CA4141

Profa. Elisa Y Takada

Aula 9 (parte 1) - 08out21

Intervalo de convergência.

Exercício Determinar o intervalo e o raio de convergência de cada série abaixo.

(a) $\sum \dfrac{(-1)^n x^n}{n \cdot 2^n}$ $\quad -4 < x \leq 4$, $R = 4$

(b) $\sum \dfrac{(x+2)^n}{3n^2}$ $\quad -3 \leq x \leq -1$, $R = 1$

(c) $\sum \dfrac{x^n}{(n-2)!}$ $\quad I = \Re$, $R = \infty$

(d) $\sum \dfrac{n^2(x-4)^n}{3^n}$ $\quad 1 < x < 7$, $R = 3$

(e) $\sum (-1)^n n!(x+1)^n$ $\quad I = \{-1\}$, $R = 0$

Exercício a Determinar o intervalo e o raio de convergência.

(a) $\sum \dfrac{(-1)^n x^n}{n \cdot 4^n}$ com $a = 0$

$$\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n x^n}{n \cdot 4^n}\right|} = \sqrt[n]{\frac{|x^n|}{n \cdot 4^n}} = \frac{\sqrt[n]{|x|^n}}{\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{4^n}} = \frac{|x|}{\sqrt[n]{n}\,(4)}$$

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{|x|}{\sqrt[n]{n}(4)} = \frac{|x|}{4} \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{|x|}{4}$$ (pois $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$)

A série converge se $L < 1$:

$$L = \frac{|x|}{4} < 1 \Longleftrightarrow |x| < 4 \Longleftrightarrow -4 < x < 4$$

Intervalo de convergência absoluta $-4 < x < 4$

Raio de convergência $R = 4$

Exercício a (continuação) $\sum \frac{(-1)^n x^n}{n \cdot 4^n}$

Testando nos extremos $x = 4$ e $x = -4$.

$$x = -4 \Longrightarrow \sum \frac{(-1)^n(-4)^n}{n \cdot 4^n} = \sum \frac{(4)^n}{n \cdot 4^n} = \sum \frac{1}{n}$$

(que é a série harmônica, divergente)

$$x = 4 \Longrightarrow \sum \frac{(-1)^n(4)^n}{n \cdot 4^n} = \sum \frac{(-1)^n}{n}$$

(que é uma série alternada, convergente por Leibniz - verifique!)

Resposta Intervalo de convergência $]-4,4]$ ou $-4 < x \leq 4$

Raio de convergência $R = 4$

Exercício b Determinar o intervalo e o raio de convergência.

(b) $\displaystyle\sum \frac{(x+2)^n}{3n^2}$ com $a = -2$

$$\sqrt[n]{\left|\frac{(x+2)^n}{3n^2}\right|} = \sqrt[n]{\frac{|(x+2)^n|}{3n^2}} = \frac{\sqrt[n]{|(x+2)|^n}}{\sqrt[n]{3}\sqrt[n]{n^2}} = \frac{|x+2|}{\sqrt[n]{3}\,(\sqrt[n]{n})^2}$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{|x+2|}{\sqrt[n]{3}\,(\sqrt[n]{n})^2} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{|x+2|}{3^{1/n}\,(\sqrt[n]{n})^2} = \frac{|x+2|}{3^0\,(1)^2} = |x+2|$$

(pois $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$)

A série converge se $L < 1$:

$$L = |x+2| < 1 \iff -1 < x+2 < 1 \iff -3 < x < -1$$

Intervalo de convergência absoluta $-3 < x < -1$

Raio de convergência $R = 1$

Exercício b (continuação) $\sum \dfrac{(x+2)^n}{3n^2}$

Testando nos extremos $x = -3$ e $x = -1$.

$$x = -1 \implies \sum \frac{(1)^n}{3n^2} = \sum \frac{1}{3n^2} = \frac{1}{3} \sum \frac{1}{n^2}$$ que é uma série convergente

(pois é múltipla de uma série-p convergente com $p = 2 > 1$)

$$x = -3 \implies \sum \frac{(-1)^n}{3n^2} = \frac{1}{3} \sum \frac{(-1)^n}{n^2}$$ que é uma série **absolutamente** convergente

(pois $\dfrac{1}{3} \sum \left| \dfrac{(-1)^n}{n^2} \right| = \dfrac{1}{3} \sum \dfrac{1}{n^2}$ é uma série convergente)

Resposta Intervalo de convergência $[-3, -1]$ ou $-3 \leq x \leq -1$

Raio de convergência $R = 1$

Exercício c Determinar o intervalo e o raio de convergência.

(c) $\sum \dfrac{x^n}{(n-2)!}$

$$|a_n| = \left|\frac{x^n}{(n-2)!}\right|$$

$$|a_{n+1}| = \left|\frac{x^{n+1}}{((n+1)-2)!}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n-1)!}\right| = \left|\frac{x^n\,x}{(n-1)!}\right|$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\cancel{x^n}\,x}{(n-1)!}\cdot\frac{(n-2)!}{\cancel{x^n}}\right| = \frac{|x|\,(n-2)!}{(n-1)!} = \frac{|x|\,(n-2)!}{(n-1)\cdot(n-2)!} = \frac{|x|}{(n-1)}$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{|x|}{(n-1)} = 0 = L$$

Como $L = 0 < 1$ independentemente do valor de x, a série é convergente para qualquer valor de x real.

Resposta Intervalo de convergência $I = \Re$ Raio de convergência $R = \infty$

Exercício Determinar o raio e o intervalo de convergência **absoluta** de cada série abaixo.

(a) $\sum \frac{(x-1)^n \ln n}{n}$ **Resposta** $0 < x < 2$ e $R = 1$

(b) $\sum \frac{\sqrt{n}}{n^4 + 2n}(x-1)^n$ **Resposta** $0 < x < 2$ e $R = 1$

(c) $\sum (\frac{n+3}{5n+2})^n (x-2)^n$ **Resposta** $-3 < x < 7$ e $R = 5$

(d) $\sum \frac{(2n)!x^n}{n!}$ **Resposta** $\{0\}$ e $R = 0$

Exercício a Determinar o raio e o intervalo de convergência **absoluta** da série $\sum \frac{\ln n}{n}(x-1)^n$.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\ln(n+1)}{(n+1)}(x-1)^{n+1} \cdot \frac{n}{\ln n\,(x-1)^n}\right|$$

$$= \left|\frac{\ln(n+1)\,\cancel{(x-1)^n}\,(x-1)\,n}{(n+1)\,\ln n\,\cancel{(x-1)^n}}\right|$$

$$= \left|\frac{\ln(n+1)\,(x-1)\,n}{(n+1)\,\ln n}\right|$$

$$= \frac{\ln(n+1)\,|x-1|\,n}{(n+1)\,\ln n}$$

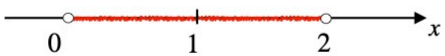
$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{\ln(n+1)\,|x-1|\,n}{(n+1)\ln n}$$

$$= \lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\,\frac{n}{(n+1)}\,|x-1|$$

$$= \lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{\cancel{\ln(n)}}{\cancel{\ln n}}\,\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}}\,|x-1|$$

$$= |x-1| = L$$

$$L = |x-1| < 1 \quad \Longrightarrow -1 < x-1 < 1 \quad \Longrightarrow 0 < x < 2$$



$|x-a| < R$

$a = 1$

$R = 1$

Resposta Intervalo de convergência absoluta $I =]0,2[$ ou $0 < x < 2$
Raio de convergência $R = 1$

Exercício b Determinar o raio e o intervalo de convergência **absoluta.**

(b) $\sum \dfrac{\sqrt{n}}{n^4 + 2n}(x-1)^n$ com $a = 1$

$$|a_{n+1}| = \left| \frac{\sqrt{n+1}\ (x-1)^{n+1}}{(n+1)^4 + 2(n+1)} \right| \quad \text{e} \quad |a_n| = \left| \frac{\sqrt{n}\,(x-1)^n}{n^4 + 2n} \right|$$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\sqrt{n+1}\,(x-1)^{n+1}}{(n+1)^4 + 2(n+1)} \cdot \frac{n^4 + 2n}{\sqrt{n}(x-1)^n} \right| = \frac{\sqrt{n+1}\ |x-1|}{(n+1)^4 + 2(n+1)} \cdot \frac{n^4 + 2n}{\sqrt{n}}$$

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1}\ |x-1|(n^4 + 2n)}{\sqrt{n}\ [(n+1)^4 + 2(n+1)]} \overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}\ |x-1|(n^4)}{\sqrt{n}\ [n^4]} = |x-1|$$

A série converge se $L < 1$:

$L = |x-1| < 1 \iff -1 < x - 1 < 1 \iff 0 < x < 2$

Resposta Intervalo de convergência $]0,2[$ ou $0 < x < 2$
Raio de convergência $R = 1$

Exercício c Determinar o raio e o intervalo de convergência **absoluta** da série $\sum \left(\frac{n+3}{5n+2}\right)^n (x-2)^n$.

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left|\left(\frac{n+3}{5n+2}\right)^n (x-2)^n\right|} = \sqrt[n]{\left(\frac{n+3}{5n+2}\right)^n}\ \sqrt[n]{|x-2|^n} = \left(\frac{n+3}{5n+2}\right)|x-2|$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \left(\frac{n+3}{5n+2}\right)|x-2| = \lim_{n\longrightarrow\infty} \left(\frac{\cancel{n}}{5\cancel{n}}\right)|x-2| = \frac{|x-2|}{5} = L$$

A série converge se $L < 1$, logo $\frac{|x-2|}{5} < 1 \implies |x-2| < 5 \implies -5 < x-2 < 5$

$$\implies 2-5 < x < 2+5$$

$$\implies -3 < x < 7$$

$|x-a| < R$

$a = 2$

$R = 5$

Resposta Intervalo de convergência absoluta $I =]-3{,}7[$ ou $-3 < x < 7$

Raio de convergência $R = 5$

Exercício d Determinar o raio e o intervalo de convergência **absoluta** da série $\sum \frac{(2n)!x^n}{n!}$.

$$|a_{n+1}| = \left|\frac{(2n+2)!x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \quad \text{e} \quad |a_n| = \left|\frac{(2n)!x^n}{n!}\right|$$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(2n+2)!x^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{(2n)!x^n}\right| = \left|\frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!x^n x n!}{(n+1)n!(2n)!x^n}\right|$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!x^n x n!}{(n+1)n!(2n)!x^n}\right| = \lim_{n\longrightarrow\infty}\left|2(2n+1)x\right| = +\infty$$

desde que $x \neq 0$

Conclusão A série converge somente se $x = 0$.

Resposta Intervalo de convergência absoluta $I = \{0\}$ ou $x = 0$

Raio de convergência $R = 0$