NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS

SCHOOL OF ELECTRICAL AND COMPUTER ENGINEERING

ELECTROMAGNETIC FIELDS B – PROBLEM 2

ELECTROSTATIC GRATING OF NANORODS

Angelos Kamariadis | angeloskamariadis@gmail.com

ΕΡΩΤΗΜΑ (Α) – ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΗ ΣΚΕΔΑΣΗΣ

Έστω κύλινδρος ακτίνας a με διηλεκτρική σταθερά $\varepsilon > 1$, με άξονα παράλληλο στον άξονα $\hat{z}$. Το επιβαλλόμενο πεδίο είναι

$$\mathbf{E}_{\text{back}} = E_0(\hat{x}\cos\,\theta + \hat{y}\sin\,\theta)\,.$$

Στο επίπεδο xy, το δυναμικό έξω και μέσα από τον κύλινδρο γράφεται σε πολικές συντεταγμένες (r, ϕ) γύρω από το κέντρο του:

- Έξω (κενό): κρατώντας μόνο την αρμονική $m = 1$ (το μοναδικό διεγειρόμενο από ομογενές πεδίο):

$$V_{\text{out}}(r, \phi) = -E_0\, r\cos\,(\phi - \theta) \;+\; A\,\frac{a^2}{r}\,\cos\,(\phi - \theta).$$

- Μέσα (υλικό με επιτρεπτότητα ε):

$$V_{\text{in}}(r, \phi) = B\, r\cos\,(\phi - \theta).$$

Επιβάλλουμε συνοριακές συνθήκες στο $r = a$:

- Συνέχεια δυναμικού: $V_{\text{out}} = V_{\text{in}}$,
- Συνέχεια $\hat{n}\cdot D$: $\varepsilon_0\ \partial_r V_{\text{out}} = \varepsilon\varepsilon_0\ \partial_r V_{\text{in}}$.

Λύνοντας:

$$A = E_0\,\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \;\equiv\; \xi E_0 \text{ και } B = -\frac{2}{\varepsilon + 1}\,E_0$$

Άρα $\Longrightarrow V_{\text{out}} = -E_0\, r\cos(\phi - \theta) + \xi E_0\,\frac{a^2}{r}\cos(\phi - \theta)$ και $V_{\text{in}} = -\frac{2}{\varepsilon + 1}E_0\, r\cos(\phi - \theta)$

(ισχύει $E = -\nabla V$)

ΕΡΩΤΗΜΑ (Β) – ΜΟΡΦΗ ΥΝΟΛΙΚΟΥ ΣΚΕΔΑΖΟΜΕΝΟΥ ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΣΤΟ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΤΟΥ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ

Τα κέντρα είναι στα $(0{,}2nb)$ με $n \in \mathbb{Z}$. Για κάθε κύλινδρο ορίζουμε τοπικές πολικές (r_n, ϕ_n).

Με την υπόθεση της εκφώνησης ότι η παρουσία των άλλων κυλίνδρων δεν εισάγει ανώτερες αζιμουθιακές αρμονικές (μένουμε στο $m = 1$ για τον καθένα), το συνολικό σκεδαζόμενο δυναμικό γράφεται ως άθροισμα διπόλων ανά κύλινδρο, με ίδιους συντελεστές σε όλη τη διάταξη, αλλά με τοπικές γωνίες:

$$V_{scat}(x, y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{a^2}{r_n}[A_x \cos\ \phi_n + A_y \sin\ \phi_n]$$

όπου $\cos\phi_n = \frac{x}{r_n}$, $\sin\phi_n = \frac{y-2nb}{r_n}$ και $r_n = \sqrt{x^2 + (y-2nb)^2}$

Το εσωτερικό δυναμικό σε κάθε κύλινδρο παραμένει γραμμικό.

$$\text{Άρα} \Longrightarrow V_{in}^{(0)}(r,\phi) = B_x\, r\cos\ \phi + B_y\, r\sin\ \phi \Rightarrow V_{in}^{(0)}(x,y) = B_x\, x + B_y\, y$$

ΕΡΩΤΗΜΑ (Γ) – ΣΕΙΡΕΣ LAURENT

Χρησιμοποιούμε μιγαδική αναπαράσταση $z = re^{i\phi} = x + iy$ και κέντρα στο $z_n = i\, 2nb$.

Για $|z| < |z_n|$ ισχύει

$$\frac{1}{z - z_n} = -\frac{1}{z_n}\sum_{m=0}^{\infty}(\frac{z}{z_n})^m$$

Παίρνοντας πραγματικό/φανταστικό μέρος και σημειώνοντας ότι:

$$\frac{\cos\phi_n}{r_n} = \Re\left(\frac{1}{z - z_n}\right) \text{ και } \frac{\sin\phi_n}{r_n} = \Im\,(\frac{1}{z - z_n})$$

καταλήγουμε για $r < 2|n|b$ σε σειρές της μορφής:

$$\frac{\cos\phi_n}{r_n} = \sum_{m=1}^{\infty} C_{m,n}\, r^{m-1}\cos\,(m\phi) + D_{m,n}\, r^{m-1}\sin\,(m\phi)$$

$$\frac{\sin \phi_n}{r_n} = \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{C}_{m,n}\, r^{m-1} \cos(m\phi) + \tilde{D}_{m,n}\, r^{m-1} \sin(m\phi)$$

με συντελεστές $C_{m,n}, D_{m,n} \propto (2 \mid n \mid b)^{-(m+1)}$ και εναλλασσόμενα πρόσημα λόγω arg $z_n = \pm\pi/2$. Η γραφή με Laurent $\sim r^{-m}$ προκύπτει αν επεκτείνουμε για $r > 2|n|b$. Και οι δύο μορφές είναι συμβατές και χρήσιμες ανάλογα με την περιοχή σύγκλισης· εδώ μας χρειάζεται η επέκταση για $r < a < b$.

ΕΡΩΤΗΜΑ (Δ) – ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΣΥΝΘΗΚΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ ΜΟΝΑΔΙΚΗΣ ΛΥΣΗΣ

Λόγω περιοδικότητας, όλοι οι κύλινδροι μοιράζονται τους ίδιους συντελεστές (A_x, A_y) έξω και (B_x, B_y) μέσα. Η παρουσία των υπολοίπων αλλάζει το τοπικό πεδίο στο κέντρο κάθε κυλίνδρου:

- Η x-συνιστώσα μειώνεται
- Η y-συνιστώσα ενισχύεται

Έπειτα από άθροιση των πεδίων στο κέντρο με δύο συμμετρικούς γείτονες ανά n προκύπτει κλειστή μορφή με γνωστό άθροισμα πλέγματος:

$$S = 2a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2nb)^2} = \frac{a^2}{b^2}\,\frac{\pi^2}{12}$$

Θέτοντας $\xi = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}$ (και $\xi \to 1$ για PEC) και γράφοντας $E_{0x} = E_0 \cos\theta$, $E_{0y} = E_0 \sin\theta$, το αυτοσυνεπές σύστημα δίνει:

$$A_x = \frac{\xi}{1+\xi S}\, E_{0x} \text{ και } A_y = \frac{\xi}{1-\xi S}\, E_{0y}$$

Το εσωτερικό δυναμικό σε κάθε κύλινδρο είναι:

$$V_{in}^{(n)}(x,y) = B_x(x-0) + B_y(y-2nb), B_x = -\frac{2}{\varepsilon+1}(E_{0x} - SA_x), B_y = -\frac{2}{\varepsilon+1}(E_{0y} + SA_y)$$

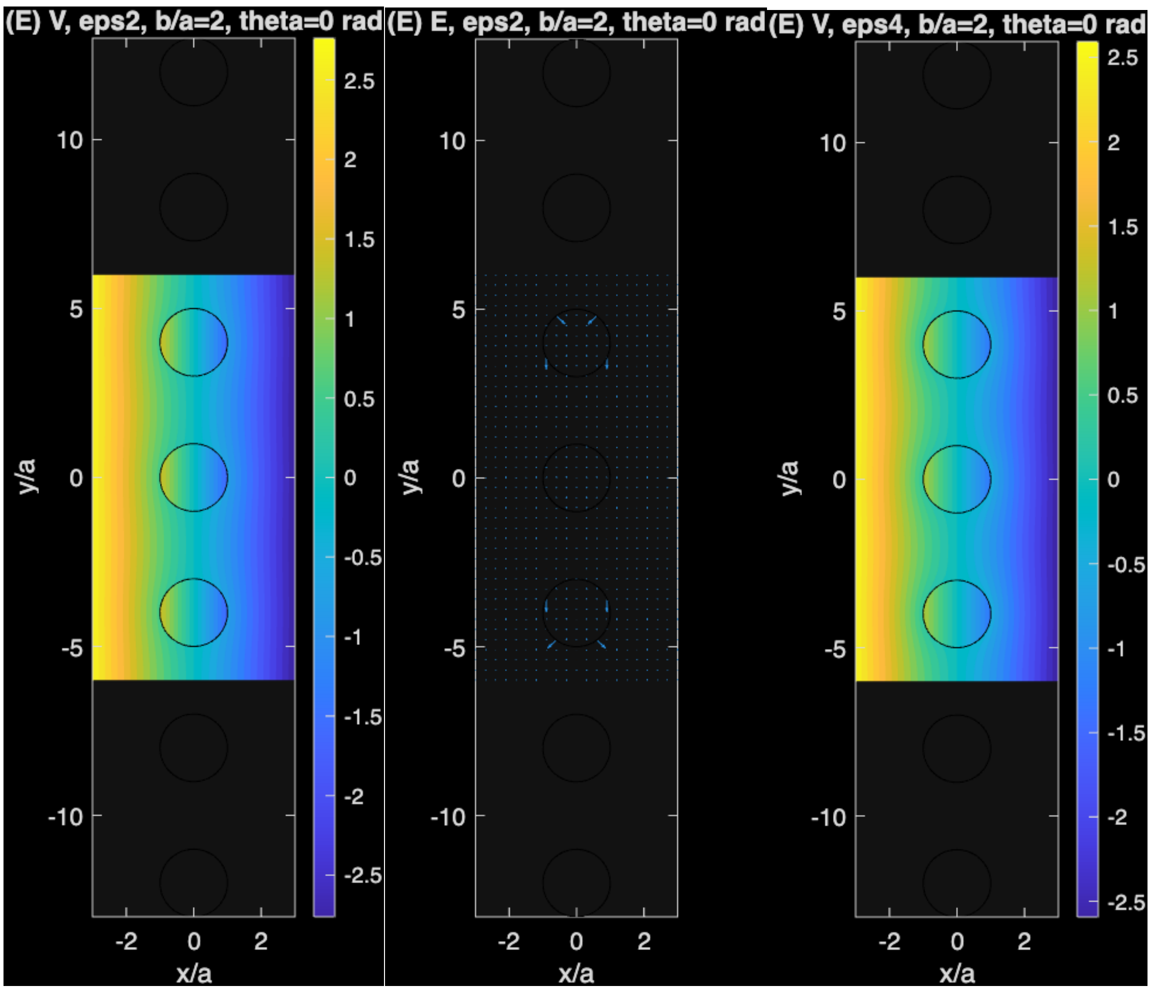
Το συνολικό δυναμικό σε κάθε σημείο (x, y) (εκτός εσωτερικού ενός συγκεκριμένου κυλίνδρου) είναι

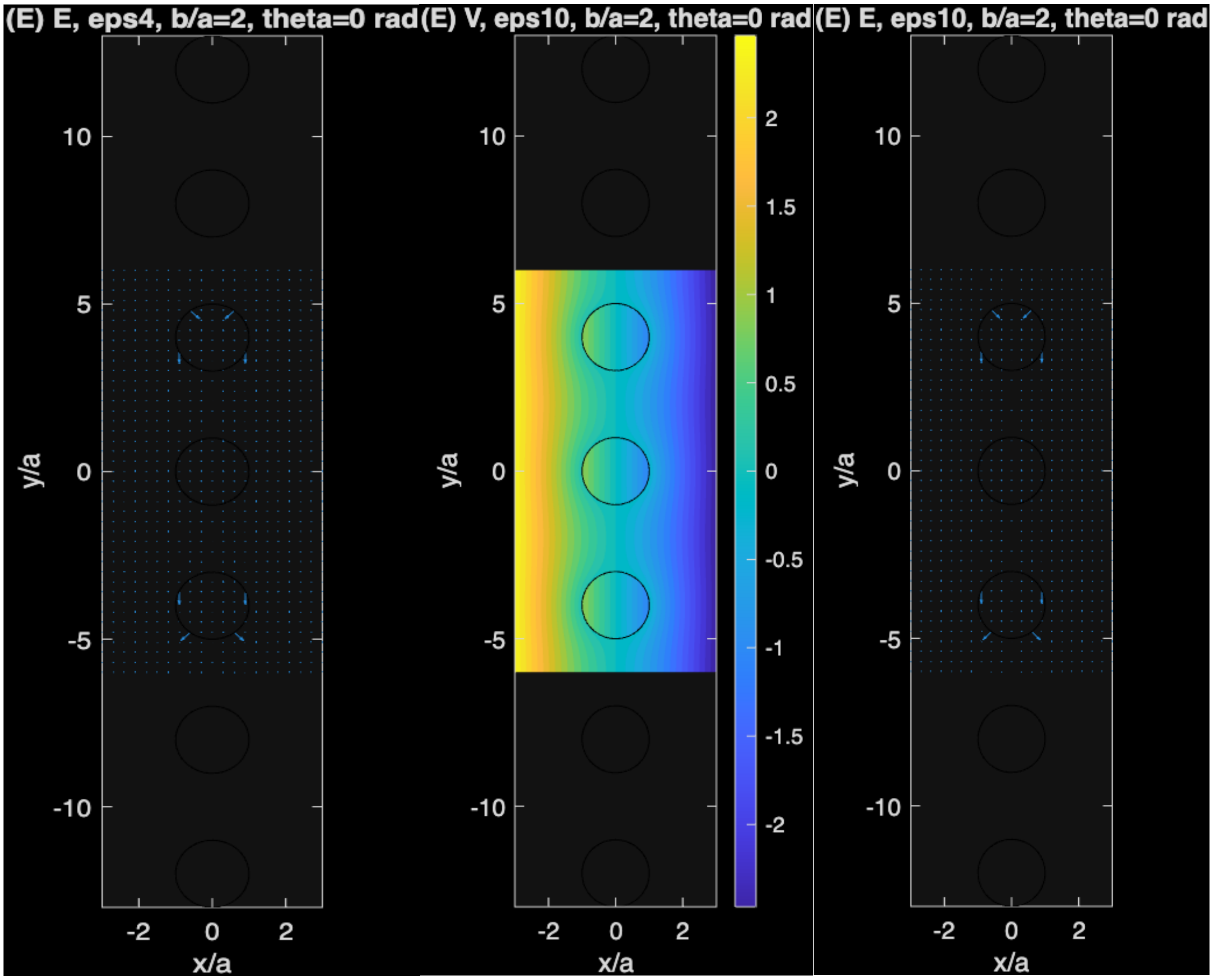
$$V(x, y) = -E_{0x}x - E_{0y}y \ + \sum_{n \in \mathbb{Z}} a^2 [A_x \frac{x}{r_n^2} + A_y \frac{y - 2nb}{r_n^2}], r_n^2 = x^2 + (y - 2nb)^2$$

ενώ μέσα σε έναν κύλινδρο, αντικαθιστούμε τον όρο του n με το γραμμικό $V_{in}^{(n)}$ για ομαλότητα και εφαρμογή των συνθηκών διεπιφάνειας. Το πεδίο είναι $E = -\nabla V$. Η παραπάνω λύση ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες (συνέχεια V και $\hat{n} \cdot \mathbf{D}$) υπό την παραδοχή $m = 1$.

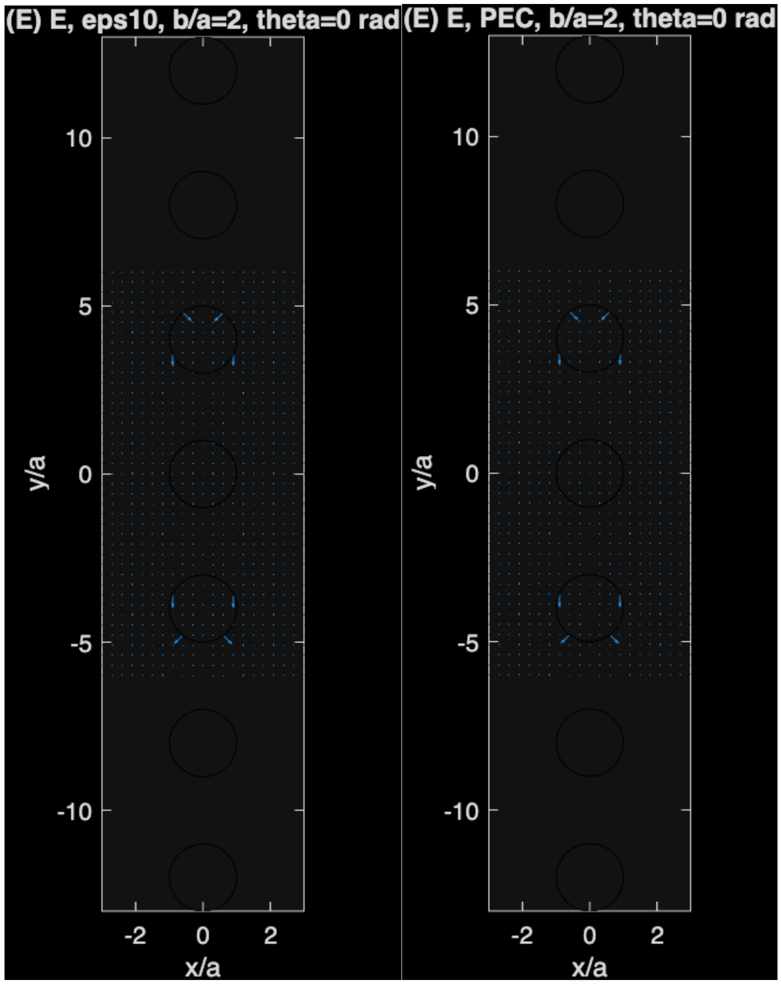
ΕΡΩΤΗΜΑ (Ε) – ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ Χ-Υ (1)

Στις παρακάτω γραφικές παραστάσεις απεικονίζονται το ηλεκτρικό και το δυναμικό πεδίο στο επίπεδο Χ-Υ, για 3 υλικά με επιτρεπτότητες ε = 2, 4, 10, καθώς και τέλεια αγώγιμους κυλίνδρους. Θεωρήθηκαν: b = 2α και θ = 0.





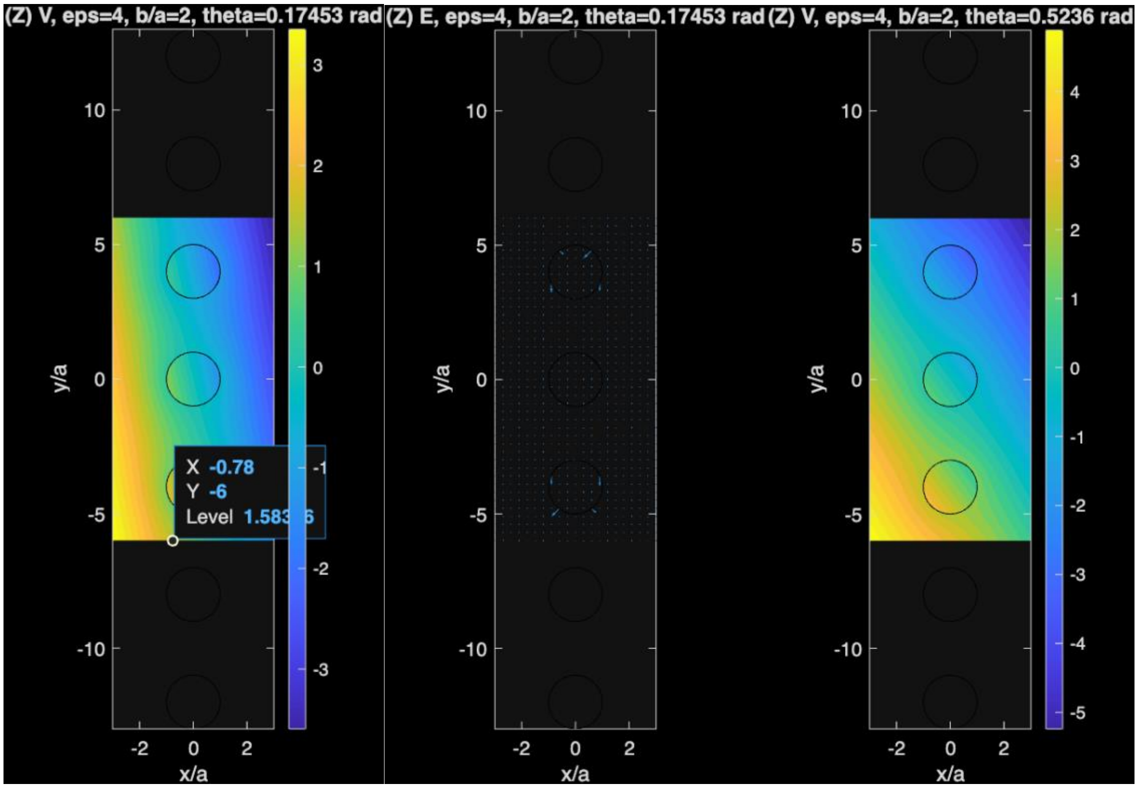
(E) E, eps4, b/a=2, theta=0 rad
(E) V, eps10, b/a=2, theta=0 rad
(E) E, eps10, b/a=2, theta=0 rad
y/a
x/a
10
5
0
-5
-10
-2
0
2
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2

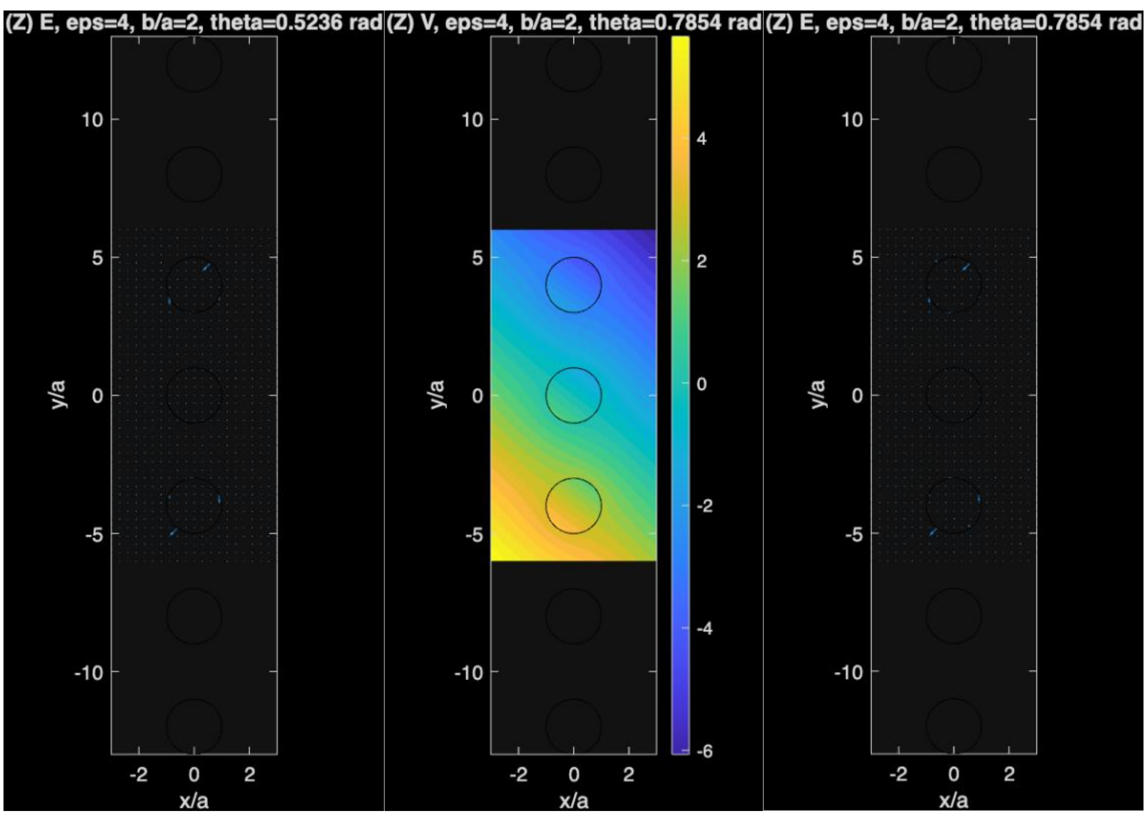


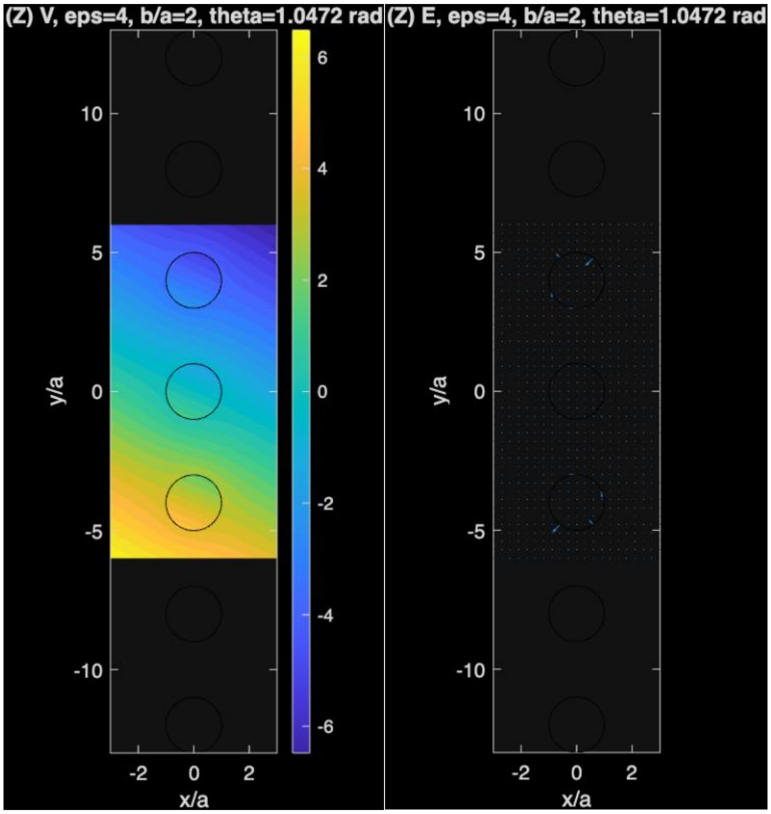
Όπως παρατηρούμε από τις πιο πάνω γραφικές παραστάσεις παραπάνω, με θ = 0 το πεδίο είναι οριζόντιο. Αυξάνοντας την επιτρεπτότητα ε, δηλαδή για όχι PEC υλικό, ο εξωτερικός όρος $A_x = \frac{\xi}{1+\xi S} E_0$ προσεγγίζει το PEC όριο ($\xi \rightarrow 1$) και το πεδίο ολισθαίνει γύρω από τους κυλίνδρους με όλο και ισχυρότερη παραμόρφωση.

ΕΡΩΤΗΜΑ (Ζ) – ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ Χ-Υ (2)

Στις παρακάτω γραφικές παραστάσεις απεικονίζονται το ηλεκτρικό και το δυναμικό πεδίο στο επίπεδο Χ-Υ, για γωνίες θ = 10°, 30 °, 45 °, 60 °. Θεωρήθηκαν: b = 2α και ε = 4.


(Z) V, eps=4, b/a=2, theta=0.17453 rad
(Z) E, eps=4, b/a=2, theta=0.17453 rad
(Z) V, eps=4, b/a=2, theta=0.5236 rad
X -0.78
Y -6
Level 1.583
x/a
y/a

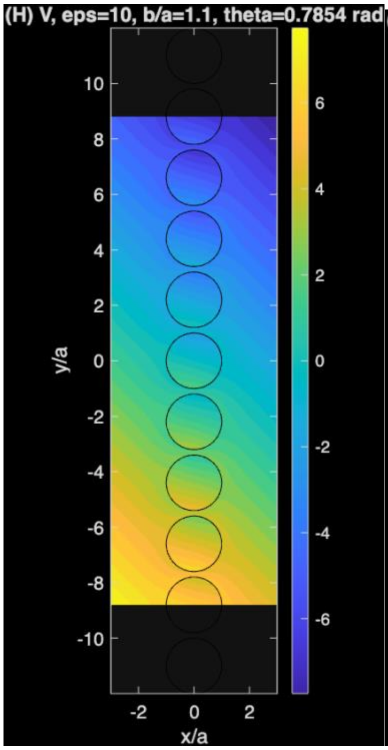

(Z) E, eps=4, b/a=2, theta=0.5236 rad
(Z) V, eps=4, b/a=2, theta=0.7854 rad
(Z) E, eps=4, b/a=2, theta=0.7854 rad
x/a
y/a

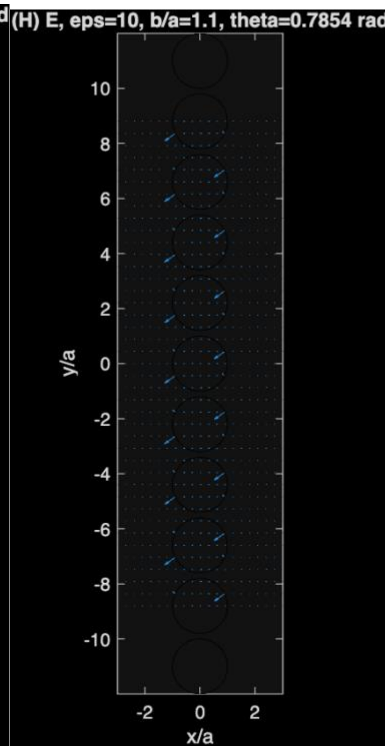


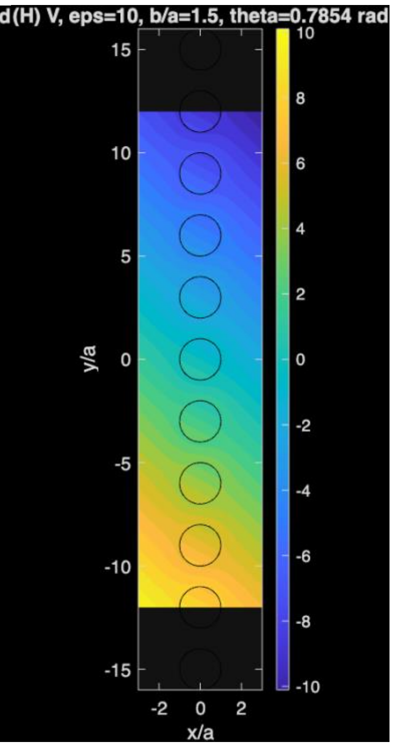
Όπως παρατηρούμε από τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις, η προβολή κατά τον άξονα y, διεγείρει τον ενισχυμένο κλάδο $A_y = \frac{\xi}{1-\xi S} E_{0y}$. Όσο η γωνία θ μεγαλώνει, οι δυναμικές καμπύλες κλίνουν και εμφανίζεται ισχυρότερη εκτροπή κατά την κατεύθυνση της διάταξης.

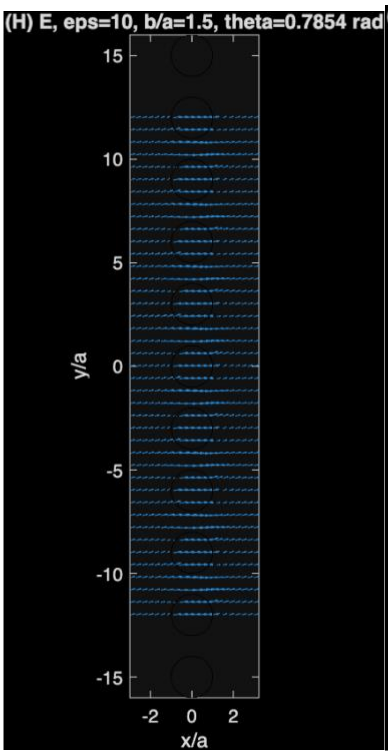
ΕΡΩΤΗΜΑ (Η) – ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ Χ-Υ (3)

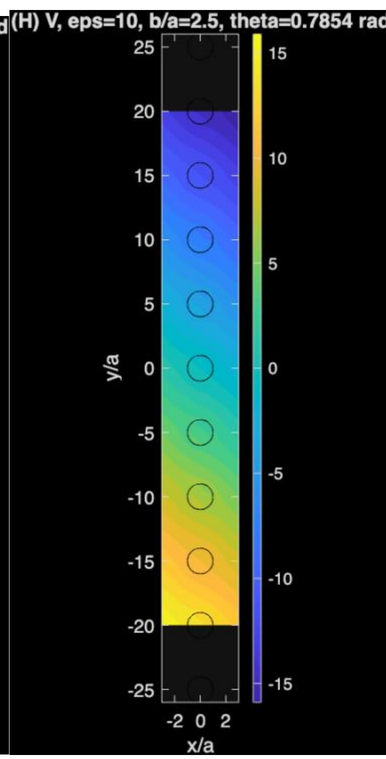
Στις παρακάτω γραφικές παραστάσεις απεικονίζονται το ηλεκτρικό και το δυναμικό πεδίο στο επίπεδο Χ-Υ, για περιόδους b = 1.1α, 1.5α, 2.5α, 4α. Θεωρήθηκαν: θ = π/4 και ε = 10.

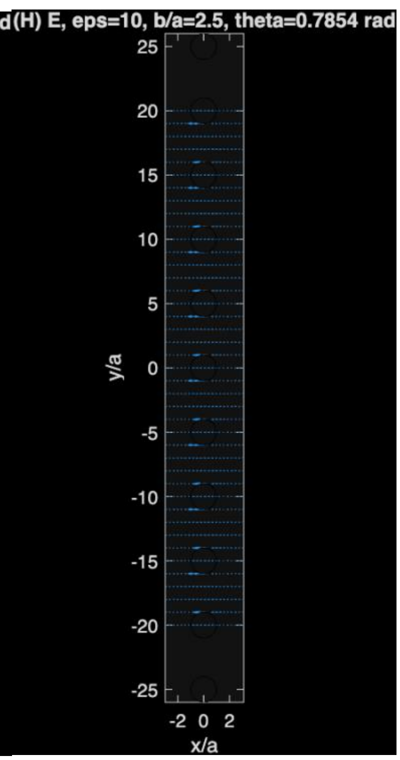

(H) V, eps=10, b/a=1.1, theta=0.7854 rad
y/a
x/a

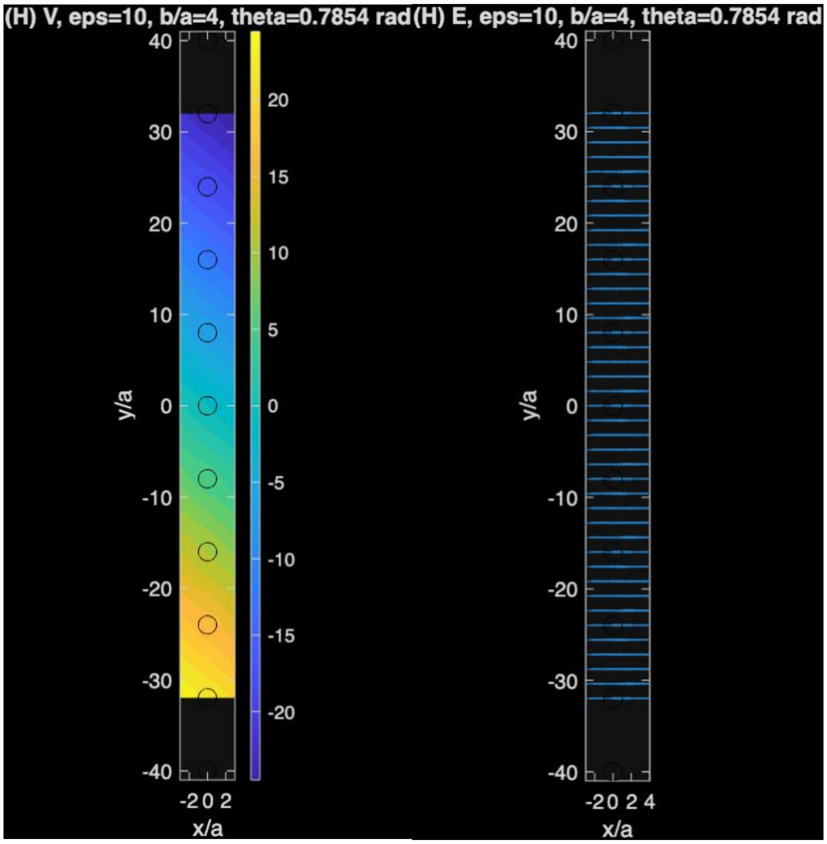

(H) E, eps=10, b/a=1.1, theta=0.7854 rad
y/a
x/a


(H) V, eps=10, b/a=1.5, theta=0.7854 rad
y/a
x/a


(H) E, eps=10, b/a=1.5, theta=0.7854 rad
y/a
x/a


(H) V, eps=10, b/a=2.5, theta=0.7854 rad
y/a
x/a


(H) E, eps=10, b/a=2.5, theta=0.7854 rad
y/a
x/a



Όπως φαίνεται από τις γραφικές παραστάσεις άνωθεν, ο παράγοντας $S = \frac{a^2}{b^2}\frac{\pi^2}{12}$ ελέγχει όλη τη μη-τοπικότητα. Παρατηρούμε πως για μικρά $\frac{b}{\alpha}$, λόγω της αντιστρόφως ανάλογης σχέσης του S με τα $\frac{b}{\alpha}$, έχουμε: όταν$\frac{b}{\alpha} = 1.1$, το S είναι μεγάλο, άρα υπάρχει ισχυρή αλληλεπίδραση. Για πιο αραιές διατάξεις, δηλαδή για $\frac{b}{\alpha} = 1.5, 2.5$ και 4, το S είναι μικρό, άρα επανερχόμαστε κοντά στη μοναδική λύση του κυλίνδρου.