CA3131

Profa. Elisa Y Takada

Aula 3 (parte 3) - 09mar21

EDO separável - exemplos

Exercício Resolver a EDO separável.

a) $y' = \dfrac{x}{y}$ tal que $y(0) = -3$ **Resposta** $y = -\sqrt{9 - x^2}$.

b) $y' = \dfrac{x \sin x}{y}$ tal que $y(0) = -1$ **Resposta** $y = \sqrt{1 - 2x\cos(x) + 2\sin(x)}$

(dica: aplicar partes)

c) $y' = y - 3$

d) $y' = \dfrac{y^2 - 1}{2}$ tal que $y(\ln 2) = -3$ **Resposta** $y = \dfrac{1 + e^x}{1 - e^x}$.

(dica: aplicar frações parciais caso 1)

Exercício Considere a EDO $y' = \dfrac{e^{y^3 + y}}{3y^2 + 1}$. Calculando a relação que descreve suas soluções na forma $g(y) + x = c$ com $g(0) = 1$, determine $g(y)$.

Resolução a) $y' = -\dfrac{x}{y}$ tal que $y(0) = -3$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \implies ydy = -xdx \implies \int ydy = -\int xdx$$

$$\implies \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c$$

$$\implies \boxed{\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = c}$$

Solução geral implícita

Aplicamos a condição inicial $y(0) = -3$ na solução geral.

$$y(0) = -3 \implies \frac{(-3)^2}{2} + \frac{(0)^2}{2} = c \implies c = \frac{9}{2}$$

$$\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = \frac{9}{2} \implies y^2 + x^2 = 9 \implies y = \pm\sqrt{9 - x^2}$$

Como $y(0) = -3 < 0$, a solução particular é $y = -\sqrt{9 - x^2}$.

Resposta A solução particular é $y = -\sqrt{9 - x^2}$.

Exercício Resolver a EDO separável $y' = y - 3$.

Solução constante

$$R(y) = y - 3 = 0 \Longrightarrow y = 3$$

A EDO admite somente uma solução constante $y = 3$.

Solução não-constante

$$\frac{dy}{dx} = y - 3 \Longrightarrow \frac{dy}{y-3} = dx \Longrightarrow \int \frac{dy}{y-3} = \int dx \Longrightarrow \boxed{\ln|y-3| = x + c}$$

Solução geral implícita

Para isolar y vamos usar a função exponencial de base e.

$$\ln|y-3| = x + c \Longrightarrow e^{\ln|y-3|} = e^{x+c}$$

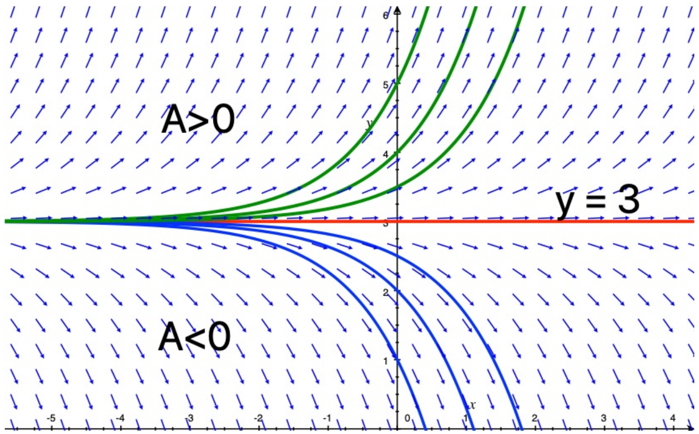
$$e^{\ln a} = a$$

$$|y-3| = e^{x+c}$$

$$y - 3 = \pm\, e^x e^c$$

$$y - 3 = Ae^x, \quad A = \pm\, e^c$$

$$y = 3 + Ae^x$$



Resposta As soluções da EDO são $y = 3$ e $y = 3 + Ae^x$ sendo A uma constante não-nula.

Exercício Considere a EDO $y' = \dfrac{e^{y^3+y}}{3y^2+1}$. Calculando a relação que descreve suas soluções na forma $g(y) + x = c$ com $g(0) = 1$, determine $g(y)$.

Note que a EDO não tem soluções constantes.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{y^3+y}}{3y^2+1} \implies \frac{(3y^2+1)dy}{e^{y^3+y}} = dx$$

$$\implies \int \frac{(3y^2+1)dy}{e^{y^3+y}} = \int dx$$

$$\implies \int \frac{du}{e^u} = x + c$$

$$u = y^3 + y$$
$$du = (3y^2+1)dy$$

$$\implies \int e^{-u} du = x + c$$

$$\implies -e^{-u} = x + c$$

$$\implies -e^{-(y^3+y)} = x + c$$

$$\implies \boxed{e^{-(y^3+y)} = -x + C}$$

Solução geral implícita

Vamos reescrever a solução obtida:

$$e^{-(y^3+y)} + x = C$$

Pelo enunciado, vamos considerar

$$g(y) = e^{-(y^3+y)}$$

com $g(0) = e^0 = 1$

Resposta $g(y) = e^{-(y^3+y)}$

Aplicação Crescimento populacional (Stewart, vol.2 cap. 9)

Considere $N(t)$ o número de indivíduos de uma certa população em condições ideais de crescimento em um instante t. Se a taxa de crescimento da população é proporcional ao tamanho da população, então $\frac{dN}{dt} = kN$ sendo k a constante de proporcionalidade. Vamos determinar uma expressão para $N(t)$.

$$\frac{dN}{dt} = kN \implies \frac{dN}{N} = kdt \implies \int \frac{dN}{N} = \int kdt \implies \ln|N| = kt + c$$

EDO separável

Isolando N, temos $|N| = e^{kt+c}$, ou $N = Ae^{kt}$ com $A = e^{c}$.

Para determinar a constante A, consideramos $t = 0$:

$$N(0) = Ae^{0} \implies N(0) = A \quad \text{(população inicial)}$$

$$\boxed{\therefore N = N_0 e^{kt}}$$

Observação Note que $N = 0$ é uma solução constante da EDO.

Aplicação Crescimento populacional (uma modelagem realista)

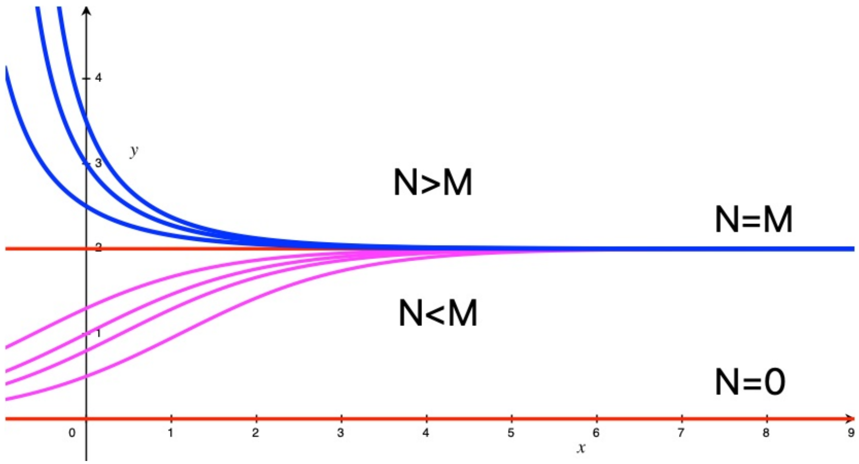
Em uma modelagem mais realista, uma população tem o número de indivíduos N estabilizando em torno de sua **capacidade de suporte** M. Neste caso, a EDO utilizada nessa modelagem é dada pela equação logística

$$\frac{dN}{dt} = kN(1 - \frac{N}{M})$$

Se N é muito pequeno, então $\frac{dN}{dt} > 0$ e N é crescente.

Se N passou a capacidade de suporte, $N > M$, então $\frac{dN}{dt} < 0$ e N é decrescente.

A EDO tem duas soluções constantes, $N = 0$ e $N = M$, que são chamadas também de **soluções de equilíbrio.**



Exercício Os psicólogos interessados em teoria do aprendizado estudam as curvas de aprendizado. Se $P(t)$ é o nível de desempenho de algum aprendiz como uma função do tempo de treinamento t, $P'(t)$ é a taxa com que o desempenho melhora.

Se M é o nível máximo de desempenho do qual o aprendiz é capaz, um modelo razoável para o aprendizado é dado pela EDO $\frac{dP}{dt} = k(M - P)$ sendo k uma constante positiva.

a) Resolva a EDO e determine uma expressão para $P(t)$.

b) Qual o limite dessa expressão a longo prazo?

Exercício Determinar uma solução particular da EDO separável $y' = \dfrac{y^2 - 1}{2}$ tal que $y(\ln 2) = -3$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 1}{2} \implies \frac{2dy}{y^2 - 1} = dx \implies \int \frac{2dy}{y^2 - 1} = \int dx$$

Aplicando as frações parciais:

$$\frac{1}{y^2 - 1} = \frac{1}{(y-1)(y+1)} = \frac{A}{y-1} + \frac{B}{y+1} = \frac{A(y+1) + B(y-1)}{(y-1)(y+1)}$$

Igualando os numeradores:

$$1 = A(y+1) + B(y-1)$$

$$y = 1 \implies A = 1/2$$

$$y = -1 \implies B = -1/2$$

$$\frac{1}{y^2 - 1} = \frac{(1/2)}{y-1} + \frac{(-1/2)}{y+1}$$

$$\int \frac{1}{y^2 - 1} dy = \int [\frac{(1/2)}{y-1} + \frac{(-1/2)}{y+1}]\, dy \quad = \frac{1}{2}\ln|y-1| - \frac{1}{2}\ln|y+1| + c$$

Completando as integrais provenientes da EDO separável:

$$2\int \frac{dy}{y^2-1} = \int dx \implies \ln|y-1| - \ln|y+1| = x + c \implies \ln\frac{|y-1|}{|y+1|} = x + c$$

solução geral implícita

Isolando y:

$$\frac{|y-1|}{|y+1|} = e^{x+c} \implies \frac{y-1}{y+1} = \pm e^{x+c} \implies \frac{y-1}{y+1} = Ae^x, \quad A = \pm e^c$$

$$y - 1 = Ae^x(y+1)$$

$$y - Ae^x y = Ae^x + 1$$

$$\boxed{y = \frac{1+Ae^x}{1-Ae^x}}$$ solução geral

Como $y(\ln 2) = -3$, temos $x = \ln 2$ e $y = -3$:

$$y - 1 = Ae^x(y+1) \implies (-3) - 1 = Ae^{\ln 2}((-3)+1) \implies -4 = A(2)(-2) \implies A = 1$$

Resposta A solução particular pelo ponto $(\ln 2, -3)$ é $y = \dfrac{1+e^x}{1-e^x}$.