NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS

SCHOOL OF ELECTRICAL AND COMPUTER ENGINEERING

ELECTROMAGNETIC FIELDS B – PROBLEM 1

BISTABILITY IN ELECTROSTATIC NANOSPHERES

Angelos Kamariadis
angeloskamariadis@gmail.com

Ερώτημα Α – Συνθήκες που οδηγούν σε διευστάθεια

Μη γραμμική σχετική επιτρεπτότητα:

$$\varepsilon(E) = 1 + \frac{\gamma}{1 + \kappa \mid E \mid^2} \text{ με } \gamma, \kappa > 0$$

Από την συμμετρία, στο ακτινικό πεδίο ισχύει:

$$\mathbf{E}(r) = E(r)\,\hat{r}$$

Έτσι, χρησιμοποιώντας τον νόμο του Gauss (ολοκληρωτική μορφή) παίρνουμε:

$$\oint \mathrm{E} \cdot dS = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon(E)} \Rightarrow 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon(E)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E(r)\,\varepsilon(E) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = E_0 (\frac{a}{r})^2$$

Άρα η εξίσωση ισορροπίας που δίνει το $E(r)$ είναι η ακόλουθη:

$$E(r)(1 + \frac{\gamma}{1 + \kappa E(r)^2}) = E_0 (\frac{a}{r})^2$$

Για να υπάρχει bistability, χρειαζόμαστε πολλαπλές λύσεις σε μία αλγεβρική εξίσωση. Άρα η συνάρτηση:

$$f(E) = E(1 + \frac{\gamma}{1 + \kappa E^2})$$

πρέπει να μην είναι μονότονη. Αυτό συμβαίνει όταν:

$$\frac{df}{dE} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{df}{dE} = 1 + \frac{\gamma}{1 + \kappa E^2} - \frac{2\gamma\kappa E^2}{(1 + \kappa E^2)^2}$$

Θέτουμε:

$$\frac{df}{dE} = 0 \Rightarrow 1 + \frac{\gamma(1 - \kappa E^2)}{(1 + \kappa E^2)^2} = 0$$

Για να έχει η εξίσωση:

$$\frac{df}{dE} = 0 \Rightarrow 1 + \frac{\gamma(1-\kappa E^2)}{(1+\kappa E^2)^2} = 0$$

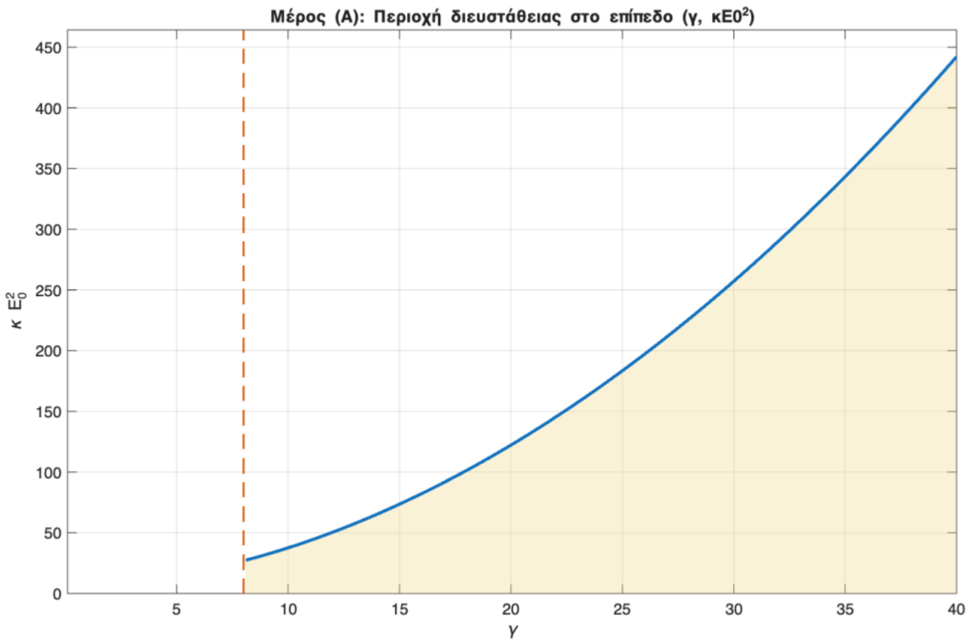
λύσεις, πρέπει η $f(E)$ να αποκτήσει σημεία καμπής.

$$\Rightarrow \quad \gamma > 8$$

Άρα, στο δισδιάστατο επίπεδο $(\gamma, \kappa E_0^2)$ ισχύουν τα ακόλουθα:

- Για $\gamma \leq 8 \Rightarrow$ Μονοτονία $\Rightarrow$ Δεν υφίσταται bistability.
- Για $\gamma > 8 \Rightarrow$ Δεν υπάρχει μονοτονία $\Rightarrow$ Υφίσταται bistability.

Παρακάτω, φαίνεται η περιοχή διευστάθειας στο επίπεδο γ, κE_0^2, σε ένα γράφημα το οποίο σχεδιάστηκε με τη βοήθεια του MATLAB.



Ερώτημα Β – Εύρη τιμών για διευστάθεια

Η συνάρτηση f(E) με γ = 20, κ = 20 παρουσιάζει δύο κρίσιμες τιμές E_1 και E_2 όπου df/dE = 0. Υπολογίζοντας τις, παίρνουμε:

$$E_1 \approx 0.287 \text{ V/m } \kappa\alpha\iota \; E_2 \approx 0.604 \text{ V/m}$$

Αντιστοιχούν σε τιμές $f(E_1)$, $f(E_2)$:

$$f(E_1) \approx 0.935, f(E_2) \approx 0.762$$

(μονάδες V/m, με κανονικοποίηση $E_0 = 1$).

Άρα, για σταθερό r υπάρχουν τρεις λύσεις όταν

$$f_{\min} < S < f_{\max},$$

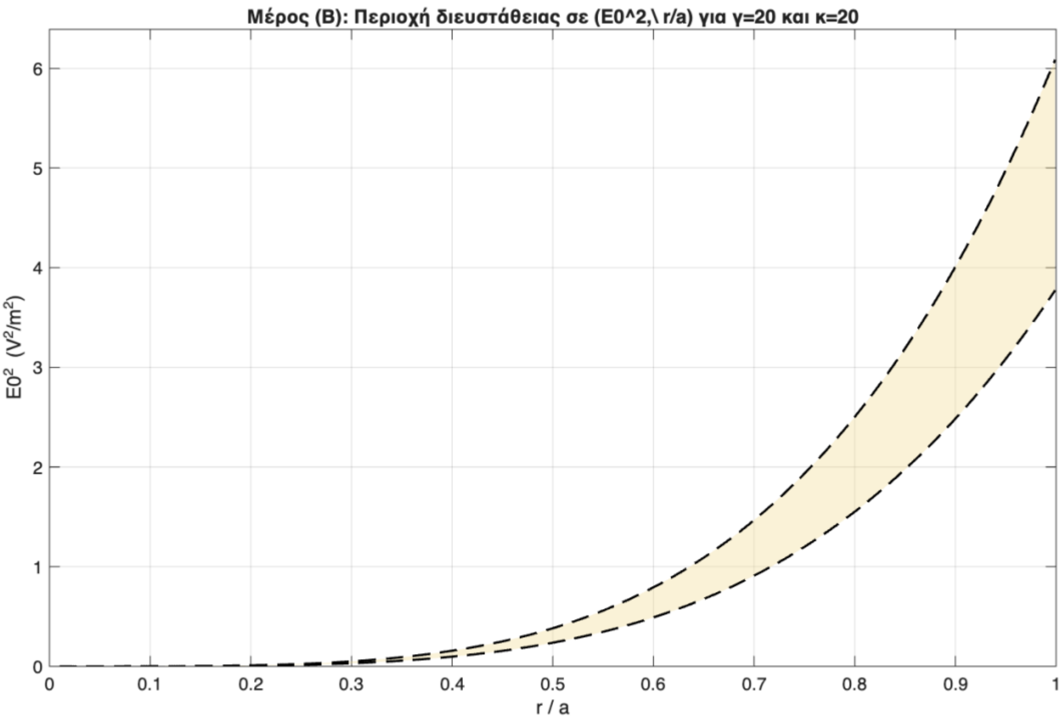
$$\Rightarrow f_{\min} = 1.9463055 < S < f_{\max} = 2.4722247.$$

$S = E_0 \, (a/r)^2 \Rightarrow$ Άρα το διάστημα των τιμών του E_0 για τις οποίες υπάρχει bistability, για δεδομένο r, είναι

$$E_{0,\min}(r) = f_{\min} \, (\frac{r}{a})^2, E_{0,\max}(r) = f_{\max} \, (\frac{r}{a})^2.$$

Συνεπώς το διάστημα για E_0^2 είναι απλά τα τετράγωνα αυτών των ορίων.

Στο παρακάτω γράφημα απεικονίζεται το παραμετρικό χωρίο που οδηγεί σε bistability.



Το πεδίο εκτός της σφαίρας, δηλαδή για κάποιο σημείο για το οποίο ισχύει r > a παρουσιάζει bistability μόνο όταν:

$$E_0\left(\frac{r}{a}\right)^2 \in [f_{min}, f_{max}]$$

όπου f_{min} και f_{max} είναι οι τιμές της f(E) στα τοπικά άκρα (εκεί όπου $f'(E) = 0$).

Συνεπώς, για r > a παρουσιάζεται bistability μόνο αν το $E_0 < \frac{fmax}{(\frac{a}{r})^2}$ και $E_0 > \frac{fmin}{(\frac{a}{r})^2}$. Άρα, όσο πιο μακριά από τη σφαίρα μετακινείται, τόσο πιο δύσκολο είναι να διατηρηθεί το bistability, καθώς το πεδίο τείνει να γίνει μονοσταθές γιατί το $E_0(a/r)^2$ μικραίνει.

Ερώτημα Γ – Δυνατές τιμές ηλεκτρικού πεδίου για 4 συγκεκριμένες θέσεις μανδύα

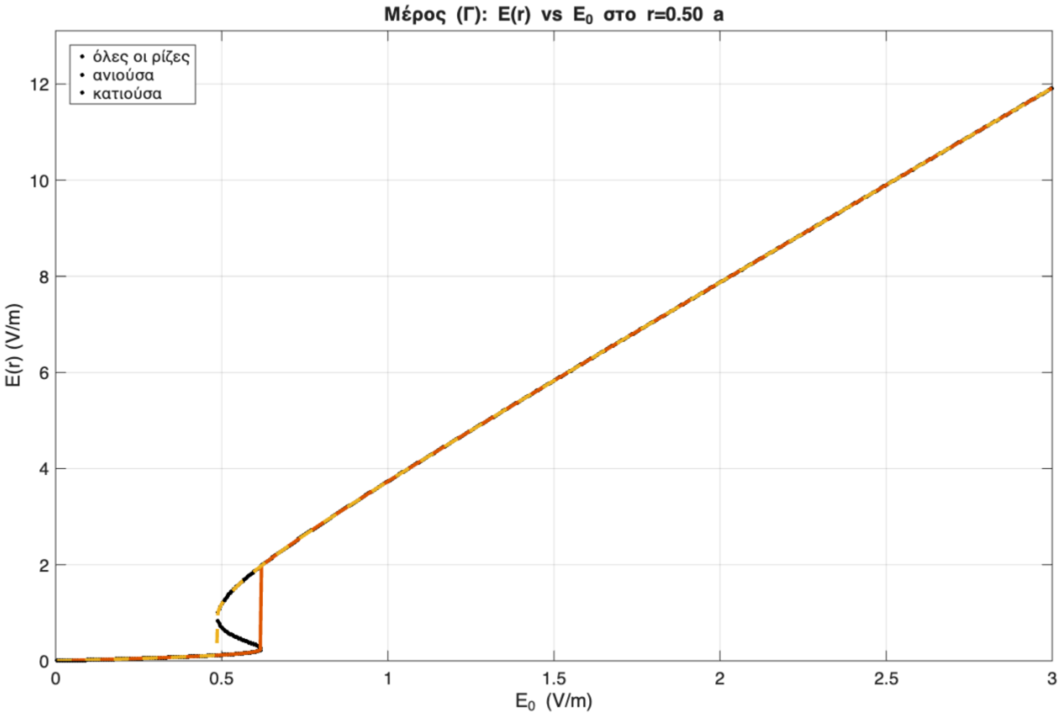
Για σταθερές θέσεις μέσα στο μανδύα (r = 0.50α, 0.60α, 0.75α, 0.95α), λύνουμε την εξίσωση:

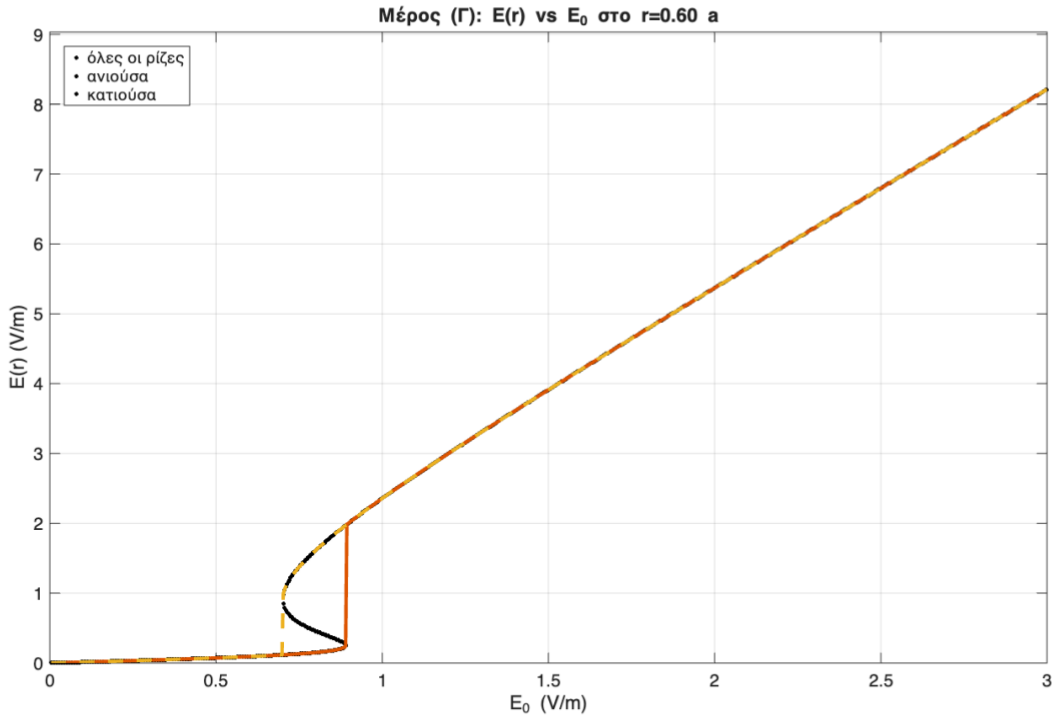
$$f(E) = E_0\left(\frac{a}{r}\right)^2$$

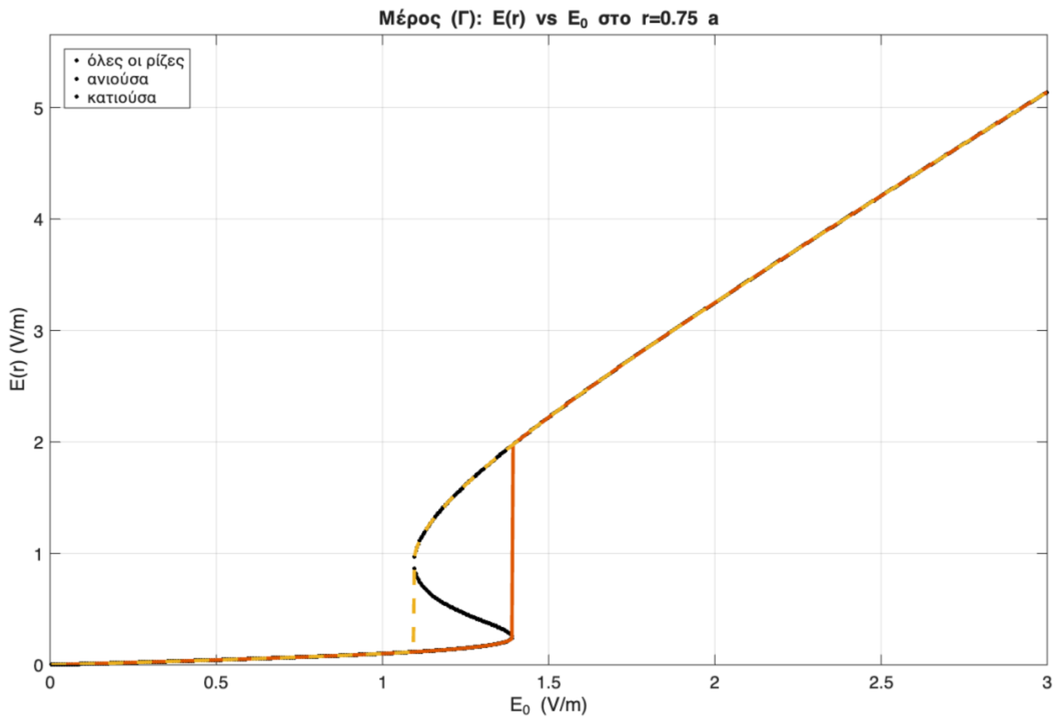
από την οποία παίρνουμε τις ακόλουθες τιμές:

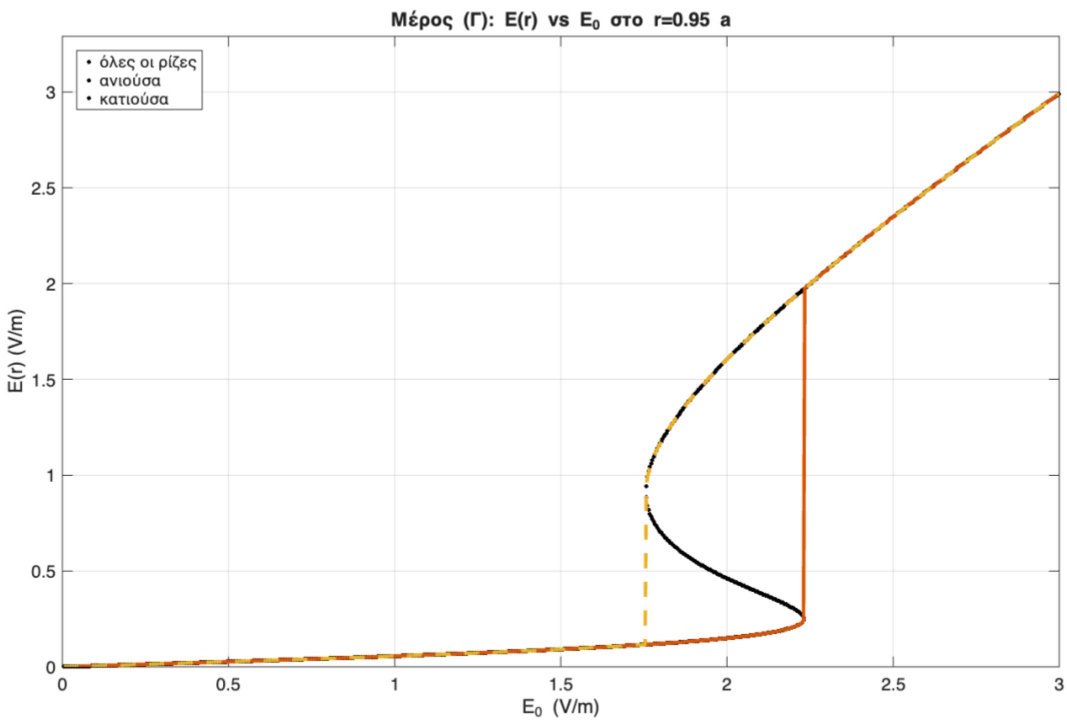
- $r = 0.50\alpha$
  - $E_0 \in [0.486576, 0.618056]$
  - $E_0^2 \in [0.236757, 0.381993]$
- $r = 0.60\alpha$
  - $E_0 \in [0.700670, 0.890001]$
  - $E_0^2 \in [0.490938, 0.792102]$
- $r = 0.75\alpha$
  - $E_0 \in [1.094797, 1.390626]$
  - $E_0^2 \in [1.198580, 1.933842]$
- $r = 0.95\alpha$
  - $E_0 \in [1.756541, 2.231183]$
  - $E_0^2 \in [3.085435, 4.978177]$

Παρακάτω, παρουσιάζονται τα γραφήματα για τα τέσσερα σημεία του σφαιρικού μανδύα.


Μέρος (Γ): E(r) vs E$_0$ στο r=0.50 a
όλες οι ρίζες
ανιούσα
κατιούσα
E(r) (V/m)
E$_0$ (V/m)
0
2
4
6
8
10
12
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3


Μέρος (Γ): E(r) vs E$_0$ στο r=0.60 a
όλες οι ρίζες
ανιούσα
κατιούσα
E(r) (V/m)
E$_0$ (V/m)
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

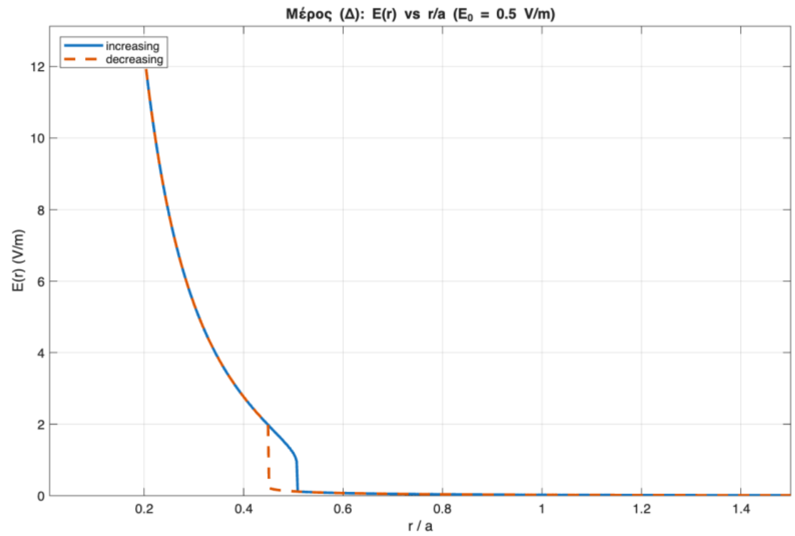


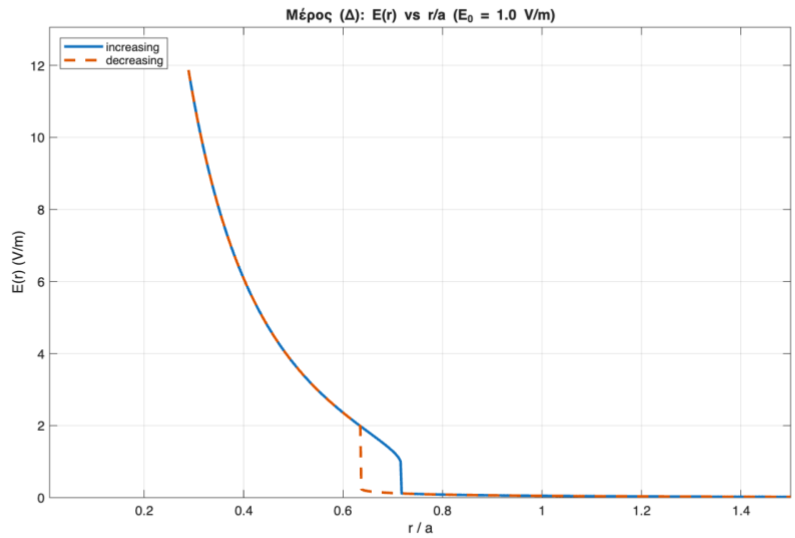


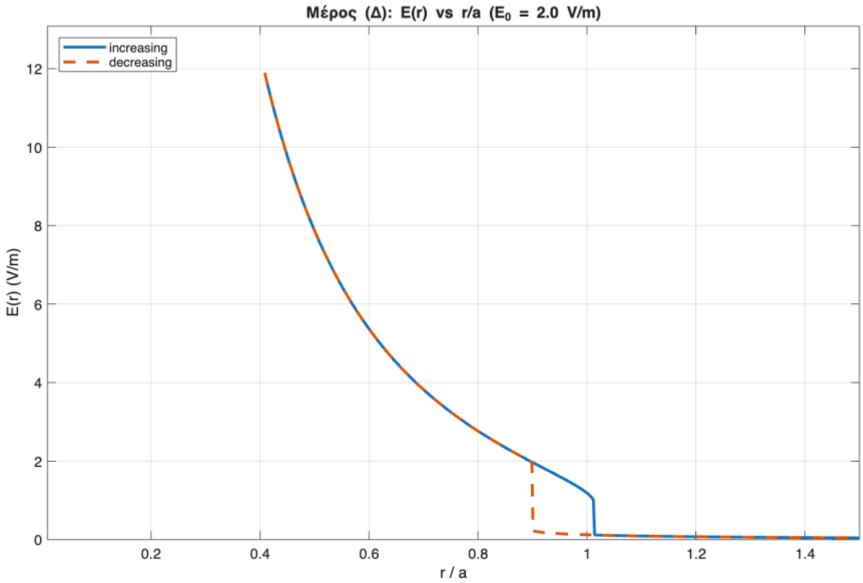
Από τα παραπάνω γραφήματα συμπεραίνουμε πως για μικρές τιμές του εξωτερικού πεδίου E_0, δηλαδή έξω από τα διαστήματα διευστάθειας, υπάρχει μία και μοναδική λύση και το εσωτερικό πεδίο αυξάνεται μονοτονικά με το E_0. Όταν το E_0 εισέλθει στο διάστημα όπου υπάρχουν τρεις λύσεις, τότε εμφανίζονται τρία δυνατά καθεστώτα: μία χαμηλής έντασης σταθερή λύση, μία ενδιάμεση λύση (συνήθως ασταθής), και μία υψηλής έντασης σταθερή λύση. Κατά την ανιούσα πορεία (solid line), το σύστημα ακολουθεί τη χαμηλή λύση μέχρι το σημείο ανατροπής (saddle-node), όπου ξαφνικά «πηδά» στην υψηλή λύση. Αυτό εκδηλώνεται ως απότομο άλμα στο γράφημα. Αντίθετα, κατά την κατιούσα πορεία (dashed line), το σύστημα παραμένει στην υψηλή λύση μέχρι να φτάσει στο δεύτερο κρίσιμο σημείο, όπου πέφτει ξαφνικά στη χαμηλή. Το αποτέλεσμα είναι ένας χαρακτηριστικός βρόγχος υστέρησης (hysteresis loop). Γενικά, όσο πιο κοντά στην επιφάνεια της σφαίρας, τόσο το διάστημα διευστάθειας μετατοπίζεται προς μεγαλύτερες τιμές του E_0 και διευρύνεται.

Ερώτημα Δ – Ηλεκτρικό πεδίο κατά μήκος της ακτίνας της σφαίρας, με σταθερό πεδίο τροφοδοσίας

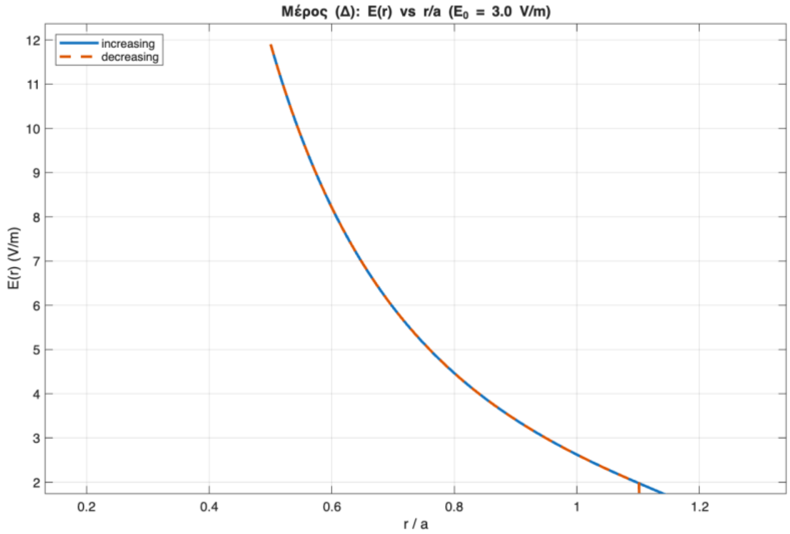
Για $\gamma = 20$ και $\kappa = 20$ $(m/V)^2$, σχεδιάστηκε το ηλεκτρικό πεδίο κατά μήκος της ακτίνας της σφαίρας (και λίγο έξω από αυτή: $0 < r/a < 1.5$), κρατώντας το πεδίο τροφοδοσίας E_0 σταθερό. Εξετάστηκαν τέσσερις σταθερές τιμές διέγερσης: E_0=0.5 V/m, E_0=1 V/m, E_0=2 V/m και E_0=3 V/m σε ξεχωριστά διαγράμματα, τα οποία φαίνονται παρακάτω.







Μέρος (Δ): E(r) vs r/a (E_0 = 2.0 V/m)
increasing
decreasing
E(r) (V/m)
r / a



Μέρος (Δ): E(r) vs r/a (E_0 = 3.0 V/m)
increasing
decreasing
E(r) (V/m)
r / a