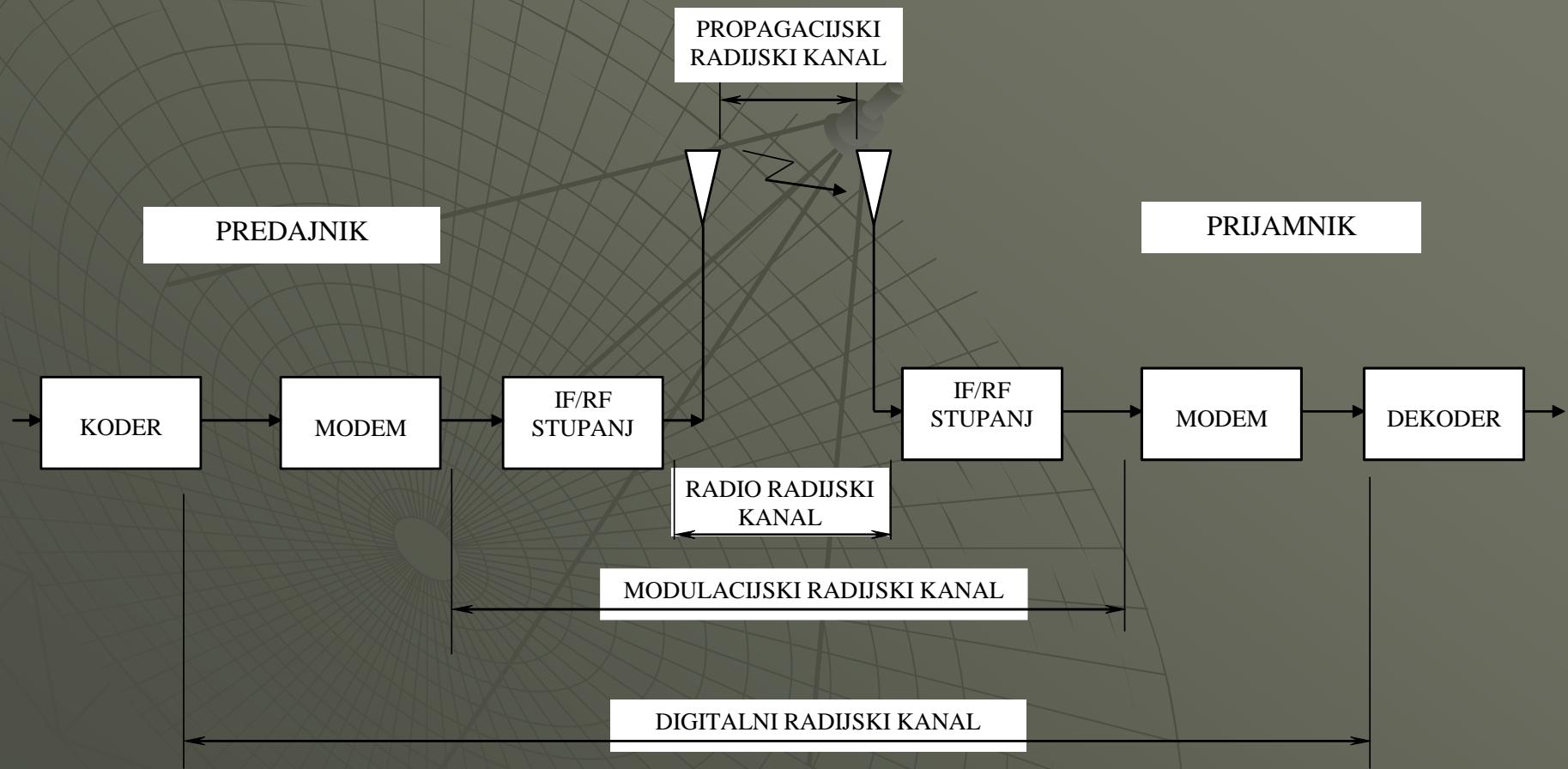


Mobilne komunikacije

Sveučilište u Splitu
FESB – Split

1. Podjela radijskog kanala



Propagacijski kanal

- ◆ Propagacijski kanal je fizikalni medij koji podržava propagaciju vala između predajne i prijamne antene.
- ◆ Propagacijski kanal je linearan, recipročan i često promjenjiv u vremenu.
- ◆ Čest je efekt višestaznog prijama uslijed pojava poput jednostrukе i višestrukе refleksije, difrakcije, raspršenja te kombinacija tih fenomena.

Radio kanal

- ◆ Radio kanal sačinjavaju predajna antena, propagacijski kanal i prijamna antena.
- ◆ Recipročnost radio kanala ovisi o korištenim antenama. U slobodnom prostoru antene imaju jednake predajne i prijamne dijagrame zračenja ako su dvosmjerne, linearne i pasivne, pa je tada i radio kanal recipročan. Nelinearnosti u antenskom sustavu mogu nastati uslijed hrđe, leda ili nosećih struktura, ali one su obično male te se mogu zanemariti.

Modulacijski kanal

- ◆ Modulacijski kanal proteže se od izlaza iz modulatora do ulaza u demodulator, a sastoji se od prednjeg kraja predajnika, radio kanala i prednjeg kraja prijamnika.
- ◆ Ako prepostavimo linearni radio kanal, linearost modulacijskog kanala ovisi o prijenosnim karakteristikama prednjih krajeva predajnika i prijamnika. Modulacijski sustavi koji koriste višerazinsku amplitudnu modulaciju (poput QAM) zahtijevaju približno linearni modulacijski kanal, što znači da pojačala rade u linearном režimu rada te da se koriste mješači s malom distorzijom i filtri s linearnom faznom karakteristikom.
- ◆ Problem se javlja uslijed zahtjeva za optimalnom efikasnošću potrošnje snage zbog dizajna baterije. Pojačala koja rade u linearnom režimu (klasa A) nisu efikasna u usporedbi s onima koja rade u nelinearnom (klasa C). Stoga, izbjegava se korištenje linearnih prednjih krajeva osim ako to nije opravdano potrebom prijenosa podataka velikim brzinama u mikročelijskim okruženjima u kojima su razine zračene snage relativno male.
- ◆ Modulacijski kanal je nerecipročan, jer su pojačala i ostale komponente prednjeg kraja nerecipročne. Općenito, to nije problem jer primopredajnik koristi odvojenu opremu za predaju i prijam. Te dvije radijske sekcije povezuju se na antenu preko dupleksera. Stoga je u čelijskom radijskom sustavu modulacijski kanal između bazne i mobilne postaje različit od modulacijskog kanala između mobilne i bazne postaje.

Digitalni kanal

- ◆ Digitalni kanal sastoji se od svih komponenti sustava uključujući i radio kanal, a povezuje nemoduliranu digitalnu sekvencu na strani predajnika s regeneriranim sekvencom na strani prijamnika.
- ◆ Digitalni kanal je nelinearan (jer izlaz može poprimiti točno određene vrijednosti) i nerecipročan (jer je i modulacijski kanal nerecipročan).

2. Performanse digitalnih radiokomunikacijskih sustava

- ◆ Dva primarna komunikacijska resursa su prijamna snaga i raspoloživa prijenosna širina pojasa.
- ◆ Sustavi s ograničenom širinom pojasa: mogu se koristiti spektralno efikasne modulacijske sheme za očuvanje širine pojasa na račun snage
- ◆ Sustavi s ograničenjem snage: mogu se koristiti modulacijske sheme za očuvanje snage na račun širine pojasa
- ◆ U obje vrste sustava mogu se koristiti kodovi s korekcijom pogreški (kodiranje kanala) u svrhu štednje snage ili poboljšanja BER performansi na račun ili čak bez povećanja (TCM kodovi) širine pojasa kanala.

Dijagram iskorištenja širine pojasa

- ◆ Shannon - Hartley teorem:

$$C = B_w \text{ ld} \left(1 + \frac{S}{N} \right)$$

- ◆ **Kapacitet kanala** C definira maksimalni broj bita koji se može pouzdano poslati preko kanala u jednoj sekundi. ($\text{ld} = \log_2$)
- ◆ B_w – širina pojasa kanala
- ◆ S/N – omjer srednje snage signala i snage šuma
- ◆ R – brzina prijenosa signala (bit/s)

$$S = \frac{P_{EIRP} \cdot G_r}{L_{FS} \cdot L_o} - \text{srednja snaga prijamnog signala}$$

$$L_{FS} = \left(\frac{4\pi d}{\lambda} \right)^2 - \text{gubici propagacije u slobodnom prostoru za izotropne antene}$$

L_o - ostali gubici

$N \cong kT^o B_w$ - snaga aditivnog bijelog Gaussovog šuma (AWGN)

T^o - efektivna temperatura u K

$k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K - Boltzmanova konstanta

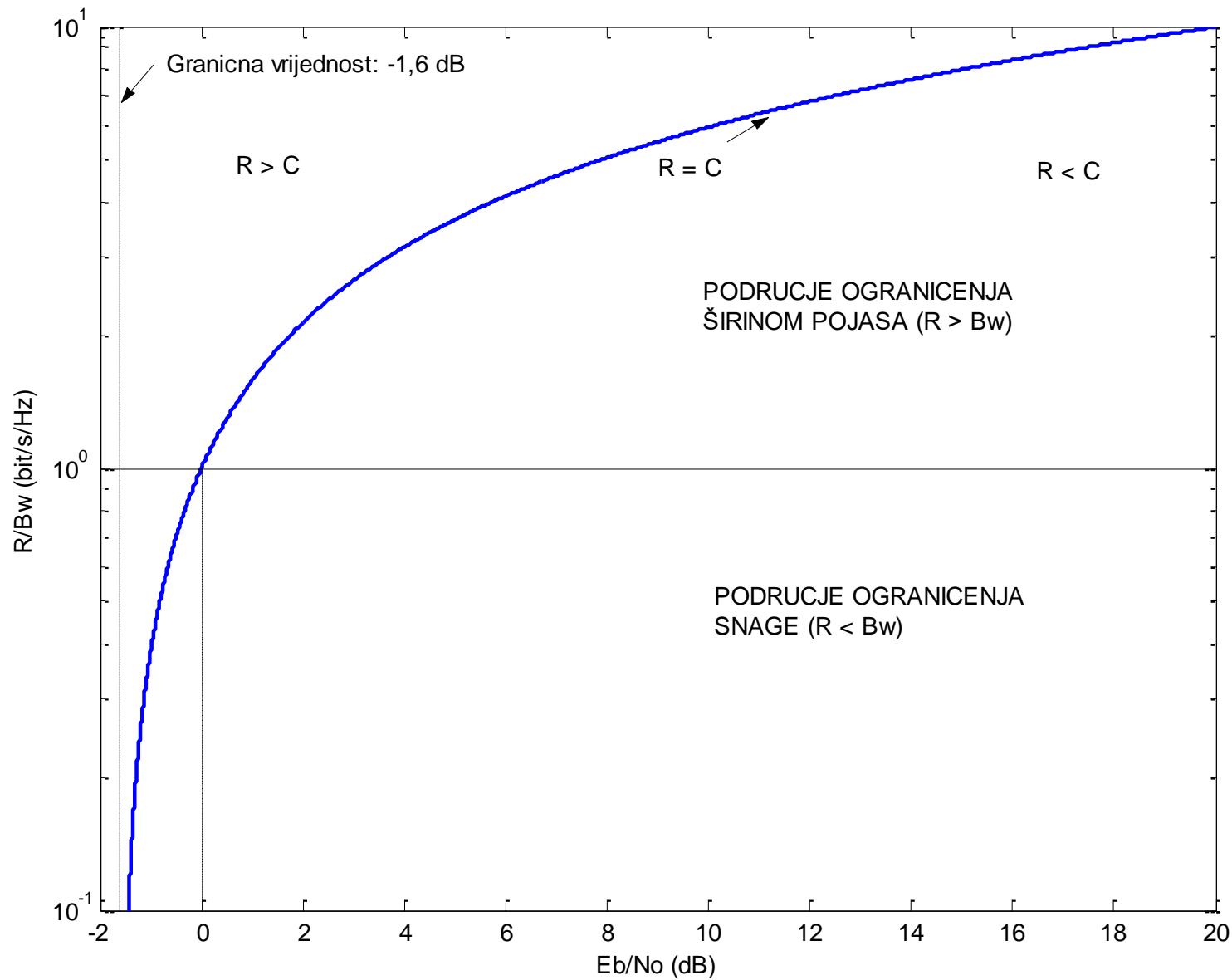
$$N_0 = \frac{N}{B_w} = kT^o - \text{spektralna gustoća snage šuma}$$

$$\boxed{\frac{S}{N_0} = \frac{P_{EIRP} \cdot G_r / T^o}{kL_{FS} L_o}}$$

G_r / T^o - karakteristika dobrote prijamnika

$$\boxed{\frac{E_b}{N_0} = \frac{ST_b}{N_0} = \frac{S}{N_0} \left(\frac{1}{R} \right)} - \text{omjer energije bita i spektralne gustoće snage šuma}$$

T_b - vrijeme trajanja bita



M-arna signalizacija

- ◆ Svaki simbol iz *M*-arnog alfabeta može se povezati s jedinstvenom sekvencom od *m* bita:

$$M = 2^m \Leftrightarrow m = \text{ld } M$$

- ◆ Simbol je član iz *M*-arnog alfabeta i prenosi se unutar vremena trajanja simbola T_S . Brzina prijenosa bita R je, dakle:

$$R = \frac{1}{T_b} = \frac{m}{T_S} = \frac{\text{ld } M}{T_S}$$

- ◆ Brzina simbola R_S jednaka je:

$$R_S = \frac{1}{T_S} = \frac{R}{\text{ld } M}$$

- ◆ Iz ovih jednadžbi proizlazi da svaka digitalna shema koja služi za prijenos $m = \text{ld } M$ bita u T_S sekundi koristeći širinu pojasa od B_W Hertza radi s efikasnošću širine pojasa od:

$$\frac{R}{B_W} = \frac{\text{ld } M}{B_W T_S} = \frac{1}{B_W T_b}$$

- ◆ Manji $B_w T_b \Rightarrow$ veća efikasnost pojasne širine \Rightarrow signali koji imaju mali $B_w T_b$ produkt koriste se često u sustavima s ograničenom širinom pojasa (primjer: GSM koristi GMSK modulaciju s $B_w T_b = 0,3 \text{ Hz}/(\text{bit/s})$)
- ◆ Za sustave s ograničenjem pojasne širine bez kodiranja cilj je maksimizirati brzinu prijenosa informacije unutar raspoloživog pojasa na račun E_b/N_0 , uz zadržavanje specificirane vjerojatnosti pogreške na bitu P_b .
- ◆ MPSK:

$$B_w = \frac{1}{T_s} \Rightarrow \frac{R}{B_w} = \text{ld } M$$

- ◆ Za sustave s ograničenjem snage - nekoherentna ortogonalna MFSK modulacija:

$$B_w = \frac{M}{T_s} = MR_s \Rightarrow \frac{R}{B_w} = \frac{\text{ld } M}{M}$$

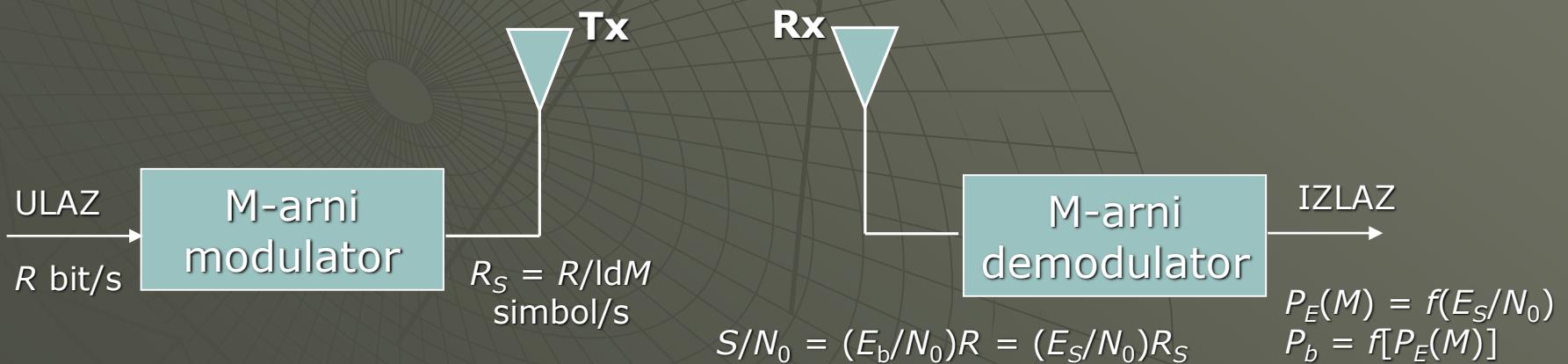
- ◆ S MFSK širina pojasa potrebna za prijenos je M -terostruko povećana u odnosu na binarnu FSK, jer postoji M ortogonalnih valnih oblika od kojih svaki zahtjeva širinu pojasa od $1/T_s$.

Primjer 1. Sustav s ograničenjem širine pojasa bez kodiranja

- ◆ AWGN radijski kanal
- ◆ $B_W = 4 \text{ kHz}$
- ◆ $S/N_0 = 53 \text{ dB-Hz}$
- ◆ $R = 9600 \text{ bit/s}$
- ◆ $P_b \leq 10^{-5}$
- ◆ Koju modulacijsku shemu treba odabrat u cilju zadovoljenja zahtijevanih performansi? Da li je potrebno uvođenje kodiranja s korekcijom pogreški?

$R = 9600 \text{ bit/s} > 4000 \text{ Hz} \Rightarrow$ sustav s ograničenjem širine pojasa \Rightarrow MPSK

MODEM bez kodiranja kanala:



$$\frac{S}{N_0} = \frac{E_b}{N_0} R \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} (\text{dB}) = \frac{S}{N_0} (\text{dB-Hz}) - R (\text{dB-bit/s})$$

$$\frac{E_b}{N_0} = 53 \text{ dB-Hz} - (10 \log_{10} 9600) \text{ dB-bit/s} = 13,2 \text{ dB} = 20,89$$

MPSK:

$$M > 2 \Rightarrow P_E(M) \cong 2Q\left[\sqrt{2 \frac{E_s}{N_0}} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)\right]$$

$$P_E \ll 1 \Rightarrow P_b \cong \frac{P_E}{\ln M} = \frac{P_E}{m}$$

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} \exp(-u^2) du$$

$$\frac{E_s}{N_0} = \ln M \frac{E_b}{N_0} = 3 \cdot 20,89 = 62,67 = 17,97 \text{ dB}$$

$$M = 8 \Rightarrow P_E = 2,2 \cdot 10^{-5} \Rightarrow P_b = 7,3 \cdot 10^{-7} < 10^{-5}$$

$$B_{W,MPSK} = R_s = \frac{R}{\ln M} = \frac{9600}{\ln 8} = 3200 \text{ Hz} < 4000 \text{ Hz}$$

Izborom 8-PSK modulacije nije potrebno uvođenje kodova za korekciju pogreški.

Primjer 2. Sustav ograničen snagom bez kodiranja

- ◆ AWGN radijski kanal
- ◆ $B_W = 45 \text{ kHz}$
- ◆ $S/N_0 = 48 \text{ dB-Hz}$
- ◆ $R = 9600 \text{ bit/s}$
- ◆ $P_b \leq 10^{-5}$
- ◆ Koju modulacijsku shemu treba odabrat u cilju zadovoljenja zahtijevanih performansi? Da li je potrebno uvođenje kodiranja s korekcijom pogreški?

$R = 9600 \text{ bit/s} < 45000 \text{ Hz} \Rightarrow$ sustav s ograničenjem snage \Rightarrow MFSK

$$\frac{E_b}{N_0} = 48 \text{ dB-Hz} - (10 \log_{10} 9600) \text{ dB-bit/s} = 8,2 \text{ dB} = 6,61$$

Nekoherentna ortogonalna MFSK:

$$P_E(M) \leq \frac{M-1}{2} \exp\left(-\frac{E_s}{N_0}\right)$$

$$P_E \ll 1 \Rightarrow P_b = \frac{2^{m-1}}{2^m - 1} P_E$$

$$\frac{E_s}{N_0} = \ln M \frac{E_b}{N_0} = 4 \cdot 6,61 = 26,44 = 14,22 \text{ dB}$$

$$M = 16 \Rightarrow P_E = 1,4 \cdot 10^{-5} \Rightarrow P_b = 7,3 \cdot 10^{-6} < 10^{-5}$$

$$B_{W,MFSK} = MR_S = \frac{MR}{\ln M} = \frac{16 \cdot 9600}{\ln 16} = 38,4 \text{ kHz} < 45 \text{ kHz}$$

Izborom 16-FSK modulacije nije potrebno uvođenje kodova za korekciju pogreški.

Primjer 3. Sustav ograničen snagom i širinom pojasa

- ◆ AWGN radijski kanal
- ◆ $B_W = 4 \text{ kHz}$
- ◆ $S/N_0 = 53 \text{ dB-Hz}$
- ◆ $R = 9600 \text{ bit/s}$
- ◆ $P_b \leq 10^{-9}$
- ◆ Koju modulacijsku shemu treba odabrat u cilju zadovoljenja zahtijevanih performansi? Da li je potrebno uvođenje kodiranja s korekcijom pogreški?

$R = 9600 \text{ bit/s} > 4000 \text{ Hz} \Rightarrow$ sustav s ograničenjem širine pojasa \Rightarrow MPSK

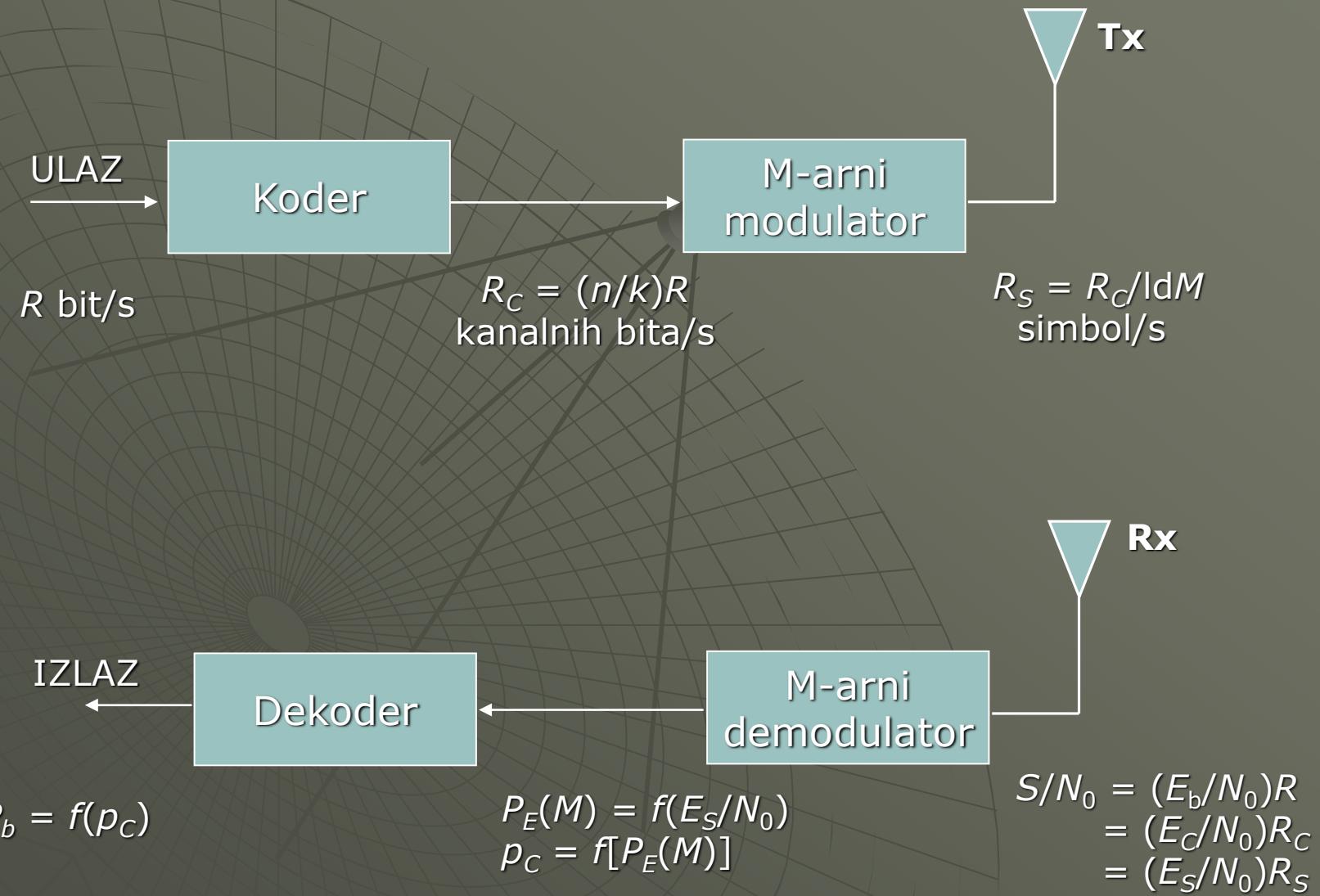
$M = 8 \Rightarrow P_b(E_b/N_0) = 7,3 \cdot 10^{-7} > 10^{-9} \Rightarrow$ dobiveni E_b/N_0 manji je od zahtijevanog te je sustav ograničen i snagom.

(S druge strane, za $M < 8$ prekoračujemo raspoloživu širinu pojasa od 4 kHz). Znači, uz upotrebu 8-PSK modulacije potrebno je i uvođenje kodiranja kanala jer je zadani sustav ograničen i snagom i širinom pojasa. Za 8-PSK bez kodiranja minimalna širina pojasa je 3,2 kHz, pa je u odnosu na raspoloživu širinu pojasa od 4 kHz dozvoljeno proširiti pojas nekodiranog signala za 25 %. Dakle, odabrani (n,k) kod mora zadovoljiti te zahtjeve (k – broj informacijskih bita; n – ukupni broj bita).

Za odabrani kod definiramo **kodni dobitak** G u decibelima kao redukciju u zahtijevanom E_b/N_0 omjeru koja je potrebna da bi se zadovoljile tražene BER performanse:

$$G(\text{dB}) = \frac{E_b}{N_0} \Big|_{\text{BEZ KODIRANJA}} - \frac{E_b}{N_0} \Big|_{\text{S KODIRANJEM}}$$

MODEM s kodiranjem kanala:



- ◆ Komunikacijski sustav ne tolerira nikakvo kašnjenje u poruci te brzina kanalnih bita R_C n/k puta veća od brzine podatkovnih bita. Nadalje, kako je svaki simbol sastavljen od $\text{ld}M$ kanalnih bita, brzina simbola R_S manja je od R_C za faktor $\text{ld}M$.
- ◆ Za sustav koji se sastoji od modulacije i kodiranja transformacije brzina prijenosa mogu se opisati kao:

$$R_C = \left(\frac{n}{k} \right) R; \quad R_S = \frac{R_C}{\text{ld} M}$$

- ◆ Postupkom kodiranja umjesto k informacijskih bita uvedeno je n kanalnih bita pa je omjer E_C/N_0 manji od E_b/N_0 za faktor n/k . Nadalje, kako je svaki simbol sastavljen od $\text{ld}M$ kanalnih bita, E_S/N_0 omjer veći je od E_C/N_0 za faktor $\text{ld}M$.
- ◆ Za sustav koji se sastoji od modulacije i kodiranja transformacije omjera energija-spektralna gustoća snage šuma mogu se opisati kao:

$$\frac{E_C}{N_0} = \left(\frac{k}{n} \right) \frac{E_b}{N_0}; \quad \frac{E_S}{N_0} = (\text{ld} M) \frac{E_C}{N_0}$$

Omjer E_b/N_0 u točki prijama ne ovisi o parametrima koda.

$$\frac{S}{N_0} = \frac{T_S}{N_0} = \frac{E_S}{N_0} R_S$$

$$\frac{E_S}{N_0} = \text{ld } M \frac{E_C}{N_0} \quad \& \quad R_S = \frac{R_C}{\text{ld } M} \Rightarrow \frac{S}{N_0} = \frac{E_C}{N_0} R_C$$

$$\frac{E_C}{N_0} = \left(\frac{k}{n} \right) \frac{E_b}{N_0} \quad \& \quad R_C = \left(\frac{n}{k} \right) R \Rightarrow \frac{S}{N_0} = \frac{E_b}{N_0} R \neq f(n, k, t)$$

Odaberimo blok kod iz BCH familije. BCH (n, k, t) kodovi su ciklički blok kodovi s korekcijom pogreški.

k – broj bita informacije

n – ukupni broj bita, broj kodiranih odnosno kanalnih bita

t – najveći broj pogrešnih bita koje kod može korigirati unutar svakog bloka duljine n bita

k/n – kodna brzina: inverz kodne brzine je mjera redundancije koda

Proračun kodnog dobitka

- ◆ Najprije odredimo koliki je kodni dobitak potreban da bi se postigla vjerojatnost pogreške na bitu $P_b \leq 10^{-9}$ kada se koristi 8-PSK, a zatim odaberemo kod koji to omogućava.
- ◆ Omjer E_s/N_0 bez kodiranja koji je potreban da bi se ostvarila vjerojatnost pogreške $P_b = 10^{-9}$:

$$P_b \cong \frac{P_e}{\ln M} \cong \frac{2Q\left[\sqrt{2\frac{E_s}{N_0}} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)\right]}{\ln M}$$
$$\frac{2Q\left[\sqrt{2\frac{E_s}{N_0}} \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right]}{\ln 8} = 10^{-9} \Rightarrow \left(\frac{E_s}{N_0}\right)_{\text{bez kodiranja}} = 120,67 = 20,8 \text{ dB}$$

$$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{\text{bez kodiranja}} = \frac{1}{\ln M} \left(\frac{E_s}{N_0}\right)_{\text{bez kodiranja}} = 40,22 = 16,0 \text{ dB}$$

$$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{\text{s kodiranjem}} = 13,2 \text{ dB} \Rightarrow G = 16 - 13,2 = 2,8 \text{ dB} \Rightarrow \boxed{\text{BCH } (63,51,2)}$$

Izvod iz kataloga BCH kodova

n	k	t
7	4	1
15	11	1
	7	2
	5	3
31	26	1
	21	2
	16	3
	11	5
63	57	1
	51	2
	45	3
	39	4
	36	5
	30	6
127	120	1
	113	2
	106	3
	99	4
	92	5
	85	6
	78	7
	71	9
	64	10

BCH kodovi koji zadovoljavaju zahtjeve u smislu širine pojasa $(n/k) < 125\%$

n	k	t	G (dB) MPSK, $P_b = 10^{-9}$ (*)
31	26	1	2,0
63	57	1	2,2
	51	2	3,1
127	120	1	2,2
	113	2	3,3
	106	3	3,9

(*) Za MPSK kodni dobitak ne ovisi značajno o M te će za zadalu vjerojatnost pogreške odabrani kod pružati približno isti kodni dobitak bez obzira na upotrijebljenu MPSK modulacijsku shemu.

1. korak:

$$\frac{E_s}{N_0} = (\text{ld } M) \frac{E_c}{N_0} = (\text{ld } M) \left(\frac{k}{n} \right) \frac{E_b}{N_0}$$

$$M = 8 \quad \& \quad \frac{E_b}{N_0} = 13,2 \text{ dB} = 20,89 \Rightarrow \frac{E_s}{N_0} = (\text{ld } 8) \frac{51}{63} \cdot 20,89 = \underline{\underline{50,73}}$$

2. korak:

$$P_e(M) \cong 2Q\left[\sqrt{2 \frac{E_s}{N_0}} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right) \right]$$

$$P_e(8) \cong 2Q\left[\sqrt{2 \cdot 50,73} \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \right] = 2Q(3,86) = \underline{\underline{1,2 \cdot 10^{-4}}}$$

3. korak:

$$P_e \ll 1 \Rightarrow p_c \cong \frac{P_e}{\text{ld } M} = \frac{P_e}{m}$$

$$p_c \cong \frac{1,2 \cdot 10^{-4}}{3} = \underline{\underline{4 \cdot 10^{-5}}}$$

4. korak:

$$P_b \cong \frac{1}{n} \sum_{j=t+1}^n j \binom{n}{j} p_c^j (1-p_c)^{n-j}$$

$$\boxed{\text{BCH}(63,51,2)} \Rightarrow P_b \cong \frac{1}{63} \sum_{j=3}^{63} j \binom{63}{j} (4 \cdot 10^{-5})^j (1 - 4 \cdot 10^{-5})^{63-j} = \underline{\underline{1,2 \cdot 10^{-10} < 10^{-9}}}$$

Brzine prijenosa:

$$R_c = \binom{n}{k} R = \frac{63}{51} \cdot 9600 \approx 11859 \text{ kanalni bit/s}$$

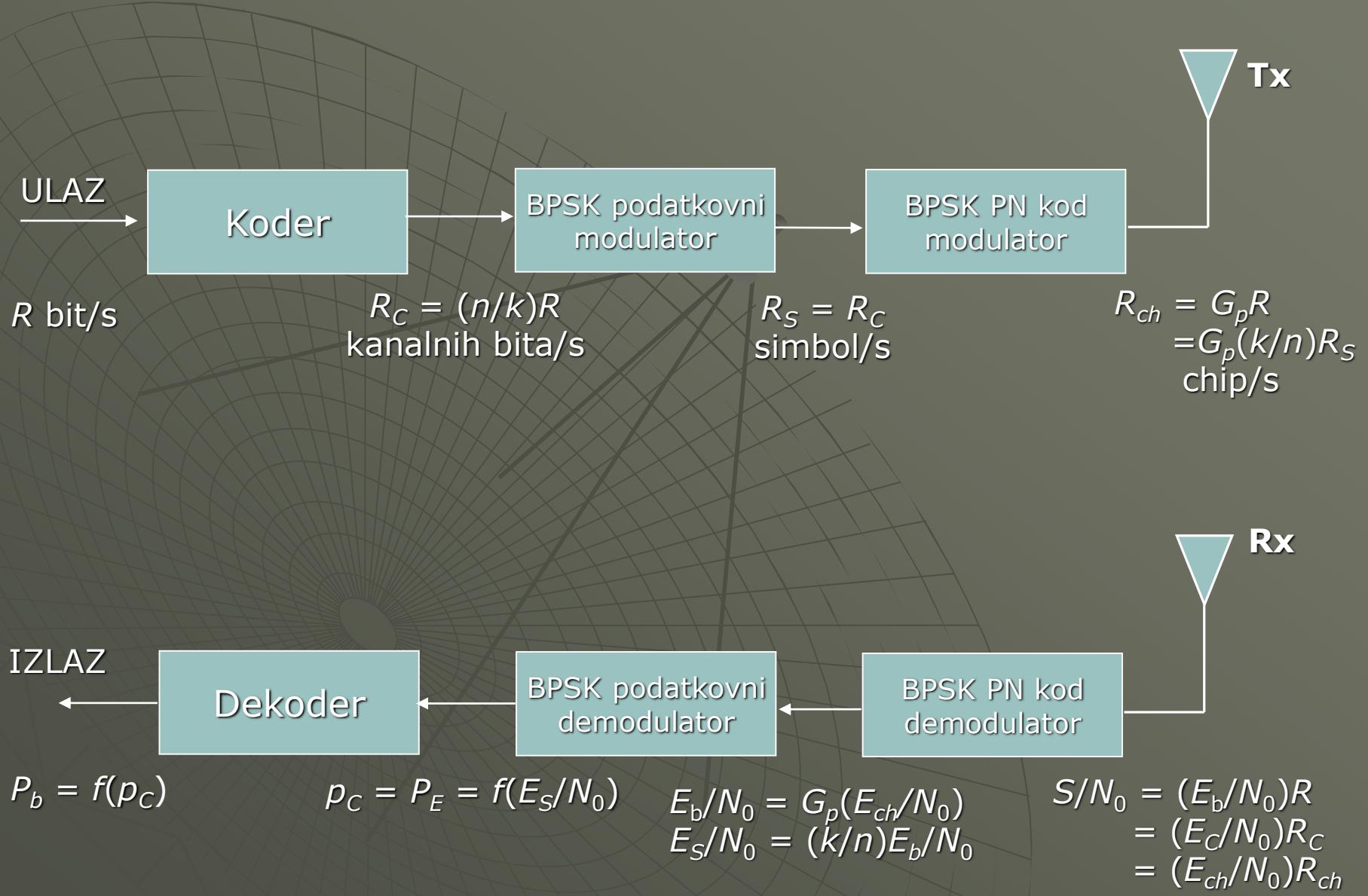
$$R_s = \frac{R_c}{\text{ld } M} = \frac{11859}{3} = 3953 \text{ simbol/s}$$

Radijski DS/SS kodirani sustavi

- ◆ DS/SS – *Direct Sequence Spread Spectrum*
- ◆ Mogu se podvesti pod sustave s ograničenjem snage jer informacija zauzima mnogo veću širinu pojasa od one koja je zaista potrebna za njen prijenos.
- ◆ Širenje pojasa signala za određeni faktor omogućava smanjenje gustoće spektra snage signala za isti faktor. (Ukupna prosječna snaga signala ostaje ista kao i prije proširenja spektra.)
- ◆ Proširenje širine pojasa ostvaruje se tipično množenjem uskopojasnog signala podataka s širokopojasnim signalom koji služi za širenje pojasa. Signal za proširenje, odnosno kod za proširenje obično se naziva pseudoslučajni ili PN kod.
- ◆ Tipični DS/SS radijski sustav može se opisati kao BPSK modulacijski proces u dva koraka. U prvom koraku val nosioc modulira se s bipolarnim valnim oblikom podataka koji ima amplitudu +1 ili -1 tijekom cijelog vremena trajanja bita podataka. U drugom koraku izlaz prvog koraka množi se (modulira) s bipolarnim valnim oblikom PN koda koji ima vrijednosti +1 ili -1 tijekom cijelog vremena trajanja bita PN koda (chipa). U stvarnosti, DS/SS sustav ostvaruje se najčešće moduliranjem PN valnog oblika sa signalom podataka te prosljeđivanjem tako dobivenog signala u BPSK modulator. Međutim, korisno je opisati ovaj proces u dva odvojena koraka: vanjski modulator za podatke i unutrašnji modulator za PN kod.
- ◆ Dobitak obrade SS sustava:

$$G_p = \frac{B_{W,SS}}{R} = \frac{R_{ch}}{R}$$

DS/SS MODEM s kodiranjem kanala:



Primjer 3. DS/SS radijski sustav

- ◆ AWGN radijski kanal
- ◆ nema posebnih zahtjeva za širinom pojasa
- ◆ BCH (63,51) kod, BPSK ($M = 2$)
- ◆ $S/N_0 = 48 \text{ dB-Hz}$
- ◆ $R = 9600 \text{ bit/s}$
- ◆ $P_b \leq 10^{-6}$
- ◆ Može li se zahtijevani BER ostvariti korištenjem DS/SS arhitekture?

$$\text{BCH \& BPSK} \Rightarrow R_s = R_c = \left(\frac{n}{k} \right) R = \left(\frac{63}{51} \right) \cdot 9600 \approx 11859 \text{ kanalni bit/s}$$

$$G_p = 1000 \Rightarrow R_{ch} = G_p R = 1000 \cdot 9600 = 9,6 \cdot 10^6 \text{ chip/s}$$

$$\frac{E_{ch}}{N_0} = \frac{S}{N_0} \frac{1}{R_{ch}} = \frac{S}{N_0} \frac{1}{G_p R} = \frac{1}{G_p} \frac{E_b}{N_0} \Rightarrow \boxed{\frac{E_{ch}}{N_0} \ll \frac{E_b}{N_0}}$$

$$\frac{E_b}{N_0} = 8,2 \text{ dB} = 6,61 \Rightarrow \frac{E_{ch}}{N_0} (\text{dB}) = \frac{E_b}{N_0} (\text{dB}) - G_p (\text{dB}) = 8,2 - 10 \log 1000 = -21,8 \text{ dB}$$

$$\frac{E_s}{N_0} = \frac{E_c}{N_0} = \left(\frac{k}{n} \right) \frac{E_b}{N_0} = \frac{61}{53} \cdot 6,61 = 5,35$$

$$\text{BPSK: } p_c = P_E = Q\left(\sqrt{2 \frac{E_c}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{2 \cdot 5,35}\right) = 5,8 \cdot 10^{-4}$$

$$n=63, t=2 \Rightarrow P_b \cong \frac{1}{n} \sum_{j=t+1}^n j \binom{n}{j} p_c^j (1-p_c)^{n-j} = \frac{1}{63} \sum_{j=3}^n j \binom{63}{j} \left(5,8 \cdot 10^{-4}\right)^j \left(1 - 5,8 \cdot 10^{-4}\right)^{63-j} = \underline{3,6 \cdot 10^{-7} < 10^{-6}}$$

3. Ćeljski radijski sustavi

Ćeljski radijski sustavi su mobilni sustavi s reupotrebom frekvencije.

Dva osnovna zahtjeva na dizajn ćeliskog radio sustava:

- ♦ osigurati propisani SIR omjer u ćeliji u svrhu eliminacije ISI,
- ♦ osigurati optimalnu pokrivenost ćelije u skladu sa zahtjevom br. 1.

Podjela ćelija prema veličini:

- ♦ Pikoćelije (za pokrivanje unutrašnjosti pojedinih objekata)
- ♦ Mikroćelije (za pokrivanje pojedinih ulica s velikim komunikacijskim prometom ili sivih zona u pojedinoj maloj ćeliji)
- ♦ Male ćelije (tipične za urbane sredine, radijusa tipično reda kilometra)
- ♦ Velike ćelije (za pokrivanje slabo naseljenih većih područja)
- ♦ Makroćelije (satelitski komunikacijski sustavi)
- ♦ **Klaster:** najmanji skup ćelija koji sadrži sve dodijeljene kanale.

problem preuzimanja

ista frekvencija

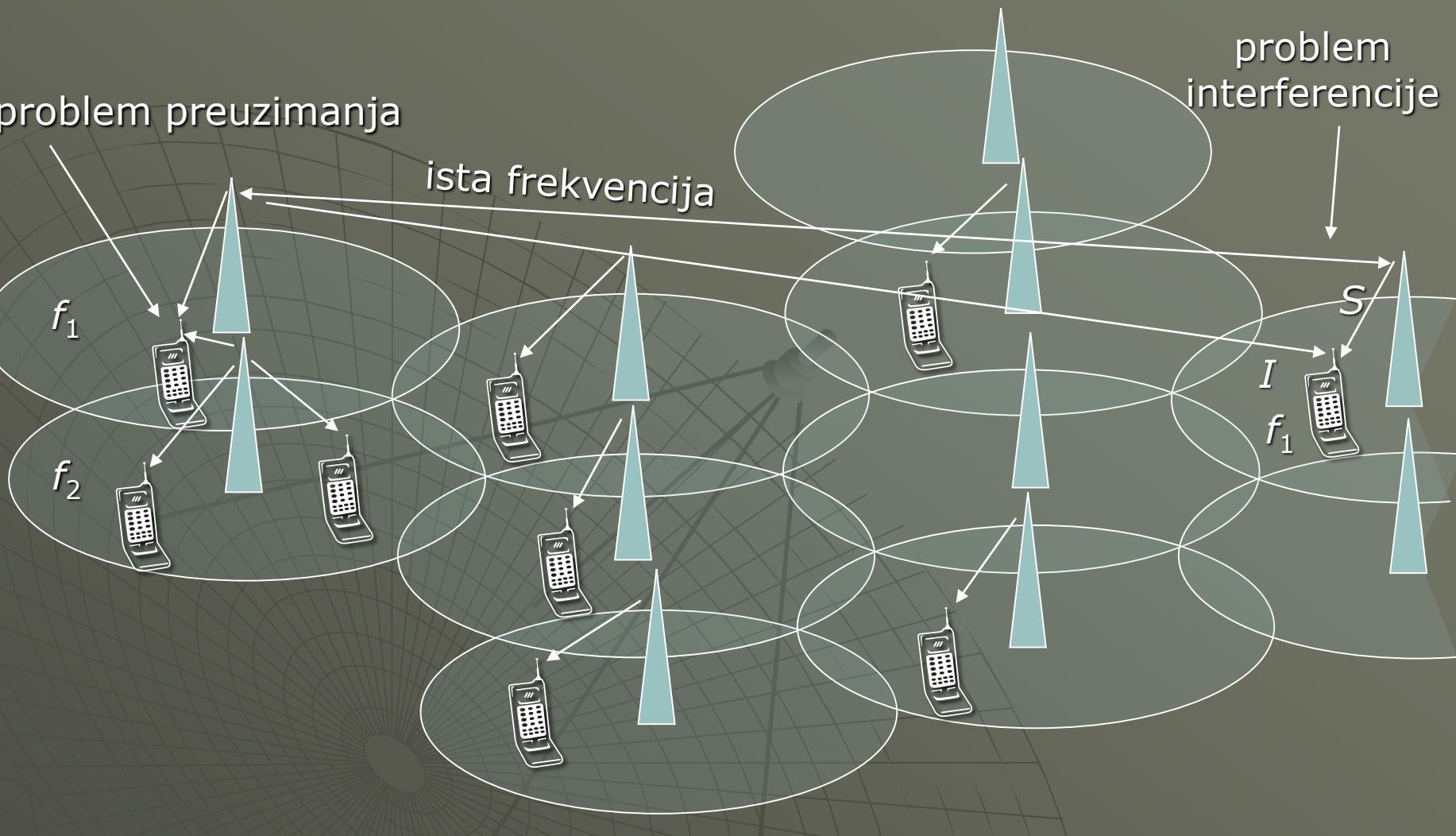
f_1

f_2

problem
interferencije

I
 f_1

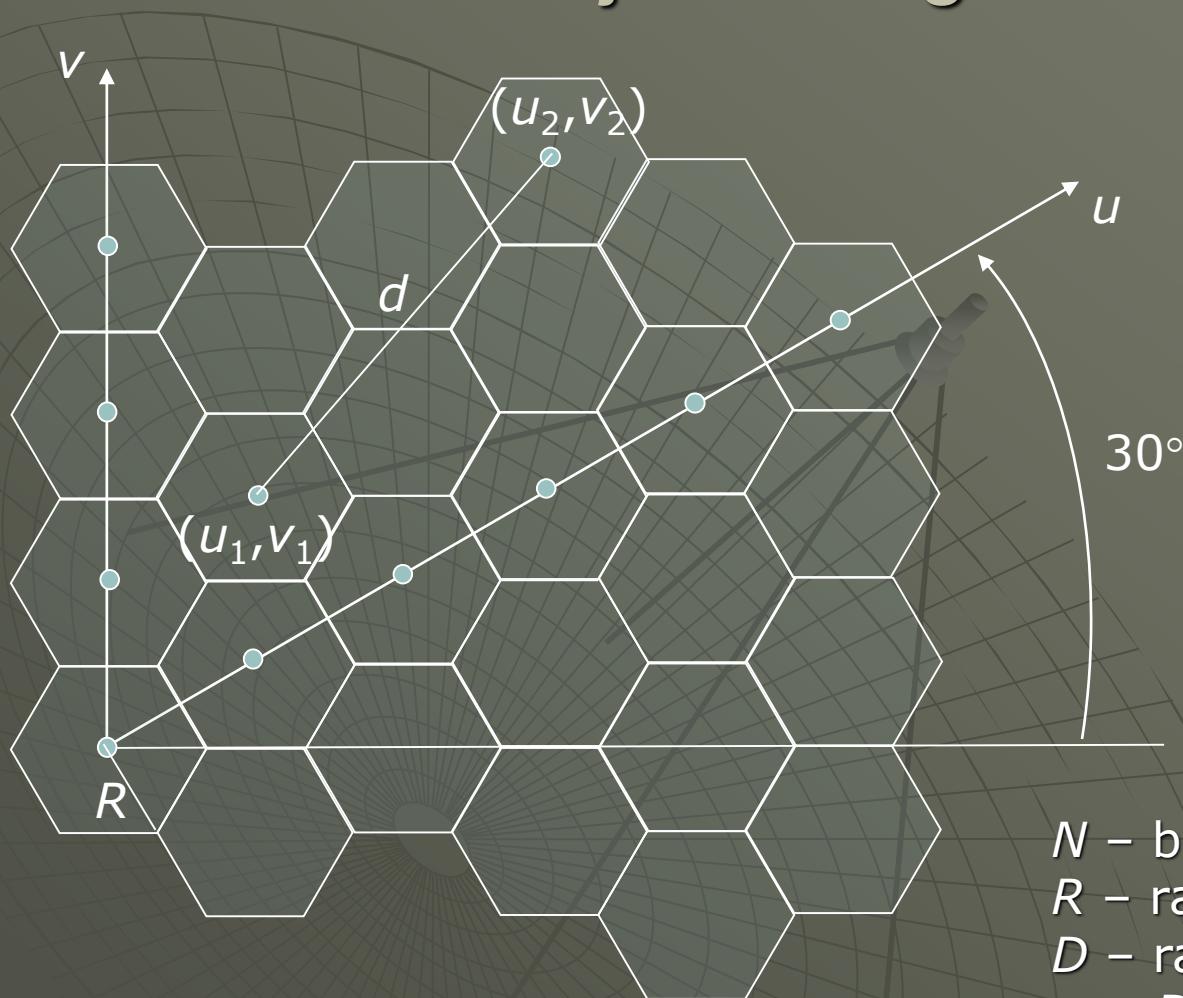
S



S – snaga korisnog signala (od nadležne bazne postaje)

I – snaga signala interferencije (od bazne postaje koja koristi istu noseću frekvenciju kao i bazna postaja koja opslužuje korisnika)

Geometrija heksagonalne ćelije



N – broj ćelija

R – radijus ćelije

D – radijus klastera

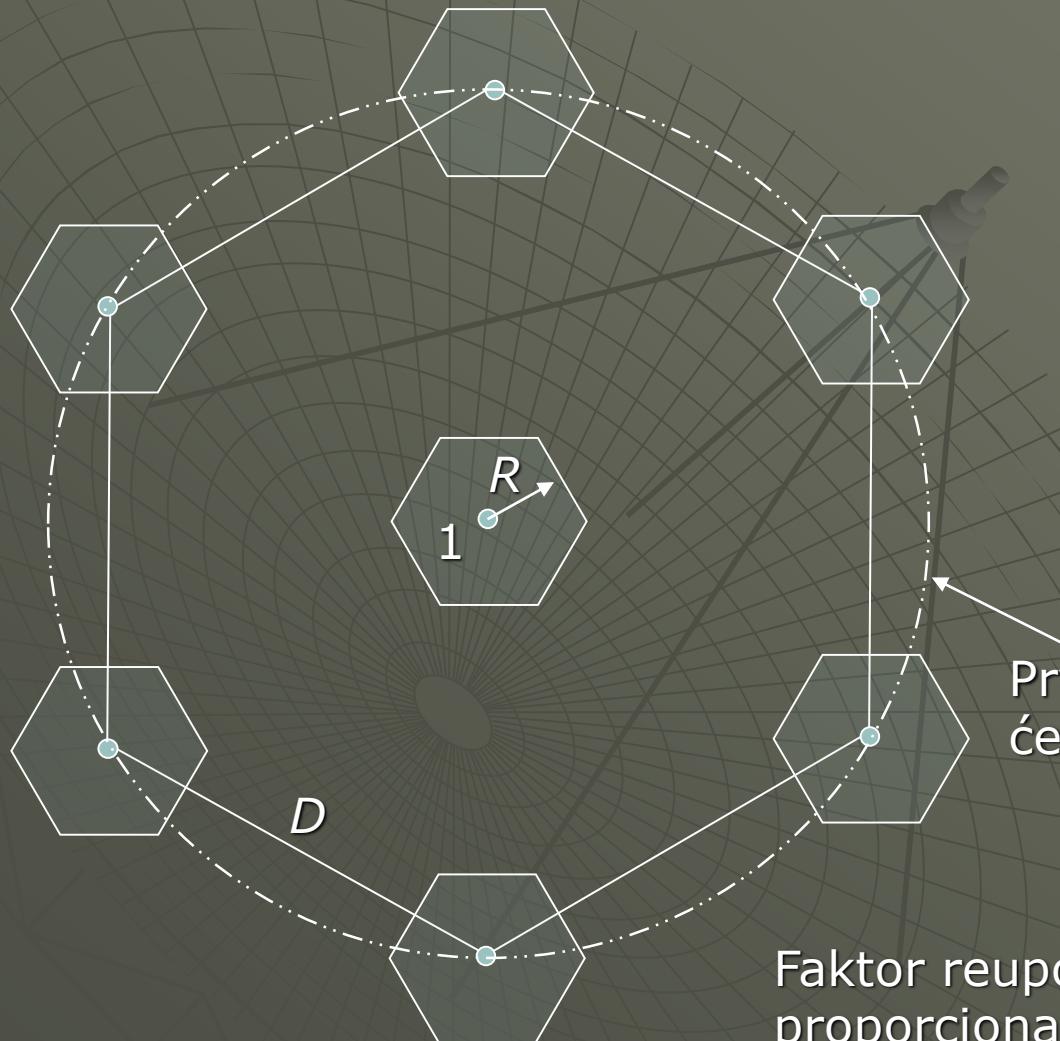
$q = D/R$ – faktor reupotrebe

$$(u_1, v_1) = (0,0) \text{ & } (u_2, v_2) = (\sqrt{3}Ri, \sqrt{3}Rj); i, j \in \mathbb{N} \Rightarrow d = \sqrt{3R(i^2 + j^2 + ij)^{1/2}}$$

Razmak između susjednih ćelija: $i = 1 \text{ & } j = 0$ ili $i = 0 \text{ & } j = 1 \Rightarrow d_{11} = R\sqrt{3}$

$$A_{\text{KLASTERA}} : A_{\text{ČELIJE}} = D^2 : R^2$$

Broj čelija u klasteru: $N + 6 \cdot (1/3)N = 3N \Rightarrow A_{\text{KLASTERA}} : A_{\text{ČELIJE}} = 3N$



$$q = \frac{D}{R} = \sqrt{3N}$$

Prvi prsten od 6 interferirajućih
čelija za čeliju 1

Faktor reupotrebe frekvencije
proporcionalan je kvadratnom korijenu
broja čelija kojeg obuhvaća klaster.

Istokanalna interferencija

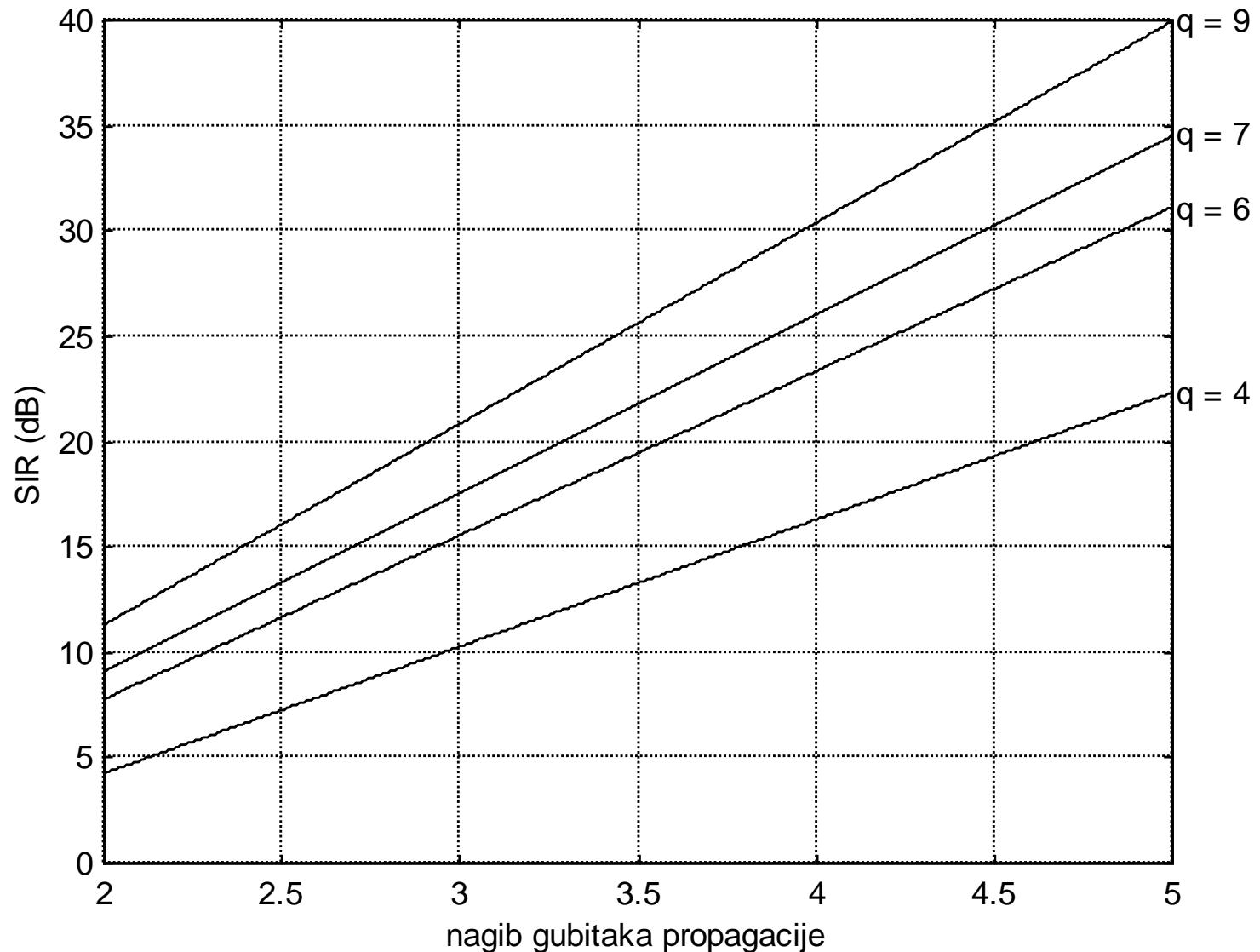
$$\text{SIR} = \frac{S}{I} = \frac{S}{\sum_{m=1}^{N_I} I_m}$$

$$N_I = 6 \quad \& \quad S \propto \frac{1}{R^\gamma} \quad \& \quad I \propto \frac{1}{D^\gamma} \Rightarrow \frac{S}{I} = \frac{1}{\sum_{m=1}^{N_I} \left(\frac{D_m}{R} \right)^{-\gamma}}$$

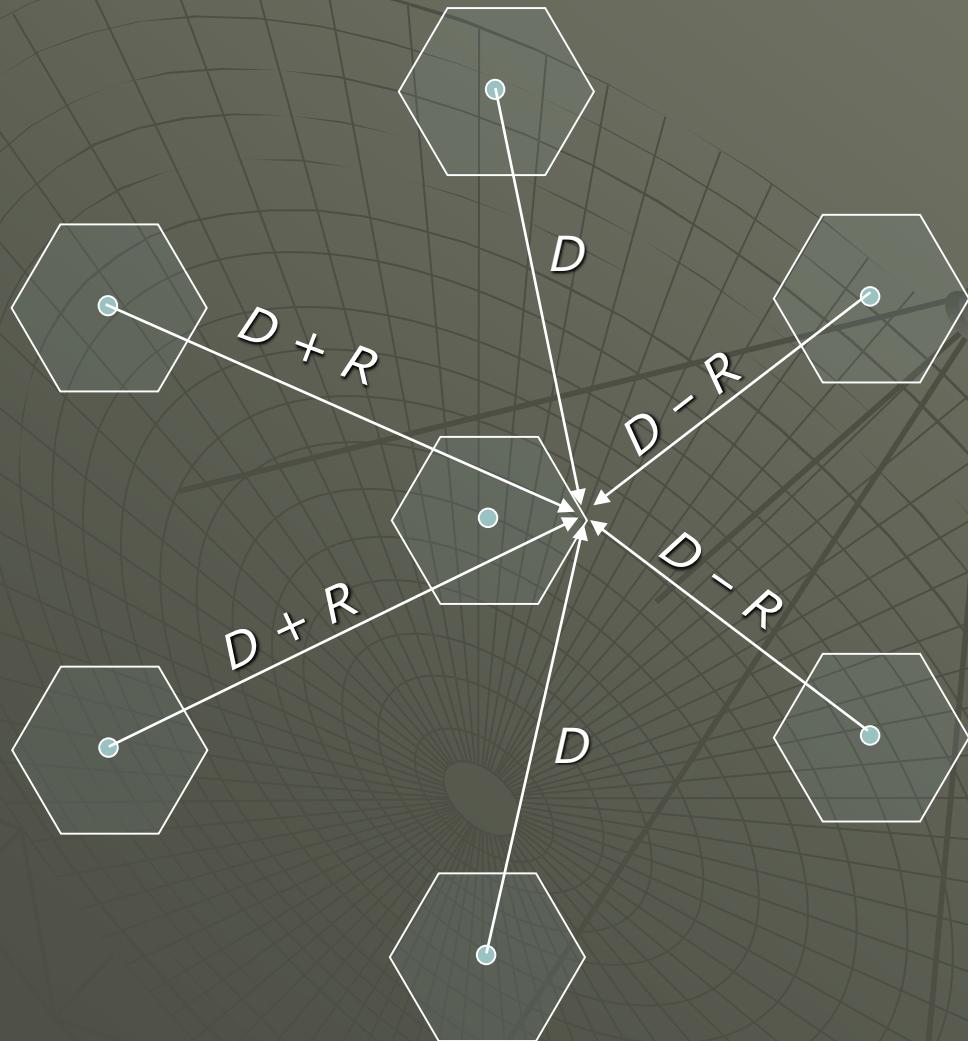
$$D = D_m \Rightarrow \frac{S}{I} = \frac{1}{6} q^\gamma \Rightarrow q = \left[6 \left(\frac{S}{I} \right) \right]^{\frac{1}{\gamma}}$$

Faktor reupotrebe frekvencije, uz pretpostavku jednakih ćelija ovisi o SIR omjeru i nagibu gubitaka propagacije γ za promatranoj sredini.
($\gamma = 2$ za propagaciju u slobodnom prostoru)

Primjer: analogni FM sustav sa $\text{SIR} = 18 \text{ dB}$ i $\gamma = 4 \Rightarrow q = 4,41 \Rightarrow N \approx 7$



Scenarij najlošijeg slučaja istokanalne interferencije



$$\frac{S}{I} = \frac{R^{-\gamma}}{2(D-R)^{-\gamma} + 2D^{-\gamma} + 2(D+R)^{-\gamma}}$$

$$\frac{S}{I} = \frac{1}{2(q-1)^{-\gamma} + 2q^{-\gamma} + 2(q+1)^{-\gamma}}$$

$$N = 7 \Rightarrow q = 4.6 \Rightarrow \frac{S}{I} = 54,3 = 17,3 \text{ dB}$$

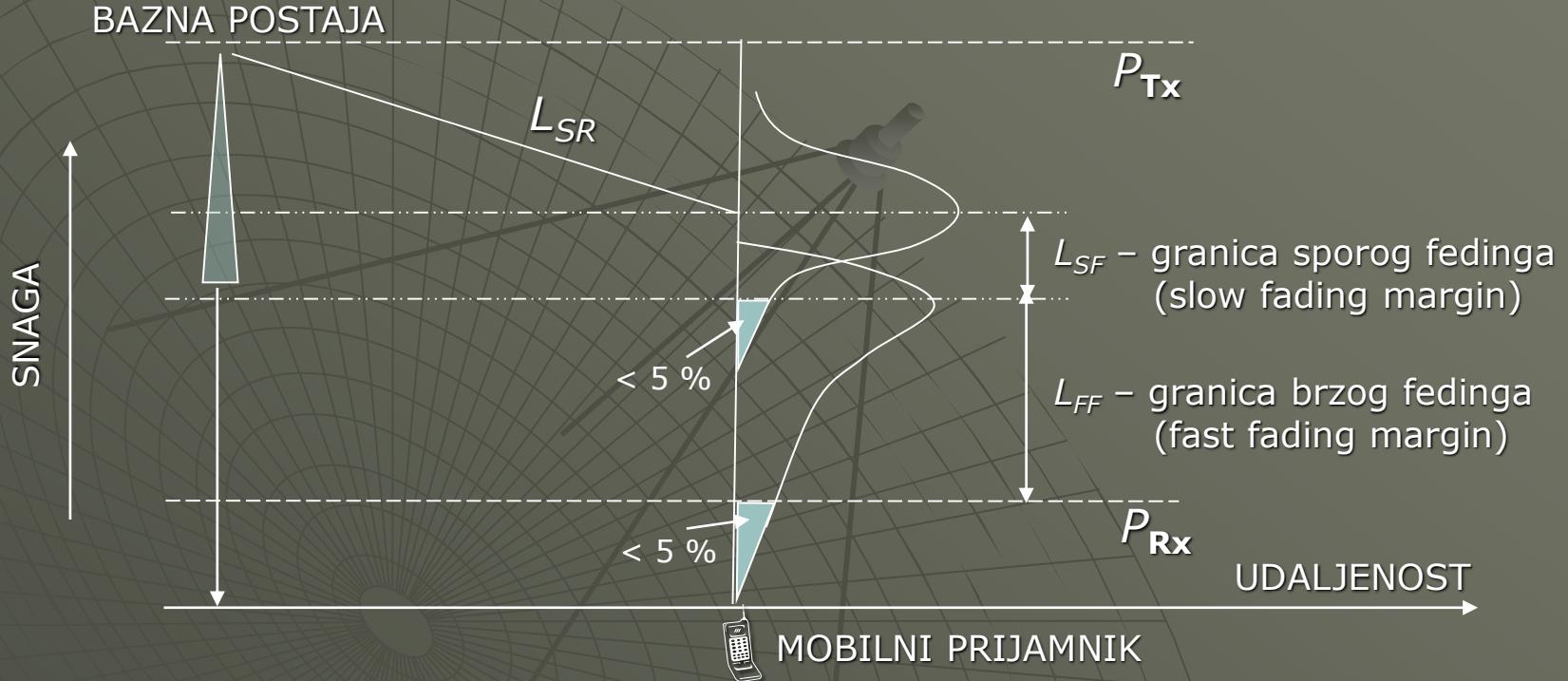
- konzervativnija procjena:

$$\frac{S}{I} = \frac{1}{6(q-1)^{-\gamma}} = 28 = 14,47 \text{ dB}$$

U svrhe redukcije istokanalne interferencije u sustavu često se koristi postupak sektorizacije ćelija korištenjem usmjerenih antena.

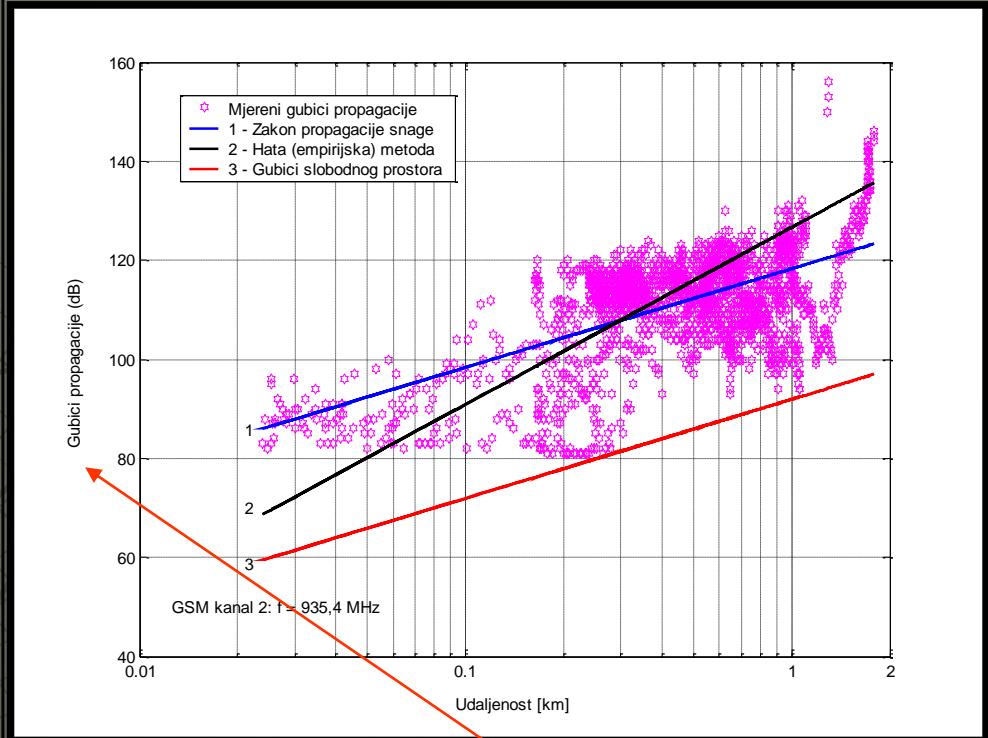
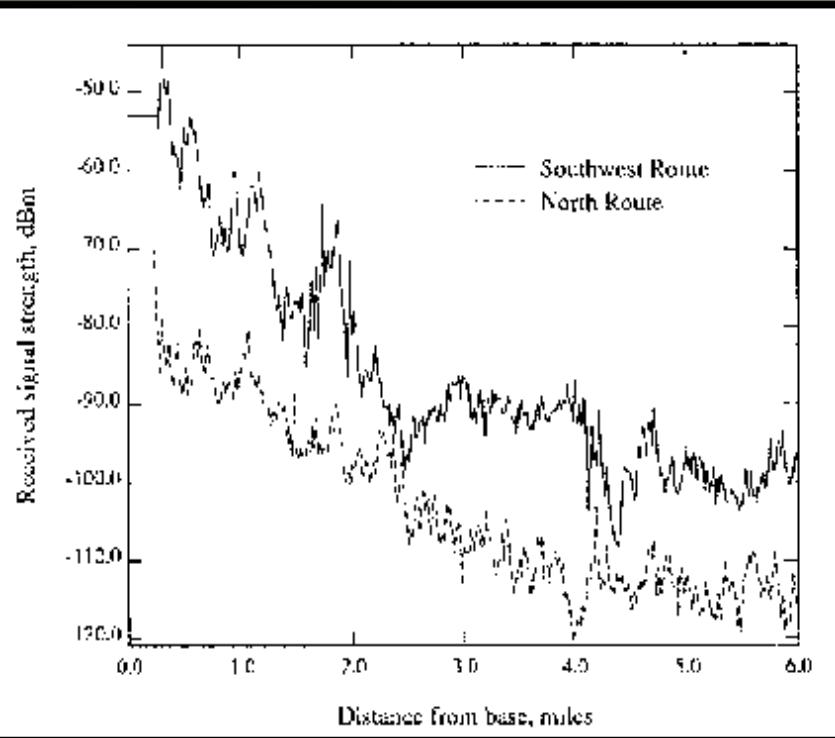
Proračun snage bazne postaje

$$P_{TX} = P_{RX} + L_{SF} + L_{FF} + L_{SR} \leq P_{TX \max}$$



- ◆ Gubici propagacije L_{SR} : zakon opadanja snage
- ◆ Spori feding: log-normalna razdioba;
- ◆ Brzi feding: Rayleighova ili Riceova razdioba;

Zakon opadanja prosječne snage



$$S = \frac{K}{r^\gamma} = \frac{C}{\left(\frac{r}{R}\right)^\gamma}, \quad C = KR^\gamma \Rightarrow S(\text{dB}) = \alpha - 10\gamma \log \frac{r}{R}, \quad \alpha(\text{dB}) = 10 \log C$$

L : svakih 4,75 m
prosjek od 25
mjerenja

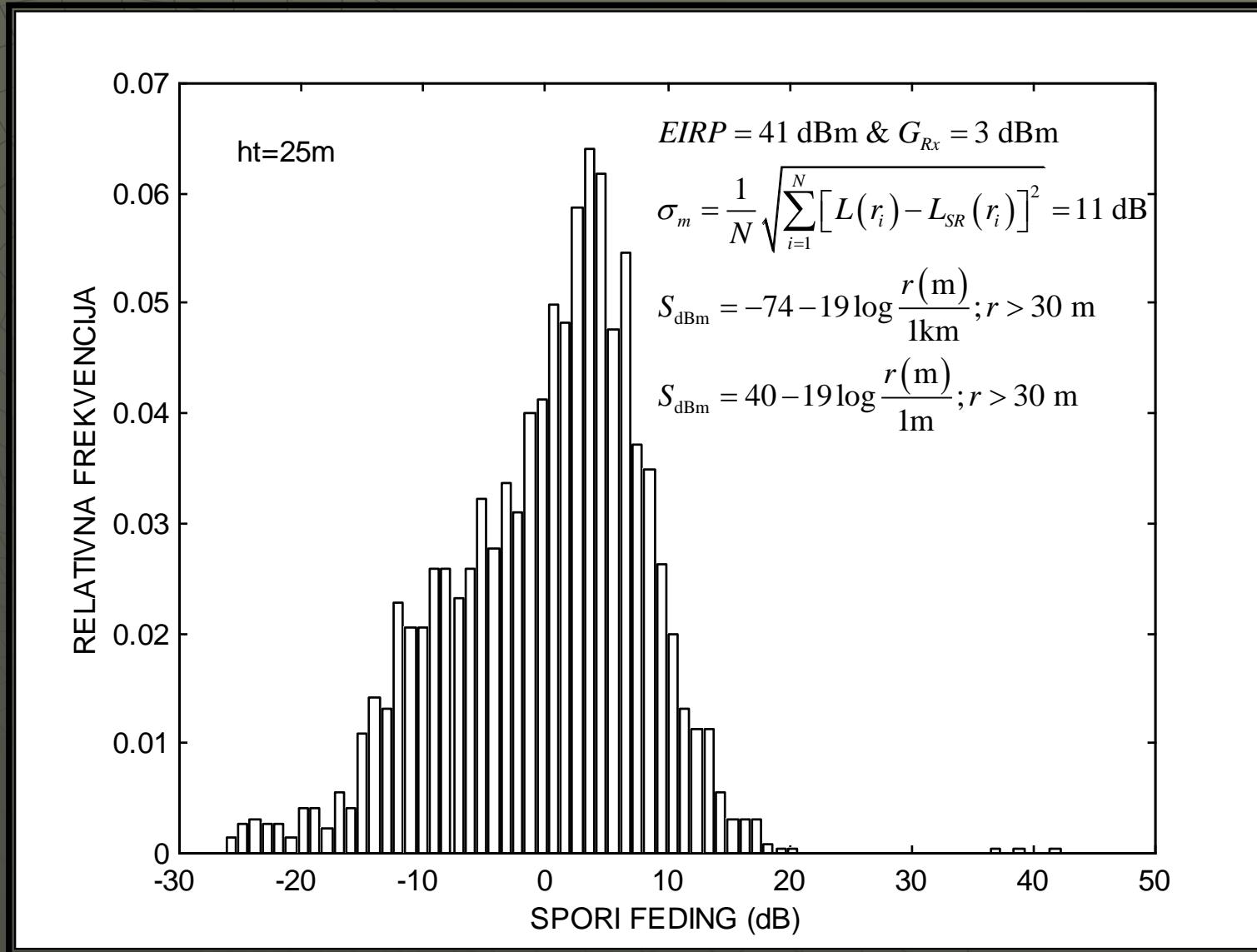
$$L_{SR}(\text{dB}) = \alpha_L + 10\gamma \log \frac{r}{R} \quad \& \quad S(\text{dB}) = EIRP(\text{dB}) + G_{Rx}(\text{dB}) - L_{SR}(\text{dB}) \Rightarrow \alpha(\text{dB}) = EIRP(\text{dB}) + G_{Rx}(\text{dB}) - \alpha_L(\text{dB})$$

$$r = R = 1 \text{ km} \Rightarrow \alpha_L \approx 118 \text{ dB} \quad \& \quad 10\gamma \approx 19 \text{ dB/dekada} \Rightarrow \alpha(\text{dB}) = EIRP + G_{Rx} - 118 \quad \& \quad \gamma = 1,9 \Rightarrow S \square \frac{1}{r^{1,9}}$$

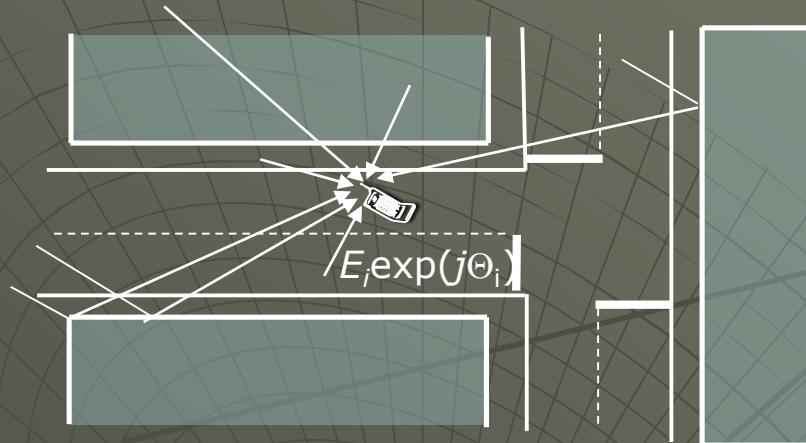
$$L_{SR}(\text{dB}) = 118 + 19 \log \frac{r(\text{km})}{1\text{km}} \Rightarrow S(\text{dB}) = EIRP + G_{Rx} - 118 - 19 \log \frac{r(\text{m}) \cdot 10^{-3}}{1000 \cdot 1\text{m}} = EIRP + G_{Rx} - 4 - 19 \log \frac{r(\text{m})}{1\text{m}}; r > 30 \text{ m}$$

Prosječna snaga preko duljih ruta ima log-normalnu PDF. To znači da prosječna snaga u decibelima ima [normalnu PDF](#).

Za naš primjer mjerena statistika sporog fedinga je kao na slici:



Višestazni prijam



$$E_{uk}(t) = E_0 \sum_i A_i(t) \cos(2\pi f_0 t + \Theta(t))$$
$$E_{uk}(t) = E_0 (I(t) \cos 2\pi f_0 t - Q(t) \sin 2\pi f_0 t)$$
$$I(t) = \sum_i A_i(t) \cos(\Theta(t))$$
$$Q(t) = \sum_i A_i(t) \sin(\Theta(t))$$
$$S(t) = E_0 \sqrt{I^2(t) + Q^2(t)}$$

- ◆ Prema centralnom graničnom teoremu $I(t)$ i $Q(t)$ imaju Gaussovou PDF s prosjekom nula i varijancom σ^2 (prosječna snaga u točki prijama) \Rightarrow envelopa $S(t)$ ima Rayleighovu PDF uz pretpostavku da nema izravnog vala, a ukoliko izravni val nije blokiran $S(t)$ ima Riceovu PDF.
- ◆ Da bi se odredila granica brzog fedinga nije dovoljno imati usrednjene podatke svakih 4,75 m u 900-MHz pojasu; za proračun statistike brzog fedinga, podaci o snazi u točki prijama moraju biti s korakom udaljenosti manjim od barem polovine valne duljine.
- ◆ Od tih se podataka mora oduzeti statistika sporog fedinga i srednji gubici propagacije L_{SR} , a granicu brzog fedinga dobivamo iz statistike tako dobivenih vrijednosti envelope brzog fedinga.

Proračun pokrivenosti ćelije

$$\text{ACP} = \frac{1}{\pi R^2} \int P_{S0} dx dy = \frac{1}{\pi R^2} \int P_{S0} r dr d\theta$$

$$P_{S0} = \text{Vjerojatnost}(m \geq s_0) = \int_{s_0}^{+\infty} p(m) dm$$

$$p(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_m} e^{-\left(\frac{m-\mu_m}{\sqrt{2}\sigma_m}\right)^2}$$

- sporo promjenjiva komponenta fedinga

$$P_{S0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_m^2} \int_{s_0}^{+\infty} e^{-\frac{m-\mu_m}{\sqrt{2}\sigma_m}} dm = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{s_0 - \mu_m}{\sqrt{2}\sigma_m}\right)$$

$$\mu_m = S = \alpha - 10\gamma \log\left(\frac{r}{R}\right) \Rightarrow P_{S0} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{s_0 - \alpha + 10\gamma \log\left(\frac{r}{R}\right)}{\sqrt{2}\sigma_m}\right)$$

$$b = \frac{10\gamma \log(e)}{\sqrt{2}\sigma_m} \quad \& \quad a = \frac{s_0 - \alpha}{\sqrt{2}\sigma_m} \Rightarrow P_{S0} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(a + b \ln\left(\frac{r}{R}\right)\right)$$

$$\text{ACP} = \frac{1}{R^2} \int_0^R r \operatorname{erfc}\left[a + b \ln\left(\frac{r}{R}\right)\right] dr$$

$$\boxed{\text{ACP} = \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{erfc}(a) + \exp\left(\frac{1-2ab}{b^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{1-ab}{b}\right) \right\}}$$

- funkcija pogreške:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du$$

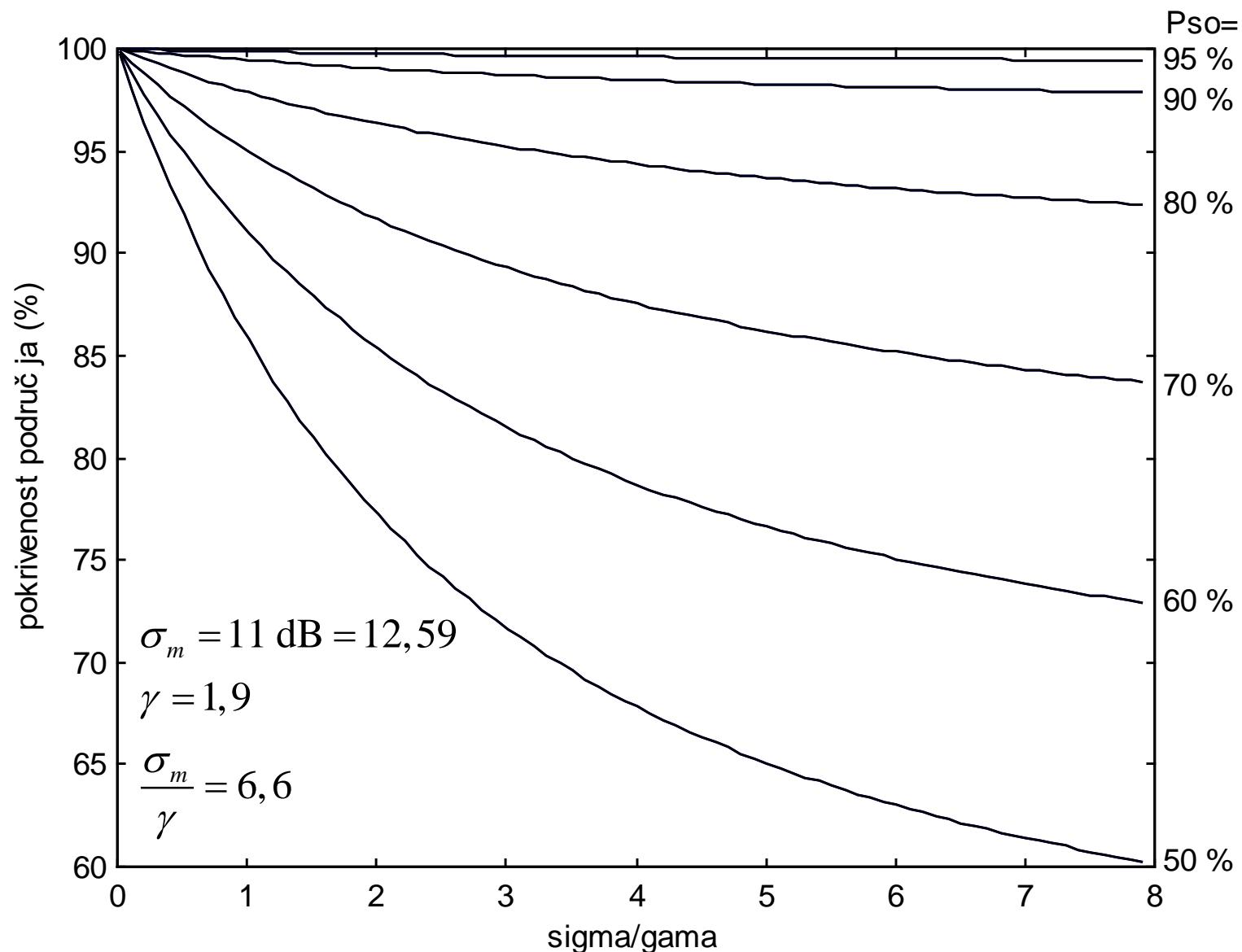
- komplementarna funkcija pogreške:

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-u^2} du$$

$$\boxed{\operatorname{erf}(x) + \operatorname{erfc}(x) = 1}$$

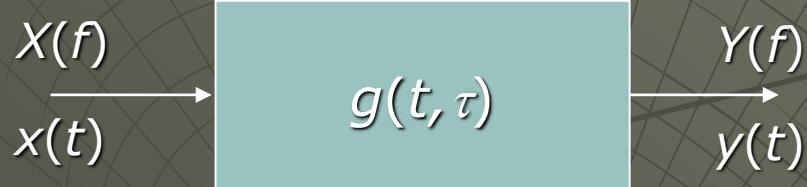
$$\operatorname{erfc}(x) = 2\sqrt{2}Q(x)$$

ACP – Area Coverage Probability

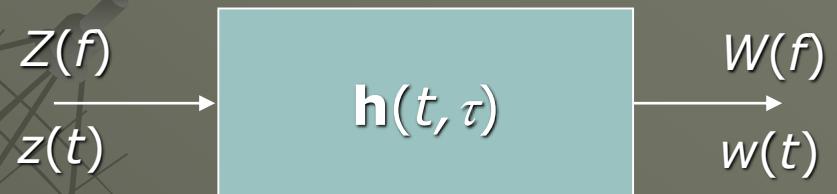


4. Analiza propagacijskog kanala

Realni sustav:



Kompleksni ekvivalent:



$$x(t) = \operatorname{Re}[z(t) \exp(j2\pi f_0 t)]$$

$$y(t) = \operatorname{Re}[w(t) \exp(j2\pi f_0 t)]$$

$$g(t, \tau) = 2 \operatorname{Re}[\mathbf{h}(t, \tau) \exp(j2\pi f_0 t)]$$

$$\mathbf{G}(f) = \mathfrak{I}\{g(\tau)\}$$

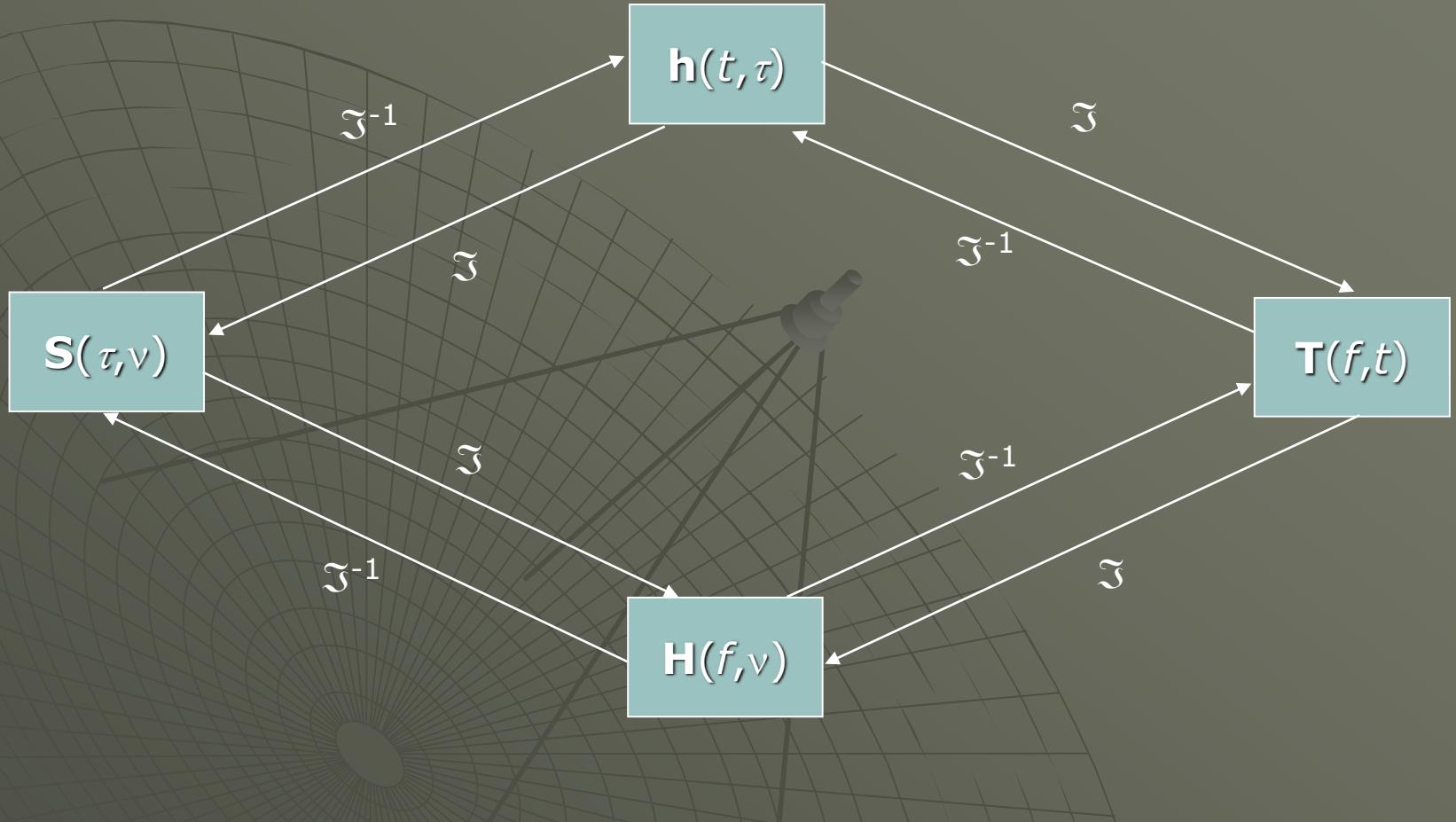
$$\mathbf{G}(f) = \mathbf{G}^*(-f)$$

$$Z(f) = \mathfrak{I}\{z(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) \exp(-j2\pi ft) dt$$

$$W(f) = \mathfrak{I}\{w(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} w(t) \exp(-j2\pi ft) dt$$

$$w(t) = z(t) \otimes \mathbf{h}(t, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{h}(t, \tau) z(t - \tau) d\tau$$

$$W(f) = Z(f) \otimes \mathbf{H}(f, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{H}(f - v, v) Z(f - v) dv$$



$$\mathbf{h}(t, \tau) = \mathfrak{I}^{-1}\{\mathbf{T}(f, t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{T}(f, t) \exp(j2\pi f \tau) df \Rightarrow w(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Z(f) \mathbf{T}(f, t) \exp(j2\pi ft) df$$

$$\mathbf{h}(t, \tau) = \mathfrak{I}^{-1}\{\mathbf{S}(\tau, \nu)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{S}(\tau, \nu) \exp(j2\pi \nu t) d\nu \Rightarrow w(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} z(t - \tau) \mathbf{S}(\tau, \nu) \exp(j2\pi \nu t) d\nu d\tau$$

VARIJABLE VREMENSKI VARIJANTNOG KANALA

Varijabla	Oznaka	Jedinica
Vrijeme	t	Sekunda
Frekvencija	f	Hertz
Kašnjenje	τ	Sekunda
Dopplerov pomak	ν	Hertz

h – impulsni odziv kanala, ulazna funkcija rasipanja kašnjenja
(Time-Variant Impulse Response, Input Delay-Spread Function)

T – vremenski varijantna prijenosna funkcija kanala
(Time-Variant Transfer Function)

S – funkcija raspršenja kanala, funkcija Dopplerovog i rasipanja kašnjenja
(Scattering Function, Delay-Doppler Spread Function)

H – izlazna funkcija Dopplerovog raspršenja
(Output Doppler Spread Function)

Bellove funkcije su Fourierovi transformacijski parovi u odnosu na odgovarajuću varijablu: $f \Leftrightarrow \tau$, $t \Leftrightarrow \nu$.

Varijable f i t su dualne, a τ i ν su dualni operatori.

- absolutni gubici propagacije:

$$L(f, t) = -10 \log \frac{P_r}{P_t} = -20 \log |\mathbf{T}(f, t)| \text{ (dB)}$$

- širokopojasni gubici propagacije:

$$L_{WB}(t) = -10 \log \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathbf{T}(f, t)|^2 df \text{ (dB)}$$

- gubici propagacije u domeni vremena kašnjenja:

$$L_\tau(\tau, t) = -20 \log |\mathbf{h}(\tau, t)| \text{ (dB)}, \mathbf{h}(\tau, t) = \mathfrak{I}^{-1}\{\mathbf{T}(f, t)\}$$

- relativna snaga u domeni frekvencije:

$$P_f(f, t) = 20 \log |\mathfrak{I}[\mathbf{h}(\tau, t)]| \text{ (dB)}$$

- Dopplerov spektar snage u pojasu:

$$P_{WD}(\nu) = 10 \log \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathbf{S}(\tau, \nu)|^2 d\tau \text{ (dB)}, \mathbf{S}(\tau, \nu) = \mathfrak{I}[\mathbf{h}(\tau, t)]$$

- uskopojasni gubici propagacije:

$$L(t; f_0) = -20 \log |\mathbf{T}(0, t)| \text{ (dB)}$$

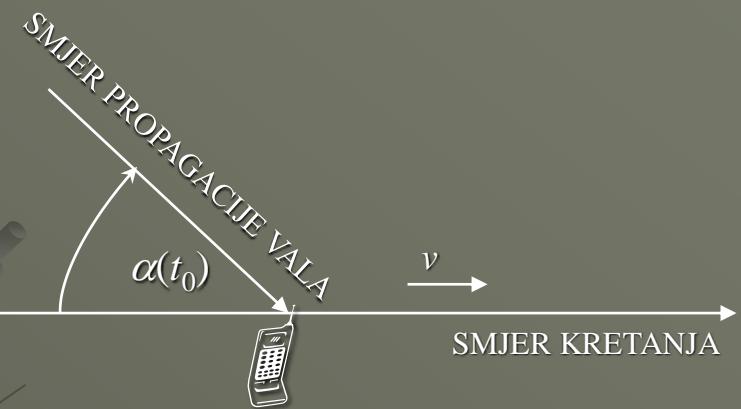
- Dopplerov spektar snage na nosećoj frekvenciji:

$$P_{ND}(\nu; f_0) = 20 \log |\mathfrak{I}[\mathbf{T}(0, t)]| \text{ (dB)}$$

Efekt kretanja prijamnika

- za LOS val (izravni val):

U mobilnom radijskom kanalu uslijed Dopplerovog efekta postoji **slučajna fazna modulacija** signala koji se prenosi kroz kanal.



$$\mathbf{G}_0(f_0, t) = \frac{c}{4\pi f_0 d_0(t)} \exp \left[j2\pi f_0 \cdot \left(t - \frac{d_0(t)}{c} \right) \right];$$

$$d_0(t) = c \cdot \tau_0(t) \Rightarrow \mathbf{G}_0(f_0, t) = \frac{1}{4\pi f_0 \tau_0(t)} \exp \left\{ j2\pi f_0 [t - \tau_0(t)] \right\}$$

- Dopplerov pomak u trenutku $t = t_0$ (linearni kanal):

$$v(t_0) = \frac{v}{\lambda} \cos \alpha(t_0); \quad \lambda = \frac{c}{f_0}$$

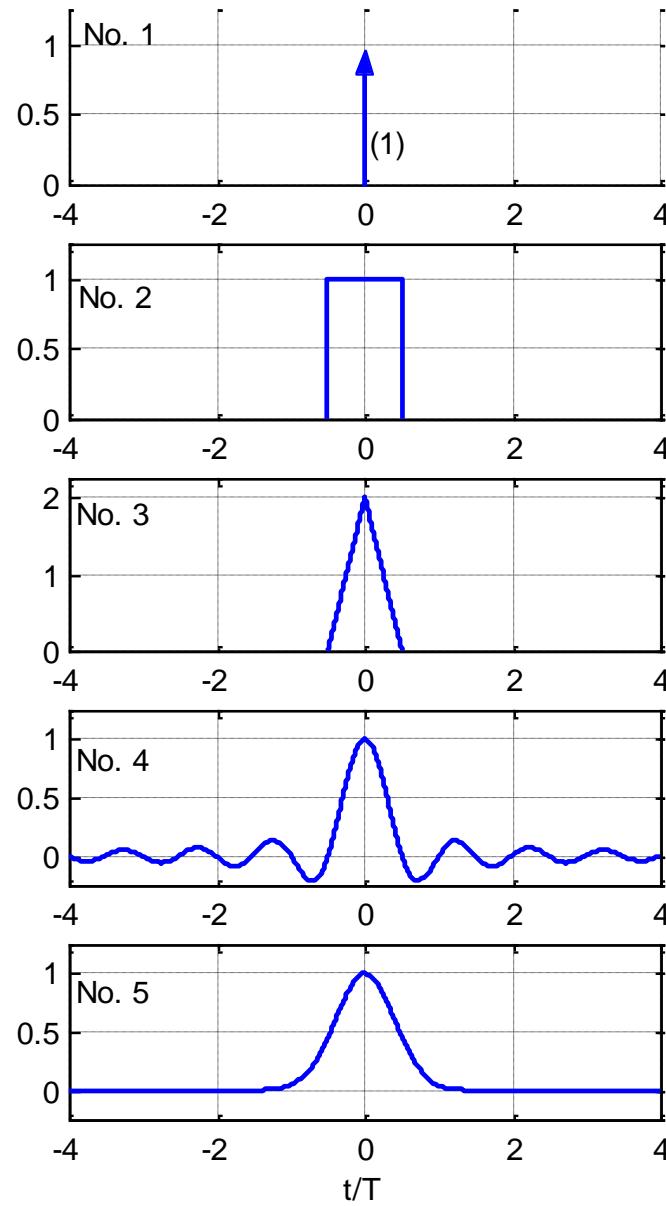
$$v(t_0) = -f_0 \frac{d\tau_0(t)}{dt} \Big|_{t=t_0} = -f_0 \cdot \dot{\tau}_0(t_0) \Rightarrow \boxed{y(t) = Y_0(t) \cos(2\pi f_0 t + 2\pi \int v dt)}$$

Mjerenja propagacijskog kanala

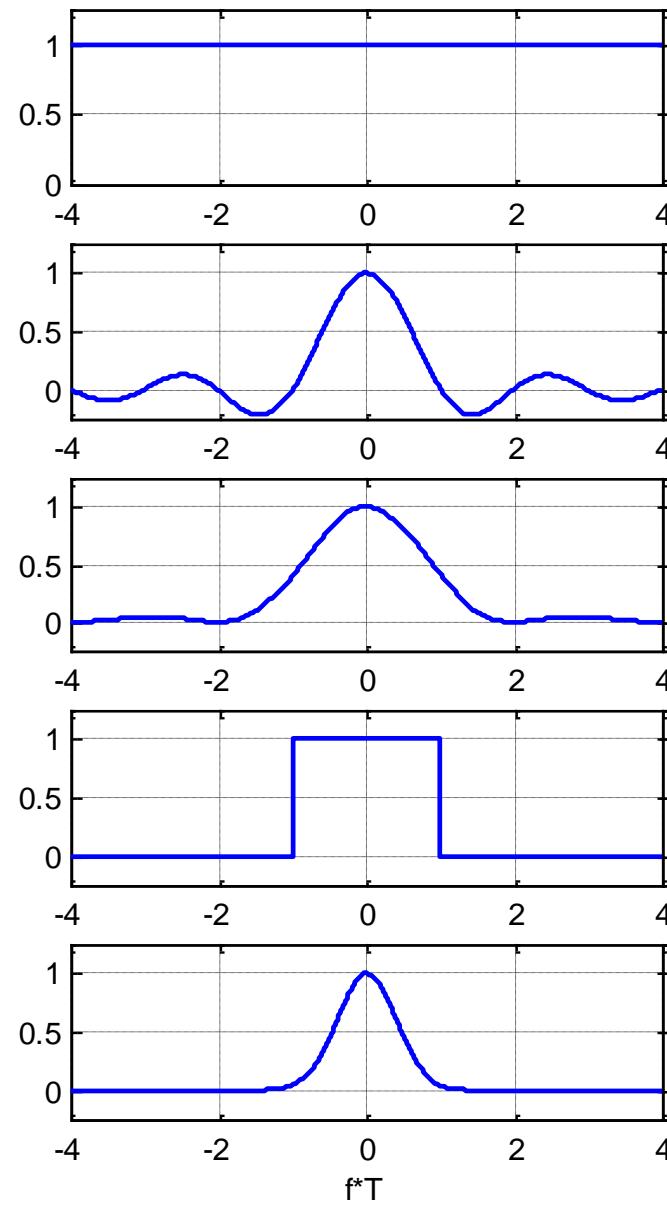


No.	Test impuls	Vremenska domena	Frekvencijska domena
1.	Delta impuls	$x(t) = \delta(t)$	$X(f) = 1$
2.	Pravokutni impuls	$x(t) = \begin{cases} 1/T, & t \leq T/2 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$	$X(f) = \text{sinc}(fT)$
3.	Trokutasti impuls	$x(t) = \begin{cases} 2(-2 t/T + 1), & t \leq T/2 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$	$X(f) = \text{sinc}^2(fT/2)$
4.	Impuls sinc(x)	$x(t) = \text{sinc}(2t/T)$	$X(f) = \begin{cases} 1, & f \leq 1/T \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$
5.	Gaussov impuls	$x(t) = \exp[-\pi(t/T)^2]$	$X(f) = \exp[-\pi(fT)^2]$

VREMENSKA DOMENA



FREKVENCIJSKA DOMENA



Klasifikacija propagacijskog kanala

Koherentni pojas kanala, u slučaju frekvencijski selektivnog kanala, određuje frekvencijsku razdvojenost na kojoj atenuacije amplituda dviju komponenti u spektru signala postaju nekorelirane tako da koeficijent korelacije envelope signala opadne do zadane vrijednosti ($0,9; 0,5; 1/e$).

ŠIRINA POJASA SIGNALA > KOHERENTNI POJAS \Rightarrow VREMENSKA DISTORZIJA

Koherentno vrijeme kanala, u slučaju vremenski selektivnog kanala, određuje vremensku razdvojenost za koju atenuacije amplitude signala postaju nekorelirane tako da koeficijent korelacije envelope signala opadne do zadane vrijednosti ($0,9; 0,5; 1/e$).

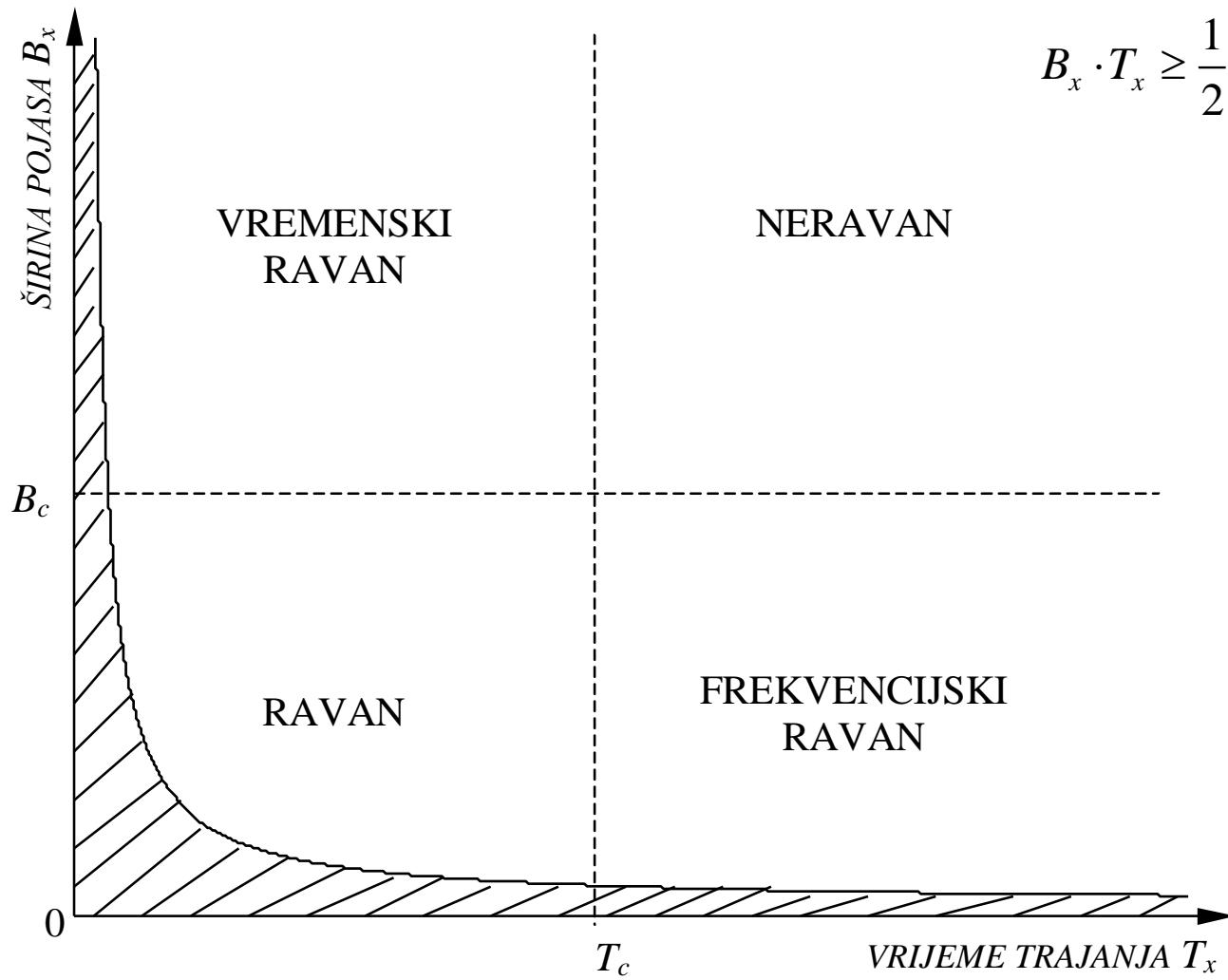
VRIJEME TRAJANJA SIGNALA > KOHERENTNO VRIJEME \Rightarrow FREKVENCIJSKA DISTORZIJA

Minimalna širina pojasa signala na kojoj **vremenska disperzija** u kanalu postaje uočljiva pojava obrnuto je proporcionalna maksimalnom prekoračenju kašnjenja u kanalu, pri čemu pod prekoračenjem kašnjenja podrazumijevamo stvarno vrijeme kašnjenja umanjeno za vrijeme kašnjenja vala koji prvi stiže do prijamnika.

Minimalno trajanje valnog oblika signala na kojoj **frekvencijska disperzija** (Dopplerovo rasipanje) postaje uočljiva pojava obrnuto je proporcionalna maksimalnom Dopplerovom frekvencijskom pomaku.

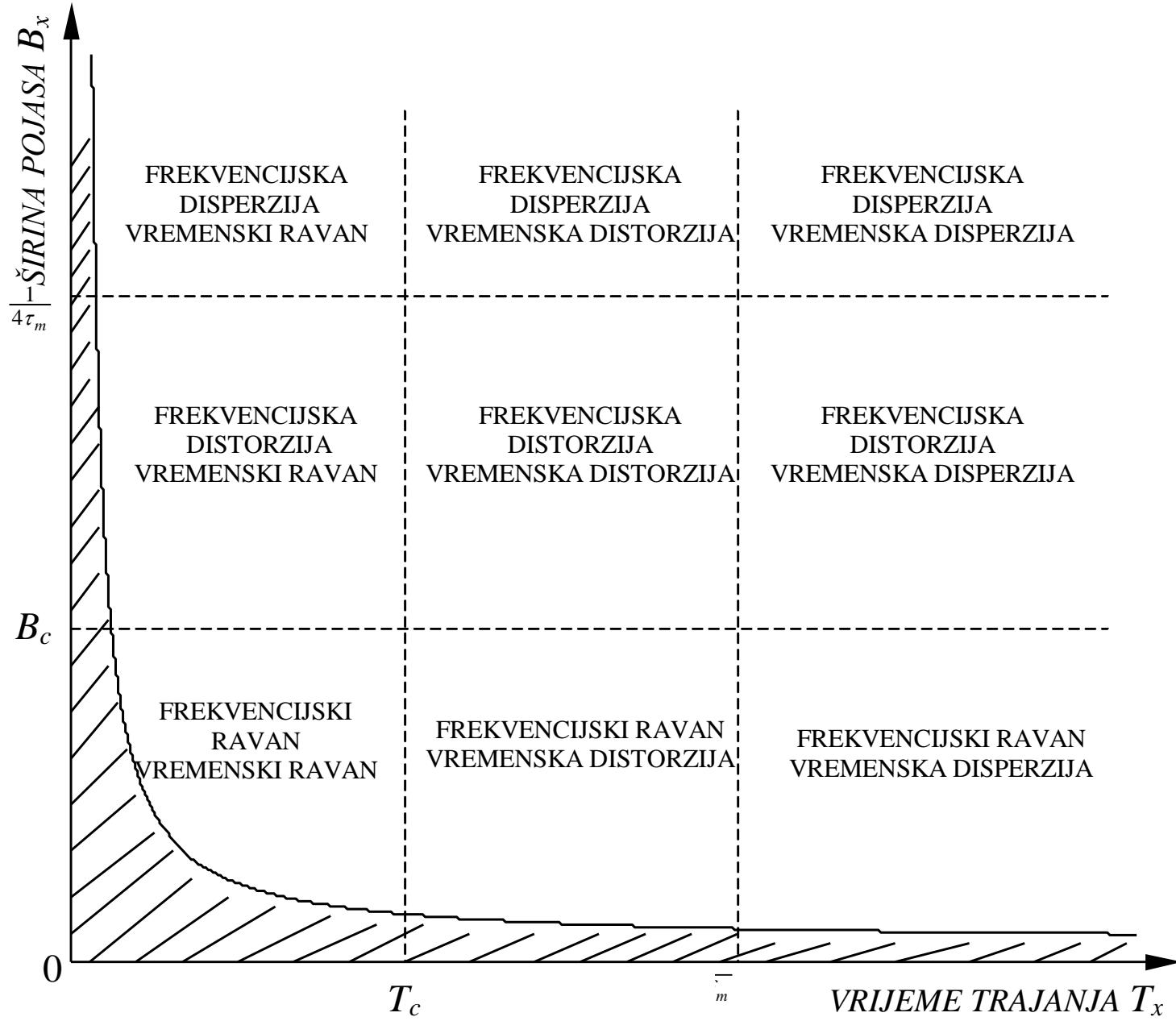
Ako širina pojasa signala u nekom sustavu ne prelazi iznos koherentnog pojasa kanala tada se takav radijski sustav može promatrati kao uskopojasni.

$$B_x \cdot T_x \geq \frac{1}{2}$$



B_c – koherentni pojas kanala (*coherence bandwidth*)

T_c – koherentno vrijeme kanala (*coherence time*)



Rasipanje kašnjenja i koherentni pojas kanala

$$A_C(\Delta f)_{f=B_c} = \mathbf{T}(f) \otimes \mathbf{T}^*(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{T}(f) \mathbf{T}^*(f + \Delta f) df - \text{Autokorelacija prijenosne funkcije}$$

$$A_C(\Delta f) = \Im[\mathbf{h}(\tau) \cdot \mathbf{h}^*(\tau)] = \Im[|\mathbf{h}(\tau)|^2]$$

$$|A_C(\Delta f = B_c)| = C \cdot P, C - \text{korelacijski prag}$$

$$B_c = B_c(\sigma) \triangleq \frac{1}{\sigma}; - \text{koherentni pojas}$$

$$\sigma = \frac{\int_0^\infty (\tau - \mu)^2 |\mathbf{h}(\tau)|^2 d\tau}{P} - \text{rasipanje kašnjenja (standardna devijacija kašnjenja)}$$

$$\mu = \frac{\int_0^\infty \tau |\mathbf{h}(\tau)|^2 d\tau}{P} - \text{prosječno prekoračenje kašnjenja}$$

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{T}(f)|^2 df = \int_0^\infty |\mathbf{h}(\tau)|^2 d\tau - \text{ukupna snaga u pojasu}$$

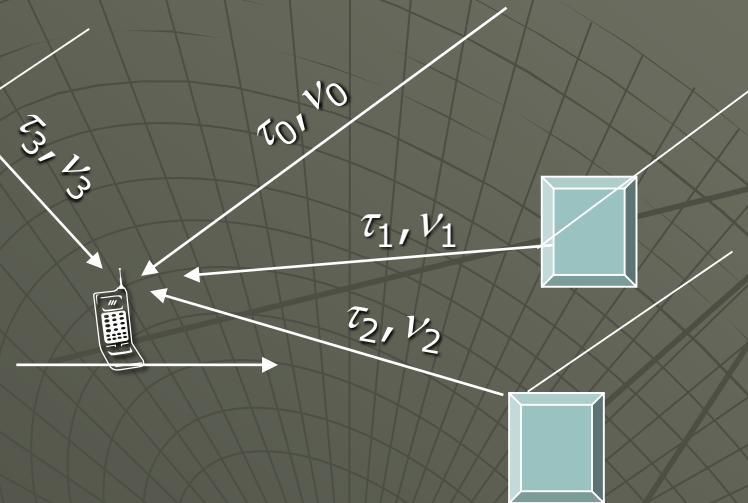
$$P_h(\tau) = \frac{|\mathbf{h}(\tau)|^2}{P} = \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{\tau}{\sigma}\right) - \text{čest oblik karakteristike prosječnog profila snage}$$

$$A_C(\Delta f) = \Im[P_h(\tau)] = \frac{1}{1 - j2\pi\sigma \cdot \Delta f}$$

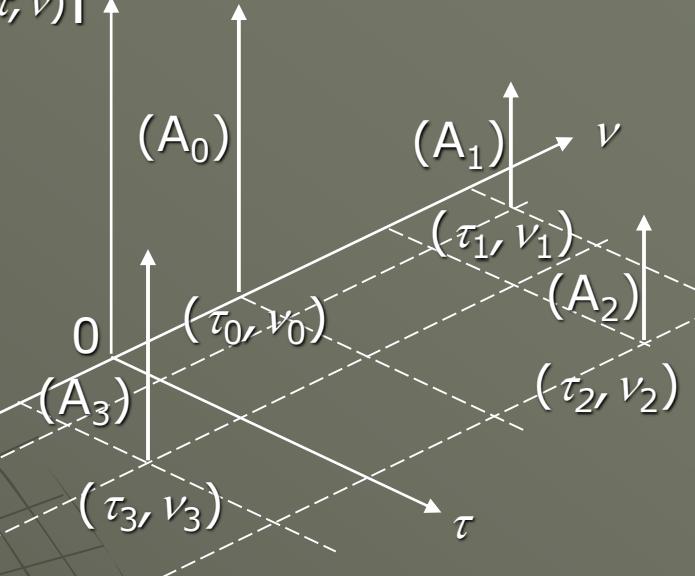
$$|A_C(\Delta f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi\sigma \cdot \Delta f)^2}}; |A_C(\Delta f)|_{\Delta f = B_c} = C$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{B_c = \frac{1}{2\pi\sigma}}$$

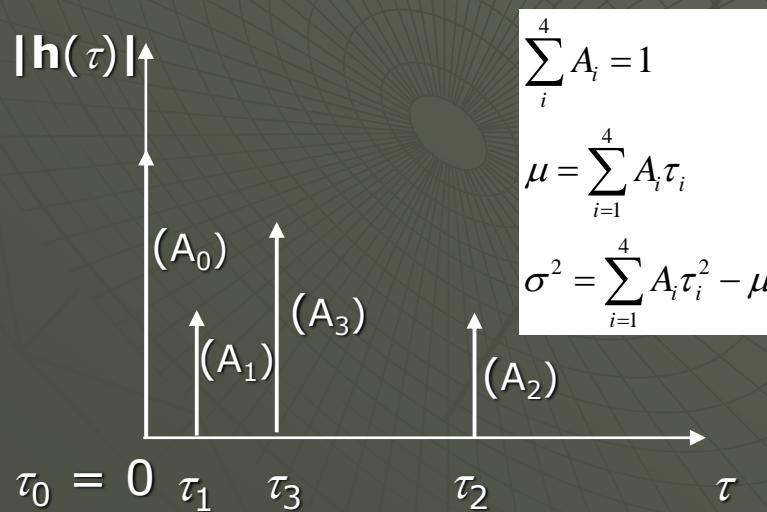
Primjer višestaznog kanala



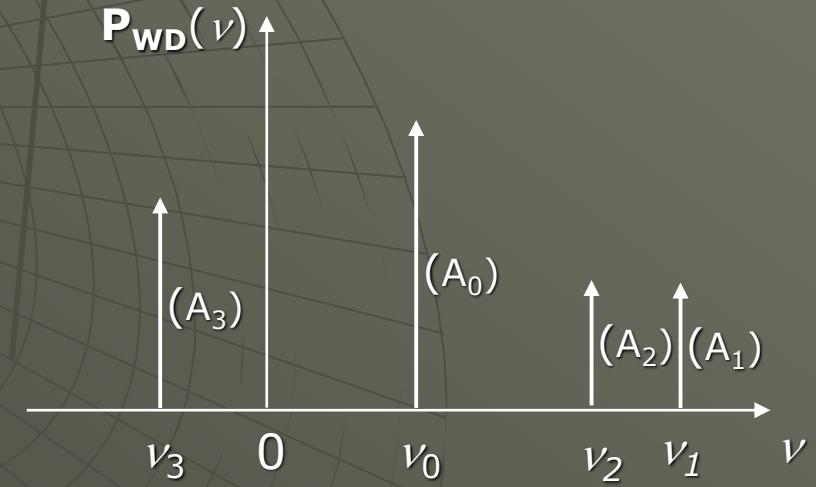
$$|S(\tau, \nu)|$$



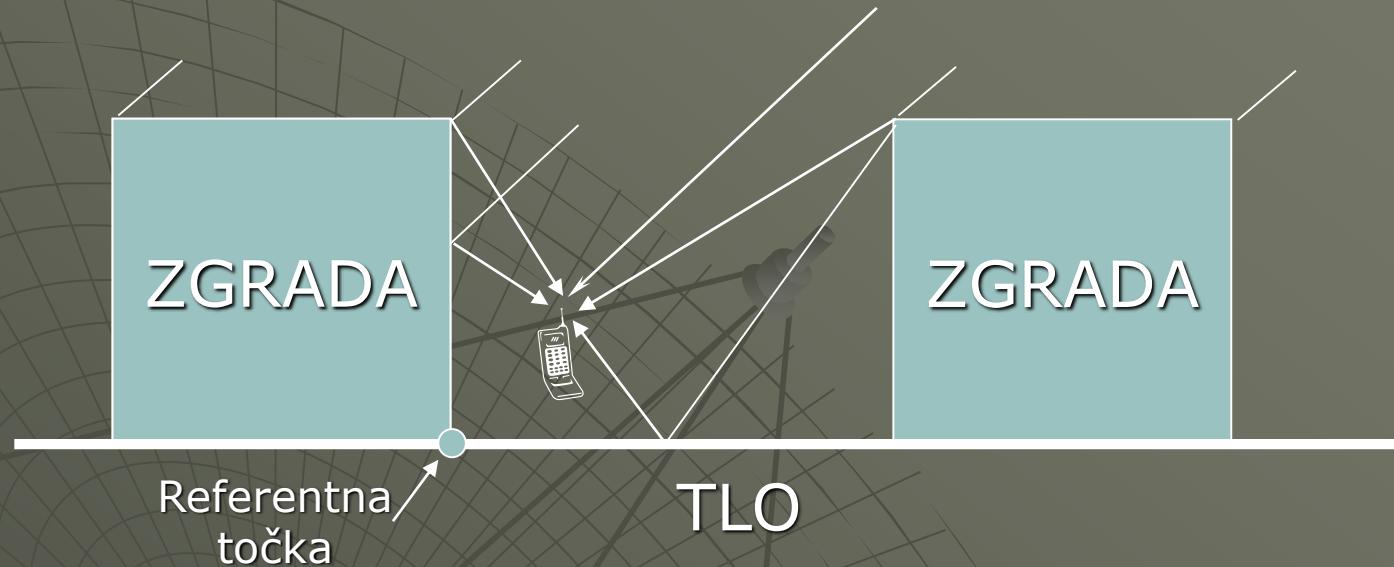
$$|\mathbf{h}(\tau)|$$



$$\mathbf{P}_{\text{WD}}(\nu)$$



Primjer simulacije LEO satelitskog kanala



LEO satelit 780 km iznad površine Zemlje i na elevaciji 45° od prijamnika
Orbitalni period satelita: 110 min.

Visina granice troposfere: 16 km, standardna atmosfera

Polarizacija: vertikalna

Središnja frekvencija: 1625 MHz (L-pojas)

Frekvencija takta PN sekvence: 125 MHz, PN sekvenco od 511 chip

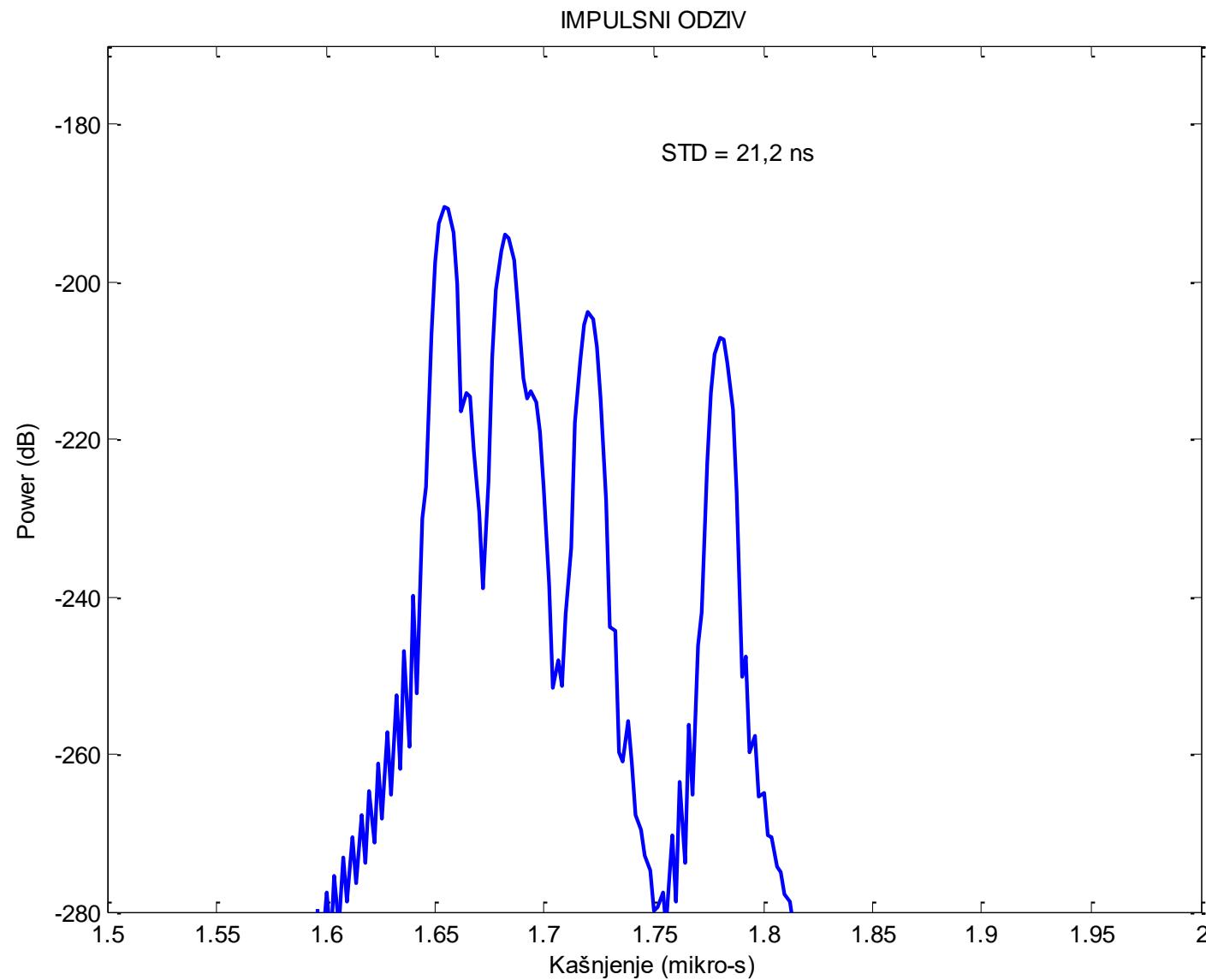
Broj koraka u inverznoj FFT: 2048, referentna faza 500 m od ref. točke

Broj koraka u FFT: 128

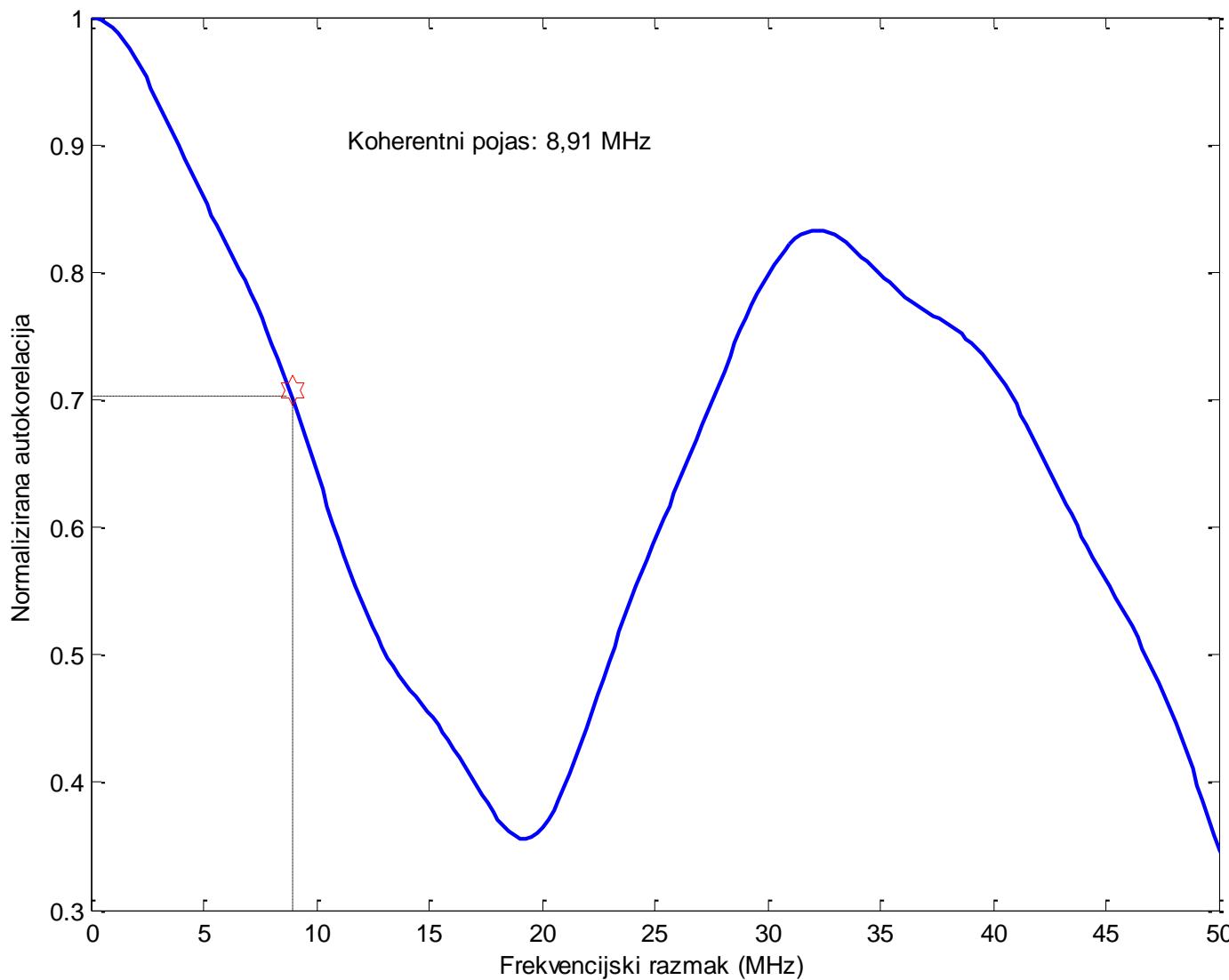
Dimenzije zgrada: 10 m x 7 m, širina ulice: 25 m

Visina prijamnika: 3 m

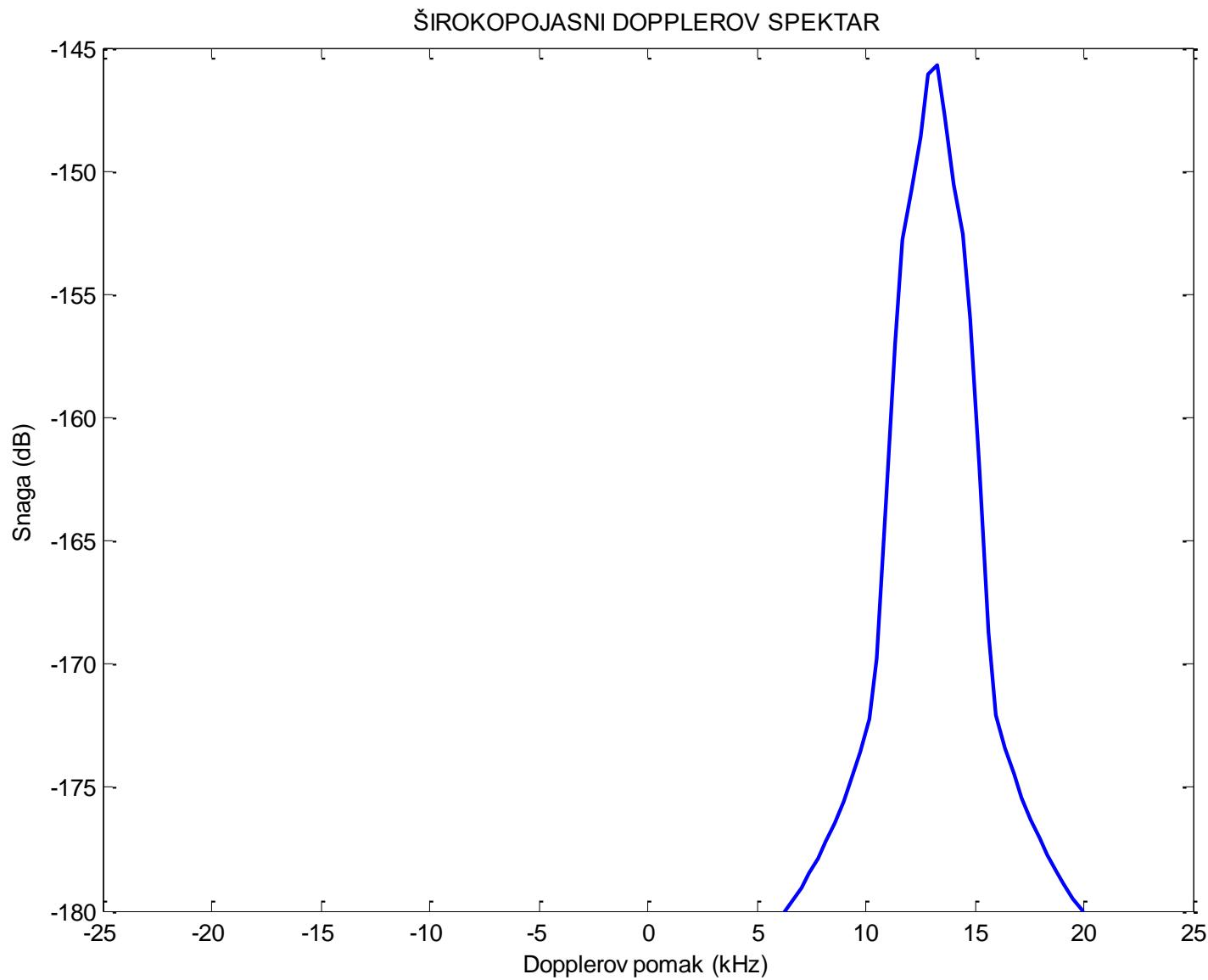
Impulsni odziv



Funkcija autokorelacije



Širokopojasni Dopplerov spektar



Neki postupci za poništavanje efekta višestaznog prijama u mobilnim sustavima

- ◆ Tehnika višestrukog prijama (Diversity Reception): prostorna, frekvencijska, kutna, polarizacijska, vremenska (na strani bazne postaje)
- ◆ Korištenje posebnih izvedbi antena (npr. GPS Choke Ring Antenna) i antenskih nizova
- ◆ Ekvilajzeri: imaju prijenosnu karakteristiku koja odgovara inverznoj prijenosnoj funkciji kanala; pošto je kanal vremenski promjenjiv, ekvilajzer mora biti adaptivan
- ◆ Potpuno poništavanje efekta višestaznog prijama rezultira prijenosnom karakteristikom bez distorzije. Impulsni odziv takvog kanala je jedan istaknuti i zakašnjeli šiljak, te pod pretpostavkom isključivo Gaussovog šuma u kanalu, možemo primijeniti analizu kao u poglavlju 2. Drugim riječima, tek ukoliko je višestazni prijam potpuno eliminiran stvorene su pretpostavke korištenja cijele raspoložive širine frekvencijskog pojasa. Postotak iskorištenja širine pojasa bez redukcije distorzije u kanalu može se procijeniti kao omjer koherenthog pojasa i raspoložive širine pojasa.

Literatura

- ◆ R. Steele: "Mobile Radio Communications", IEEE Press, Pentech Press, USA, 1995.
- ◆ J. D. Parsons: "The Mobile Radio Propagation Channel", Pentech Press London, GB, 1992.
- ◆ J. D. Gibson: "The Mobile Communications Handbook", CRC Press, IEEE Press
- ◆ V. K. Garg, J. E. Wilkes: "Wireless and Personal Communications Systems", Prentice Hall, Inc. USA, 1996.
- ◆ G. C. Hess: "Handbook of Land-Mobile Radio System Coverage", Artech House Boston – London, 1998.
- ◆ G. C. Hess: "Land-Mobile Radio System Engineering", Artech House Boston – London, 1993.
- ◆ J. Doble: "Introduction to Radio Propagation for Fixed and Mobile Communications, Artech House Boston – London, 1996.

Dodatak 1. Diracova δ -funkcija

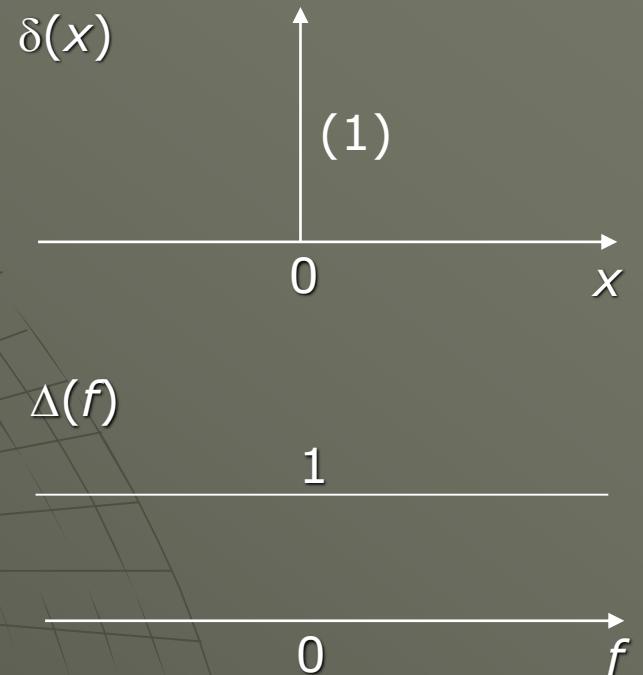
$$1. \delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

$$2. \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0)$$

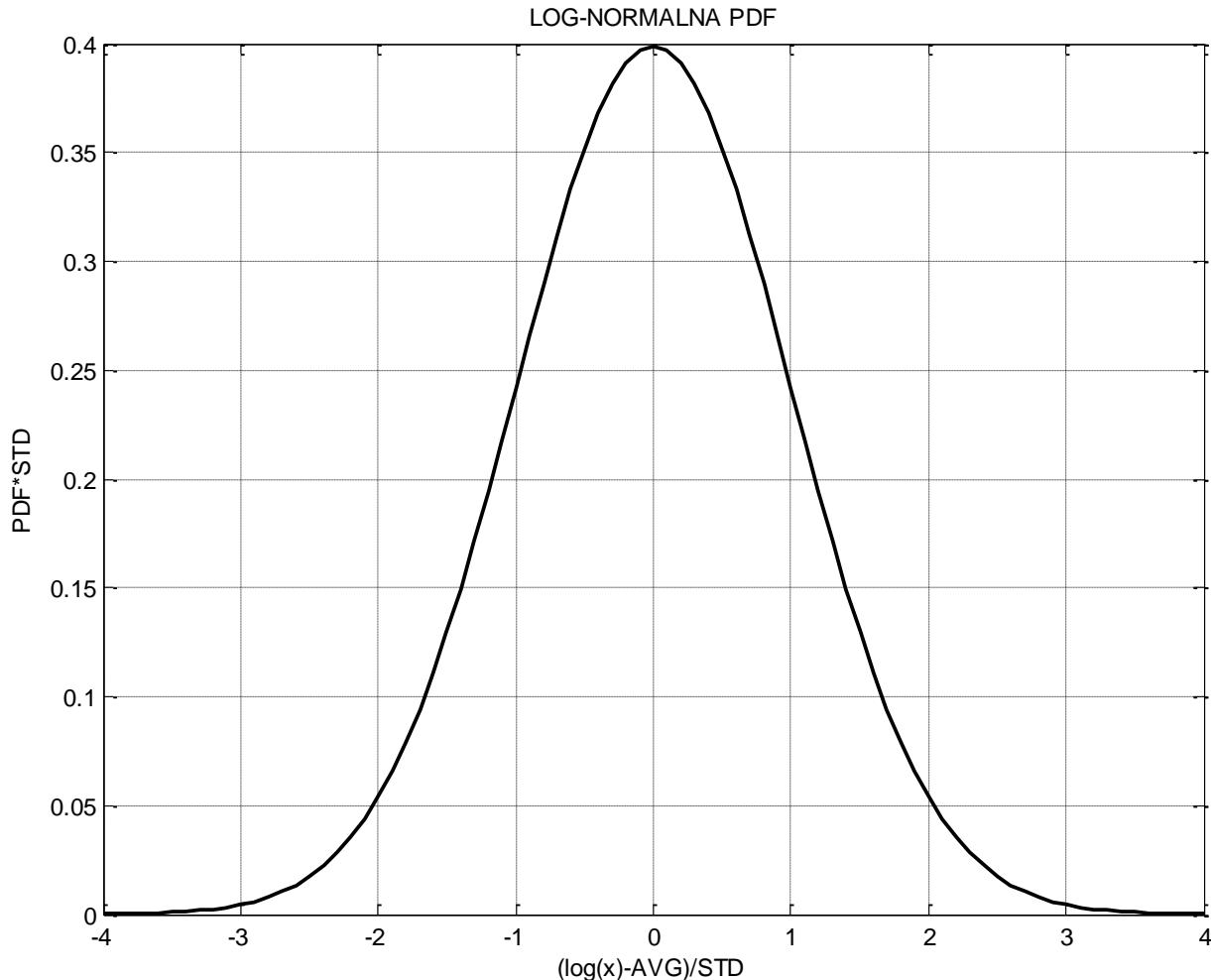
$$x_0 = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0)$$

$$\Delta(f) = \Im[\delta(x)] = 1$$



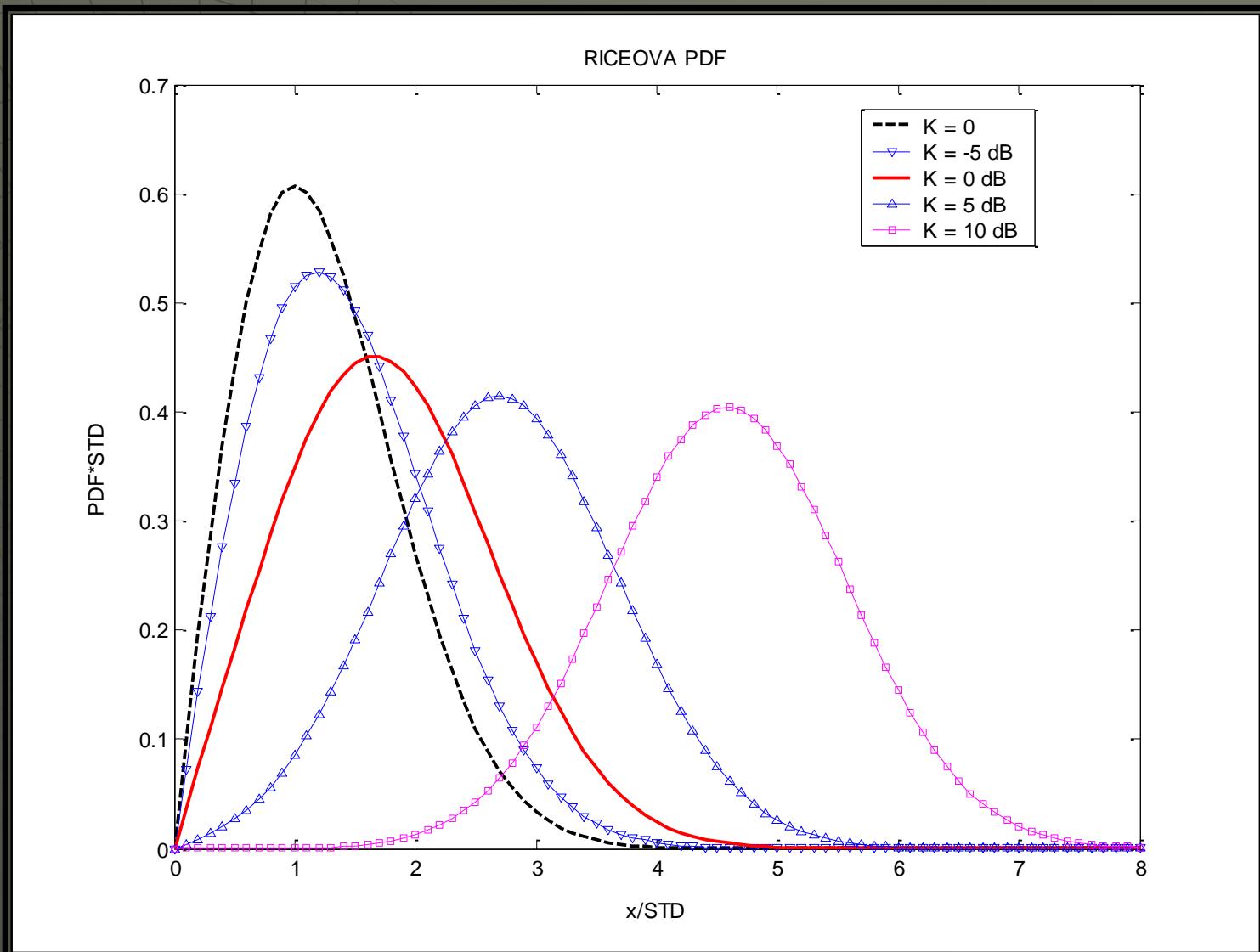
Dodatak 2a. Gaussova normalna i log-normalna PDF

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\right]; y = \log x \Rightarrow p[y(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\left[-\left(\frac{\log x - \mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\right], x > 0$$



Dodatak 2b. Riceova i Rayleighova PDF

$$p(x; K) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left[-\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\right] \exp(-K) I_0\left(\frac{a}{\sigma} \sqrt{2K}\right) \Rightarrow p(x; K=0) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left[-\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\right], \quad x > 0$$



Dodatak 3. Centralni granični teorem

- ◆ Promotrimo sumu:

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_n,$$

gdje su x_1, x_2, \dots, x_n nezavisne slučajne varijable koje imaju istu distribuciju, ne nužno normalnu, s prosjekom μ i varijancom σ^2 .

Za veliki n distribucija slučajne varijable x teži normalnoj razdiobi, s prosjekom $n\mu$ varijancom $n\sigma^2$.

Korijen sume kvadrata dviju slučajnih varijabli

- x i y nezavisne slučajne varijable normalne distribucije s jednakim varijancama i prosjekom nula:

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right)$$

- prijelaz na polarne koordinate:

$$f_{R\theta}(x, y) = |J| f_{XY}(x, y)$$

$$|J| = |J(r, \theta)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

- Jakobijan

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned} \Rightarrow |J| = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \quad \& \quad r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow f_{R\theta}(r, \theta) = \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\left(\frac{r}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\right]$$

$$f_R(r) = \int_0^{2\pi} f_{R\theta}(r, \theta) d\theta \Rightarrow f_R(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left[-\left(\frac{r}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\right]$$

- Rayleighova PDF