CA4141 – Profa. Elisa Y. Takada
Lista de exercícios - Série de Fourier

BIBLIOGRAFIA:

1. Guidorizzi, H. *Um Curso de Cálculo.* Vol. 4. $5^{\underline{a}}$ ed . LTC, Rio de Janeiro, 2002.
2. Figueiredo, D. G. *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais.* IMPA, Rio de Janeiro, 1977.
3. Boyce, W.E. et al. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno.* $8^{\underline{a}}$ ed. LTC, Rio de Janeiro, 2006.
4. Loreto, A.C.C. et al. *Cálculo diferencial e integral 3.* LCTE. São Paulo, 2006.

EXERCÍCIOS

1. a) Determinar a série de Fourier da função $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & -\pi \leq x < 0. \end{cases}$

   b) Utilizar um software gráfico como o Winplot ou o site desmos.com para esboçar o gráfico da série obtida considerando a soma das 4 primeiras parcelas. Comparar com o gráfico de f.

   c) Supondo que vale $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$ com as constantes obtidas no item (a), fazer $x = \pi/2$ e determinar uma série numérica para o número $\pi/4$.

2. a) Determinar a série de Fourier da função $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \pi \\ -1, & -\pi \leq x < 0. \end{cases}$

   b) Utilizar um software gráfico como o Winplot ou o site desmos.com para esboçar o gráfico da série obtida considerando a soma das 4 primeiras parcelas e comparar com o gráfico de f.

3. Determinar a série de Fourier da função $f(x) = x$ com $= -\pi \leq x \leq \pi$.

4. Determinar a série de Fourier da função $f(x) = |x|$ para $-\pi \leq x \leq \pi$.

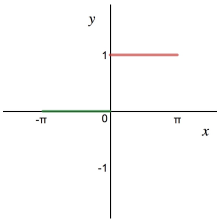
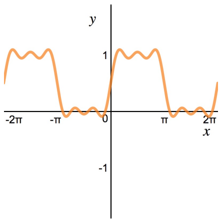
5. (a) Determinar a série de Fourier da função $f(x) = x^2$ com $= -\pi \leq x \leq \pi$.

   b) Supondo que vale $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$ com as constantes obtidas no item (a), fazer $x = \pi$ e determinar uma série numérica para o número $\pi^2/6$.

   c) Supondo que vale $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$ com as constantes obtidas no item (a), determinar a série de Fourier da função $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{\pi^2 x}{3}$ (dica: integração termo-a-termo).

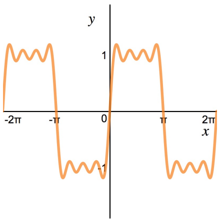
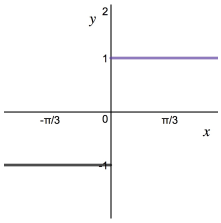
Respostas:

1. (a) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{\pi}\sin x+\dfrac{2}{3\pi}\sin 3x+\dfrac{2}{5\pi}\sin 5x+\cdots=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sin(\,(2n-1)x)}{2n-1}$

   (b)  

   (c) $\dfrac{\pi}{4}=1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{2n-1}$

2. $\dfrac{4}{\pi}\left[\sin x+\dfrac{\sin(3x)}{3}+\dfrac{\sin(5x)}{5}+\cdots\right]=\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sin((2n-1)x)}{2n-1}$

   (b)  

3. $-2\sin x+\dfrac{2\sin 2x}{2}+\dfrac{2\sin 3x}{3}+\cdots=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2\sin(nx)}{n}$

4. $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}\left[\cos x+\dfrac{\cos 3x}{9}+\dfrac{\cos 5x}{25}+\cdots\right]=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}$

5. (a) $\dfrac{\pi^2}{3}+4\left[-\cos x+\dfrac{\cos 2x}{4}-\dfrac{\cos 3x}{9}+\cdots\right]=\dfrac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n\cos(nx)}{n^2}$

   (b) $\dfrac{\pi^2}{6}=1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{9}+\cdots=\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}$

   (c) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{4\sin nx}{n^3}$