

北京航空航天大学

2020-2021 学年 第二学期期末

《复变函数》

班 级 \_\_\_\_\_ 学 号 \_\_\_\_\_

姓 名 \_\_\_\_\_ 成 绩 \_\_\_\_\_

试题	一	二	三	四	总 分
得分					

复变函数期末考试试卷      2021-06-21

班号\_\_\_\_\_ 学号\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_ 成绩\_\_\_\_\_

注意事项：1、答案必须写在试卷上，写在稿纸上无效；

2、本卷正卷共 9 页，卷面满分为 100 分。

题目：

一、 判断题(共 20 分，每小题 2 分。在每小题后面打上合适的符号“√”或“×” )。

1、函数  $f(z)$  在点  $z_0$  可导，则函数  $f(z)$  在  $z_0$  处解析。(      )

2、若函数  $f(z)$  在区域  $D$  内具有一阶连续偏导数，则  $f(z)$  在  $D$  内解析。 (      )

3、若函数  $f(z)$  在区域  $D$  内解析，则对  $D$  内的任一条简单闭曲线  $C$ ，有  $\oint_C f(z)dz = 0$ 。  
(      )

4、有界整函数必为常数。 (      )

5、若函数  $f(z)$  在区域  $D$  内的解析，对于  $D$  内的一个序列  $\{z_n\}$ ，有  $f(z_n) = 0 \quad n = 1, 2, 3, \dots$ ，则在区域  $D$  内  $f(z) \equiv 0$ 。 (      )

6、设  $f(z)$  在区域  $D$  内解析，且不为常数，则  $|f(z)|$  只在  $D$  的边界  $C$  上达到最小值。 (      )

7、若  $\infty$  为  $f(z)$  的可去奇点，则  $\text{Res}(f(z), \infty) = 0$ 。 (      )

8、若  $z_0$  为  $f(z)$  的本性奇点，则  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ 。 ( )

9、满足不等式  $\left| \frac{z-i}{z+i} \right| \leq 2$  的所有点  $z$  的集合是一个有界区域。 ( )

10、若函数  $f(z)$  在区域  $D$  内除去孤立奇点外解析，则  $f(z)$  为  $D$  内的亚纯函数。  
( )

## 二、 填空题（共 30 分，每空 3 分）

1、设  $\sin^2 z + \cos^2 z =$ \_\_\_\_\_。

2、 $(-1)^i$  的值为\_\_\_\_\_。

3、 $\operatorname{Ln}(3-4i)$  的主值是\_\_\_\_\_。

4、函数  $\sqrt{z(z-1)(z-3)}$  的支点为\_\_\_\_\_，它在  
\_\_\_\_\_内可以分出单值解析分支。

5、设  $f(z) = \int_C \frac{e^\xi}{\xi - z} d\xi$ ，其中  $C: |\xi| = 4$ ，则  $f'(i\pi) =$ \_\_\_\_\_。

6、幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} (2i)^n z^{2n+1}$  的收敛半径为\_\_\_\_\_。

7、函数  $f(z) = z^8 + 6z^3 + z$  在单位圆内的零点个数为\_\_\_\_\_。

8、函数  $\frac{\cot \pi z}{2z-3}$  在  $|z-i|=2$  内的奇点个数是\_\_\_\_\_。

9、设  $c$  为沿原点  $z=0$  到点  $z=1+i$  的直线段，则  $\int_c 2\bar{z} dz =$ \_\_\_\_\_。

三、 计算题（共 36 分） 1、（本题 8 分） 计算积分  $\oint_{|z|=2} \frac{2z-1}{z(z-1)^2} dz$ 。

2、(本题 8 分) 求函数  $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)^2}$  在  $0 < |z-1| < 1$  内的洛朗展式。

3、(本题 10 分) 求将上半平面  $\text{Im } z > 0$  映射成单位圆  $|w| < 1$  的保形映射  $w = f(z)$ ，且使  $f(2i) = 0, \arg f'(2i) = 0$ 。

4、(本题 10 分) 应用留数计算实积分  $I = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{a^2 + x^2} dx$ , 其中  $a > 0$ 。

四、证明题（本题 14 分，两小题）

(1) 若函数  $f(z)$  在区域内解析，且  $\arg f(z)$  在  $D$  内为常数，试证  $f(z)$  必为常数。



(2) 证明代数基本定理：任何  $n(\geq 1)$  次代数方程至少有一个根。