

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS

SCHOOL OF ELECTRICAL AND COMPUTER ENGINEERING



ELECTROMAGNETIC FIELDS B – PROBLEM 3

CYLINDRICAL MAGNETOSTATIC CLOAK

Angelos Kamariadis
angeloskamariadis@gmail.com

ΕΡΩΤΗΜΑ Α - ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ ΚΑΙ ΕΥΡΕΣΗ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

Εφόσον δεν υπάρχουν ελένθερα ρεύματα, μπορούμε να ορίσουμε το μαγνητικό πεδίο, μέσω του βαθμωτού μαγνητικού δυναμικού.

$$H = -\nabla V_m$$

Το δυναμικό ικανοποιεί την εξίσωση Laplace.

$$\Rightarrow \nabla^2 V_m = 0$$

Λόγω της μορφής του εξωτερικού, επιβαλλόμενου στον κύλινδρο μαγνητικού πεδίου: $B = B_0(\hat{r}\cos\varphi + \hat{\varphi}\sin\varphi)$, το βαθμωτό μαγνητικό δυναμικό θα έχει μορφή:

$$V_m(r, \varphi) = f(r)\cos\varphi$$

Διακρίνουμε τρεις περιοχές, για την επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών.

- Περιοχή 1 - Εσωτερικός κυλίνδρος ($r < a$)

Εφόσον βρισκόμαστε στον εσωτερικό κύλινδρο, λαμβάνουμε υπόψη την σχετική μαγνητική διαπερατότητα μ_1 . Το βαθμωτό μαγνητικό δυναμικό στην πρώτη περιοχή, δίνεται από την σχέση:

$$V_{m1}(r, \varphi) = -C_1 r \cos\varphi$$

- Περιοχή 2 - Εξωτερικός κύλινδρος ($r \in (a, b)$)

Εφόσον βρισκόμαστε στον εξωτερικό κύλινδρο, λαμβάνουμε υπόψη την σχετική μαγνητική διαπερατότητα μ_2 . Το βαθμωτό μαγνητικό δυναμικό στην δεύτερη περιοχή, δίνεται από την σχέση:

$$V_{m2}(r, \varphi) = -(C_2 r - \frac{D_2}{r}) \cos\varphi$$

- Περιοχή 3 - Εξωτερικό ($r > b$)

Εφόσον βρισκόμαστε στον εξωτερικό μανδύα, λαμβάνουμε υπόψην την μαγνητική διαπερατότητα του κενού μ_0 . Στην περιοχή αυτή, υφίσταται τόσο το ομογενές μαγνητικό πεδίο, το οποίο αντιστοιχεί σε δυναμικό: $-H_0 r \cos\varphi$, όσο και η διαταραχή λόγω του κυλίνδρου. Άρα, το βαθμωτό μαγνητικό δυναμικό στην τρίτη περιοχή, δίνεται από την σχέση:

$$V_{m3}(r, \varphi) = -H_0 r \cos\varphi + \frac{D_3}{r} \cos\varphi$$

Στα σύνορα των υλικών, υπάρχει η απαίτηση να ικανοποιούνται οι συνθήκες συνέχειας. Δηλαδή, η εφαπτομενική συνιστώσα του H και η κάθετη συνιστώσα του B, πρέπει να είναι συνεχείς.

Άρα, στο σύνορο $r = a$ ισχύει:

$$\begin{aligned} V_{m1}(r = a) = V_{m2}(r = a) &\Rightarrow -C_1 a = -(C_2 a - \frac{D_2}{a}) \\ -\mu_1 \frac{\partial V_{m1}(r=a)}{\partial r} &= -\mu_2 \frac{\partial V_{m2}(r=a)}{\partial r} \Rightarrow \mu_1 C_1 = \mu_2 (C_2 + \frac{D_2}{a^2}) \end{aligned}$$

και στο σύνορο $r = b$ ισχύει:

$$\begin{aligned} V_{m2}(r = b) = V_{m3}(r = b) &\Rightarrow -(C_2 b - \frac{D_2}{b}) = -H_0 b + \frac{D_3}{b} \\ -\mu_2 \frac{\partial V_{m2}(r=b)}{\partial r} &= -\mu_0 \frac{\partial V_{m3}(r=b)}{\partial r} \Rightarrow \mu_2 (C_2 + \frac{D_2}{b^2}) = \mu_0 (H_0 + \frac{D_3}{b^2}) \end{aligned}$$

Επίλυση συστήματος:

$$\mu_1 \left(C_2 - \frac{D_2}{a^2} \right) = \mu_2 \left(C_2 + \frac{D_2}{a^2} \right) \Rightarrow (\mu_1 - \mu_2) C_2 = (\mu_1 + \mu_2) \frac{D_2}{a^2}$$

$$D_2 = a^2 \frac{(\mu_1 - \mu_2)}{(\mu_1 + \mu_2)} C_2$$

$$\mu_2 \left(C_2 + \frac{D_2}{a^2} \right) = \mu_0 (2H_0 - C_2 + \frac{D_2}{b^2})$$

$$C_2(\mu_0 + \mu_2) + \frac{D_2}{b^2}(\mu_2 - \mu_0) = 2\mu_0 H_0$$

$$\Rightarrow C_2(\mu_0 + \mu_2) + C_2 \frac{a^2}{b^2} \frac{(\mu_1 - \mu_2)}{(\mu_1 + \mu_2)} (\mu_2 - \mu_0) = 2\mu_0 H_0$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{2\mu_0 H_0}{(\mu_0 + \mu_2) + \frac{a^2}{b^2} \frac{(\mu_1 - \mu_2)}{(\mu_1 + \mu_2)} (\mu_2 - \mu_0)}$$

Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία και για τον υπολογισμό των D_2 , D_3 και C_1 , τα οποία για συντομία παραθέτω έτοιμα παρακάτω.

$$\begin{aligned} D_2 &= C_2 a^2 \frac{(\mu_1 - \mu_2)}{(\mu_1 + \mu_2)} \\ D_3 &= b^2 (H_0 - C_2) + D_2 \\ C_1 &= C_2 \left(1 - \frac{(\mu_1 - \mu_2)}{(\mu_1 + \mu_2)}\right) \end{aligned}$$

Το διάνυσμα της έντασης του μαγνητικού πεδίου $H = -\nabla V_m$ δίνεται σε πολικές συντεταγμένες από τη σχέση:

$$H = -\frac{\partial V_m}{\partial r} \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial V_m}{\partial \varphi} \hat{\varphi}$$

Άρα για τις τρεις περιοχές, το μαγνητικό πεδίο είναι:

- Περιοχή 1 - $r < a$: $H_1 = C_1 (\hat{r} \cos \varphi - \hat{\varphi} \sin \varphi)$
- Περιοχή 2 - $a < r < b$: $H_2 = (C_2 + \frac{D_2}{r^2}) \cos \varphi \hat{r} - (C_2 - \frac{D_2}{r^2}) \sin \varphi \hat{\varphi}$
- Περιοχή 3 - $r > b$: $H_3 = (H_0 + \frac{D_3}{r^2}) \cos \varphi \hat{r} - (H_0 - \frac{D_3}{r^2}) \sin \varphi \hat{\varphi}$

ΕΡΩΤΗΜΑ Β - ΕΥΡΕΣΗ ΚΑΙ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΒΕΛΤΙΣΤΗΣ ΔΙΑΠΕΡΑΤΟΤΗΤΑΣ

Για υπεραγώγιμο πυρήνα με σχετική μαγνητική διαπερατότητα $\mu_1 = 0$, το $B = 0$.
Για να μην διαταράσσεται το εξωτερικό πεδίο, πρέπει ο όρος διαταραχής στην Περιοχή 3 να μηδενιστεί. Δηλαδή απαιτούμε:

$$D_3 = 0$$

Αντικαθιστώντας αυτές τις συνθήκες στις εξισώσεις συνέχειας, βρίσκουμε:

- Στο $r = a$, εφόσον $\mu_1 = 0$, η συνθήκη για το B_r μας δίνει:

$$0 = \mu_2 \left(C_2 + \frac{D_2}{a^2} \right) \Rightarrow D_2 = -C_2 a^2$$

- Στο $r = b$, εφόσον $D_3 = 0$, οι εξισώσεις μας δίνουν:

$$\text{Δυναμικό: } -(C_2 b - \frac{D_2}{b}) = -H_0 b \Rightarrow C_2(b + \frac{\alpha^2}{b}) = H_0 b$$

$$\text{Ροή: } \mu_2(C_2 + \frac{D_2}{b^2}) = \mu_0 H_0 \Rightarrow \mu_2 C_2(1 - \frac{\alpha^2}{b^2}) = \mu_0 H_0$$

Διαιρώντας τις δύο νέες σχέσεις κατά μέλη για να απαλείψουμε το C_2 και το H_0 , λαμβάνουμε τις παρακάτω σχέσεις:

$$\frac{\mu_2 C_2(1 - \frac{\alpha^2}{b^2})}{C_2(b + \frac{\alpha^2}{b})} = \frac{\mu_0 H_0}{H_0 b}, \frac{\mu_2(1 - \frac{\alpha^2}{b^2})}{b(1 + \frac{\alpha^2}{b^2})} = \frac{\mu_0}{b} \text{ και } \mu_2 \frac{b^2 - \alpha^2}{b^2 + \alpha^2} = \mu_0$$

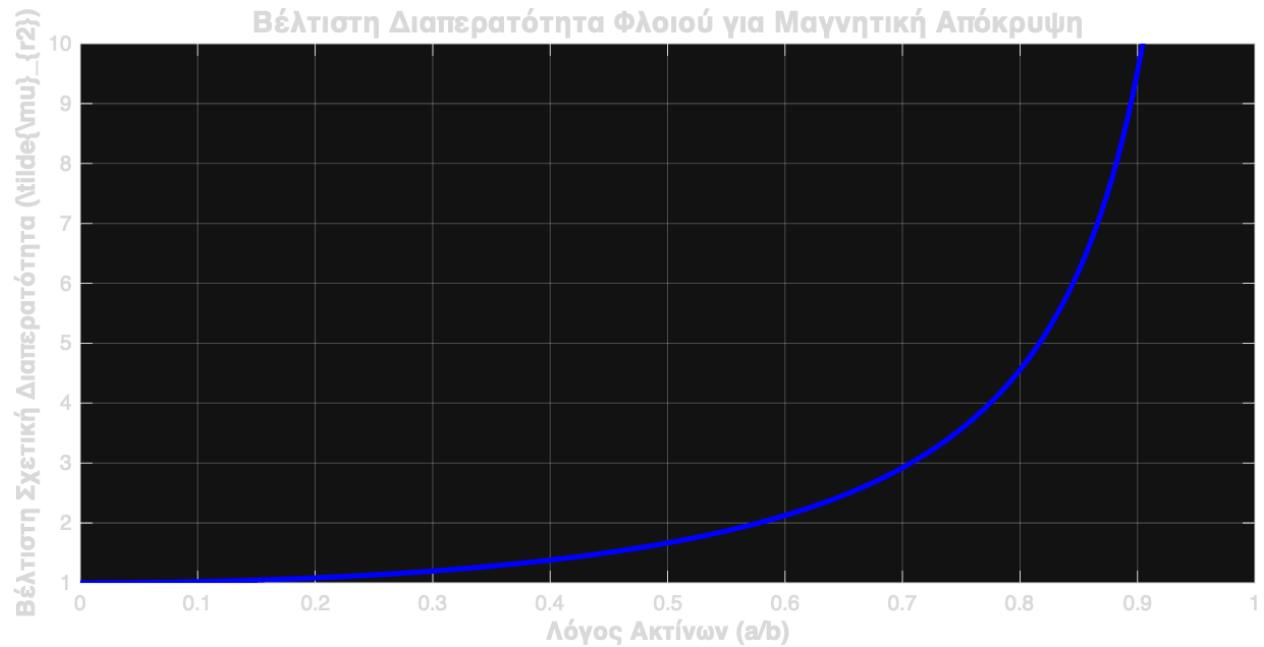
Έτσι, μπορούμε να εξάγουμε τον τύπο της βέλτιστης διαπερατότητας, ο οποίος είναι:

$$\tilde{\mu}_2 = \mu_0 \frac{b^2 + \alpha^2}{b^2 - \alpha^2}$$

Άρα, το υλικό πρέπει να είναι σιδηρομαγνητικό ή παραμαγνητικό (αν και τα φυσικά παραμαγνητικά υλικά έχουν πολύ μικρή απόκριση). Για τον λόγο αυτόν, το υλικό θα ήταν ιδανικά ένα σύνθετο υλικό σκόνης σιδήρου (Iron Powder Composite) σχεδιασμένο να έχει $\tilde{\mu}_2 \approx 1,67$, καθώς τα συμπαγή μέταλλα έχουν

υπερβολικά υψηλή διαπερατότητα για έναν τόσο "παχύ" εξωτερικό κύλινδρο (μανδύα).

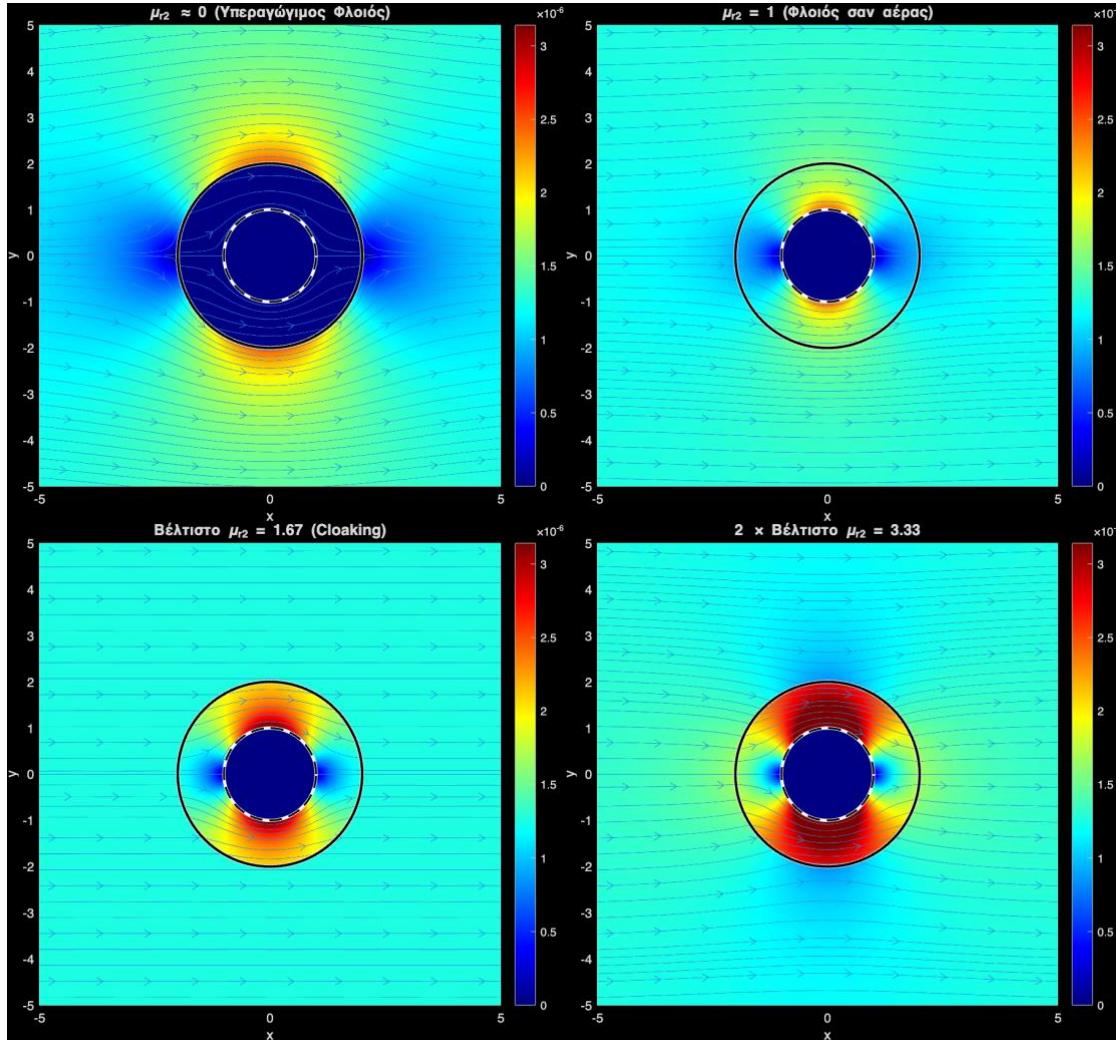
Με τη βοήθεια του λογισμικού MATLAB, σχεδίαστηκε το παρακάτω γράφημα το οποίο παρουσιάζει την βέλτιστη διαπερατότητα $\tilde{\mu}_2$, ως προς τον λόγο a/b .



Από το παραπάνω γράφημα, εξάγουμε τα εξής συμπεράσματα. Πρώτον, η διαπερατότητα $\tilde{\mu}_2$ είναι πάντα μεγαλύτερη του μ_0 . Δεύτερον, όσο το πάχος του εξωτερικού κυλίνδρου μειώνεται ($a \rightarrow b$), η απαιτούμενη διαπερατότητα τείνει στο άπειρο. Τέλος, αντιλαμβανόμαστε πως ο ρόλος του μανδύα είναι να "τραβήξει" τις μαγνητικές γραμμές μέσα του, οδηγώντας τες γύρω από τον υπεραγωγό, και να τις αποδώσει ξανά στην ευθεία πορεία τους βγαίνοντας.

ΕΡΩΤΗΜΑ Γ - ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ XY

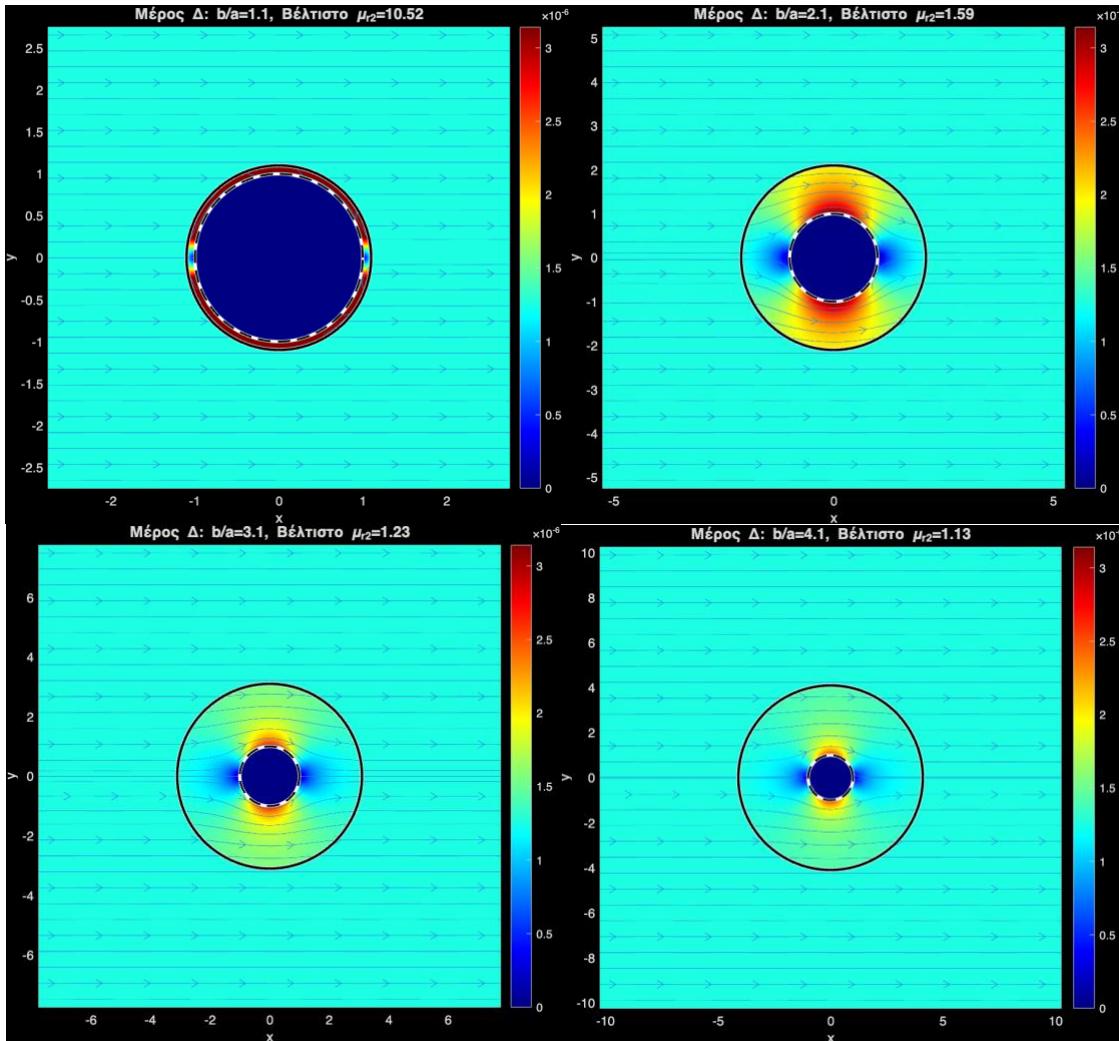
Παρακάτω, απεικονίζεται το διανυσματικό μαγνητικό πεδίο στο επίπεδο xy, για διαπερατότητα $\mu_2 = 0, 1, \tilde{\mu}_2$ και $2\tilde{\mu}_2$, υπό την προϋπόθεση $b/a = 2$.



Από τα παραπάνω γραφήματα, εξάγουμε τα εξής συμπεράσματα. Όταν $\mu_2 = 0$, ο εξωτερικός κύλινδρος λειτουργεί κι αυτός ως υπεραγωγός, απωθώντας πλήρως το πεδίο. Έτσι, η διαταραχή είναι μεγάλη. Όταν $\mu_2 = 1$, ο εξωτερικός κύλινδρος είναι σαν αέρας. Έτσι, το πεδίο διαταράσσεται από τον εσωτερικό υπεραγωγό (φαινόμενο Meissner). Όταν $\mu_2 = \tilde{\mu}_2$, οι γραμμές του πεδίου κάμπτονται ομαλά μέσα στο μανδύα και εξέρχονται παράλληλα. Άρα, επιτυγχάνεται η τέλεια απόκρυψη. Τέλος, όταν $\mu_2 = 2\tilde{\mu}_2$, ο εξωτερικός κύλινδρος "ρουφάει" υπερβολικά πολύ πεδίο, δημιουργώντας συγκέντρωση ροής (focusing) αντί για απόκρυψη.

ΕΡΩΤΗΜΑ Δ - ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ XY, ΓΙΑ ΤΗ ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΔΙΑΠΕΡΑΤΟΤΗΤΑ

Παρακάτω, απεικονίζεται το διανυσματικό μαγνητικό πεδίο στο επίπεδο xy, για λόγους $b/a = 1.1, 2.1, 3.1, 4.1$, υπό την προϋπόθεση $\mu_2 = \tilde{\mu}_2$.



Από τα παραπάνω γραφήματα, εξάγουμε το συμπέρασμα πως όσο πιο λεπτός είναι ο μανδύας, τόσο μεγαλύτερη τιμή μαγνητικής διαπερατότητας απαιτείται για να επιτευχθεί η απόκρυψη.