CA4141

Profa. Elisa Y Takada

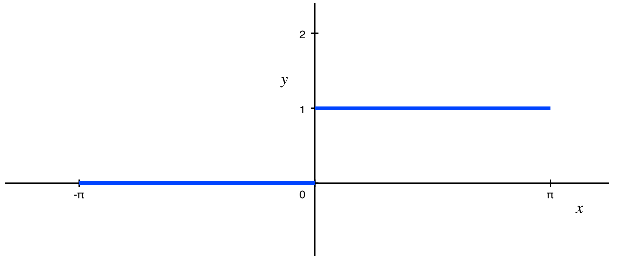
Aula 13 (parte 2) - 05nov21

Série de Fourier

ATENÇÃO Assinar presença no App ou no Portal do aluno

Exemplo Determinar os coeficientes de Fourier da função $f(x)$ degrau unitário

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < \pi \\ 0, & -\pi \le x < 0 \end{cases}$$



$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \;= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}(x)\,|_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\pi = 1$$

$$\boxed{a_0 = 1}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx)dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (\cos nx)dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin nx}{n}\right)|_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{n\pi}(\sin n\pi - \sin 0)$$

$$= 0$$

$$\boxed{a_n = 0,\ n \ge 1}$$

Exemplo (continuação)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < \pi \\ 0, & -\pi \le x < 0 \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\sin nx)dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (\sin nx)dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{n\pi}[(-\cos n\pi) - (-\cos 0)]$$

$$= \frac{1}{n\pi}(1 - \cos n\pi)$$

$$\boxed{b_n = \frac{1 - \cos n\pi}{n\pi},\ n \ge 1}$$

Resposta Os coeficientes de Fourier da função degrau unitário são

$$a_0 = 1,\ a_n = 0,\ n \ge 1$$

$$b_n = \frac{1 - \cos n\pi}{n\pi},\ n \ge 1$$

Observação

Se n é par, então $\cos n\pi = 1$ e $b_n = 0$.

Se n é ímpar, então $\cos n\pi = -1$ e $b_n = \frac{2}{n\pi}$.

$$b_n = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ par} \\ \dfrac{2}{n\pi} & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

Exemplo Determinar a série de Fourier da função $f(x)$ degrau unitário.

Do exemplo anterior temos os coeficientes de Fourier de f:

$$a_0 = 1 \qquad a_n = 0,\ n \geq 1 \qquad b_n = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ par} \\ \dfrac{2}{n\pi} & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\, a_n \cos nx + b_n \sin nx \,) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \sin nx\,)$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{n\ impar}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin nx$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin x + \frac{2}{3\pi} \sin 3x + \frac{2}{5\pi} \sin 5x + \cdots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left[\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots \right]$$

Resposta $$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\,(2n-1)x)}{(2n-1)} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left[\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots \right]$$

Graficamente Ilustração da série de Fourier (somas parciais de ordem $n = 5$) e a respectiva função $f(x)$ degrau unitário.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \pi \\ 0, & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left[\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots\right]$$

Exemplo (aplicação)

Dada a série de Fourier da função degrau unitário $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le \pi \\ 0, & -\pi \le x \le 0 \end{cases}$ tal que $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left[\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots\right]$, determinar uma representação em série do número π.

Resolução

Escolhendo $x = \pi/2$, temos

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left[\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x + \cdots\right]$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left[\sin\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\sin 3\frac{\pi}{2} + \frac{1}{5}\sin 5\frac{\pi}{2} + \frac{1}{7}\sin 7\frac{\pi}{2} + \cdots\right]$$

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left[(1) + \frac{1}{3}(-1) + \frac{1}{5}(1) + \frac{1}{7}(-1) + \cdots\right]$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\pi}\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right]$$

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots} \implies \boxed{\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}}$$

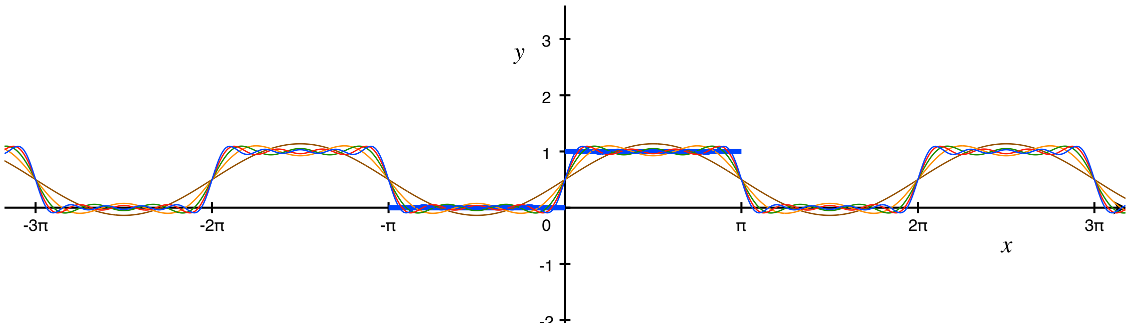
(Esta série alternada é chamada de série de Leibniz)

Convergência uniforme

Seja $u_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função definida em um intervalo I da reta.

a) Uma série de funções $\sum u_n(x)$ **converge pontualmente** se, para cada $x_0 \in I$ fixado, a série numérica $\sum u_n(x_0)$ convergir.

b) Uma série de funções $\sum u_n(x)$ **converge uniformemente** se, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{Z}_+$ dependente apenas de ϵ (e não de x) tal que $|\sum_{j=n}^{m} u_n(x)| < \epsilon$ para todo $n < m$ tal que $n \geq N$.



Convergência da série de Fourier

Uma condição suficiente para que a série de Fourier convirja uniformemente para a própria função f é dada pelo teorema abaixo.

Teorema Seja $f: \ [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathfrak{R}$ uma função contínua de classe $\mathscr{C}^2$ (contínua com derivada de ordem 2 contínua) por partes e tal que $f(-\pi) = f(\pi)$. Seja a série de Fourier de f dada por

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right)$$

Então, para todo $x \in [-\pi, \pi]$, temos

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right)$$

sendo a convergência uniforme em $[-\pi, \pi]$.

Exercício Determinar a série de Fourier da função $f(x)$.

a) $f(x) = x, \ -\pi \leq x < \pi$

b) $f(x) = x^2, \ -\pi \leq x < \pi$

c) $f(x) = |x|, \ -\pi \leq x < \pi$