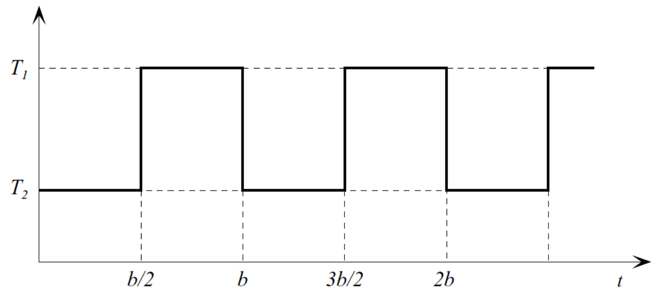
Termodynamika z elementami fizyki statystycznej
Ćwiczenia 1 (1 marca 2021)

Dochodzenie do równowagi termicznej, rozszerzalność cieplna

Zadanie 1
Metalowy blok o temperaturze początkowej T_1 umieszczony został w otoczeniu, którego temperatura przełączana jest regularnie pomiędzy dwiema ustalonymi wartościami: T_1 i T_2 ($T_1 > T_2$). Jak zmienia się temperatura bloku w funkcji czasu? Znajdź maksymalną i minimalną temperaturę bloku w stanie ustalonym (tzn. po bardzo dużej liczbie przełączeń) i przedyskutuj jako funkcję okresu b.



Rozwiązanie:
Stosujemy równanie Newtona

$$\frac{dT}{dt} = -\alpha(T - T_{\text{ot}}). \tag{1}$$

W przypadku gdy T_{ot} jest stałe dostajemy

$$T(t) = Ae^{-\alpha t} + T_{\text{ot}}, \tag{2}$$

gdzie A jest stałą którą możemy określić na podstawie warunku początkowego: $A = T(0) - T_{\text{ot}}$. Ostatecznie

$$T(t) = (T(0) - T_{ot})e^{-\alpha t} + T_{\text{ot}}. \tag{3}$$

Zastosujemy teraz to rozwiązanie dla T_{ot} przełączanej pomiędzy wartościami T_1 i T_2 zgodnie z wykresem. Załóżmy, że w danej chwili t otoczenie jest w temperaturze T_2. To znaczy, że $Nb \leqslant t \leqslant Nb + b/2$ dla liczby naturalnej N. Dodatkowo oznaczmy przez $t' = t - Nb$ czas od ostatniego przełączenia. Zgodnie z wzorem (**??**) dostajemy

$$T(t') = (T_{Nb} - T_2)e^{-\alpha t'} + T_2, \tag{4}$$

gdzie T_{Nb} jest temperaturą w chwili Nb, czyli na początku podcyklu. Na koniec tego podcyklu $t' = b/2$ i temperatura wynosi

$$T_{Nb+b/2} = (T_{Nb} - T_2)e^{-\alpha b/2} + T_2. \tag{5}$$

W tym momencie temperatura otoczenia przełącza się na T_1. Oznaczmy przez $t'' = t - (Nb + b/2)$ czas od momentu przełączenia. Ponownie, zgodnie z (**??**), otrzymujemy

$$T(t'') = (T_{Nb+b/2} - T_1)e^{-\alpha t''} + T_1, \tag{6}$$

więc na koniec tego podcyklu temperatura wynosi

$$T_{Nb+b} = (T_{Nb+b/2} - T_1)e^{-\alpha b/2} + T_1. \tag{7}$$

Możemy wstawić do tego wzoru $T_{Nb+b/2}$ by otrzymać temperaturę po pełnym cyklu zależną od temperatury na początku tego cyklu. Dostajemy

$$T_{Nb+b} = \Big((T_{Nb} - T_2)e^{-\alpha b/2} + T_2 - T_1\Big)\, e^{-\alpha b/2} + T_1. \tag{8}$$

Pytanie o termalizacje: jak informacja o warunkach początkowych ginie w tej sytuacji?
Rozważmy teraz stan ustalony, czyli po dużej liczbie przełączeń. Spodziewamy się, że po dużej liczbie przełączeń, układ po odbyciu pełnego cyklu wraca do temperatury na początku cyklu, czyli

$$T_{(N+1)b} = T_{Nb}. \tag{9}$$

Dostajemy równanie

$$T_{Nb} = \left((T_{Nb} - T_2)e^{-\alpha b/2} + T_2 - T_1\right) e^{-\alpha b/2} + T_1. \tag{10}$$

Grupując wyrazy z T_{Nb}, T_1 i T_2 dostajemy

$$T_{Nb}(1 - e^{-\alpha b}) = T_2\, e^{-\alpha b/2}(1 - e^{-\alpha b/2}) + T_1(1 - e^{-\alpha b/2}) \tag{11}$$

i ostatecznie

$$T_{Nb} = \frac{T_1 + T_2\, e^{-\alpha b/2}}{1 + e^{-\alpha b/2}}. \tag{12}$$

Możemy też łatwo wyznaczyć temperaturę w stanie ustalonym w połowie cyklu. Wstawiając właśnie wyznaczone T_{Nb} do wzoru na $T_{Nb+b/2}$ dostajemy

$$T_{Nb+b/2} = \frac{T_2 + T_1\, e^{-\alpha b/2}}{1 + e^{-\alpha b/2}}. \tag{13}$$

Dostajemy więc, że w stanie ustalonym temperatura zmienia się pomiędzy $T_{\min} = T_{Nb+b/2}$ a $T_{\max} = T_{Nb}$. Zbadajmy na koniec jak te dwie temperatury zależą od α i b. Mamy dwie sytuacje. Gdy $\alpha b \ll 1$ wtedy $T_{\min} = T_{\max} = (T_1 + T_2)/2$. Natomiast gdy $\alpha b \gg 1$ to $T_{\min} = T_2$ a $T_{\max} = T_1$.
Zadanie to możemy też rozwiązać wyznaczając T_{Nb} jako funkcje warunku początkowego. W tym celu policzmy T_b, T_{2b} i tak dalej z (**??**). Dostajemy

$$T_b = ((T_1 - T_2)e^{-\alpha b/2} + T_2 - T_1)e^{-\alpha b/2} + T_1 = (T_1 - T_2)(1 - e^{-\alpha b/2} + e^{-\alpha b}) + T_2, \tag{14}$$
$$T_{2b} = ((T_1 - T_2)(1 - e^{-\alpha b/2} + e^{-\alpha b})e^{-\alpha b/2} + T_2 - T_1)e^{-\alpha b/2} + T_2 \tag{15}$$
$$= (T_1 - T_2)(1 - e^{-\alpha b/2} + e^{-\alpha b} - e^{-3\alpha b/2} + e^{-2\alpha b}) + T_2. \tag{16}$$

Zgadujemy, że T_{Nb} przyjmuje postać

$$T_{Nb} = T_2 + (T_1 - T_2)\sum_{j=0}^{N} q^j, \tag{17}$$

gdzie $q = -e^{-\alpha b/2}$. Mamy więc szereg geometryczny który prowadzi do

$$T_{Nb} = T_2 + (T_1 - T_2)\frac{1 - q^N}{1 - q} = T_2 + (T_1 - T_2)\frac{1 + e^{-N\alpha b/2}}{1 + e^{-\alpha b/2}}. \tag{18}$$

W granicy dużej liczby przełączeń N jest duże więc możemy zaniedbać ostatni wyraz. Po uporządkowaniu, dostajemy

$$T_{Nb} = \frac{T_1 + T_2 e^{-\alpha b/2}}{1 + e^{-\alpha b/2}}. \tag{19}$$

czyli ten sam wynik co poprzednio.

Zadanie 2
Blok metalowy umieszczony jest w otoczeniu, którego temperatura zmienia się według wzoru:

$$T_{ot}(t) = T_\circ + A\cos(\omega t).$$

Początkowa temperatura bloku wynosi $T_\circ$. Znajdź zależność temperatury bloku od czasu w stanie ustalonym.

Rozwiązanie: Ponownie korzystamy z równania Newtona

$$\frac{dT(t)}{dt} = -\alpha(T(t) - T_{\mathrm{ot}}(t)). \tag{20}$$

Tym razem, temperatura otoczenia zmienia się w czasie. Postulujemy rozwiązanie w postaci

$$T(t) = Ce^{-\alpha t} + K\sin(\omega t) + L\cos(\omega t) + T_0. \tag{21}$$

Wstawiając do równania i porównując wyrazy przy $\sin(\omega t)$ i $\cos(\omega t)$ dostajemy dwa równania

$$\alpha(L - A) = -\omega K \tag{22}$$
$$\alpha K = \omega L. \tag{23}$$

Rozwiązując, znajdujemy

$$L = \frac{\alpha^2 A}{\omega^2 + \alpha^2}, \qquad K = \frac{\alpha\omega}{\omega^2 + \alpha^2} A. \tag{24}$$

Ostatnią stałą C znajdujemy z warunku początkowego

$$T_0 = T(0) = C + T_0 + L, \tag{25}$$

z czego wynika, że $C = -L$.
Dla dużych czasów wyraz eksponencjalny możemy zaniedbać więc

$$T(t) = T_0 + \frac{\alpha A}{\omega^2 + \alpha^2}\left(\omega\sin(\omega t) + \alpha\cos(\omega t)\right). \tag{26}$$

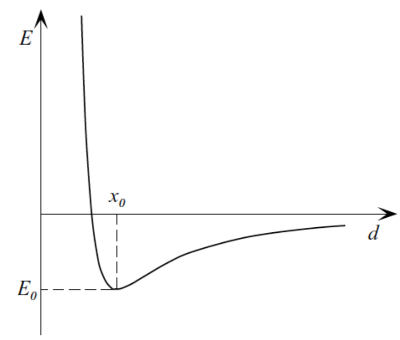
Zbadajmy teraz co się dzieje w zależności od ω i α. Gdy $\omega \ll \alpha$ wtedy $T(t) = T_0 + A\cos(\omega t)$. Natomiast gdy $\omega \gg \alpha$ wtedy $T(t) = T_0$.
Rozwiązanie możemy też przedstawic w następującej postaci

$$T(t) = T_0 + \frac{\alpha A}{\sqrt{\omega^2 + \alpha^2}}\left(\cos\phi\sin(\omega t) + \sin\phi\cos(\omega t)\right) = T_0 + \frac{\alpha A}{\sqrt{\omega^2 + \alpha^2}}\sin(\omega t + \phi), \tag{27}$$

gdzie zdefiniowaliśmy

$$\tan\phi = \frac{\alpha}{\omega}. \tag{28}$$

Zadanie 3



Energia potencjalna oddziaływania dwóch atomów danej substancji jest przedstawiona na rysunku obok. Znaleźć średnią odległość między atomami odpowiadającą energii $E > E_0$, zakładając, że:

1. w pobliżu punktu równowagi $x = x_0$ energia potencjalna daje się przybliżyć wzorem
$$E_p(x) \approx a(x - x_0)^2 - b(x - x_0)^3 + E_0,$$
gdzie a i b są stałymi dodatnimi,
2. anharmoniczna poprawka trzeciego rzędu jest mała, tzn. $b|x - x_0| \ll a$,
3. punkty zwrotne $x_{\min}$ i $x_{\max}$ drgań bardzo niewiele różnią się od punktów zwrotnych oscylatora harmonicznego $x^h_{\min}$ i $x^h_{\max}$ (dla $b = 0$),
4. średnia odległość międzyatomowa w czasie drgań może być przybliżona przez średnią arytmetyczną $\langle x\rangle \approx \frac{x_{\min}+x_{\max}}{2}$.

Rozwiązanie:
Energia całkowita dwóch atomów składa się z sumy energii potencjalnej i kinetycznej. W punkcie zwrotu energia kinetyczna wynosi zero, więc energia potencjalna jest równa całkowitej energii E. Oznaczmy przez $\Delta E = E - E_0$ względną energie układu względem dna studni potencjału. Załóżmy na początek, że potencjał jest harmoniczny. Wtedy

$$E(x_{\min/\max}) = a(x^h_{\min/\max} - x_0)^2 + E_0, \tag{29}$$

lub

$$\Delta E = a(x^h_{\mathrm{min/max}} - x_0)^2. \tag{30}$$

Rozwiązując dla $x^h_{\mathrm{min/max}}$ dostajemy

$$x^h_{\mathrm{min/max}} = x_0 \mp \sqrt{\frac{\Delta E}{a}}, \tag{31}$$

i dla średniej odległości międzyatomowej dostajemy $\langle x \rangle = x_0$, czyli odległość nie zależy od energii układu! Zobaczmy co się stanie jak dodamy anharmoniczne poprawki.
Oznaczmy nowe punktu zwrotu przez $x_{\mathrm{min/max}}$ i załóżmy, że

$$x_{\mathrm{min/max}} = x^h_{\mathrm{min/max}} + \epsilon_{\mathrm{min/max}}, \tag{32}$$

z $\epsilon_{\mathrm{min/max}}$ małym. Dostajemy

$$\Delta E = a(x^h_{\mathrm{min/max}} - x_0 + \epsilon_{\mathrm{min/max}})^2 - b(x^h_{\mathrm{min/max}} - x_0 + \epsilon_{\mathrm{min/max}})^3. \tag{33}$$

Skorzystamy, teraz z faktu, że ϵ jest małą wielkością.

$$(x+\epsilon)^2 = x^2 + 2x\epsilon + \epsilon^2 = x^2 + 2x\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{34}$$

$$(x+\epsilon)^3 = x^3 + 3x^2\epsilon + 3x\epsilon^2 + \epsilon^3 = x^3 + 3x^2\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{35}$$

Z dokładnością $\epsilon^2_{\mathrm{min/max}}$ dostajemy

$$0 = \mp 2\sqrt{a\Delta E}\epsilon_{\mathrm{min/max}} \pm b\left(\frac{\Delta E}{a}\right)^{3/2} - 3b\sqrt{\frac{\Delta E}{a}}\epsilon_{\mathrm{min/max}}. \tag{36}$$

Co prowadzi do

$$\epsilon_{\mathrm{min/max}} = \frac{b\frac{\Delta E}{a}}{2a \pm 3b\sqrt{\frac{\Delta E}{a}}}. \tag{37}$$

Wzór ten możemy wciąż trochę uprościć zauważając że, $a \gg b|x - x_0| = b\sqrt{\Delta E/a}$. Prowadzi to ostatecznie do

$$\epsilon_{\mathrm{min/max}} = \frac{b\Delta E}{2a^2}, \tag{38}$$

natomiast średnia odległość międzyatomowa wynosi

$$\langle x \rangle = x_0 + \frac{b\Delta E}{2a^2}. \tag{39}$$

Widzimy, że dzięki anharmoniczności potencjału ($b \neq 0$) średnia odległość między atomami rośnie wraz z ich energią. Ponieważ energia wewnętrzna substancji rośnie wraz z temperaturą, możemy wywnioskować że wraz ze wzrostem temperatury ciała będą się rozszerzać. Jest to zjawisko *rozszerzalności cieplnej.*

Zadanie 4
Wykazać, że dla materiału anizotropowego zachodzi związek: $\gamma = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, gdzie γ jest współczynnikiem rozszerzalności objętościowej danego materiału, zaś α_i ($i = 1, 2, 3$) są współczynnikami rozszerzalności liniowej wzdłuż 3 nierównoważnych (i wzajemnie prostopadłych) kierunków tego materiału.

Rozwiązanie: Współczynnik rozszerzalności objętościowej definiujemy zmianę objętości materiału pod wpływem zmiany temperatury podzieloną przez początkową objętość, to znaczy

$$\gamma = \frac{1}{V}\frac{dV}{dT}. \tag{40}$$

W analogiczny sposób możemy zdefiniować współczynniki rozszerzalności liniowej

$$\alpha_i = \frac{1}{L_i}\frac{dL_i}{dT}. \tag{41}$$

Korzystając ze związku $V = L_1 L_2 L_3$ dostajemy

$$\gamma = \frac{1}{V}\frac{dV}{dT} = \frac{1}{V}\left(L_1 L_2 \frac{dL_3}{dT} + L_3 L_1 \frac{dL_2}{dT} + L_2 L_3 \frac{dL_1}{dT}\right) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3. \tag{42}$$

Alternatywnie, współczynniki rozszerzalności mogą być zdefiniowane jako

$$\gamma = \frac{1}{V_0}\frac{dV}{dT}, \qquad \alpha_i = \frac{1}{L_{i,0}}\frac{dL_i}{dT}, \tag{43}$$

gdzie V_0 i $L_{i,0}$ są wzorcowymi wymiarami. Wtedy

$$V \approx V_0 + \gamma V_0 \Delta T, \tag{44}$$

oraz

$$L_i \approx L_{i,0} + \alpha_i L_{i,0} \Delta T. \tag{45}$$

Nowa objętość wynosi więc

$$\begin{aligned} V &= L_1 L_2 L_3 = L_{1,0} L_{2,0} L_{3,0} + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) L_{1,0} L_{2,0} L_{3,0} \Delta T + A \cdot (\Delta T)^2 + B \cdot (\Delta T)^3 \\ &\approx V_0 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) V_0 \Delta T. \end{aligned} \tag{46}$$

Porównując ze wzorem (**??**) dostajemy ponownie, że $\gamma = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.

Zadanie 5

Odległość między słupami elektrycznymi wynosi 50 m. O ile zmienia swoją długość zawieszony między nimi cienki drut miedziany, jeżeli temperatura zmienia się od -25°C do +35°C? Współczynniki rozszerzalności liniowej miedzi wynosi $\alpha = 8.9 \cdot 10^{-6}\mathrm{K}^{-1}$. Oszacuj zmianę zwisania drutu.

W przybliżeniu liniowym, długość drutu w temperaturze T zmieni się o

$$\Delta L = L_0 \gamma \Delta T, \tag{47}$$

gdzie L_0 jest długością kabla w początkowej temperaturze a ΔT jest różnicą temperatur. Podstawiając dane z treści zadania, dostajemy

$$\Delta L = 50 \times 60 \times 8.9 \times 10^{-6}\,\mathrm{m} = 0.026\,\mathrm{cm}. \tag{48}$$

O tyle wydłuży się drut. O ile głębiej będzie zwisał? Możemy to oszacować, zakładając, że początkowo drut jest napięty, a po zmianie temperatury tworzy trójkąt. Z twierdzenie Pitagorasa mamy

$$\frac{L_0^2}{4} + x^2 = \frac{(L_0 + \Delta L)^2}{4} \approx \frac{L_0^2}{4} + \frac{L_0 \Delta L}{2}, \tag{49}$$

z czego wynika, że

$$x = \sqrt{\frac{L_0 \Delta L}{2}} \approx 0.82\,\mathrm{m} \tag{50}$$

Zadanie 6

Termometr rtęciowy składa się ze szklanego, kulistego zbiorniczka z rtęcią połączonego ze szklaną kapilarą. W temperaturze $T_0 = 0°\mathrm{C}$ pole przekroju poprzecznego kapilary wynosi A_0, a zbiorniczek ma objętość V_0 i jest całkowicie wypełniony rtęcią. Współczynnik rozszerzalności objętościowej rtęci wynosi β, a współczynnik rozszerzalności liniowej szkła wynosi α. Jaka będzie długość słupa rtęci w kapilarze w temperaturze T? Przedyskutuj wynik.

Rozwiązanie: Oznaczmy przez $\Delta T = T - T_0$ różnicę temperatur. Przyjmijmy, że szklana bańka rozszerza się tak jak szklana kula. Wtedy objętość rtęci i szklanej bańki w nowej temperaturze wynoszą

$$V_r = V_0(1+\beta\Delta T), \qquad V_s = V_0(1+3\alpha\Delta T). \tag{51}$$

Oczekujemy, że rtęć rozszerzy się bardziej niż szklana bańka, to znaczy $\beta > 3\alpha$ i rtęć nie mieści się już wewnątrz bańki. Dodatkowo objętość $\Delta V = V_r - V_s$ musi wypełnić kapilarę. Dodatkowa objętość wynosi

$$\Delta V = V_0(\beta - 3\alpha)\Delta T. \tag{52}$$

W kapilarze o przekroju A_0, objętość ΔV zajmuję wysokość h daną przez

$$h = \frac{\Delta V}{A_0} = \frac{V_0}{A_0}(\beta - 3\alpha)\Delta T. \tag{53}$$

Zaniedbaliśmy tu zmianę przekroju kapilary przy zmianie temperatury. Dodatkowo, założyliśmy, że szklana bańka rozszerza się tak jak szklana kula. Jak to możemy uzasadnić? Rozważymy dwa model tego co dzieje się z bańka pod wpływem wzrostu temperatury.

- Przyjmijmy najpierw, że w wyniku wzrostu temperatury zwiększa się powierzchnia bańki z S_0 do S_1

  $$S_1 = S_0(1+2\alpha\Delta T). \tag{54}$$

  Jaki wpływ będzie miał ten wzrost powierzchni na objętość? Zakładając, że bańka wciąż pozostaje sferą to możemy początkową i końcową powierzchnie wyrazić za pomocą promienia

  $$S_0 = 4\pi r_0^2, \qquad S_1 = 4\pi r_1^2. \tag{55}$$

  W związku z tym, stosunek objętości wynosi

  $$\frac{V_1}{V_0} = \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^3 = \left(\frac{S_1}{S_0}\right)^{3/2} = (1+2\alpha\Delta T)^{3/2} \approx (1+3\alpha\Delta T). \tag{56}$$

- W drugim modelu, przyjmijmy że dodatkowo zmienia się grubość szklanej bańki. Oznaczmy początkową grubość przez d_0 a końcową przez d_1. Wtedy

  $$d_1 = d_0(1+\alpha\Delta T). \tag{57}$$

  Początkowo naskórek zajmuje objętość $S_0 d_0$. Po podgrzaniu jego objętość wynosi

  $$V_1^{\text{naskórek}} = S_0 d_0(1+\alpha\Delta T)(1+2\alpha\Delta T) \approx 4\pi r_0^2 d_0(1+3\alpha\Delta T+\dots). \tag{58}$$

  Nowa objętość bańki wynosi więc

  $$V_1 = \frac{4}{3}\pi(r_0+d_0)^3(1+3\alpha\Delta T). \tag{59}$$

  Natomiast objętość wnętrza to

  $$V_1^{\text{wnętrze}} = V_1 - V_1^{\text{naskórek}} = \frac{4}{3}\pi(r_0^3 + 3r_0^2 d_0 + \dots)(1+3\alpha\Delta T) - 4\pi r_0^2 d_0(1+3\alpha\Delta T) \tag{60}$$

  $$= \frac{4}{3}\pi r_0^3(1+3\alpha\Delta T) + \mathcal{O}(d_0^2). \tag{61}$$

Zadania domowe

Zadanie domowe 1

Blok metalowy znajduje się w otoczeniu którego temperatura zmienia się w czasie zgodnie z wzorem:

$$T_1 = T_0 + A\exp(-\beta t),$$

gdzie stałe $A, \beta > 0$. Temperatura początkowa bloku wynosi T_0. Znaleźć zależność temperatury bloku od czasu i przedyskutować ją jako funkcję β. Po jakim czasie blok osiągnie maksymalną temperaturę?

Zadanie domowe 2

Blok metalowy o temperaturze początkowej T_0 umieszczono na czas t_1 w otoczeniu, którego temperatura wynosi $T_0 - \Delta T$. Na jaki czas t_2 należy umieścić następnie blok w otoczeniu o temperaturze $T_0 + \Delta T$, aby znów osiągnął temperaturę T_0? Czy wynik zależy od ΔT? Zbadaj wynik w granicach $t_1 \to 0$ i $t_1 \to \infty$. Który z czasów jest krótszy: t_1 czy t_2?

Zadanie domowe 3

W lodówce, w temperaturze 0°C przechowywana jest butelka coli. Zmierzono, że w godzinę po wyjęciu jej z lodówki i pozostawieniu w otoczeniu o temperaturze 20°C temperatura płynu osiąga 14°C.

a) Ile wynosi czas relaksacji temperatury w tej sytuacji?
b) Na ile minut przed otwarciem butelki należy wyjąć colę z lodówki, jeżeli chcemy aby miała ona optymalną do picia temperaturę 4°C?

Zadanie domowe 4

Punktowa masa m drga w jednym wymiarze w polu sił zachowawczych z energią potencjalną $E_p(x) = D\left(e^{-a(x-x_\circ)} - 1\right)^2$. Jest to tzw. potencjał Morse'a, oddający podstawowe własności potencjałów cząsteczkowych. Zbadaj jak punkty zwrotne takiego oscylatora zależą od energii całkowitej, która nieznacznie przekracza minimalną energię potencjalną. W tym celu rozwiń funkcję $E_p(x)$ w szereg Taylora wokół minimum, a następnie zachowaj tylko pierwszy nieznikający człon anharmoniczny. Ponadto załóż, że punkty zwrotne niewiele różnią się od rozwiązania dla oscylatora harmonicznego.

Zadanie domowe 5

Jakie długości w temperaturze $T_1 = 0$°C powinny mieć dwa pręty: stalowy i miedziany, aby w dowolnej temperaturze pręt stalowy był dłuższy od pręta miedzianego o $d = 5\,\mathrm{cm}$? Współczynnik rozszerzalności liniowej dla stali wynosi $\alpha_{\mathrm{stali}} = 1.2 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1}$, a dla miedzi $\alpha_{\mathrm{miedzi}} = 1.6 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1}$. Założyć, że współczynniki te nie zależą od temperatury.