FEI - Ciência da Computação - Cálculo Diferencial e Integral 3
Lista de exercícios - Derivadas direcionais

1. (Regra da Cadeia 1) A demanda de um certo produto é $Q(x,y) = 200-10x^2+20xy$ unidades por mês sendo x o preço do produto e y o preço de um produto concorrente. Estima-se que, daqui a t meses, o preço do produto será $x = x(t) = 10+0,5t$ reais enquanto que $y = y(t) = 12,8+0,2t^2$ reais. Calcule a taxa de variação da demanda do produto daqui a 4 meses.

2. Calcule as coordenadas do vetor gradiente de f no ponto P indicado:

   a) $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2},\ P(-4,3)$ b) $f(x,y,z) = yz^3 - 2x^2,\ P(2,-3,1)$

3. Dada $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, calcule:

   a) a derivada direcional de f no ponto $(1,2,-2)$ na direção do vetor $\vec{v} = (-6,6,3)$.

   b) a taxa de variação máxima de f no ponto dado e a direção em que isso ocorre.

4. Suponha que em uma certa região do espaço o potencial elétrico V seja dado por $V(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2$.

   a) Determine a taxa de variação do potencial em $P(2,-1,3)$ na direção do ponto P para a origem.

   b) Em que direção V varia mais rapidamente em P e qual a taxa de variação máxima em P?

5. Calcule a derivada direcional de $f(x,y) = \sqrt{xy}$ no ponto $P = (2,8)$ na direção do ponto $Q = (5,4)$.

6. Calcule a derivada direcional de $f(x,y) = x^3 \mathrm{e}^{xy}$ no ponto $P = (2,0)$ na direção do vetor $\vec{a} = (4,-3)$. Em que direção a função cresce mais rapidamente em P?

7. a) Mostre que uma função diferenciável f decresce mais depressa no ponto P na direção oposta à do vetor gradiente, isto é, na direção $-\nabla f(P)$.

   b) Utilize a parte (a) para determinar a direção em que $f(x,y) = x^4y - x^2y^3$ decresce mais rápido no ponto $(2,-3)$.

8. A temperatura em um ponto (x,y,z) é dada por $T(x,y,z) = 200\mathrm{e}^{-x^2-3y^2-9z^2}$, sendo T em ^oC e x,y,z em metros.

   a) Determine a taxa de variação da temperatura no ponto $P(2,-1,2)$ na direção do ponto $Q(3,-3,3)$.

   b) Qual a direção de maior crescimento da temperatura em P?

   c) Calcule a taxa máxima de crescimento em P.

9. A temperatura T em uma bola de metal é inversamente proporcional à distância do centro da bola, que tomamos como sendo a origem. A temperatura no ponto (1,2,2) é de 120^{o}C.

   a) Determine a taxa de variação de T no ponto (1,2,2) em direção ao ponto (2,1,3).

   b) Mostre que, em qualquer ponto da bola, a direção de maior crescimento na temperatura é dada pelo vetor que aponta para a origem.

10. Suponha que um grupo está subindo uma montanha cuja forma é dada pelo gráfico da função $z = 1000 - \dfrac{1}{200}x^2 - \dfrac{1}{100}y^2$, sendo x e y em metros. Considere que o grupo encontra-se em um ponto de coordenadas com ponto de abscissa $x = 10$ e ordenada $y = 5$.

    a) Em que direção (e sentido) o grupo deverá caminhar de modo que a inclinação na montanha seja a <u>maior</u> possível e em que direção (e sentido) a inclinação na montanha seja a <u>menor</u> possível?

    b) Qual a taxa máxima de elevação nesse caso? Interprete o resultado explicando o que significa o número obtido. (Dado: $\sqrt{2} = 1,4$)

11. (Exercícios-desafio)

    a) Calcule a derivada direcional de $f(x,y) = \sqrt{5x - 4y}$ no ponto $(4,1)$ na direção do versor dada pelo ângulo $\theta = \pi/4$.

    b) Em quais direções a derivada de $f(x,y) = xy + y^2$ no ponto $P = (3,2)$ é igual a zero?

    c) Determine todas as direções em que a derivada direcional de $f(x,y) = x^2 + \text{sen}\,(xy)$ no ponto $(1,0)$ tem valor 1.

    d) A derivada direcional de uma função $f(x,y)$ em $P = (1,2)$ na direção de $v_1 = \vec{i} + \vec{j}$ é igual a $2\sqrt{2}$ e na direção de $v_2 = -2\vec{j}$ é igual a -3. Qual é a derivada direcional de f no ponto P na direção do vetor $\vec{v} = -\vec{i} - 2\vec{j}$?

Respostas:

1. 424 unidades/mês
2. b) $\nabla f(P) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(P),\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(P),\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(P)\right) = (-8, 1, -9)$
3. a) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,2,-2) = 0$ (b) Taxa máxima $= \nabla f(1,2,-2)| = 1$ na direção de $|\nabla f(1,2,-2) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$
4. (a) $\frac{\partial V}{\partial \vec{u}}(P) = -\frac{178}{\sqrt{14}}$ (b) Na direção de $\nabla(P) = (4,-8,54)$ (c) Taxa máxima $= \sqrt{2996} \approx 54.8$
5. $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(2,8) = \frac{2}{5}$
6. $D_{\vec{u}}f(2,0) = \nabla f(2,0) \cdot \vec{u} = 0$ (significa que não há variação de f na direção do vetor $\vec{a}$). A função f cresce mais rapidamente na direção do vetor $(12,16)$.
7. $\nabla f(2,-3) = (12,-92)$
8. (a) $D_{\vec{u}}T(2,-1,2) = -\frac{5200\sqrt{6}}{3}\text{e}^{-43}\ {}^o\text{C/m}$ (b) Direção $\nabla T(2,-1,2) = 400\text{e}^{-43}(-2,3,-18)$
   (c) Taxa máxima $= |\nabla T(2,-1,2)| = 400e^{-43}\sqrt{337}$
9. (a) $\frac{40\sqrt{3}}{3}$
10. (a) A inclinação é máxima na direção do vetor $\left(-\frac{1}{10}, -\frac{1}{10}\right)$ e mínima na direção do vetor $-\nabla(10,5) = \left(\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right)$
    (b) A elevação aumenta a uma taxa de 0,14m para cada unidade de distância percorrida.
11. (a) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(4,1) = \frac{\sqrt{2}}{16}$ (b) $\vec{u} = \pm\left(\frac{7}{\sqrt{53}}, -\frac{2}{\sqrt{53}}\right)$ (c) (0,1) e (4/5, −3/5) (d) $-\frac{7}{\sqrt{5}}$