进制

重庆市育才中学·信息学讲义·赵康·2020年01月

一、进制的定义

进制也就是**进位制**，是人们规定的某种进位方法。 对于一种进制（记为 P 进制），表示某一位置上的数运算时满 P 进 1 。

十进制是满十进一，十六进制是满十六进一，二进制就是满二进一，以此类推。

生活中常用的进制有十进制、六十进制、千进制、万进制、1024进制、二进制、八进制、十六进制、三十六进制等。

其中**十进制**为人类的**本位进制**，就像学习语言时我们以中文为本位。

只要有需要，可以用任何进制来表示数。

二、进制的标记：

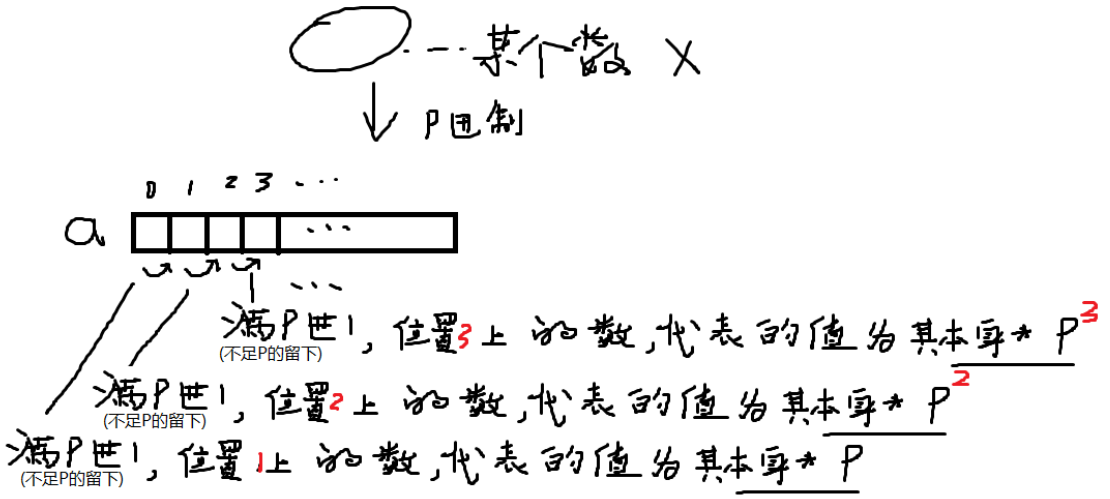
问题中涉及多种进制时，需要做标记，以免表示混乱，如下

> $7(8)=7(10)$ --- 8 进制表示的 7 与 10 进制表示的 7 相等
>
> $83(10)=123(8)$

括号中的数值表示进制的**基数**。

三、进制的转换：

我们来找规律:



按照以上数位分离之法，任何数 X 均可表示为：

$X = a_0 \cdot P^0 + a_1 \cdot P^1 + a_2 \cdot P^2 + \ldots + a_n \cdot P^n$ （直到当数值分配完毕）

↓

上式简记为：$X = a_n a_{n-1} \cdots a_0 \ (P)$

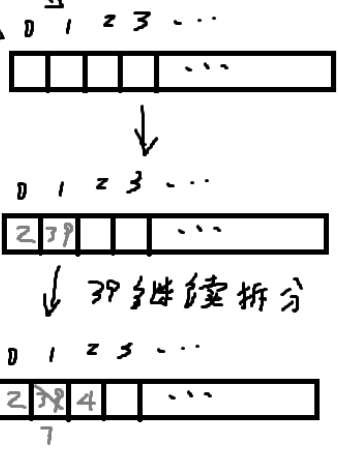
↓

这不就是 P 进制的表示吗？

举例：314(10) 以 8 进制表示

$314 = 314/8 \times 8 + 314\%8$

满8，进位　不满8，留下



↓

$314(10) = 472(8)$

总结规律：

1. 本位进制转 P 进制方法：重复对一个数 X 通过 $\%P$ 留下不足 P 的部分，并将 X 更新为进位的部分 X/P，直到 X为0（进位处理结束）。(由于我们是由低位到高位进行分离，但人类的计数习惯是从高位到低位，所以最后对结果反序输出即可)
2. P 进制转本位进制方法：（更加简单）将各数位代表的真实值累加即可。

随堂思考：

> P 进制 转 Q 进制（非本位进制的两种进制互转）如何操作?

> 随堂练习：
>
> 1. $123(10) = \_\_?\_\_(8)$
> 2. $123(10) = \_\_?\_\_(2)$
> 3. $666(3) = \_\_?\_\_(10)$
> 4. $233(7) = \_\_?\_\_(5)$

四、一个漏洞

大家先做一个例题：

> $10000(10) = \_\_?\_\_(60)$

你发新了什么问题?

你有什么办法解决这个问题?

（大家先思考，课上会讲解）

五、二进制

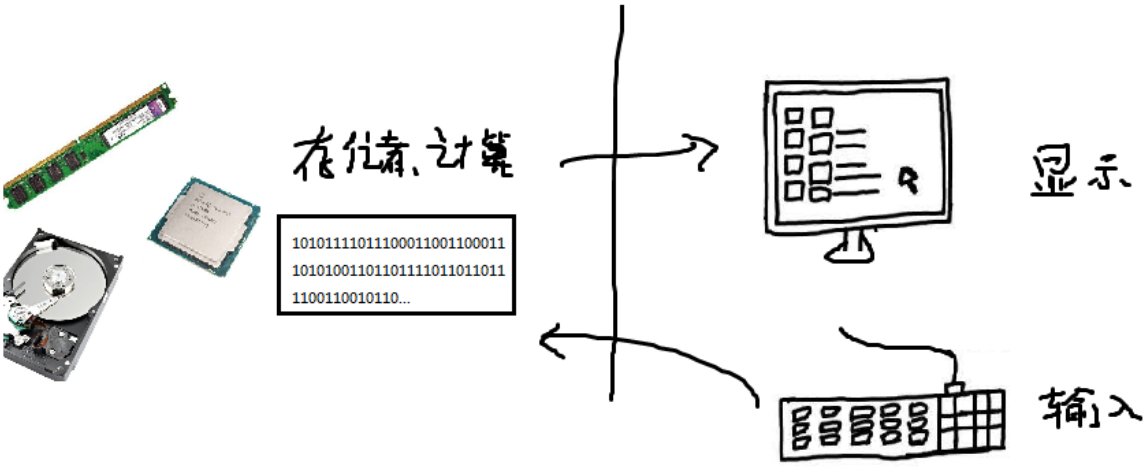
人类的本位进制是十进制，而计算机的本位进制是二进制

也许你会问：

> 我们使用的电脑的时候（比如编程时），不是直接用的十进制吗?

没错，但我们看到的数据是转换以后的结果。

也就是说计算机存储和计算的数据根本上是二进制数，显示时自动转为需要的进制表示。



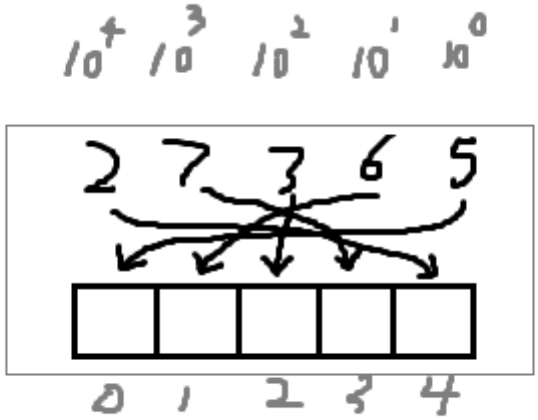
计算机采用二进制的主要原因如下：

> 1. 技术实现简单，逻辑电路的开关状态可以表示0或1；
> 2. 简化运算规则，适合逻辑真假运算且易于进制转换；

> 3. 抗干扰能力强，可靠性高，只有两个状态，受到干扰时容易分辨

知识延伸1. 高精度的万进制版本（不做要求）

之前学过高精度运算，第一步操就作是把数据按位拆分放到数组中



在计算过程中，数组每个位置不管累积了多大数，在处理进位之后，最终只留下一位数。通过这种方法，可以处理超大整数的基本运算；

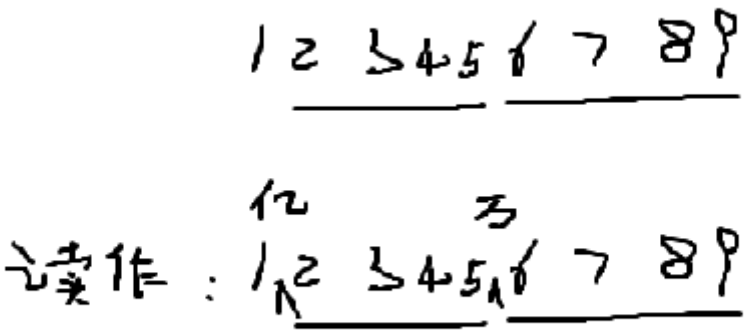
我们知道 `int` 类型数组每个位置最大可存 10^9 级别的数；考虑做乘法时可能会有整数溢出，那么存 10^4 级别的数也是没有问题的。

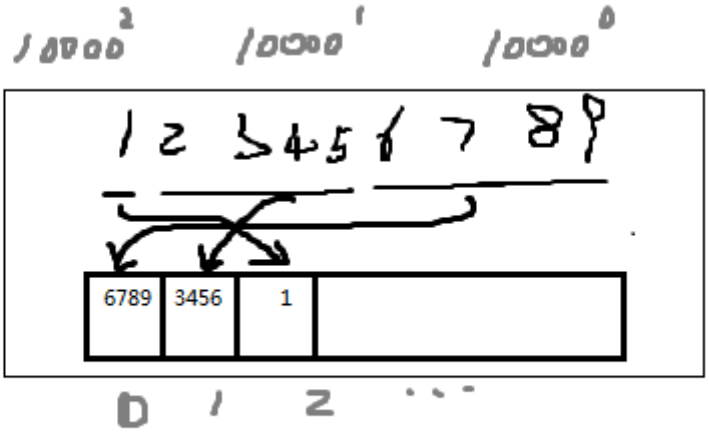
一个问题隐隐浮出：

> 数组每个位置只存1位数是不是有点浪费？

那我们让数组每个位置存4位数好不好？

好的！如下图





以上是以**万进制**方式做数据转换,优点是可以节省存储空间和运算时间，缺点是要考虑的细节较多。

下面是一个高精度加法的参考代码：

```
// 关键词：万进制，高精度加法
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
int a[10010], b[10010];
int n1, n2;

void in1()
{
    string s1;
    cin >> s1;
    n1 = s1.size();
    for(int i = 0, j=n1-1; i < n1; i++,j--)
        a[j] = s1[i] - '0';
    for(int i = 0; i < n1; i+=4)
        a[i/4] = a[i] + a[i+1]*10 + a[i+2]*100 + a[i+3]*1000;
    for(int i = (n1-1)/4+1; i < n1; i++)
        a[i] = 0;
    n1 = ceil(n1/4.0); // ceil()函数对小数进行向上取整
}

void in2()
{
    string s2;
    cin >> s2;
    n2 = s2.size();
    for(int i = 0, j=n2-1; i < n2; i++,j--)
        b[j] = s2[i] - '0';
    for(int i = 0; i < n2; i+=4)
        b[i/4] = b[i] + b[i+1]*10 + b[i+2]*100 + b[i+3]*1000;
    for(int i = (n2-1)/4+1; i < n2; i++)
        b[i] = 0;
    n2 = ceil(n2/4.0);
}

void add()
{
    n1 = max(n1,n2);
    for(int i = 0; i < n1; i++)
```

```
39      {
40          a[i] += b[i];
41          a[i+1] += a[i] / 10000;
42          a[i] %= 10000;
43      }
44      if(a[n1]) n1++;
45  }
46
47  void out()
48  {
49      for(int i = n1-1; i >= 0; i--)
50      {
51          if(i!=n1-1){
52              if(a[i] < 1000) cout << 0;
53              if(a[i] < 100) cout << 0;
54              if(a[i] < 10) cout << 0;
55          }
56          cout << a[i];
57      }
58      cout << endl;
59  }
60
61  int main()
62  {
63      in1();
64      in2();
65      add();
66      out();
67      return 0;
68  }
```

知识延伸2. 位运算

（下面给出一些常见操作，课上会讲解，但当前阶段不作要求）

1. 左移 x<<1 --- 相当于 x*2
2. 右移 x>>3 --- 相当于x/2/2/2
3. 按位与 3&6
4. 按位或 3|6
5. 按位异或 6^5
6. 按位非 ~6

位运算有什么用呢?

1. 直接对二进制数操作，比其他运算快;
2. 二进制数既可以直接加减，又可以实现类似数组的**打标记**功能，对于某些问题可以方便写出简洁高效的代码;
3. 二进制思想在很多高级算法和数据结构设计中有重要运用

我们来列举几个常见的需求:

检查第 i 位是否是 1

```
if(1<<(i-1)&x)...
```

检查第 i 位是否是 0

```
if(1<<(i-1)&x==0)...
```

统计 x 中有多少个 1

```
while(x)
{
    cnt += x&1;
    x >>= 1;
}
```

检查 x 中是否有相邻的 1

```
if(x&(x<<1))...
```

计算 x 最低位1代表的值

```
int lowbit(int x)
{
    return x&(-x);//用到负数补码的性质，可以不深究
}
```

把第 i 位变成 1

```
x |= (1<<(i-1))
```

把第 i 位变成 0

```
x &= ~(1<<(i-1))
```

把第 i 位取反

```
x ^= (1<<(i-1))
```

x 包含 y

```
if(x&y==y)...
    OR
if(x|y==x)...
```

...