**Centro Universitário FEI**
**CC6112 - Computação Gráfica**
**Aluno:** João Pedro Rosa Cezarino
**R.A:** 22.120.021-5
7 de setembro de 2022

**Resolução da Atividade 01 - Transformações Geométricas**

**Questão 01:**
Seja um ponto *P=(2, -1, 3)* no espaço euclidiano 3D. Para deslocá-lo 20 unidades na direção X, 5 unidades em Y e 4 unidades em Z, qual a matriz de trasnformação que devo multiplicar P? Apresente a Matriz e o resultado final separadamente.

**Solução:**

$$\text{Matriz que deve multiplicar P: } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Resultado final: } \begin{bmatrix} 22 \\ 4 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**Questão 02:**
Considerando o mesmo ponto P da questão 1, qual matriz devo aplicar a P para que ele se desloque para o ponto *P=(1,6,4)*?

**Solução:**

$$\text{Matriz que deve ser aplicada à P: } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Questão 03:**
Supondo ainda o mesmo ponto $P$ da 1º questão, qual a única matriz que devo aplicar a P, para que ele sofra ao mesmo tempo uma rotação de 25º em torno do centro do sistema de coordenadas, seguido de uma translação.

**Solução:**

$$T \cdot R = P \rightarrow T \cdot R = M \therefore M \cdot P$$

$$\text{Matriz que deve ser aplicada à P:} \begin{bmatrix} 0.906 & -0.423 & 0 & 20 \\ 0.423 & 0.906 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Questão 04:**
Seja uma nuvem de pontos no espaço Euclidiano 3D,*P = (2, -1, 1),( 1, 1, 1), (3, 2, 1),( 2, 4, 2), (1, 0, 2),( 2, 1, 3),( 3, 1, 1), (4, 2, -3),(3, 5, 5), (2, 3, 5)*. Para rotacionar essa nuvem de 75º no eixo X, 45º no eixo Y e 60º no eixo Z, sempre em torno do seu centro de massa, qual a matriz que devo aplicar sobre a nuvem P?

**Solução:**

$$M = T \cdot R_x \cdot R_y \cdot R_z \cdot T' \cdot N$$

$$\text{M} = \begin{bmatrix} 0.354 & -0.566 & 0.745 & 0.124 \\ 0.612 & -0.462 & -0.641 & 1.80 \\ 0.707 & 0.683 & 0.183 & -0.198 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Questão 05:**
Seja a Figura 1 a seguir no plano *x-y*, cujas coordenadas de apenas quatro pontos *(P 1, P 2, P 3 e P 4)* sao conhecidas. Sabemos que o centro de gravidade da figura coincide com o centro do sistema de coordenadas *(0, 0)*. Considere *P1 = (11, 8), P2 = (15, -10), P3 = ( -8, -8), P4 = (-14, 9)*. Responda:

- **(a)** Qual a matriz que provoca um contração por igual de 10% no desenho?
- **(b)** Qual a matriz que provoca uma contração de 10% na dimensão x e 15% na dimensão y?
- **(c)** Quais os valores finais de *P1, P2, P3 e P4*, após a aplicação do item (b)?
- **(d)** Se o valor final de *P1*, após uma expansão foi *P1'= (30, 12)*, qual o valor de *P3*?
- **(e)** Se o desenho foi primeiro rotacionado de 65º no eixo x, seguido de uma expansão por igual de 50% no mesmo eixo, qual é a matriz de transformação que substitui as duas operações?
- **(f)** Qual a matriz que causará uma reflexão do desenho em torno do ponto de origem? Quais os valores finais dessa reflexão para cada ponto *P1, P2, P3 e P4*?

**Solução:**

- **(a)** Matriz que provoca uma contração de 10% no desenho:

$$T = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **(b)** Matriz que provoca uma contração de 10% na dimensão x e 15% na dimensão y:

$$M = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.85 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **(c)** Após a aplicação do item *b*, os valores finais de *P1, P2, P3 e P4* serão:

$$P_1 = (9.9, 6.8)$$

$$P_2 = (13.5, -8.5)$$

$$P_3 = (-7.2, 6.8)$$

$$P_4 = (-12.6, 7.65)$$

- **(d)** O valor final de *P3* é:

$$P_3 = (-21.6, -12)$$

- **(e)** A Matriz que substitui as duas operações é:

$$M = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.423 & -0.906 & 0 \\ 0 & 0.906 & 0.423 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **(f)** A Matriz que causará uma reflexão no desenho em torno do ponto de origem é:

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Os valores finais dessa reflexão em cada ponto são:

$$P_1 = (-11, -8)$$

$$P_2 = (-15, 10)$$

$$P_3 = (8, 8)$$

$$P_4 = (14, -9)$$

**Questão 06:**
Mostre que a composição (concatenação) de duas rotações Θ1 e Θ2 é aditiva, ou seja: *R(Θ1)R(Θ2) = R(Θ1 + Θ2).*

**Solução:**

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & 0 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1{+}\theta_2 & -\sin\theta_1{+}\theta_2 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1{+}\theta_2 & \cos\theta_1{+}\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Questão 07:**
Prove que a multiplicação de duas matrizes de translação aplicadas sucessivamente é comutativa.

**Solução:**

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a{+}x \\ 0 & 1 & 0 & b{+}y \\ 0 & 0 & 1 & c{+}z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x{+}a \\ 0 & 1 & 0 & y{+}b \\ 0 & 0 & 1 & z{+}c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Questão 08:**
Mostre que uma rotação R no eixo Z e um escalonamento S no plano *(x, y)* são comutativos apenas se o escalonamento for uniforme.

**Solução:**

$$M_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot \cos\theta_1 & b \cdot -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ a \cdot \sin\theta_1 & b \cdot \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\cdot\cos\theta_1 & a\cdot-\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ b\cdot\sin\theta_1 & b\cdot\cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo, $M_1 = M_2$ apenas se o escalonamento for uniforme.

**Questão 09:**
Qual a razão de se adotar coordenadas homogêneas em computação gráfica ?

**Solução:**
O uso de Coordenadas Homogêneas em computação Gráfica tem o objetivo de agilizar o cálculo de transformações, permitindo assim, representar tudo da mesma forma.

**Questão 10:**
Seja a transformação abaixo na Figura 1, cujos pontos iniciais e finais são indicados por setas, dada por uma matriz de escalonamento. Mostre essa matriz.

**Solução:**

Matriz de escalonamento do eixo x:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Questão 11:**
Se considerarmos o ponto $P = (A + B)/2$ como o centro de rotação, como faríamos para representar a rotação de  graus no sentido anti-horário dos objetos A e B em torno de P e ao mesmo tempo em torno de seus próprios centros de massa, também de  graus ?

**Solução:**

$$TP' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\Delta x_p \\ 0 & 1 & 0 & -\Delta y_p \\ 0 & 0 & 1 & -\Delta z_p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} R_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \text{-}\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$TP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta x_p \\ 0 & 1 & 0 & \Delta y_p \\ 0 & 0 & 1 & \Delta z_p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} TB' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\Delta x_b \\ 0 & 1 & 0 & -\Delta y_b \\ 0 & 0 & 1 & -\Delta z_b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$TB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta x_b \\ 0 & 1 & 0 & \Delta y_b \\ 0 & 0 & 1 & \Delta z_b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} TA' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\Delta x_a \\ 0 & 1 & 0 & -\Delta y_a \\ 0 & 0 & 1 & -\Delta z_a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$TA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta x_a \\ 0 & 1 & 0 & \Delta y_a \\ 0 & 0 & 1 & \Delta z_a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_1 = TB \cdot R\theta \cdot TB' \cdot TP \cdot R\theta \cdot TP'$$
$$M_2 = TA \cdot R\theta \cdot TA' \cdot TP \cdot R\theta \cdot TP'$$

**Questão 12:**
Existe um objeto 2D no plano $x$-$y$ e cujo centro de massa está localizado no ponto *(0, 0)*, sendo observado por uma câmera localizada no ponto *P1=(x1, y1)*. Qual a matriz de transformação da câmera que fará com que ela mova-se no plano $x$-$y$ para o ponto *P2=(x2, y2)* que está diametralmente oposto ao ponto P1?

**Solução:**

Matriz de transformação:

$$M_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$