ĆW 1 ZAD. 1.

z jednej strony: $\Delta Q = mC\Delta T$

z drugiej strony: $\Delta Q = K(T_{OT}-T)\Delta t$

$$mC\Delta T = K(T_{OT}-T)\Delta t$$

$$\downarrow$$

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{K}{mC}(T-T_{OT})$$

$\frac{dT}{dt} = -\alpha(T-T_{OT})$ – równanie Newtona, prawo stygnięcia Newtona.

Rozważmy $T_{OT} = const \longrightarrow \dot{T} = -\alpha T + \alpha T_{OT}$ Równanie różniczkowe pierwszego rzędu, liniowe, niejednorodne

RORJ: $\frac{dT}{dt} = -\alpha T \to \frac{dT}{T} = -\alpha dt \,/\int \to \ln T = -\alpha t + C_1 \to T = e^{-\alpha t + C_1}$

$T = Ae^{-\alpha t}$

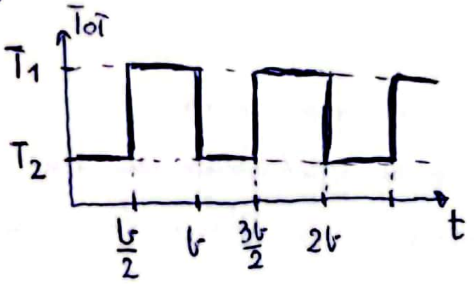
RSRN: najprostszy przypadek $\to T = const \to \dot{T} = 0 \to 0 = -\alpha T + \alpha T_{OT} \to T = T_{OT}$

RORN = RORJ + RSRN $\to T(t) = Ae^{-\alpha t} + T_{OT}$

stała z warunku początkowego: $T(0) = A + T_{OT} \to A = T(0) - T_{OT}$

$$\boxed{T(t) = (T(0) - T_{OT})e^{-\alpha t} + T_{OT}}$$

W naszym zadaniu T_{OT} się zmienia, ale w zadanych przedziałach czasu jest stałe! Można więc korzystać z powyższego równania.



Załóżmy, że w danej chwili czasu $T_{OT} = T_2$

czyli $N\tau \leqslant t \leqslant N\tau + \frac{1}{2}\tau$

i oznaczmy przez t' czas od ostatniego przełączenia tzn. $t' = t - N\tau$

Stosując równanie z ramki: $T(t') = (T_{N\tau} - T_2)e^{-\alpha t'} + T_2$

Pod koniec tego cyklu (tuż przed przełączeniem temperatury otoczenia na T_1)

temperatura wynosi: $\boxed{T_{N\tau+\frac{1}{2}\tau} = (T_{N\tau} - T_2)e^{-\alpha\tau/2} + T_2}$

Teraz jesteśmy w chwili czasu kiedy $T_{OT} = T_1$ czyli $N\tau + \frac{1}{2}\tau \leqslant t \leqslant N\tau + \tau$

i oznaczmy przez t'' czas od ostatniego przełączenia tzn $t'' = t - N\tau - \frac{1}{2}\tau$

Ponownie stosujemy równanie z ramki i dostajemy: $T(t'') = (T_{N\tau+\frac{1}{2}\tau} - T_1)e^{-\alpha t''} + T_1$

Na koniec cyklu $\boxed{T_{N\tau+\tau} = (T_{N\tau+\frac{1}{2}\tau} - T_1)e^{-\alpha\tau/2} + T_1}$

Podstawiamy $T_{N\tau+\frac{1}{2}\tau}$ z poprzedniego kroku:

$$\boxed{T_{N\tau+\tau} = \left[(T_{N\tau} - T_2)e^{-\alpha\tau/2} + T_2 - T_1\right]e^{-\alpha\tau/2} + T_1}$$

Dla stanu ustalonego (po bardzo dużej liczbie przełączeń) spodziewamy się, że po jednym całym cyklu temperatura ciała wraca do temperatury na początku cyklu tzn. $T_{N\tau+\tau} = T_{N\tau}$ co daje nam

$$T_{N\tau} = \left[(T_{N\tau} - T_2) e^{-\alpha\tau/2} + T_2 - T_1 \right] e^{-\alpha\tau/2} + T_1$$

$$T_{N\tau} = T_{N\tau} e^{-\alpha\tau} + T_1 (1 - e^{-\alpha\tau/2}) + T_2 (e^{-\alpha\tau/2} - e^{-\alpha\tau})$$

$$(1 - e^{-\alpha\tau}) T_{N\tau} = T_1 (1 - e^{-\alpha\tau/2}) + T_2 e^{-\alpha\tau/2} (1 - e^{-\alpha\tau/2})$$

$$T_{N\tau} = \frac{(T_1 + T_2 e^{-\alpha\tau/2})(1 - e^{-\alpha\tau/2})}{(1 - e^{-\alpha\tau})} = \frac{(T_1 + T_2 e^{-\alpha\tau/2})(1 - e^{-\alpha\tau/2})}{(1 - e^{-\alpha\tau/2})(1 + e^{-\alpha\tau/2})}$$

i ostatecznie $\boxed{T_{N\tau} = \dfrac{T_1 + T_2 e^{-\alpha\tau/2}}{1 + e^{-\alpha\tau/2}}}$ = temperatura maksymalna (bo tuż przed przełączeniem się na niższą temperaturę otoczenia)

Temperatura maksymalna wynosi $T_{N\tau + \frac{1}{2}\tau}$

$$T_{N\tau+\frac{1}{2}\tau} = (T_{N\tau} - T_2) e^{-\alpha\tau/2} + T_2 = \left(\frac{T_1 + T_2 e^{-\alpha\tau/2}}{1 + e^{-\alpha\tau/2}} - T_2 \right) e^{-\alpha\tau/2} + T_2 =$$

$$= \frac{T_1 e^{-\alpha\tau/2} + T_2 e^{-\alpha\tau}}{1 + e^{-\alpha\tau/2}} + T_2 (1 - e^{-\alpha\tau/2}) = \frac{T_1 e^{-\alpha\tau/2} + T_2 e^{-\alpha\tau}}{1 + e^{-\alpha\tau/2}} + T_2 (1 - e^{-\alpha\tau/2}) \cdot \left(\frac{1 + e^{-\alpha\tau/2}}{1 + e^{-\alpha\tau/2}} \right)$$

$$= \frac{T_1 e^{-\alpha\tau/2} + T_2 e^{-\alpha\tau} + T_2 (1 - e^{-\alpha\tau})}{1 + e^{-\alpha\tau/2}} = \frac{T_1 e^{-\alpha\tau/2} + T_2}{1 + e^{-\alpha\tau/2}}$$

$\boxed{T_{N\tau+\frac{1}{2}\tau} = \dfrac{T_1 e^{-\alpha\tau/2} + T_2}{1 + e^{-\alpha\tau/2}}}$ = temperatura minimalna (bo tuż przed przełączeniem się na wyższą temperaturę otoczenia)

Zbadajmy zależność od α i τ. Jak widać istotne nie są α i τ z osobna, ale jedynie ich iloczyn:

- $\alpha\tau \ll 1 \rightarrow e^{-\alpha\tau/2} \approx 1 \rightarrow T_{MAX} = T_{MIN} = \dfrac{T_1 + T_2}{2}$
- $\alpha\tau \gg 1 \rightarrow e^{-\alpha\tau/2} \approx 0 \rightarrow T_{MAX} = T_1 \quad T_{MIN} = T_2$

ĆW 1. ZAD 1 (alternatywny sposób)

- $T_{t/2} = (T_1 - T_2)e^{-\alpha t/2} + T_2$
- $T_t = (T_{t/2} - T_1)e^{-\alpha t/2} + T_1 = \left[(T_1 - T_2)e^{-\alpha t/2} + T_2 - T_1\right]e^{-\alpha t/2} + T_1 =$

$$= (T_1 - T_2)e^{-\alpha t} - (T_1 - T_2)e^{-\alpha t/2} + T_1 - T_2 + T_2 = (T_1 - T_2)(e^{-\alpha t} - e^{-\alpha t/2} + 1) + T_2$$

- $T_{3t/2} = (T_t - T_2)e^{-\alpha t/2} + T_2$
- $T_{2t} = (T_{3t/2} - T_1)e^{-\alpha t/2} + T_1 = \left[(T_t - T_2)e^{-\alpha t/2} + T_2 - T_1\right]e^{-\alpha t/2} + T_1$

$$= \left\{\left[(T_1 - T_2)(1 - e^{-\alpha t/2} + e^{-\alpha t}) + T_2 - T_2\right]e^{-\alpha t/2} + (T_2 - T_1)\right\}e^{-\alpha t/2} + T_1 =$$

$$= \left[(T_1 - T_2)(1 - e^{-\alpha t/2} + e^{-\alpha t})e^{-\alpha t/2} - (T_1 - T_2)\right]e^{-\alpha t/2} + T_1 =$$

$$= \left[(T_1 - T_2)(e^{-\alpha t/2} - e^{-\alpha t} + e^{-3\alpha t/2} - 1)\right]e^{-\alpha t/2} + T_1 - T_2 + T_2$$

$$= (T_1 - T_2)(e^{-\alpha t} - e^{-3\alpha t/2} + e^{-2\alpha t} - e^{-\alpha t/2} + 1) + T_2$$

$$T_t = (T_1 - T_2)(1 - e^{-\alpha t/2} + e^{-\alpha t}) + T_2$$

$$T_{2t} = (T_1 - T_2)(1 - e^{-\alpha t/2} + e^{-\alpha t} - e^{3\alpha t/2} + e^{-2\alpha t}) + T_2$$

Zgadujemy: $T_{Nt} = T_2 + (T_1 - T_2)\sum_{j=0}^{N} q^j, \quad q = e^{-\alpha t/2}$

szereg geometryczny → $T_{Nt} = T_2 + (T_1 - T_2)\dfrac{1 + e^{-N\alpha t/2}}{1 + e^{-\alpha t/2}}$

Dla dużego N, $e^{-N\alpha t/2} \to 0$ więc $T_{Nt} = T_2 + \dfrac{(T_1 - T_2)}{1 + e^{-\alpha t/2}} = \dfrac{T_1 + T_2(1 + e^{-\alpha t/2}) - T_2}{1 + e^{-\alpha t/2}}$

$$\boxed{T_N = \frac{T_1 + T_2 e^{-\alpha t/2}}{1 + e^{-\alpha t/2}}}$$ to samo co wcześniej

ĆW 1. ZAD 2.

$$T_{ot}(t) = T_0 + A\cos(\omega t) \qquad T(0) = T_0$$

$$\frac{dT(t)}{dt} = -\alpha\left(T(t) - T_{ot}(t)\right) \qquad \frac{dT(t)}{dt} = -\alpha T(t) + \alpha T_0 + \alpha A\cos(\omega t)$$

$$\boxed{\dot{T} = -\alpha T + \alpha A\cos(\omega t) + \alpha T_0}$$

RORJ: $\dot{T} = -\alpha T \longrightarrow T_{OG} = Be^{-\alpha t}$

RSRN:
- pochodna musi dać nam $\cos(\omega t)$ więc w T musi być jakiś $\sin(\omega t)$
- jak w T będzie sam $\sin(\omega t)$ to pochodna po lewej stronie równania da $\cos(\omega t)$ i nic nie da tego $\sin(\omega t)$, które będzie po prawej stronie
  wniosek: w T musi też siedzieć $\cos(\omega t)$
- musi gdzieś w T być wyraz stały, który zrównoważy αT_0

więc mamy rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego w postaci:

$$\left.\begin{aligned} T_s &= C\sin(\omega t) + D\cos(\omega t) + E \\ \dot{T}_s &= C\omega\cos(\omega t) - D\omega\sin(\omega t) \end{aligned}\right\} \text{podstawiamy do równania}$$

$$C\omega\cos(\omega t) - D\omega\sin(\omega t) = -\alpha C\sin(\omega t) - \alpha D\cos(\omega t) - \alpha E + \alpha A\cos(\omega t) + \alpha T_0$$

$$\sin(\omega t)\left[\alpha C - D\omega\right] + \cos(\omega t)\left[C\omega + \alpha D - \alpha A\right] + \alpha E - \alpha T_0 = 0$$

$$\begin{cases} \alpha C - D\omega = 0 & (1) \\ C\omega + \alpha D - \alpha A = 0 & (2) \\ \alpha E - \alpha T_0 = 0 & (3) \end{cases} \qquad (3) \rightarrow E = T_0$$

$$(1) \rightarrow D = \frac{\alpha C}{\omega} \qquad (2) \rightarrow C\omega + \frac{\alpha^2 C}{\omega} = \alpha A \;/\cdot\omega$$

$$C\omega^2 + C\alpha^2 = \alpha\omega A$$

$$D = \frac{\alpha^2 A}{\omega^2 + \alpha^2} \qquad C = \frac{\alpha\omega A}{\omega^2 + \alpha^2}$$

$$T_s = \frac{\alpha\omega A}{\omega^2 + \alpha^2}\sin(\omega t) + \frac{\alpha^2 A}{\omega^2 + \alpha^2}\cos(\omega t) + T_0$$

RORN = RORJ + RSRN

$$T = T_{OG} + T_S = B e^{-\alpha t} + \frac{\alpha \omega A}{\omega^2 + \alpha^2} \sin(\omega t) + \frac{\alpha^2 A}{\omega^2 + \alpha^2} \cos(\omega t) + T_0$$

$$T(0) = T_0 \rightarrow B + \frac{\alpha^2 A}{\omega^2 + \alpha^2} + T_0 = T_0 \rightarrow B = -\frac{\alpha^2 A}{\omega^2 + \alpha^2}$$

$$T(t) = -\frac{\alpha^2 A}{\omega^2 + \alpha^2} e^{-\alpha t} + \frac{\alpha \omega A}{\omega^2 + \alpha^2} \sin(\omega t) + \frac{\alpha^2 A}{\omega^2 + \alpha^2} \cos(\omega t) + T_0$$

Dla stanu ustalonego $t \to \infty$ więc $e^{-\alpha t} \to 0$

$$T_{ust}(t) \approx \frac{\alpha A}{\omega^2 + \alpha^2} \left(\omega \sin(\omega t) + \alpha \cos(\omega t) \right) + T_0$$

Rozważmy 2 przypadki

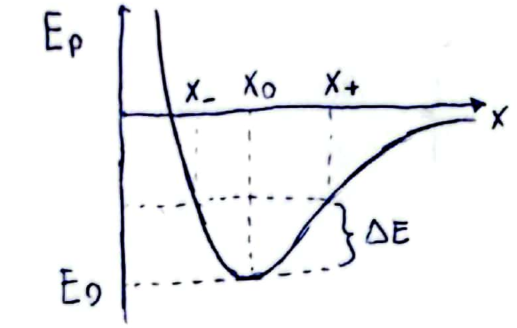
- $\omega \ll \alpha$: $T_{ust}(t) \approx \dfrac{\alpha A}{\alpha^2 \left(\frac{\omega^2}{\alpha^2} + 1 \right)} \cdot \alpha \left(\frac{\omega}{\alpha} \sin(\omega t) + \cos(\omega t) \right) + T_0$

  $$T_{ust}(t) = A \cos(\omega t) + T_0$$

- $\omega \gg \alpha$: $T_{ust}(t) \approx \dfrac{\omega}{\omega^2} \cdot \dfrac{\alpha A \sin(\omega t)}{1 + \frac{\alpha^2}{\omega^2}} + \dfrac{1}{\omega^2} \dfrac{\alpha^2 A \cos(\omega t)}{1 + \frac{\alpha^2}{\omega^2}} + T_0$

  $$T_{ust}(t) \approx T_0$$

ĆW 1 ZAD 3



- $E_p(x) \approx a(x-x_0)^2 - b(x-x_0)^3 + E_0$
- $b|x-x_0| \ll a$
- $x_+ \simeq x_+^h$, $x_- \simeq x_-^h$
- $\langle x \rangle = \frac{x_- + x_+}{2}$

W punkcie zwrotu atomów energia kinetyczna wynosi zero więc wtedy całkowita energia atomów jest równa energii potencjalnej.

1) Na początku załóżmy, że potencjał jest harmoniczny

$$E(x_\mp^h) = a(x_\mp^h - x_0)^2 + E_0 \rightarrow \Delta E = a(x_\mp^h - x_0)^2$$

$$(x_\mp^h - x_0)^2 = \frac{\Delta E}{a} \rightarrow x_\mp^h = x_0 \mp \sqrt{\frac{\Delta E}{a}}$$

widzimy, że dla potencjału harmonicznego średnia odległość między atomami w cząsteczce $\langle x^h \rangle = \frac{x_-^h + x_+^h}{2} = x_0$ nie zależy od energii układu.

2) Załóżmy teraz poprawki anharmoniczne:

załóżmy $x_\mp \approx x_\mp^h \rightarrow x_\mp = x_\mp^h + \varepsilon_\mp$

$$\Delta E = a(x_\mp - x_0)^2 - b(x_\mp - x_0)^3 = a(x_\mp^h + \varepsilon_\mp - x_0)^2 - b(x_\mp^h + \varepsilon_\mp - x_0)^3 =$$

$$= a\left(\cancel{x_0} \mp \sqrt{\frac{\Delta E}{a}} + \varepsilon_\mp - \cancel{x_0}\right)^2 - b\left(\cancel{x_0} \mp \sqrt{\frac{\Delta E}{a}} + \varepsilon_\mp - \cancel{x_0}\right)^3 =$$

$$= a\left(\varepsilon_\mp \mp \sqrt{\frac{\Delta E}{a}}\right)^2 - b\left(\varepsilon_\mp \mp \sqrt{\frac{\Delta E}{a}}\right)^3 =$$

$$= a\left[\varepsilon_\mp^2 + 2\cdot\varepsilon_\mp\cdot\left(\mp\sqrt{\frac{\Delta E}{a}}\right) + \frac{\Delta E}{a}\right] - b\left[\varepsilon_\mp^3 + 3\cdot\varepsilon_\mp^2\left(\mp\sqrt{\frac{\Delta E}{a}}\right) + 3\cdot\varepsilon_\mp\left(\frac{\Delta E}{a}\right) + \left(\mp\sqrt{\frac{\Delta E}{a}}\right)^3\right]$$

$\varepsilon_\pm$ jest małe więc zostawiamy jedynie poprawki rzędu $\varepsilon_\mp$

$$\Delta E = a\left[\frac{\Delta E}{a} \mp 2\varepsilon_\mp \cdot \sqrt{\frac{\Delta E}{a}}\right] - b\left[3\cdot\varepsilon_\mp\left(\frac{\Delta E}{a}\right) \mp \left(\frac{\Delta E}{a}\right)^{3/2}\right]$$

$$\cancel{\Delta E} = \cancel{\Delta E} \mp 2\varepsilon_{\mp} \cdot \sqrt{a \cdot \Delta E} - 3b\,\varepsilon_{\mp}\left(\frac{\Delta E}{a}\right) \pm b\left(\frac{\Delta E}{a}\right)^{3/2}$$

$$0 = \varepsilon_{\mp}\left(\mp 2\sqrt{a\Delta E} - 3b\,\frac{\Delta E}{a}\right) \pm b\left(\frac{\Delta E}{a}\right)^{3/2}$$

$$\varepsilon_{\mp}\left(\pm 2\sqrt{a\Delta E} + 3b\,\frac{\Delta E}{a}\right) = \pm b\left(\frac{\Delta E}{a}\right)^{3/2}$$

Przemieściliśmy na drugą stronę więc zmieniły się znaki

$$\varepsilon_{\mp} = \frac{\pm b\left(\frac{\Delta E}{a}\right)^{3/2}}{\pm 2\sqrt{a\Delta E} + 3b\left(\frac{\Delta E}{a}\right)}$$

Korzystamy z założenia z początku zadania

$$a \gg b\,|x_{\mp} - x_0| \approx b\,|x_{\mp}^h - x_0| = b\,\left|x_0 \mp \sqrt{\frac{\Delta E}{a}} - x_0\right| = b\sqrt{\frac{\Delta E}{a}}$$

$$\boxed{a \gg b\sqrt{\frac{\Delta E}{a}}}$$

$$\varepsilon_{\mp} = \frac{\pm b\left(\frac{\Delta E}{a}\right)^{3/2}}{\pm 2a\sqrt{\frac{\Delta E}{a}} + 3b\sqrt{\frac{\Delta E}{a}}\sqrt{\frac{\Delta E}{a}}} = \frac{\pm b\,\frac{\Delta E}{a}}{\pm 2a + 3b\sqrt{\frac{\Delta E}{a}}}$$

Dzięki warunkowi z ramki możemy zapisać $\varepsilon_{\mp} = \dfrac{b\,\frac{\Delta E}{a}}{2a}$

$$\boxed{\varepsilon_{\mp} = \frac{b \cdot \Delta E}{2a^2}}$$

$$\langle x \rangle = \frac{x_- + x_+}{2} = \frac{x_-^h + \varepsilon_- + x_+^h + \varepsilon_+}{2} = \frac{x_-^h + x_+^h}{2} + \frac{\varepsilon_- + \varepsilon_+}{2}$$

$$= x_0 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{b \cdot \Delta E}{2a^2}$$

$$\boxed{\langle x \rangle = x_0 + \frac{b \cdot \Delta E}{2a^2}}$$

Widzimy, że dzięki anharmoniczności potencjału ($b \neq 0$) średnia odległość między atomami rośnie wraz z ich energią. Ponieważ energia wewnętrzna substancji rośnie wraz z temperaturą, możemy wywnioskować, że wraz ze wzrostem temperatury ciała będą się rozszerzać. Mamy model przewidujący rozszerzalność cieplną.

ĆW 1 ZAD 4.

Współczynnik rozszerzalności objętościowej definiujemy jako zmianę objętości materiału pod wpływem zmiany temperatury podzieloną przez początkową objętość

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{V}\frac{dV}{dT}}$$

Analogicznie współczynniki rozszerzalności liniowej definiujemy jako

$$\boxed{\alpha_i = \frac{1}{L_i}\frac{dL_i}{dT}}$$

Korzystając ze związku $V = L_1 \cdot L_2 \cdot L_3$

$$\gamma = \frac{1}{L_1 \cdot L_2 \cdot L_3}\frac{d(L_1 \cdot L_2 \cdot L_3)}{dT} = \frac{1}{L_1 \cdot L_2 \cdot L_3}\cdot\left(L_1 L_2 \frac{dL_3}{dT} + L_1 L_3 \frac{dL_2}{dT} + L_2 L_3 \frac{dL_1}{dT}\right) =$$

$$= \frac{1}{L_1}\frac{dL_1}{dT} + \frac{1}{L_2}\frac{dL_2}{dT} + \frac{1}{L_3}\frac{dL_3}{dT} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \rightarrow \boxed{\gamma = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}$$

Alternatywnie współczynniki rozszerzalności mogą być zdefiniowane przy pomocy wymiarów wzorcowych V_0, L_{10}, L_{20}, L_{30}

wtedy:

$$V \approx V_0 + \gamma V_0 \Delta T \quad (*)$$

$$L_i \approx L_{i0} + \alpha_i L_{i0} \Delta T \quad (**)$$

$$V = L_1 \cdot L_2 \cdot L_3 = (L_{10} + \alpha_1 L_{10} \Delta T)\cdot(L_{20} + \alpha_2 L_{20} \Delta T)\cdot(L_{30} + \alpha_3 L_{30} \Delta T)$$

$$= \left[L_{10}L_{20} + L_{10}L_{20}\alpha_2 \Delta T + L_{10}L_{20}\alpha_1 \Delta T + L_{10}L_{20}\alpha_1\alpha_2(\Delta T)^2\right]\cdot\left[L_{30} + \alpha_3 L_{30}\Delta T\right]$$

$$= L_{10}L_{20}L_{30} + L_{10}L_{20}L_{30}\alpha_2\Delta T + L_{10}L_{20}L_{30}\alpha_1\Delta T + L_{10}L_{20}L_{30}\alpha_1\alpha_2(\Delta T)^2$$

$$+ L_{10}L_{20}L_{30}\alpha_3\Delta T + L_{10}L_{20}L_{30}\alpha_2\alpha_3(\Delta T)^2 + L_{10}L_{20}L_{30}\alpha_1\alpha_3(\Delta T)^2$$

$$+ L_{10}L_{20}L_{30}\alpha_1\alpha_2\alpha_3(\Delta T)^3$$

$$V = V_0 + V_0\Delta T(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + V_0(\Delta T)^2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3) + V_0(\Delta T)^3\alpha_1\alpha_2\alpha_3$$

(ΔT) jest małe $\rightarrow$ $(\Delta T)^2 \approx 0$ i $(\Delta T)^3 \approx 0$

więc ostatecznie:

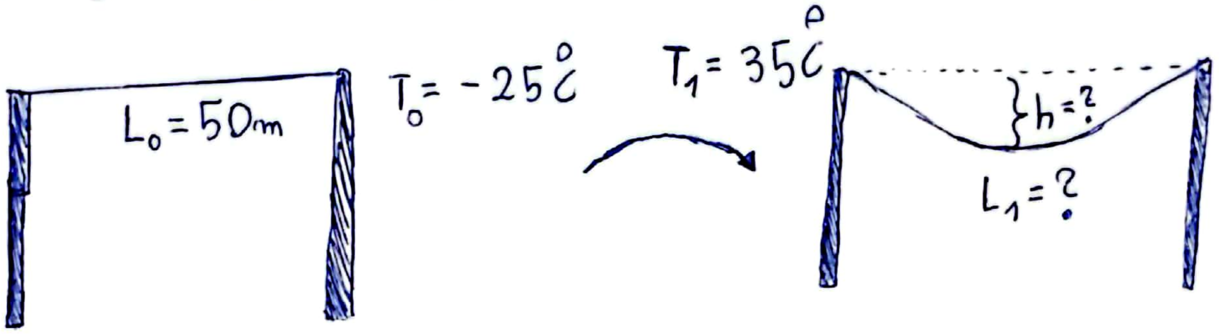
$$V = V_0 + V_0 \Delta T \left(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \right)$$

porównujemy z (*): $V = V_0 + V_0 \Delta T \, \gamma$

przez porównanie widzimy, że

$$\gamma = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

ĆW 1. ZAD. 5



W przybliżeniu liniowym, długość drutu w temperaturze T_1 zmieni się o

$$\Delta L = L_0 \cdot \alpha \cdot \Delta T$$

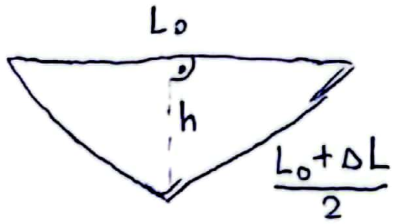
$$\Delta L = 50m \cdot 8{,}9 \cdot 10^{-6} \frac{1}{K} \cdot 60K = 26700 \cdot 10^{-6} m =$$

$$= 2{,}67 \cdot 10^{-2} m = 2{,}67 \text{ cm}$$

$$\boxed{\Delta L = 2{,}67 \text{ cm}}$$

Jak oszacować h ?

Z tw. Pitagorasa



$$h^2 + \left(\frac{L_0}{2}\right)^2 = \left(\frac{L_0 + \Delta L}{2}\right)^2$$

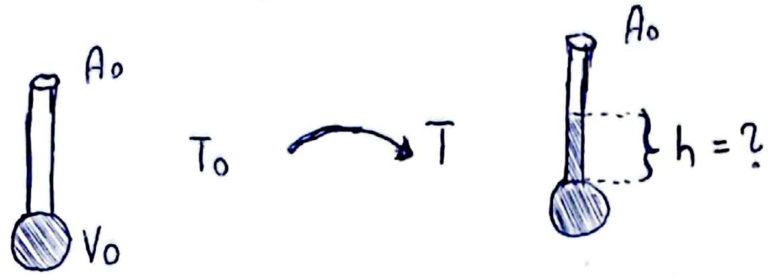
$$h^2 = \frac{(L_0 + \Delta L)^2}{4} - \frac{L_0^2}{4} = \frac{\cancel{L_0^2} + 2L_0 \Delta L + \Delta L^2 - \cancel{L_0^2}}{4}$$

$$h^2 = \frac{2L_0 \Delta L + \Delta L^2}{4} \approx \{\Delta L \ll L_0\} \approx \frac{L_0 \Delta L}{2}$$

$$h \approx \sqrt{\frac{L_0 \Delta L}{2}} = \sqrt{\frac{5000 \text{ cm} \cdot 2{,}67 \text{ cm}}{2}} \approx 82{,}70 \text{ cm}$$

$$\boxed{h = 82{,}70 \text{ cm}}$$

ĆW 1. ZAD 6.



$T - T_0 = \Delta T$

β – wsp. rozszerzalności objętościowej rtęci

α – wsp. rozszerzalności liniowej szkła

Załóżmy, że szklana bańka rozszerza się jak szklana kula (! wrócimy do tego potem) wtedy w temp T objętość szklanej bańki wynosi $V_S = V_0(1 + 3\alpha\Delta T)$, a objętość zajmowana przez rtęć wynosi $V_R = V_0(1 + \beta\Delta T)$

Oczekujemy, że rtęć rozszerzy się bardziej niż bańka ($\beta > 3\alpha$) i rtęć nie zmieści się już wewnątrz bańki. Dodatkowa, nadmiarowa objętość rtęci musi wypełnić kapilarę

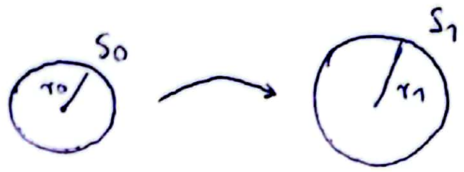
$$\Delta V = V_R - V_S = \cancel{V_0} + \beta V_0 \Delta T - \cancel{V_0} - 3\alpha V_0 \Delta T = V_0 \Delta T(\beta - 3\alpha)$$

oraz $\Delta V = A_0 \cdot h$ (zaniedbujemy zmianę przekroju rurki przy podgrzaniu)

$$\boxed{h = \frac{V_0}{A_0}\Delta T(\beta - 3\alpha)}$$

Wracamy do ! czyli do założenia, że objętość szklanej sfery zmienia się tak samo jak objętość szklanej kuli. Rozważmy 2 modele tego co się dzieje z bańką przy zmianie temperatury.

Rozważmy najpierw bańkę dla której zmienia się powierzchnia wskutek ogrzewania



$S_1 = S_0(1+2\alpha\Delta T)$

(2α, a nie 3α, bo powierzchnia, a nie objętość)

wiemy, że $S_0 = 4\pi r_0^2$ i $S_1 = 4\pi r_1^2$ więc $r_0 = \left(\frac{S_0}{4\pi}\right)^{1/2}$ i $r_1 = \left(\frac{S_1}{4\pi}\right)^{1/2}$

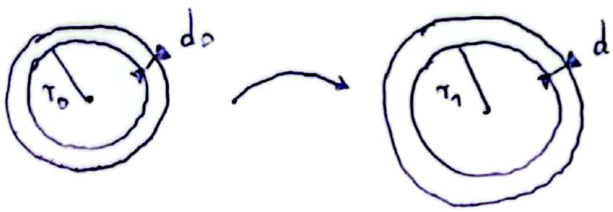
co pozwala nam obliczyć stosunek objętości

$$\frac{V_1}{V_0} = \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^3 = \left(\frac{S_1}{S_0}\right)^{3/2} = \left(\frac{S_0(1+2\alpha\Delta T)}{S_0}\right)^{3/2} = (1+2\alpha\Delta T)^{3/2} \simeq (1+3\alpha\Delta T)$$

szereg Taylora wokół $x \approx 0$: $(1+x)^\alpha \simeq 1+\alpha x$

czyli $V_1 = V_0(1+3\alpha\Delta T)$

Teraz weźmy też pod uwagę to, że ścianki bańki też się rozszerzają



i wiemy, że $d_1 = d_0(1+\alpha\Delta T)$

$$\underset{\text{całe}}{V} = \underset{\text{puste}}{V_{WNĘTRZE}} - \underset{\text{naskórek}}{V_{NASKÓREK}}$$

$$V = V_W - V_N$$

Początkowo naskórek zajmuje objętość $V_{0N} = S_0 d_0$

Po podgrzaniu objętość naskórka zajmuje $V_{1N} = S_1 d_1 = S_0(1+2\alpha\Delta T)\, d_0(1+\alpha\Delta T)$

$V_{1N} = S_0 d_0(1+3\alpha\Delta T + 2\alpha^2\Delta T^2) \simeq S_0 d_0(1+3\alpha\Delta T) =$

Nas interesuje objętość wnętrza po podgrzaniu

$$V_{1W} = V_1 - V_{1N} = V_0(1+3\alpha\Delta T) - S_0 d_0(1+3\alpha\Delta T)$$

$$= \frac{4}{3}\pi(r_0+d_0)^3(1+3\alpha\Delta T) - 4\pi r_0^2 d_0(1+3\alpha\Delta T) = \frac{4}{3}\pi(1+3\alpha\Delta T)\left[(r_0+d_0)^3 - 3r_0^2 d_0\right] =$$

$$= \frac{4}{3}\pi(1+3\alpha\Delta T)\left[r_0^3 + \cancel{3r_0^2 d_0} + 3r_0 d_0^2 + d_0^3 - \cancel{3r_0^2 d_0}\right]$$

$$= \frac{4}{3}\pi(1+3\alpha\Delta T)r_0^3\left[1 + \underbrace{3\frac{d_0^2}{r_0^2} + \frac{d_0^3}{r_0^3}}_{\text{małe, bo } d_0 \ll r_0}\right] \simeq \frac{4}{3}\pi r_0^3(1+3\alpha\Delta T)$$

czyli założenie ! było poprawne, bo objętość wewnątrz bańki rzeczywiście zmienia się tak jak objętość szklanej kuli