СПбПУ Петра Великого

Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики, ФизМех


Направление подготовки

«01.03.02 Прикладная математика и информатика»

Отчёт по лабораторной работе №3

**Тема**

Численное интегрирование

**Дисциплина**

Численные методы


Выполнил студент группы 5030102/00002 Димитрюк Н. С.

Преподаватель


Санкт-Петербург

# 1. Формулировка задачи

Задана функция $f(x) = x^5 - 3.2x^3 + 1.5x^2 - 7x - 9.5$.
Необходимо найти приближённое значение определённого интеграла на отрезке $[a, b]$ с заданной точностью $\epsilon$ с помощью обобщенной формулы трёх восьмых. Исследовать зависимости фактической ошибки и числа итераций от заданной точности.

# 2. Алгоритм метода и условия его применимости

## 2.1 Условия применимости

$f(x) \in C([a, b])$ — условие применимости метода.
$f(x) \in C^{(4)}([a, b])$ — условие применимости для оценки погрешности.

### 2.2 Алгоритм

Дано: отрезок $[a, b]$, функция $f(x)$, точность $\epsilon$.
Алгоритм:

1. Задаём начальное значение интеграла
   $I_1 = \frac{3}{8} \cdot \frac{b-a}{3} \cdot (f(a) + 3f(a + \frac{b-a}{3}) + 3f(a + 2 \cdot \frac{b-a}{3}) + f(b))$ и $n = 1$ — количество разбиений.
2. Далее в цикле запоминаем значение интеграла с прошлой итерации ($I_0 = I_1$), а значение на текущей итерации обнуляем ($I_1 = 0$), удваиваем количество разбиений ($n = n * 2$), находим шаг ($h = \frac{b-a}{3n}$) и ставим начальную точку $t = a$.
3. Затем во вложенном цикле $n$ раз проводим вычисление интеграла по формуле и прибавляем к текущему значению $I_1 = I_1 + (f(t) + 3f(t + h) + 3f(t + 2h) + f(t + 3h))$ и увеличиваем значение $t$ на $3h$ ($t = t + 3h$).
4. После цикла домножаем значение интеграла на $\frac{3h}{8}$ ($I_1 = I_1 * \frac{3h}{8}$)
5. Проверям условие выхода из цикла (правило Рунге) $\frac{|I_1 - I_0|}{2^4 - 1}$, если это значение больше заданной точности, то возвращаемся к шагу 2, иначе получаем искомое приближение интеграла с заданной точностью $I_1$.

# 3-4. Предварительный анализ задачи и условия применимости

$f(x) \in C([a, b])$, то есть $f(x)$ — непрерывна на $[a, b]$.
$f(x) = x^5 - 3.2x^3 + 1.5x^2 - 7x - 9.5$ — полином, значит $f(x)$ непрерывна на всей вещественной оси, то есть можно выбрать любой отрезок интегрирования.

## 5. Тестовый пример

В качестве тестового примера возьмём функцию $f(x) = 5x^4$ на отрезке $[0, 2]$.
Вычислим начальное значение интеграла:
$n = 1, h = \frac{2}{3} : I_1 = \frac{3}{8} \cdot h \cdot (f(a) + 3f(a+h) + 3f(a+2h) + f(b)) =$
$\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot (f(0) + 3f(0+\frac{2}{3}) + 3f(0+2\cdot\frac{2}{3}) + f(2)) = \frac{880}{27} \approx 32.59259$
Далее по алгоритму:
Домножим $n$ на 2.
$n = 2, h = \frac{1}{3}, I_0 = I_1, t = a :$
$t = 0 : I_1 = I_1 + f(t) + 3f(t+h) + 3f(t+2h) + f(t+3h) = 0 + f(0) + 3f(\frac{1}{3}) + 3f(\frac{2}{3}) + f(1) = \frac{220}{27}$
$t = 0 + 3h : I_1 = I_1 + f(t) + 3f(t+h) + 3f(t+2h) + f(t+3h) =$
$= \frac{220}{27} + f(1) + 3f(1+\frac{1}{3}) + 3f(1+\frac{2}{3}) + f(1+1) = \frac{220}{27} + \frac{6700}{27} = \frac{6920}{27}$
$I_1 = I_1 \cdot \frac{3}{8} \cdot h = \frac{6920}{27} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1730}{54} \approx 32.03704$
$\frac{|I_1 - I_0|}{2^4 - 1} = \frac{0.55555}{15} \approx 0.03704$
Затем снова домножим $n$ на 2.
$n = 4, h = \frac{1}{6}, I_0 = I_1, t = a :$
$t = 0 : I_1 = I_1 + f(t) + 3f(t+h) + 3f(t+2h) + f(t+3h) = 0 + f(0) + 3f(\frac{1}{6}) + 3f(\frac{1}{3}) + f(\frac{1}{2}) = \frac{55}{108}$
$t = 0 + 3h = \frac{1}{2} : I_1 = I_1 + f(t) + 3f(t+h) + 3f(t+2h) + f(t+3h) =$
$= \frac{55}{108} + f(\frac{1}{2}) + 3f(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}) + 3f(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}) + f(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}) = \frac{865}{54}$
$t = \frac{1}{2} + 3h = 1 : I_1 = I_1 + f(t) + 3f(t+h) + 3f(t+2h) + f(t+3h) =$
$= \frac{865}{54} + f(1) + 3f(1+\frac{1}{6}) + 3f(1+\frac{1}{3}) + f(1+\frac{1}{2}) = \frac{13125}{108}$
$t = 1 + 3h = \frac{3}{2} : I_1 = I_1 + f(t) + 3f(t+h) + 3f(t+2h) + f(t+3h) =$
$= \frac{13125}{108} + f(\frac{3}{2}) + 3f(\frac{3}{2}+\frac{1}{6}) + 3f(\frac{3}{2}+\frac{1}{3}) + f(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}) = \frac{13825}{27}$
$I_1 = I_1 \cdot \frac{3}{8} \cdot h = \frac{13825}{27} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{6} = \frac{13825}{432} \approx 32.00231$
$\frac{|I_1 - I_0|}{2^4 - 1} \approx \frac{0.03473}{15} \approx 0.00232$
Как можно видеть, значение выражения условия выхода из цикла (правило Рунге) убывает, значит, продолжая вычисления, мы достигнем желаемого результата.

## 6. Контрольные тесты

1. $a = -2.5$, $b = 1.3$
2. $f(x) = x^5 - 3.2x^3 + 1.5x^2 - 7x - 9.5$
3. $\epsilon = 10^{-i}$, $(i = 1, ..., 12)$
4. Количество отрезков разбиений $N = 2^i$, $(i = 1, ..., 11)$

## 7. Модульная структура программы

1. double Func(double x) — вычисляет значение заданной функции
   $(f(x) = x^5 - 3.2x^3 + 1.5x^2 - 7x - 9.5)$ в точке $x$.
   Параметры:
   $x$ — точка
   Возвращаемое значение: занчение функции в точке $x$.

2. double ThreeEighths(double a, double b, double eps) — вычисляет приближённое значение интеграла заданной функции ($f(x) = x^5 - 3.2x^3 + 1.5x^2 - 7x - 9.5$) на отрезке $[a, b]$ с заданной точностью $\epsilon$.
   Параметры:
   $a$ — начало отрезка
   $b$ — конец отрезка
   $eps$ — заданная точность
   Возвращаемое значение: приближённое значение интеграла.

## 8. Численный анализ

Вычислим константу используя график ошибки от длины отрезка разбиения.
$f^{(IV)}(x) = 5!x = 120x$
$R_4 = Ch^5 f^{(IV)}(x) \approx 8.39606 \cdot 10^{-6}$
$h^5 = 0.0395833^5 \approx 9.7176217 \cdot 10^{-8}$
$f^{(IV)}(1.3) = 120 \cdot 1.3 = 156$
$C = \frac{h^5 f^{(IV)}(x)}{R_4} = \frac{9.7176217 \cdot 10^{-8} \cdot 156}{8.39606 \cdot 10^{-6}} \approx 1.8055481$

На графике зависимости количества итераций от заданной точности видно, что при увеличении точности увеличивается количество итераций. На графике видны "изломы", это связано с тем, что на каждой итерации количество отрезков разбиения увеличивается вдвое, то есть может произойти так, что на очередной итерации будет получено такое количество отрезков разбиений, которого хватит для достижения точности на порядок выше.

На графике зависимости фактической ошибки от длины отрезка разбиения видно, что с уменьшением длина отрезка разбиения уменьшается и значение ошибки. График ошибки параллелен графику $h^4(h)$.

На графике зависимости фактической ошибки от заданной точности видно, что при увеличении точности уменьшается значение ошибки. График ошибки находится ниже биссектрисы (графика $\epsilon(\epsilon)$).

## 9. Вывод

В ходе работы были найдены приближённые значения определённого интеграла заданной функции на заданном отрезке с заданными значениями точности с помощью обобщённой формулы трёх восьмых, также исследованы зависимости фактической ошибки и числа итераций от заданной точности, вычислена константа с помощью графика фактической ошибки от длины отрезка разбиения. Скорость сходимости метода зависит от производной заданной функции четвёртого порядка.

# 10. Исправления

## 1. Постановка задачи

Дано: функция одной переменной $f(x)$, отрезок интегрирования $[a, b]$. Необходимо найти приближённое значение определённое интеграла $I = \int_a^b f(x)dx$, используя обобщённую формулу трёх восьмых.

## 2.2 Алгоритм

1. Задаём начальное значение интеграла $I_1 = \frac{3h}{8} \cdot (f(a) + 3f(a+h) + 3f(a+2h)) + f(a+3h))$ для шага — $h = \frac{b-a}{3n}$, и $n = 1$ — количества разбиений.

2. Далее в цикле запоминаем значение интеграла с прошлой итерации ($I_0 = I_1$), а значение на текущей итерации обнуляем ($I_1 = 0$), удваиваем количество разбиений ($n = n * 2$), находим шаг ($h = \frac{b-a}{3n}$) и ставим начальную точку $t = a$.

3. Далее вычисляем значение интеграла на текущей итерации
$$I_1 = \frac{3h}{8} \cdot \sum_{i=1}^{n} (f(t+3hi) + 3f(t+3hi+h) + 3f(t+3hi+2h) + f(t+3hi+3h))$$

4. Проверям условие выхода из цикла (правило Рунге) $\frac{|I_1 - I_0|}{2^4 - 1}$, если это значение больше заданной точности, то возвращаемся к шагу 2, иначе получаем искомое приближение интеграла с заданной точностью $I_1$.

## 8. Численный анализ

Вычислим константу используя график ошибки от длины отрезка разбиения.
$f^{(IV)}(x) = 5!x = 120x$
$R_4 = Ch^4 f^{(IV)}(x) \approx 8.39606 \cdot 10^{-6}$
$h^4 = 0.0395833^4 \approx 2.4549802 \cdot 10^{-6}$
$f^{(IV)}(1.3) = 120 \cdot 1.3 = 156$
$C = \frac{h^4 f^{(IV)}(x)}{R_4} = \frac{2.4549802 \cdot 10^{-6} \cdot 156}{8.39606 \cdot 10^{-6}} \approx 45.6138845$

При повышении точности на порядок потребуется:

На графике зависимости фактической ошибки от заданной точности видно, что при увеличении точности уменьшается значение ошибки. График ошибки находится ниже биссектрисы (графика $\epsilon(\epsilon)$).