СПбПУ Петра Великого

Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики, ФизМех

Направление подготовки

«01.03.02 Прикладная математика и информатика»

Отчёт по лабораторной работе №1

Тема

Приближение табличных функций

Дисциплина

Численные методы

Выполнил студент группы 5030102/00002 Димитрюк Н. С.

Преподаватель

Санкт-Петербург

1. Формулировка задачи

Задана функция $y = x^2 - 1 - \ln x$.
Требуется построить интерполяционный полином в форме Эрмита заданной фукнции на некотором отрезке $[a, b]$, используя сетку Чебышева. Иследовать значение максимальной ошибки от числа узлов и построить 3 графика полиномов с разным числом узлов на отрезке, а также график ошибки этих полиномов на отрезке.

2. Алгоритм метода и условия его применимости

2.1 Построение сетки Чебышева

Пусть задан отрезок $[a, b]$, а $n + 1$ — это число точек на этом отрезке.
Сетка Чебышева $\{x_i\}_{i=0}^n$ тогда задаётся так:
$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos(\frac{2i+1}{2n+2}\pi)$, $(i = 0, .., n)$.

2.2.1 Построение полинома Эрмита

Дано: сетка $\{x_i\}_{i=0}^n$, сеточная функция $\{y_i\}_{i=0}^n$ и значения её первой производной в узлах сетки $\{y'_i\}_{i=0}^n$. Тогда значение полинома Эрмита вычисляется по формуле:

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n}((x - x_i)y'_i + (1 - 2\sum_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n}\frac{x - x_i}{x_i - x_k})y_i)\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n}\left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j}\right)^2$$

2.2.1 Условия применимости

Узлы сетки $\{x_i\}_{i=0}^n$ должны быть попарно различны и сетка должна строиться так, чтобы функция не терпела разрывов в узлах сетки.

3. Предварительный анализ задачи

Сетка Чебышева на отрезке упорядочена $(x_i < x_{i+1})$, значит все x_i попарно различны. Если функция имеет на отрезки конечное число разрывов, то можно построить сетку так, чтобы узлы не совпадали с точками разрывов. Значит, существует полином Эрмита, и причём единственный.

4. Проверка условий применимости

1. x_i попарно различны, так как интерполирование производится на сетке Чебышева
2. Рассмотрим нашу функцию $y = x^2 - 1 - \ln x$. Она определена на интервале $(0, +\infty)$ из-за логарифма. Её производная $y' = 2x - \frac{1}{x}$ не терпит разрывов на области определения функции. Значит, можно взять любой отрезок и построить интерполяционный полином Эрмита для данной функции.

5. Тестовый пример

Рассмотрим функцию $y = x^2 + \cos(x^2)$ на сетке Чебышева с 3 узлами ($n = 2$) на отрезке $[0, 5]$. Построим сетку Чебышева:

1. $x_0 = \frac{0+5}{2} + \frac{5-0}{2}\cos(\frac{2*0+1}{2*2+2}\pi) \approx 2.5 + 2.165 = 4.665$
2. $x_1 = \frac{0+5}{2} + \frac{5-0}{2}\cos(\frac{2*1+1}{2*2+2}\pi) \approx 2.5 + 0 = 2.5$
3. $x_2 = \frac{0+5}{2} + \frac{5-0}{2}\cos(\frac{2*2+1}{2*2+2}\pi) \approx 2.5 - 2.165 = 0.335$

Упорядочим узлы в порядке возрастания: $x^h = \{0.335, 2.5, 4.665\}$. Найдём производную и вычислим её значения и значения функции в узлах сетки: $y' = 2x(1 + sin(x^2))$,
$y^h = \{1.057, 5.449, 21.715\}$, $y' = \{0.745, 4.834, 11.447\}$.
Вычислим полином Эрмита:

$$H(x) = s_0 + s_1 + s_2$$

$$s_0 = ((x - x_0)y'_0 + (1 - 2\sum_{k=1}^{2} \frac{x - x_0}{x_0 - x_k})y_0) \prod_{j=1}^{2} \left(\frac{x - x_j}{x_0 - x_j}\right)^2 =$$
$$= ((x - 0.335) \cdot 0.745 + (1 - 2(\tfrac{x-0.335}{0.335-2.5} + \tfrac{x-0.335}{0.335-4.665}))y_0) \left(\tfrac{x-2.5}{0.335-2.5} \cdot \tfrac{x-4.665}{0.335-4.665}\right)^2 =$$
$$= (0.745x - 0.250 + (1 + 1.384x - 0.155) \cdot 1.057) \cdot (-0.107x^2 + 0.764x - 1.244)^2 =$$
$$= (2.208x + 1.652) \cdot (0.011x^4 - 0.163x^3 + 0.850x^2 - 1.9x + 1.548) =$$
$$= 0.024x^5 - 0.342x^4 + 1.608x^3 - 2.791x^2 + 0.279x + 2.557$$

Остальные две суммы вычисляются аналогично:

$$s_1 = ((x - x_1)y'_1 + (1 - 2\sum_{\substack{k=0\\k\neq1}}^{2} \frac{x - x_1}{x_1 - x_k})y_1) \prod_{\substack{j=0\\j\neq1}}^{2} \left(\frac{x - x_j}{x_1 - x_j}\right)^2 =$$
$$= ((x - 2.5) \cdot 4.834 + (1 - 2(\tfrac{x-2.5}{2.5-0.335} + \tfrac{x-2.5}{2.5-4.665}))5.449) \left(\tfrac{x-0.335}{2.5-0.335} \cdot \tfrac{x-4.665}{2.5-4.665}\right)^2 =$$
$$= (4.834x - 12.085 + 5.449)(-0.213x^2 + 1.065x - 0.333)^2 =$$
$$= (4.834x - 6.636)(0.045x^4 - 0.454x^3 + 0.161x^2 - 0.709x + 0.111) =$$
$$= 0.218x^5 - 2.494x^4 - 3.791x^3 - 4.495x^2 + 0.988x - 0.737$$

$$s_2 = ((x - x_2)y'_2 + (1 - 2\sum_{k=0}^{1} \frac{x - x_2}{x_2 - x_k})y_2) \prod_{j=0}^{1} \left(\frac{x - x_j}{x_2 - x_j}\right)^2 =$$
$$= ((x - 4.665) \cdot 11.447 + (1 - 2(\tfrac{x-4.665}{4.665-0.335} + \tfrac{x-4.665}{4.665-2.5})) \cdot 21.715) \left(\tfrac{x-0.335}{4.665-0.335} \cdot \tfrac{x-2.5}{4.665-2.5}\right)^2 =$$
$$= (11.447x - 53.401 + (1 - 1.386x - 6.466) \cdot 21.715)(0.107x^2 - 0.303x + 0.090)^2 =$$
$$= (-18.650x - 172.095)(0.011x^4 - 0.065x^3 - 0,073x^2 - 0.055x + 0.008) =$$
$$= -0.205x^5 - 0.681x^4 + 12.547x^3 + 13.586x^2 + 9.316x - 1.377$$

$$H(x) = 0.037x^5 - 3.517x^4 + 10.364x^3 + 6.3x^2 + 10.583x + 0.443$$

6. Контрольные тесты

1. $[1, 5]$ — отрезок интерполирования
2. Сетки Чебышева на отрезке с числом узлов: 3, 6, 9
3. $N = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 50\}$

7. Модульная структура программы

1. double Func(double x) — вычисляет значение заданной функции ($y = x^2 - 1 - \ln x$) в точке x.
   Параметры:
   x — точка
   Возвращаемое значение: занчение функции в точке x.

2. double FuncDer(double x) — вычисляет значение производной заданной функции ($y' = 2x - \frac{1}{x}$) в точке x.
   Параметры:
   x — точка
   Возвращаемое значение: значение производной функции в точке x.

3. double Hermit(double x) — вычисляет значение полинома Эрмита в точке x.
   Параметры:
   x — точка
   Возвращаемое значение: значение полинома Эрмита в точке x.

4. double* ChebGrid(int n, double a, double b) — строит сетку Чебышева на отрезке $[a, b]$ с n узлами.
   Параметры:
   n — число узлов
   a — начало отрезка
   b — конец отрезка
   Возвращаемое значение: массив узлов сетки Чебышева x.

8. Численный анализ

На графике полинома Эрмита 5-й степени для трёх узлов в сетке видно, что полином не полностью совпадает с функцией. А на графиках полиномов 11-й и 17-й степеней для 6 и 9 узлов соответственно разницы между полиномом и функцией не заметить.

На графике фактических ошибок полиномов на отрезке видно, что чем выше степень полинома, тем меньше фактическая ошибка. Теоретическая ошибка для полинома 5-й степени меньше, чем фактическая ошибка на отрезке $[1, 2]$, но дальше фактическая ошибка становится меньше.

На графике максимальной ошибки от числа узлов видно, что ошибка сначала убывает до того момента, когда в сетке становится 16 узлов. А затем ошибка возрастает по пилообразной функции.

9. Вывод

В ходе работы были построены интерполяционные полиномы в форме Эрмита на сетке Чебышева и исследованы значения максимальной ошибки от числа узлов в сетке. На графике полиномов полиномы становились практически неотличимы от функции, потому что увеличивалось число узлов в сетке и степень полинома, значит интерполирование становилось точнее. Тоже самое можно проследить на графике фактических ошибок. Максимальная ошибка имеет минимальное значения из-за роста фактической ошибки при высоких степенях полиномов, можно найти число узлов соответствующее этому значению и построить наиболее точный интерполяционный полином.

10. Исправления

1. Постановка задачи

Дан набор точек $(x_0, y_0, y_0'), (x_1, y_1, y_1'), ..., (x_n, y_n, y_n')$, в который дополнительно входят значения производных в узлах. Задача найти такой полином $P(x)$, который проходит через заданную систему точек $P(x_i) = y_i$, $i = 0, .., n$, и имеет в узлах заданные наклоны $P'(x_i) = y_i'$, $i = 0, ..., n$.

2. Тестовый пример

Рассмотрим функцию $y = x^2 + \cos(x^2)$ на сетке Чебышева с 3 узлами ($n = 2$) на отрезке $[0, 5]$. Построим сетку Чебышева:

1. $x_0 = \frac{0+5}{2} + \frac{5-0}{2}\cos(\frac{2*0+1}{2*2+2}\pi) \approx 2.5 + 2.165 = 4.665$
2. $x_1 = \frac{0+5}{2} + \frac{5-0}{2}\cos(\frac{2*1+1}{2*2+2}\pi) \approx 2.5 + 0 = 2.5$
3. $x_2 = \frac{0+5}{2} + \frac{5-0}{2}\cos(\frac{2*2+1}{2*2+2}\pi) \approx 2.5 - 2.165 = 0.335$

Упорядочим узлы в порядке возрастания: $x^h = \{0.335, 2.5, 4.665\}$. Найдём производную и вычислим её значения и значения функции в узлах сетки: $y' = 2x(1 + sin(x^2))$,
$y^h = \{1.106, 7.249, 20.788\}$, $y' = \{0.745, 4.834, 11.447\}$.
Вычислим полином Эрмита:

$$H(x) = s_0 + s_1 + s_2$$

$s_0 = ((x - x_0)y_0' + (1 - 2\sum_{k=1}^{2}\frac{x - x_0}{x_0 - x_k})y_0)\prod_{j=1}^{2}\left(\frac{x - x_j}{x_0 - x_j}\right)^2 =$
$= ((x - 0.335) \cdot 0.745 + (1 - 2(\frac{x-0.335}{0.335-2.5} + \frac{x-0.335}{0.335-4.665})) \cdot 1.106)\left(\frac{x-2.5}{0.335-2.5} \cdot \frac{x-4.665}{0.335-4.665}\right)^2 =$
$0.026x^5 - 0.367x^4 + 1.879x^3 - 4.040x^2 + 2.873x + 0.531$
Остальные две суммы вычисляются аналогично:
$s_1 = ((x - x_1)y_1' + (1 - 2\sum_{\substack{k=0\\k\neq1}}^{2}\frac{x - x_1}{x_1 - x_k})y_1)\prod_{\substack{j=0\\j\neq1}}^{2}\left(\frac{x - x_j}{x_1 - x_j}\right)^2 =$
$= ((x - 2.5) \cdot 4.834 + (1 - 2(\frac{x-2.5}{2.5-0.335} + \frac{x-2.5}{2.5-4.665})) \cdot 7.249)\left(\frac{x-0.335}{2.5-0.335} \cdot \frac{x-4.665}{2.5-4.665}\right)^2 =$
$0.220x^5 - 2.420x^4 + 8.390x^3 - 9.629x^2 + 3.977x - 0.538$
$s_2 = ((x - x_2)y_2' + (1 - 2\sum_{k=0}^{1}\frac{x - x_2}{x_2 - x_k})y_2)\prod_{j=0}^{1}\left(\frac{x - x_j}{x_2 - x_j}\right)^2 =$
$= ((x - 4.665) \cdot 11.447 + (1 - 2(\frac{x-4.665}{4.665-0.335} + \frac{x-4.665}{4.665-2.5})) \cdot 20.788)\left(\frac{x-0.335}{4.665-0.335} \cdot \frac{x-2.5}{4.665-2.5}\right)^2 =$
$-0.198x^5 + 2.278x^4 - 8.484x^3 + 12.185x^2 - 5.637x + 0.812$
$H(x) = 0.048x^5 - 0.510x^4 + 1.785x^3 - 1.484x^2 + 1.213x + 0.805$
Ошибка в узлах:

1. $x = 0.335$: $|y(x) - H(x)| = |1.106 - 1.106| = 0$
2. $x = 2.5$: $|y(x) - H(x)| = |7.249 - 7.219| = 0.03$
3. $x = 4.665$: $|y(x) - H(x)| = |20.788 - 19.897| = 0.891$

Ошибка между узлами:

1. $x = 1.418$: $|y(x) - H(x)| = |1.585 - 2.844| = 1.259$

2. $x = 3.583$: $|y(x) - H(x)| = |13.801 - 12.498| = 1.303$