Centro Universitário FEI
CC6112 - Computação Gráfica
Aluno: João Pedro Rosa Cezarino
R.A: 22.120.021-5
6 de outubro de 2022

Resolução da Atividade 05 - Registro de Imagens

Questão 01:
Seja uma imagem *gray scale* que sofreu uma deformação após a mudança de perspectiva da câmera. Para aplicar uma transformação inversa, que recupere a imagem original a partir da imagem deformada, pode-se usar um modelo de apenas dois pontos de controle. Sendo o modelo da forma:

$$\begin{cases} x = C1x' + C2y' + C3x'y' + C4 \\ y = C5x' + C6y' + C7x'y' + C8 \end{cases}$$

- Considerando 4 pontos e controle na imagem original – *(x1, y1), (x2, y2), (x3, y3), (x4, y4) = (3, 3),(3, 3),(3, 3),(3, 3)* – e 4 pontos correspondentes em uma imagem deformada - *(x'1y'1), (x'2, y'2), (x'3, y'3), (x'4, y'4) = (1, 3),(5, 3),(5, 3),(1, 3)* –, monte os sistemas lineares que podem achar as constantes Ci de acordo com o Modelo (1).
- Resolva os sistemas e encontre as constantes do Modelo (1).
- Suponha agora que, na imagem deformada, você consegue ler os seguintes pontos: *(0.5, 3),(1.5, 3), (4.5, 3),(0.5, 3),(0.7, 3),(0.3, 3),(4.3, 2),(2.7, 0.5),(1.7, 2),(4.3, 2)* . Responda, usando seu modelo de deformação linear encontrado, quais os valores recuperados da imagem original ?
- Recomendo, utilizando os valores numéricos dados, rascunhar as imagens originais e deformadas em um eixo cartesiano para entendê-las melhor.Também recomendo realizar todos os cálculos em algum sistema web de sua preferência de análise matemática online, ou alguma linguagem de programação.

Solução:

$$P_1 = (-3, 3); P_2 = (3, 3); P_3 = (-3, -3); P_4 = (3, -3)$$

$$P_1' = (-1, 3); P_2' = (5, 3); P_3' = (-5, -3); P_4' = (1, -3)$$

Sistemas Lineares Montados:

$$\begin{cases} X1: C_1 \cdot (-1) + C_2 \cdot 3 + C_3 \cdot (-1) \cdot 3 + C_4 = -3 \\ X2: C_1 \cdot 5 + C_2 \cdot 3 + C_3 \cdot 5 \cdot 3 + C_4 = 3 \\ X3: C_1 \cdot (-5) + C_2 \cdot (-3) + C_3 \cdot (-5) \cdot -3 + C_4 = -3 \\ X4: C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot (-3) + C_3 \cdot 1 \cdot (-3) + C_4 = 3 \\ Y1: C_5 \cdot (-1) + C_6 \cdot 3 + C_7 \cdot 1 \cdot (-3) + C_8 = 3 \\ Y2: C_5 \cdot 5 + C_6 \cdot 3 + C_7 \cdot 5 \cdot 3 + C_8 = 3 \\ Y3: C_5 \cdot (-5) + C_6 \cdot (-3) + C_7 \cdot (-5) \cdot (-3) + C_8 = -3 \\ Y4: C_5 \cdot 1 + C_6 \cdot (-3) + C_7 \cdot 1 \cdot (-3) + C_8 = -3 \end{cases}$$

$$C_1 = 1; C_2 = -0.667; C_3 = 0; C_4 = 0; C_5 = 0; C_6 = 1; C_7 = 0; C_8 = 0$$

Variável **X**:

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -3 & 1 \\ 5 & 3 & 15 & -1 \\ -5 & -3 & 15 & 1 \\ 1 & -3 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}$$

Para **X** temos que:

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = A^{\text{-}1} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 \\ -0.667 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Variável **Y**:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 5 & 3 & 15 & 1 \\ -5 & -3 & 15 & 1 \\ 1 & -3 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \end{bmatrix}$$

Para **Y** temos que:

$$\begin{bmatrix} C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \end{bmatrix} = B^{\text{-}1} \cdot \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ao projetar os pontos requisitados, teremos os valores arredondados:

$$P_1(0.5, 3): x = 0.5 + (-0.667) * 3 = -1.501 y = 3 \rightarrow \mathbf{P_1} = (\mathbf{-1.5}, \mathbf{3})$$

$$P_2(1.5,3): x = 1.5 + (-0.667)*3 = -0.501 y = 3 \rightarrow \mathbf{P_2} = (\mathbf{-0.5}, \mathbf{3})$$

$$P_3(4.5,3): x = 4.5 + (-0.667)*3 = 2.499 y = 3 \rightarrow \mathbf{P_3} = (\mathbf{2.5}, \mathbf{3})$$

$$P_4(-0.5,3): x = -0.5 + (-0.667)*3 = -2.501 y = 3 \rightarrow \mathbf{P_4} = (\mathbf{-2.5}, \mathbf{3})$$

$$P_5(-0.7,3): x = -0.7 + (-0.667)*3 = -2.701 y = 3 \rightarrow \mathbf{P_5} = (\mathbf{-2.7}, \mathbf{3})$$

$$P_6(0.3,-3): x = 0.3 + (-0.667)*(-2) = 2.301 y = -3 \rightarrow \mathbf{P_6} = (\mathbf{2.3}, \mathbf{-3})$$

$$P_7(-4.3,2): x = -4.3 + (-0.667)*(-2) = -2.966 y = -2 \rightarrow \mathbf{P_7} = (\mathbf{-3}, \mathbf{-2})$$

$$P_8(-2.7,0.5): x = -2.7 + (-0.667)*0.5 = -3.0335 y = 0.5 \rightarrow \mathbf{P_8} = (\mathbf{-3}, \mathbf{0.5})$$

$$P_9(1.7,-2): x = 1.7 + (-0.667)*(-2) = 3.034 y = -2 \rightarrow \mathbf{P_9} = (\mathbf{3}, \mathbf{-2})$$

$$P_{10}(4.3,2): x = 4.3 + (-0.667)*2 = 2.966 y = 2 \rightarrow \mathbf{P_{10}} = (\mathbf{3}, \mathbf{2})$$

Questão 02:
O método de Registro de Imagens acontece dentro do processo de Realidade Aumentada com o uso de um marcador artificial, que é uma imagem que deve ser detectada e "distorcida" com base em uma outra imagem "normal". No desenho da Figura 1 abaixo, a imagem "normal" é a da esquerda, e a imagem "torcida" é a da direita; e as curvas pontilhadas ligando os dois desenhos representam pares de pontos correspondentes entre ambas as imagens. Esse processo é realizado com o casamento desses dois conjuntos de pontos correspondentes, escolhidos apropriadamente. Supondo que o conjunto de pontos da imagem-base à esquerda seja: *(x1, y1), (x2, y2), (x3, y3),(x4, y4)*, e outro na imagem alvo à direita seja: *(x'1, y'1), (x'2, y'2), (x'3, y'3),(x'4, y'4)*. Para que seja possível corrigir a imagem da direita, um sistema linear deve ser montado e resolvido, segundo uma equação-modelo. Se a equação-modelo é do tipo ($X = C_1X' + C_2Y'$), um pouco diferente do modelo da questão 1, apresente os sistemas lineares somente para os dois primeiros pares de pontos correspondentes: *(x1, y1)* e *(x2, y2)*, criando constantes *C1, C2, C3, C4, ...*, de acordo com sua conveniência.

Solução:
Tomando por base a equação-modelo fornecida, temos que:

$$\text{Sendo } C = A^{-1} \cdot V$$

$$\begin{cases} X_1 = C_1X_1' + C_2Y_1' \\ Y_1 = C_3X_1' + C_4Y_1' \end{cases} \quad \begin{cases} X_2 = C_1X_2' + C_2Y_2' \\ Y_2 = C_3X_2' + C_4Y_2' \end{cases}$$

$$\therefore A = \begin{cases} X_1 = C_1X_1' + C_2Y_1' \\ X_2 = C_1X_2' + C_2Y_2' \end{cases} \quad B = \begin{cases} Y_1 = C_3X_1' + C_4Y_1' \\ Y_2 = C_3X_2' + C_4Y_2' \end{cases}$$

Em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1' & Y_1' \\ X_2' & Y_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1' & Y_1' \\ X_2' & Y_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

Questão 03: Um modelo de registro de imagens (idêntico ao abordado na vídeo-aula) é o seguinte: *P1 = CP2*. Na Figura 2-a aparece uma imagem de um marcador, que foi rastreada, segmentada, e obtivemos os seguintes pontos-chaves, indicados na própria imagem, no plano da câmera *(x,y): (x1, y1),(x2, y2),(x3, y3),(x4, y4)*. Esse marcador aparece na Figura 2-b com suas coordenadas originais (sem nenhuma distorção). Após o registro, queremos projetar sobre essa figura a pirâmide que aparece na Figura 2-c, cujas coordenadas da base (também no plano (x,y)) aparecem também indicadas na figura, de maneira a obtermos o efeito que aparece na Figura 2-d. Calcule os valores finais dos pontos-chaves da pirâmide que devem ser projetados nessa figura. Observe que a profundidade da pirâmide (para que ela apareça 3D) é resolvida apenas projetando proporcionalmente a sua altura a partir da altura original conhecida; ou seja, o proplema pode ser resolvido em 2D apenas para a base, e estimado a altura 3D proporcionalmente às dimensões originais. Assim, o resultado pedido pode ser dado apenas para a base da pirâmide (2D).

Solução:

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 8 & -64 & 1 \\ 8 & 8 & 64 & 1 \\ -8 & -8 & 64 & 1 \\ 8 & -8 & -64 & 1 \end{bmatrix} A_z = \begin{bmatrix} -4 & -4 & 16 & 1 \\ -4 & 4 & -16 & 1 \\ 4 & -4 & -16 & 1 \\ 4 & 4 & 16 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \\ 5 \\ 19 \end{bmatrix} V_y = \begin{bmatrix} 14 \\ 16 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Para $\mathbf{C_x}$ temos que:

$$C_x = A^{\text{-1}} \cdot V_x = \begin{bmatrix} 0.75 \\ -0.375 \\ -0.01563 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$C_x = \begin{bmatrix} 7.25 \\ 4.75 \\ 13.75 \\ 10.25 \end{bmatrix}$$

Para $\mathbf{C_y}$ temos que:

$$C_y = A^{\text{-}1} \cdot V_y = \begin{bmatrix} 0.1875 \\ 0.5625 \\ -0.0078 \\ 10.5 \end{bmatrix}$$

$$A_z \cdot C_y = \begin{bmatrix} 7.375 \\ 12.13 \\ 9.125 \\ 13.38 \end{bmatrix}$$

Sistemas Lineares Montados:

$$\begin{cases} X1 : C_1 \cdot (-8) + C_2 \cdot 8 + C_3 \cdot (-8) \cdot 8 + C_4 = 1 \\ X2 : C_1 \cdot 8 + C_2 \cdot 8 + C_3 \cdot 8 \cdot 8 + C_4 = 11 \\ X3 : C_1 \cdot (-8) + C_2 \cdot (-8) + C_3 \cdot (-8) \cdot (-8) + C_4 = 5 \\ X4 : C_1 \cdot 8 + C_2 \cdot (-8) + C_3 \cdot 8 \cdot (-8) + C_4 = 19 \\ Y1 : C_5 \cdot (-8) + C_6 \cdot 8 + C_7 \cdot (-8) \cdot 8 + C_8 = 14 \\ Y2 : C_5 \cdot 8 + C_6 \cdot 8 + C_7 \cdot 8 \cdot 8 + C_8 = 16 \\ Y3 : C_5 \cdot (-8) + C_6 \cdot (-8) + C_7 \cdot (-8) \cdot (-8) + C_8 = 4 \\ Y4 : C_5 \cdot 8 + C_6 \cdot (-8) + C_7 \cdot 8 \cdot (-8) + C_8 = 8 \end{cases}$$

Tendo:

$$C_1 = 0.75; C_2 = -0.375; C_3 = -0.016; C_4 = 9; C_5 = 0.188; C_6 = 0.563; C_7 = -0.008; C_8 = 10.5$$

$$P_1 = (1, 14); P_2 = (11, 16); P_3 = (5, 4); P_4 = (19, 8)$$

$$P_1' = (-8, 8); P_2' = (8, 8); P_3' = (-8, -8); P_4' = (8, -8)$$

Portanto, Os valores finais dos pontos-chaves da pirâmide que devem ser projetados nessa figura são:

$$P_1 = (-4, -4) \rightarrow \mathbf{P_1} = (\mathbf{7.244}, \mathbf{7.368})$$

$$P_2 = (-4, 4) \rightarrow \mathbf{P_2} = (\mathbf{4.756}, \mathbf{12.128})$$

$$P_3 = (4, -4) \rightarrow \mathbf{P_3} = (\mathbf{13.756}, \mathbf{9.128})$$

$$P_4 = (4, 4) \rightarrow \mathbf{P_4} = (\mathbf{10.244}, \mathbf{13.376})$$

Questão 04:

Registro de imagens possui uma aplicação muito útil na área da medicina, sobretudo para imagens médicas. Um paciente fez duas tomografias, mostradas na Figura 3 a seguir. No momento da aquisição da imagem mostrada à esqueda da Figura 3, o paciente moveu-se levemente, o que fez com que a imagem produzida ficasse levemente torcida. No momento da aquisição da imagem à direita, o paciente manteve-se imóvel e a imagem produzida ficou normal. Para comparar as duas imagens, o radiologista precisa distorcer a imagem à esquerda. Você é amigo desse radiologista e, sendo você especialista no assunto de registro de imagens, ele chamou você para resolver o problema. Para ajudar você, a seu pedido, o radiologista marcou em vermelho nas duas imagens os pontos que deveriam ser correspondentes. Assim, você decidiu propor um modelo de regostro e calcular essa correspondência. Como você faria isso? Note que você deverá propor também, a escala e resolução das duas imagens.

Solução:
Ao tomarmos uma escala de 0 à 100 nos eixos X e Y encontraríamos as constantes C_1 à C_8 e utilizaríamos estas constantes para distorcer a imagem para a esquerda, usando os 4 pontos dados pelo médico. Logo, como existem pontos conhecidos e suas posições originais são explicitadas na imagem à direita, se aplicarmos a propriedade abaixo, iremos obter a matriz **C**, que contém as constantes de transformação(C_1 - C_8). A partir dai, aplicaremos estas constantes nos pontos da imagem deformada, revertendo assim a distorção gerada pelo movimento.

$$\begin{cases} X = C_1X' + C_2Y' + C_3X'Y' + C_4 \\ Y = C_5X' + C_6Y' + C_7X'Y' + C_8 \end{cases}$$

Como exemplo, Portanto, neste caso teremos:

$$P1 = (20, 20); P2 = (30, 70); P3 = (50, 60); P4 = (70, 70); P5 = (70, 20)$$

$$P1' = (20, 20); P2' = (25, 75); P3' = (50, 60); P4' = (70, 70); P5' = (70, 15)$$

Sistemas Lineares encontrado:

$$\begin{cases} X1 : C_1 \cdot 20 + C_2 \cdot 20 + C_3 \cdot 20 \cdot 20 + C_4 = 20 \\ X2 : C_1 \cdot 25 + C_2 \cdot 75 + C_3 \cdot 25 \cdot 75 + C_4 = 30 \\ X3 : C_1 \cdot 70 + C_2 \cdot 70 + C_3 \cdot 70 \cdot 70 + C_4 = 70 \\ X4 : C_1 \cdot 70 + C_2 \cdot 15 + C_3 \cdot 70 \cdot 15 + C_4 = 70 \\ Y1 : C_5 \cdot 20 + C_6 \cdot 20 + C_7 \cdot 20 \cdot 20 + C_8 = 20 \\ Y2 : C_5 \cdot 25 + C_6 \cdot 75 + C_7 \cdot 25 \cdot 75 + C_8 = 70 \\ Y3 : C_5 \cdot 70 + C_6 \cdot 70 + C_7 \cdot 70 \cdot (70) + C_8 = 70 \\ Y4 : C_5 \cdot 70 + C_6 \cdot 15 + C_7 \cdot 70 \cdot 15 + C_8 = 20 \end{cases}$$

Constantes encontradas:

$C_1 = 1.04; C_2 = 0,141; C_3 = -0,002; C_4 = -2,828; C_5 = 0,087; C_6 = 0,896; C_7 = 0; C_8 = 0,257$