centro universitário FEI

CA4141

Profa. Elisa Y Takada

Aula 8 (parte 2) - 01out21

Série de potências.
Intervalo de convergência.

Série de potências

Uma série de funções da forma $\sum_{n \geq N} c_n(x - x_0)^n$ é uma **série de potências em torno de** x_0 sendo c_n o coeficiente da série e N um número inteiro não-negativo.

$$\sum_{n \geq 0} c_n(x - x_0)^n = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + c_3(x - x_0)^3 + \cdots$$

Exemplo

$\sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n(x-1)^n$ com $c_n = (-2)^n$ e $x_0 = 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}$ com $c_n = \frac{1}{n^2}$ e $x_0 = -3$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ com $c_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ e $x_0 = 0$

Pergunta Para quais valores de x a série é convergente?

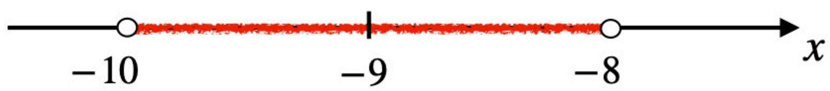
Exemplo Seja a série de potências $\sum (x+9)^n$ (em torno de $a = -9$). Determinar os valores de x para os quais a série é convergente.

Como a série é geométrica com razão $r = (x+9)$, segue-se que a série é convergente quando $|r| < 1$, ou seja, $|x+9| < 1$ e divergente caso contrário.

> Lembrete: $|a| < b \Longleftrightarrow -b < a < b$

$$
\begin{aligned}
|x+9| < 1 &\Longrightarrow -1 < x+9 < 1 \\
&\Longrightarrow -1-9 < x < 1-9 \\
&\Longrightarrow -10 < x < -8
\end{aligned}
$$

Resposta O intervalo de convergência é $-10 < x < -8$ ou $]-10, -8[$.



Exemplo Seja a série de potências $\sum(-1)^n n^n (x-5)^n$ (em torno de $a = 5$). Determinar os valores de x para os quais a série é convergente.

Vamos aplicar o teste da raiz considerando $a_n = (-1)^n n^n (x-5)^n$:

$$\sqrt[n]{|(-1)^n n^n (x-5)^n|} = \sqrt[n]{n^n |(x-5)^n|} = \sqrt[n]{n^n}\,\sqrt[n]{|(x-5)^n|}$$

$$= n\sqrt[n]{|x-5|^n}$$

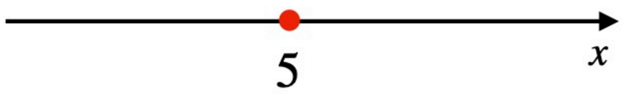
$$= n\,|x-5| \qquad \text{(pois } |(x-5)^n| = |x-5|^n\text{)}$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{|(-1)^n n^n (x-5)^n|} = \lim_{n\longrightarrow\infty} n\,|x-5| = +\infty$$ desde que $x \neq 5$.

E se $x = 5$?

Neste caso, aplicando esse valor na série temos $\sum(-1)^n n^n (x-5)^n = \sum 0$, que converge.

Resposta Como a série converge apenas se $x = 5$, o “intervalo de convergência”é $\{5\}$.



Exemplo Seja a série de potências $\sum \dfrac{2^n x^n}{(n-1)!}$ (em torno de $a = 0$). Determinar os valores de x para os quais a série é convergente.

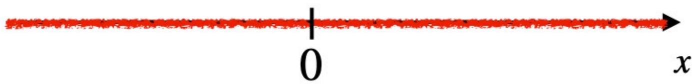
$$|a_{n+1}| = \left|\frac{2^{n+1}x^{n+1}}{(n)!}\right| \qquad \text{e} \qquad |a_n| = \left|\frac{2^n x^n}{(n-1)!}\right|$$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \left|\frac{2^{n+1}x^{n+1}}{n!} \cdot \frac{(n-1)!}{2^n x^n}\right| = \left|\frac{\cancel{2^n}\, 2\cancel{x^n}\, x\,(n-1)!}{n!\cancel{2^n}\cancel{x^n}}\right| = \left|\frac{2x\,(n-1)!}{n!}\right| = \left|\frac{2x\,\cancel{(n-1)!}}{n\cdot\cancel{(n-1)!}}\right| = \left|\frac{2x}{n}\right|$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\longrightarrow\infty} \left|\frac{2x}{n}\right| = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{2|x|}{n} = 0 = L$$

Notem que $L = 0 < 1$ independente do valor de x, logo a série converge qualquer que seja o valor de x real.

Resposta A série converge para todo x real, então o “intervalo de convergência”é $\Re$.



Teorema

Para uma série de potências $\sum c_n(x-a)^n$ ocorre um dos seguintes fatos:

a) A série apenas converge para $x = a$.

b) A série converge para todo x real.

c) Existe um único número real positivo R tal que a série converge para $|x-a| < R$, e diverge para $|x-a| > R$.

Observação

a) O número R é chamado raio de convergência da série.

b) O intervalo de convergência da série é o conjunto de todos os valores de x para os quais a série é convergente.

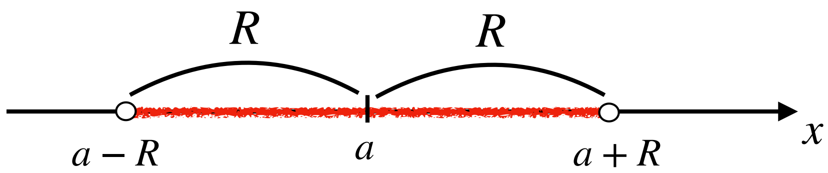
c) O intervalo $|x-a| < R$ é o intervalo de convergência absoluta da série.

d) Nada se sabe, a priori, sobre a série calculada nos extremos do intervalo. É necessário fazer análise caso-a-caso.

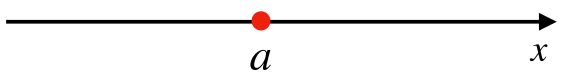
Observação Raio de convergência R

(c) Existe um único número real positivo R tal que a série converge para $|x-a| < R$, e diverge para $|x-a| > R$.

$$|x-a| < R \Longrightarrow -R < x-a < R \quad \Longrightarrow a-R < x < a+R$$



Por convenção:



$$I = \{a\} \Longrightarrow R = 0$$

$$I = \Re \Longrightarrow R = \infty$$

Exercício Determinar o intervalo e o raio de convergência de cada série abaixo.

(a) $\sum \dfrac{(-1)^n x^n}{n \cdot 2^n}$ $\quad -4 < x \leq 4$, $R = 4$

(d) $\sum \dfrac{n^2(x-4)^n}{3^n}$ $\quad 1 < x < 7$, $R = 3$

(b) $\sum \dfrac{(x+2)^n}{3n^2}$ $\quad -3 \leq x \leq -1$, $R = 1$

(e) $\sum (-1)^n n!(x+1)^n$ $\quad I = \{-1\}$, $R = 0$

(c) $\sum \dfrac{x^n}{(n-2)!}$ $\quad I = \Re$, $R = \infty$