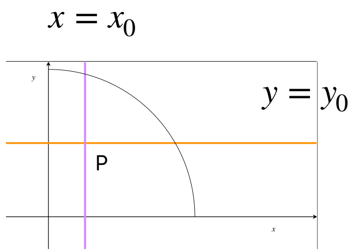
CA3131

Profa. Elisa Y Takada

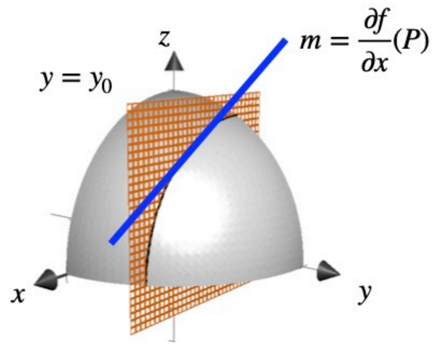
Aula 1 (parte 2) - 23fev21

Derivada direcional

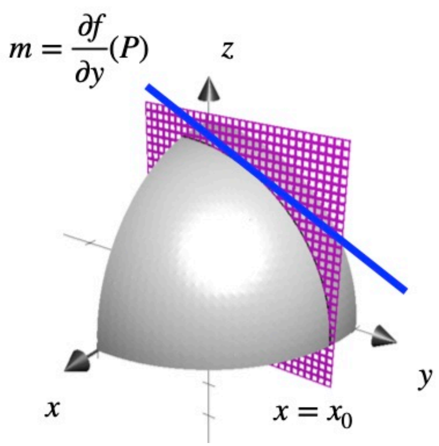
Interpretação geométrica da derivada parcial em um ponto $P = (x_0, y_0)$



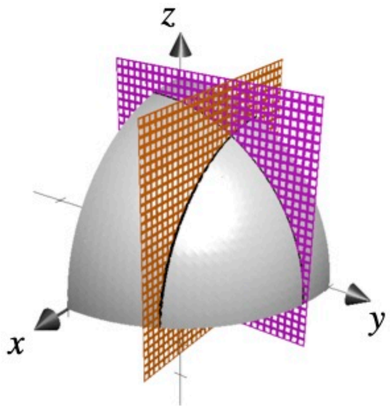
Projeção dos plano $x = x_0$
e $y = y_0$ no plano xy



O número $\dfrac{\partial f}{\partial x}(P)$ é o coeficiente angular da reta tangente à curva-intersecção do gráfico de f com o plano $y = y_0$.



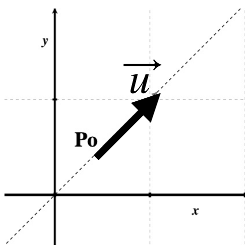
O número $\dfrac{\partial f}{\partial y}(P)$ é o coeficiente angular da reta tangente à curva-intersecção do gráfico de f com o plano $x = x_0$.

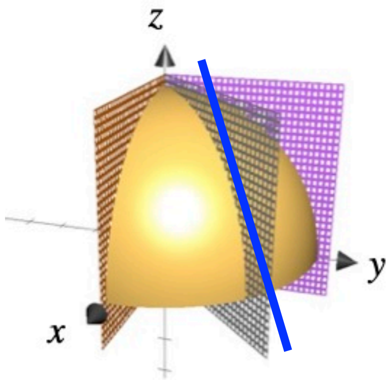


Pergunta Como analisar a taxa de variação de uma função f em uma direção qualquer a partir de um ponto fixado?

Vamos considerar a direção de um vetor unitário $\overrightarrow{u} = (a, b)$, a partir de um ponto $P_0 = (x_0, y_0)$.

A reta por P_0 e paralela ao vetor $\overrightarrow{u}$ tem equações paramétricas $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \quad t \in \mathfrak{R}.$





A taxa de variação de f restrita aos pontos da reta acima é dada pelo limite, se existir:

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(x_0 + at, y_0 + bt) - f(x_0, y_0)}{t}$$

e o número obtido no limite é chamado de **derivada direcional** de $f(x, y)$ no ponto P_0 na direção do vetor $\overrightarrow{u}$.

Notação $\dfrac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(x_0, y_0)$ ou $D_{\overrightarrow{u}} f(x_0, y_0)$

Teorema Seja $f(x,y)$ uma função diferenciável. A derivada direcional de f em um ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ na direção de um vetor **unitário** $\overrightarrow{u} = (a, b)$ é dada por

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, a + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, b}$$

ou

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \overrightarrow{u}}$$

De fato,

seja a função $\varphi(t) = f|_{\vec{r}(t)} = f(\overset{x}{x_0 + at}, \overset{y}{y_0 + bt})$.

Derivando pela regra da cadeia em relação a t: $\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}a + \frac{\partial f}{\partial y}b$

Fazendo $t = 0$, $\varphi'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, a + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, b = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \overrightarrow{u}$

Mas então $\varphi'(0) = \frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(x_0, y_0)$, logo $\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \overrightarrow{u}$.

Exemplo Calcular a derivada direcional de $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 3$ no ponto $P_0 = (-1,2)$ na direção do vetor $\overrightarrow{u} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$.

1o. passo Verificar se o vetor dado é unitário (lembrando que $|\overrightarrow{v}| = |(x,y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$).

O vetor $\overrightarrow{u} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ é **unitário** pois $|\overrightarrow{u}| = \left|\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = \sqrt{1} = 1$

2o. passo Construir as coordenadas do vetor gradiente de f.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \qquad \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(-1,2) = -2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y \quad \underset{\text{no ponto } P_0}{\Longrightarrow} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(-1,2) = 8$$

3o. passo Aplicar a fórmula da derivada direcional.

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(-1,2) = \frac{\partial f}{\partial x}(-1,2)\, a + \frac{\partial f}{\partial y}(-1,2)\, b$$

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(-1,2) = (-2)\frac{3}{5} + (8)\frac{4}{5} = -\frac{6}{5} + \frac{32}{5} = \frac{26}{5}$$

Observação A taxa de variação de f no ponto $(-1,2)$ na direção do vetor $\overrightarrow{u}$ é igual a $\frac{26}{5}$.

Resposta A derivada direcional é $\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(-1,2) = \frac{26}{5}$.

Exercício Uma formiga, no plano xy, está situada no ponto $P = (1,1)$. A temperatura no ponto (x, y) é dada por $f(x, y) = x^3 - xy^2 + 10$. Determine se a expectativa da formiga é de se aquecer ou se resfriar quando ela se desloca segundo o vetor $\overrightarrow{a}$ nos casos abaixo:

(a) $\overrightarrow{a} = (-1,1)$ (b) $\overrightarrow{a} = (4, -1)$ (c) $\overrightarrow{a} = (1,1)$

Resolução

$$f(x, y) = x^3 - xy^2 + 10 \Longrightarrow \nabla f(x, y) = (3x^2 - y^2, -2xy) \Longrightarrow \nabla f(1,1) = (2, -2)$$

(a) $\overrightarrow{a} = (-1,1)$

1o. passo O vetor $\overrightarrow{a}$ é unitário?

$$\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|} = \frac{(-1,1)}{|(-1,1)|} = \frac{(-1,1)}{\sqrt{1+1}}$$

$$\overrightarrow{u} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

2o. passo Vetor gradiente de f

$$\nabla f(1,1) = (2, -2)$$

3o. passo Derivada direcional

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \overrightarrow{u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(1,1) = (2, -2) \cdot (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(1,1) = -\frac{4}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2} < 0$$

Como a derivada direcional em P na direção de $\overrightarrow{a} = (-1,1)$ é negativa, a formiga vai se resfriar ao se mover nessa direção.

Resposta (a) A formiga vai se resfriar.

Exercício (continuação) Temperatura $f(x,y) = x^3 - xy^2 + 10$. Determine se a expectativa da formiga é de se aquecer ou se resfriar quando ela se desloca segundo o vetor $\overrightarrow{a} = (1,1)$.

1o. passo O vetor $\overrightarrow{a}$ é unitário?

$$\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|} = \frac{(1,1)}{|(1,1)|}$$

$$\overrightarrow{u} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

2o. passo Vetor gradiente de f

$$\nabla f(1,1) = (2,-2)$$

3o. passo Derivada direcional

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \overrightarrow{u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(1,1) = (2,-2) \cdot (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(1,1) = \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(1,1) = 0$$

Análise Como a derivada direcional é nula na direção de $\overrightarrow{a} = (1,1)$, a temperatura é constante nessa direção, a partir do ponto (1,1).

Resposta (c) A formiga não sente alteração na temperatura seguindo na direção de $\overrightarrow{a} = (1,1)$.

Nota A fórmula da derivada direcional pode se estendida para uma função de várias variáveis reais.

Exercício Calcular a taxa de variação de $f(x, y, z) = xy + yz + xz$ no ponto $P = (1, -1,3)$ na direção do ponto $Q = (2,4,5)$.

1o. passo Como construir o vetor $\vec{u}$?

$$P \longrightarrow Q$$

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (1,5,2)$$

(não é unitário)

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{1 + 25 + 4} = \sqrt{30}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|} = \frac{(1,5,2)}{\sqrt{30}}$$

$$\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}\right)$$

2o. passo Vetor gradiente de f

$$f_x = y + z$$

$$f_y = x + z$$

$$f_z = y + x$$

$\Downarrow$ no ponto P_0

$$f_x(1, -1,3) = 2$$

$$f_y(1, -1,3) = 4$$

$$f_z(1, -1,3) = 0$$

$$\nabla f(1, -1,3) = (2,4,0)$$

3o. passo Derivada direcional

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, -1,3) = (2,4,0) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, -1,3) = \frac{2}{\sqrt{30}} + \frac{10}{\sqrt{30}} + 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, -1,3) = \frac{22}{\sqrt{30}}$$

Resposta A taxa de variação de f em P na direção de $\overrightarrow{PQ}$ é $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, -1,3) = \dfrac{22}{\sqrt{30}}$.

Exercício Calcular a derivada direcional de f no ponto P na direção do vetor indicado.

a) $f(x,y) = \dfrac{x+2y}{2x+y^2}$, $P = (1,1)$, $\overrightarrow{v} = (3,4)$ **Resposta** $\dfrac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(P) = -\dfrac{1}{5}$

b) $f(x,y,z) = 2\sin(xyz)$, $P = (1,1,0)$, $\overrightarrow{v} = (-\sqrt{3}, -3,2)$ **Resposta** $\dfrac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(P) = -1$

c) $f(x,y,z) = xy^2z^3$ em $P = (2,1,1)$ na direção do ponto $Q = (0,-3,5)$ **Resposta** $\dfrac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(P) = -\dfrac{7}{2}$

Exercício (Boulos 35-2c) Calcular a derivada direcional de $f(x,y,z) = 2y + 2x^2\cos(xz)$ no ponto $P_0 = (1,1,0)$ na direção do vetor $\overrightarrow{a} = (-1,1,-\sqrt{2})$.

Exercício Calcular a derivada direcional de $f(x,y) = \sqrt{2x+3y}$ no ponto $P = (3,1)$ na direção dada pelo ângulo $\theta = \pi/4$.

Exercício (Boulos 35-2c) Calcular a derivada direcional de $f(x, y, z) = 2y + 2x^2 \cos(xz)$ no ponto $P_0 = (1,1,0)$ na direção do vetor $\vec{a} = (-1,1,-\sqrt{2})$.

1o. passo O vetor $\vec{a}$ é unitário?

Não, pois

$$|\vec{a}| = |(-1,1,-\sqrt{2})| = \sqrt{1+1+2} = 2$$

Neste caso vamos utilizar o seu versor:

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{(-1,1,-\sqrt{2})}{2}$$

$$\vec{u} = (\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$$

2o. passo Vetor gradiente de f

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$f_x = 4x\cos(xz) - 2x^2 z\sin(xz)$$

$$f_y = 2$$

$$f_z = -2x^2 xsin(xz)$$

$\Downarrow$ no ponto P_0

$$f_x(1,1,0) = 4\cos(0) = 4$$

$$f_y(1,1,0) = 2$$

$$f_z(1,1,0) = -2\sin(0) = 0$$

$$\nabla f(1,1,0) = (4,2,0)$$

3o. passo Derivada direcional

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1,0) = (4,2,0) \cdot (\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1,0) = (4)(\frac{-1}{2}) + (2)\frac{1}{2} + 0$$

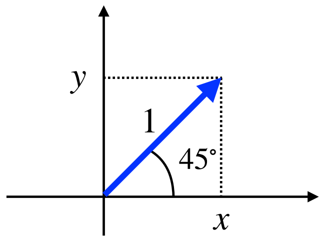
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1,0) = -1$$

Resposta A derivada direcional é $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(-1,2) = -1$.

Exercício Calcular a derivada direcional de $f(x,y) = \sqrt{2x+3y}$ no ponto $P = (3,1)$ na direção dada pelo ângulo $\theta = \pi/4$.

1o. passo Vetor $\overrightarrow{u}$ =?

Observando o triângulo retângulo:



$$\cos 45^\circ = \frac{x}{1} \quad \Longrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 45^\circ = \frac{y}{1} \quad \Longrightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{\overrightarrow{u} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})}$$

(verifique que $\overrightarrow{u}$ é unitário)

2o. passo Vetor gradiente de f

$$f_x = \frac{2}{2\sqrt{2x+3y}}$$

$$f_y = \frac{3}{2\sqrt{2x+3y}}$$

$$\Downarrow$$

no ponto P_0

$$f_x\Big|_{P_0} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$$

$$f_y\Big|_{P_0} = \frac{3}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\nabla f(P_0) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})}$$

3o. passo Derivada direcional

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(3,1) = \nabla f(3,1) \cdot \overrightarrow{u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(3,1) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}) \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(3,1) = (\frac{1}{3})(\frac{\sqrt{2}}{2}) + (\frac{1}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(3,1) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{1}{3} + \frac{1}{2})$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(3,1) = \frac{5\sqrt{2}}{12}}$$

Resposta A derivada direcional é $\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(3,1) = \frac{5\sqrt{2}}{12}$.