СПбПУ Петра Великого
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики, ФизМех

Направление подготовки
«01.03.02 Прикладная математика и информатика»

Отчёт по лабораторной работе №7

Тема

Решение краевой задачи для ОДУ 2-го порядка

Дисциплина

Численные методы

Выполнил студент группы 5030102/00002 Димитрюк Н. С.
Преподаватель

Санкт-Петербург

1. Формулировка задачи и формализация задачи

Дана равномерная сетка $x^h = \{x_i\}_{i=0}^n$, $x_0 = a$, $x_n = b$ ($x_i \in [a, b]$).
Необходимо решить краевую задачу для ОДУ 2-го порядка ($y'' = f(x, y, y')$), с граничными условиями $\alpha_1 = 0, \beta_1 = 0$ $\begin{pmatrix} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B \end{pmatrix}$, методом суперпозиции, решив 3 задачи Коши.

Необходимо получить решения для двух значений шага и построить графики точного и полученных решений на отрезке, графики ошибок на заданном отрезке, график зависимости бесконечной нормы фактической точности от величины шага, построить график зависимости нормы ошибки от величины возмущения при фиксированном шаге.

2. Алгоритм метода и условия его применимости

2.1 Условия применимости

В методе суперпозиции решаются 3 задачи Коши модифицированным методом Эйлера (2-го порядка), соответственно условия применимости такие же, как у этого метода: решение всех задач Коши должно существовать и быть единственным.

2.2 Алгоритм

Дано: отрезок $[a, b]$, функция $y'' = f(x, y, y')$, равномерная сетка $x^h = \{x_i\}_{i=0}^n$, $x_0 = a$, $x_n = b$ ($x_i \in [a, b]$), граничные условия $\alpha_1 = 0, \beta_1 = 0$.

Решаем линейное ОДУ 2-го порядка: $p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = f(x)$, где $p(x), q(x), r(x), f(x) \in C([a, b])$. Дифференциальный оператор $L = p\frac{d^2}{dx^2} + q\frac{d}{dx} + r$.
Общее решение уравнения: $y(x) = u(x) + c_1 v(x) + c_2 w(x)$, где $u(x)$ — частное решение неоднородного уравнения $L(u) = f$, а $c_1 v(x) + c_2 w(x)$ — общее решение однородного уравнения $L(v) = 0, L(w) = 0$ ($v(x)$ и $w(x)$ должны быть линейно независимы).
Начальные условия для решения задач Коши: $\begin{cases} u(a) = 0 \\ u'(a) = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} v(a) = 1 \\ v'(a) = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} w(a) = 0 \\ w'(a) = 1 \end{cases}$.
Если НУ линейно независимы, то и решения будут линейно независимы. Решив задачи Коши получим сеточные функции u^h, v^h, w^h, тогда $y^h = u^h + c_1 v^h + c_2 w^h$. Определяем c_1 и c_2 так, чтобы выполнялись граничные условия:

$$\begin{cases} \alpha_0(u(a) + c_1 v(a) + c_2 w(a)) + \alpha_1(u'(a) + c_1 v'(a) + c_2 w'(a)) = A \\ \beta_0(u(b) + c_1 v(b) + c_2 w(b)) + \beta_1(u'(b) + c_1 v'(b) + c_2 w'(b)) = B \end{cases}$$

Подставим начальные условия и начальные граничные условия и получим:

$$\begin{cases} \alpha_0 c_1 = A \\ \beta_0(u(b) + c_1 v(b) + c_2 w(b)) = B \end{cases}$$

Найдём c_1 и c_2: $\begin{cases} c_1 = \frac{A}{\alpha_0} \\ c_2 = \frac{\frac{B}{\beta_0} - u(b) - c_1 v(b)}{w(b)} \end{cases}$

И получим решение — сеточную функцию y^h.

Алгоритм метода Эйлера: Для решения ОДУ 2-го порядка делаем замену $y' = z$.

1. В цикле по всей сетке вычисляем значения в узлах ($i = 1$, $x = a$, y_0 и z_0 задаются начальными условиями задачи Коши).

2. Сначала вычисляем промежуточные значения для z и y по формулам: $\tilde{y}_i = y_{i-1} + \frac{h}{2} z_{i-1}$, $\tilde{z}_i = z_{i-1} + \frac{h}{2} \hat{f}(x, y_{i-1}, z_{i-1})$.

3. Затем вычисляем значения в узле сетки по формулам: $y_i = y_{i-1} + h\tilde{z}_i$, $z_i = z_{i-1} + h\hat{f}(x + \frac{h}{2}, \tilde{y}_i, \tilde{z}_i)$

4. Если прошли всю сетку ($i = n$), то заканчиваем цикл и получаем сеточную функцию y^h, в качестве которой могут быть u, v или w. Если нет, то увеличиваем i на единицу, а к x прибавляем h.

В качетсве функции $\hat{f}$ используется конкретная функция для конкретной задачи Коши, то есть для однородного или неоднородного уравнения.

3-4. Предварительный анализ задачи и проверка условий применимости

Для существования и единственности решения задачи Коши необходимо, чтобы $f(x, y, y')$ была непрерывной и удовлетворяла условию Липшица с константой L на отрезке $[a, b]$: $|f(x, y, y') - f(x, \tilde{y}, \tilde{y}')| \leq L(|y - \tilde{y}| + |y' - \tilde{y}'|)$ для любого $x \in [a, b]$.

1. $f(x, y, y') = \frac{\sqrt{x} - (2-x)y' - 2y}{2x(x+2)}$ — функция непрерывна на отрезке $[1, 2]$

2. Проверим условие Липшица: $|f(x, y, y') - f(x, \tilde{y}, \tilde{y}')| = |\frac{-(2-x)y' - 2y + (2-x)\tilde{y}' + 2\tilde{y}}{2x(x+2)}| = |\frac{(2-x)(\tilde{y}' - y') + 2(\tilde{y} - y)}{2x(x+2)}| \leq |\frac{(2-x)(\tilde{y}' - y')}{2x(x+2)}| + |\frac{2(\tilde{y} - y)}{2x(x+2)}| \leq \frac{1}{6}|\tilde{y}' - y'| + \frac{1}{3}|\tilde{y} - y| \leq \frac{1}{3}(|y - \tilde{y}| + |y' - \tilde{y}'|)$.
Функция удовлетворяет условию Липшица с константой $\frac{1}{3}$.

Следовательно, задачи Коши имеют решение и причём единственное.

5. Тестовый пример

Проведём тестовые вычисления для ОДУ 2-го порядка $2x(x+2)y'' + (2-x)y' + 2y = \sqrt{x}$ на отрезке $[1, 2]$, с граничными условиями $\alpha_1 = 0, \beta_1 = 0$ и значением шага $h = 0.5$.
Решим задачу Коши модифицированным методом Эйлера для u:

1. $u_0 = 0,\ z_0 = 0,\ \hat{f}(x, y, z) = \frac{\sqrt{x}-2y-(2-x)z}{2x(x+2)}$

2. $x = 1$:
   $\tilde{u}_1 = u_0 + \frac{h}{2} z_0 = 0,\ \tilde{z}_1 = z_0 + \frac{h}{2}\hat{f}(x, u_0, z_0) = \frac{1}{24}$
   $u_1 = u_0 + h\tilde{z}_1 = 0.021,\ z_1 = z_0 + h\hat{f}(x + \frac{h}{2}, \tilde{u}_1, \tilde{z}_1) = 0.134$

3. $x = 1.5$:
   $\tilde{u}_2 = u_1 + \frac{h}{2} z_1 = 0.021 + 0.25 \cdot 0.134 = 0.055,$
   $\tilde{z}_2 = z_1 + \frac{h}{2}\hat{f}(x, u_1, z_1) = 0.134 + 0.25 \cdot 0.106 = 0.161$
   $u_2 = u_1 + h\tilde{z}_2 = 0.021 + 0.5 \cdot 0.161 = 0.102,$
   $z_2 = z_1 + h\hat{f}(x + \frac{h}{2}, \tilde{u}_2, \tilde{z}_2) = 0.134 + 0.5 \cdot 0.089 = 0.179$

Получили сеточную функцию $u = \{0, 0.021, 0.102\}$.
Решим задачу Коши модифицированным методом Эйлера для v:

1. $v_0 = 1,\ z_0 = 0,\ \hat{f}(x, y, z) = \frac{-2y-(2-x)z}{2x(x+2)}$

2. $x = 1$:
   $\tilde{v}_1 = v_0 + \frac{h}{2} z_0 = 1,\ \tilde{z}_1 = z_0 + \frac{h}{2}\hat{f}(x, v_0, z_0) = -0.333$
   $v_1 = v_0 + h\tilde{z}_1 = 0.833,\ z_1 = z_0 + h\hat{f}(x + \frac{h}{2}, \tilde{v}_1, \tilde{z}_1) = -0.108$

3. $x = 1.5$:
   $\tilde{v}_2 = v_1 + \frac{h}{2} z_1 = 0.833 - 0.25 \cdot 0.108 = 0.806,$
   $\tilde{z}_2 = z_1 + \frac{h}{2}\hat{f}(x, v_1, z_1) = -0.108 - 0.25 \cdot 0.154 = -0.147$
   $v_2 = v_1 + h\tilde{z}_2 = 0.833 - 0.5 \cdot 0.147 = 0.76,$
   $z_2 = z_1 + h\hat{f}(x + \frac{h}{2}, \tilde{v}_2, \tilde{z}_2) = -0.108 - 0.5 \cdot 0.12 = -0.16$

Получили сеточную функцию $v = \{1, 0.833, 0.76\}$.
Решим задачу Коши модифицированным методом Эйлера для w:

1. $w_0 = 0,\ z_0 = 1,\ \hat{f}(x, y, z) = \frac{-2y-(2-x)z}{2x(x+2)}$

2. $x = 1$:
   $\tilde{w}_1 = w_0 + \frac{h}{2} z_0 = 0.25,\ \tilde{z}_1 = z_0 + \frac{h}{2}\hat{f}(x, w_0, z_0) = 0.958$
   $w_1 = w_0 + h\tilde{z}_1 = 0.479,\ z_1 = z_0 + h\hat{f}(x + \frac{h}{2}, \tilde{w}_1, \tilde{z}_1) = 0.925$

3. $x = 1.5$:
   $\tilde{w}_2 = w_1 + \frac{h}{2} z_1 = 0.479 + 0.25 \cdot 0.925 = 0.71,$
   $\tilde{z}_2 = z_1 + \frac{h}{2}\hat{f}(x, w_1, z_1) = 0.925 - 0.25 \cdot 0.135 = 0.891$
   $w_2 = w_1 + h\tilde{z}_2 = 0.479 + 0.5 \cdot 0.891 = 0.923,$
   $z_2 = z_1 + h\hat{f}(x + \frac{h}{2}, \tilde{w}_2, \tilde{z}_2) = 0.925 - 0.5 \cdot 0.125 = 0.863$

Получили сеточную функцию $w = \{0, 0.479, 0.923\}$.
Найдём c_1 и c_2: $c_1 = 1$ $(\alpha_0 = 1)$, $c_2 = \frac{\sqrt{2}-0.102-0.76}{0.923} = 0.598$

Получили решение — сеточную функцию $y^h = u^h + v^h + 0.598w^h = \{1, 1.14, 1.414\}$

6. Контрольные тесты

1. Отрезок $[1, 2]$
2. $y'' = \frac{\sqrt{x}-2y-(2-x)z}{2x(x+2)}$ — неоднородное уравнение.
3. $y'' = \frac{-2y-(2-x)z}{2x(x+2)}$ — однородное уравнение.
4. $A = 1$, $B = \sqrt{2}$
5. $\alpha_0 = \beta_0 = 1$, $\alpha_1 = \beta_1 = 0$
6. $n_1 = 8$, $n_2 = 16$ — число отрезков разбиений.
7. $h_1 = 0.125$, $h_2 = 0.0625$ — величины шага.
8. $h = 2^{-i}$, $(i = 1, ..., 12)$ — шаг для нахождения зависимости фактической точности от шага.
9. $\delta = 10^{-i}$, $(i = 1, ..., 12)$ — возмущения для нахождения зависимости ошибки от возмущений начальных данных.
10. $h_3 = 0.0625$ — шаг для исследования зависимости, описанной в предыдущем пункте.

7. Модульная структура программы

1. double* SuperPos(double a, double b, double a_0, double b_0, int n) — решает краевую задачу (3 задачи Коши) на отрезке $[a, b]$.
   Параметры:
   a — левая граница отрезка
   b — правая граница отрезка
   a_0 и b_0 — граничное условие
   n — количество разбиений
   Возвращаемое значение: сеточная функция.

2. double* Eiler(double a, double b, double n, double y_0, double z_0, double(*Func)(double, double, double)) — решает задачу Коши для заданной функции Func модифицированным методом Эйлера для количества разбиений отрезка $[a, b]$ n, с начальными условиями y_0, z_0. ($y = \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}$) в точке x.
   Параметры:
   a — левая граница отрезка
   b — правая граница отрезка
   n — количество разбиений отрезка
   y_0 и z_0 — начальные условия для задачи Коши
   $Func$ — фукнция для которой решается задача Коши
   Возвращаемое значение: сеточная фукнция.

8. Численный анализ

На графике точного и полученных решений на отрезке видно, что решения практически совпадают, разница практически незаметна.

На графике ошибки на отрезке для решений с двумя значениями шага видно, что ошибка для большего шага больше. В максимальных точках ошибка различается в 4 раза, а количество отрезков разбиения различается в два раза, так как порядок метода второй, то всё получается верно.

На графике фактической точности от величины шага видно, что чем меньше значение шага, тем выше фактическая точность. График параллелен графику $h^2(h)$, что соответствует второму порядку метода.

На графике ошибки от возмущения при фиксированном шаге видно, что при очень малых возмущениях результат остаётся одинаковым, то есть они не влияют на результат, так как являются меньше достигаемой точности. При больших значениях возмущений с их увеличением растёт и ошибка.

9. Вывод

В ходе работы, было получено решение краевой задачи, найдены решения для двух значений шага, выявлены зависимости фактической точности от величины шага, нормы ошибки от величины возмущений, были построены соответствующие графики, а также графики ошибки и полученных решений на отрезке. Таким образом, чем меньше брать значение шага, тем точнее получиться решение, а также малые возмущения не повлияют на результат.