CA4141

Profa. Elisa Y Takada

Aula 15 (parte 1) - 19nov21

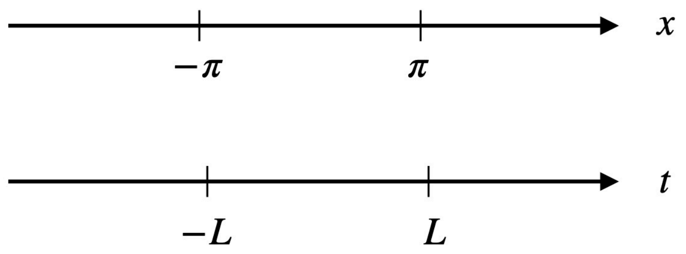
Série de Fourier - período arbitrário

ATENÇÃO Assinar presença no App ou no Portal do aluno

Série de Fourier para função de período arbitrário

Até agora trabalhamos com funções periódicas de período 2π. No entanto é possível determinar séries de Fourier com um período fundamental $T > 0$ qualquer.

Para facilitar a notação vamos considerar $f(t)$ uma função periódica de período $2L$. Os coeficientes de Fourier deduzidos anteriormente podem ser adaptados através de uma mudança de variável.



Considere a aplicação linear $t = \dfrac{L}{\pi}x$ ou $x = \dfrac{\pi}{L}t$.

Note que, se $x = \pm\,\pi$, então $t = \pm\,L$.

Vamos usar que a série de Fourier de uma função $f(x)$ de período 2π é

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\ a_n \cos nx + b_n \sin nx\ )$$

Fazendo $x = \frac{\pi}{L}t$, a série de Fourier de uma função f de período $2L$ é

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\ a_n \cos(\frac{n\pi t}{L}) + b_n \sin(\frac{n\pi t}{L})\ \right]$$

com coeficientes $a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{\pi} f(t)dt$

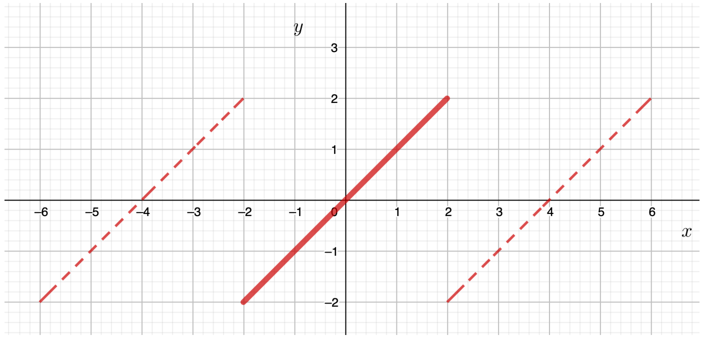
$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos(\frac{n\pi t}{L})\, dt,\ n \geq 1$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\sin(\frac{n\pi t}{L})\, dt,\ n \geq 1$$

Note que, se $L = \pi$, voltamos às fórmulas deduzidas para o intervalo $]-\pi, \pi[$.

Exercício Determinar a série de Fourier da função $f(x) = x$ para $-2 \leq x < 2$.

Note que $f(x) = x$ é uma função **ímpar** logo a sua série de Fourier é uma série de **senos**. Assim, $a_n = 0, \; \forall n \geq 0$.



Considerando $L = 2$, temos

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\,\sin\!\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = \frac{2}{2}\int_{0}^{2} x\,\sin\!\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx$$

(pois o integrando é um produto de funções ímpares, logo é uma função par)

Vamos resolver a integral por partes.

Exercício (continuação - coeficiente de Fourier)

$$b_n = \int_0^2 x \sin(\frac{n\pi x}{2})dx = \left[-\frac{2x}{n\pi}\cos(\frac{n\pi x}{2}) + (\frac{2}{n\pi})^2 \sin(\frac{n\pi x}{2}) \right] \Bigg|_0^2$$

$$= \left\{ \left[-\frac{2(2)}{n\pi}\cos(n\pi) + (\frac{2}{n\pi})^2 \cancel{\sin(n\pi)} \right] - \left[0 + (\frac{2}{n\pi})^2 \cancel{\sin(0)} \right] \right\}$$

$$= \left[-\frac{4}{n\pi}\cos(n\pi) \right]$$

$$\int u dv = uv - \int v du \quad \text{(LIATE)}$$

$$\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{\sin(\tfrac{n\pi x}{2})\, dx}_{dv} = -\underbrace{x}_{u}\underbrace{\tfrac{2}{n\pi}\cos(\tfrac{n\pi x}{2})}_{v} + \int \underbrace{\tfrac{2}{n\pi}\cos(\tfrac{n\pi x}{2})}_{v}\underbrace{dx}_{du}$$

$$\int x \sin(\tfrac{n\pi x}{2})\, dx = -\tfrac{2x}{n\pi}\cos(\tfrac{n\pi x}{2}) + (\tfrac{2}{n\pi})^2 \sin(\tfrac{n\pi x}{2}) + c$$

$$\boxed{b_n = -\frac{4}{n\pi}\cos(n\pi),\ n \geq 1}$$

$\cos(n\pi) = 1$ se n par e $b_n = -\dfrac{4}{n\pi}$

$\cos(n\pi) = -1$ se n ímpar e $b_n = \dfrac{4}{n\pi}$

Exercício (continuação - série de Fourier)

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos(n\pi) = 1 \text{ se } n \text{ par e } b_n = -\dfrac{4}{n\pi} \\ \cos(n\pi) = -1 \text{ se } n \text{ ímpar e } b_n = \dfrac{4}{n\pi} \end{array}} \Longrightarrow \boxed{b_n = (-1)^{n-1}\frac{4}{n\pi}}$$

A série de Fourier de f é uma série de **senos** ($a_n = 0,\ n \geq 0$).

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi x}{2}) = b_1 \sin(\frac{\pi x}{2}) + b_2 \sin(\frac{2\pi x}{2}) + b_3 \sin(\frac{3\pi x}{2}) + b_4 \sin(\frac{4\pi x}{2}) + \cdots$$

$$= \frac{4}{\pi}\sin(\frac{\pi x}{2}) - \frac{4}{2\pi}\sin(\frac{2\pi x}{2}) + \frac{4}{3\pi}\sin(\frac{3\pi x}{2}) - \frac{4}{4\pi}\sin(\frac{4\pi x}{2}) + \cdots$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[\sin(\frac{\pi x}{2}) - \frac{1}{2}\sin(\frac{2\pi x}{2}) + \frac{1}{3}\sin(\frac{3\pi x}{2}) - \frac{1}{4}\sin(\frac{4\pi x}{2}) + \cdots\right]$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\sin(\frac{n\pi x}{2})$$

$$\boxed{\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\sin(\frac{n\pi x}{2})}$$

https://www.geogebra.org/classic/hmeccyqa

Exercício Determinar a série de Fourier da função $f(x) = |x|$ para $-1 \leq x < 1$.

Resposta $\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)\pi x)}{(2n-1)^2}$