CA4141

Profa. Elisa Y Takada

Aula 2 (parte 1) - 10ago21

Teorema fundamental das sequências

ATENÇÃO Assinar presença no App ou no Portal do aluno

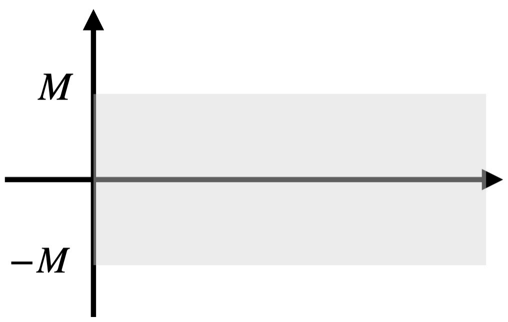
Definição Seja uma sequência numérica (a_n).

a) (a_n) é **limitada** se existir um número $M > 0$ tal que $|a_n| \leq M$ para todo $n \geq 1$.

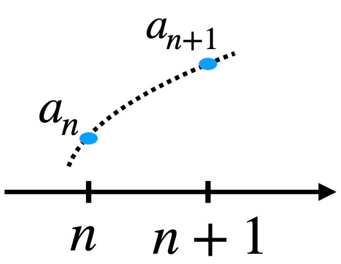
b) (a_n) é **crescente** se $a_n < a_{n+1}$ para todo $n \geq 1$.

c) (a_n) é **decrescente** se $a_n > a_{n+1}$ para todo $n \geq 1$.

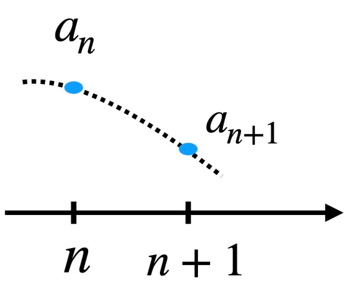
c) (a_n) é **monótona** se a sequência é sempre crescente (ou decrescente).



(a) limitada



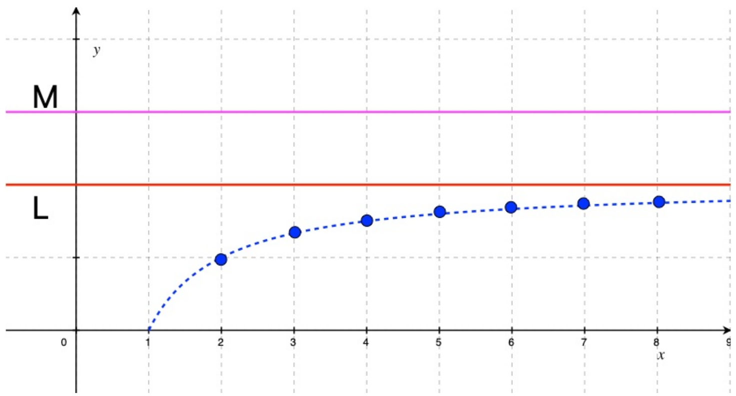
(b) crescente

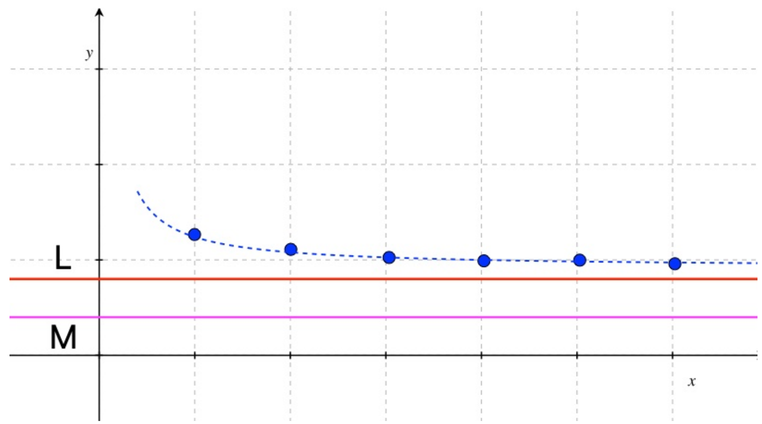


(c) decrescente

Teorema fundamental das sequências

Toda sequência monótona limitada é convergente.





(a_n) é crescente mas limitada superiomente por M, logo é convergente (não necessariamente para M; pela figura, converge para L).

(a_n) é decrescente mas limitada inferiomente por M, logo é convergente (não necessariamente para M; pela figura, converge para L).

Exemplo Considere a sequência (a_n) definida pela recorrência $a_1 = \sqrt{2}$ e $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ para $n \geq 1$.

a) Determine os 4 primeiros termos da sequência.

$$n = 1 \Longrightarrow \quad a_1 = \sqrt{2} \quad \approx 1.4142$$

$$n = 2 \Longrightarrow \quad a_2 = \sqrt{2 + a_1} = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \quad \approx 1.8478$$

$$n = 3 \Longrightarrow \quad a_3 = \sqrt{2 + a_2} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \quad \approx 1.9616$$

$$n = 4 \Longrightarrow \quad a_4 = \sqrt{2 + a_3} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} \quad \approx 1.9904$$

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2} + \cdots}}} \longrightarrow ?$$

b) Supondo que (a_n) é crescente e limitada, pelo teorema fundamental a sequência é convergente. Calcule seu limite.

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} a_n = A = \ ?$$

Observação Se $a_n \longrightarrow A$, então $a_{n+1} \longrightarrow A$ para $n \longrightarrow \infty$

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \Longrightarrow \lim_{n\longrightarrow\infty} a_{n+1} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \sqrt{2+a_n}$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} a_{n+1} = \sqrt{2+\lim_{n\longrightarrow\infty} a_n}$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} a_{n+1} = \sqrt{2+A} \Longrightarrow A = \sqrt{2+A}$$

$$A^2 = 2 + A$$

$$A^2 - A - 2 = 0$$

$$A = 2 \vee \cancel{A = -1}$$

Resposta A sequência converge para $A = 2$

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}+\cdots}}} = 2$$

Princípio da indução finita (PIF)

Dada uma afirmativa S_n sobre um número natural n.

Passo 1 Provar que S_1 é verdadeira.

Passo 2 Supor que S_n é válida e provar que S_{n+1} é verdadeira.

Passo 3 Concluir, pelo PIF, que S_n é válida para todo n.

Exemplo Seja (a_n) a sequência tal que $a_1 = \sqrt{2}$ e $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ para $n \geq 1$.

a) Provar, pelo PIF, que $a_n < 2$ para $n \geq 1$.

Hipótese de indução $S_n : \; a_n < 2, \forall n \geq 1$

Passo 1 S_1 é verdadeira pois $a_1 = \sqrt{2} \approx 1.41 < 2$.

Passo 2 Supor que S_n é válida, isto é, $a_n < 2$.

Rascunho S_{n+1} é válida, então $a_{n+1} < 2$.

$$a_n < 2 \implies 2 + a_n < 2 + 2 \implies \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{4}$$

$$\therefore a_{n+1} < 2$$

Passo 3 Concluímos, pelo PIF, que $a_n < 2$ para todo n.

Exemplo (continuação) $a_1 = \sqrt{2}$ e $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ para $n \geq 1.$

b) Provar, pelo PIF, que $a_n < a_{n+1}$ para $n \geq 1$ (isto é, é crescente)

Hipótese de indução $S_n : \; a_n < a_{n+1}, \; \forall n \geq 1$

Passo 1 Como $2 < 2 + \sqrt{2}$, temos $\sqrt{2} < \sqrt{2 + \sqrt{2}}$, ou seja, $a_1 < a_2$.

Passo 2 Supor que S_n é válida, isto é, $a_n < a_{n+1}.$

Rascunho S_{n+1} é válida, então $a_{n+1} < a_{n+2}.$

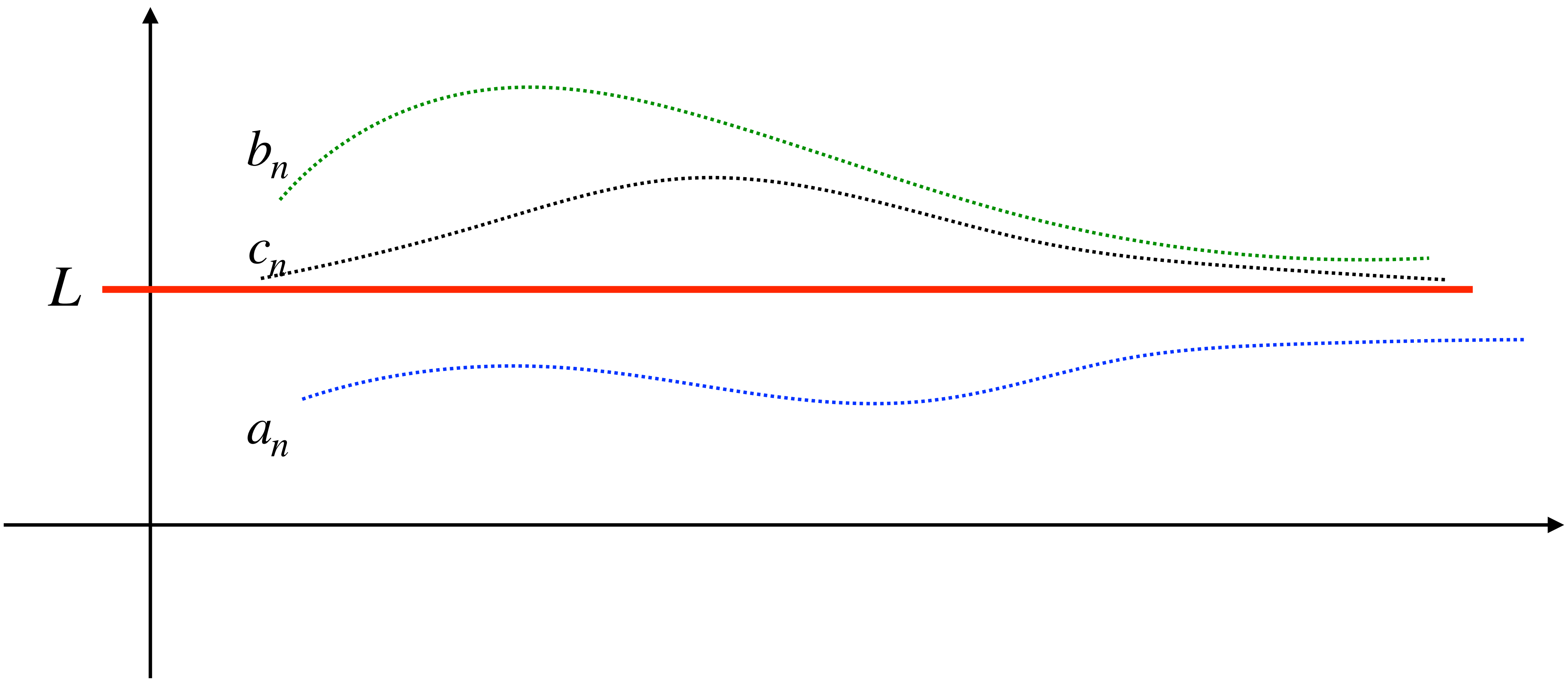
$$a_n < a_{n+1} \implies 2 + a_n < 2 + a_{n+1} \implies \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{2 + a_{n+1}}$$

$$\therefore a_{n+1} < a_{n+2}$$

Passo 3 Concluímos, pelo PIF, que $a_n < a_{n+1}$ para todo $n.$

Teorema do sanduíche (ou do confronto)

Se $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} a_n = L$ e $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} b_n = L$ e, a partir de um índice n, tem-se $a_n \leq c_n \leq b_n$, então $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} c_n = L$.



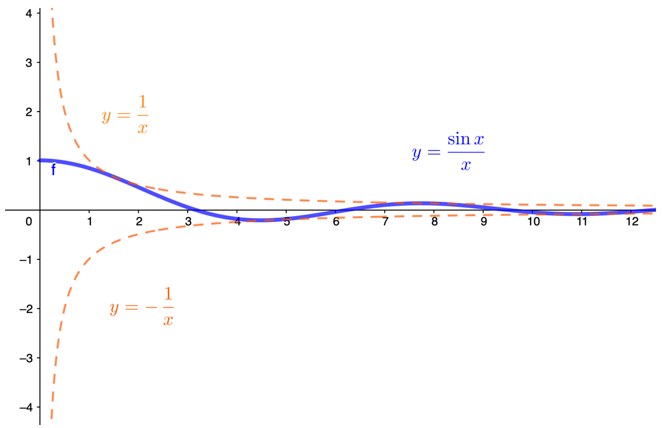
Exercício Calcule o limite de $a_n = \dfrac{\sin n}{n}$ para $n \longrightarrow \infty$, quando possível, e decida se a sequência (a_n) converge ou diverge.

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = ?$$

rascunho

$$-1 \leq \sin n \leq 1$$

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$$



geogebra.org

Como $-\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{\sin n}{n} \leq \dfrac{1}{n}$ para $n \geq 1$ e

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} -\frac{1}{n} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

pelo teorema do sanduíche, temos que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0$$

Resposta $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0$

Exercício Calcule o limite de a_n para $n \longrightarrow \infty$, quando possível, e decida se a sequência (a_n) converge ou diverge.

a) $a_n = \dfrac{n^4}{n^3 - 2n}$

b) $a_n = e^{\frac{1}{n}}$

c) $a_n = 3^n\, 7^{-n}$

d) $a_n = \sqrt{\dfrac{n+1}{9n+1}}$

e) $a_n = \dfrac{4\sqrt[3]{n}}{2 + \sqrt{n}}$

f) $a_n = \dfrac{\cos^2 n}{n}$

g) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

Exercício Considere a sequência (a_n) dada por recorrência $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = 4 - a_n$ para $n \geq 1$.

a) Escrever os 5 primeiros termos da sequência e decidir se a sequência converge ou diverge.

b) O que se conclui sobre a convergência se $a_1 = 2$?

Exercício Considere a sequência (a_n) dada por recorrência $a_1 = 2$ e $a_{n+1} = \dfrac{a_n + 6}{2}$ para $n \geq 1$.

a) Prove, pelo PIF, que a sequência dada satisfaz $a_n < 6$ para todo $n \geq 1$.

b) Prove, pelo PIF, que a sequência dada satisfaz é crescente, isto é, $a_n < a_{n+1}$ para todo $n \geq 1$.

c) Aplicar o teorema fundamental das sequências e calcular o limite de a_n para $n \longrightarrow \infty$.

Exercício (resolução) Considere a sequência (a_n) dada por recorrência $a_1 = 2$ e $a_{n+1} = \dfrac{a_n + 6}{2}$ para $n \geq 1$.

a) Prove, pelo PIF, que a sequência dada satisfaz $a_n < 6$ para todo $n \geq 1$.

Hipótese de indução $S_n : \ a_n < 6, \ n \geq 1$

Passo 1 S_1 é verdadeira pois $S_1 : \ a_1 = 2 < 6.$

Passo 2 Supor que S_n é válida, isto é, $a_n < 6$ e provar que S_{n+1} é válida.

Rascunho S_{n+1} é válida, então $a_{n+1} < 6.$

$$a_n < 6 \implies a_n + 6 < 6 + 6 \implies \frac{a_n + 6}{2} < \frac{12}{2} \implies \frac{a_n + 6}{2} < 6$$

$$\therefore a_{n+1} < 6$$

Passo 3 Concluímos, pelo PIF, que $a_n < 6$ para todo n.