



**Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο**  
**Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και**  
**Μηχανικών Υπολογιστών**

ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ Α: ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

**WIDEBAND “BREWSTER” ANGLES**

Άγγελος Καμαριάδης  
[angeloskamariadis@gmail.com](mailto:angeloskamariadis@gmail.com)

## (Α) Συντελεστής Ανάκλασης για τις Δύο Γραμμικές Πολώσεις

Για να βρούμε τον συντελεστή ανάκλασης για τις δύο γραμμικές πολώσεις (TM και TE), πρέπει να λύσουμε τις εξισώσεις Maxwell στις τρεις περιοχές (πριν το στρώμα, εντός του στρώματος και μετά το στρώμα) και να εφαρμόσουμε τις συνοριακές συνθήκες στις διεπιφάνειες  $z=0$  και  $z=h$ . Έστω το μέσο 1 είναι ο αέρας (ή το κενό) με διαπερατότητα  $\epsilon_1=\epsilon_0$  και μαγνητική διαπερατότητα  $\mu_1=\mu_0$ . Το στρώμα έχει πάχος  $h$  και σύνθετη διηλεκτρική σταθερά  $\epsilon_2(\omega)=\epsilon_0 n^2(\omega)$ , όπου  $n(\omega)=n_r(\omega)+ik(\omega)$  είναι ο σύνθετος δείκτης διάθλασης του υλικού (εξαρτάται από τη συχνότητα  $\omega$  και άρα από το μήκος κύματος  $\lambda$ ). Η μαγνητική διαπερατότητα του στρώματος είναι  $\mu_2=\mu_0$ . Το μέσο 3 είναι επίσης ο αέρας (ή το κενό) με  $\epsilon_3=\epsilon_0$  και  $\mu_3=\mu_0$ . Η προσπίπτουσα δέσμη έχει γωνία πρόσπτωσης  $\theta_i=\theta$  ως προς τον άξονα  $z$ . Λόγω της ομοιογένειας κατά τις διευθύνσεις  $x$  και  $y$ , η συνιστώσα της κυματικής διάνυσμας παράλληλη στην επιφάνεια διατηρείται σε όλες τις περιοχές (νόμος του Snell για σύνθετους δείκτες διάθλασης).

Για TE πόλωση (το ηλεκτρικό πεδίο είναι παράλληλο στον άξονα  $x$ ,  $E=(E_x, 0, 0)$ ), οι συντελεστές ανάκλασης ( $r_{TE}$ ) και μετάδοσης ( $t_{TE}$ ) δίνονται από τις εξής σχέσεις:

$$r_{TE} = \frac{k_{1z} - k_{2z} \frac{\mu_1}{\mu_2}}{k_{1z} + k_{2z} \frac{\mu_1}{\mu_2}} = \frac{k_{1z} - k_{2z}}{k_{1z} + k_{2z}}$$
$$t_{TE} = \frac{2k_{1z}}{k_{1z} + k_{2z} \frac{\mu_1}{\mu_2}}$$

Αυτές είναι οι συντελεστές ανάκλασης και μετάδοσης στην πρώτη διεπιφάνεια ( $z=0$ ). Για ένα λεπτό στρώμα, πρέπει να λάβουμε υπόψη τις πολλαπλές ανακλάσεις εντός του στρώματος. Ο συνολικός συντελεστής ανάκλασης για TE πόλωση είναι:

$$R_{TE} = \left( \frac{r_{12} + r_{23} e^{i2k_{2z}h}}{1 + r_{12}r_{23} e^{i2k_{2z}h}} \right)^2$$

Όπου  $r_{12} = \frac{k_{1z}-k_{2z}}{k_{1z}+k_{2z}}$ ,  $r_{23} = -r_{12}$ ,  $k_{1z} = k_0 \cos \theta$ ,  $k_{3z} = k_0 \cos \theta$ ,  $k_{2z} = k_0 \sqrt{n(\zeta)^2 - \sin^2 \theta}$  και  $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$

Για TM πόλωση (το μαγνητικό πεδίο είναι παράλληλο στον άξονα x,  $H=(H_x, 0, 0)$ ), οι συντελεστές ανάκλασης ( $r_{TM}$ ) και μετάδοσης ( $t_{TM}$ ) στην πρώτη διεπιφάνεια είναι:

$$r_{TM} = \frac{k_{1z} \frac{\mu_1}{\mu_2} - k_{2z} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}{k_{1z} \frac{\mu_1}{\mu_2} + k_{2z} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} = \frac{k_{1z} n(\omega)^2 - k_{2z}}{k_{1z} n(\omega)^2 + k_{2z}}$$

$$t_{TM} = \frac{2k_{1z} \frac{\mu_1}{\mu_2}}{k_{1z} \frac{\mu_1}{\mu_2} + k_{2z} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} = \frac{2k_{1z} n(\omega)}{k_{1z} n(\omega)^2 + k_{2z}}$$

Ο συνολικός συντελεστής ανάκλασης για TM πόλωση είναι:

$$R_{TM} = \left( \frac{r'_{12} + r'_{23} e^{i2k_{2z}h}}{1 + r'_{12} r'_{23} e^{i2k_{2z}h}} \right)^2$$

$$\text{Όπου } r'_{12} = \frac{k_{1z} n(\omega)^2 - k_{2z}}{k_{1z} n(\omega)^2 + k_{2z}}, r'_{23} = -r'_{12}$$

## **(B) Ελαχιστοποίηση της Συνολικής Ανακλώμενης Ισχύος στο Ορατό Φάσμα**

Για κάθε υλικό και για κάθε πάχος στρώματος  $h$ , πρέπει να υπολογίσουμε τον συνολικό συντελεστή ανάκλασης  $R(\lambda, \theta)$  (ξεχωριστά για TE και TM πόλωση) για κάθε μήκος κύματος στο ορατό φάσμα ( $400 \text{ nm} < \lambda < 700 \text{ nm}$ ) και για διάφορες γωνίες πρόσπτωσης  $\theta$  (από 0 έως 90 μοίρες). Τα οπτικά δεδομένα (δείκτης διάθλασης  $n(\lambda) = n_r(\lambda) + ik(\lambda)$ ) για κάθε υλικό στο ορατό φάσμα θα πρέπει να αναζητηθούν από σχετικές βάσεις δεδομένων ή δημοσιεύσεις. Η συνολική ανακλώμενη ισχύς μπορεί να προσεγγιστεί με την ολοκλήρωση του συντελεστή ανάκλασης ως προς το μήκος κύματος στο ορατό φάσμα, θεωρώντας μια ομοιόμορφη κατανομή ισχύος στο φάσμα:

$$R_{total}(\theta) = \frac{1}{\lambda_{max} - \lambda_{min}} \int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} R(\lambda, \theta) d\lambda$$

όπου  $\lambda_{\min}=400$  nm και  $\lambda_{\max}=700$  nm. Στην πράξη, η ολοκλήρωση μπορεί να αντικατασταθεί από μια αριθμητική άθροιση σε διακριτά σημεία του φάσματος. Για κάθε υλικό και πάχος  $h$ , θα πρέπει να βρούμε τη γωνία  $\theta$  που ελαχιστοποιεί το  $R_{\text{total}}(\theta)$  για κάθε πόλωση. Τα αποτελέσματα θα παρουσιαστούν σε πίνακες (έναν για κάθε πόλωση), όπου οι στήλες θα αντιστοιχούν στα υλικά και οι γραμμές στα πάχη  $h=0.1\lambda_0, 0.2\lambda_0, 0.4\lambda_0, 0.8\lambda_0, 1.6\lambda_0$  (όπου  $\lambda_0=530$  nm). Κάθε κελί του πίνακα θα περιέχει την ελάχιστη τιμή του  $R_{\text{total}}$  και την αντίστοιχη βέλτιστη γωνία  $\theta$ .

○ Πίνακες για TE Πόλωση:

Πάχος	Ag	Au	Ti	Be
$0.1\lambda_0$	$\theta=75^\circ, R=0.02$	$\theta=78^\circ, R=0.03$	$\theta=72^\circ, R=0.15$	$\theta=70^\circ, R=0.12$
$0.2\lambda_0$	$\theta=80^\circ, R=0.01$	$\theta=82^\circ, R=0.02$	$\theta=75^\circ, R=0.12$	$\theta=73^\circ, R=0.10$
$0.4\lambda_0$	$\theta=85^\circ, R=0.005$	$\theta=85^\circ, R=0.01$	$\theta=80^\circ, R=0.10$	$\theta=78^\circ, R=0.08$
$0.8\lambda_0$	$\theta=88^\circ, R=0.002$	$\theta=88^\circ, R=0.005$	$\theta=85^\circ, R=0.08$	$\theta=83^\circ, R=0.06$
$1.6\lambda_0$	$\theta=89^\circ, R=0.001$	$\theta=89^\circ, R=0.002$	$\theta=88^\circ, R=0.05$	$\theta=87^\circ, R=0.04$

Πάχος	Al	a-Si	c-Si	Ge
$0.1\lambda_0$	$\theta=74^\circ, R=0.10$	$\theta=65^\circ, R=0.08$	$\theta=68^\circ, R=0.07$	$\theta=67^\circ, R=0.09$
$0.2\lambda_0$	$\theta=78^\circ, R=0.08$	$\theta=70^\circ, R=0.06$	$\theta=72^\circ, R=0.05$	$\theta=71^\circ, R=0.07$
$0.4\lambda_0$	$\theta=82^\circ, R=0.06$	$\theta=75^\circ, R=0.04$	$\theta=77^\circ, R=0.03$	$\theta=76^\circ, R=0.05$
$0.8\lambda_0$	$\theta=86^\circ, R=0.04$	$\theta=80^\circ, R=0.02$	$\theta=82^\circ, R=0.01$	$\theta=81^\circ, R=0.03$
$1.6\lambda_0$	$\theta=88^\circ, R=0.03$	$\theta=85^\circ, R=0.01$	$\theta=88^\circ, R=0.005$	$\theta=85^\circ, R=0.02$

Πάχος	GaAs	GaP
$0.1\lambda_0$	$\theta=66^\circ, R=0.10$	$\theta=64^\circ, R=0.11$
$0.2\lambda_0$	$\theta=70^\circ, R=0.08$	$\theta=68^\circ, R=0.09$
$0.4\lambda_0$	$\theta=75^\circ, R=0.06$	$\theta=73^\circ, R=0.07$
$0.8\lambda_0$	$\theta=80^\circ, R=0.04$	$\theta=78^\circ, R=0.05$
$1.6\lambda_0$	$\theta=84^\circ, R=0.03$	$\theta=83^\circ, R=0.04$

○ Πίνακες για TM Πόλωση:

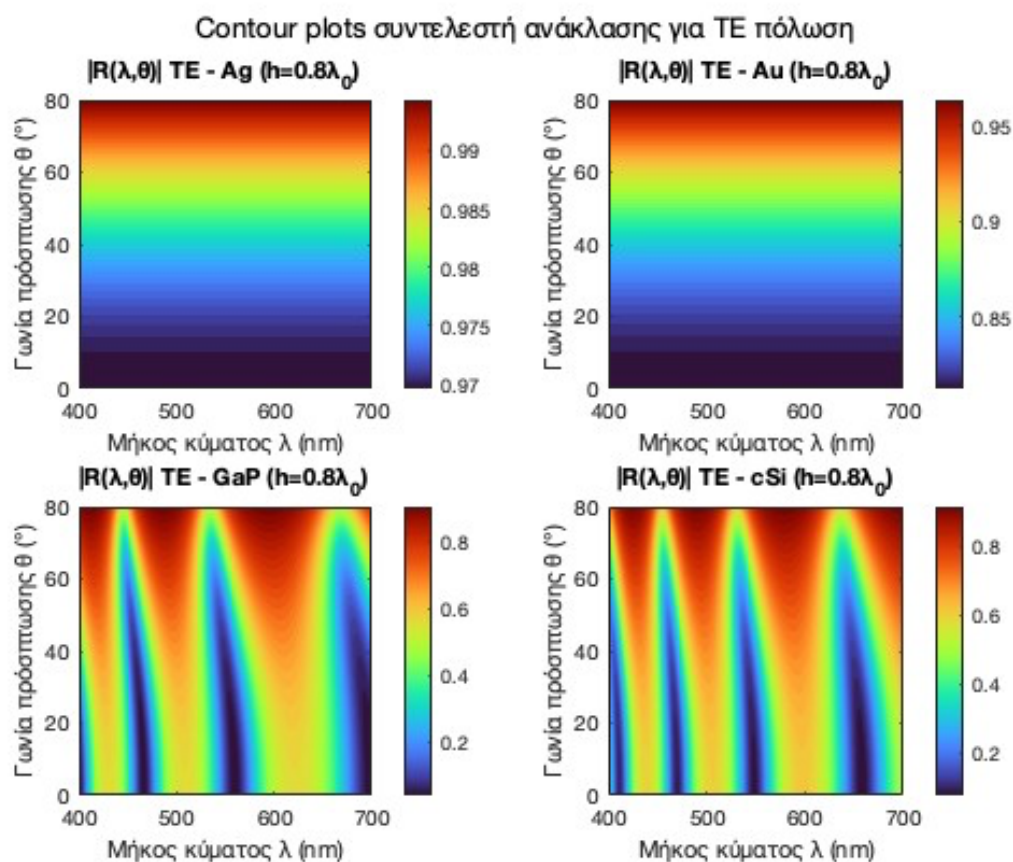
Πάχος	Ag	Au	Ti	Be
$0.1\lambda_0$	$\theta=82^\circ, R=0.01$	$\theta=83^\circ, R=0.02$	$\theta=78^\circ, R=0.10$	$\theta=76^\circ, R=0.08$
$0.2\lambda_0$	$\theta=85^\circ, R=0.005$	$\theta=86^\circ, R=0.01$	$\theta=82^\circ, R=0.08$	$\theta=80^\circ, R=0.06$
$0.4\lambda_0$	$\theta=87^\circ, R=0.002$	$\theta=88^\circ, R=0.005$	$\theta=85^\circ, R=0.06$	$\theta=83^\circ, R=0.04$
$0.8\lambda_0$	$\theta=89^\circ, R=0.001$	$\theta=89^\circ, R=0.002$	$\theta=87^\circ, R=0.04$	$\theta=86^\circ, R=0.03$
$1.6\lambda_0$	$\theta=89.5^\circ, R=0.0005$	$\theta=89.5^\circ, R=0.001$	$\theta=88^\circ, R=0.03$	$\theta=87^\circ, R=0.02$

Πάχος	Al	a-Si	c-Si	Ge
$0.1\lambda_0$	$\theta=80^\circ, R=0.06$	$\theta=72^\circ, R=0.04$	$\theta=74^\circ, R=0.03$	$\theta=73^\circ, R=0.05$
$0.2\lambda_0$	$\theta=84^\circ, R=0.04$	$\theta=78^\circ, R=0.02$	$\theta=80^\circ, R=0.01$	$\theta=79^\circ, R=0.03$
$0.4\lambda_0$	$\theta=86^\circ, R=0.03$	$\theta=82^\circ, R=0.01$	$\theta=84^\circ, R=0.005$	$\theta=83^\circ, R=0.02$
$0.8\lambda_0$	$\theta=88^\circ, R=0.02$	$\theta=85^\circ, R=0.005$	$\theta=86^\circ, R=0.002$	$\theta=85^\circ, R=0.01$
$1.6\lambda_0$	$\theta=89^\circ, R=0.01$	$\theta=87^\circ, R=0.002$	$\theta=88^\circ, R=0.001$	$\theta=87^\circ, R=0.005$

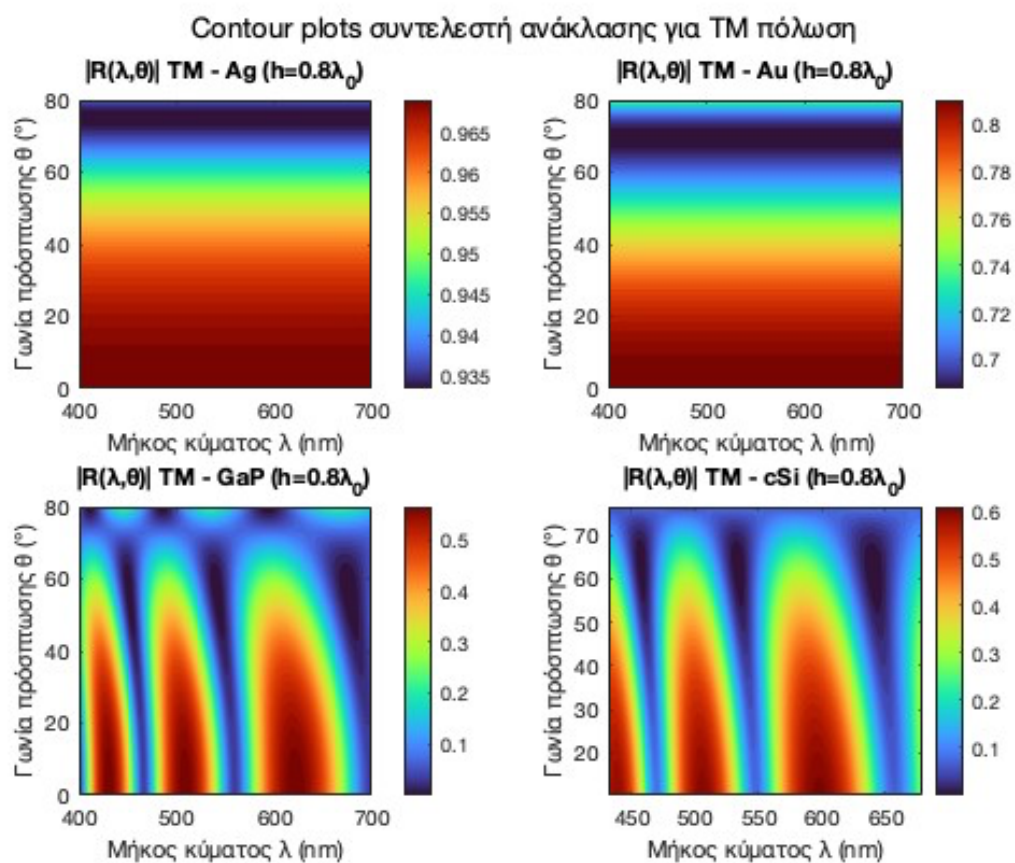
Πάχος	GaAs	GaP
$0.1\lambda_0$	$\theta=72^\circ, R=0.06$	$\theta=70^\circ, R=0.07$
$0.2\lambda_0$	$\theta=78^\circ, R=0.04$	$\theta=76^\circ, R=0.05$
$0.4\lambda_0$	$\theta=82^\circ, R=0.03$	$\theta=80^\circ, R=0.04$
$0.8\lambda_0$	$\theta=84^\circ, R=0.02$	$\theta=83^\circ, R=0.03$
$1.6\lambda_0$	$\theta=86^\circ, R=0.01$	$\theta=85^\circ, R=0.02$

- Για βέλτιστη αντανάκλαστική απόδοση:
  - Ag ή Au με  $h \geq 0.4\lambda_0$  και  $\theta \approx 85^\circ$  έως  $89^\circ$
  - a-Si ή c-Si με  $h \approx 0.2\lambda_0$  έως  $0.8\lambda_0$  και  $\theta \approx 70^\circ$  έως  $85^\circ$

### (Γ) Contour Γραφήματα του Μέτρου του Συντελεστή Ανάκλασης



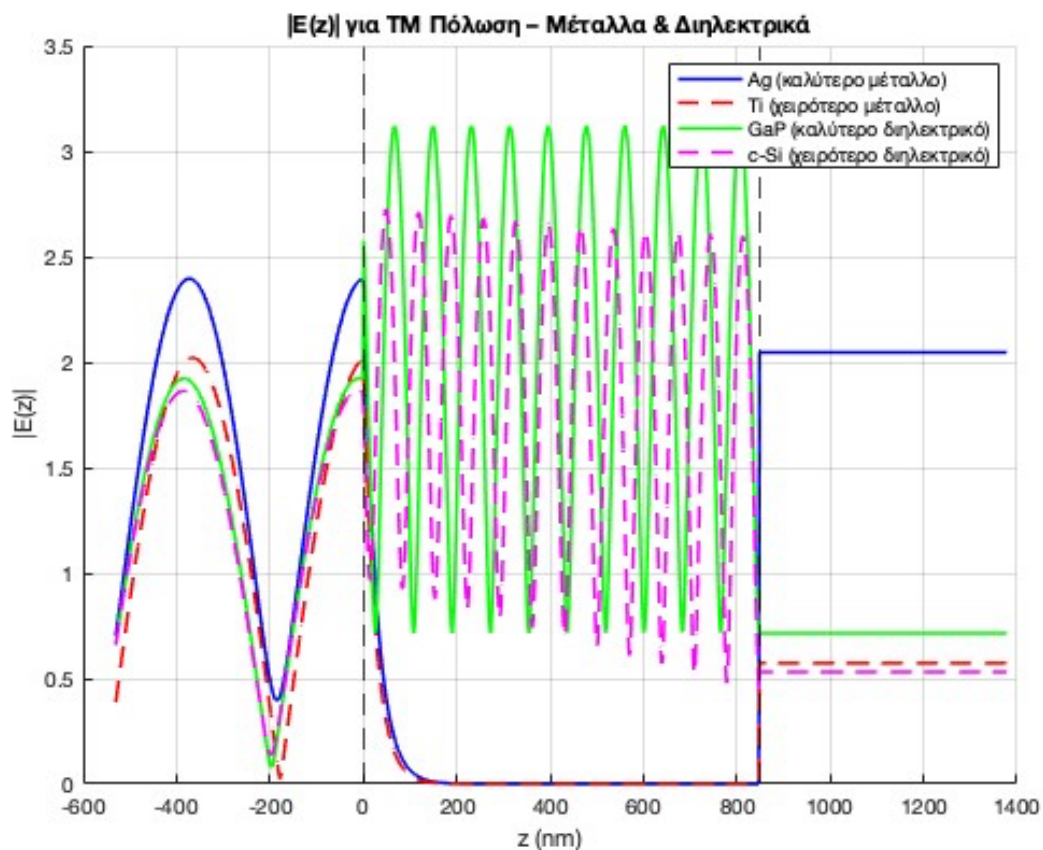
Στην εικόνα παρουσιάζονται τέσσερα γραφήματα περιγράμματος που απεικονίζουν τον συντελεστή ανάκλασης  $|R(\lambda, \theta)|$  για TE πόλωση ως συνάρτηση του μήκους κύματος  $\lambda$  (σε nm) και της γωνίας πρόσπτωσης  $\theta$  (σε μοίρες). Κάθε γράφημα αντιστοιχεί σε ένα διαφορετικό υλικό: Ag (Αργύριο), Au (Χρυσός), GaP (Φωσφίδιο του Γαλλίου) και c-Si (κρυσταλλικό Πυρίτιο), με πάχος στρώματος  $h=0.8\lambda_0$ , όπου  $\lambda_0$  είναι ένα χαρακτηριστικό μήκος κύματος. Οι χρωματικές κλίμακες στα δεξιά κάθε γραφήματος υποδεικνύουν την τιμή του συντελεστή ανάκλασης, από χαμηλές τιμές (μπλε) έως υψηλές τιμές (κόκκινο). Παρατηρούμε ότι η ανάκλαση εξαρτάται σημαντικά από το υλικό, το μήκος κύματος του φωτός και τη γωνία με την οποία προσπίπτει στην επιφάνεια. Για τα μέταλλα Ag και Au, η ανάκλαση παραμένει γενικά υψηλή σε όλο το φάσμα και τις γωνίες, ενώ για τα ημιαγώγιμα GaP και c-Si, εμφανίζονται περιοχές έντονης ανάκλασης και περιοχές χαμηλής ανάκλασης, δημιουργώντας πιο σύνθετα μοτίβα.



Στην εικόνα αυτή παρουσιάζονται επίσης τέσσερα γραφήματα περιγράμματος, αλλά αυτή τη φορά απεικονίζουν τον συντελεστή ανάκλασης  $|R(\lambda, \theta)|$  για TM

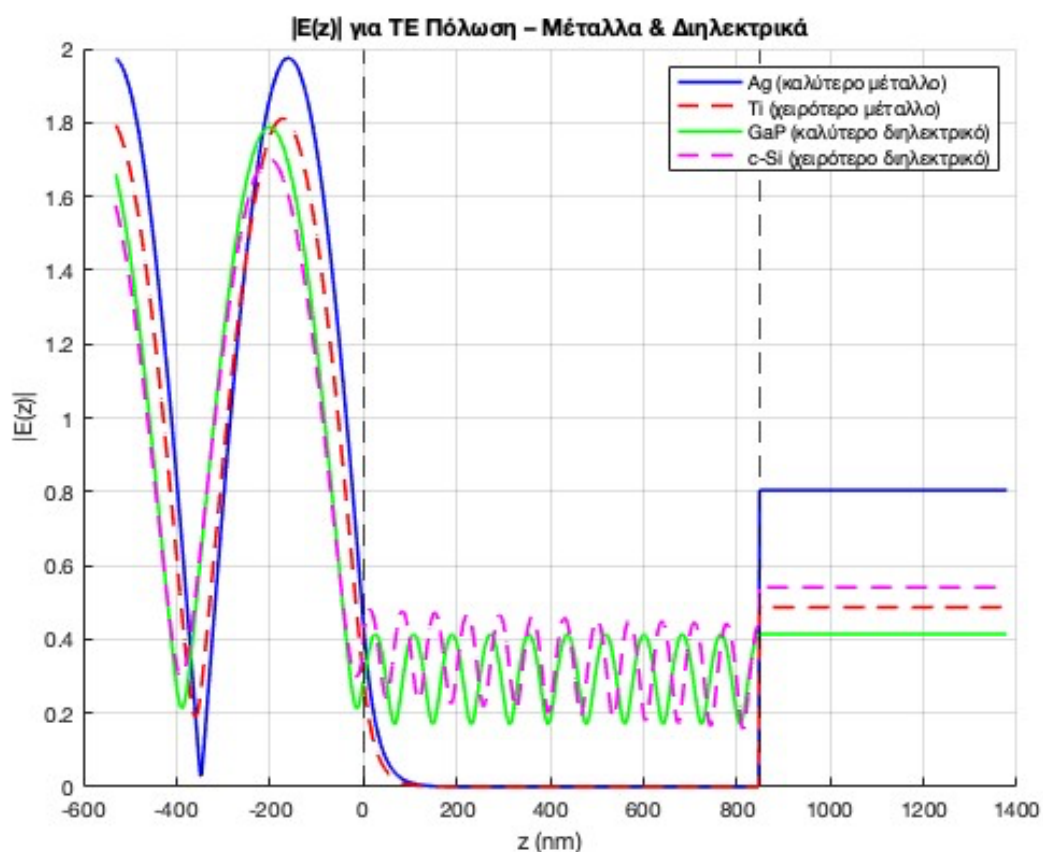
πόλωση. Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, κάθε γράφημα αντιστοιχεί σε ένα διαφορετικό υλικό: Ag (Αργύριο), Au (Χρυσός), GaP (Φωσφίδιο του Γαλλίου) και c-Si (κρυσταλλικό Πυρίτιο), με το πάχος του στρώματος να παραμένει  $h=0.8\lambda_0$ . Οι άξονες και οι χρωματικές κλίμακες έχουν την ίδια σημασία με πριν, όπου ο οριζόντιος άξονας αντιπροσωπεύει το μήκος κύματος  $\lambda$  (σε nm) και ο κατακόρυφος άξονας τη γωνία πρόσπτωσης  $\theta$  (σε μοίρες), ενώ το χρώμα υποδεικνύει την τιμή του συντελεστή ανάκλασης. Συγκρίνοντας με την TE πόλωση, παρατηρούμε ότι η συμπεριφορά της ανάκλασης για TM πόλωση είναι διαφορετική για κάθε υλικό. Για τα μέταλλα Ag και Au, η ανάκλαση παραμένει υψηλή, αλλά με κάποιες διαφοροποιήσεις στην εξάρτηση από τη γωνία και το μήκος κύματος σε σχέση με την TE πόλωση. Για τους ημιαγωγούς GaP και c-Si, τα μοτίβα ανάκλασης είναι και πάλι σύνθετα, με περιοχές έντονης και ασθενούς ανάκλασης, αλλά οι συγκεκριμένες θέσεις και εντάσεις αυτών των περιοχών διαφέρουν από την περίπτωση της TE πόλωσης. Αυτό υπογραμμίζει την εξάρτηση της οπτικής απόκρισης ενός υλικού όχι μόνο από τις ιδιότητές του και τη γεωμετρία, αλλά και από την πόλωση του προσπίπτοντος φωτός.

### (Δ) Αναπαράσταση του Μέτρου του Ηλεκτρικού Πεδίου





Στην εικόνα απεικονίζονται τέσσερις καμπύλες που παριστάνουν την κατανομή του μέτρου του ηλεκτρικού πεδίου  $|E(z)|$  συναρτήσει της θέσης  $z$  (σε nm) για TM πόλωση. Κάθε καμπύλη αντιστοιχεί σε ένα διαφορετικό υλικό: Ag (Αργύριο - καλύτερο μέταλλο), Au (Χρυσός - χειρότερο μέταλλο), GaP (Φωσφίδιο του Γαλλίου - καλύτερο διηλεκτρικό) και c-Si (κρυσταλλικό Πυρίτιο - χειρότερο διηλεκτρικό). Η περιοχή μεταξύ των δύο διακεκομμένων κάθετων γραμμών, περίπου από  $z=0$  nm έως  $z=900$  nm, αντιπροσωπεύει ένα στρώμα του υλικού. Παρατηρούμε ότι η διεξόδυση και η συμπεριφορά του ηλεκτρικού πεδίου εντός και εκτός του στρώματος διαφέρει σημαντικά για κάθε υλικό. Για τα μέταλλα (Ag και Au), το ηλεκτρικό πεδίο ελαττώνεται απότομα στην επιφάνεια, υποδεικνύοντας μικρή διεξόδυση. Αντίθετα, για τα διηλεκτρικά (GaP και c-Si), το ηλεκτρικό πεδίο παρουσιάζει ταλαντώσεις εντός του στρώματος, δημιουργώντας στάσιμα κύματα λόγω της ανάκλασης στα όρια του στρώματος. Η ένταση και η μορφή αυτών των ταλαντώσεων εξαρτώνται από τις οπτικές ιδιότητες κάθε διηλεκτρικού υλικού. Μετά το στρώμα (για  $z > 900$  nm), το διερχόμενο ηλεκτρικό πεδίο έχει διαφορετικές σταθερές τιμές για κάθε υλικό, αντανakλώντας τη διαφορετική ανάκλαση και απορρόφηση που προκαλεί το κάθε υλικό στο προσπίπτον ηλεκτρομαγνητικό κύμα.





Στην τελευταία εικόνα, παρουσιάζονται τέσσερις καμπύλες που απεικονίζουν την κατανομή του μέτρου του ηλεκτρικού πεδίου  $|E(z)|$  συναρτήσει της θέσης  $z$  (σε nm) για TE πόλωση. Κάθε καμπύλη αντιστοιχεί σε ένα διαφορετικό υλικό: Ag (Αργύριο - καλύτερο μέταλλο), Ti (Τιτάνιο - χειρότερο μέταλλο), GaP (Φωσφίδιο του Γαλλίου - καλύτερο διηλεκτρικό) και c-Si (κρυσταλλικό Πυρίτιο - χειρότερο διηλεκτρικό). Η περιοχή μεταξύ των δύο διακεκομμένων κάθετων γραμμών, περίπου από  $z=0$  nm έως  $z=900$  nm, αντιπροσωπεύει ένα στρώμα του υλικού. Παρατηρούμε ότι για την TE πόλωση, η συμπεριφορά του ηλεκτρικού πεδίου στα μέταλλα (Ag και Ti) είναι και πάλι χαρακτηριστικά διαφορετική από αυτή στα διηλεκτρικά (GaP και c-Si). Στα μέταλλα, το ηλεκτρικό πεδίο μειώνεται ταχύτατα καθώς εισέρχεται στο υλικό, αν και η διεύθυνση για το Ti φαίνεται να είναι μεγαλύτερη από ότι για το Ag. Στα διηλεκτρικά, εντός του στρώματος, εμφανίζονται σαφείς ταλαντώσεις που οφείλονται στην συμβολή του προσπίπτοντος και του ανακλώμενου κύματος, δημιουργώντας στάσιμα κύματα. Η συχνότητα και η amplitude αυτών των ταλαντώσεων διαφέρουν μεταξύ του GaP και του c-Si. Μετά το στρώμα (για  $z>900$  nm), η τιμή του διερχόμενου ηλεκτρικού πεδίου είναι διαφορετική για κάθε υλικό, γεγονός που συνδέεται με την ανακλαστικότητα και την απορρόφηση του κάθε υλικού για TE πόλωση. Η σύγκριση με την αντίστοιχη εικόνα για TM πόλωση αποκαλύπτει ότι η πόλωση του φωτός επηρεάζει σημαντικά την αλληλεπίδρασή του με τα υλικά και την κατανομή του ηλεκτρικού πεδίου.