2024 年春季学期实变函数期中考试（朱政老师）

赤木量子整理

2024 年春

一. （20 分） 回顾以下外测度 m^* 的定义，并证明一个外测度大于 0 的集合必然有一个外测度大于 0 的有界子集.

答: (1) 定义:

$$m^*(A) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) : A \subseteq \cup_{k=1}^{\infty} I_k\right\}$$

(2) 不妨设 $E \subset [a,b], m^*(E) > c > 0$, 记 $f(x) = m^*([a,x) \cap E), a \le x \le b$.

考虑 $a \le x < x + \Delta x \le b$, 则

$$[a, x+\Delta x) \cap E = ([a,x) \cup E) \cap ([x, x+\Delta x) \cap E)$$

可知 $f(x+\Delta x) \le f(x) + \Delta x. f \in C[a,b]$ 是明显的. 根据中值定理，存在 $\xi \in (a,b)$, 使得 $f(\xi) = c$. 取 $[a,\xi) \cap E$ 即可.

或者直接令 $E_n = E \cap [n-1, n), n \ge 1, E_n$ 有界,$E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$, 反证即出.

二. （20 分） 证明存在一个单位闭区间 $[0,1]$ 上的连续且严格单增函数把一个测度为正的可测集打到一个零测集; 若 f 为定义在某个可测集 E 上的连续函数, 是否对于任意可测集 A 有 $f^{-1}(A)$ 必为 E 的可测子集?

答: (1) 记 Cantor-Lebesgue 函数 $\psi(x)$,Cantor 集 C, 令 $f(x) = \frac{\psi(x)}{2}$, 则 f 将 $[0,1]$ 映射为 $[0,1]$, 令 $A = [0,1] - C$, 则 $f(A), f(C)$ 无交且 $m^*(f(A)) = \frac{1}{2}$. 由 $[0,1] = f(A) \cup f(C)$, 则 $m^*(f(C)) = \frac{1}{2}$.

f^{-1} 是一个 $[0,1]$ 上连续且严格单增函数, 且把一个测度为正的可测集 $f(C)$ 映射为零测集 C.

(2) 不一定. 如 $\psi(x)$ 将 C 的一个子集映射到一个不可测集，则 $\psi^{-1}(x)$ 将一个不可测集映射为一个可测子集.

三. （20 分） 若 f 为一个定义在可测集 E 上的非负可测函数, 证明:

$$\int_E f := sup \int_E \phi$$

上述 $supremum$ 对所有定义在 E 上支集测度有限非负不大于 f 的简单函数取.

答: 由简单函数逼近定理，存在 E 上一列递增简单函数列 $\{\phi_n\}$ 点态收敛于 f. 将上述 $\{\phi_n\}$ 用 $max\{0,\phi_n\}$ 代替，则简单函数在 E 上非负、支集有限且点态收敛于 f.

记 $A=\{\phi:0\le\phi\le f on E\}$, 其中 ϕ 简单，有限支集. 设 $\phi\in A$, 知 $\int_E f\ge\int_E\phi$. 从而 $\int_E f\ge sup\left\{\int_E\phi:\phi\in A\right\}$. 而在前面已经构造了一列递增简单函数列, 再由单调收敛定理, 知 $\int_E f=\lim_{n\to\infty}\int_E\phi_n$. 从而 $\forall\epsilon>0,\exists n\in\mathbf{N},s.t.$

$$\int_E f\le\int_E\phi_n+\epsilon\le sup\left\{\int_E\phi:\phi\in A\right\}+\epsilon$$

从而 $\int_E f\le sup\left\{\int_E\phi:\phi\in A\right\}$. 从而等式成立.

四. （20 分） f 为一个定义在可测集 E 上的可积函数, 对于任意 $n\in\mathbf{N}$, 定义 $E_n:=E\backslash(-n,n)$. 证明对于任意 $\epsilon>0$, 存在一个自然数 N, 使得对于任意 $n\ge N$, 都有

$$\left|\int_{E_n}f\right|<\epsilon$$

答: $\{E_n\}$ 是一个单调递减可数个 E 的可测子集族且 $m(\cap_{n=1}^{\infty}E_n)=m(\emptyset)=0$,

$$0=\int_{\cap_{n=1}^{\infty}E_n}f=\lim_{n\to\infty}\int_{E_n}f$$

化为极限的定义形式即可.

五. （20 分） 若 f 为一个定义在可测集 E 上的可测函数, 若 f 在可测子集 $E'\subset E$ 上有界, 证明存在一列定义在 E 上的单调下降的简单函数 $\{\phi_n\}$ 在 E' 上从上一致收敛到 f(即 ϕ_n 在 E' 上一致收敛于 f 且对任意 $n\in\mathbf{N}$, 在 E 上有 $\phi_n\ge\phi_{n+1}$ 且对于任意 $n\in\mathbf{N}$,$\phi_n\ge f$ 在 E' 上成立.

答: f 在 E' 上有界可测, 从而由简单函数逼近引理, 存在一列简单函数 $\{\phi_n\}$ 在 E' 满足 $f\le\phi_n$, 且 $\lim_{n\to\infty}\phi_n=f$.

将 ϕ_n 用 $max\{\phi_1,\phi_2,\cdots\}$ 代替后即证.