СПбПУ Петра Великого
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики, ФизМех

Направление подготовки
«01.03.02 Прикладная математика и информатика»

Отчёт по лабораторной работе №1

**Тема**

Решение алгебраического и трансцендентного уравнений методом половинного деления и методом Ньютона

**Дисциплина**

Численные методы

Выполнил студент группы 5030102/00002 Димитрюк Н. С.
Преподаватель

Санкт-Петербург

# 1. Формулировка и формализация задачи

## 1.1 Формулировка задачи

Найти корни алгебраического и трансцендентного уравнений с заданной точностью.
Алгебраическое уравнение: $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 5 = 0$
Трансцендентное уравнение: $\ln x + (x+1)^3 = 0$
При решении используем два метода: метод половинного деления и метод Ньютона. Для каждого из методов нужно исследовать зависимость количества итераций от заданной точности и зависимость числа итераций от начального приближения.

## 1.2 Формализация задачи

Дано уравнение: $f(x) = 0,\ x \in [a, b]\ \exists! x^* \in [a, b] : f(x^*) = 0$
Найти $x$ такое, что $|x - x^*| < \epsilon,\ x \in [a, b],$ где $\epsilon$ — заданная точность.

# 2. Алгоритмы методов и условия их применимости

## 2.1 Метод половинного деления

### 2.1.1 Условия применимости

1. $f(x) \in \mathrm{C}([a, b])$
2. $f(a) \cdot f(b) < 0$

### 2.1.2 Алгоритм

Для алгоритма дано: промежуток $[a, b],$ уравнение $f(x) = 0$ и задана точность $\epsilon$
Алгоритм следующий:

| | |
|---|---|
| while $\vert b - a\vert > 2\epsilon$ | — условие цикла |
|   $c = \frac{a+b}{2}$ | — середина текущего промежутка |
|   if $f(a) \cdot f(c) < 0$ | — условие (если функция разных знаков в концевых точках) |
|     $b = c$ | — ужимаем промежуток справа |
|   else | — если условие не выполнилось |
|     $a = c$ | — ужимаем промежуток слева |
| $x = \frac{a+b}{2}$ | — результат, искомое приближение корня |

## 2.2 Метод Ньютона

### 2.2.1 Условия применимости

1. $f(x) \in \mathrm{C}^{(2)}([a, b])$
2. $f(a) \cdot f(b) < 0$
3. $f', f''$ — знакопостоянны на $[a, b]$
4. $x^{(0)} :\ f(x^{(0)}) \cdot f''(x^{(0)}) > 0$ (Условие Фурье)

#### 2.2.2 Алгоритм

Для алгоритма дано: промежуток $[a, b]$, уравнение $f(x) = 0$ и задана точность $\epsilon$

1) Выберем начальное приближение $x^{(0)} \in [a, b]$
2) Далее в цикле вычисляем: $x^{(\mathrm{k}+1)} = x^{(\mathrm{k})} - \frac{f(x^{(\mathrm{k})})}{f'(x^{(\mathrm{k})})}$
   Для цикла используем условие остановки: $|f(x^{(\mathrm{k}+1)})| < \epsilon$
3) На выходе из цикла получаем: $x^{(\mathrm{k}+1)}$ — результат, искомое приближение корня

# 3. Предварительный анализ задачи

## 3.1 Алгебраическое уравнение

Дано уравнение вида: $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 5 = 0$
Найдём интервалы содержащие корни, используя теорему о верхней границе положительных корней и графический способ.
Теорема о верхней границе положительных корней:
Пусть $f(x) = a_0x^n + a_1x^{\mathrm{n}-1} + ... + a_{\mathrm{n}-1}x + a_n$ и $a_0 > 0$
Тогда для любого положительного корня $x^*$ верно:

$x^* \leq 1 + \sqrt[i]{\frac{C}{a_0}} = R_0$

Где $i$ — индекс первого отрицательного коэффициента начиная со старшего, $C$ — модуль наименьшего отрицательного коэффициента.
Рассмотрим полиномы: $P_1(x) = x^n f(\frac{1}{x})$, $P_2(x) = f(-x)$, $P_3(x) = x^n f(-\frac{1}{x})$
Пусть верхние границы положительных корней этих полиномов ранвы $T_1$, $T_2$ и $T_3$ соответственно. Тогда для всех положительных корней полинома будет верно — $\frac{1}{T_1} \leq x^+ \leq T_0$, а для всех отрицательных — $-T_2 \leq x^- \leq -\frac{1}{T_3}$.
Вычислим эти границы корней:

$T_0$: $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 5$; $\quad T_0 = 1 + \sqrt[2]{\frac{12}{3}} = 3$

$T_1$: $f(x) = 5x^4 + 12x^2 - 4x - 3$; $\quad T_1 = 1 + \sqrt[3]{\frac{4}{5}} = 1.928$

$T_2$: $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 - 5 \quad T_2 = 1 + \sqrt[1]{\frac{12}{3}} = 5$

$T_3$: $f(x) = 5x^4 + 12x^2 + 4x - 3 \quad T_3 = 1 + \sqrt[4]{\frac{3}{5}} = 1.880$

Получилось:

$$-5 \leq x^- \leq -0.532 \quad \text{и} \quad 0.519 \leq x^+ \leq 3$$

Теперь построим графики:

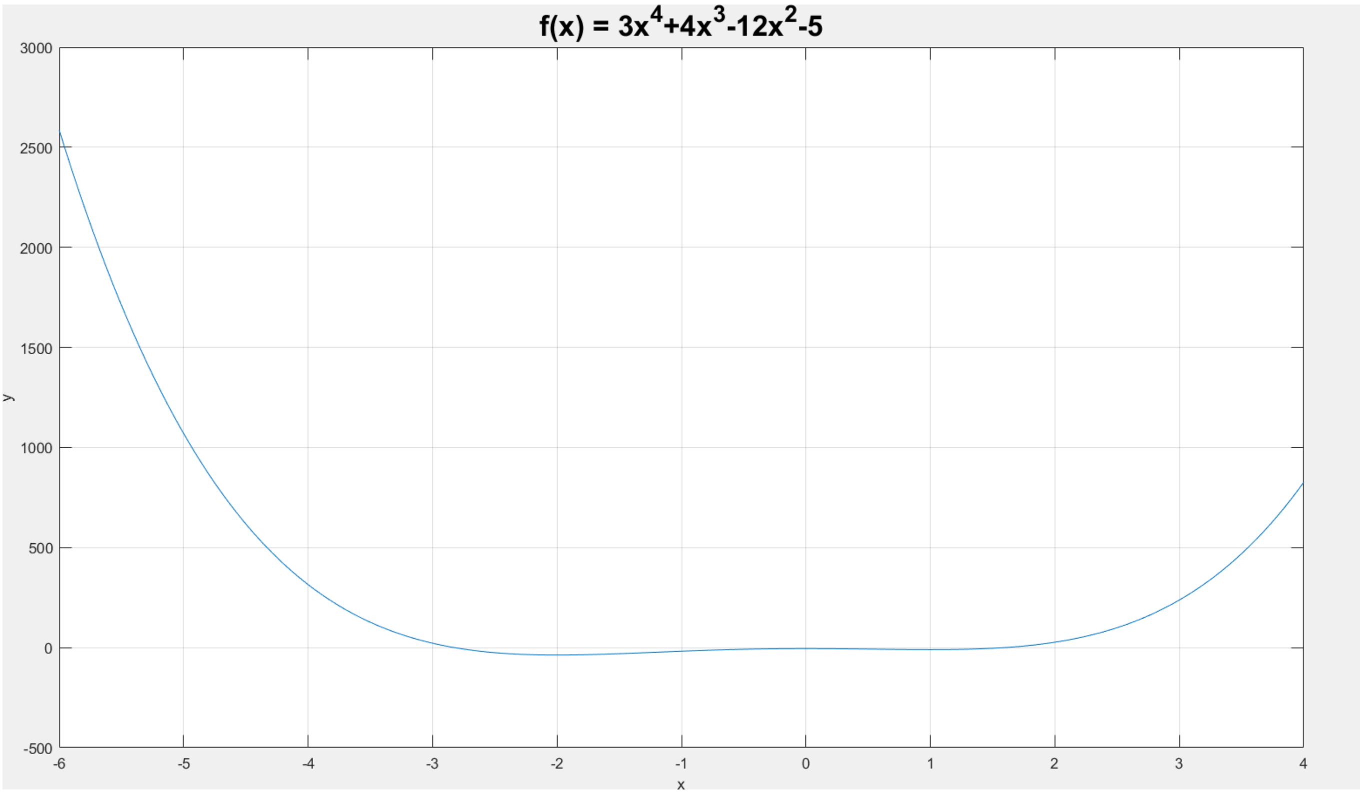


График 1. График исходного уравнения

Сделаем приближения к промежуткам корней:

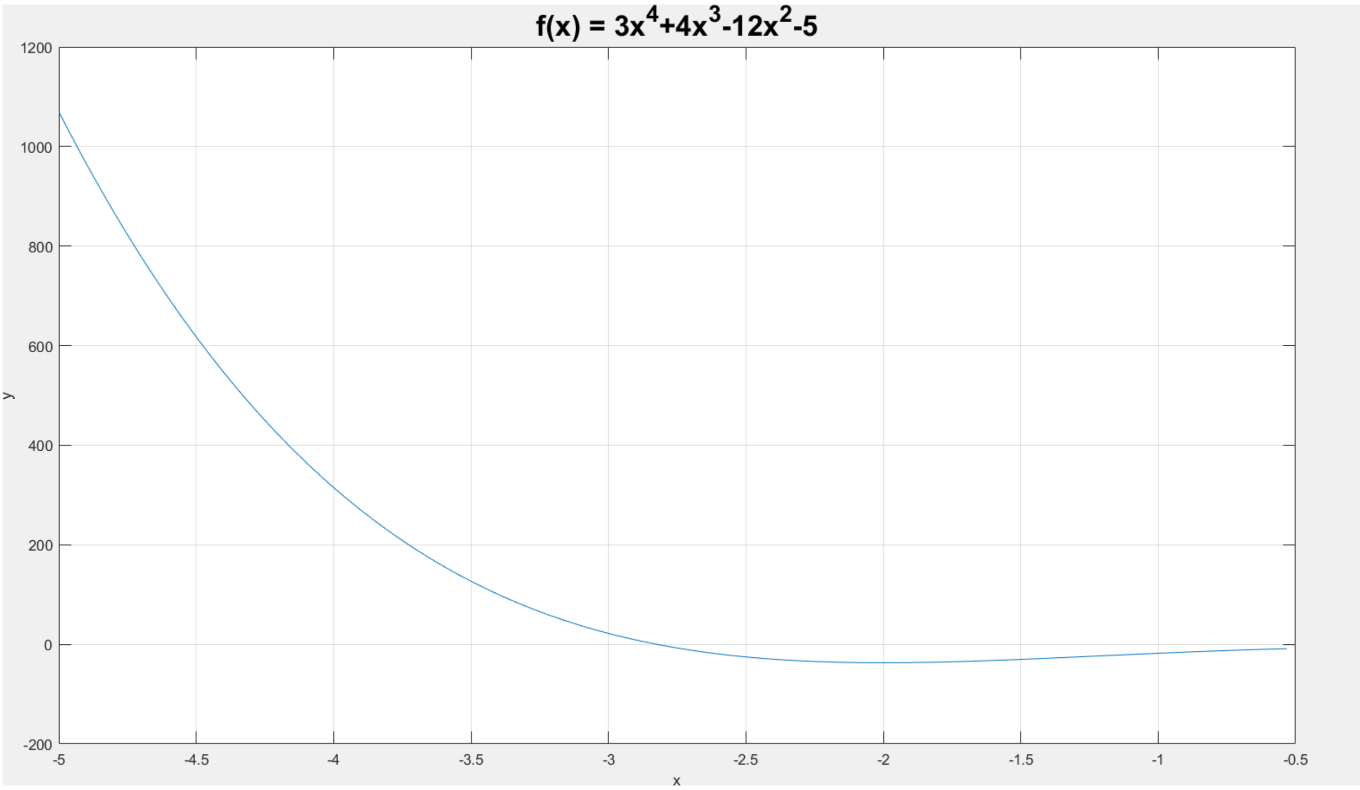


График 2. Приближение к отрицательным корням

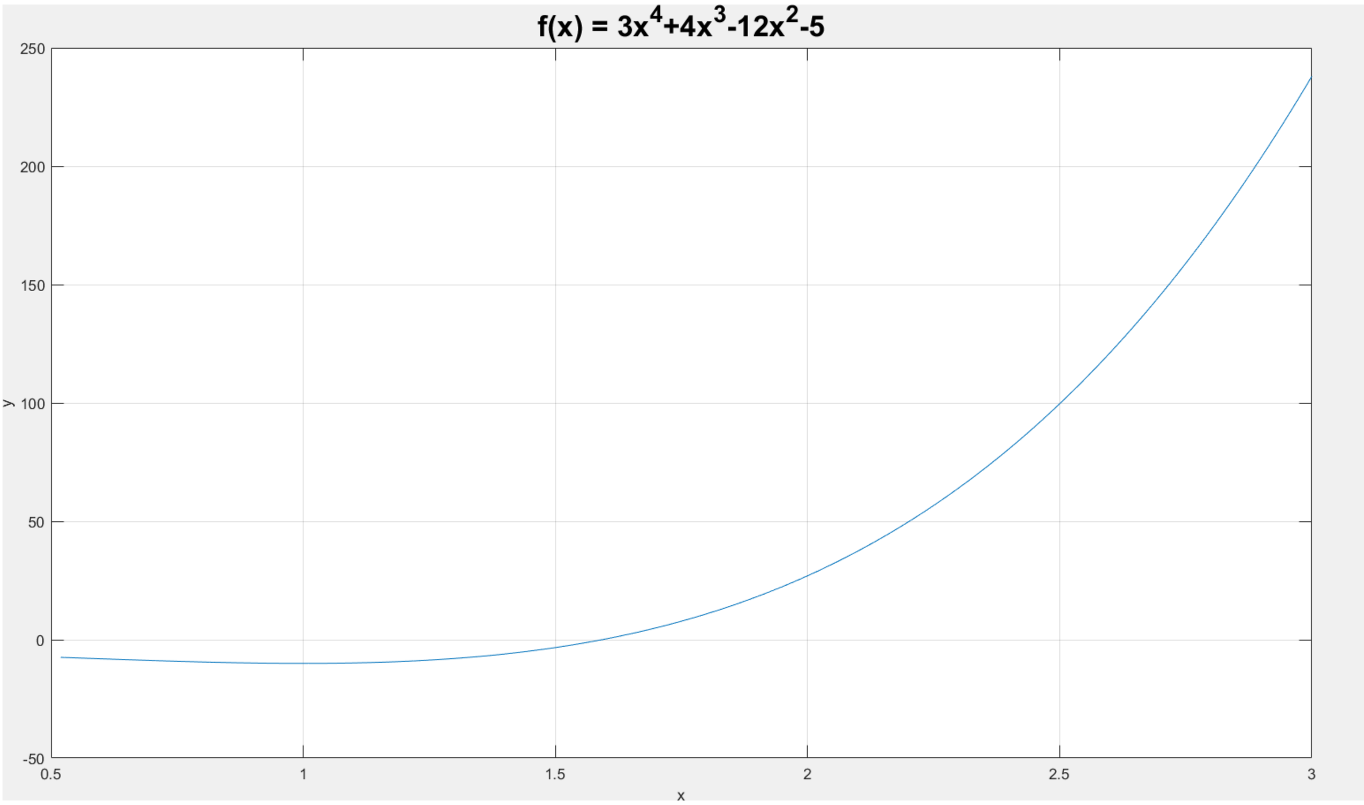


График 3. Приближение к положительным корням

Как видно из графиков (График 2, График 3), уравнение имеет два корня, которые попадают в найденные нами интервалы.

### 3.2 Трансцендентное уравнение

Дано уравнение вида: $\ln x + (x+1)^3 = 0$
Воспользуемся графическим способом (График 4) для нахождения интервалов с корнями данного уравнения.

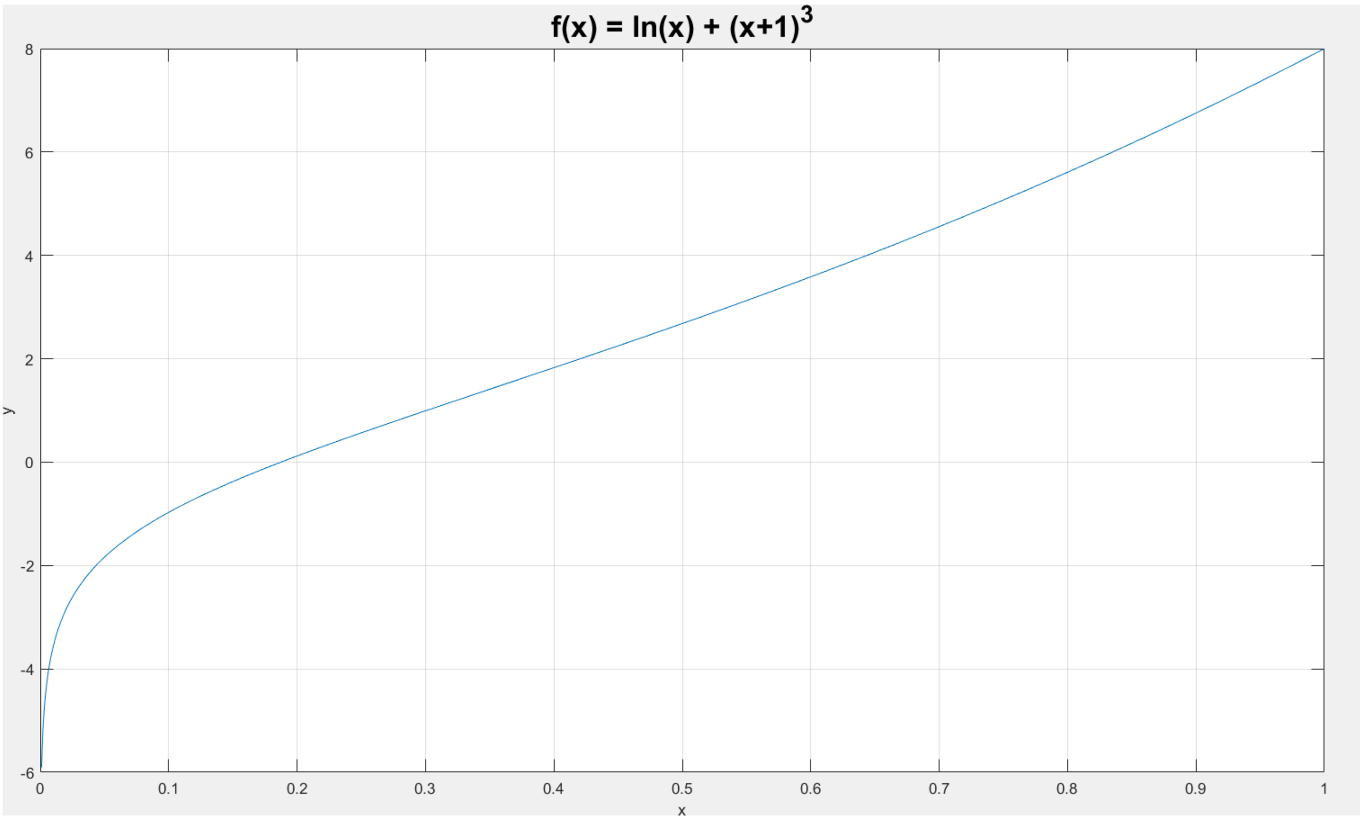


График 3. График трансцендентного уравнения

Как видно из графика, уравнение имеет 1 корень на интервалах: $[0.01, 1]$.

# 4. Проверка условий применимости

## 4.1 Алгебраическое уравнение

### 4.1.1 Метод половинного деления

Условия применимости:

1. $f \in \mathrm{C}([a,b])$ (полином определён на все оси $OX$)
2. $f(a)f(b) < 0$

Рассмотрим наши промежутки:

$$x \in [-5, -0.532]: \quad f(-5)f(-0.532) \approx -9371.33 < 0$$
$$x \in [0.519, 3]: \quad f(0.519)f(3) \approx -1774.4 < 0$$

Следовательно, данный метод может быть использован с данным уравнением.

### 4.1.2 Метод Ньютона

Условия применимости:

1. $f \in \mathrm{C}^{(2)}([a,b])$ (полином является функцией из класса $\mathrm{C}^{(2)}$ на $[a,b]$)
2. $f(a)f(b) < 0$ (проверено ранее)
3. $f', f''$ — знакопостоянны на $[a,b]$
4. $x^{(0)}$: $f(x^{(0)})f''(x^{(0)}) > 0$

Рассмотрим наши промежутки и при необходимости немного ужмём их:

$$x \in [-5,-2.2]: \quad f'(-5)f'(-2.2) \approx 18247.68 > 0 \text{ и } f''(-5)f''(-2.2) \approx 73664.64 > 0$$
$$x \in [1.25,3]: \quad f'(1.25)f'(3) \approx 4387.5 > 0 \text{ и } f''(1.25)f''(3) = 23157 > 0$$

$$x \in [-5,-2.2]: \quad f(-5)f''(-5) = 808920 > 0$$
$$x \in [1.25,3]: \quad f(3)f''(3) = 88536 > 0$$

Следовательно, данный метод может быть использован с данным уравнением.

## 4.2 Трансцендентное уравнение

### 4.2.1 Метод половинного деления

Условия применимости:

1. $f \in \mathrm{C}([a,b])$ (на промежутке $[0.01,1]$ функция определена)
2. $f(a)f(b) < 0$

Рассмотрим наш промежуток $[0.01,1]$:

$f(0.01)f(1) \approx -28.6 < 0$

Следовательно, данный метод может быть использован с данным уравнением.

### 4.1.2 Метод Ньютона

Условия применимости:

1. $f \in \mathrm{C}^{(2)}([a,b])$
2. $f(a)f(b) < 0$ (проверено ранее)
3. $f', f''$ — знакопостоянны на $[a,b]$
4. $x^{(0)}$: $f(x^{(0)})f''(x^{(0)}) > 0$

Производные:

$f'(x) = \frac{1}{x} + 3(x+1)^2$

$f''(x) = -\frac{1}{x^2} + 6(x+1)$

Рассмотрим наш промежуток $[0.01,1]$:

$f'(x) \in \mathrm{C}([0.01,1])$ и $f''(x) \in \mathrm{C}([0.01,1])$ (значит, $f(x) \in \mathrm{C}^{(2)}([0.01,1])$)

$f(x)$ растёт и выпуклая вверх, значит $f'(x)$ и $f''(x)$ — знакопостоянны на $[0.01,1]$

$f(1)f''(1) = 88 > 0$

Следовательно, данный метод может быть использован с данным уравнением.

# 5. Тестовый пример

## 5.1 Метод половинного деления

Проверим работу метода на уравнении $(x+1)(x-2)(x-6) = x^3 - 7x^2 + 4x + 12 = 0$ на интервале $[1, 4]$:

$n = 1; \quad c = \frac{1+4}{2} = 2.5; \qquad f(1)f(2.5) = -61.25 < 0 \Rightarrow b = c = 2.5$

$n = 2; \quad c = \frac{1+2.5}{2} = 1.75; \qquad f(1)f(1.75) \approx 29.2 \geq 0 \Rightarrow a = c = 1.75$

$n = 3; \quad c = \frac{1.75+2.5}{2} = 2.1875; \quad f(1.75)f(2.1875) \approx -6.7 < 0 \Rightarrow b = c = 2.1875$

Как видим, мы стремимся к корню уравнения — 2. Продолжая цикл, пока не выполнится условие цикла с заданным $\epsilon$, получим искомое приближение корня.

## 5.2 Метод Ньютона

Так же проверим работу метода на уравнении $(x+1)(x-2)(x-6) = x^3 - 7x^2 + 4x + 12 = 0$ на интервале $[1, 4]$:

Найдём произвудную: $f'(x) = 3x^2 - 14x + 4$, и возьмём начальное приближение $x^{(0)} = a = 1$

$n = 1; \quad x^{(1)} = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} \approx 2.429$

$n = 2; \quad x^{(2)} = 2.429 - \frac{f(2.429)}{f'(2.429)} \approx 2.002$

Как видим, мы стремимся к корню уравнения — 2. Продолжая цикл, пока не выполнится условие цикла с заданным $\epsilon$, получим искомое приближение корня.

# 6. Контрольные тесты

| Алгебраическая функция | | |
|---|---|---|
| Точность | $10^{-15}$ | |
| Интервал | $[0.01, 2]$ | |
| | Корень | Количество итераций |
| Метод половинного деления | 1.5920880646906723 | 50 |
| Метод Ньютона | 1.5920880646906719 | 6 |
| Трансцендентная функция | | |
| Точность | $10^{-15}$ | |
| Интервал | $[0.01, 2]$ | |
| | Корень | Количество итераций |
| Метод половинного деления | 0.1874389287305487 | 50 |
| Метод Ньютона | 0.1874389287305483 | 6 |

# 7. Модульная структура программы

1. double Pow(double x, int n) — возводит действительное число в целочисленную степень.
   Параметры:
   $x$ — основание степени
   $n$ — показатель степени
   Возвращаемое значение: результат возведения $x$ в степень $n$.

2. double Polynom(double x) — вычисляет значение алгебраической функции в точке.
   Параметры: $x$ — точка
   Возвращаемое значение: значение алгебраической функции в точке $x$.

3. double PolynomDer(double x) — вычисляет значение производной алгебраической функции в точке. Параметры: $x$ — точка
   Возвращаемое значение: значение производной алгебраической функции в точке $x$.

4. double Trans(double x) — вычисляет значение трансцендентной функции в точке.
   Параметры: $x$ — точка
   Возвращаемое значение: значение трансцендентной функции в точке $x$.

5. double TransDer(double x) — вычисляет значение производной трансцендентной функции в точке.
   Параметры: $x$ — точка
   Возвращаемое значение: значение производной трансцендентной функции в точке $x$.

6. void BisectionMethod(double left, double right, double(*Func)(double)) — вычисляет значение корня функции на промежутке, используя метод половинного деления.
   Параметры:
   left — левая граница промежутка
   right — правая граница промежутка
   Func — функция, корень которой нужно найти
   Возвращаемое значение: функция ничего не возвращает, а все результаты (корень, заданный $\epsilon$ и количество итераций) выводит в файл.

7. void NewtonMethod(double x, double(*Func)(double), double(*FuncDer)(double)) — вычисляет значение корня функции, используя его начальное приближение и метод Ньютона.
   Параметры:
   $x$ — начальное приближение корня
   Func — функция, корень которой нужно найти
   FuncDer — производная функции Func
   Возвращаемое значение: функция ничего не возвращает, а все результаты (корень, заданный $\epsilon$ и количество итераций) выводит в файл.

# 8. Численный анализ

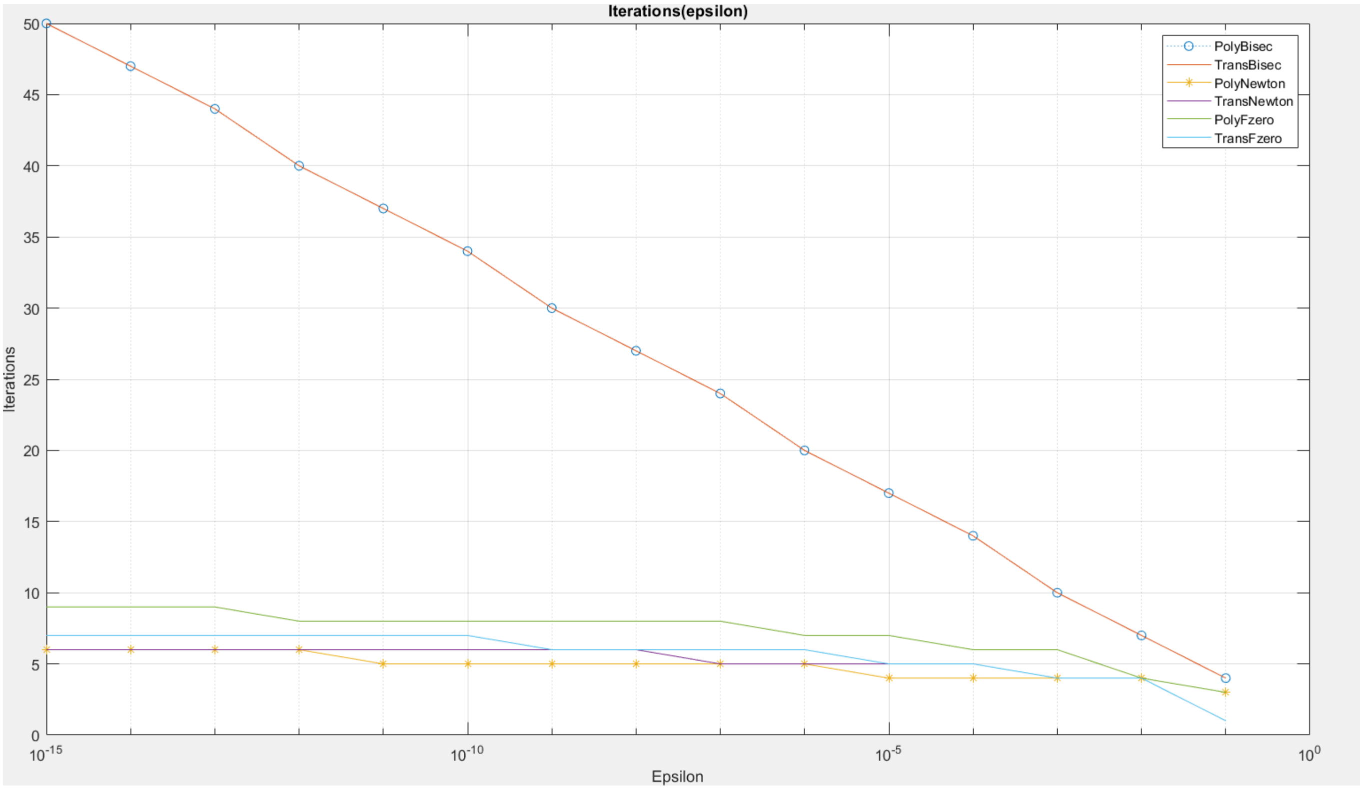


График 4. Графики зависимостей числа итераций от заданного $\epsilon$

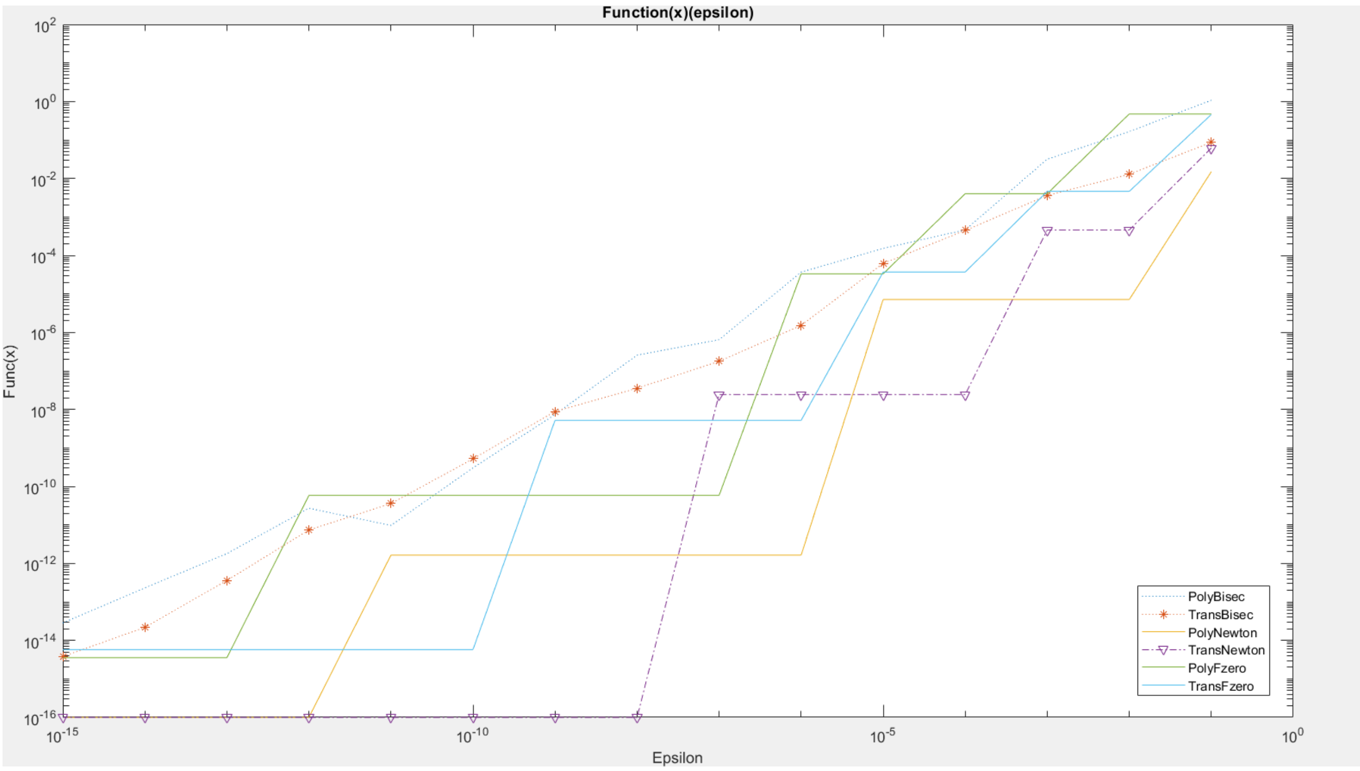


График 5. Графики зависимостей модуля значений функций от заданного $\epsilon$

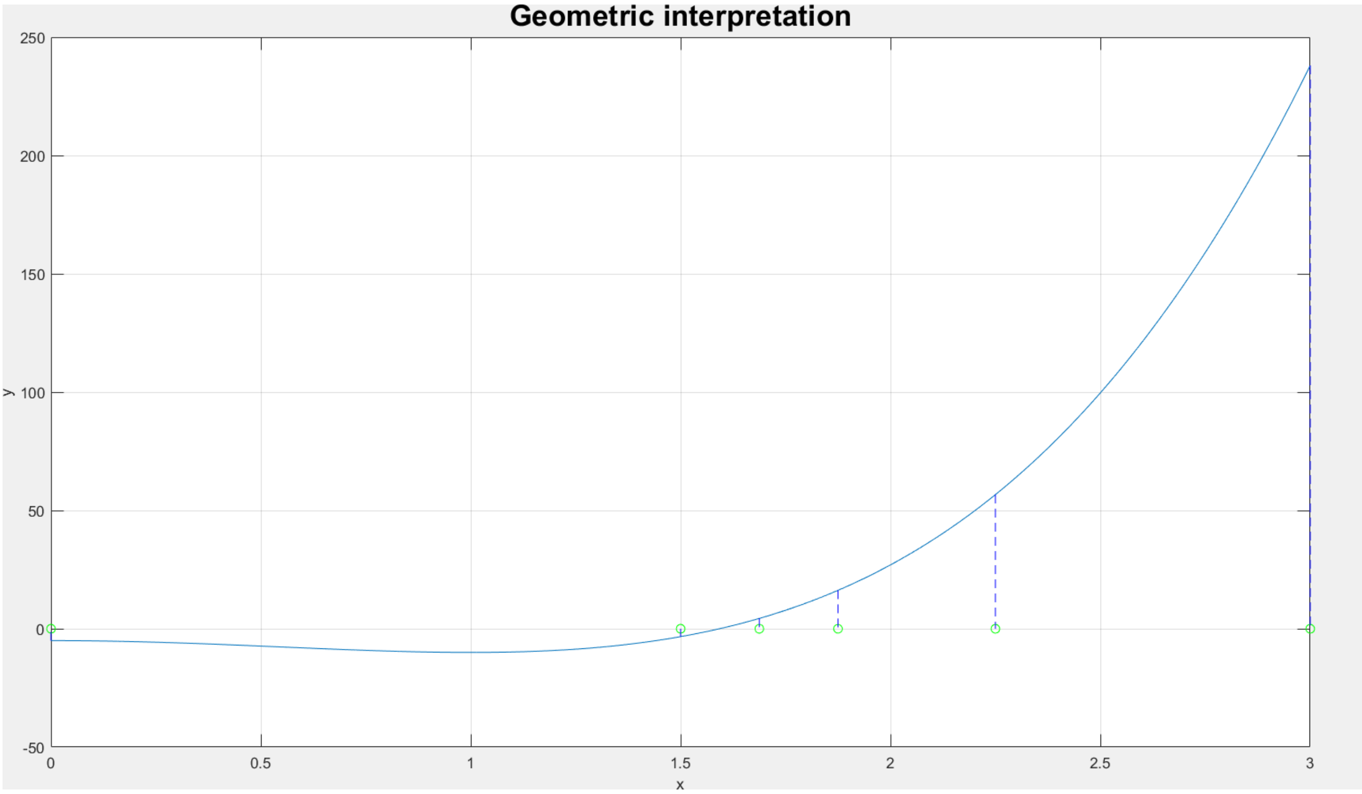


График 6. Геометрическая интерпритация метода половинного деления

Из графика (График 4) видно, что с уменьшением $\epsilon$ растёт количество итераций. Причём при малых $\epsilon$ видно, что метод половинного деления работает медленее, чем метод Ньютона и фунцкия fzero из программы MATLAB. Также видно, что метод Ньютона работает немного лучше, чем фунцкия fzero.

Из графика (График 5) мы видим, что абсолютные величины значений функций стремятся к нулю при стремлении $\epsilon$ к нулю, потому что найденные приближения корней стремятся к точным корням. Видно, что метод Ньютона сходится гораздо быстрее метода половинного деления, а функция fzero где-то между ними по скорости сходимости.

На графике (График 6) мы видим геометрическую интерпритацию метода половинного деления. Решением является точка пересечения графика с осью абсцисс. Мы находим середину отрезка текущей итерации и проверяем, где лежит корень, слева от середины или справа от неё. Таким образом мы получаем последующие итерации и приближемся к корню.

# 9. Вывод

В ходе работы была решена задача о нахождении корней алгебраического и трансцендентного уравнений с заданной точностью с помощью метода половинного деления и метода Ньютона. Были выявлены и исследованы зависимости числа итераций и абсолютного значения функции от заданной точности. По итогам исследований, метод Ньютона оказался более точным и быстродейственным методом уточнения корней при равных условиях.

# 10. Исправления

## 2.1.2 Алгоритм метода половинного деления

Для алгоритма дано: промежуток $[a, b]$, уравнение $f(x) = 0$ и задана точность $\epsilon$
Алгоритм следующий:

1. Условие выхода из цикла: $|b - a| > 2\epsilon$
2. Далее в цикле вычисляем середину текущего промежутка: $c = \frac{a+b}{2}$
3. Теперь проверяем: если $f(a) \cdot f(c) < 0$, то ужимаем промежуток справа, то есть $b = c$, иначе (если $f(a) \cdot f(c) \geq 0$), то ужимаем промежуток слева, то есть $a = c$
4. Искомое приближение корня будет равно $x = \frac{a+b}{2}$

## 2.2.2 Алгоритм метода Ньютона

Для алгоритма дано: промежуток $[a, b]$, уравнение $f(x) = 0$, и задана точность $\epsilon$
Алгоритм следующий:

1. Выберем начальное приближение $x^{(0)}$ так, чтобы выполнялось четвёртое условие применимости $(f(x^{(0)}) \cdot f''(x^{(0)}) > 0)$
2. Далее в цикле вычисляем: $x^{(\mathrm{k}+1)} = x^{(\mathrm{k})} - \frac{f(x^{(\mathrm{k})})}{f'(x^{(\mathrm{k})})}$
   Для цикла используем условие остановки: $|x^{(\mathrm{k}+1)} - x^{(\mathrm{k})}|^2 < \frac{2m_1\epsilon}{M_2}$, где $m_1 = min|f'(x)| > 0$, $x \in [a, b]$, а $M_2 = max|f''(x)| < \infty$, $x \in [a, b]$
3. На выходе из цикла получаем: $x^{(\mathrm{k}+1)}$ — результат, искомое приближение корня

## 4.1.2 Проверка условий применимости метода Ньютона для алгебраического уравнения

1. $f', f''$ — знакопостоянны на $[a, b]$. Для определения этого найдём производные:
   $f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x$, $f''(x) = 36x^2 + 24x - 24$, $f'''(x) = 72x + 24$
   Выберем промежуток $[1.25, 3]$: $f'''(x) > 0$, $x \in [1.25, 3]$. Значит, $f''$ возрастает.
   $f''(1.25) = 62.25$, значит, $f''(x) > 0$ на $[1.25, 3]$. Значит, $f'$ возрастает на этом промежутке.
   $f'(1.25) = 12.1875$, тогда $f'(x) > 0$ на $[1.25, 3]$. Знакопостоянство для $[1.25, 3]$ установлено.
2. $x^{(0)}: \ f(x^{(0)}) \cdot f''(x^{(0)}) > 0$ (Условие Фурье)
   Проверим для $x \in [1.25, 3]$: За начальное приближение возьмём $x^{(0)} = 3$, тогда
   $f(3) \cdot f''(3) = 88536 > 0$, условие выполнено.

### 4.2.2 Проверка условий применимости метода Ньютона для трансцендентного уравнения

1. $f', f''$ — знакопостоянны на $[a, b]$. Для определения этого найдём производные: $f'(x) = \frac{1}{x} + 3(x+1)^2$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2} + 6(x+1)$, $f'''(x) = \frac{1}{x^3} + 6$. $f'''$ — это парабола, на промежутке $[0.01, 0.3]$ она находится в первой четверти. Значит, $f''$ возрастает на этом промежутке. $f''(0.3) \approx -3.31$, следовательно, $f''(x) < 0$ на $[0.01, 0.3]$. Раз так, то $f'$ убывает на этом промежутке. $f'(0.3) \approx 8.4$, значит $f'(x) > 0$ на $[0.01, 0.3]$. Знакопостоянство на $[0.01, 0.3]$ установлено.

### 5.1 Тестовый пример для метода половинного деления

Проверим работу метода на уравнении $(x+1)(x-2)(x-6) = x^3 - 7x^2 + 4x + 12 = 0$ на интервале $[1, 4]$:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $n = 1;$ | $c = \frac{1+4}{2} = 2.5;$ | $f(1)f(2.5) = -61.25 < 0 \Rightarrow b = c = 2.5$ | $\lvert 2.5 - 1\rvert = 1.5$ |
| $n = 2;$ | $c = \frac{1+2.5}{2} = 1.75;$ | $f(1)f(1.75) \approx 29.2 \geq 0 \Rightarrow a = c = 1.75$ | $\lvert 2.5 - 1.75\rvert = 0.75$ |
| $n = 3;$ | $c = \frac{1.75+2.5}{2} = 2.1875;$ | $f(1.75)f(2.1875) \approx -6.7 < 0 \Rightarrow b = c = 2.1875$ | $\lvert 2.1875 - 1.75\rvert = 0.4375$ |

Как видим, мы стремимся к корню уравнения — 2, и условие для выхода из цикла $|b - a|$ уменьшается. Продолжая цикл, пока не выполнится условие цикла с заданным $\epsilon$, получим искомое приближение корня.

### 5.2 Тестовый пример для метода Ньютона

Так же проверим работу метода на уравнении $(x+1)(x-2)(x-6) = x^3 - 7x^2 + 4x + 12 = 0$ на интервале $[5, 7]$:
Найдём производные: $f'(x) = 3x^2 - 14x + 4$ и $f''(x) = 6x - 14$, и возьмём начальное приближение $x^{(0)} = 7$, которое подходит под условие Фурье: $f(7) \cdot f''(7) = 1120 > 0$

| | | |
|---|---|---|
| $n = 1;$ | $x^{(1)} = 7 - \frac{f(7)}{f'(7)} \approx 6.25$ | $\lvert 6.25 - 7\rvert = 0.75$ |
| $n = 2;$ | $x^{(2)} = 6.25 - \frac{f(6.25)}{f'(6.25)} \approx 6.021$ | $\lvert 6.021 - 6.25\rvert = 0.229$ |
| $n = 3;$ | $x^{(3)} = 6.021 - \frac{f(6.021)}{f'(6.021)} \approx 6.001$ | $\lvert 6.001 - 6.021\rvert = 0.02$ |

Как видим, мы стремимся к корню уравнения — 6, и условие для выхода из цикла $|x^{(k+1)} - x^{(k)}|$ уменьшается. Продолжая цикл, пока не выполнится условие цикла с заданным $\epsilon$, получим искомое приближение корня.

### 6. Контрольные тесты

Значения $\epsilon$:

$[10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7}, 10^{-8}, 10^{-9}, 10^{-10}, 10^{-11}, 10^{-12}, 10^{-13}, 10^{-14}, 10^{-15}]$

Найденные отрезки с корнем:

Алгебраическое уравнение: $[1.25, 3]$

Трансцендентное уравнение: $[0.01, 0.3]$

## 7. Модульная структура программы

void BisectionMethod(double left, double right, double(*Func)(double)) — вычисляет значение корня функции на промежутке, используя метод половинного деления.
Параметры:
left — левая граница промежутка
right — правая граница промежутка
Func — функция, корень которой нужно найти
Возвращаемое значение: функция ничего не возвращает, а все результаты (корень и количество итераций) выводит в файл.

## 9. Вывод

Метод половинного деления на одном графике (График 4) оказался "одинаковым", потому что длина промежутов было одинакова, а количество итераций в методе половинного деления зависит только от длины промежутка и заданного $\epsilon$. На другом же графике (График 5) изображена зависимость модуля значений функции от заданного $\epsilon$. Модуль значения функции зависит уже от самой функции, поэтому графики не совпали.
Для данных уравнений метод Ньютона оказался лучше. По графикам видно, что он работает быстрее, особенно при малых $\epsilon$. Так же про графику (График 5) видно, что он работает точнее, так как модуль функции быстрее стремится к нулю.