centro universitário FEI

CA3131

Profa. Elisa Y Takada

Aula 3 (parte 1) - 09mar21

EDO - Solução

Equação diferencial ordinária (EDO)

É uma equação cujas incógnitas são funções e suas derivadas.

A **ordem** de uma EDO é a ordem da maior derivada na equação.

Uma **solução** da EDO é uma função cujo domínio é um intervalo aberto e que satisfaz a equação.

Exemplo

$y' = y$ (ordem 1)

$y'' - 2y''' + y - \sin x = 0$ (ordem 3)

$(y'')^3 - \ln y = x^4 + 1$ (ordem 2)

Exemplo Verifique se a função dada é uma solução da EDO.

a) $y' - 2y = 0$, $y = e^{2x}$

EDO candidata a solução

$$y = e^{2x} \Longrightarrow y' = 2e^{2x}$$

Substituindo na EDO:

$$y' - 2y = 2e^{2x} - 2(e^{2x}) = 0$$

$\therefore y = e^{2x}$ é solução da EDO $y' - 2y = 0$.

b) $x^3y''' + x^2y'' = 1$, $y = \ln x$

EDO candidata a solução

$$y = \ln x \Longrightarrow y' = x^{-1}$$

$$y'' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$y''' = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

Substituindo na EDO:

$$x^3y''' + x^2y'' = x^3\left(\frac{2}{x^3}\right) + x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= 2 - 1 = 1$$

$\therefore y = \ln x$ é solução da EDO dada.

Exercício

1) Mostre que a função $y = x - \dfrac{1}{x}$ é solução da EDO $xy' + y = 2x$.

2) Verifique se $y = \sqrt{x}\ (x > 0)$ é solução da EDO $2x^2y'' + 3xy' - y = 0$

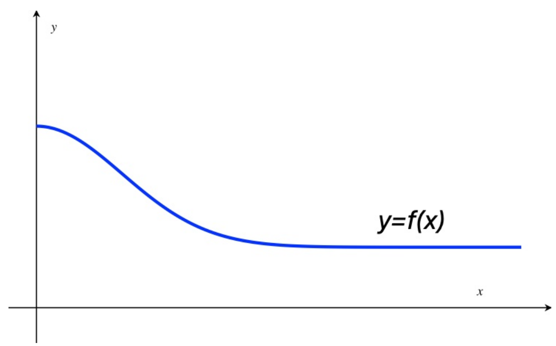
3) Determine os valores de r para os quais a função $y = e^{rx}$ satisfaz a EDO $y'' + y' - 6y = 0$?

4) Considere a EDO $y' = -y^2$.

a) O que se pode afirmar sobre a solução da EDO apenas olhando a equação, sem resolvê-la?

b) Mostre que a família de funções $y = \dfrac{1}{x + c}$ (sendo c uma constante) são soluções da EDO dada.

5) Explicar por que a função cujo gráfico é dado ao lado não pode ser solução da EDO $\dfrac{dy}{dt} = e^t(y-1)^2$.



3) Determine os valor de m para os quais a função $y = e^{mx}$ satisfaz a EDO $y'' + y' - 6y = 0$?

$$y = e^{rx} \Longrightarrow y' = re^{rx} \Longrightarrow y'' = r^2 e^{rx}$$

Substituindo na EDO:

$$y'' + y' - 6y = (r^2 e^{rx}) + (re^{rx}) - 6(e^{rx})$$

$$= \underbrace{e^{rx}}_{\neq 0}(r^2 + r - 6) = 0$$

$$r^2 + r - 6 = 0 \iff r = 2 \vee r = -3$$

$\boxed{\textbf{Resposta } r = 2 \text{ ou } r = -3}$

4) Considere a EDO $y' = -y^2$.

a) O que se pode afirmar sobre a solução da EDO apenas olhando a equação, sem resolvê-la?

Como $y' = -y^2 \leq 0$, todas as soluções são decrescentes.

b) Mostre que a família de funções $y = \dfrac{1}{x+c}$ (sendo c uma constante) é solução da EDO dada.

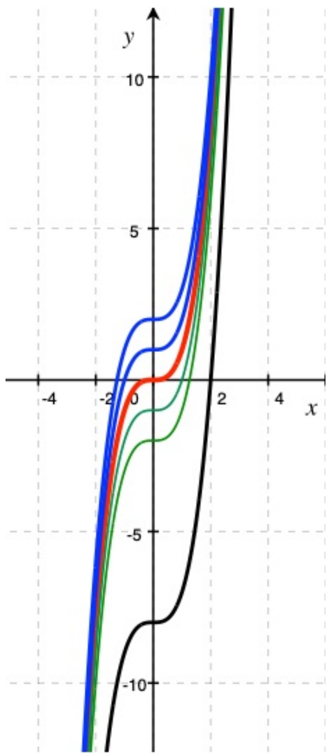
$$y' = -\frac{1}{(x+c)^2} = -\left(\frac{1}{x+c}\right)^2 = -y^2, \text{ logo } y' = -y^2$$

Exemplo (41-2 - Boulos) Resolver a EDO $y' = 3x^2$.

$y' = 3x^2 \quad \Longrightarrow y = x^3$ é uma solução da EDO

Note que $y = x^3 + c,\ c \in \Re$ também é solução da EDO (solução geral).

Graficamente:



Família de soluções
$y = x^3 + c$

Complementando o enunciado:

Determinar uma solução da EDO $y' = 3x^2$ tal que seu gráfico passa pelo ponto (2,0).

Vamos, então, impor que $x = 2$ e $y = 0$:

$$y = x^3 + c \Longrightarrow 0 = 2^3 + c$$
$$\Longrightarrow c = -8$$

Resposta A solução pedida é $y = x^3 - 8$.

Observação

$y = x^3 + c$ é chamada de solução **geral** da EDO.

$y = x^3 - 8$ é chamada de solução **particular** da EDO.

Problema de valor inicial (PVI)

Resolver uma EDO tal que sua solução tem como domínio um intervalo aberto da reta e satisfaz uma condição inicial da forma (x_0, y_0) ou $y_0 = f(x_0)$. Esta solução é chamada de solução **particular** da EDO.

Observação O exemplo anterior também pode ser enunciado como "Resolver a EDO $y' = 3x^2$ tal que $y(2) = 0$".

Observação A solução de uma EDO também pode ser apresentada na forma implícita, por exemplo, $y^5 + y = x + c$.