CA3131

Profa. Elisa Y Takada

Aula 3 (parte 2) - 09mar21

EDO separável

EDO separável

É toda equação da forma $y' = Q(x)R(y)$ sendo Q e R funções não-nulas cada uma delas com domínio em um intervalo aberto da reta.

Nota Uma função nula é uma função constante que assume somente o valor 0.

Exemplo A EDO é separável?

Sim $y' = \dfrac{2x^3}{\sin y} = 2x^3 \dfrac{1}{\sin y}$

$y' = y - x$ Não

$y'' = 3xy$ Não

Não $y' = x^2 \cos(xy)$

$y' = y - 3 = x^0(y-3)$ Sim

Método de resolução

Começamos trocando a notação y' pela notação de Leibniz $\dfrac{dy}{dx}$.

$$y' = Q(x)R(y) \implies \frac{dy}{dx} = Q(x)R(y)$$

$$\implies \frac{dy}{R(y)} = Q(x)dx \qquad \text{(forma diferencial)}$$

$$\neq 0$$

$$\implies \int \frac{dy}{R(y)} = \int Q(x)dx$$

A solução da EDO separável é obtida da resolução das integrais acima.

Pergunta E se $R(y) = 0$?

Neste caso, $y' = Q(x)R(y) = 0$ em um intervalo aberto da reta implica que y é uma solução constante. E y é uma raiz de $R(y)$, isto é, $R(y) = 0$.

Definição Uma solução **constante** de uma EDO separável $y' = Q(x)R(y)$ é uma raiz de $R(y)$.

Exemplo

a) $y' = 2x^2(y-1)(y+3)$

$$R(y) = (y-1)(y+3) = 0 \implies y = 1 \vee y = -3$$

Resposta A EDO tem duas soluções constantes $y = 1$ e $y = -3$.

b) $y' = \dfrac{1}{5y^4+1}$

$$\frac{a}{b} = 0 \iff a = 0$$

Como $R(y) = \dfrac{1}{5y^4+1} \neq 0$, a EDO não tem solução constante.

Resposta A EDO não tem solução constante.

Exemplo Determinar as soluções da EDO separável $y' = 8x^3y^2$.

i) Solução constante

$$R(y) = y^2 = 0 \Longrightarrow y = 0$$

A EDO admite uma única solução constante $y = 0$.

ii) Solução não-constante

$$\frac{dy}{dx} = 8x^3y^2 \quad \Longrightarrow \frac{dy}{y^2} = 8x^3dx$$

Integrando em x dos dois lados:

$$\int y^{-2}dy = \int 8x^3dx$$

$$-y^{-1} + a = 2x^4 + b$$

$$-\frac{1}{y} = 2x^4 + c \qquad (c = b - a)$$

Isolando y, a solução fica $y = \dfrac{1}{-2x^4 + c}$.

Solução explícita

Solução implícita

Resposta $y = 0$ e $y = \dfrac{1}{-2x^4 + c}$ (ou $-\dfrac{1}{y} = 2x^4 + c$)

Exemplo Determinar uma solução da EDO separável $y' = \dfrac{1}{5y^4+1}$ tal que $y(3) = 0$.

i) Solução constante

Não existe pois $R(y) = \dfrac{1}{5y^4+1}$ nunca se anula (exemplo feito anteriormente)

ii) Solução não-constante

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{5y^4+1} \Longrightarrow (5y^4+1)dy = dx \Longrightarrow \int (5y^4+1)dy = \int dx$$

$$\Longrightarrow y^5 + y = x + c$$

(Solução geral implícita)

iii) Como $y(3) = 0$, vamos impor que $x = 3$ e $y = 0$ na solução geral.

$$y^5 + y = x + c \Longrightarrow 0 = 3 + c \Longrightarrow c = -3$$

A solução particular é $y^5 + y = x - 3$.

Resposta $y^5 + y = x - 3$

Exercício Resolver a EDO separável.

a) $y' = \dfrac{x}{y}$ tal que $y(0) = -3$

b) $y' = \dfrac{x \sin x}{y}$ tal que $y(0) = -1$

c) $y' = y - 3$

d) $y' = \dfrac{y^2 - 1}{2}$ tal que $y(\ln 2) = -3$

Exercício Considere a EDO $y' = \dfrac{e^{y^3+y}}{3y^2+1}$. Calculando a relação que descreve suas soluções na forma $g(y) + x = c$ com $g(0) = 1$, determine $g(y)$.

Resolução a) $y' = -\dfrac{x}{y}$ tal que $y(0) = -3$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \implies ydy = -xdx \implies \int ydy = -\int xdx$$

$$\implies \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c$$

$$\implies \boxed{\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = c}$$

Solução geral implícita

Aplicamos a condição inicial $y(0) = -3$ na solução geral.

$$y(0) = -3 \implies \frac{(-3)^2}{2} + \frac{(0)^2}{2} = c \implies c = \frac{9}{2}$$

$$\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = \frac{9}{2} \implies y^2 + x^2 = 9 \implies y = \pm\sqrt{9 - x^2}$$

Como $y(0) = -3 < 0$, a solução particular é $y = -\sqrt{9 - x^2}$.

Resposta A solução particular é $y = -\sqrt{9 - x^2}$.