Formas Canônicas

Expressões Booleanas

❑Definição 1: ***Expressões Booleanas*** geradas sobre símbolos x_1, x_2, ...x_n são definidas recursivamente:

a) 0, 1, x_1, x_2, ...x_n são expressões Booleanas;

b) Se X1 e X2 são expressões Booleanas então, também são expressões Booleanas: $(\mathbf{X}_1)$, $(\mathbf{X}_1)'$, $(\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2)$, $(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2)$;

c) Se **X** é uma expressão Booleana gerada sobre os símbolos x_1, x_2, ...x_n então, podemos escrever: $\mathbf{X} = \mathbf{X}(x_1, x_2, ...x_n)$
onde cada símbolo x_i (ou x_i') é chamado de um literal.

❑Definição 2: ***Produto Canônico* (ou *mintermo*)** é toda Expressão Booleana (ou de Chaveamento) composta pelo **Produto <u>de todas as variáveis</u>**, complementadas ou não:

$$PC_i = l_1.l_2.,\ldots,.l_n = \prod_{j=1}^{n}(l_j)$$

onde l_j é um literal que pode valer x_i ou x_i'

Formas Canônicas

❑Definição 3: ***Primeira Forma Canônica*** é toda Expressão Booleana (ou de Chaveamento) composta pela **Soma** de produtos canônicos, ou de mintermos, diferentes entre si.

Exemplo: Mintermos para três variáveis:

Observar que o termo: $(\mathbf{x_3'.x_2'})$ é um produto, mas **não é um mintermo**, pois não é composto por todas as variáveis de entrada.

$x_3\ x_2\ x_1$	Mintermos
0 0 0	$m_0 = x_3'.x_2'.x_1'$
0 0 1	$m_1 = x_3'.x_2'.x_1$
0 1 0	$m_2 = x_3'.x_2.x_1'$
0 1 1	$m_3 = x_3'.x_2.x_1$
1 0 0	$m_4 = x_3.x_2'.x_1'$
1 0 1	$m_5 = x_3.x_2'.x_1$
1 1 0	$m_6 = x_3.x_2.x_1'$
1 1 1	$m_7 = x_3.x_2.x_1$

Uma expressão na Primeira Forma Canônica poderia ser: $\mathbf{S = m_0 + m_1 + m_7}$
ou $\mathbf{S = x_3'.x_2'.x_1' + x_3'.x_2'.x_1 + x_3.x_2.x_1}$

<u>Observações</u>:

1. Como em um produto canônico intervém todas as variáveis, sua interpretação será sempre "0" a menos de um determinado: aquele que associe "1" a todas variáveis (x_i) e "0" a todas (x_i');
2. Cada um dos 2^n produtos canônicos serve para representar uma, e apenas uma, das possíveis combinações das variáveis de entrada.

As notas de aula servem como roteiro de aula para o professor, contendo os principais tópicos que serão explorados durantes as aulas. Podem também servir como roteiro de estudo, mas não substituem o livro texto da disciplina: TOCCI, R.J., WIDMER, N.S., MOSS, G. L. – Sistemas Digitais – princípios e aplicações (11ª Ed.)

Formas Canônicas

❑Definição 4: ***Soma Canônica* (ou *Maxtermo*)** é toda Expressão Booleana (ou de Chaveamento) composta pela **Soma** **<u>de todas as variáveis</u>**, complementadas ou não:

$$SC_i = l_1 + l_2 + \ldots + l_n = \sum_{j=1}^{n} (l_j)$$

onde l_j é um literal que pode valer x_i ou x_i'

❑Definição 5: ***Segunda Forma Canônica*** é toda Expressão Booleana (ou de Chaveamento) composta pelo **Produto** de somas canônicas, ou de Maxtermos, diferentes entre si.

Formas Canônicas

Exemplo: Maxtermos para três variáveis:

Observar que o termo: (x_3 **+** x_2) é uma soma, mas **não é um Maxtermo**, pois não é composto por todas as variáveis de entrada.

Uma expressão na Segunda Forma Canônica poderia ser: **S= M_0 . M_1 . M_7**

ou **S = $(x_3+x_2+x_1) . (x_3+x_2+x_1') . (x_3'+x_2'+x_1')$**

<u>Observações</u>:

1. Como em uma soma canônica intervém todas as variáveis, sua interpretação será sempre "1" a menos de uma determinada: aquela que associe "0" a todas variáveis (x_i) e "1" a todas (x_i');
2. Cada uma das 2^n somas canônicas serve para representar uma, e apenas uma, das possíveis combinações das variáveis de entrada.

x_3 x_2 x_1	Maxtermos
0 0 0	$M_0 = x_3 + x_2 + x_1$
0 0 1	$M_1 = x_3 + x_2 + x_1'$
0 1 0	$M_2 = x_3 + x_2' + x_1$
0 1 1	$M_3 = x_3 + x_2' + x_1'$
1 0 0	$M_4 = x_3' + x_2 + x_1$
1 0 1	$M_5 = x_3' + x_2 + x_1'$
1 1 0	$M_6 = x_3' + x_2' + x_1$
1 1 1	$M_7 = x_3' + x_2' + x_1'$

As notas de aula servem como roteiro de aula para o professor, contendo os principais tópicos que serão explorados durantes as aulas. Podem também servir como roteiro de estudo, mas não substituem o livro texto da disciplina: TOCCI, R.J., WIDMER, N.S., MOSS, G. L. – Sistemas Digitais – princípios e aplicações (11ª Ed.)

Formas Canônicas

Exemplo: Dualidade entre Mintermos e Maxtermos para três variáveis:

$x_3\ x_2\ x_1$	Mintermos	Maxtermos
0 0 0	$m_0 = x_3'.x_2'.x_1' = M_0'$	$M_0 = x_3 + x_2 + x_1 = m_0'$
0 0 1	$m_1 = x_3'.x_2'.x_1 = M_1'$	$M_1 = x_3 + x_2 + x_1' = m_1'$
0 1 0	$m_2 = x_3'.x_2.x_1' = M_2'$	$M_2 = x_3 + x_2' + x_1 = m_2'$
0 1 1	$m_3 = x_3'.x_2.x_1 = M_3'$	$M_3 = x_3 + x_2' + x_1' = m_3'$
1 0 0	$m_4 = x_3.x_2'.x_1' = M_4'$	$M_4 = x_3' + x_2 + x_1 = m_4'$
1 0 1	$m_5 = x_3.x_2'.x_1 = M_5'$	$M_5 = x_3' + x_2 + x_1' = m_5'$
1 1 0	$m_6 = x_3.x_2.x_1' = M_6'$	$M_6 = x_3' + x_2' + x_1 = m_6'$
1 1 1	$m_7 = x_3.x_2.x_1 = M_7'$	$M_7 = x_3' + x_2' + x_1' = m_7'$

Analogamente, uma expressão na Primeira Forma Canônica é **dual** a uma expressão na Segunda Forma Canônica (uma pode ser convertida na outra utilizando-se o Teorema de DeMorgan):

Por exemplo: $\mathbf{S = m_0 + m_1 + m_7 = \overline{\overline{m_0 + m_1 + m_7}} = \overline{m'_0 \,.\, m'_1 \,.\, m'_7} = \overline{M_0 \,.\, M_1 \,.\, M_7}}$

ou $\mathbf{S = x_3'.x_2'.x_1' + x_3'.x_2'.x_1 + x_3.x_2.x_1 = \overline{(x_3+x_2+x_1)\,.\,(x_3+x_2+x_1')\,.\,(x_3'+x_2'+x_1')}}$

Formas Canônicas

❑Exercício 1

As aeronaves normalmente têm um sinal luminoso que indica se um lavatório (banheiro) está desocupado. Suponha que um avião tenha três lavatórios. Cada lavatório tem um sensor (**L1**, **L2**, **L3**) que produz nível lógico 1 em sua saída quando a porta do respectivo lavatório está trancada e, nível lógico 0 quando destrancada.
Deseja-se projetar um circuito lógico combinacional que ative um sinal de saída **D** em nível lógico 1 (este acende o sinal "Desocupado") se qualquer uma das portas estiver destrancada (podendo ser uma, duas ou todas as três portas destrancadas). Pede-se:

a) Desenhar o diagrama de blocos do sistema (identificar entradas e saídas);
b) Montar a Tabela Verdade da saída **D**;
c) Obter a expressão booleana da saída **D** no formato da **Primeira Forma Canônica**;
d) Obter a expressão booleana da saída **D** no formato da **Segunda Forma Canônica**;
e) Desenhar o **Diagrama Esquemático-Lógico** do circuito (com a expressão mais simples).

As notas de aula servem como roteiro de aula para o professor, contendo os principais tópicos que serão explorados durantes as aulas. Podem também servir como roteiro de estudo, mas não substituem o livro texto da disciplina: TOCCI, R.J., WIDMER, N.S., MOSS, G. L. – Sistemas Digitais – princípios e aplicações (11ª Ed.)

Formas Canônicas

❑**Exercício 1**

a) Diagrama de blocos do sistema:

b) Tabela Verdade da saída **D**:

L3 L2 L1	D	Mintermos	Maxtermos
0 0 0			
0 0 1			
0 1 0			
0 1 1			
1 0 0			
1 0 1			
1 1 0			
1 1 1			

c) Expressão booleana da saída **D** no formato da **Primeira Forma Canônica**:

d) Expressão booleana da saída **D** no formato da **Segunda Forma Canônica**:

e) Diagrama **Esquemático-Lógico**:

Simplificação de Lógica por Teoremas

<u>Utilização de Teoremas Booleanos para Simplificação de Circuitos Lógicos</u>

❑ Conceito: Um ***Circuito Combinacional*** (circuito sem memória) pode ser compreendido como um **dispositivo lógico** cujo resultado de saída depende apenas das entradas no instante atual.

❑ Simplificação de Expressões Booleanas: A saída de um circuito lógico combinacional pode ser representada como uma <u>expressão booleana</u>, a qual pode assumir infinitas formas equivalentes. Deve-se sempre buscar a **forma de representação mínima** (menor número de operações lógicas básicas possível) para reduzir a complexidade da representação lógica (número de portas lógicas utilizadas na implementação física do circuito lógico).

❑ Uso de Teoremas Booleanos: Uma das formas de simplificar a síntese de circuito lógicos é aplicar as **propriedades dos Teoremas da Álgebra de Boole**.

As notas de aula servem como roteiro de aula para o professor, contendo os principais tópicos que serão explorados durantes as aulas. Podem também servir como roteiro de estudo, mas não substituem o livro texto da disciplina: TOCCI, R.J., WIDMER, N.S., MOSS, G. L. – Sistemas Digitais – princípios e aplicações (11ª Ed.)

Simplificação de Lógica por Teoremas

Resumo das identidades básicas de Teoremas Booleanos (vistos na aula 2):

Propriedade	Exemplo 1:	Exemplo 2:
T1- Comutativa	a+b = b+a	a.b = b.a
T2- Distributiva	a+(b.c) = (a+b).(a+c)	a.(b+c) = (a.b)+(a.c)
T3- Elemento Neutro	a+0 = a	a.1 = a
T4- Complemento 1	a+a’ = 1	a.a’ = 0
T5- Dualidade	(+) intercambiável (.)	(0) intercambiável (1)
T6- Único Complemento	(a) tem complemento (a’)	(a’) tem complemento (a)
T7- Dominação	a+1 = 1	a.0 = 0
T8- Complemento 2	0’ = 1	1’ = 0
T9- Idempotência	a+a = a	a.a = a
T10- Involução	(a’)’ = a	((a’)’)’ = a’
T11- Absorção 1	a+a.b = a	a.(a+b) = a
T12- Absorção 2	a+a’.b = a+b	a.(a’+b) = a.b
T13- Associativa	a+(b+c) = (a+b)+c	a.(b.c) = (a.b).c
T14- DeMorgan	(a+b)’ = a’.b’	(a.b)’ = a’+b’

Otimização de Funções Lógicos

Exercício 2

Utilizando as propriedades dos teoremas booleanos simplificar a expressão:

$$(x + y + z).(x.y' + y.z + x.z')$$

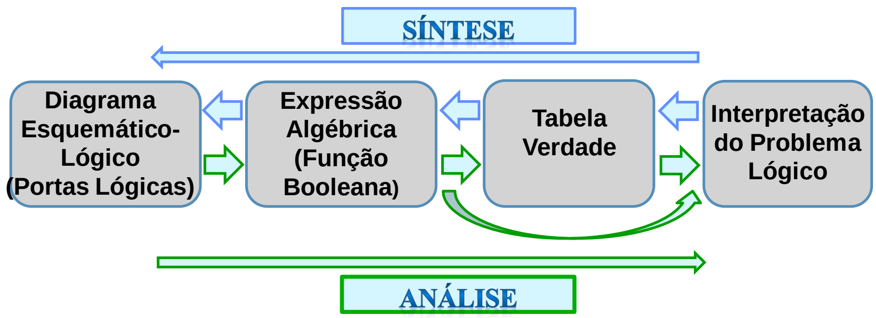
As notas de aula servem como roteiro de aula para o professor, contendo os principais tópicos que serão explorados durantes as aulas. Podem também servir como roteiro de estudo, mas não substituem o livro texto da disciplina: TOCCI, R.J., WIDMER, N.S., MOSS, G. L. – Sistemas Digitais – princípios e aplicações (11ª Ed.)

Análise e Síntese de Circuitos Lógicos

Análise e Síntese de Circuitos Combinacionais

- A **Análise** de um ***Circuito Combinacional*** é realizada para determinar, a partir de um diagrama lógico, quais as funções lógicas realizadas.

- A **Síntese** de um ***Circuito Combinacional*** segue o processo inverso da análise. Por exemplo, a partir de uma especificação em linguagem natural (descrição do comportamento lógico desejado) determinar um circuito lógico que realiza a função lógica especificada.

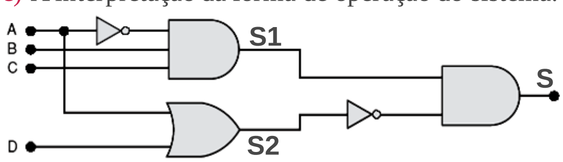


Análise de Circuitos Combinacionais

Exercício 3

Para o circuito combinacional abaixo determinar:

a) A equação de saída;
b) A tabela verdade do circuito;
c) A interpretação da forma de operação do sistema.



S1 = ______________________________

S2 = ______________________________

$\overline{\text{S2}}$ = ______________________________

S = ______________________________

Interpretação do funcionamento do circuito:

____

____

	A	B	C	D	S1	S2	$\overline{\text{S2}}$	S
(0)	0	0	0	0				
(1)	0	0	0	1				
(2)	0	0	1	0				
(3)	0	0	1	1				
(4)	0	1	0	0				
(5)	0	1	0	1				
(6)	0	1	1	0				
(7)	0	1	1	1				
(8)	1	0	0	0				
(9)	1	0	0	1				
(10)	1	0	1	0				
(11)	1	0	1	1				
(12)	1	1	0	0				
(13)	1	1	0	1				
(14)	1	1	1	0				
(15)	1	1	1	1				

As notas de aula servem como roteiro de aula para o professor, contendo os principais tópicos que serão explorados durantes as aulas. Podem também servir como roteiro de estudo, mas não substituem o livro texto da disciplina: TOCCI, R.J., WIDMER, N.S., MOSS, G. L. – Sistemas Digitais – princípios e aplicações (11ª Ed.)