CA4141

Profa. Elisa Y Takada

Aula 01 (parte 1) - 13ago21

Sequências numéricas

Sequência numérica

Uma sequência de números reais é uma lista infinita de números reais que indicamos por

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots\ ,a_n,\ \cdots$$

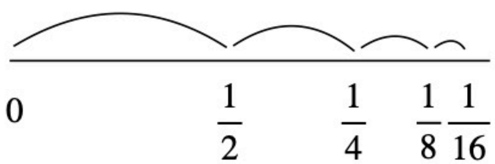
Definição Uma sequência de números reais é uma função cujo domínio é um conjunto de números da forma $\{N,\ N+1,\ N+2,\ \ldots\}$ com $N \in \mathbb{Z}_+$ que associa a cada n desse conjunto um único número real a_n.

Notação Podemos indicar uma sequência como $a_1,\ a_2,\ a_3\ ,\ \cdots\ ,a_n,\ \ldots$

sendo a_n seu termo geral e n o índice da sequência

$(a_n)_{n\geq N}$ ou (a_n) $\qquad$ $\{a_n\}_{n\geq N}$ ou $\{a_n\}$

Paradoxo de Zenon Como percorrer uma distância fixada se cada passo dado corresponde à metade da distância a ser percorrida?



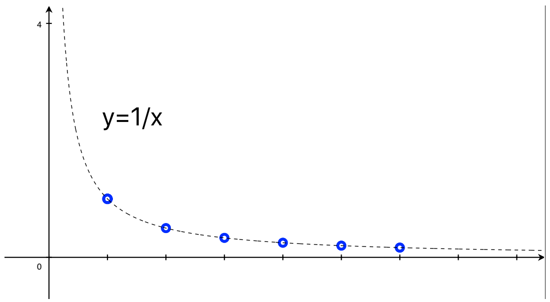
$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32},\ \cdots$$

Exemplo Dada as sequências (a_n), determinar os 4 primeiros termos e fazer um gráfico.

a) $a_n = \dfrac{1}{n},\ n \geq 1$

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots$$

$a_n \longrightarrow 0$ para
$n \longrightarrow +\infty$

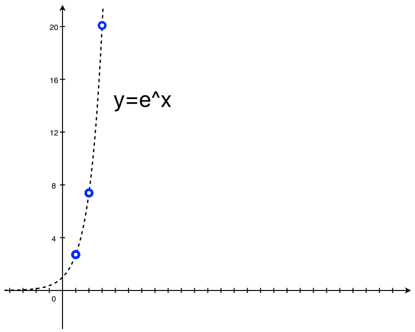


Convergente

b) $a_n = e^n,\ n \geq 1$

$$e,\ e^2,\ e^3,\ e^4,\ \ldots$$

$a_n \longrightarrow +\infty$ para
$n \longrightarrow +\infty$

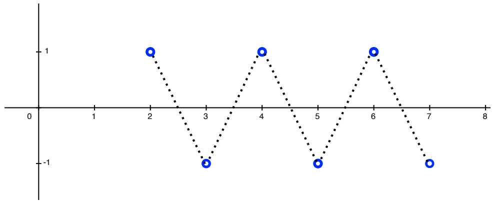


Divergente

c) $a_n = (-1)^n,\ n \geq 2$

$$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1, \ldots$$

Não existe limite de a_n
para $n \longrightarrow +\infty$



Divergente

Convergência de sequências numéricas

Definição Seja (a_n) uma sequência numérica. Dizemos que (a_n) é **convergente** e que converge para um número real L se existe o limite de a_n para n tendendo a $+\infty$ e indicamos $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} a_n = L$.

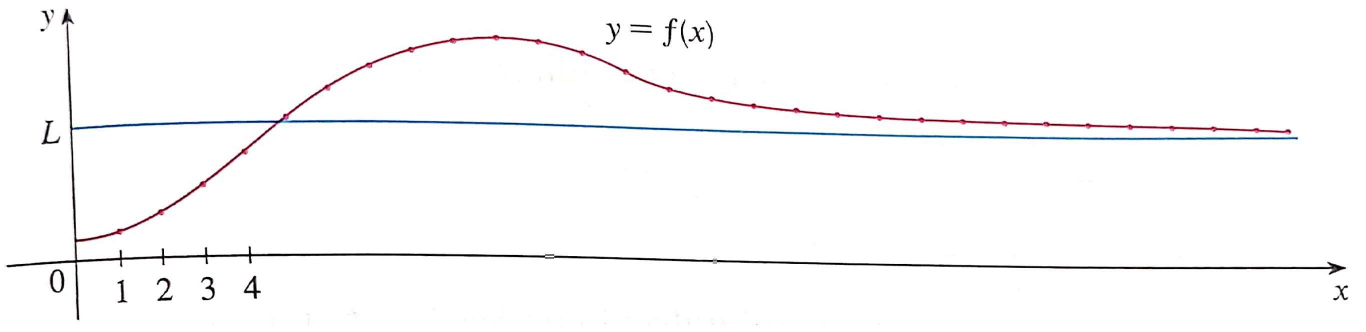


Figura J.Stewart, vol. 2

Caso contrário, isto é, se não existe o limite ou se o limite é infinito, então dizemos que (a_n) é **divergente**.

Teorema da substituição Se $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = L$, então $\lim_{n \longrightarrow +\infty} f(n) = L$ sendo L número real ou ∞.

Exemplo Decida se a sequência (a_n) é convergente.

a) $a_n = \dfrac{1}{n}$

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \Longrightarrow \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Logo a sequência (a_n) é convergente e converge para 0.

Resposta Converge

b) $a_n = \dfrac{2n}{n-3}$

$[\frac{\infty}{\infty}]$ **Indeterminação**

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{2x}{x-3} \overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\frac{2x}{x}}{\frac{x-3}{x}} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{2}{1-\frac{3}{x}} = \frac{2}{1-0} = 2$$

Logo $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{2n}{n-3} = 2$ e a sequência (a_n) converge para 2.

Resposta Converge

Exemplo Decida se a sequência (a_n) é convergente.

c) $a_n = 2n^5 - 6n^2 + 1$

$[\infty - \infty]$: Indeterminação

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} (2x^5 - 6x^2 + 1) \overset{[\infty - \infty]}{=} \lim_{x \longrightarrow +\infty} (2x^5)\left(\frac{2x^5 - 6x^2 + 1}{2x^5}\right)$$

$$= \lim_{x \longrightarrow +\infty} (2x^5)\left(\frac{2x^5}{2x^5} - \frac{6x^2}{2x^5} + \frac{1}{2x^5}\right)$$

$$= \lim_{x \longrightarrow +\infty} (2x^5)\left(1 - \cancel{\frac{3}{x^3}}^{\,0} + \cancel{\frac{1}{2x^5}}^{\,0}\right)$$

$$= \lim_{x \longrightarrow +\infty} (2x^5) = +\infty$$

Logo, pelo teorema da substituição, temos

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} (2n^5 - 6n^2 + 1) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} 2n^5 = +\infty$$

e a sequência (a_n) é divergente.

$\boxed{\textbf{Resposta} \text{ Diverge}}$

Exemplo Decida se a sequência (a_n) é convergente.

d) $a_n = \dfrac{4n^3 + 1}{5n + 1}$

Vamos calcular o limite direto na variável n:

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{4n^3 + 1}{5n + 1} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{4n^3}{5n} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{4n^2}{5} = +\infty$$

Logo sequência (a_n) é divergente.

$\boxed{\textbf{Resposta } \text{Diverge}}$

Dica Para calcular limites no infinito com polinômios, vamos considerar os termos de maior grau (segundo o procedimento apresentado no exemplo c).

Exemplo Decida se a sequência (a_n) é convergente.

e) $a_n = \dfrac{n - 5n^5 - n^4}{3n^7 + n - 5}$

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n - 5n^5 - n^4}{3n^7 + n - 5} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{-5n^5}{3n^7} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{-5}{3n^2} = 0$$

$\boxed{\text{**Resposta** A sequência } (a_n) \text{ é convergente.}}$

f) $a_n = \sqrt{\dfrac{4n^2 + 1}{n^2 + 3}}$

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt{\frac{4n^2 + 1}{n^2 + 3}} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \sqrt{\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{4n^2 + 1}{n^2 + 3}} = \sqrt{\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{4n^2}{n^2}} = \sqrt{\lim_{n \longrightarrow +\infty} 4} = \sqrt{4} = 2$$

$\boxed{\text{**Resposta** A sequência } (a_n) \text{ é convergente.}}$

Exemplo Decida se a sequência (a_n) é convergente.

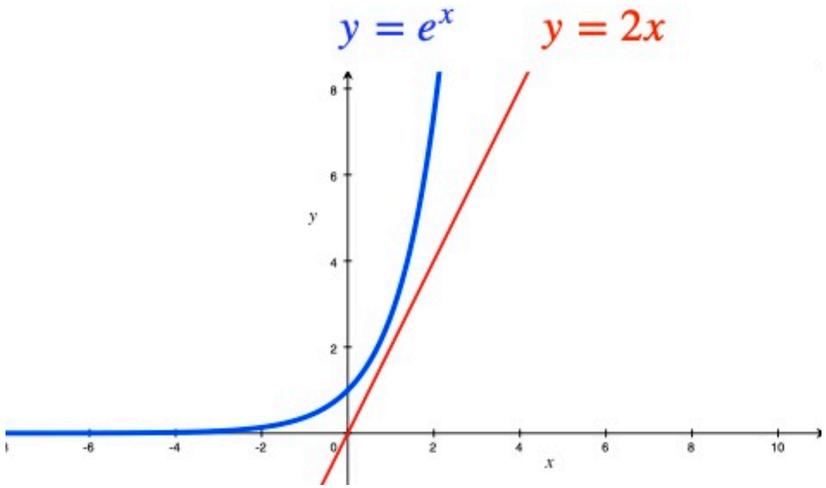
g) $a_n = \dfrac{e^n}{2n}$

Vamos calcular como função de x. Vamos aplicar a regra de L'Hospital para tirar a indeterminação.

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} \overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{\underset{\text{L'H}}{=}} \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(2x)'} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

$$\therefore \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{e^n}{2n} = +\infty$$

e a sequência (a_n) diverge.



$\boxed{\textbf{Resposta} \text{ Diverge}}$

Exemplo Decida se a sequência (a_n) é convergente.

h) $a_n = \dfrac{\ln n}{n^3}$

Vamos calcular o limite direto na variável n.

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n^3} \overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{\underset{\text{L'H}}{=}} \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{(\ln n)'}{(n^3)'} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{(1/n)}{3n^2} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{3n^2} = 0$$

$$\therefore \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n^3} = 0$$

e a sequência (a_n) converge.

Resposta Converge