centro universitário FEI

CA4141

Profa. Elisa Y Takada

Aula 02 (parte 1) - 20ago21

Convergência de sequências

"Operações" com infinito

$$k \pm \infty = \pm \infty, \; k \in \Re$$

$$k\,\infty = \infty, \; k \neq 0$$

$$\infty + \infty = \infty$$

$$-\infty - \infty = -\infty$$

$$(\infty)^n = \infty$$

$$\sqrt{+\infty} = +\infty$$

Propriedades Sejam (a_n) e (b_n) duas sequências convergentes.

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} a_n + \lim_{n\longrightarrow\infty} b_n$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} (ca_n) = c \lim_{n\longrightarrow\infty} a_n, \; c \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} (a_n b_n) = (\lim_{n\longrightarrow\infty} a_n)(\lim_{n\longrightarrow\infty} b_n)$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\longrightarrow\infty} a_n}{\boxed{\lim_{n\longrightarrow\infty} b_n}} \neq 0$$

Indeterminação

$$\infty - \infty \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{0}{0}$$

$$0^\infty \qquad 1^\infty \qquad 0 \cdot \infty$$

$$\infty^0 \qquad 0^0 \qquad \infty^\infty$$

$$[\frac{1}{0}] = \infty$$

$$[\frac{1}{\infty}] = 0$$

$$0 \cdot \infty = \frac{1}{\infty} \cdot \infty = \frac{\infty}{\infty}$$

$$0 \cdot \infty = 0 \cdot \frac{1}{0} = \frac{0}{0}$$

Observação

a) Se (a_n) é uma sequência convergente e (b_n) é divergente, o que se pode afirmar sobre $(a_n + b_n)$?

Supondo que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n = A$ e $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} b_n = \infty$, temos $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} (a_n + b_n) = \infty$, logo $(a_n + b_n)$ é divergente.

b) Se (a_n) e (b_n) duas sequências divergentes, o que se pode afirmar sobre $(a_n + b_n)$?

Nada podemos afirmar. Por exemplo, se $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n = +\infty$ e $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} b_n = -\infty$, temos uma indeterminação em $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n + \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} b_n$.

c) Se (a_n) é divergente e $c \in \mathbb{R}$, o que se pode afirmar sobre (ca_n)?

$\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} (ca_n) = c\,(\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n) = \infty$ desde que $c \neq 0$, logo (ca_n) é divergente para $c \neq 0$.

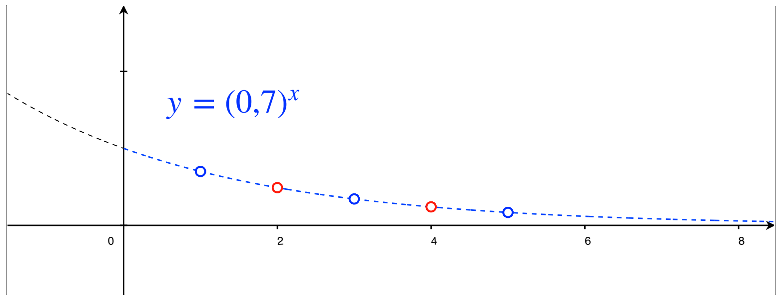
Exemplo Considere a sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ com $a_n = r^n$.

Se $r = 1$, então $r^n = 1^n = 1$ e $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} r^n = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} 1 = 1$ e a sequência (a_n) é convergente.

Se $r = -1$, então $r^n = (-1)^n$ e $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} r^n = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} (-1)^n$ não existe e a sequência (a_n) é divergente.

Exemplo Considere a sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ com $a_n = r^n$ sendo $r \in \mathbb{R}$.

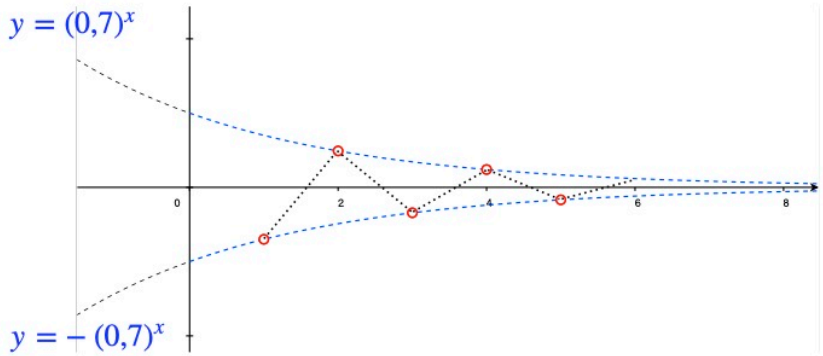
A sequência $(r^n)_{n\geq 1}$ é convergente para $-1 < r \leq 1$, e divergente para os outros valores de r.



$$a_n = (0{,}7)^n$$

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} a_n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} (0{,}7)^n = 0$$

$$r = 0{,}7$$



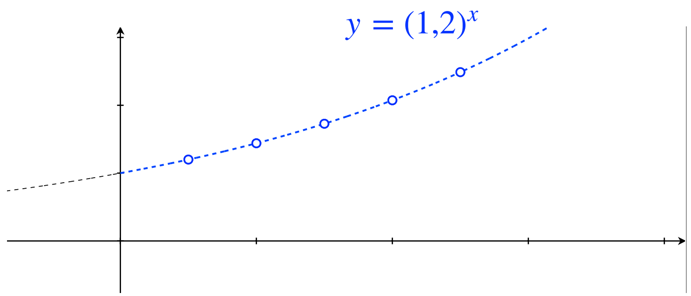
$$a_n = (-0{,}7)^n$$

$$r = -0{,}7 \qquad \lim_{n\longrightarrow+\infty} a_n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} (-0{,}7)^n = 0$$

$-1 < r < 1$

$$\boxed{\lim_{n\longrightarrow+\infty} r^n = 0 \text{ para } |r| < 1}$$

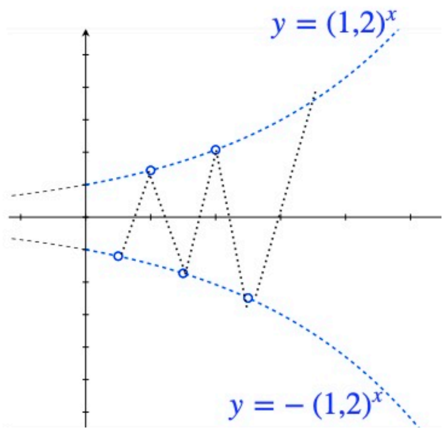
A sequência $(r^n)_{n\geq 1}$ é divergente para $r > 1$ ou $r \leq -1$.



$$a_n = (1{,}2)^n$$

$$\lim_{n\longrightarrow +\infty} a_n = \lim_{n\longrightarrow +\infty} (1{,}2)^n = +\infty$$

$$r = 1{,}2$$

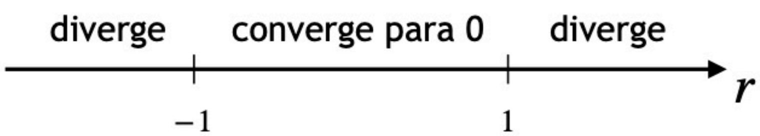


$$a_n = (-1{,}2)^n$$

$$r = -1{,}2$$

$$\nexists \lim_{n\longrightarrow +\infty} (-1{,}2)^n$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \lim_{n\longrightarrow +\infty} r^n = \infty \text{ para } r > 1 \\ \nexists \lim_{n\longrightarrow +\infty} r^n \text{ para } r < -1 \end{array}}$$



Exemplo

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0 \quad \text{(pois } r = \frac{3}{4} \text{ e } |r| < 1\text{)}$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^n = +\infty \quad \text{(pois } r = \frac{5}{2} \text{ e } r > 1\text{)}$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} (-2)^n \nexists \quad \text{(pois } r = -2 \text{ e } r < -1\text{)}$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \cos(2 + \cancelto{0}{(0{,}4)^n}) = \cos(2) \quad \text{(pois } r = 0{,}4 \text{ e } |r| = 0{,}4 < 1\text{)}$$

Exemplo

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\sqrt{4+(-\frac{2}{3})^n} = \sqrt{4+\lim_{n\longrightarrow\infty}\cancelto{0}{(-\frac{2}{3})^n}} = \sqrt{4+0} = 2 \ \ \text{(pois } r = -\frac{2}{3} \text{ e } |r| = \frac{2}{3} < 1\text{)}$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{2^n-3^n}{4^n} = \lim_{n\longrightarrow\infty}(\frac{2^n}{4^n}-\frac{3^n}{4^n}) = \lim_{n\longrightarrow\infty}\left[\left(\frac{2}{4}\right)^n - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right]$$

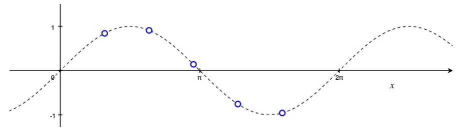
$$= \lim_{n\longrightarrow\infty}(\frac{1}{2})^n - \lim_{n\longrightarrow\infty}(\frac{3}{4})^n = 0$$

$$\boxed{r = \frac{1}{2} \text{ e } |r| < 1}$$

$$\boxed{r = \frac{3}{4} < 1 \text{ e } |r| < 1}$$

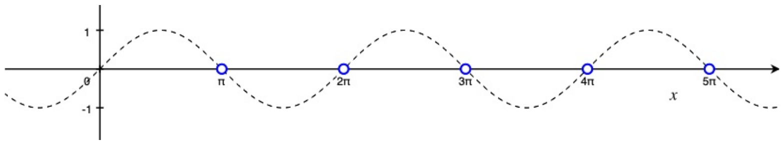
Exemplo Seja a sequência (a_n) dada abaixo. Decida se é convergente ou não.

a) $a_n = \sin n$ Como não existe $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \sin n$, a sequência (a_n) é divergente.



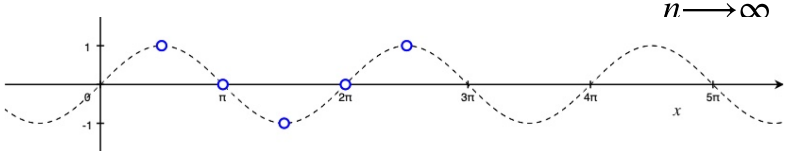
b) $a_n = \sin(n\pi)$

Neste caso, os termos da sequência são $\sin \pi, \sin 2\pi, \sin 3\pi, \cdots$, ou seja, $0,0,0,\cdots$, a sequência (a_n) é convergente pois $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \sin(n\pi) = 0$.



c) $a_n = \sin(\dfrac{n\pi}{2})$

Neste caso, os termos da sequência são $\sin(\dfrac{\pi}{2}),\ \sin \pi,\ \sin(\dfrac{3\pi}{2}),\ \sin(2\pi), \cdots$, ou seja, $1,0,-1,0,1,\cdots$, a sequência (a_n) é divergente pois $\nexists \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \sin(\dfrac{n\pi}{2})$.



Exemplo $\lim_{n\longrightarrow\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n = e$ **(limite fundamental)** $(1^\infty$ é uma indeterminação)

$e = 2{,}718281\ldots$

x	$y=(1+\dfrac{1}{x})^x$	
10	$(1{,}1)^{10}$	2,593742
100	$(1{,}01)^{100}$	2,704814
1000	$(1{,}001)^{1000}$	2,716924
10000	$(1{,}0001)^{10000}$	2,718146
100000	$(1{,}00001)^{100000}$	2,718268

$\downarrow$ $+\infty$ $\qquad$ $\downarrow$ e

Exemplo

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+2} = \lim_{n\longrightarrow\infty}\boxed{(1+\frac{1}{n})^n}(1+\frac{1}{n})^2 = e$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}(1+\frac{1}{n})^{2n} = \lim_{n\longrightarrow\infty}(\boxed{(1+\frac{1}{n})^n})^2 = e^2$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}(\frac{n+1}{n})^n = \lim_{n\longrightarrow\infty}\boxed{(1+\frac{1}{n})^n} = e$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}(\frac{n}{n+1})^n = \lim_{n\longrightarrow\infty}[\boxed{(\frac{n+1}{n})^n}]^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}(1+\frac{2}{n})^n = \lim_{t\longrightarrow\infty}(1+\frac{1}{t})^{2t} = e^2$$

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{t} \Longrightarrow n = 2t$$