Termodynamika z elementami fizyki statystycznej
Ćwiczenia 2 (2 marca 2020)
własności cieplne cd.

Zadanie 1
Opór właściwy półprzewodnika zależy od temperatury jak: $\rho(T) = A\exp(\alpha/T)$, gdzie $\alpha = 0.01\mathrm{eV}/\mathrm{k}_B$. Jakie zmiany temperatury w okolicy 290 K można mierzyć takim termometrem zakładając, że potrafimy mierzyć opór z dokładnością do 0.01%. Przyjmij $\mathrm{k}_B = 8.62 \cdot 10^{-5}$ eV/K.

Rozwiązanie:
Mała zmiana temperatury ΔT będzie wiązać się z małą zmianą oporu właściwego $\Delta\rho = \rho(T + \Delta T) - \rho(T)$. Spróbujmy policzyć jaka wartość zmiany temperatury odpowiada granicy czułości naszego pomiaru $|\Delta\rho/\rho| = 0.01\%$.

$$\rho(T + \Delta T) = A\exp(\alpha/(T + \Delta T)) \approx A\exp(\alpha/T)\left(1 - \frac{\alpha\Delta T\alpha}{T^2}\right) = \rho(T)\left(1 - \frac{\alpha\Delta T}{T^2}\right). \tag{1}$$

W równaniu powyżej rozwinęcie exp do wyrazów liniowych jest uzasadnione, ponieważ zmiana temperatury ΔT jest małą wartością. Korzystając z definicji $\Delta\rho$ możemy przekształcić równanie (**??**) dostając wynik dla ΔT:

$$|\Delta T| = \frac{T^2}{\alpha}\left|\frac{\Delta\rho}{\rho}\right| = 0.01\%\frac{T^2}{\alpha} \approx 0.073K \tag{2}$$

W temperaturze $290K$ tym urządzeniem potrafimy zmierzyć zmiany temperatury większe niż $0.073K$.

Zadanie 2
Przy długości fali $\lambda = 0.7\,\mu$m porównano natężenie promieniowania dwóch, doskonale czarnych, źródeł promieniowania o różnych temperaturach. Temperatura pierwszego ciała wynosi $T_1 = 1068°$C (topnienie złota). Znaleźć temperaturę drugiego ciała T_2, jeśli stosunek natężeń promieniowania wynosił $I_\lambda(T_2)/I_\lambda(T_1) = 10$. Przyjmij $hc = 1.24$ eVμm

Rozwiązanie:
Z prawa promieniowanie Plancka wiemy, że natężenie promieniowania w danej długości fali wynosi:

$$I_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1}. \tag{3}$$

Zatem stosunek natężeń podany w zadaniu możemy zapisać jako:

$$R = \frac{I_\lambda(T_2)}{I_\lambda(T_1)} = \frac{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T_1}\right) - 1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T_2}\right) - 1}, \tag{4}$$

gdzie chwilowo zamiast wartości liczbowej stosunku natężeń wstawiliśmy zmienną R. W zakresie temperatur rozważanym w naszym zadaniu wartość funkcji exp w równaniu (**??**) jest wystarczająco duża, aby zaniedbać -1 w liczniku i mianowniku. Równanie upraszcza się do:

$$R = \exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\right). \tag{5}$$

Rozwiązując ze względu na T_2 dostajemy:

$$\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} = \frac{\lambda k_B}{hc}\log(R) \tag{6}$$

$$T_2 = \frac{1}{\frac{1}{T_1} - \frac{\lambda k_B}{hc}\log(R)} = \frac{T_1}{1 - \frac{\lambda k_B T_1}{hc}\log(R)} = 1578K = 1305°C. \tag{7}$$

Rozwiązując równanie (**??**) bez przybliżeń otrzymamy taki sam wynik:

$$T_2 = \frac{hc}{\lambda k_B}\ln^{-1}\left[\frac{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T_1}\right) - 1}{R} + 1\right] = 1578K \tag{8}$$

Zadanie 3 (Pirometr dwubarwny)
Wyznaczyć temperaturę ciała świecącego wiedząc, że stosunek natężeń promieniowania dla długości fal $\lambda_1 = 550\,\mathrm{nm}$ i $\lambda_2 = 700\,\mathrm{nm}$ wynosi $R = I_{\lambda_2}(T)/I_{\lambda_1}(T) = 1.286$. Przyjąć $T \sim 10^3$ K.

Rozwiązanie:
Znowu korzystamy z prawa Plancka (rów. (**??**)), tym razem przy ustalonej temperaturze:

$$R = \frac{I_{\lambda_2}(T)}{I_{\lambda_1}(T)} = \frac{\lambda_1^5}{\lambda_2^5} \frac{\exp\left(\frac{hc}{\lambda_1 k_B T}\right) - 1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda_2 k_B T}\right) - 1}. \tag{9}$$

Wartości funkcji exp w równaniu (**??**) znów są na tyle duże, że możemy zaniedbać wyrazy -1 w liczniku i mianowniku. Otrzymujemy proste równanie:

$$R = \frac{\lambda_1^5}{\lambda_2^5} \exp\left(\frac{hc}{Tk_B}\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)\right). \tag{10}$$

Bierzemy logarytm i upraszczamy równanie, aby dostać:

$$\log(R) = 5\log\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) + \frac{hc}{Tk_B}\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right), \tag{11}$$

$$T = \frac{\frac{hc}{k_B}\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)}{\log(R) - 5\log\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)} = 3845K \tag{12}$$

Wynik możemy porównać z rozwiązaniem numerycznym $T \approx 3858K$ w serwisie Wolphram Alpha (komenda solve przekracza czas obliczeń na darmowym koncie):

```
plot  (exp(26154/x) - 1)/(exp(20550/x) - 1)-4.29 from 3855 to 3860
```

Zadanie 4
Doskonale czarna kula (gwiazda) o temperaturze T i promieniu R otoczona jest czarną sferą (sferą Dysona) o promieniu r, której temperatura jest ustalona przez równowagę termodynamiczną. Jaka jest temperatura sfery? Rozważ następujące warianty:

1. wariant bardzo duża gwiazda - gwiazda pochłania całe promieniowanie pochodzące z wnętrza sfery, ale temperatura gwiazdy nie zmienia się;
2. wariant mała gwiazda - gwiazda jest tak mała, że promieniowanie pochłonięte przez nią jest zaniedbywalne
3. gwiazda ma temperaturę T przed nałożeniem osłony. Po nałożeniu osłony jej temperatura podniesie się, ale zakładamy, że energia produkowana wewnątrz gwiazdy nie zmieni się;

Rozwiązanie:

W każdym wariancie rozważamy bilans energetyczny sfery. Oznaczmy temperaturę sfery jako T_S, a sfera promieniuje na zewnątrz i do wewnątrz:

$$I_{out} = 2 \cdot 4\pi R^2 T_S^4 \tag{13}$$

Wariant **1**):
Sfera przyjmuje całe promieniowanie gwiazdy: $I_{in} = 4\pi r^2 T^4$, a gwiazda nie odbija promionowania sfery. Bilans energii sfery ma postać:

$$I_{in} = I_{out} \implies T_S = T\sqrt[4]{\frac{r^2}{2R^2}}. \tag{14}$$

Wariant **2**):
Sfera przyjmuje więc całe swoje promieniowanie do wewnątrz zatem, mamy:

$$I_{in} = 4\pi\left(r^2T^4 + R^2T_S^4\right) I_{in} = I_{out} \implies T_S = T\sqrt{\frac{r}{R}}. \tag{15}$$

Wariant **3**):
Liczymy na początek moc produkowaną w gwieździe; musi ona być równa energii wypromieniowanej w sytuacji bez osłony $I = 4\pi r^2 T^4$. Po dodaniu osłony temperatura gwiazdy wzrośnie. Do tego policzenie dokładnego bilansu energetycznego samej osłony jest bardzo trudnym zagadnieniem geometrycznym. Możemy za to rozważyć bilans energetyczny całego układu gwiazda+osłona. Moc dostarczana do układu pochodzi z reakcji wewnątrz gwiazdy i ma niezmiennie moc $I_{in} = 4\pi r^2 T^4$. Musi ona być równa strumieniowi kierowanemu na zewnątrz osłony $I_{out} = 4\pi R^2 T_S^4$. Dostajemy zatem:

$$I_{in} = I_{out} \implies T_S = T\sqrt{\frac{r}{R}}. \tag{16}$$

Zadanie 5 (Termos próżniowy)

Dane są dwie nieskończone doskonale czarne płaszczyzny o temperaturach $T_1 = 300\,\mathrm{K}$ i $T_2 = 4\,\mathrm{K}$. Obliczyć strumień energii (czyli moc na jednostkę powierzchni) przesyłaną między nimi. Rozważyć trzecią płaszczyznę (osłonę) między nimi, która odbija $R = 95\%$ promieniowania. Obliczyć temperaturę osłony i strumień energii pomiędzy płaszczyznami. Przyjmij $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}$ W/m^{2}K^4

Rozwiązanie:

W wariancie bez środkowej płyty sytuacja jest bardzo prosta. Każda płyta emituje promieniowanie o strumieniu σT^4, które absorbowane jest na przeciwnej płycie. Zatem strumień energii między płytami wynosi:

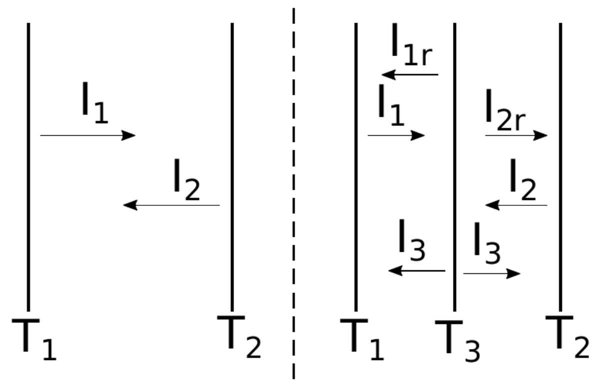
$$\Delta I = \sigma(T_1^4 - T_2^4) = 459\frac{W}{m^2}. \tag{17}$$

Po dodaniu środkowej płyty na początek policzmy temperaturę T_3 analizując bilans energetyczny środkowej płyty. **W każdą stronę** emituje ona promieniowanie o strumieniu $I_3 = (1-R)\sigma T_3^4$; absorbuje za to $(1-R)\sigma(T_1^4 + T_2^4)$. Dostajemy zatem równanie:

$$2(1-R)\sigma T_3^4 = (1-R)\sigma(T_1^4 + T_2^4), \quad T_3 = \sqrt[4]{\frac{T_1^4 + T_2^4}{2}} = 252K. \tag{18}$$

Co ciekawe wynik ten nie zależy od R.

Możemy teraz policzyć strumień energii między płytami. Między lewą a środkową płytą mamy:



Rysunek 1: Po lewej: dwie płyty; każda z nich emituje strumień promieniowania w całości absorbowany przez płytę po przeciwnej stronie. Po prawej: dodatkowa płyta, która odbija część promieniowania: $I_{1/2r}$.

$$\Delta I_1 = \sigma(T_1^4 - RT_1^4 - (1-R)T_3^4) = \sigma(1-R)(T_1^4 - T_3^4) = \sigma(1-R)\frac{(T_1^4 - T_2^4)}{2} = 11.5\frac{W}{m^2}. \tag{19}$$

Dla sprawdzenia policzmy także strumień między środkową a prawą płytą:

$$\Delta I_2 = \sigma(-T_2^4 + RT_2^4 + (1-R)T_3^4) = \sigma(1-R)(T_3^4 - T_2^4) = \sigma(1-R)\frac{(T_1^4 - T_2^4)}{2}. \tag{20}$$

Zgodnie z oczekiwaniami (jesteśmy w stanie równowagi, więc środkowa płyta nie magazynuje energii) otrzymaliśmy dokładnie ten sam wynik po obu stronach środkowej płyty. Zauważmy, że gdy środkowa płyta jest doskonale czarna ($R = 0$), strumień energii spada dwukrotnie.

Zadanie 6
Korzystając z prawa promieniowania Plancka wykaż prawo Stefana-Boltzmanna: $I(T) = \sigma T^4$. Całkę jaka pojawi się w obliczeniach oznacz jako σ i nie wykonuj jej explicite.

Rozwiązanie:
Całkowite natężenie promieniowania otrzymamy poprzez całkę po długościach fali z równania (**??**):

$$I(T) = \int_0^\infty I_\lambda(T) d\lambda = \int_0^\infty \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1} d\lambda. \tag{21}$$

Nie chcemy policzyć dokładnej wartości całki (**??**). Zamiast tego możemy wyciągnąć poza całkę zależność od temperatury, a całkę zostawić jako współczynnik stałej fizycznej, którą można zmierzyć doświadczalnie. W tym celu wprowadzamy bezwymiarową zmienną całkowania:

$$x = \frac{hc}{\lambda k_B T}, \quad \lambda = \frac{hc}{x k_B T}, \quad d\lambda = -\frac{hc dx}{k_B T x^2}. \tag{22}$$

Po zamianie zmiennych natężenie promieniowania przyjmuje postać:

$$I(T) = 2hc^2 \int_0^\infty \left(\frac{x k_B T}{hc}\right)^5 \frac{1}{\exp(x) - 1} \frac{hc dx}{k_B T x^2} = 2\frac{k_B^4 T^4}{h^3 c^2} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{\exp(x) - 1} = \sigma T^4. \tag{23}$$

Otrzymaliśmy prawo Stefana-Boltzmanna ze stałą $\sigma = 2\frac{k_B^4}{h^3c^2} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{\exp(x)-1}$.

Zadania domowe

Zadanie domowe 1

Zależność ciśnienia równowagi fazy ciekłej i lotnej opisuje w przybliżeniu wzór: $p = Ae^{-\alpha/T}$.
Dla wody: $p_3 = 612\,\mathrm{Pa}$, $T_3 = 273.16\,\mathrm{K}$, $p_{\mathrm{wrzenia}} = 1.013 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$, $T_{\mathrm{wrzenia}} = 373.2\,\mathrm{K}$.
Wyznacz stałe A i α. Oblicz w jakiej temperaturze woda wrze na wysokościach:

a) 2500 m – Rysy ($p = 0.75\,\mathrm{bar}$)
b) 4800 m – Mont Blanc ($p = 0.55\,\mathrm{bar}$)
c) 8850 m – Mont Everest ($p = 0.33\,\mathrm{bar}$).

Przy jakim ciśnieniu woda wrze w temperaturze 20°C ? −3°C ?

Zadanie domowe 2

Do budowy termoregulatorów, ograniczników temperatury i tym podobnych urządzeń stosuje się często urządzenie zwane bimetalem. Jest to pasek złożony z dwóch spojonych ze sobą warstw metali o różnych współczynnikach rozszerzalności. Pasek taki przy ogrzewaniu będzie się wyginał i może w ten sposób zamykać lub otwierać obwód elektryczny. Dany jest bimetal o grubości d, złożony z metali o współczynnikach rozszerzalności liniowej α_1 i α_2 ($\alpha_1 > \alpha_2$). W temperaturze T_0 bimetal jest prosty. Znajdź promień krzywizny bimetalu po ogrzaniu go o ΔT. Wykonaj obliczenia dla: $\alpha_1 = 1.8 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1}$ (mosiądz), $\alpha_2 = 1.2 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1}$ (stal), grubość $d = 1\,\mathrm{mm}$, długość $l_0 = 5\,\mathrm{cm}$, $\Delta T = 100\,\mathrm{K}$.

Zadanie domowe 3

Opór właściwy miedzi zależy od temperatury jak: $\rho(T) = A\left(\frac{T}{T_0}\right)\tanh^3\left(\frac{T}{T_0}\right)$; $T_0 = 87\,\mathrm{K}$. W temperaturze 290 K miedziany czujnik ma opór $10\,\Omega$.

1. Jaki opór ma ten czujnik w temperaturze 700 K?
2. Jak zmieni się opór dla temperatury 701 K? Ile wynosi $\Delta R/R$?
3. Jaki jest opór w temperaturze 20 K?
4. Jak zmieni się opór dla temperatury 21 K? Ile wynosi $\Delta R/R$?

Zadanie rozwiąż rachunkiem bezpośrednim oraz korzystając z odpowiednich rozwinięć.

Zadanie domowe 4

Oszacuj całkowitą moc jaką wypromieniowujesz. Opisz przyjęte założenia i zastosowane przybliżenia. Oszacuj wydatek energetyczny organizmu na utrzymanie temperatury ciała (różnicę pomiędzy mocą wypromieniowywaną i otrzymywaną) jeżeli znajdujesz się w otoczeniu o temperaturze 20°C. Jakiej długości fali odpowiada maksimum rozkładu energii?

Zadanie domowe 5

Sonda kosmiczna o kształcie kuli i doskonale czarnej powierzchni ma zbadać okolice Merkurego. Aby uniknąć przegrzania sondy wyposażono ją w "ekran termiczny" - cienką osłonkę o kształcie półsfery zrobioną z metalu o współczynniku odbicia r. Osłona założona jest bardzo blisko powierzcni sondy, ale nie styka się z nią. Sonda zwrócona jest osłoniętą stroną do Słońca.

1. Znajdź wyrażenie na temperaturę sondy w funkcji jej odległości od Słońca i porównaj z temperaturą sondy pozbawionej osłony
2. Dobierz współczynnik odbicia r tak aby w pobliżu Merkurego sonda miała temperaturę $T_{\mathrm{sondy}} = 300\,\mathrm{K}$. Jaka jest wtedy temperatura osłony?

Temperatura Słońca wynosi $T_\odot = 5800\,\mathrm{K}$, promień Słońca $R_\odot = 7 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$, odległość Merkurego od Słońca $d = 5.8 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}$. Zakładamy, że cała powierzchnia sondy ma tę samą temperaturę.

Zadanie domowe 6

Dwie równoległe, duże, doskonale czarne płyty umieszczone są w próżni i mają temperatury T_1 i T_2. Męczy te płyty wstawiamy równolegle do nich n dużych, cienkich, doskonale czarnych płyt. Jaka jest temperatura i-tej płyty? Ile razy, w wyniku wstawienia płytek, zmniejszył się strumień energii pomiędzy płaszczyznami?