北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

2021 —2022 学年第 2 学期

考试统一用答题册

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
成绩								
阅卷人签字								
校对人签字								

考试课程______微分几何____________________

班　　级____________**学 号**________________

姓　　名____________**成 绩**________________

2022　年 6 月　日

学号　　　　　　　　　姓名　　　　　　　　　成绩

考试日期:2022 年 6 月 18 日

考试科目：《微分几何试题》

注意事项：考试时间为两个半小时（包括交卷时间）

一、本题 10 分(必须有计算过程)

已知Γ：$r=r(s)$是曲面S上一条正则曲线，其曲率$k(s)>0$，挠率$\tau(s)>0$. 做新曲线

$$\Gamma^*: \ r^*(s)=T(s),$$

求新曲线的曲率、挠率和基本向量.

注记：点Γ的弧长参数不一定是Γ^*曲弧长参数.

二、本题 10 分.(必须有计算过程)

求曲线Γ: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9, \\ x^2-z^2=3. \end{cases}$ 在$(2,2,1)$处的曲率和挠率.

三、本题（10 分）(必须写出计算过程)

设常高斯曲率曲面S的第一基本形式为$I=\mathrm{d}x^2+\beta^2 e^{\frac{2x}{\lambda}}\mathrm{d}y^2$，其中$\lambda,\beta$均为常数且$\lambda$充分小. 设曲面$\bar{S}$：$\bar{r}=r-\lambda r_1,(r_1=r_u)$证明：$\bar{S}$和$S$在对应点处的切平面相互正交。

四 、本题（10 分）（要求：用活动标架法，否则 0 分）

设有两个二次外微分形式

$$\varphi=\cos^2\alpha dx^2+\sin^2\alpha dy^2, \quad \phi=\cos\alpha\cos\alpha(dx^2-dy^2),$$

其中$\alpha=\alpha(x,y)$，且$0<\alpha(x,y)<\dfrac{\pi}{2}$.证明在$E^3$中存在正则参数曲面以$\varphi$，$\psi$为它的第一基本形式与第二基本形式的充分必要条件是

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2}=\frac{1}{2}\sin 2\alpha.$$

五、本题(40 分)（要求：用活动标架法，否则 0 分）

已知曲面的第一、第二基本形式分别为

$$I=(1+u^2)\mathrm{d}u^2+u^2\mathrm{d}v^2,\quad II=-\frac{du^2+u^2dv^2}{\sqrt{u^2+1}}$$

1. (6 分) 求曲面的一组正交活动标架$\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$;

2. (8 分) 求这组正交活动标架的相对分量$\{\boldsymbol{\omega}^1,\boldsymbol{\omega}^2,\boldsymbol{\omega}_1^2,\boldsymbol{\omega}_1^3,\boldsymbol{\omega}_2^3\}$;

3. (10 分)求曲面在任意点处的主曲率和主方向.

4. (6 分)已知$\vec{W}=u^2v\vec{r}_u+2\cos^2u\vec{r}_v$，求向量场$\vec{W}$的协变微分$D\vec{W}$.

5. (5 分) 求曲面的 Laplace 算子的表达式.

6. （5 分）曲面是否为可展曲面，为什么?

六、本题 10 分

设曲面的第一基本形式为$I=v(du^2+dv^2),v>0$, 证明：曲面上与 u-曲线夹角不为$\dfrac{\pi}{2}$的测地线方程为$(u-c_1)^2=4c(v-c)$, 其中$c>0,c_1$为常数.

七、本题 10 分 **(不能用初等方法)**

在球面$S:\vec{r}(u,v)=R\{\cos u\cos v,\cos u\sin v,\sin u\}$上,单位向量$\vec{v}_0$绕半径为$r_0(r_0<R)$的纬圆平行移动一周，求转过的角度差(即$\vec{v}_0$的最终位置与$\vec{v}_0$的初始位置的夹角).