subhamonic的定义(evans课后练习题改编的，问题不写了，就把其中一个方程改一下)

$$-\Delta u + u^4 = 0.$$