CA3131

Profa. Elisa Y Takada

Aula 1 (parte 1) - 23fev21

Curva parametrizada. Regra da Cadeia.

Curva parametrizada

Curva

- Gráfico de uma função $y = f(x)$
- Gráfico de uma equação $F(x, y) = 0$
- Trajetória de um ponto em movimento no plano xy

Parâmetro t → instante t →

posição no plano $(\, x(t), y(t) \,)$

posição no espaço $(\, x(t), y(t), z(t) \,)$

Exemplo

$$y = 4 + 4x - 4x^2 \qquad x \in [-1{,}5]$$

→

$$x = t \qquad y = 4 + 4t - 4t^2$$

ou

$$(t,\ 4 + 4t - 4t^2) \qquad t \in [-1{,}5]$$

Definição Uma curva parametrizada C no plano é dada por um par de funções $x = x(t)$ e $y = y(t)$ para $t \in I$ sendo I um intervalo da reta.

As equações acima são chamadas de **equações paramétricas** da curva C e t é o parâmetro da curva.

O conjunto de pontos $(\, x(t), y(t) \,)$ formam o gráfico da curva C, que pode ser chamado de **trajetória**.

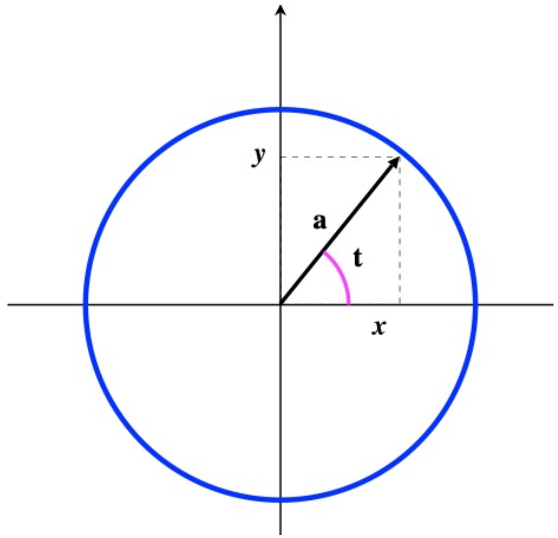
Também podemos usar a notação de **vetor posição** $\vec{r}(t) = (\, x(t), y(t) \,),\ t \in I$.

Observação As definições acima podem ser estendidas para curvas parametrizadas no espaço.

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t),\ t \in I \\ z = z(t) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \vec{r}(t) = (\, x(t), y(t), z(t) \,),\ t \in I$$

Exemplo Parametrizar uma circunferência C de centro 0 e raio $a > 0$.

$$C: \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$



Resposta $\vec{r}(t) = (a\cos t, b\sin t)$ ou $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$

Uma forma de comprovar é obter a equação da circunferência a partir da parametrização.

$$x^2 + y^2 = (a\cos t)^2 + (a\sin t)^2 = a^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = a^2$$

$$\therefore x^2 + y^2 = a^2$$

Observação Uma curva admite várias parametrizações. No exemplo acima, podemos também considerar $C: \ x = a\sin(t)$ e $y = a\cos(t)$ com $t \in [0, 2\pi]$ (verifique!)

Exemplo Parametrizar uma reta no espaço que contém o ponto $A = (2,3,-1)$ e que é paralela ao vetor $\overrightarrow{v} = (1,1,5)$.

Das aulas de GA, sabemos que a equação vetorial de uma reta pelo ponto A e paralelo a um vetor $\overrightarrow{v}$ é dada por $X = A + \lambda\overrightarrow{v}$, $\lambda \in \mathfrak{R}$.

$$X = A + t\overrightarrow{v}$$

$$(x, y, z) = (2,3,-1) + t(1,1,5) \Longrightarrow \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + t \\ z = -1 + 5t \end{cases} \qquad t \in \mathfrak{R}$$

(equações paramétricas da reta)

Resposta $\vec{r}(t) = (2 + t,\ 3 + t,\ -1 + 5t)$ ou $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + t \\ z = -1 + 5t \end{cases} \qquad t \in \mathfrak{R}$

Exercício Parametrizar o segmento de reta AB no espaço sendo $A = (2,1,-2)$ e $B = (1,3,1)$.

Resposta $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases} \quad t \in [0,1]$

Observação Se $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, então uma parametrização de seu gráfico é obtida fazendo-se $x = t$ e $y = f(t)$ para $t \in [a, b]$.

Exemplo Parametrizar o arco de parábola $y = 4 + 4x - 4x^2$ para $x \in [-1,5]$.

Fazendo $x = t$, temos $y = 4 + t - t^2$ com $t \in [-1,5]$.

Resposta Uma parametrização é dada por $\begin{cases} x = t \\ y = 14 + 4t - 4t^2 \end{cases} \quad t \in [-1,5]$

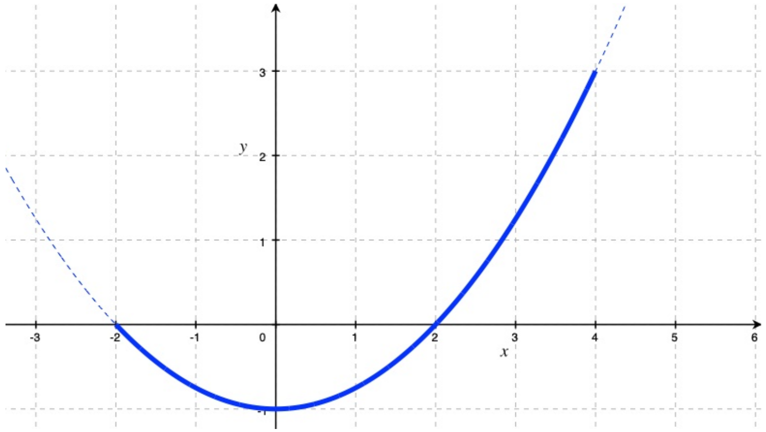
Exemplo O movimento de uma partícula no plano satisfaz as equações paramétricas $x = 2t$ e $y = t^2 - 1$ para $t \in [-1,2]$. Qual a trajetória da partícula?

Para eliminar o parâmetro t, fazemos

$$x = 2t \Longrightarrow t = \frac{x}{2}$$

$$y = t^2 - 1 \Longrightarrow y = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1$$

$$\Longrightarrow y = \frac{x^2}{4} - 1$$



Como $x = 2t$ com $t \in [-1,2]$, temos que $x \in [-2,4]$.

Resposta A trajetória da partícula é um arco de parábola de equação $y = \dfrac{x^2}{4} - 1,\ x \in [-2,4]$.

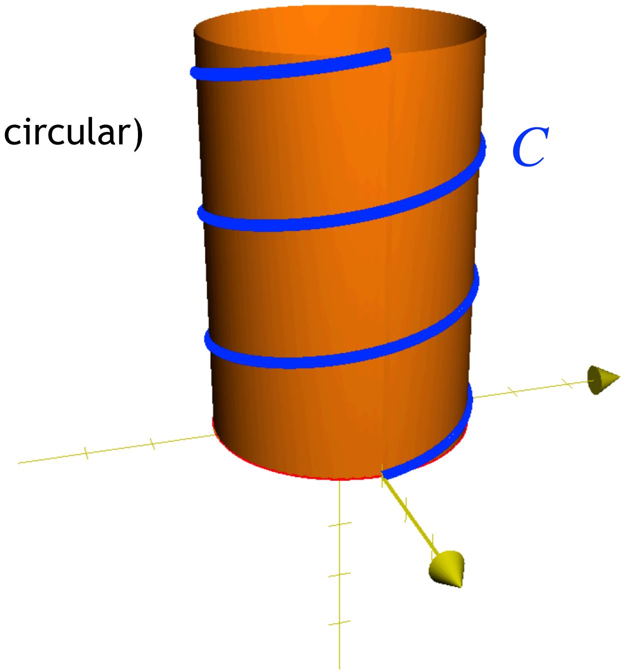
Exemplo (curva parametrizada no espaço)

Seja C a curva parametrizada $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t),\ t \in [0,3\pi]$.

$$C : \begin{cases} \boxed{\begin{array}{l} x = \cos t \\ y = \sin t \end{array}} \\ z = t \end{cases}$$

circunferência de centro 0 e raio 1

(hélice circular)



Regra da Cadeia I

Seja $z = f(x, y)$ uma função diferenciável sendo $x = x(t)$ e $y = y(t)$ deriváveis em t.

A função $Z(t) = f(x(t), y(t))$ é derivável em t e a derivada de Z em relação a t, pela regra da cadeia, fica:

$$\boxed{Z'(t) = \frac{dZ}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}}$$

(sendo $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ calculadas em (x, y))

Observação A expressão acima, completa, é dada por

$$Z'(t) = \frac{dZ}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\frac{dy}{dt}(t)$$

Exemplo Seja $z = x^2y + 3xy^4$ com $x = 2\cos t$ e $y = 2\sin t$.

$$Z'(t) = \frac{dZ}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + 3y^4$$

$$\Longrightarrow Z'(t) = (2xy + 3y^4)(-2\sin t) + (x^2 + 12xy^3)(2\cos t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 12xy^3$$

Observação

a) Por exemplo, se $t = 0$, então $Z'(0) = 0 + (2^2 + 0)(2) = 8$.

b) Note que, se substituirmos x e y na função, temos z como função de t.

$$z = x^2y + 3xy^4 = (2\cos t)^2(2\sin t) + 3(\cos t)(2\sin t)^4$$

Observação

A regra da cadeia pode ser estendida para funções de mais variáveis.

Seja $w = f(x, y, z)$ diferenciável com $x = x(t),\ y = y(t)$ e $z = z(t)$ deriváveis em t.

$$Z'(t) = \frac{dZ}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

(sendo $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial f}{\partial z}$ calculadas em (x, y, z))

Exemplo A temperatura em um ponto (x, y) do plano é dada por $T(x, y)$ (em graus Celsius). Um inseto rasteja de modo que sua posição no plano após t segundos é dada pelos pontos da curva parametrizada C tal que $x = \sqrt{1+t}$ e $y = 2 + t/3$, x e y em cm.

Calcule, pela regra da cadeia, a taxa de aumento de temperatura que o inseto sente após 3 segundos sabendo que $\frac{\partial T}{\partial x}(2{,}3) = 4$ e $\frac{\partial T}{\partial y}(2{,}3) = 3$.

Resolução

$T(x, y) = T(x(t), y(t))$ é uma função de t, então vamos escrever que $\varphi(t) = T(x(t), y(t))$.

(Taxa de aumento de temperatura é a taxa de variação da temperatura)

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \sqrt{1+t} \\ y &= 2 + t/3 \end{aligned}} \Longrightarrow \boxed{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{1}{2\sqrt{1+t}} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{1}{3} \end{aligned}}$$

Substituindo $t = 3$, temos

$$\boxed{\begin{aligned} x(3) &= \sqrt{1+3} = 2 \\ y(3) &= 2 + (3)/3 = 3 \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} \frac{dx}{dt}(3) &= \frac{1}{2\sqrt{1+3}} = \frac{1}{4} \\ \frac{dy}{dt}(3) &= \frac{1}{3} \end{aligned}}$$

Nota
Mostre que a trajetória do inseto é um arco da parábola $y = \dfrac{x^2+5}{3}$ eliminando o parâmetro t.

Exemplo (continuação)

Calcule, pela regra da cadeia, a taxa de aumento de temperatura que o inseto sente após 3 segundos sabendo que $\frac{\partial T}{\partial x}(2{,}3) = 4$ e $\frac{\partial T}{\partial y}(2{,}3) = 3$.

$$\varphi(t) = T(x(t), y(t)) \Longrightarrow \quad \varphi'(t) = \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\varphi'(t) = \frac{\partial T}{\partial x}(x, y) \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+t}} + \frac{\partial T}{\partial y}(x, y) \cdot \frac{1}{3}$$

Substituindo $t = 3$, temos $x = x(3) = 2$ e $y = y(3) = 3$ (página anterior).

$$\varphi'(3) = \boxed{\frac{\partial T}{\partial x}(2{,}3)} \cdot \frac{1}{4} + \boxed{\frac{\partial T}{\partial y}(2{,}3)} \cdot \frac{1}{3}$$

$$\varphi'(3) = (4) \cdot \frac{1}{4} + (3) \cdot \frac{1}{3} = 2$$

Resposta A taxa de variação de temperatura que o inseto sente, após 3s, é de 2°C/cm ao longo de C.

Regra da cadeia em notação vetorial

(no plano) $$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}\right)$$

produto escalar

(no espaço) $$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\right)$$

Vetor Gradiente

Indicamos o vetor gradiente de f por grad f ou ∇f.

(no plano) $$\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

(no espaço) $$\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z},\right)$$

Exemplo Dada a função $f(x, y) = x^2 \ln y$, determinar o vetor gradiente de f e calcular o vetor gradiente no ponto $P = (3,1)$.

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \Longrightarrow \nabla f = \left(2x \ln y, \frac{x^2}{y}\right)$$

$$\nabla f(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P), \frac{\partial f}{\partial y}(P)\right) \Longrightarrow \nabla f(3,1) = \left(6 \ln 1, \frac{9}{1}\right) = (0,9)$$

Resposta $\nabla f = \left(2x \ln y, \frac{x^2}{y}\right)$, $\nabla f(3,1) = (0,9)$

Exercício Dada a função $f(x, y, z) = xe^{2yz}$, determinar o vetor gradiente de f e calcular o vetor gradiente no ponto $P = (3,0,2)$.

Resposta $\nabla f = \left(e^{2yz}, 2xze^{2yz}, 2xye^{2yz}\right)$, $\nabla f(3,0,2) = (1,12,0)$