СПбПУ Петра Великого
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики, ФизМех

Направление подготовки
«01.03.02 Прикладная математика и информатика»

Отчёт по лабораторной работе №4

Тема

Алгебраическая проблема собственных чисел

Дисциплина

Численные методы

Выполнил студент группы 5030102/00002 Димитрюк Н. С.
Преподаватель

Санкт-Петербург

1. Формулировка и формализация задачи

1.1 Формулировка задачи

Найти минимальное по модулю собственное число матрицы, используя степенной метод со сдвигом.

1.2 Формализация задачи

Дано: $A \in R^{n\times n}$ — матрица простой структуры с собственными числами λ_i $(i = 1, ..., n)$, $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq ... \geq |\lambda_{n-1}| > |\lambda_n|$.
Найти: минимальное по модулю собственное число λ_n.

2. Алгоритм метода и условия его применимости

2.1 Условия применимости

Матрица A — матрица простой структуры.

2.2 Алгоритм

1. Сделаем сдвиг: $B = A - \mu E$, $(\mu \geq \lambda_1)$. Собственными числами матрицы B будут числа $\lambda_i - \mu$ $(i = 1, ..., n)$. В качестве μ можно взять норму матрицы A, потому что $|\lambda_i| \leq ||A||$ $(i = 1, ..., n)$.

2. Берём произвольный вектор $x^{(0)} \in R^n$ и нормируем его: $\overline{x}^{(0)} = \frac{x^{(0)}}{||x^{(0)}||_\infty}$

3. Далее в цикле вычисляем: $x^{(k)} = B\overline{x}^{k-1}$ и нормируем $\overline{x}^{(k)} = \frac{x^{(k)}}{||x^{(k)}||_\infty}$

4. Вычисляем собственное число: $\lambda_k = \frac{\overline{x}^{(k)} \cdot \overline{x}^{(k-1)}}{\overline{x}^{(k-1)} \cdot \overline{x}^{(k-1)}}$

5. Проверяем условие остановки $\frac{||B \cdot \overline{x}^{(k)} - \lambda_k \cdot \overline{x}^{(k)}||}{||\overline{x}^{(k)}||} < \epsilon$, если оно не выполняется, то переходим к шагу 3, а если выполняется, то завершаем итерационный процесс.

6. Для нахождения минимального по модулю собственного числа матрицы A, к λ_k прибавим μ, получится, что $\lambda_n = \lambda_k + \mu$. А соответствующим собственным вектором будет $\overline{x}^{(k)}$.

3-4. Предварительный анализ задачи и проверка условий применимости

Условие сходимости метода: A — матрица простой структуры. Матрица A генерируется в программе MATLAB следующим образом:

1. Задаются различные собственные числа $\lambda_1 > \lambda_2 > ... > \lambda_{11} > \lambda_{12}$.

2. Строится верхняя треугольная матрица B с собственными числами на диагонали (элементы, которые не лежат на диагонали, задаются случайным образом).

3. Задаётся случайный вектор-столбец w.

4. Получаем матрицу $Q = E - 2ww^T/||w||^2$.

5. Затем получаем матрицу $A = Q^T BQ$, которая будет иметь заданные собственные числа.

Таким образом, матрица A является матрицей простой структуры по построению, так как все собственные числа различны.

5. Тестовый пример

$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 3 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 1$, все собственные числа разные, следовательно, A — матрица простой структуры.

Сделаем свдиг, возьмём $\mu = 4$. $B = A - 4E = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 8 & -1 \end{pmatrix}$.

Значит, искомым собственным числом будет $\lambda_3 - 4 = -3$.

Возьмём $x^{(0)} = (1\ 1\ 1)^T = \overline{x}^{(0)}$ (уже нормирован).

Далее проводим итерации:

1. $x^{(1)} = B\overline{x}^{(0)} = (2\ -2\ \ 7)^T$.
   $\overline{x}^{(1)} = (\frac{2}{7}\ -\frac{2}{7}\ 1)^T$
   $\lambda_1 = \frac{\overline{x}^{(1)} \cdot \overline{x}^{(0)}}{\overline{x}^{(0)} \cdot \overline{x}^{(0)}} = \frac{1}{3}$
   $\frac{||B \cdot \overline{x}^{(1)} - \lambda_1 \cdot \overline{x}^{(1)}||}{||\overline{x}^{(1)}||} \approx \frac{4.38302}{1.07855} \approx 4.0638$

2. $x^{(2)} = B\overline{x}^{(1)} = (-\frac{16}{7}\ \frac{4}{7}\ -\frac{23}{7})^T$.
   $\overline{x}^{(2)} = (-\frac{16}{23}\ \frac{4}{23}\ -1)^T$
   $\lambda_2 = \frac{\overline{x}^{(2)} \cdot \overline{x}^{(1)}}{\overline{x}^{(1)} \cdot \overline{x}^{(1)}} \approx -\frac{1.248}{1.163} \approx -1.073$
   $\frac{||B \cdot \overline{x}^{(2)} - \lambda_2 \cdot \overline{x}^{(2)}||}{||\overline{x}^{(2)}||} \approx \frac{2.5782}{1.23052} \approx 2.0952$

Как мы видим, условие для выхода из цикла уменьшается, значит мы стремимся к собственному числу. Продолжаем цикл пока не выполнится условие, затем к найденному числу прибавим свдиг $\mu = 4$ и получим искомое приближение минимального собственного числа.

6. Контрольные тесты

1. Размерность матриц 12×12, столбцов — 12×1.

2. Точное собственное число: $\lambda^* = 0.1$.

3. Заданная точность $\epsilon_i = 10^{-i}$, $i = 1, ..., 12$

7. Модульная структура программы

1. double VectorNorm(vector<double> v) — вычисляет норму вектора v, где $||v|| = ||v||_2$.
   Параметры:
   v — вектор, норму которого нужно вычислить
   Возвращаемое значение: норма вектора v.

2. vector<double> NormVector(vector<double> v) — нормирует вектор v, используя норму $||v|| = ||v||_\infty$.
   Параметры:
   v — вектор, который нужно нормировать
   Возвращаемое значение: нормированный вектор v.

3. vector<double> PowerMethod(vector<vector<double>> A) — находит приближение минимального собственного числа матрицы и соответствующий собственный вектор с помощью степенного метода.
   Параметры:
   A — матрица
   Возвращаемое значение: приближение минимального собственного числа и соответствующий собственный вектор.

8. Численный анализ

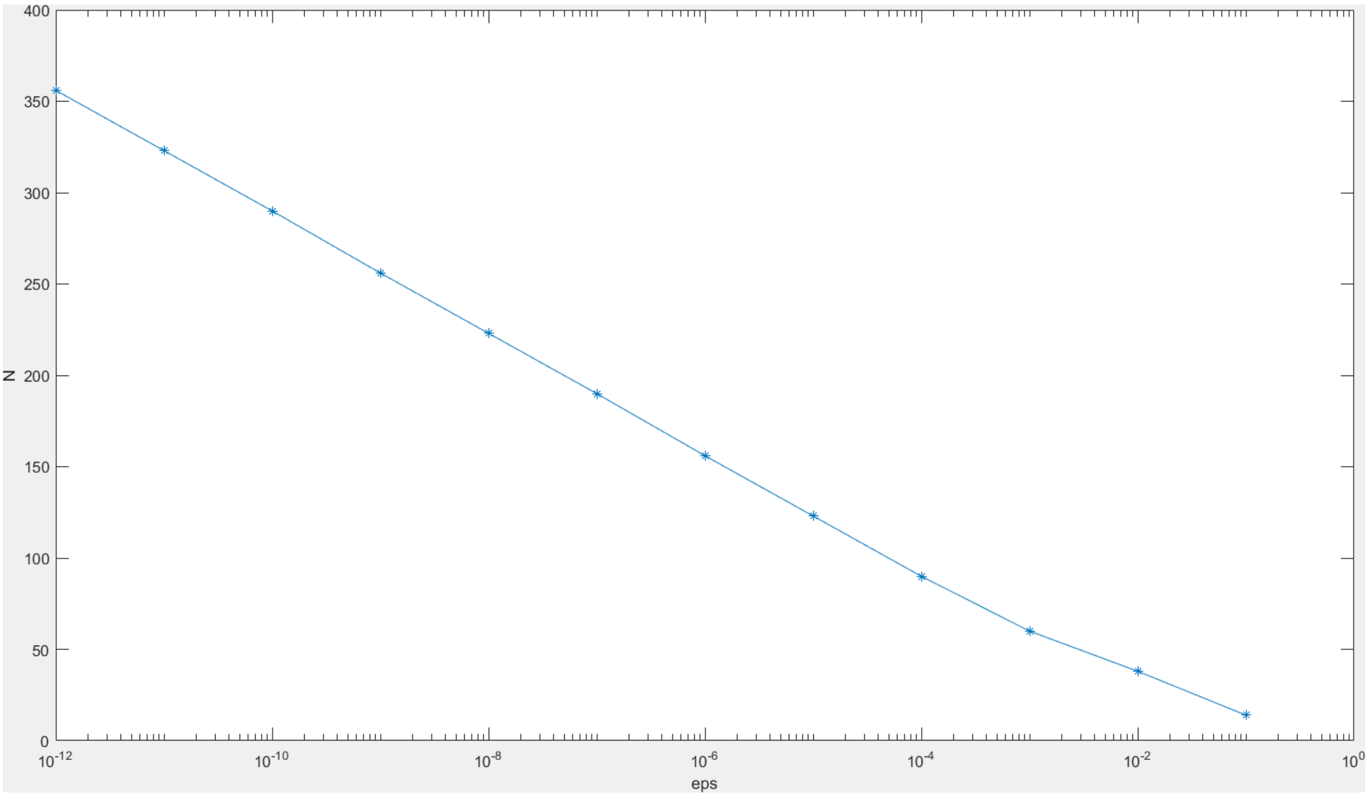

График 1. График зависимости числа итераций от заданного ϵ

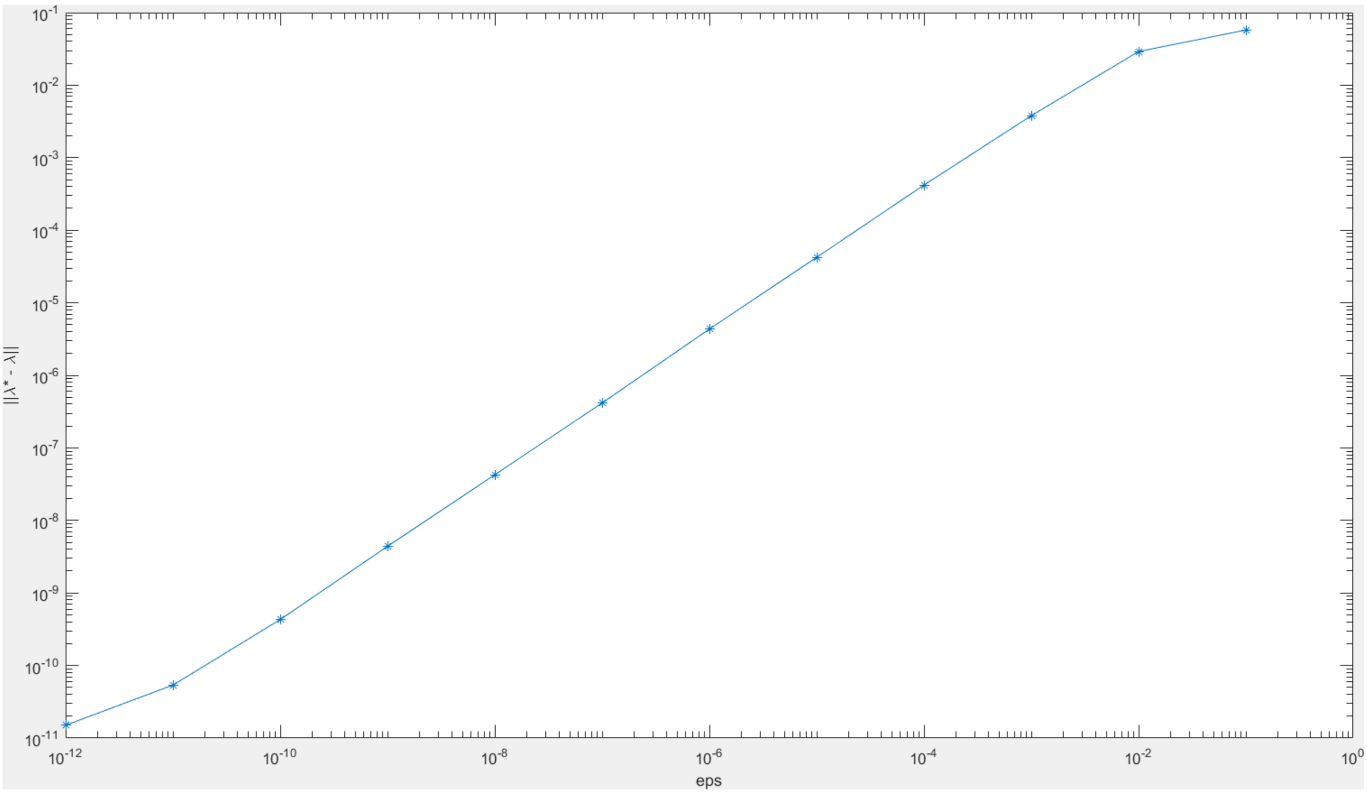

График 2. График зависимости нормы фактической ошибки для собственного числа от заданного ϵ

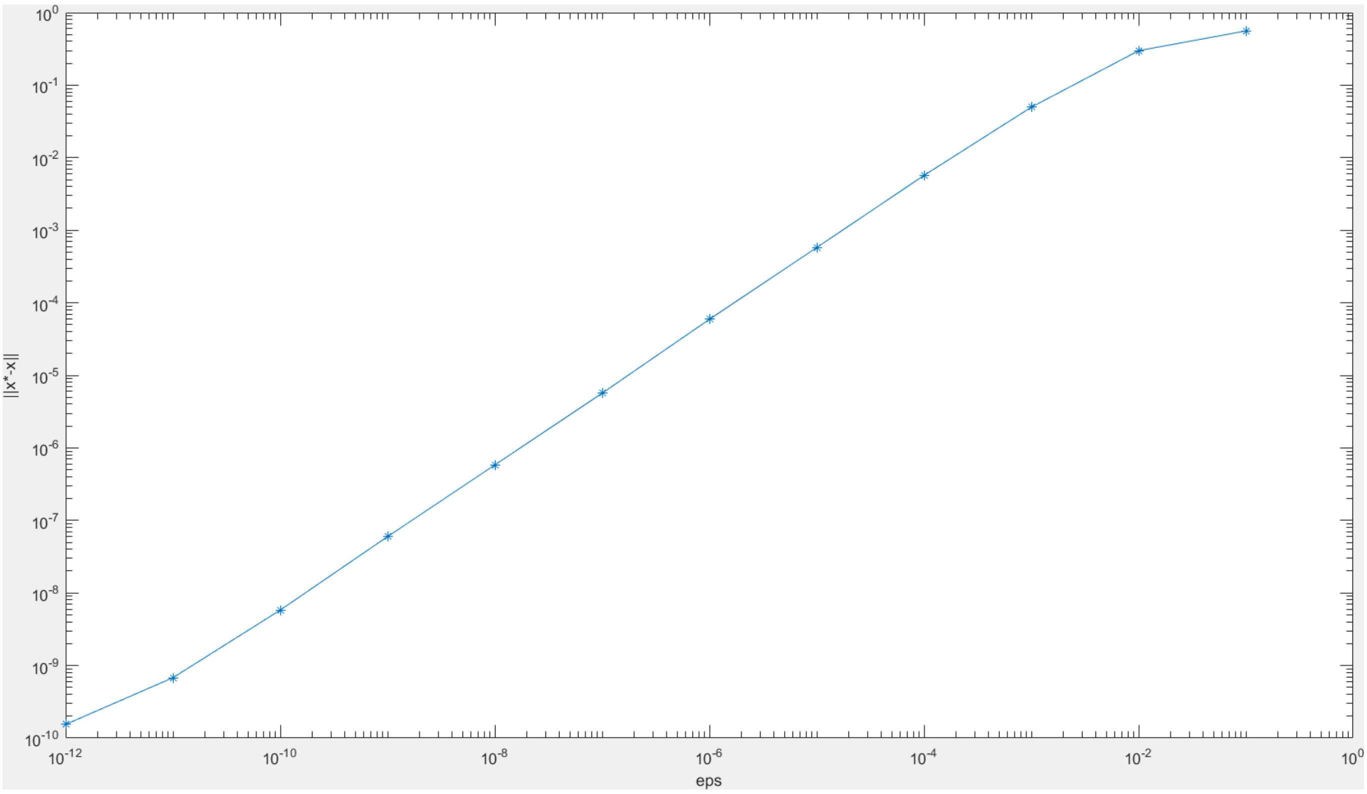

График 3. График зависимости нормы фактической ошибки для собственного вектора от заданного ϵ

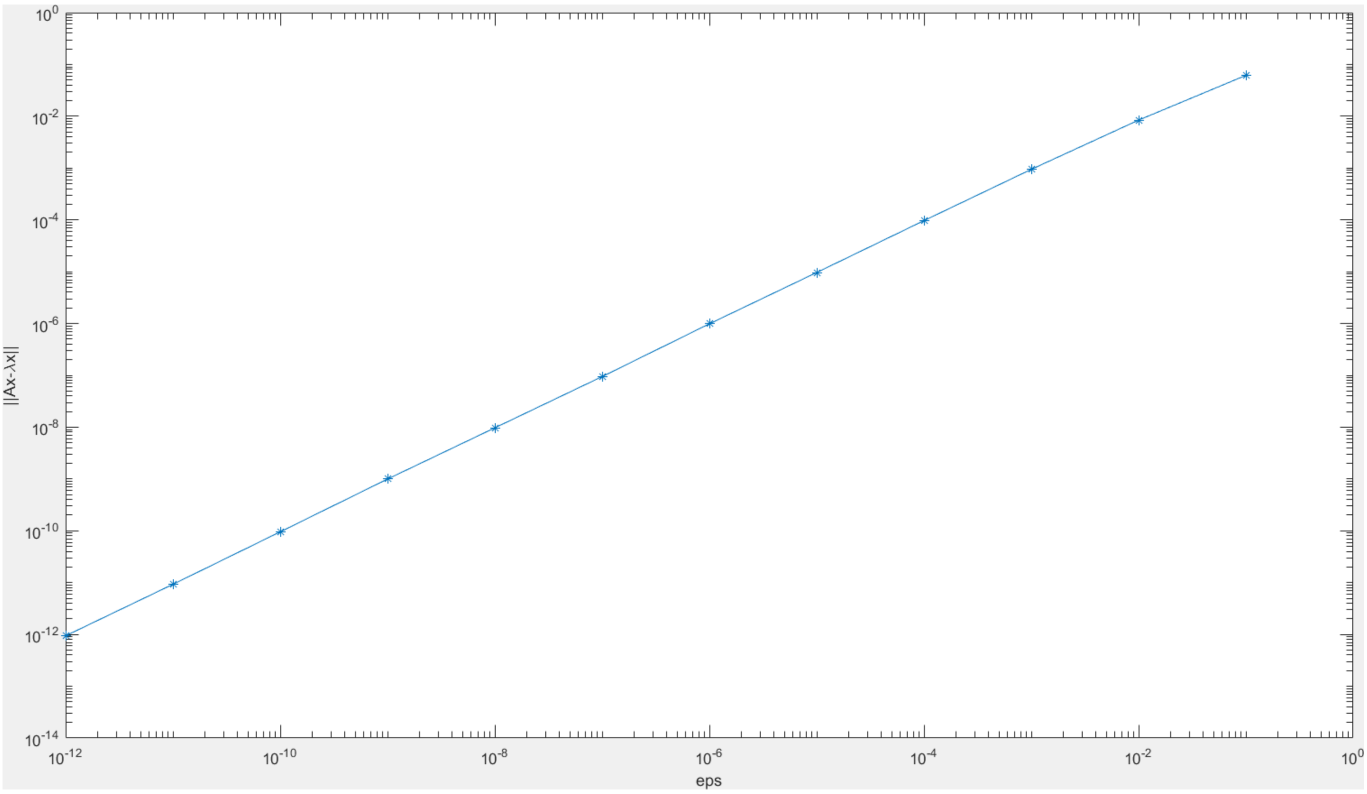

График 4. График зависимости нормы $||Ax - \lambda x||$ от заданного ϵ

На графике (График 1) показана зависимость числа итераций от заданной точности. Видно, что число итераций растёт почти линейно при уменьшении ϵ, метод работает достаточно быстро.

На графике (График 2) показана зависимость нормы фактической ошибки для собственного числа от заданной точности. Как мы можем видеть, с уменьшением ϵ уменьшается норма фактической ошибки. Но заданная точность не достигается, не хватает небольшой величины менее порядка.

На графике (График 3) показана зависимость нормы фактической ошибки для собственного вектора от заданной точности. Как мы видим, на этом графике происходит то же, что и на втором. С уменьшением ϵ уменьшается норма фактической ошибки, но заданная точность так же, как и для собственного числа, не достигается. Причём здесь не хватает целых двух порядков.

На графике (График 4) показана зависимость нормы $||Ax - \lambda x||$ от заданной точности. Как мы видим, с уменьшением ϵ уменьшается и эта норма. Здесь при изменении ϵ на порядок норма тоже изменяется на порядок.

9. Вывод

В ходе работы была решена задача о нахождении минимального собственного числа с помощью степенного метода со сдвигом. Были исследованы зависимости нормы фактической ошибки для собственных числа и вектора, нормы $||Ax - \lambda x||$ и числа итераций от заданной точности. По итогам этих исследований, можно сделать вывод, что данный метод работает достаточно быстро, при изменении ϵ на два порядка число итерация изменяется примерно на 60-80. Но данный метод не позволяет достигнуть заданной точности, в случае для собственного числа фактическая точность отставала менее, чем на порядок, от заданной точности, а для собственного вектора фактическая точность отставала почти на два порядка. А норма $||Ax - \lambda x||$ изменяется линейно при изменении заданной точности. Значит, в реальной задаче не получится гарантировать достижение заданной точности опираясь на норму $||Ax - \lambda x||$.

10. Исправления

1.1 Формулировка задачи

Найти минимальное по модулю собственное число матрицы, используя степенной метод со сдвигом. Исследовать зависимости числа итераций, нормы фактической ошибки для собственных вектора и числа и нормы невязки от заданной точности.

1.2 Формализация задачи

Дано: $A \in R^{n \times n}$ — матрица с собственными числами λ_i $(i = 1, ..., n)$,
$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq ... \geq |\lambda_{n-1}| > |\lambda_n|$.
Найти: минимальное по модулю собственное число λ_n с заданной точность ϵ.
$Ax = \lambda x$.

2.2 Алгоритм

1. Сделаем сдвиг: $B = A - \mu E$, $(\mu \geq \lambda_1)$. Собственными числами матрицы B будут числа $\lambda_i - \mu$ $(i = 1, ..., n)$. В качестве μ можно взять норму матрицы A, потому что $|\lambda_i| \leq ||A||$ $(i = 1, ..., n)$.

2. Берём произвольный вектор $x^{(0)} \in R^n$ и нормируем его: $\overline{x}^{(0)} = \frac{x^{(0)}}{||x^{(0)}||_\infty}$

3. Далее в цикле вычисляем: $x^{(k)} = B\overline{x}^{k-1}$ и нормируем $\overline{x}^{(k)} = \frac{x^{(k)}}{||x^{(k)}||_\infty}$

4. Вычисляем собственное число: $\lambda_k = \frac{x_1^{(k)}}{\overline{x}_1^{(k-1)}}$

5. Проверяем условие остановки $|\lambda_k - \lambda_{k-1}| < \epsilon$, если оно не выполняется, то переходим к шагу 3, а если выполняется, то завершаем итерационный процесс.

6. Для нахождения минимального по модулю собственного числа матрицы A, к λ_k прибавим μ, получится, что $\lambda_n = \lambda_k + \mu$. А соответствующим собственным вектором будет $\overline{x}^{(k)}$.

6. Контрольные тесты

1. Размерность матриц 12×12, столбцов — 12×1.

2. Точные собственные числа: $\lambda_i^* = 0.1, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7$ $(i = 1, ..., 12)$.

3. Заданная точность $\epsilon_i = 10^{-i}$, $i = 1, ..., 13$