北京航空航天大学

2020－2021 学年 第二学期期末

《复 变 函 数》

班 级________________学 号 __________

姓 名________________成 绩 __________

试题	一	二	三	四	总 分
得分					

复变函数期末考试试卷　　2021-06-28

班号__________　学号__________　姓名__________　成绩__________

注意事项：1、答案必须写在试卷上，写在稿纸上无效；

2、本卷正卷共？？？？页，卷面满分为 100 分。

题目：

一、 判断题(共 20 分，每小题 2 分。在每小题后面打上合适的符号"√" 或"×"). 1、函数 $f(z)$在点 z_0 可导，则函数 $f(z)$在 z_0 处解析。（ × ）

2、若函数 $f(z)$在区域 D 内具有一阶连续偏导数，则 $f(z)$在 D 内解析。（ × ）

3、若函数 $f(z)$在区域 D 内解析，则对 D 内的任一条简单闭曲线 C，有

$\int_c f(z)dz = 0$。（ × ）

4、有界整函数必为常数。（ √ ）

5、若函数 $f(z)$在区域 D 内的解析，对于 D 内的一个序列 $\{z_n\}$，有

$f(z_n)=0, n=1,2,3,\cdots$，则在区域 D 内 $f(z)\equiv 0$。（ × ）

6、设 $f(z)$ 在区域 D 内解析，且不为常数，则 $|f(z)|$ 在 D 的边界 C 上达到最小值。（ × ）

7、若 ∞ 为 $f(z)$ 的可去奇点，则 $\text{Res}(f(z),\infty)=0$。（ × ）

8、若 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点，则 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$。（ × ）

9、满足不等式$\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right| \le 2$的所有点 z 的集合是一个有界区域。 （ × ）

10、若函数$f(z)$在区域D内除去孤立奇点外解析，则$f(z)$为D内的亚纯函数。（ × ）

二、 填空题（共 30 分，每空 3 分）

1、设$\sin^2 z+\cos^2 z=$______ 1 ________。

2、$(-1)^i$的值为________ $e^{-(2k+1)\pi}, k\in$整数____________。

3、$\mathrm{Ln}(3-4i)$的主值是___ $\ln 5 - i\arctan\dfrac{4}{3}$ _____。

4、函数$\sqrt{z(z-1)(z-3)}$的支点为_____ 3,0,1 ，∞ ________________，它在__复平面上除去正实轴后得到的区域 内可以分出单值解析分支。

5、设$f(z)=\int_C \dfrac{e^{\xi}}{\xi - z}d\xi$，其中$C:|\xi|=4$，则$f'(i\pi)=$_____ $-2i\pi$ _____。

6、幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2i)^n z^{2n+1}$的收敛半径为__ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ________。

7、函数$f(z)=z^8+6z^3+z$在单位圆内的零点个数为_____ 3 _____________。

8、函数$\dfrac{\cot \pi z}{2z-3}$在$|z-i|=2$内的奇点个数是__ 4 ______。

9、设c为沿原点$z=0$到点$z=1+i$的直线段，则$\int_c 2\bar{z}dz=$__ 2 ______。

三、 计算题（共 36 分）

1、（**本题 8 分**）计算积分 $\oint\limits_{|z|=2}\frac{2z-1}{z(z-1)^2}dz$。

解：设$f(z)=\frac{2z-1}{z(z-1)^2}$,则$f(z)$在$|z|=2$内只有两个极点，$z=0$为一级极点，$z=1$是二级极点，由留数计算得

$\operatorname*{Res}_{z=0}f(z)=\frac{2z-1}{(z-1)^2}|_{z=0}=-1,\operatorname*{Res}_{z=1}f(z)=(\frac{2z-1}{z})'|_{z=1}=1.$

由留数定理得原式$=2\pi i(-1+1)=0.$

2、（**本题 8 分**）求函数 $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)^2}$ 在 $0<|z-1|<1$ 内的罗朗展式。

解 $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)^2}=\frac{1}{z-1}\frac{1}{(z-2)^2}=\frac{1}{z-1}\left(\frac{1}{1-(z-1)}\right)'$

$$=\frac{1}{z-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n\right)'$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}n(z-1)^{n-2}$$ （0<|z-1|<1）。

3、（**本题 10 分**）应用留数计算实积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin x}{a^2+x^2}dx$，其中 $a>0$。

解：$f(z)=\dfrac{z}{(a^2+z^2)}$在实轴上解析，分母的次数比分子高，在上半平面上除去$z=ai$为一级极点外解析，并且$f(z)\to 0(z\to\infty)$；

注意到$f(x)=\dfrac{x}{(a^2+x^2)}$为奇函数，于是

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{ix}}{(a^2+x^2)}dx=2\pi \mathrm{i}\mathrm{Res}[\frac{\mathrm{z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{z}}}{\mathrm{z}^2+a^2},\mathrm{z}=ai]=\pi\mathrm{e}^{-a}i$$

对比虚部得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{(a^2+x^2)}dx=\pi e^{-a}$$

$$\mathrm{I}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{(a^2+x^2)}dx=\frac{\pi e^{-a}}{2}$$

4、**（本题 10 分）** 求将上半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 映射成单位圆$|w|<1$ 的保形映射$w=f(z)$，且使$f(2i)=0,\arg f'(2i)=0$。

解：设映射为

$$w=f(z)=\lambda\frac{z-2i}{z+2i}，其中\lambda待定，且|\lambda|=1，$$

它把求将上半平面 Im z$>$0 上的点$2i$映射为单位圆|w|<1 的圆心，把$2i$关于实轴的对称点-$2i$映射为单位圆|w|=1 的对称点$w=\infty$。

由于 $w'=f'(z)=\lambda\dfrac{4i}{(z+2i)^2}$，$w'(2i)=f'(2i)=-\dfrac{\lambda}{4}i$，若使$\arg f'(2i)=0$，

只需取$\lambda=i$即可。

于是所求映射为

$$w=f(z)=i\frac{z-2i}{z+2i}。$$

四、

得分	

证明题（本题 14 分）

（1）证明代数基本定理：任何$n(\geq 1)$次代数方程至少有一个根。

（2）若函数$f(z)$在区域内解析，且$\arg f(z)$在 D 内为常数，试证$f(z)$必为常数。