СПбПУ Петра Великого

Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики, ФизМех

Направление подготовки

«01.03.02 Прикладная математика и информатика»

Отчёт по лабораторной работе №3

Тема

Решение систем алгебраических уравнений методом простых итераций Якоби

Дисциплина

Численные методы

Выполнил студент группы 5030102/00002 Димитрюк Н. С.

Преподаватель

Санкт-Петербург

1. Формулировка и формализация задачи

1.1 Формулировка задачи

Решить СЛАУ $Ax = B$, где A — невырожденная матрица размером 12×12, используя метод простых итераций Якоби. В ходе работы необходимо исследовать зависимости нормы фактической ошибки и нормы невязки от заданной точности при фиксированном определителе и начальном приближении.

Дополнительно:
Необходимо исследовать зависимости нормы фактической ошибки и нормы невязки от значения определителя матрицы A при стремлении его к нулю и фиксированной точности и начальном приближении.

1.2 Формализация задачи

Дано: $Ax = B$, где $A \in R^{n \times n}$ — матрица коэффициентов
$x \in R^n$ — вектор неизвестных
$B \in R^n$ — вектор свободных членов

Найти: x — вектор неизвестных.

2. Алгоритм метода и условия его применимости

2.1 Условия применимости

Матрица коэффициентов является матрицей со строгим диагональным преобладанием, то есть $\sum\limits_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|$, $i = 1, ..., n$.

2.2 Алгоритм

Дано: $Ax = B$, где $A = (a_{ij})$ — матрица коэффициентов
$x = (x_i)$ — вектор неизвестных
$B = (b_i)$ — вектор свободных членов

Алгоритм следующий:

1. Вычисляем матрицу C по формуле: $C = E - D^{-1}A$. Также вычисляем вектор g по формуле: $g = D^{-1}B$, здесь матрица D^{-1} — это матрица обратная диагональной матрице матрицы A, то есть $D^{-1} = (diag(A))^{-1}$.

2. Затем в цикле вычисляем: $x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + g$, выбрав люое начальное приближение $x^{(0)}$.

3. Проверяем условие остановки: $||x^{(k+1)} - x^{(k)}|| < \frac{1-||C||}{||C||}\epsilon$, если оно не выполняется, то возвращаемся к шагу 2. А если выполняется, то завершаем цикл и получаем искомое приближение вектора неизвестных $x^{(k+1)}$.

3. Предварительный анализ задачи

Определитель матрицы коэффициентов не равен нулю, то есть $det(A) \neq 0$, так как матрица A — это матрица со строгим дигональным преобладанием, значит СЛАУ имеет единственное решение.

4. Проверка условий применимости

Матрица A генерируется в программе MATLAB случайным образом, затем для каждой строки находится сумма абсолютных значений элементов данной строки (включая диагональный элемент) и эта сумма устанавливается в соответствующий диагональный элемент. Таким образом, получается матрица со строгим диагональным преобладанием.

5. Тестовый пример

Дано: матрица коэффициентов $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, матрица свободных членов $B = \begin{pmatrix} 19 \\ 16 \\ 27 \end{pmatrix}$.

Корень для проверки: $x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Проверим метод простых итераций Якоби на этом примере:

1. Вычислим матрицу C и вектор g:

$$C = E - D^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix},$$

$$g = D^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19 \\ 16 \\ 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{6} \\ \frac{16}{5} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}.$$

Сразу вычислим выражение $\frac{||C||}{1-||C||} = \frac{5/6}{1-5/6} = 5$.

2. Теперь выполним несколько итераций, взяв за начальное приближение $x^{(0)} = B$:

1) $x^{(1)} = Cx^{(0)} + g = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19 \\ 16 \\ 27 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{19}{6} \\ \frac{16}{5} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{47}{3} \\ -\frac{68}{5} \\ -\frac{28}{3} \end{pmatrix}$

$$||x^{(1)} - x^{(0)}|| \cdot \frac{||C||}{1-||C||} = \left\| \begin{matrix} -\frac{104}{3} \\ -\frac{148}{5} \\ -\frac{109}{3} \end{matrix} \right\| \cdot 5 \approx 291.464$$

$$2)\ \ x^{(2)} = Cx^{(1)} + g = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{47}{3} \\ -\frac{68}{5} \\ -\frac{28}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{19}{6} \\ \frac{16}{5} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{371}{30} \\ \frac{217}{15} \\ \frac{728}{45} \end{pmatrix}$$

$$||x^{(2)} - x^{(1)}|| \cdot \frac{||C||}{1-||C||} = \left\| \begin{matrix} \frac{841}{30} \\ \frac{421}{15} \\ \frac{1148}{45} \end{matrix} \right\| \cdot 5 \approx 235.819$$

$$3)\ \ x^{(3)} = Cx^{(2)} + g = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{371}{30} \\ \frac{217}{15} \\ \frac{728}{45} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{19}{6} \\ \frac{16}{5} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{877}{90} \\ -\frac{671}{90} \\ -\frac{1297}{180} \end{pmatrix}$$

$$||x^{(3)} - x^{(2)}|| \cdot \frac{||C||}{1-||C||} = \left\| \begin{matrix} -\frac{199}{9} \\ -\frac{1973}{90} \\ -\frac{1403}{60} \end{matrix} \right\| \cdot 5 \approx 194.696$$

Как мы видим, условие для выхода из цикла $||x^{(k+1)} - x^{(k)}|| \cdot \frac{||C||}{1-||C||}$ уменьшается, а, значит, мы стремимся к корню СЛАУ $x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Продолжая цикл, пока не выполниться условие выхода с заданной точностью ϵ, мы получим искомое приближение корня.

6. Контрольные тесты

1. Размерность матриц 12×12, столбцов — 12×1.
2. Точный корень: $x^* = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12)^T$.
3. Заданная точность $\epsilon_i = 10^{-i}$, $i = 1, ..., 13$

   Для дополнительного задания:

4. Определители матриц коэффициентов:
   $det(A) = [1.37 \cdot 10^{-5},\ 4.14 \cdot 10^{-5},\ 5.59 \cdot 10^{-5},\ 1.92 \cdot 10^{-4},\ 2.39 \cdot 10^{-4},\ 2.83 \cdot 10^{-4},\ 4.23 \cdot 10^{-4},\ 9.59 \cdot 10^{-4},\ 2.59 \cdot 10^{-3},\ 3.41 \cdot 10^{-3},\ 1.71 \cdot 10^{-2},\ 2.45 \cdot 10^{-2},\ 5.61 \cdot 10^{-2},\ 1.57 \cdot 10^{-1},\ 6.52 \cdot 10^{-1}]$

7. Модульная структура программы

1. double MatrixRateInf(vector<vector<double>> C) — вычисляет норму матрицы C, где $||C|| = ||C||_\infty$.
   Параметры:
   C — матрица, норму которой нужно вычислить
   Возвращаемое значение: норма матрицы C.

2. double ActualErrorRate(vector<double> X, vector<double> exactX) — находит норму фактической ошибки для решения X, где норма ошибки $||C|| = ||C||_{III} = \sqrt{\sum_{i,j} c_{ij}^2}$.

   Параметры:

X — найденное решение
exact$X$ — точное решение
Возвращаемое значение: норма фактической ошибки.

3. double DiscrepancyRate(vector<vector<double>> A, vector<double> B, vector<double> X) — находит норму невязки для решения X, где норма ошибки $||C|| = ||C||_{III} = \sqrt{\sum_{i,j} c_{ij}^2}$.
   Параметры:
   A — матрица коэффициентов
   B — столбец свободных членов
   X — найденное решение
   Возвращаемое значение: норма невязки.

4. void AFindXJacobi(vector<vector<double>> A, vector<double> B) — находит приближение корня СЛАУ с помощью метода простых итераций.
   Параметры:
   A — матрица коэффициентов
   B — столбец свободных членов
   Возвращаемое значение: приближение корня СЛАУ.

8. Численный анализ

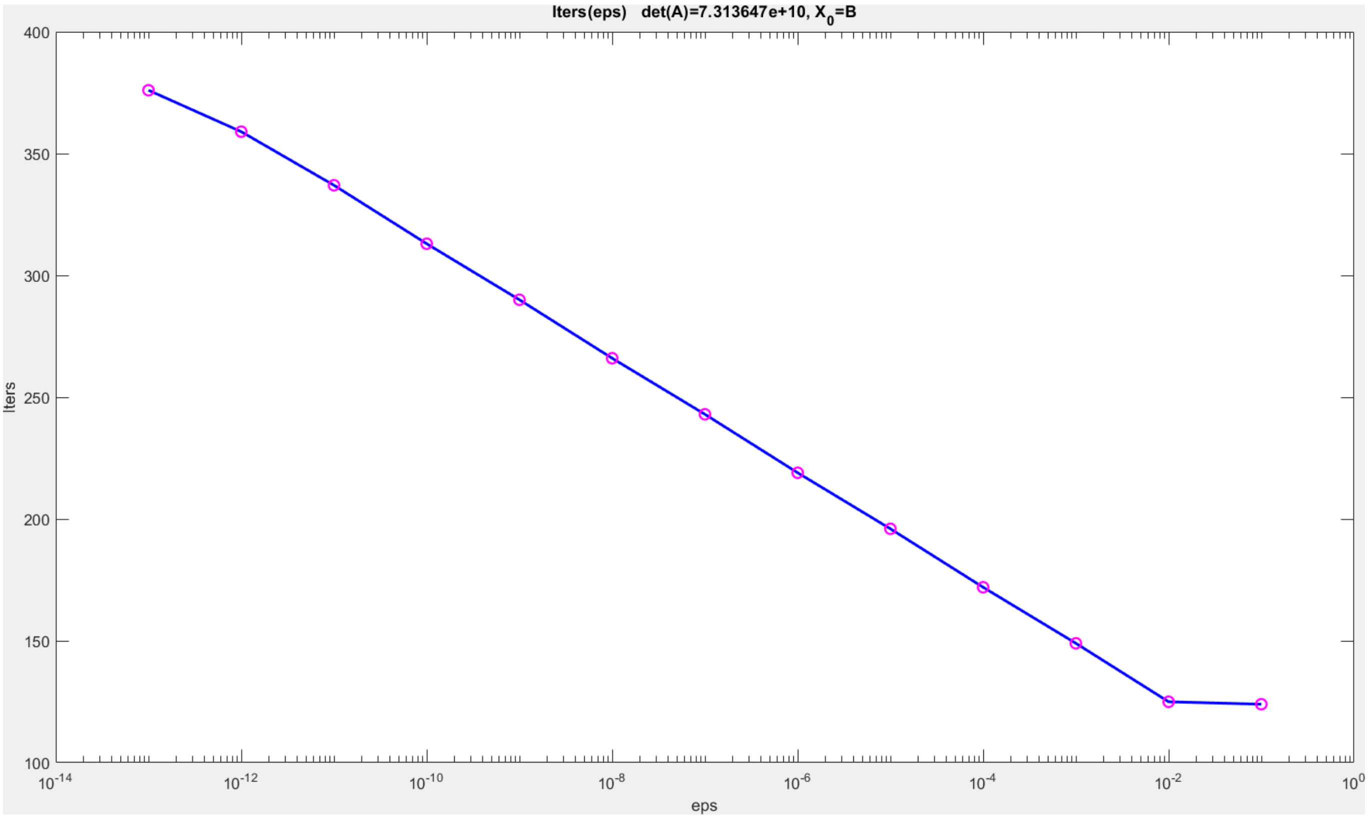

График 1. График зависимости числа итераций от заданного ϵ

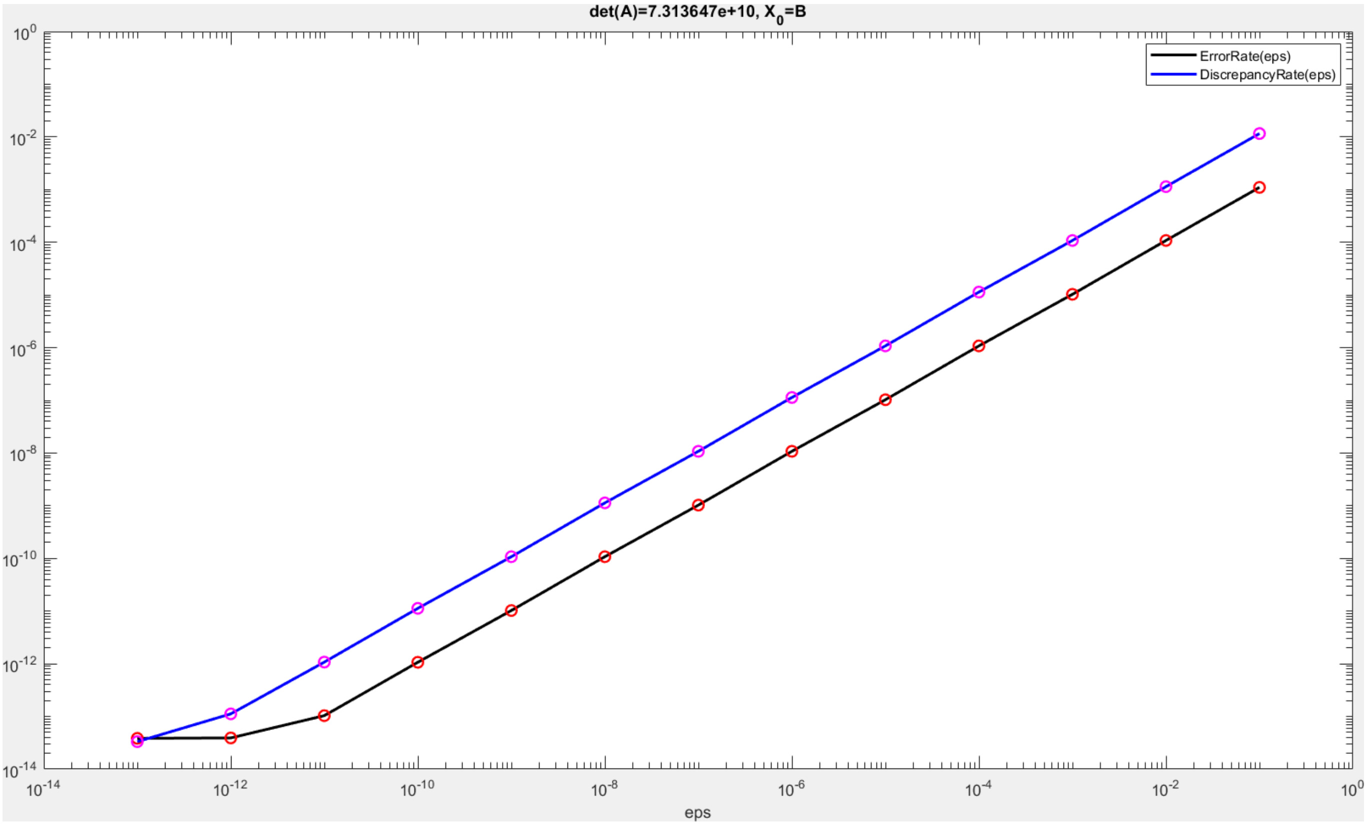

График 2. График зависимости нормы фактической ошибки и нормы невязки от заданного ϵ

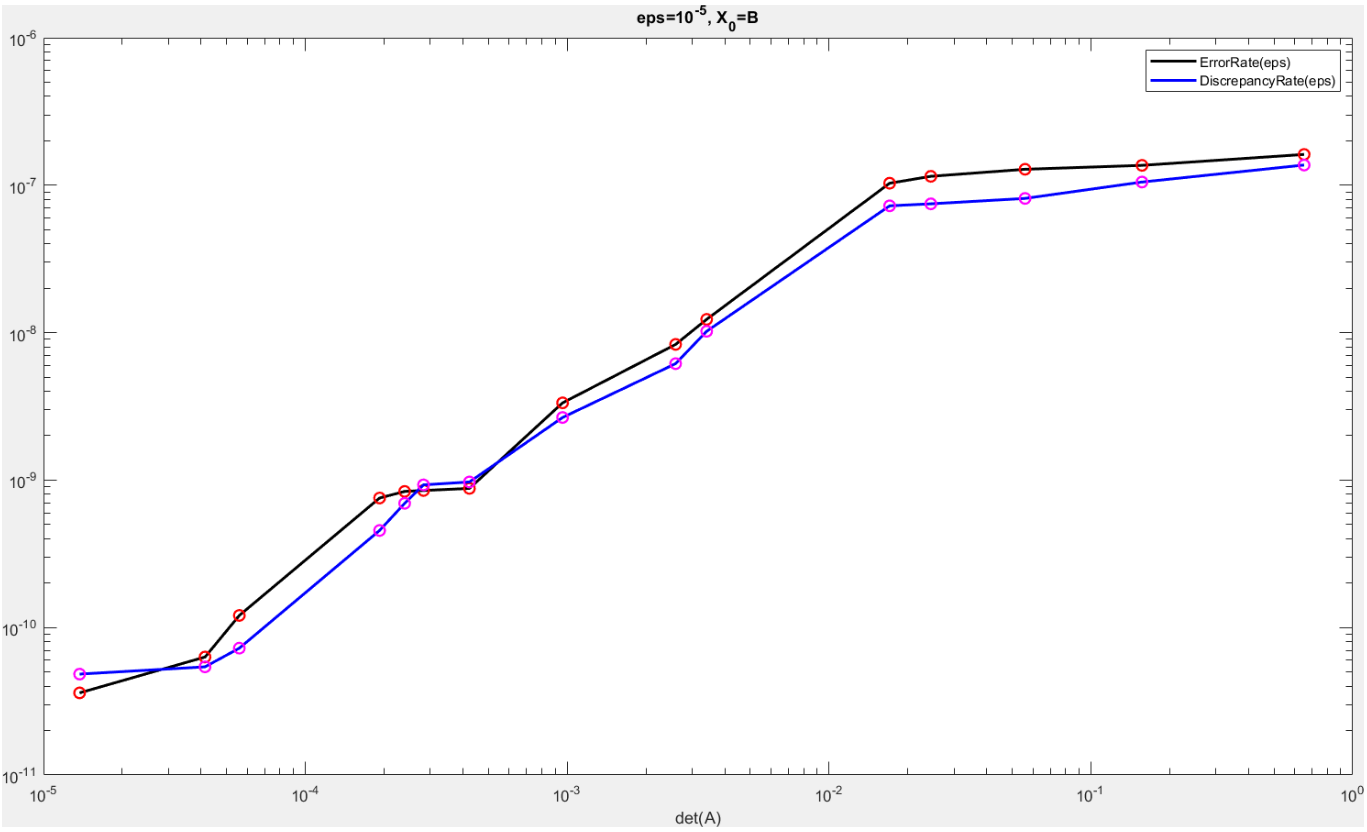

График 3. График зависимости нормы фактической ошибки и нормы невязки от значения определителя матрицы A при фиксированном ϵ

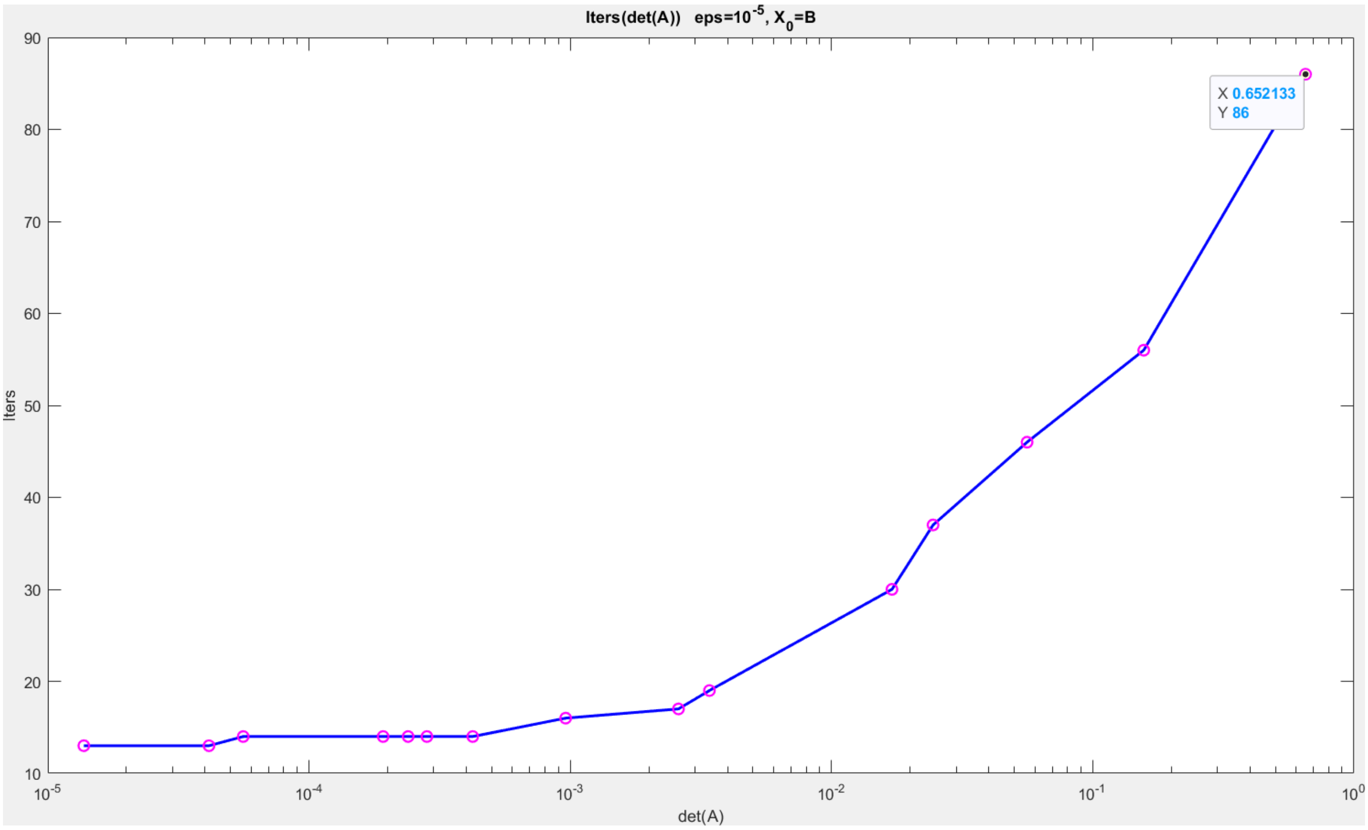

График 4. График зависимости числа итераций от значения определителя матрицы A при фиксированном ϵ

На графике (График 1) показана зависимость числа итераций от заданной точности. Видно, что число итераций растёт линейно при уменьшении ϵ, метод работает достаточно быстро.

На графике (График 2) показана зависимость нормы невязки и нормы фактической ошибки от заданной точности. Как мы можем видеть, данные графики растут линейно, чем больше ϵ, тем больше норма фактической ошибки и норма невязки. Раз они оба растут линейно, то по поведению нормы невязки можно судить о поведении нормы фактической ошибки, то есть метод целесообразно использовать в реальных задачах.

На графике (График 3) показана зависимость нормы невязки и нормы фактической ошибки от значения определителя матрицы A при фиксированной заданной точности и фиксированном начальном приближении. Данные графики получились не такими удачными, как первые два, потому что при необходимости строгого диагонального преобладания матрицы A очень тяжело линейно изменять определитель. Но на графике видно, что чем меньше определитель матрицы A, тем точнее получится результат. То есть в реальных задачах ещё до начала решения, можно оценить, какие получатся норма невязки и норма фактической ошибки.

На графике (График 4) показана зависимость числа итераций от значения определителя матрицы A при фиксированной заданной точности и фиксированном начальном приближении. При малых значения определителя, порядка $10^{-3} - 10^{-4}$, число итераций почти не изменяется, а затем, при больших значениях определителя, начинает расти, причём довольно быстро, график похож на параболу.

9. Вывод

В ходе работы была решена задача о нахождении корня системы линейных алгебраических уравнений с помощью метода простых итераций Якоби. Были исследованы зависимости нормы фактической ошибки, нормы невязки и числа итераций от заданной точности. По итогам этих исследований, можно сделать вывод, что данный метод работает достаточно быстро, то есть число итераций растёт линейно при увеличении точности, также данный метод надёжный, то есть он применим к реальным задачам, так как по норме невязки можно судить о норме фактичческой ошибки. Также была исследована зависимость нормы невязки, нормы фактической ошибки и числа итераций от значения определителя матрицы A. По итогам этих исследований, можно сделать вывод, что метод подходит лучше для решения СЛАУ с небольшим значением определителя матрицы A, так метод будет работать быстрее и точнее.

10. Исправления

2.2 Алгоритм

3. Проверяем условие остановки: $||x^{(k+1)} - x^{(k)}|| < \frac{1-||C||}{||C||}\epsilon$, если оно не выполняется, то возвращаемся к шагу 2. А если выполняется, то завершаем цикл и получаем искомое приближение вектора неизвестных $x^{(k+1)}$. Здесь норма $||C|| = ||C||_\infty$

6. Контрольные тесты

4. Начальное приближение $x^{(0)} = (0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)^T$

Ответы на вопросы

1. Сколько итераций нужно при переходе точности через порядок?

   Ответ: 2-3

2. От чего зависит скорость сходимости метода?

   Ответ: от нормы матрицы C. Метод сходится со скоростью равной скорости сходимости геометрической прогрессии со знаменателем $q = ||C||$.