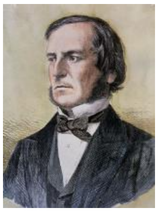
Álgebra Booleana

❑ **Álgebra Booleana**



A álgebra booleana (concebida pelo matemático britânico **George Boole** - 1815 a 1864) utiliza variáveis cujos valores podem ser apenas **1** ou **0** (representando **verdadeiro** ou **falso**) e cujos operadores, como **AND** (E), **OR** (OU) e **NOT** (NÃO), operam com essas variáveis e resultam em **1** ou **0**.

❑ **Definição**

Uma **álgebra booleana** é uma n-upla {***B***, **+**, **x**}, em que:

• ***B*** é um conjunto de elementos;

• **+** e **x** são operações binárias aplicadas sobre os elementos de ***B***, que satisfazem os seguintes postulados:

P1: **Comutatividade**	P2: **Distributividade**	P3: **Identidade**	P4:**Complemento**
Se a,b ∈ ***B***, então:	Se a,b, e c ∈ ***B***, então:	Se a ∈ ***B***, então:	Se a ∈ ***B***, então:
i. a **+** b = b **+** a	i. a**+**(b **x** c)= (a**+**b)**x**(a**+**c)	i. a **+** 0 = a	i. a **+** a' =1
ii. a **x** b = b **x** a	ii. a **x**(b**+**c)= (a**x**b)**+**(a**x**c)	ii. a **x** 1= a	ii. a **x** a' = 0

Álgebra Booleana

Ordem de Precedência:

Operador (**x**) tem **precedência** sobre o operador (**+**). Portanto os parênteses podem ser eliminados do produto.

Sempre que símbolos simples forem utilizados para as variáveis o símbolo (**x**) poderá ser eliminado.

Exemplo: a **+** (b **x** c) = a **+** bc

❑ **Regras de Precedência na Álgebra Booleana**

Símbolo	Nome	Descrição
( )	Parenteses	Avalie primeiro as expressões contidas em parenteses
' ou -	NÃO	Avalie da esquerda para a direita.
*	E	Avalie da esquerda para a direita.
+	OU	Avalie da esquerda para a direita.

As notas de aula servem como roteiro de aula para o professor, contendo os principais tópicos que serão explorados durantes as aulas. Podem também servir como roteiro de estudo, mas não substituem o livro texto da disciplina: TOCCI, R.J., WIDMER, N.S., MOSS, G. L. – Sistemas Digitais – princípios e aplicações (11ª Ed.)

Álgebra Booleana

❑Exercício 1

Determine a ordem de precedência para cada expressão:

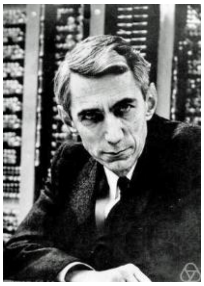
1. F = a*b + c — Precedência: primeiro: e segundo:
2. F = ab + c — Precedência: primeiro: e segundo:
3. F = ab' — Precedência: primeiro: e segundo:
4. F = (ac)' — Precedência: primeiro: e segundo:
5. F = (a + b')*c+d' — Precedência: primeiro: e segundo: e terceiro: e quarto: e quinto:

Símbolo	Nome	Descrição
( )	Parenteses	Avalie primeiro as expressões contidas em parenteses
' ou -	NÃO	Avalie da esquerda para a direita.
*	E	Avalie da esquerda para a direita.
+	OU	Avalie da esquerda para a direita.

Álgebra de Chaveamento

❑<u>Álgebra de Chaveamento</u>

Em 1938, o matemático e engenheiro eletrônico americano Claude Shannon adaptou a álgebra de Boole à análise de circuitos e elaborou uma tese de mestrado intitulada "A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits" fornecendo as bases teóricas da álgebra de chaveamento (ou álgebra de comutação)



Usada para descrever funções de chaveamento por meio de expressões de chaveamento. Consiste de dois elementos ***B*** = (**0**,**1**) e duas operações **E** e **OU**, definidas da seguinte maneira:

E	0	1
0	0	0
1	0	1

OU	0	1
0	0	1
1	1	1

As notas de aula servem como roteiro de aula para o professor, contendo os principais tópicos que serão explorados durantes as aulas. Podem também servir como roteiro de estudo, mas não substituem o livro texto da disciplina: TOCCI, R.J., WIDMER, N.S., MOSS, G. L. – Sistemas Digitais – princípios e aplicações (11ª Ed.)

Álgebra de Chaveamento

Teoremas Booleanos da Álgebra de Chaveamento

A álgebra de chaveamento é uma álgebra booleana

T1. Comutativa

1. a + b = b + a
2. a x b = b x a

T2. Distributiva

1. a + (b x c) = (a + b) x (a + c)
2. a x (b + c) = (a x b)+(a x c)

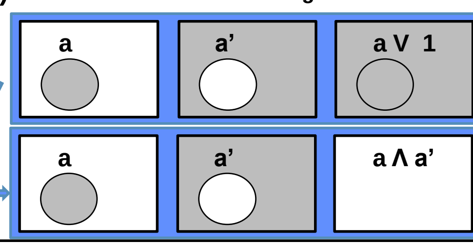
T3. Elemento Neutro (Identidade)

1. a + 0 = 0 + a = a
2. a x 1 = 1 x a = a

T4. Complemento

1. a + a' = 1
2. a x a' = 0

Diagramas de Venn



Álgebra de Chaveamento

Teoremas Booleanos da Álgebra de Chaveamento

T5. Princípio da Dualidade

- As operações **+** e **x** são intercambiáveis entre si; e
- Os elementos de identidade **0** e **1** também são intercambiáveis entre si.

T6. Único Complemento

- Todo elemento (**a**) tem um único complemento (**a'**).

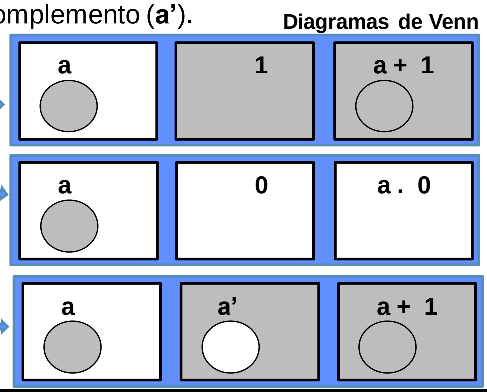
T7. Lei da Dominação

1. a + 1 = 1
2. a x 0 = 0

T8. Lei do Complemento

1. 0' = 1
2. 1' = 0
3. a + a' = 1
4. a x a' = 0

Diagramas de Venn



As notas de aula servem como roteiro de aula para o professor, contendo os principais tópicos que serão explorados durantes as aulas. Podem também servir como roteiro de estudo, mas não substituem o livro texto da disciplina: TOCCI, R.J., WIDMER, N.S., MOSS, G. L. – Sistemas Digitais – princípios e aplicações (11ª Ed.)

Álgebra de Chaveamento

Teoremas Booleanos da Álgebra de Chaveamento

T9. Lei da Idempotência

1. a + a = a
2. a x a = a

T10. Lei da Involução

(a')' = a

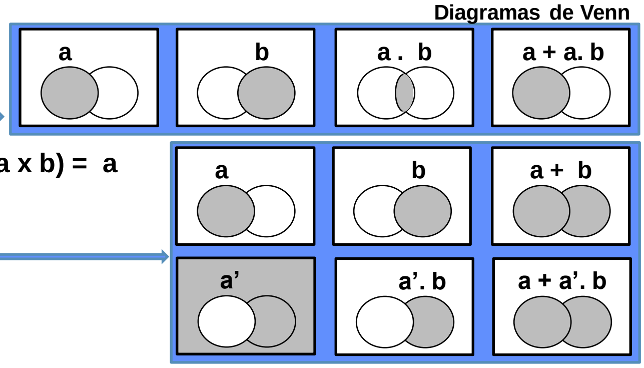
T11. Lei da Absorção 1

1. a + a x b = a
2. a x (a + b) = (a x a) + (a x b) = a

T12. Lei da Absorção 2

1. a + a' x b = a + b
2. a' + a x b = a' + b
3. a x (a' + b) = a x b

Diagramas de Venn



Álgebra de Chaveamento

Teoremas Booleanos da Álgebra de Chaveamento

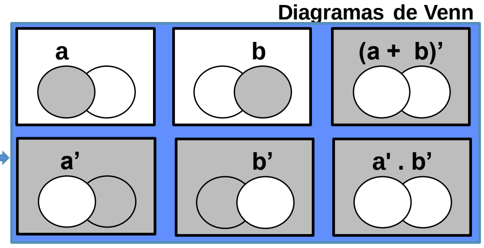
T13. Lei Associativa

1. a + (b + c) = (a + b) + c
2. a x (b x c) = (a x b) x c

T14. Teoremas de DeMorgan

1. (a + b)' = a' x b'
2. (a x b)' = a' + b'

Diagramas de Venn



T15. Teoremas de DeMorgan generalizados

1. (a + b + c + d + ...)' = (a + b)' x (c + d)' x (...)' = a' x b' x c' x d' x (...)'
2. (a x b x c x d x ...)' = (a x b)' + (c x d)' + (...)' = a' + b' + c' + d' + (...)'

As notas de aula servem como roteiro de aula para o professor, contendo os principais tópicos que serão explorados durantes as aulas. Podem também servir como roteiro de estudo, mas não substituem o livro texto da disciplina: TOCCI, R.J., WIDMER, N.S., MOSS, G. L. – Sistemas Digitais – princípios e aplicações (11ª Ed.)

Álgebra de Chaveamento

❑Exercício 2

Simplificar as expressões aplicando os teoremas booleanos indicados:

01. X * 0 = **(Dominação)**
02. X * 1 = **(Elem. Neutro)**
03. X * X = **(Idempotência)**
04. X *X' = **(Complemento)**
05. X + 0 = **(Elem. Neutro)**
06. X + 1 = **(Dominação)**
07. X + X = **(Idempotência)**
08. X + X' = **(Complemento)**
09. X + X*Y = **(Absorção)**
10. X'+ X*Y = **(Absorção)**
11. X'+ X'*Y' = **(Absorção)**
12. X + X'*Y' = **(Absorção)**

Teorema	Propriedade	Exemplo1	Exemplo 2
T1	Comutativa	a+b = b+a	a.b = b.a
T2	Distributiva	a+(b.c)=(a+b).(a+c)	a.(b+c)=(a.b)+(a.c)
T3	Elemento Neutro	a+0 = a	a.1 = a
T4	Complemento 1	a+a' = 1	a.a' = 0
T5	Dualidade	+ e . são intercambiáveis	
T6	Único Complemento	a é único complemento de a'	
T7	Dominação	a+1 = 1	a.0 = 0
T8	Complemento 2	0' = 1	1' = 0
T9	Idempotência	a+a = a	a.a = a
T10	Involução	(a')' = a	((a')')' = a'
T11	Absorção 1	a+ a.b = a	a.(a+b) = a
T12	Absorção 2	a+a'.b = a+b	a.(a'+b) = a.b
T13	Associativa	a+(b+c) = (a+b)+c	a.(b.c) = (a.b).c
T14	DeMorgan	(a+b)' = a'.b'	(a.b)' = a'+b'

9

Álgebra de Chaveamento

❑Exercício 3

Escrever as expressões equivalentes aplicando os teoremas booleanos indicados:

01. X * (Y* Z) = **(Associativa)**
02. X * (Y+Z) = **(Distributiva)**
03. (X + Y) *(Y + Z) = **(Distributiva + Absorção)**
04. (X + Y + Z)' = **(Teorema de DeMorgan)**

Teorema	Propriedade	Exemplo1	Exemplo 2
T1	Comutativa	a+b = b+a	a.b = b.a
T2	Distributiva	a+(b.c)=(a+b).(a+c)	a.(b+c)=(a.b)+(a.c)
T3	Elemento Neutro	a+0 = a	a.1 = a
T4	Complemento 1	a+a' = 1	a.a' = 0
T5	Dualidade	+ e . são intercambiáveis	
T6	Único Complemento	a é único complemento de a'	
T7	Dominação	a+1 = 1	a.0 = 0
T8	Complemento 2	0' = 1	1' = 0
T9	Idempotência	a+a = a	a.a = a
T10	Involução	(a')' = a	((a')')' = a'
T11	Absorção 1	a+ a.b = a	a.(a+b) = a
T12	Absorção 2	a+a'.b = a+b	a.(a'+b) = a.b
T13	Associativa	a+(b+c) = (a+b)+c	a.(b.c) = (a.b).c
T14	DeMorgan	(a+b)' = a'.b'	(a.b)' = a'+b'

10

As notas de aula servem como roteiro de aula para o professor, contendo os principais tópicos que serão explorados durantes as aulas. Podem também servir como roteiro de estudo, mas não substituem o livro texto da disciplina: TOCCI, R.J., WIDMER, N.S., MOSS, G. L. – Sistemas Digitais – princípios e aplicações (11ª Ed.)

Circuitos Lógicos

Níveis Lógicos:

A álgebra booleana e a álgebra de chaveamento permitem descrever o comportamento de circuitos lógicos (relação entre entrada e saída do circuito lógico) se considerarmos que as variáveis booleanas representam um estado lógico de um circuito, denominado de **nível lógico.**

Em circuitos digitais cada **nível lógico** pode ser representado fisicamente por uma faixa de tensões (por exemplo: 0 V a 5 V).

Do ponto de **vista do estado lógico** representado por cada nível existem diversas interpretações possíveis

NL0	NL1
Falso	Verdadeiro
Desligado	Ligado
Baixo	Alto
Não	Sim
Aberto	Fechado
0 V	+5 V

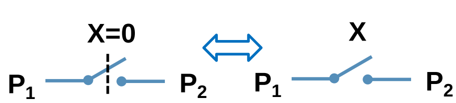
Circuitos Lógicos

Circuitos Lógicos com Chaves Mecânicas:

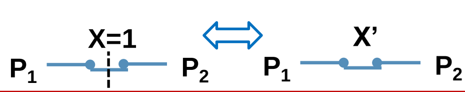
A álgebra de chaveamento foi inicialmente desenvolvida para a realização de circuitos lógicos utilizando chaves mecânicas.

❑ **Definição de chave mecânica**: Considerando que **X** é uma variável da álgebra de chaveamento, então ela pode assumir os valores binários 0 e 1. Pode-se considerar que **X** também representa a variável de controle do estado de uma chave com um polo e uma posição de acionamento (**SPST – Single Pole, Single Throw**), nesse caso, quando **X = 1** a chave está **fechada** e quando **X = 0** a chave está **aberta**.

Chave Aberta (**X=0**):
Não há conexão física entre P_1 e P_2:
F=0



Chave Fechada (**X=1**):
Há conexão física entre P_1 e P_2 :
F=1



As notas de aula servem como roteiro de aula para o professor, contendo os principais tópicos que serão explorados durantes as aulas. Podem também servir como roteiro de estudo, mas não substituem o livro texto da disciplina: TOCCI, R.J., WIDMER, N.S., MOSS, G. L. – Sistemas Digitais – princípios e aplicações (11ª Ed.)

Circuitos de Chaveamento

Circuitos de Chaveamento

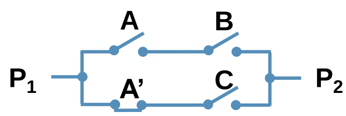
Um **Circuito de Chaveamento** é uma rede elétrica composta por chaves *abertas* ou *fechadas*, que representa uma função lógica (**F**) onde:

a) Chaves simbolizadas pela mesma letra estão todas *abertas* ou *fechadas*;

b) Chave **X** *aberta* (*fechada*) implica em chave **X'** *fechada* (*aberta*);

c) Se uma corrente pode fluir do terminal esquerdo (**P1**) para o direito (**P2**) considera-se a saída do circuito em estado lógico **1 (F=1)**, caso contrário em estado lógico **0 (F=0).**

Exemplo de um circuito de chaveamento:



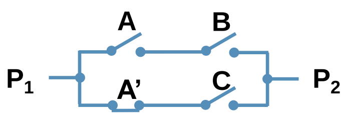
Circuitos de Chaveamento

Exercício 4

Considerando o circuito de chaveamento representado abaixo, composto por três chaves de entrada (**A**, **B**, **C**):

a) Identifique para quais condições lógicas das chaves (entrada = **0** para chave ***aberta*** e entrada = **1** para chave ***fechada***) existe conectividade elétrica entre os pontos P_1 e P_2 ;

b) Considerando que a função de saída **S** desse circuito é definida como estado lógico 1 (**S=1**) apenas quando existe conectividade elétrica entre os pontos P_1 e P_2 expresse a função lógica da saída (**S**) em relação às entradas do circuito (**A**, **B**, **C**).



Observe que:
- O estado lógico da variável de entrada define a condição da chave (se **A=1** ⇒ chave **fechada**);
- Se a chave controlada pela variável **A** estiver **aberta** ⇒ a chave controlada pela variável **A'** está **fechada**.

As notas de aula servem como roteiro de aula para o professor, contendo os principais tópicos que serão explorados durantes as aulas. Podem também servir como roteiro de estudo, mas não substituem o livro texto da disciplina: TOCCI, R.J., WIDMER, N.S., MOSS, G. L. – Sistemas Digitais – princípios e aplicações (11ª Ed.)

Tabela Verdade

- **Definição**
  - **Definição de Tabela Verdade**:

A **Tabela Verdade** estabelece de uma forma tabular **todas as combinações possíveis** da relação entre as variáveis das entradas de um sistema lógico com as variáveis das saídas (resultado das condições lógicas das entradas).

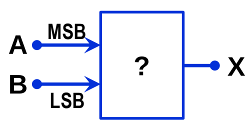
- **Tabelas Verdade (exemplos)**

Observar que as tabelas verdade devem ser montadas com uma ordenação binária crescente de todas as variáveis de entrada.

Usualmente o sinal de entrada mais a direita é o bit menos significativo (LSB) do código de entrada.

Entradas (MSB: A, LSB: B) — Saída (x)

A	B	x
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0



MSB (A) — LSB (C)

A	B	C	x
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

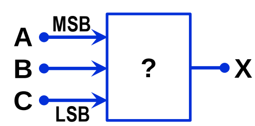
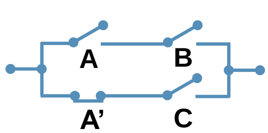


Tabela Verdade

- **Tabelas Verdade (Tabelas de Chaveamento)**

A solução do exercício 4 pode ser verificada também representando-se a **Tabela Verdade** do sistema, identificando-se como **S=1** apenas aquelas condições das entradas que resultam na conexão elétrica entre os pontos **P1** e **P2** do circuito.



Saída para todas as combinações possíveis dos valores de entrada

A	B	C	SAÍDA
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Na tabela verdade pode-se observar que as condições das entradas que resultam na saída em nível lógico um são: (**A=0, B=0 e C=1**) ou (**A=0, B=1 e C=1**) ou (**A=1, B=1 e C=0**) ou (**A=1, B=1 e C=1**). Logo:

S = (A'.B'.C) + (A'.B.C) + (A.B.C') + (A.B.C)

As notas de aula servem como roteiro de aula para o professor, contendo os principais tópicos que serão explorados durantes as aulas. Podem também servir como roteiro de estudo, mas não substituem o livro texto da disciplina: TOCCI, R.J., WIDMER, N.S., MOSS, G. L. – Sistemas Digitais – princípios e aplicações (11ª Ed.)

Tabela Verdade

Aplicando-se os teoremas da álgebra de chaveamento:

S = (A’.B’.C) + (A’.B.C) + (A.B.C’) + (A.B.C)

S = (A’.B’.C) + (A’.B.C) + (A.B.C’) + (A.B.C)

Aplicando a propriedade distributiva ⇒ **S = (A’.C).(B’ + B) + (A.B).(C’ + C)**

Aplicando a propriedade do complemento ⇒ **S = (A’.C).(1) + (A.B).(1)**

Aplicando a propriedade do elemento neutro ⇒ **S = (A’.C) + (A.B)**

Aplicando a propriedade comutativa ⇒ **S = A.B + A’.C**

Observe que expressão é equivalente àquela obtida na análise lógica do circuito de chaveamento (exercício 4)

As notas de aula servem como roteiro de aula para o professor, contendo os principais tópicos que serão explorados durantes as aulas. Podem também servir como roteiro de estudo, mas não substituem o livro texto da disciplina: TOCCI, R.J., WIDMER, N.S., MOSS, G. L. – Sistemas Digitais – princípios e aplicações (11ª Ed.)