CA3131

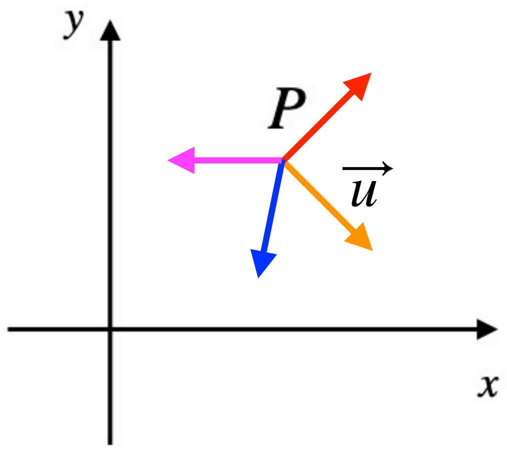
Profa. Elisa Y Takada

Aula 2 (parte 2) - 02mar21

Derivada direcional máxima

Pergunta Em qual direção, a partir de um ponto P, a taxa de variação de f é máxima?

Reformulando a pergunta: em qual direção, a partir do ponto P, a derivada direcional de f é a maior possível?



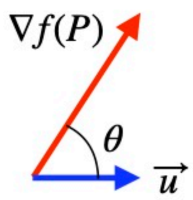
Lembrete de GA $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$ sendo θ o ângulo entre $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(P) = \nabla f(P) \cdot \overrightarrow{u}$$

unitário

$$= |\nabla f(P)||\overrightarrow{u}|\cos\theta$$

$$= |\nabla f(P)|\cos\theta$$



θ : ângulo entre $\nabla f(P)$ e $\overrightarrow{u}$

Note que o número $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P) = |\nabla f(P)|\cos\theta$ é o **maior** possível quando $\cos\theta = 1$, ou seja, $\theta = 0$.

$\theta = 0 \Longrightarrow$ o vetor $\vec{u}$ é **paralelo** ao vetor $\nabla f(P)$.

$\cos\theta = 1 \Longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P) = |\nabla f(P)|$ é a **taxa máxima** de f em P

Conclusão A taxa de variação de f em P é máxima na direção do vetor $\nabla f(P)$.

Resumindo

A **taxa máxima de variação** de uma função f em um dado ponto P é igual a $|\nabla f(P)|$.

A **direção** (e sentido) em que tal ocorre é a do vetor $\nabla f(P)$.

Exemplo (Boulos 35-5) Calcule a derivada direcional máxima de $f(x, y) = x/y$ no ponto $P = (2, -3)$ e determine o versor correspondente.

Derivada direcional máxima = taxa de variação máxima = $|\nabla f(P)|$
Versor correspondente = versor de $\nabla f(P)$

$$f(x, y) = \frac{x}{y} \implies \nabla f = (f_x, f_y) = (\frac{1}{y}, -\frac{x}{y^2})$$

No ponto $P = (2, -3)$ temos

$$\nabla f(P) = (\frac{1}{-3}, -\frac{2}{(-3)^2}) = (-\frac{1}{3}, -\frac{2}{9})$$

$$|\nabla f(P)| = |(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{9})| = \frac{\sqrt{13}}{9}$$

$$\vec{u} = \frac{\nabla f(P)}{|\nabla f(P)|} = \frac{(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{9})}{\frac{\sqrt{13}}{9}} = \frac{9}{\sqrt{13}}(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{9})$$

Resposta Derivada direcional máxima = $\frac{\sqrt{13}}{9}$

Versor da direção máxima = $\frac{1}{\sqrt{13}}(-3, -2)$

Exemplo (Boulos 35-9) Uma formiga situada no ponto $(1,2)$ do plano xy quer se deslocar na expectativa de se aquecer ao máximo.

Sabendo que a temperatura no ponto (x, y) é dada por $T(x, y) = \dfrac{\ln(x^2 + y^2)}{2}$ em graus Celsius com x, y em cm, determine a direção (e sentido) que a formiga deve seguir mais favorável à sua intenção.

$$T(x, y) = \frac{\ln(x^2 + y^2)}{2} \Longrightarrow \begin{array}{l} \dfrac{\partial T}{\partial x} = \dfrac{x}{(x^2 + y^2)} \\[2ex] \dfrac{\partial T}{\partial y} = \dfrac{y}{(x^2 + y^2)} \end{array} \xrightarrow{\text{no ponto } P} \begin{array}{l} \dfrac{\partial T}{\partial x}(1,2) = \dfrac{1}{5} \\[2ex] \dfrac{\partial T}{\partial y}(1,2) = \dfrac{2}{5} \end{array}$$

O vetor gradiente de T em P é dado por $\nabla T(1,2) = (\dfrac{1}{5}, \dfrac{2}{5})$.

Resposta A temperatura aumenta o mais rápido possível na direção (e sentido) do vetor $\nabla T(1,2) = (\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$.

Nota A taxa máxima de aumento da temperatura, a partir de P, é igual a $|\nabla T(1,2)| = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \approx 0{,}45$°C/cm.

Exercício Suponha que a função $F(x, y, z) = x^2 + y^4 + x^2z^2$ calcula a concentração de sal em um lago no ponto (x, y, z) e que você está no ponto $P = (-1,1,1)$.

a) Em que direção você deve ir se quer que a concentração de sal cresça mais depressa?

b) Se você se dirigir, a partir do ponto P, na direção do vetor $\overrightarrow{a} = 2\vec{i} + \overrightarrow{k}$, a concentração de sal aumenta ou diminui?

Resposta (a) $\nabla f(P) = (-4,4,2)$ (b) diminui

Exercício Considere $f(x, y, z) = \frac{x}{y} - \frac{y}{z}$ e os pontos $P = (0, -1,2)$ e $Q = (3,1, -4)$.

a) Determine a taxa de variação de f no ponto P na direção de P para Q.

b) Determine um vetor na direção/sentido em que a função f cresce mais rapidamente em P.

c) Qual a taxa m\áxima de variação de f no ponto P ?

Resposta (a) $-\frac{5}{14}$ (b) $\nabla f(P) = \left(-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ (c) $\frac{\sqrt{21}}{4}$

Exercício (Stewart, 14.6.31) A temperatura em uma bola de metal é inversamente proporcional à distância do centro da bola que tomamos como a origem do sistema de coordenadas. A temperatura no ponto $(1,2,2)$ é de $120°$ Celsius sendo x, y, z em cm.

a) Determine a taxa de variação da temperatura no ponto $(1,2,2)$ em direção ao ponto (2,1,3).

b) Mostre que, em qualquer ponto da bola, a direção de maior crescimento é dada por um vetor que aponta para a origem.

Exercício (Stewart, 14.6.27)

a) Mostre que uma função diferenciável f decresce mais rapidamente em P na direção oposta à do vetor gradiente, isto é, $-\nabla f(P)$.

b) Determine a direção para o qual $f(x, y) = x^4y - x^2y^3$ decresce o mais rápido no ponto $P = (2, -3)$.

Exercício (Stewart, 14.6.28) Determine as direções em que a derivada direcional de $f(x, y) = x^2 + xy^3$ no ponto $(2,1)$ tem o valor constante 2.

Exercício (Stewart, 14.6.29) Determine todos os pontos (x, y) nas quais a direção de maior variação de $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$ é $\vec{\imath} + \vec{\jmath}$.