2022 年春季学期实变函数期中考试（张金华老师）

赤木量子整理

2022 年春

一. （24 分） *Lebesgue* 测度

1. 设 $E \subset \mathbf{R}$, 满足 $m^*(E) < \infty$. 任给 $a \in \mathbf{R}$, 定义 $aE = \{ax : x \in E\}$. 证明:$m^*(aE) = |a|m^*(E)$.

2. 设 $E \subset \mathbf{R}$ 为可测集. 证明：对任意 $A \subset \mathbf{R}$ 有

$$m^*(E \cap A) + m^*(E \cup A) = m^*(E) + m^*(A)$$

3. 证明：如果 E 是具有正测度的可测集, 则一定存在 $x, y \in E$,$x \neq y$, 使得 $x - y$ 是有理数.

答： 1. 因为 $E \subset \cup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$ 等价于 $aE \subset \cup_{n=1}^{\infty}a(a_n, b_n)$,$m^*([a_n, b_n]) = m^*((a_n, b_n))$, 且对任一区间 (α, β), 有

$$m^*(a(\alpha, \beta)) = |a| \ \ m^*((\alpha, \beta))) = |a| \ \ (\beta - \alpha)$$

根据外测度定义可知结论 $m^*(aE) = |a|m^*(E)$.

2. 当 $m^*(E) = +\infty$ 时，结论显然成立.

当 $m^*(E) < +\infty$ 时，由于 E 可测，从而 $m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$.

$$m^*(A \cup E) = m^*((A \cup E) \cap E) + m^*((A \cup E) \cap E^c) = m^*(E) + m^*(A \cap E^c)$$

从而 $m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cup E) - m^*(E)$. 结论成立.

3. 不妨设 $E \subseteq [a, b]$, 反证法. 设对任意 $x, y \in E$,$x \neq y$, 使得 $x - y$ 不为有理数.

二. （32 分） 可积函数与积分

1. 设 f 是定义在可测集 E 上的一个实值函数, 证：f 为可测函数当且仅当对任意 Borel 集 A,$f^{-1}(A)$ 是可测的.

2. 设 $E \subset \mathbf{R}$ 为有限测度集.$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为一列定义在 E 上的可测函数. 证明：函数列 $\left\{\frac{|f_n|}{1+|f_n|}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 可积, 并且如果 f_n 几乎处处收敛到 0，则

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \frac{|f_n|}{1 + |f_n|} = 0.$$

3. 设 $E\subset\mathbf{R}$ 是可测子集，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 f 均为 E 上的可积函数, 并且满足

$$\lim_{n\to\infty}\int_E|f_n-f|=0.$$

证明：函数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 依测度收敛到 f.

答： 1.f 可测当且仅当对于任意开集 O,$f^{-1}(O)$ 可测. 每个开集都是 Borel 集，从而必要性已证.

充分性: 定义 $\mathscr{F}=\{A\subset\mathbf{R}:f^{-1}(A) is\ measurable\}$, 则 $\mathscr{F}$ 是 $\sigma-$ 代数:

(1)$f^{-1}(\mathbf{R})=E$;(2) 若 $A\in\mathscr{F}$, 则 $f^{-1}(A^c)=(f^{-1}(A))^c$ 可测, 从而 $A^c\in\mathscr{F}$;(3) 若 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一族可数集合，其中 $A_n\in\mathscr{F},\forall n$, 则 $f^{-1}(\cup_{n=1}^{\infty}A_n)=\cup_{n=1}^{\infty}f^{-1}(A_n)$ 可测，从而 $\cup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{F}$;

$\mathscr{B}$ 是包含所有 Borel 集最小的 $\sigma-$ 代数, 从而 $\mathscr{B}\subseteq\mathscr{F}$. 则对任意 Borel 集 A,$f^{-1}(A)$ 是可测的.

2.(1)$|\int_E\frac{|f_n|}{1+|f_n|}|\le\int_E 1=m(E)<\infty$, 从而函数列可积.

(2) 由于 f_n 几乎处处收敛到 0，设 $E'=\{x\in E:\lim_{n\to\infty}\}$, 则 $m(E')=m(E)$.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_E\frac{|f_n|}{1+|f_n|}&=\lim_{n\to\infty}\int_{E'}\frac{|f_n|}{1+|f_n|}+\lim_{n\to\infty}\int_{E-E'}\frac{|f_n|}{1+|f_n|}\\&=\lim_{n\to\infty}\int_{E'}\frac{|f_n|}{1+|f_n|}=0\end{aligned}$$

3. 对任意 $\epsilon>0$,

$$m\{x\in E:|f_n-f|\ge\epsilon\}\le\frac{1}{\epsilon}\int_E|f_n-f|\to 0(n\to\infty)$$

三. （22 分） 微分与 L^p 空间

1. 令 $I=[0,1]$. 证明：定义在 I 上的实值函数 f 是有界变差的，当且仅当存在 I 上的单调递增函数 ψ, 满足对任意 $x_1<x_2$,$x_1,x_2\in I$ 有

$$f(x_2)-f(x_1)\le\psi(x_2)-\psi(x_1)$$

2. 设 f 是 $[0,1]$ 上的实值可积函数，定义

$$F(x)=\int_0^x f,\forall x\in[0,1]$$

证明：F 是从 $[0,1]$ 到 $\mathbf{R}$ 的连续函数. 那么 F 是绝对收敛的吗？如果是, 请给出证明; 否则给出反例.

答： 1.$f=\psi-(\psi-f)$

2. 由积分的绝对连续性，对于任意 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对 $[0,1]$ 中的任意可测集 A, 当 $m(A)<\delta$ 时，$\int_A|f(t)|dt<\epsilon$. 于是对于 $[0,1]$ 中任意有限个互不相交的开区间 $\{(a_i,b_i)\}_{i=1}^n$, 当 $\sum_{i=1}^n(b_i-a_i)<\delta$ 时，令 $A=\cup_{i=1}^n(a_i,b_i)$, 则 $m(A)=\sum_{i=1}^n(b_i-a_i)<\delta$. 从而

$$\sum_{i=1}^n|F(b_i)-F(a_i)|=\sum_{i=1}^n|\int_{a_i}^{b_i}dt|\le\sum_{i=1}^n\int_{a_i}^{b_i}|f(t)|dt=\int_A|f(t)|dt<\epsilon$$

从而 F 时绝对连续函数.

四. （22 分） 测度论，综合题

1. 设 $\mu^*: 2^X \to [0,+\infty]$ 是集合 X 上的外测度. 证明：对任意子集 $E \subset X$, 若 E 是 μ^*- 可测的，则 $X-E$ 也是 μ^*- 可测的.

2. 记 $I=[0,1]$,$\mathscr{B}$ 为 I 的 Borel 子集全体构成的 $\sigma-$ 代数. 可测空间 $(I,\mathscr{B}(I))$ 上的符号测度 μ 乘坐是有限的，如果 $|\mu|\ (X)<\infty$. 令 $\mathscr{A}$ 为 $(I,\mathscr{B}(I))$ 上所有有限符号测度构成的集合. 对 I 上的连续函数 f, 定义函数 $\|\cdot\|_f : \mathscr{A} \to [0,\infty)$ 如下，

$$\|\mu\|_f = |\int_I f d\mu|, \forall \mu \in \mathscr{A}.$$

(1) 证明 $\mathscr{A}$ 是一个实线性空间.

(2) 对 I 上任意连续函数 f，是否 $\|\cdot\|_f$ 总能构成一个范数? 如果是，请给出证明；否则请找出所有使得 $\|\cdot\|_f$ 成为范数的连续函数 f.

(3) 设 $f:[0,1]\to \mathbf{R}$ 为连续函数. 对任意 $y \in \mathbf{R}$, 记 $N(y)$ 为集合 $\{x\in[0,1]: f(x)=y\}$ 所含元素个数. 证明：$N:[0,1]\to[0,\infty]$ 是一个可测函数.

答: 1.E 是 μ^*- 可测的，则对每个 $A \subset X$,$\mu^*(A)=\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E^c)=\mu^*(A\cap(X-E)^c)+\mu^*(A\cap(X-E))$.

2.(1);(2)

(3) 任意 y，$N(y)$ 可测