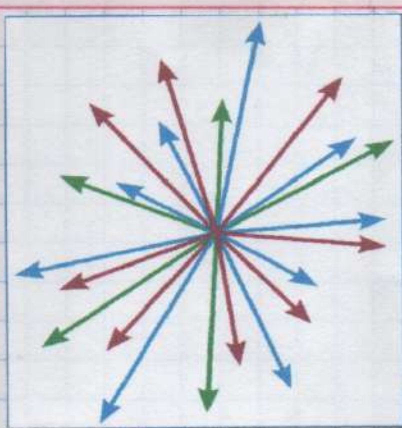
Ayala Avila Brian Esau 1SV2



Un espacio vectorial es una estructura algebraica creada a partir de un conjunto no vacío; una operación interna (suma definida para los elementos del conjunto) y una operación externa (producto por un escalar definida entre dicho conjunto y cuerpo matemático). El espacio vectorial se denota por: $(V, K, +, \dots)$, o simplemente $(V, +, \cdot)$. Las dos operaciones tienen sus propias propiedades.

- Suma de dos elementos en V:

Si $u, v \in V$; entonces $u + v \in V$.

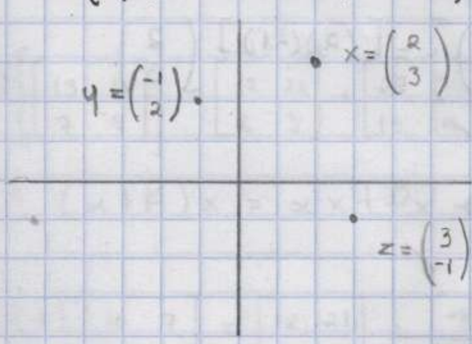
- Asociativa: $(u+v)+w = u(v+w)$ $\forall u, v, w \in V$
- Conmutativa: $u+v = v+u$ $\forall u, v \in V$
- Existencia elemento neutro: Es un vector al que llamaremos 0 tal que si $v \in V$, entonces $v+0 = v$ $0+v = v+0 = v$ $\forall v \in V$
- Existencia elemento opuesto: Para todo vector $v \in V$, existe un vector al que llamaremos opuesto y designaremos como: $-v \in V$, tal que $v + (-v) = 0$

- Producto por un escalar

Si $a \in R$ y $v \in V$, entonces $a \cdot v \in V$

- Asociativa: $(a \cdot v)u = a(v \cdot u)$ $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
- Distributiva: $(a+v)u = a \cdot u + v \cdot u$ $\alpha(x+y) = ax + ay$
- Distributiva (vectores): $a(u+v) = a \cdot u + a \cdot v$ $(\alpha+\beta) = \alpha x + \beta x$
- Elemento unidad: Si $v \in V$, entonces $1 \cdot v = v$

* $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x \text{ y } y \in \mathbb{R} \right\}$



1: $x + y \in V = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ ✓

2: $x + (y+z) = (x+y) + z$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$ ✓

3: $x + 0 = 0 + x = x \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ✓

$4: \quad x + (-x) = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ✓

$5: \quad x+y = y+x \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ ✓

$\alpha = 2 \qquad \beta = -1$

$6: \quad \alpha x \in V \rightarrow 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ ✓

$7: \quad \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y \rightarrow 2\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right] = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$2\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}$ ✓

$8: \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x \rightarrow (2 + (-1))\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$1\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ✓

$9: \quad \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x \rightarrow 2\left[-1\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right] = [(2)(-1)]\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$2\left[\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}\right] = [-2]\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$ ✓

$10: \quad 1 \cdot x = x \rightarrow 1\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ✓

* Matrices.

$1: \quad \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_{2\times2} + \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}_{2\times2} = \begin{bmatrix} 13 & 10 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}_{2\times2}$ ✓

$10: \quad 1 \cdot x = x \rightarrow (1)\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ✓

Ayala Avila Brian Esaú 1SV2

2: $x+(y+z) = (x+y)+z$

$$\begin{bmatrix}4&7\\2&1\end{bmatrix}+\left[\begin{bmatrix}9&3\\5&8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2&4\\1&-5\end{bmatrix}\right]=\left[\begin{bmatrix}4&7\\2&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}9&3\\5&8\end{bmatrix}\right]+\begin{bmatrix}-2&4\\1&-5\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}4&7\\2&1\end{bmatrix}+\left[\begin{bmatrix}7&7\\6&3\end{bmatrix}\right]=\left[\begin{bmatrix}13&10\\7&9\end{bmatrix}\right]+\begin{bmatrix}-2&4\\1&-5\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}11&14\\8&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11&14\\8&4\end{bmatrix}$$ ✓

3: $x+0=0+x=x \rightarrow \begin{bmatrix}4&7\\2&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&7\\2&1\end{bmatrix}$ ✓

4: $x+(-x)=0 \rightarrow \begin{bmatrix}4&7\\2&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4&-7\\-2&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$ ✓

5: $x+y=y+x \rightarrow \begin{bmatrix}4&7\\2&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}9&3\\5&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&3\\5&8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4&7\\2&1\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}13&10\\7&9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13&10\\7&9\end{bmatrix}$$ ✓

$\alpha = 3 \qquad \beta = -2$

6: $\alpha x \in V \rightarrow 3\begin{bmatrix}4&7\\2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12&21\\6&3\end{bmatrix}$ ✓

7: $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y \rightarrow 3\left[\begin{bmatrix}4&7\\2&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}9&3\\5&8\end{bmatrix}\right]=3\begin{bmatrix}4&7\\2&1\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}9&3\\5&8\end{bmatrix}$

$$3\left[\begin{bmatrix}13&10\\7&9\end{bmatrix}\right]=\begin{bmatrix}12&21\\6&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}27&9\\15&24\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}39&30\\21&27\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}39&30\\21&27\end{bmatrix}$$ ✓

8: $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x \rightarrow (3-2)\begin{bmatrix}4&7\\2&1\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}4&7\\2&1\end{bmatrix}+(-2)\begin{bmatrix}4&7\\2&1\end{bmatrix}$

$$(1)\begin{bmatrix}4&7\\2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12&21\\6&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-8&-14\\-4&-2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}4&7\\2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&7\\2&1\end{bmatrix}$$ ✓

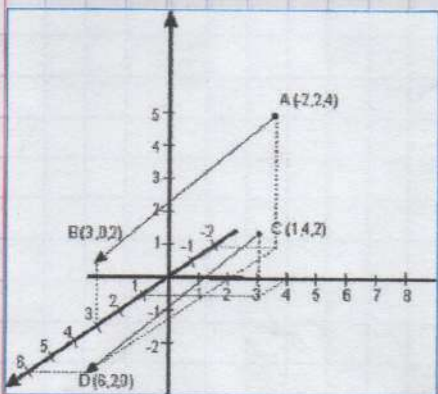
9: $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x \rightarrow 3\left[-2\begin{bmatrix}4&7\\2&1\end{bmatrix}\right]=(3)(-2)\begin{bmatrix}4&7\\2&1\end{bmatrix}$

$$3\left[\begin{bmatrix}-8&-14\\-4&-2\end{bmatrix}\right]=(-6)\begin{bmatrix}4&7\\2&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}-24&-42\\-12&-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-24&-42\\-12&-1\end{bmatrix}$$ ✓

- Propiedades:

* El elemento neutro 0 es único.
* El opuesto de un vector x es único.
* La ecuación $\bar{x} + \bar{y} = \bar{w}$ tiene solución única $\bar{x} = \bar{w} - \bar{y}$.
* Es válida la ley de simplificación $\bar{x} + \bar{a} = \bar{y} + \bar{a} \rightarrow \bar{x} = \bar{y}$
* $0\bar{x} = 0$ * $\alpha 0 = 0$
* $\alpha \bar{x} = \alpha = 0$ ó $\bar{x} = 0$ * $-(\alpha \bar{x}) = (-\alpha)\bar{x}$

Subespacio Vectorial



Un subespacio vectorial es el subconjunto de un espacio vectorial.
Sea W un subconjunto no vacío de un espacio vectorial V y suponga que W es en sí un espacio vectorial bajo las operaciones de suma y multiplicación por un escalar definidas en V. Entonces se dice que W es un subespacio de V.
Teorema. Un subconjunto no vacío W es un espacio vectorial V es un subespacio de V si se cumplen las dos reglas de la cerradura:

* Si $x \in W$ y $y \in W$, entonces $x + y \in W$ (suma)
* Si $x \in W$, entonces $\alpha x \in W$ para todo escalar α (producto p escalar)

* $V = \mathbb{R}^2$
$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x \geq 0 , y \geq 0 \right\}$

1° Veamos si $w \neq 0$
En efecto, $w \neq 0$ porque $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$
así que, $w \neq 0$

2° W es cerrado bajo la suma
Sean $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in W$ y $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in W$
Entonces
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \in W \quad \left\{ \begin{matrix} x_1 \text{ y } x_2 \\ y_1 \text{ y } y_2 \end{matrix} \right\rangle \text{deben ser} \geq 0$$

3° W es cerrado bajo el producto con escalar
Sean $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in W$ α escalar
Pero si $\alpha = -1$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

Entonces $-1 \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \end{pmatrix} \notin W$ Por lo tanto, W no es un subespacio de W.

Ayala Avila Brian Esaú 1SV2

* $V = M_{2\times3}$

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

1° Verificar si $W \neq \emptyset$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ En efecto, $W \neq \emptyset$ porque $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in W$

Así que $W \neq \emptyset$

2° W es cerrado bajo la suma.
Sean $u = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ y $v = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & c_2 & d_2 \end{bmatrix}$ elementos de W

$$u + v = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 & 0+0 \\ 0+0 & c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{bmatrix}$$

$= \begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 & 0+0 \\ 0+0 & c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{bmatrix}$ estan en W $\left\{ \begin{array}{l} \text{Cumple las condiciones} \\ \text{suma da } \mathbb{R} \text{ y } 0+0=0 \end{array} \right.$

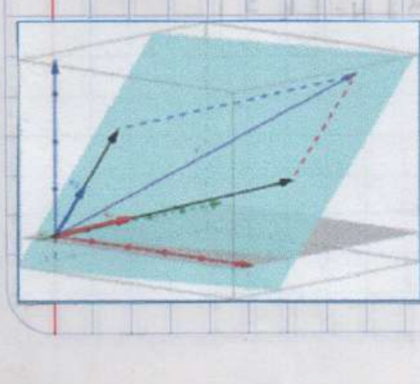
3° W es cerrado bajo el producto de un escalar.
Sean, K un escalar y $u = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & d \end{bmatrix} \in W$

Entonces, $Ku = K \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ka & Kb & K0 \\ K0 & Kc & Kd \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} Ka & Kb & 0 \\ 0 & Kc & Kd \end{bmatrix}^*$ está en W; por lo tanto W es un subespacio de W.

* cumple con las condiciones $K(a, b, c, d)$ da $\mathbb{R}$ y 0 se mantiene en su posición inicial.

Combinación Lineal



Una combinación lineal de dos o más vectores es el vector que se obtiene al sumar esos vectores multiplicados por algunos escalares. Su expresión es la siguiente:

$$v = a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 \ldots\ldots + a_n\bar{v}_n$$

* Sean $v_1, v_2, \ldots\ldots v_r$, w vectores de un

espacio vectorial. Se dice que el vector w es una combinación lineal de los vectores $v_1, v_2, \dots, v_r$

* Demostrar que $(2,1,3)$ es una combinación lineal de: $(1,5,-7)$, $(1,1,2)$ y $(1,-4,-5)$.

$$(2,1,3) = K_1(1,5,-7) + K_2(1,1,2) + K_3(1,-4,-5)$$
$$(2,1,3) = (K_1, 5K_1, -7K_1) + (K_2, K_2, 2K_2) + (K_3, -4K_3, -5K_3)$$
$$(2,1,3) = (K_1 + K_2 + K_3,\ 5K_1 + K_2 - 4K_3,\ -7K_1 + 2K_2 - 5K_3)$$

$$\begin{cases} K_1 + K_2 + K_3 = 2 \\ 5K_1 + K_2 - 4K_3 = 1 \\ -7K_1 + 2K_2 - 5K_3 = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & -4 \\ -7 & 2 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & -4 & 1 \\ -7 & 2 & -5 & 3 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & -4 & 1 \\ -7 & 2 & -5 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} F_1(-5)+F_2 \rightarrow F_2 \\ F_1(7)+F_3 \rightarrow F_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -9 & -9 \\ 0 & 9 & 2 & 17 \end{array}\right] F_2(-1/4) \rightarrow F_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 9/4 & 9/4 \\ 0 & 9 & 2 & 17 \end{array}\right] \begin{array}{l} F_2(-1)+F_1 \rightarrow F_1 \\ F_2(-9)+F_3 \rightarrow F_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5/4 & -1/4 \\ 0 & 1 & 9/4 & 9/4 \\ 0 & 0 & -73/4 & -13/4 \end{array}\right] F_3(-4/73) \rightarrow F_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5/4 & -1/4 \\ 0 & 1 & 9/4 & 9/4 \\ 0 & 0 & 1 & 13/73 \end{array}\right] \begin{array}{l} F_3(5/4)+F_1 \rightarrow F_1 \\ F_3(-9/4)+F_2 \rightarrow F_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2/73 \\ 0 & 1 & 0 & 135/73 \\ 1 & 0 & 1 & 13/73 \end{array}\right]$$

Comprobación

* $-\frac{2}{73} + \frac{135}{73} + \frac{13}{73} = \frac{146}{73}$ ó 2
* $5\left(\frac{-2}{73}\right) + \frac{135}{73} - 4\left(\frac{13}{73}\right) = \frac{73}{73}$ ó 1

Solución: $K_1 = -2/73$, $K_2 = 135/73$ y $K_3 = 13/73$

$$\overline{V} = -\frac{2}{73}\overline{V}_1 + \frac{135}{73}\overline{V}_2 + \frac{13}{73}\overline{V}_3$$

* $\begin{bmatrix} 28 & 21 \\ -7 & 0 \end{bmatrix}$ en combinación lineal de $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 28 & 21 \\ -7 & 0 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 28 & 21 \\ -7 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5a + 7b + c & -a + 2b + 3c \\ 7a + 2b - c & 0 \end{bmatrix}$$

Ayala Avila Brian Esaú 1SV2

$$\begin{cases} 5a + 7b + c = 28 & *1 \\ -a + 2b + 3c = 21 & *2 \\ 7a + 2b - c = -7 & *3 \end{cases}$$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 28 & 7 & 1 \\ 21 & 2 & 3 \\ -7 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 7 & 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{\overset{28(8)}{28[(2)(-1)-3(2)]} - \overset{0}{7[(1)(-21)-(3)(-7)]} + \overset{42+14}{[(21)(2)-(-7)(2)]}}{5[2(-1)-3(2)]-7[(-1)(-1)-3(7)]+[(-1)(2)-2(7)]} = \frac{-168}{84}$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 28 & 1 \\ -1 & 21 & 3 \\ 7 & -7 & -1 \end{vmatrix}}{84} = \frac{\overset{0}{5[(21)(-1)-(3)(-7)]} - \overset{-28(20)}{28[(-1)(-1)-3(7)]} + \overset{7-147}{[(-1)(-7)-21(7)]}}{84} = \frac{420}{84}$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 7 & 28 \\ -1 & 2 & 21 \\ 7 & 2 & -7 \end{vmatrix}}{84} = \frac{\overset{5(-56)}{5[(2)(-7)-21(2)]} - \overset{-7(-140)}{7[(-1)(-7)-21(7)]} + \overset{28(-16)}{28[(-1)(2)-2(7)]}}{84} = \frac{252}{84}$$

Solución: $a = -2$, $b = 5$ y $c = 3$.

$$-2\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} -10 & 2 \\ -14 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 35 & 10 \\ 10 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & 21 \\ -7 & 0 \end{bmatrix}$$

Comprobación

$*1$. $5a + 7b + c = 28$
$5(-2) + 7(5) + (3) = 28$
$-10 + 35 + 3 = 28$
$28 = 28$

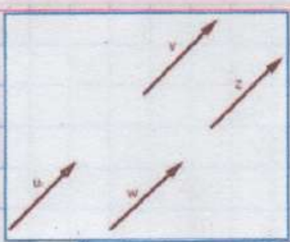
$*2$ $-a + 2b + 3c = 21$
$-(-2) + 2(5) + 3(3) = 21$
$2 + 10 + 9 = 21$
$21 = 21$

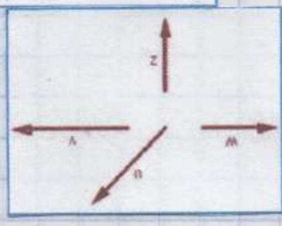
$*3$ $7a + 2b - c = -7$
$7(-2) + 2(5) - (3) = -7$
$-14 + 10 - 3 = -7$
$-7 = -7$

$*4$ $-7K_1 + 2K_2 - 5K_3 = 3$

$$-7\left(-\frac{2}{73}\right) + 2\left(\frac{135}{73}\right) - 5\left(\frac{13}{73}\right) = 3$$

$$\frac{14 + 270 - 65}{73} = 3$$





Vectores linealmente dependientes o independientes.

Sea $A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_n\}$ un conjunto de vectores del espacio vectorial V. Se dice que el conjunto A es linealmente independiente, cuando la ecuación vectorial:

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \dots a_K\vec{v}_K = 0$$

tiene solo una solución, y esta es la trivial; es decir: $a_1 = a_2 = \dots a_3 = 0$.

Si existen soluciones distintas de la trivial entonces A es un conjunto de vectores linealmente dependiente.

Teorema. Las siguientes afirmaciones son correctas.

1: Cualquier conjunto que contenga al vector 0 es linealmente dependiente

2: Cualquier conjunto que contenga un único vector diferente de $\vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, es linealmente independiente.

3: Cualquier conjunto formado por dos vectores de cero, $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, donde $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$, $\vec{v}_2 \neq \vec{0}$, es linealmente dependiente si, y sólo si uno de los vectores es multiplo escalar del otro.

4: Cualquier conjunto que contenga un subconjunto linealmente dependiente es linealmente dependiente.

5: Cualquier subconjunto de un conjunto linealmente independiente es linealmente independiente.

* Determine si los vectores dados son independientes.

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}7\\2\\-5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-11\\2\\19\end{bmatrix} \longrightarrow a\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}7\\2\\-5\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}-11\\2\\19\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix}a+7b-11c\\2a+2b+2c\\3a-5b+19c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases}a+7b-11c=0\\2a+2b+2c=0\\3a-5b+19c=0\end{cases} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}1&7&-11&0\\2&2&2&0\\3&-5&19&0\end{array}\right]$$

$$\begin{matrix}F_1(-2)+F_2 \rightarrow F_2\\F_1(-3)+F_2 \rightarrow F_3\end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c}1&7&-11&0\\0&-12&24&0\\0&-26&52&0\end{array}\right] F_2(-1/12) \rightarrow F_2 \left[\begin{array}{ccc|c}1&7&-11&0\\0&1&-2&0\\0&-26&52&0\end{array}\right]$$

$$\begin{matrix}F_2(-7)+F_1 \rightarrow F_1\\ \\F_2(26)+F_3 \rightarrow F_3\end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&3&0\\0&1&-2&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

Infinitas soluciones

Ayala Avila Brian Esaú 1SV2

si $c=1$, $a+3c=0$ y $b-2c=0$ $\rightarrow$ $a=-3c$ y $b=2c$

$$-3\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}7\\2\\-5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-11\\2\\19\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3+14-11\\-6+4+2\\-9-10+19\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$ Linealmente Dep.

* Demostrar que los vectores son linealmente dependientes.

$\vec{a}=(3,4)$ y $\vec{b}=(6,8)$

$\alpha(3,4)+\beta(6,8)=(0,0)$

$\rightarrow 3\alpha+6\beta=0 \quad (-4)$ $\rightarrow$ $-12\cancel{\alpha}-24\cancel{\beta}=0$

$4\alpha+8\beta=0 \quad (3)$ $\qquad$ $12\cancel{\alpha}+24\cancel{\beta}=0$

$0=0$

* $4\alpha+8\beta=0 \rightarrow 4\alpha=-8\beta$, si $\beta=1 \rightarrow 4\alpha=-8(1)$
* si $\alpha-2=4(-2)=-8\beta=$ $\underline{B=1}$ $\qquad$ $\underline{\alpha=-2}$

Como existe al menos $\alpha\neq 0$, entonces $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son Linealmente D

* Demostrar que los vectores son linealmente independientes.

$\vec{a}=(2,-1)$ y $\vec{b}=(3,1)$

$\alpha(2,-1)+\beta(3,1)=(0,0)$

$\rightarrow 2\alpha+3\beta=0$

$-\alpha+\beta=0$

$2\alpha+3\beta=0$ $\qquad -\left(\frac{0-3\beta}{2}\right)+\beta=0$ $\qquad \alpha=\frac{0-3(0)}{2}$

$2\alpha=0-3\beta$

$\alpha=\frac{0-3\beta}{2}$ $\qquad -\frac{0}{2}+\frac{3}{2}\beta+\beta=0$ $\qquad \underline{\alpha=0}$

$\frac{5}{2}\beta=0$ $\quad \underline{\beta=0}$ $\qquad \alpha=\beta=0 \rightarrow \vec{a}$ y $\vec{b}$ son Linealmen Indep.

* Diga en cada caso si los vectores son linealmente Ind o Dep.

$\vec{A}=(1,-2,6)$ $\vec{B}=(1,1,1)$ $\vec{C}=(-3,4,5)$

$x\vec{A}+y\vec{B}+z\vec{C}$

$x(1,-2,6)+y(1,1,1)+z(-3,4,5)=(0,0,0)$

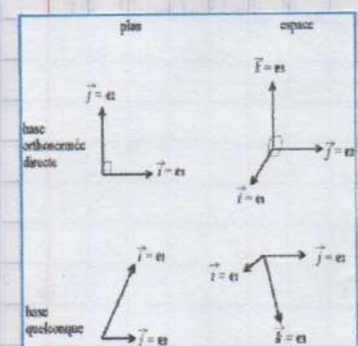
$$\begin{cases}x+y-3z=0\\-2x+y+4z=0\\6x+y+5z=0\end{cases} \rightarrow \det=\begin{vmatrix}1&1&-3\\-2&1&4\\6&1&5\end{vmatrix}=[(1)(5)-4(1)]-[(-2)(5)-4(6)]-3[(-2)-6]$$

$=59\neq 0$ Linealmente Ind

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 6 & 1 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{0 - 1[0(5)-4(0)] - 3[(0)(1)-1(0)]}{\underbrace{1[1(5)-4(1)]}_{1} - \underbrace{[(-2)(5)-4(6)]}_{34} - \underbrace{3[(-2)(1)-1(6)]}_{24}} = \frac{0}{59}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix}}{59} = \frac{[(0)(5)-4(0)] - 0 - 3[(-2)(0)-0(6)]}{59} = \frac{0}{59}$$

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{59} = \frac{[(1)(0)-0(1)] - [(-2)(0)-0(6)] + 0}{59} = \frac{0}{59}$$



Base

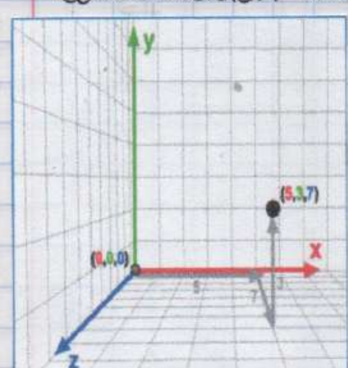
Se llama base de un espacio (o subespacio) vectorial a un sistema generador de dicho espacio o subespacio, que a su vez sea linealmente independiente.

* Propiedades:

1: Una base de W es un sistema generador mínimal de W (lo más pequeño posible).

2: Además es un conjunto independiente maximal dentro de W (lo más grande posible).

3: Una base de W permite expresar todos los vectores de W como combinación lineal de ella, de manera única para cada vector.



Dimensión

La dimensión de un espacio es el número máximo de vectores linealmente independientes que podemos tener en el espacio o subespacio.

Se denota dim(V).

* Dimensión de R^n con operaciones normales es n.
* Dimensión de P_n con operaciones normales es $n+1$.
* La dimensión de $M_{m \times n}$ con operaciones normales es $m \times n$.

Si W es un subespacio de un espacio vectorial n-dimensional, entonces se puede demostrar que la dimensión de W es finita y que la dimensión de W es menor o igual a n.

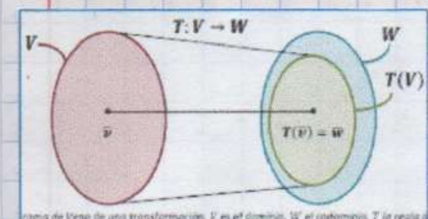
Ayala Avila Brian Esaú 1SV2

- Si el número de vectores es finito, la dimensión es un número natural y se dice que la base es finita. de lo contrario es infinita.

Teorema: En un espacio o subespacio de dimensión m entonces:

* Conjunto de más de m vectores nunca puede ser linealmente indpe.
* Conjunto de menos de m vectores nunca puede ser sistema generador.

Transformación Lineal



rama de Venn de una transformación. V es el dominio, W el codominio, T la regla d
T(V) es el recorrido

Sean V y W espacios vectoriales. Una transformación lineal T de V en W es una función que asigna a cada vector $v \in V$ un vector único $Tv \in V$ y que satisface, para cada u y v en V y cada escalar a.

* $T(u+v) = Tu + Tv$
* $T(\alpha v) = \alpha Tv$

Propiedades

- $T(O_v) = w$ - $T(-v) = -T(v)$ - $T(u-v) = T(u) - T(v)$

* Sea $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \\ 3y \end{bmatrix}$

$$u = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \to u+v = \begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{bmatrix} \to T(u+v) = T\begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{bmatrix}$$

$$T\begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_1+x_2)+(y_1+y_2) \\ (x_1+x_2)-(y_1+y_2) \\ 3(y_1+y_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1+y_1+x_2+y_2 \\ x_1-y_1+x_2-y_2 \\ 3y_1+y_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ x_1-y_1 \\ 3y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2+y_2 \\ x_2-y_2 \\ 3y_2 \end{bmatrix}$$

$$T(\alpha v) = T\begin{bmatrix} \alpha x_2 \\ \alpha y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha x_2)+(\alpha y_2) \\ (\alpha x_2)-(\alpha y_2) \\ (3\alpha y_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_2 + \alpha y_2 \\ \alpha x_2 - \alpha x_2 \\ 3\alpha y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(x_2+y_2) \\ \alpha(x_2-y_2) \\ \alpha(3y_2) \end{bmatrix}$$

$$= \alpha\begin{bmatrix} x_2+y_2 \\ x_2-y_2 \\ 3y_2 \end{bmatrix}$$

$* \; f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow M_{3\times 2} \; / \; T(x,y) = \begin{bmatrix} x & x-y \\ 0 & 0 \\ -y & 0 \end{bmatrix}$

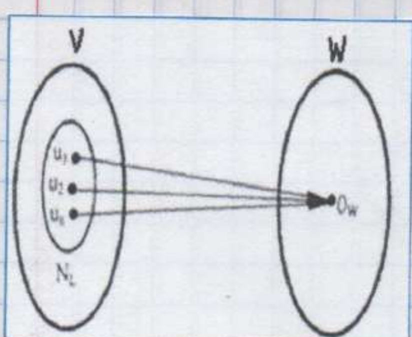
$u = (x_1, y_1) \; / \; T(u) = \begin{bmatrix} x_1 & x_1 - y_1 \\ 0 & 0 \\ -y_1 & 0 \end{bmatrix}$

$v = (x_2, y_2) \; / \; T(v) = \begin{bmatrix} x_2 & x_2 - y_2 \\ 0 & 0 \\ -y_2 & 0 \end{bmatrix}$

$$T(u+v) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 & x_1 - y_1 + x_2 - y_2 \\ 0 & 0 \\ -y_1 + (-y_2) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_1 - y_1 \\ 0 & 0 \\ -y_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 & x_2 - y_2 \\ 0 & 0 \\ -y_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T(\alpha u) \to T(\alpha x_1, \alpha y_1) = \begin{bmatrix} \alpha x_1 & \alpha x_1 - \alpha y_1 \\ 0 & 0 \\ -\alpha y_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(x_1) & \alpha(x_1 - y_1) \\ 0 & 0 \\ \alpha(-y_1) & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \alpha \begin{bmatrix} x_1 & x_1 - y_1 \\ 0 & 0 \\ -y_1 & 0 \end{bmatrix}$$



Núcleo

Sea $F: V \longrightarrow W$ una transformación lineal. Llamamos núcleo de F al conjunto de vectores del dominio cuya imagen por F es el 0_w.

$$Nu(F) = \{ v \in V \mid F(v) = 0_w \}^*$$

El núcleo de una transformación lineal es un subespacio de V.

$* \; Ker(T) = \{ v \in V \mid T(v) = 0 \in W \}$

Rango

Sea $T: V \to W$ una transformación lineal. El rango o imagen de T es el conjunto de todas las imagenes de T en W.

$$R(T) = \{ w \in W \mid w = T(v) \; v \in V \}$$

Rango es el subconjunto de W formado por aquellos vectores que provienen de algún vector de V.

Bibliografía

* cb.mty.itesm.mx/ma1010/materiales/ma1010-17a.pdf.
* https://aga.frba.utn.edu.ar/nucleo-e-imagen-clasificacion-de-las-transformaciones-lineales/
* https://aga.frba.utn.edu.ar/conjunto-generador-li-y-ld-base-dimension/
* http://www.ehu.eus/juancarlos.gorostizaga/apoyo/esp_vectorial.htm
* https://youtu.be/Ej4ZOWsWK18
* https://youtu.be/57JZB-K25GY
* https://youtu.be/vEr91J2lPBw.
* https://sites.google.com/site/sistemasalgebralineal/unidad-4---espacios-vectoriales/base-y-dimension-de-un-espacio-vectorial
* https://personales.unican.es/campson/espacios_vectoriales2.pdf.
* https://es.slideshare.net/mobile/ManuelAlejandroGarza1/base-y-dimension-de-los-espacios-vectoriales.
* http://www.dicis.ugto.mx/profesores/chema/documentos/Algebra%20Lineal/Algebra_lineal_7.pdf
* http://www.portalhuarpe.com/Medhime20/Nuevos%20OA/Espacios%20Vectoriales/Algebra-Lineal/AlgebraOA3/Conjunto-vectores-Linealmente-independiente.xhtml.
* https://youtu.be/t3TSjB2U4b8
* https://youtu.be/vwROOPnCCrY
* https://youtu.be/2wGCJBtmPWI
* https://youtu.be/qTizwFb3UNY
* https://youtu.be/n6ZbDKquQoA
* https://youtu.be/1ojWxDYj0f8
* https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/analitica/vectores/combinacion-lineal-de-vectores.html
* https://youtu.be/_4czzEmN941
* https://youtu.be/Y4xwiJf8PKY
* https://youtu.be/UlsQir8CXas
* https://youtu.be/fBVxuCLXGDw
* https://www.slideshare.net/mobile/freddytipan1/espacios-vectorialesg2017
* https://sites.google.com/site/sistemasalgebralineal/Unidad-4---espacios-vectoriales/definicion-de-subespacio-vectorial-y-sus-propiedades