CA4141

Profa. Elisa Y Takada

Aula 8 (parte 1) - 01out21

Critério da razão

Critério da razão

Também conhecido como critério de **d'Alembert** quando a série tem termos positivos, o critério é utilizado para decidir se uma série converge ou diverge através de seu próprio termo geral.

Teorema Seja $\sum a_n$ uma série qualquer tal que $L = \lim_{n \longrightarrow \infty} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right|$.

a) Se $L < 1$, então a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente.

b) Se $L > 1$ ou $L = \infty$, então a série $\sum a_n$ é divergente.

Justificativa

Seja $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \approx L$ para $n \longrightarrow \infty$.

Considerando que L é razão de uma série geométrica, a série converge se $0 \leq L < 1$.

Exemplo Decidir pelo critério da razão se a série $\sum (-1)^n \frac{n^3+1}{2^n}$ converge ou diverge.

$$|a_{n+1}| = \left|(-1)^{n+1}\frac{(n+1)^3+1}{2^{n+1}}\right| = \frac{(n+1)^3+1}{2^{n+1}}$$

$$|a_n| = \left|(-1)^n\frac{n^3+1}{2^n}\right| = \frac{n^3+1}{2^n}$$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{(n+1)^3+1}{2^{n+1}}}{\frac{n^3+1}{2^n}} = \frac{(n+1)^3+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^3+1} = \frac{[(n+1)^3+1]\,\cancel{2^n}}{\cancel{2^n}2(n^3+1)} = \frac{[(n+1)^3+1]}{2(n^3+1)}$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{[(n+1)^3+1]}{2(n^3+1)} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{[n^3+1]}{2n^3} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{\cancel{n^3}}{2\cancel{n^3}} = \frac{1}{2} = L$$

Conclusão Como $L = \frac{1}{2} < 1$, pelo teste da razão, a série converge absolutamente (logo, é convergente).

Resposta Converge

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3 + 1} = ???$$

$$\lim_{n\to\infty} (n^3 + 1)^{1/n} = ???$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = ???$$

Lembrete

$$n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1 \qquad 0! = 1$$
$$n! = n(n-1)! \qquad 1! = 1$$

Exemplo Decidir pelo critério da razão se a série $\sum \dfrac{2\,n!}{(-5)^n}$ converge ou diverge.

$$|a_{n+1}| = \left|\frac{2\,(n+1)!}{(-5)^{n+1}}\right| = \frac{2\,(n+1)!}{|(-5)^{n+1}|} = \frac{2\,(n+1)!}{5^{n+1}}$$

$$|a_n| = \left|\frac{2\,n!}{(-5)^n}\right| = \frac{2\,n!}{|(-5)^n|} = \frac{2\,n!}{5^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{2}\,(n+1)!}{5^{n+1}}\cdot\frac{5^n}{\cancel{2}n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\cancel{5^n}}{\cancel{5^n}\,5n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{5n!}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot\cancel{n!}}{5\cancel{n!}}$$

$$\boxed{\text{pois } (n+1)! = (n+1)\cdot n!}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{5} = \infty$$

Conclusão $L = \infty \implies$ a série dada é divergente.

Resposta Diverge

Rascunho

$$|a_{n+1}| = \left|\frac{2\,(n+1)!}{(-5)^{n+1}}\right| = \frac{2\,(n+1)!}{5^{n+1}}$$

$$|a_n| = \left|\frac{2\,n!}{(-5)^n}\right| = \frac{2\,(n!)}{5^n}$$

$$\cdots = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{(n+1)!}{5n!} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{(n+1)\,n!}{5n!} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{(n+1)}{5} = +\infty$$

$$6! = 6.5!$$

Exemplo Decidir pelo critério da razão se a série $\sum \frac{n!}{n^n}$ converge ou diverge.

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \quad = \frac{(n+1) \cdot n!}{(n+1)^n (n+1)}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot n!}{(n+1)^n (n+1)} \cdot \frac{n^n}{n!} \\
&= \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} \\
&= \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\
&= e^{-1} = \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e$$

Conclusão $L = \frac{1}{e} < 1 \Longrightarrow$ a série dada é convergente.

Resposta Converge

Exercício

Decidir pelo critério da razão se a série converge ou diverge.

(a) $\sum \frac{1}{n^2 2^n}$

(b) $\sum \frac{(-4)^n}{\sqrt{n}}$

(c) $\sum \frac{\sqrt{3^n + 1}}{5^n}$

d) $\sum \frac{n}{(2n)!}$

(d) $\sum (-1)^n \frac{(n+3)!}{n^2 2^n}$

Resolução $\sum (-1)^n \frac{(n+3)!}{n^2 2^n}$

d) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{n} = \frac{(n+1)(2n)!}{(2n+2)!n} = \frac{(n+1)(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!n}$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{(n+1)\cancel{(2n)!}}{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}n} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{\cancel{(n+1)}}{2\cancel{(n+1)}(2n+1)n}$$

$$= \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{2(2n+1)n} = 0 < 1$$

Conclusão Como $L = 0 < 1$, pelo teste da razão a série dada converge.

$\boxed{\textbf{Resposta} \text{ Converge}}$