C. Osnove Fourierove analize

Harmonijski ovisna polja mogu se proučavati primjenom Fourierove analize. Štoviše, primjenom Fourierove transformacije proizvoljna vremenska funkcija može se prikazati odgovarajućim spektrom u frekvencijskom području.

Pri analizi vremenski promjenjivih polja (kvazistacionarna polja, valovi, itd.) za koje se može pretpostaviti harmonijska ovisnost rabi se reprezentacija putem prostorno-vremenski ovisnoga kompleksnog fazora oblika

$$\vec{A}(x,y,z,t)=\vec{A}(x,y,z)\,\mathrm{e}^{j\omega t}, \tag{C.1.}$$

gdje je $\vec{A}(x,y,z)$ kompleksni fazor:

$$\vec{A}(x,y,z)=\mathrm{Re}\left\{\vec{A}(x,y,z)\right\}+\mathrm{j\,Im}\left\{\vec{A}(x,y,z)\right\}=\vec{a}(x,y,z)\mathrm{e}^{j\varphi}. \tag{C.2.}$$

Općenito, harmonijski ovisan kompleksni vektor sljedećeg je oblika:

$$\vec{A}(x,y,z,t)=\vec{a}(x,y,z)\;\mathrm{e}^{j(\omega t+\varphi)}. \tag{C.3.}$$

Prednost je takvog zapisa činjenica da su divergencija i rotor operatori koji sadržavaju isključivo prostorne derivacije, odnosno djeluju samo na prostorne koordinate polja, a vremenska derivacija djeluje na izdvojenu vremensku ovisnost e^{jwt} tj. vrijedi:

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\left(\mathrm{e}^{j\omega t}\right)=j\omega\mathrm{e}^{j\omega t} \tag{C.4.}$$

i

$$\int \mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}t=\frac{1}{j\omega}\mathrm{e}^{j\omega t}. \tag{C.5.}$$

C.1. Općenito o signalima

Signal se općenito može definirati kao medij u kojemu se pohranjuje informacija, odnosno kao fizički proces kojim se ona prenosi.

Osnovna se klasifikacija u teoriji signala svodi na njihovu podjelu na:

- deterministički signale
- slučajne signale.

Deterministički su signali matematički egzaktno definirane, vremenski ovisne funkcije čije se vrijednosti mogu izračunati u svakom trenutku, i u prošlim i u budućim vremenskim trenutcima.

Slučajni su signali vremenske funkcije čije su vrijednosti poznate samo u prošlim trenutcima, a buduće vrijednosti nije moguće izračunati egzaktno. Takvi se signali opisuju statističkim metodama jer slučajni signal uz određenu vjerojatnost uzima neke vrijednosti iz skupa svih mogućih vrijednosti.

Deterministički signali ne prenose informaciju, a njihovom se proučavanjem dolazi do općih spoznaja o obilježjima signala. Matematički je alat u analizi svojstava determinističkih signala harmonijska analiza.

Spektralni se prikaz električnih signala temelji na teoriji Fourierovih redova i na Fourierovoj transformaciji.

Deterministički se signali dijele u dvije skupine:

- periodični signali
- neperiodični signali.

Svaka se periodična funkcija, bez obzira na složenost, uvijek može prikazati razvojem u Fourierov red. Tako se, umjesto vremenski ovisne funkcije, dobiva njezin transformat u frekvencijskom području. Takva je funkcija zatim opisana zbrojem sinusoidalnih titranja čije su amplitude i faze različite, a frekvencija svake od njih predstavlja višekratnik osnovne tako razvijene periodične funkcije.

Analiza neperiodičnih signala provodi se Fourierovom transformacijom tako da se bilo koji signal može opisati kontinuiranom funkcijom u frekvencijskom području.

Prikazivanje signala u vremenskom području predstavlja fizikalnu realnost jer se dobiva uvid u sve što se uz signal dobiva (pojačanje, prigušenje, prisutnost i razina šuma), a spektralna analiza pruža više pogodan matematički pristup koristan s gledišta univerzalnosti ali i efikasnosti proračuna.

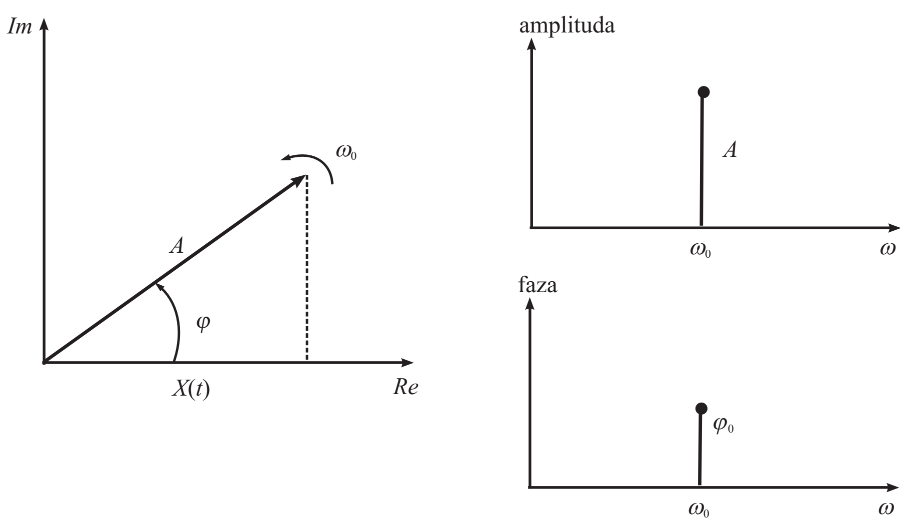
Signal oblika

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \tag{C.6.}$$

može se prikazati u kompleksnom obliku:

$$x(t) = \mathrm{Re}[A\,\mathrm{e}^{j(\omega_0 t + \varphi_0)}]. \tag{C.7.}$$

Grafički se jednadžba (C.7.) u kompleksnoj ravnini može prikazati kao na slici C.1.



Slika C.1. Prikaz kompleksnog fazora u frekvencijskom području

Signal $x(t)$ je projekcija fazora A na realnu os, a fazor je jednoznačno određen amplitudom A, frekvencijom $f_0 = \omega_0/2\pi$ i faznim kutom φ_0 u trenutku $t = 0$.

C.2. Fourierova analiza periodičnih signala

Periodičnim se signalom smatra vremenska funkcija $x(t)$ za koju vrijedi $x(t) = x(t + T_0)$, pri čemu je period T_0 period signala. Teorijski, periodični su signali vremenski neograničeni.

Periodična se funkcija može opisati Fourierovim razvojem, samo ako je zadovoljen Dirichletov uvjet

$$\int_{-T/2}^{T/2} \left|x(t)\,\mathrm{d}t\right| < \infty, \qquad \text{(C.8.)}$$

Odnosno:

$$\int_{-T/2}^{T/2} \left|x(t)\right|^2 \mathrm{d}t < \infty. \qquad \text{(C.9.)}$$

Uvjet (C.9.) implicira da je prosječna snaga signala konačna, odnosno da stvarni signali ne mogu imati neograničeno trajanje, već imaju početak i kraj unutar nekoga konačnog intervala.

Vremensku funkciju $x(t)$ moguće je prikazati Fourierovim redom

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum (a_k \cos n\omega_0 t + b_k \sin \omega_0 t), \qquad \text{(C.10.)}$$

pri čemu su a_k i b_k Fourierovi koeficijenti:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos k\omega_0 t \,\mathrm{d}t \qquad \text{(C.11.)}$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin k\omega_0 t \, dt. \qquad \text{(C.12.)}$$

Veličina $T = 2\pi/\omega_0$ označuje period funkcije $x(t)$ koja se razvija u Fourierov red, a ω_0 njezinu osnovnu frekvenciju pri čemu veličine a_k i b_k označuju Fourierove koeficijente.

Fourierov je red moguće prikazati i u sljedećem obliku:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k). \qquad \text{(C.13.)}$$

Pri tome je:

$$c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \qquad \text{(C.14.)}$$

$$\varphi_k = \arctan(\frac{b_k}{a_k}). \qquad \text{(C.15.)}$$

Iz relacija za Fourierov red slijedi izraz za Fourierovu transformaciju periodičnih signala primjenjujući poznate trigonometrijske relacije:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + jb_k)\mathrm{e}^{-jk\omega_0 t} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - jb_k)\mathrm{e}^{jk\omega_0 t}. \qquad \text{(C.16.)}$$

Ako se uvedu negativne vrijednosti za k

$$a_{-k} = a_k \ ; \ b_{-k} = b_k, \qquad \text{(C.17.)}$$

izraz (C.13.) postaje:

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{jk\omega_0 t}. \qquad (C.18.)$$

Pri tome je

$$x_k=\frac{1}{2}(a_k-jb_k), \quad k=0,\pm1,\pm2,... \qquad (C.19.)$$

pa se kombinacijom (C.11.) i (C.12.) dobiva:

$$x_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt, \quad k=0,\pm1,\pm2,... \qquad (C.20.)$$

Uvede li se nova varijabla, diskretna frekvencija $\omega = k\omega_0$, koja predstavlja cjelobrojne višekratnike osnovne frekvencije, koeficijenti x_k prelaze u veličinu $X(j\omega)$ – Fourierovu transformaciju periodične vremenske funkcije $x(t)$:

$$X(j\omega)=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-j\omega t}dt. \qquad (C.21.)$$

Fourierova transformacija $X(j\omega)$ daje kompleksni spektar vremenske funkcije $x(t)$ u frekvencijskom području:

$$x(j\omega)=\mathrm{Re}\left[x(j\omega)\right]+j\,\mathrm{Im}\left[x(j\omega)\right]. \qquad (C.22.)$$

Apsolutna vrijednost $|X(j\omega)|$ čini amplitudni, a argument $\arg\left[x(j\omega)\right]=\mathrm{atn}\dfrac{\mathrm{Im}\left[x(j\omega)\right]}{\mathrm{Re}\left[x(j\omega)\right]}$ fazni dio kompleksnog spektra vremenske funkcije $x(t)$. Oba su spektra diskretna, odnosno poprimaju vrijednosti različite od nule samo za cjelobrojne višekratnike osnovne frekvencije.

C.3. Fourierova analiza neperiodičnih signala

Analiza neperiodičnih signala zasniva se na Fourierovu integralu. Fourierov se integral jednostavno izvodi na temelju postavke da neperiodična funkcija može biti opisana periodičnom funkcijom čiji period teži ka beskonačnosti.

Ako se razmatra periodična funkcija $x(t)$ perioda $T = 2\pi/\omega_0$ i ako se kombiniraju relacije (C.20.) i (C.18) proizlazi:

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(\xi)e^{-jk\omega_0\xi}d\xi, \qquad (C.23.)$$

odnosno

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 t}\omega_0\int_{-T/2}^{T/2} x(\xi)e^{-jk\omega_0\xi}d\xi. \qquad (C.24.)$$

Ako se pretpostavi da period neograničeno raste, funkcija $x(t)$ u graničnom slučaju ($T - \infty$) postaje neperiodična, osnovna frekvencija ω_0 prelazi u infinitezimalni prirast $d\omega$, a frekvencija n-tog harmonika postaje kontinuirana varijabla ω.

Sumiranje po svim harmonicima prelazi u integraciju po svim frekvencijma (–∞,∞) tako da $x(t)$ u graničnom prijelazu postaje neperiodična funkcija

$$x(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{j\omega t} \mathrm{d}t \int_{-T/2}^{T/2} x(\xi) \mathrm{e}^{-j\omega\xi} \mathrm{d}\xi, \qquad \text{(C.25.)}$$

odnosno:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{j\omega t} \mathrm{d}t \int_{-\infty}^{\infty} x(\xi) \mathrm{e}^{-j\omega\xi} \mathrm{d}\xi. \qquad \text{(C.26.)}$$

Izraz (C.26.) predstavlja Fourierov integral za neperiodičnu funkciju.

Nuždan je uvjet egzistencije integrala apsolutna integrabilnost na intervalu (–∞,∞) pa je moguće formirati transformacijski par u vremenskom i frekvencijskom području:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(j\omega) \mathrm{e}^{j\omega t} \mathrm{d}\omega \qquad \text{(C.27.)}$$

$$x(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \mathrm{e}^{-j\omega t} \mathrm{d}t. \qquad \text{(C.28.)}$$

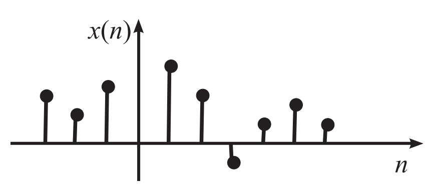
Kontinuirana kompleksna funkcija $X(j\omega)$ naziva se Fourierovom transformacijom neperiodične funkcije $x(t)$ i predstavlja kontinuirani spektar funkcije $x(t)$ te se može pisati u obliku:

$$x(j\omega) = \left| x(j\omega) \right| \mathrm{e}^{j\phi(\omega)}, \qquad \text{(C.29.)}$$

pri čemu se $|X(j\omega)|$ naziva spektralnom gustoćom amplituda, a $\varphi(\omega)$ spektralnom gustoćom faza. Važno je svojstvo neperiodičnih signala da ograničenost u jednoj domeni, bilo vremenskoj ili frekvencijskoj, implicira ograničenost u drugoj. Također, periodičnost u jednoj domeni nužno zahtijeva diskretnost u drugoj domeni.

C.4. Fourierova analiza diskretnih signala

Diskretni se signali matematički najčešće predstavljaju nizom realnih ili kompleksnih brojeva (Sl. C.2.).



Slika C.2. Diskretni signal u vremenskom području

Vrijedi istaknuti kako je $x(n)$, n-ti član niza, definiran isključivo za cjelobrojne vrijednosti indeksa n. Često se kaže da je $x(n)$ n-ti uzorak niza signala.

Proizvoljni se niz brojeva najčešće izražava pomoću konvolucijske sume u obliku niza jediničnih impulsa:

$$x(n) = \sum x(k)\delta(n-k). \qquad \text{(C.30.)}$$

Jedinični impuls u diskretnim sustavima ima jednaku funkciju kao i Diracova funkcija u kontinuiranim sustavima, a definira se relacijom:

$$\delta(n)=\begin{cases}0, n=0\\1, n=1\end{cases}. \tag{C.31.}$$

Vremenski je diskretni signal definiran sljedećom relacijom:

$$x^*(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x\left(n\Delta t\right)\delta\left(t-n\Delta t\right). \tag{C.32.}$$

Fourierova je transformacija takvog signala sljedeća:

$$X^*(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x^*(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t. \tag{C.33.}$$

Supstitucijom navedenih izraza proizlazi:

$$X^*\left(j\omega\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x\left(n\Delta t\right)\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(t-n\Delta t\right)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t, \tag{C.34.}$$

gdje je

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(t-n\Delta t\right)\mathrm{e}^{-j\omega\Delta t}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-j\omega n\Delta t}. \tag{C.35.}$$

Izraz za Fourierovu transformaciju stoga je sljedećeg oblika:

$$X^*\left(j\omega\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x\left(n\Delta t\right)\mathrm{e}^{-j\omega n\Delta t}. \tag{C.36.}$$

Dovoljan uvjet da funkcija $X^*(j\omega)$ egzistira jest uvjet tzv. apsolutne zbrojivosti niza $x(n\Delta t)$:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|x(n\Delta t)\right|<\infty. \tag{C.37.}$$

Uz zadovoljen uvjet (C.37.) $X^*(j\omega)$ je kontinuirana i periodična funkcija te predstavlja kompleksni spektar vremenski diskretnog signala.

C.5. Diskretna Fourierova transformacija

Diskretna Fourierova transformacija (eng. *Discrete Fourier Transform* – DFT) predstavlja aproksimaciju Fourierove transformacije diskretnih signala u svrhu numeričke obradbe signala. Analiza signala s DFT-om zasniva se na konačnom broju uzoraka. Razmatranja o DFT-u polaze od činjenice da je Fourierova transformacija vremenski diskretnih signala kontinuirana periodična funkcija, a za numeričku je obradbu nužna diskretizacija takve periodične funkcije u frekvencijskom području.

Korak diskretizacije u frekvencijskom području odnosi se na frekvencijsku rezoluciju $\Delta\omega$, odnosno Δf. Diskretiziranim vrijednostima Fourierove transformacije odgovara signal $x_p(n)$ umjesto signala $x(n\Delta t)$. Taj je signal dobiven periodičnim produženjem signala $x(n\Delta t)$ zbog diskretizacije frekvencijskog spektra.

Koraku diskretizacije $\Delta\omega$ u frekvencijskom području odgovara periodično prošireni diskretni vremenski signal perioda $T = N\Delta t$, tj. vrijedi:

$$\Delta f = \frac{1}{T} = \frac{1}{N\Delta t}. \tag{C.38.}$$

Izraz za DFT izvodi se primjenom izraza za Fourierovu transformaciju diskretnih signala:

$$X^*\left(j\omega\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(\Delta t)\mathrm{e}^{-j\omega n\Delta t}. \tag{C.39.}$$

Uz N uzorka signala $x(n\Delta t)$ za n = 0, 1, 2,...., N – 1, te računajući samo N uzoraka spektra $X^*(j\omega)$ za $\omega = k\Delta\omega$, za k = 0.1.2,..., N – 1 te ako vrijedi

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{N\Delta t} = \frac{\omega_S}{N} \tag{C.40.}$$

ili

$$\Delta f = \frac{f_s}{N}, \tag{C.41.}$$

gdje je

$$f_s = \frac{1}{\Delta t} : T = \frac{1}{\Delta f}, \tag{C.42.}$$

DFT se definira relacijom:

$$x_{\mathrm{DFT}}(k\Delta\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t)\mathrm{e}^{-jk\Delta\omega n\Delta t} \tag{C.43.}$$

ili u mnogo pogodnijoj notaciji

$$x_{\mathrm{DFT}}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\mathrm{e}^{-j2\pi/_N nk} \tag{C.44.}$$

za k = 1, 2,... , N – 1.

Uvođenjem oznake $W_N = \mathrm{e}^{-j2\pi/_N}$ DFT se često piše u sažetom obliku:

$$x_{\mathrm{DFT}}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk} \tag{C.45.}$$

koji je pogodan za implementaciju na računalu.

C.6. Brza Fourierova transformacija

Pod brzom se Fourierovom transformacijom (eng. *Fast Fourier Transform* – FFT) razumijeva grupa algoritama za veoma brzo izračunavanje diskretne transformacije. Primjena tih algoritama omogućuje veliko skraćivanje vremena izračunavanja. Algoritmi se temelje na razbijanju DFT funkcije $X_{\mathrm{DFT}}(k)$ na sve manje i manje podnizove. Uvjet je potpunog razbijanja na podnizove da se niz od N uzoraka napiše u obliku: $N = 2^m$.

Ulazni se niz podjeli na dvije polovice, a DFT se može pisati na sljedeći način:

$$X_{\mathrm{DFT}}(k) = \sum_{n=0}^{N/_2-1} x(n)W_N^{nk} + \sum_{n=-N/_2}^{N-1} x(n)W_N^{nk}. \tag{C.46.}$$

Relacija (6.46.) može se preurediti na sljedeći način:

$$X_{\mathrm{DFT}}(k)=\sum_{n=0}^{N/2-1}x(n)W_N^{nk}+\sum_{n=-N/2}^{N-1}x(n+\frac{N}{2})W_N^{(N/2)k}W_N^{nk}. \tag{C.47.}$$

S obzirom na to da je

$$W_{Ne}^{(N/2)k}=\mathrm{e}^{-j2\pi Nk/2\pi N}=\mathrm{e}^{-j\pi k}=(-1)^k \tag{C.48.}$$

i kako se sumiranje u obje sume provodi od 0 do $N/2 \ -1$ moguće je grupirati članove:

$$X_{\mathrm{DFT}}(k)=\sum_{n=0}^{(N/2)-1}\left[x_p(n)+(-1)^k x\left(n+\frac{N}{2}\right)\right]W_N^{nk}. \tag{C.49.}$$

Nakon rastavljanja izraza (C.49.) u dva, i to jedan za $k = 2r$ (parne), a drugi $k = 2r + 1$ (neparne), dalje slijedi:

$$X_{\mathrm{DFT}}(2r)=\sum_{n=0}^{(N/2)-1}g(n)W_N^{2rn} \tag{C.50.}$$

$$X_{\mathrm{DFT}}(2r+1)=\sum_{n=0}^{(N/2)-1}h(n)W_N^{2rn}W_N^{n}. \tag{C.51.}$$

Pri tome je:

$$g(n)=x(n)+x\left(n+\frac{N}{2}\right) \tag{C.52.}$$

$$h(n)=x(n)-x\left(n+\frac{N}{2}\right). \tag{C.53.}$$

Izraz W_N^{2rn} može se napisati u obliku

$$W_N^{2rn}=\mathrm{e}^{-j2\pi rn/N}=\mathrm{e}^{-j2\pi rn/(N/2)}=W_{N/2}^{rn} \tag{C.54.}$$

pa dalje slijedi

$$X_{\mathrm{DFT}}(2r)=\sum_{n=0}^{(N/2)-1}g(n)W_{N/2}^{rn}, \tag{C.55.}$$

Odnosno:

$$X_{\mathrm{DFT}}(2r+1)=\sum_{n=0}^{(N/2)-1}h(n)W_{N/2}^{rn}W_N^{n}. \tag{C.56.}$$

Novonastali se izrazi (6.55.) i (6.56.) mogu smatrati kao dva DFT-a s po $N/2$ članova. Dakle, DFT od N članova može se rastaviti na dva DFT-a s po $N/2$, a oni se dalje mogu rastaviti na DFT od $N/4$ članova itd. Prema tome, svaki se DFT od $N = 2^m$ članova dijeljenjima polovice u m koraka potpuno rastavlja do elementarnog množenja i zbrajanja. Kako postoji $m = \log_2 N$ stupnjeva, proizlazi da je potrebno provesti ukupno $N \log_2 N$ zbrajanja i jednako toliko množenja, da bi se izračunao DFT od N članova.

Ako se to usporedi s ukupno N^2 zbrajanja i jednako toliko množenja da bi se izračunala DFT analiza od N članova, jasno je vidljiva golema ušteda računalnog vremena.

C.7. Hibridna Fourierova transformacija

U svrhu eliminiranja nekih nedostataka FFT algoritma moguće je provesti hibridnu Fourierovu transformaciju koja se temelji na kontinuiranoj Fourierovoj transformaciji, pri čemu se funkcija $x(t)$ između poznatih vrijednosti aproksimira Lagrangeovim interpolacijskim polinomom kroz K točaka [3], [4]:

$$x(t)=\sum_{i=1}^{K^e} x_i^e N_i^e(t). \tag{C.57.}$$

Tada se Fourierova transformacija (C.27.) može zapisati u obliku beskonačne sume određenih integrala s konačnim granicama [3], [4]:

$$X(f)=\sum_{e=1}^{\infty}\int_{t_1^e}^{t_2^e} x(t)\cdot \mathrm{e}^{-2j\pi ft}\mathrm{d}t. \tag{C.58.}$$

Sličan se koncept može pronaći u [6] gdje se provodi numerička integracija trapeznim pravilom između neravnomjerno raspoređenih frekvencijskih uzoraka.

Uvrštavanjem izraza (C.57.) u (C.58.) te zamjenom redoslijeda sumiranja i integriranja, slijedi:

$$X(f)=\sum_{e=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{K^e} x_i^e\int_{t_1^e}^{t_2^e} N_i^e(t)\cdot \mathrm{e}^{-2j\pi ft}\mathrm{d}t. \tag{C.59.}$$

Ako se rabi linearna aproksimacija, funkcija $x(t)$ se aproksimira između dvije susjedne točke s dvije linearne funkcije:

$$N_1^e(t)=\frac{t_2-t}{t_2-t_1};\quad N_2^e(t)=\frac{t-t_1}{t_2-t_1} \tag{C.60.}$$

pa je aproksimacija funkcije (C.57.) jednaka

$$x(t)=x_1^e\frac{t_2^e-t}{t_2^e-t_1^e}+x_2^e\frac{t-t_1^e}{t_2^e-t_1^e}. \tag{C.61.}$$

Nadalje, aproksimacija Fourierove transformacije (C.59.) poprima sljedeći oblik:

$$X(f)=\sum_{e=1}^{\infty}\left[x_1^e\int_{t_1^e}^{t_2^e}\frac{t_2^e-t}{t_2^e-t_1^e}\cdot \mathrm{e}^{-2j\pi ft}\mathrm{d}t+x_2^e\int_{t_1^e}^{t_2^e}\frac{t-t_1^e}{t_2^e-t_1^e}\cdot e^{-2j\pi ft}\mathrm{d}t\right]. \tag{C.62.}$$

Integrali u izrazu (C.62.) rješivi su analitički pa slijedi:

$$X(f)=\sum_{e=1}^{\infty}\left\{\begin{aligned}&x_1^e\frac{1}{t_2^e-t_1^e}\left[\left(j\frac{t_2^e}{\omega}-\frac{1+j\omega t_2^e}{\omega^2}\right)\mathrm{e}^{-j\omega t_2^e}+\left(-j\frac{t_2^e}{\omega}+\frac{1+j\omega t_1^e}{\omega^2}\right)\mathrm{e}^{-j\omega t_1^e}\right]+\\&x_2^e\frac{1}{t_2^e-t_1^e}\left[\left(-j\frac{t_1^e}{\omega}+\frac{1+j\omega t_2^e}{\omega^2}\right)\mathrm{e}^{-j\omega t_2^e}+\left(j\frac{t_1^e}{\omega}-\frac{1+j\omega t_1^e}{\omega^2}\right)\mathrm{e}^{-j\omega t_1^e}\right]\end{aligned}\right\}, \tag{C.63.}$$

gdje je $\omega=2\pi f$ kružna frekvencija.

Može se rabiti i kvadratna aproksimacija putem triju susjednih uzoraka, uz primjenu triju kvadratnih funkcija koje opisuju signal između uzoraka:

$$N_1^e(t)=\frac{(t-t_2)(t-t_3)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)}$$
$$N_2^e(t)=\frac{(t-t_1)(t-t_3)}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)} \qquad (C.64.)$$
$$N_3^e(t)=\frac{(t-t_1)(t-t_2)}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}.$$

Tada je aproksimacija funkcije (C.67.) jednaka

$$x(t)=x_1^e\frac{(t-t_2^e)(t-t_3^e)}{(t_1^e-t_2^e)(t_1^e-t_3^e)}+x_2^e\frac{(t-t_1^e)(t-t_3^e)}{(t_2^e-t_1^e)(t_2^e-t_3^e)}+x_3^e\frac{(t-t_1^e)(t-t_2^e)}{(t_3^e-t_1^e)(t_3^e-t_2^e)} \qquad (C.65.)$$

pa aproksimacija Fourierove transformacije (C.59.) poprima sljedeći oblik:

$$X(f)=\sum_{e=1}^{\infty}\left[\begin{array}{l} x_1^e\int_{t_1^e}^{t_3^e}\frac{(t-t_2^e)(t-t_3^e)}{(t_1^e-t_2^e)(t_1^e-t_3^e)}\cdot \mathrm{e}^{-2j\pi ft}\mathrm{d}t+x_2^e\int_{t_1^e}^{t_3^e}\frac{(t-t_1^e)(t-t_3^e)}{(t_2^e-t_1^e)(t_2^e-t_3^e)}\cdot \mathrm{e}^{-2j\pi ft}\mathrm{d}t+ \\ +x_3^e\int_{t_1^e}^{t_3^e}\frac{(t-t_1^e)(t-t_2^e)}{(t_3^e-t_1^e)(t_3^e-t_2^e)}\cdot \mathrm{e}^{-2j\pi ft}\mathrm{d}t \end{array}\right]. \qquad (C.66.)$$

Kao i u slučaju linearne aproksimacije, integrali u izrazu (C.66.) rješivi su analitički pa je analitička kvadratna aproksimacija Fourierove transformacije dana sljedećom relacijom:

$$X(f)=\sum_{e=1}^{\infty}\left[\begin{array}{l} \frac{j\,x_1^e}{\omega^3(t_1-t_2)(t_1-t_3)}\mathrm{e}^{-j\omega t}\left[t_2\omega(t_3\omega-\omega t+j)+t_3\omega(-\omega t+j)+\omega^2t^2-2j\omega t-2\right]\Big|_{t_1^e}^{t_3^e}+ \\ \frac{j\,x_2^e}{\omega^3(t_2-t_1)(t_2-t_3)}\mathrm{e}^{-j\omega t}\left[t_1\omega(t_3\omega-\omega t+j)+t_3\omega(-\omega t+j)+\omega^2t^2-2j\omega t-2\right]\Big|_{t_1^e}^{t_3^e} \\ \frac{j\,x_3^e}{\omega^3(t_3-t_1)(t_3-t_2)}\mathrm{e}^{-j\omega t}\left[t_1\omega(t_2\omega-\omega t+j)+t_2\omega(-\omega t+j)+\omega^2t^2-2j\omega t-2\right]\Big|_{t_1^e}^{t_3^e} \end{array}\right]. \qquad (C.67.)$$

U slučaju uporabe kvadratne aproksimacije, broj uzoraka mora biti neparan. Prema jednakom se konceptu mogu izvesti linearna i kvadratna aproksimacija inverzne Fourierove transformacije.

Tako se za linearnu aproksimaciju dobiva:

$$x(t)=\sum_{e=1}^{\infty}\left\{\begin{array}{l} X_1^e\frac{1}{f_2^e-f_1^e}\left[\left(-j\frac{f_2^e}{2\pi t}-\frac{1-j2\pi tf_2^e}{4\pi^2t^2}\right)\mathrm{e}^{j2\pi tf_2^e}+\left(i\frac{f_2^e}{2\pi t}+\frac{1-i2\pi tf_1^e}{4\pi^2t^2}\right)\mathrm{e}^{j2\pi tf_1^e}\right]+ \\ X_2^e\frac{1}{f_2^e-f_1^e}\left[\left(j\frac{f_1^e}{2\pi t}+\frac{1-j2\pi tf_2^e}{4\pi^2t^2}\right)\mathrm{e}^{j2\pi tf_2^e}+\left(-i\frac{f_1^e}{2\pi t}-\frac{1-i2\pi tf_1^e}{4\pi^2t^2}\right)\mathrm{e}^{j2\pi tf_1^e}\right] \end{array}\right\}, \qquad (C.68.)$$

odnosno, za kvadratnu aproksimaciju

$$x(t)=\sum_{e=1}^{\infty}\left[\begin{array}{l}\dfrac{X_1^e}{4\pi^3t^3\left(f_1-f_2\right)\left(f_1-f_3\right)}\mathrm{e}^{j2\pi tf}\left[f_2\pi t\left(-2f_3\pi t+2j\pi tf-1\right)+\pi f_3t\left(2j\pi tf-1\right)-2j\pi^2t^2f^2+2\pi tf+j\right]\Big|_{f_1^e}^{f_3^e}+\\ \dfrac{X_2^e}{4\pi^3t^3\left(f_2-f_1\right)\left(f_2-f_3\right)}\mathrm{e}^{j2\pi tf}\left[f_1\pi t\left(-2f_3\pi t+2j\pi tf-1\right)+\pi f_3t\left(2j\pi tf-1\right)-2j\pi^2t^2f^2+2\pi tf+j\right]\Big|_{f_1^e}^{f_3^e}+\\ \dfrac{X_3^e}{4\pi^3t^3\left(f_3-f_1\right)\left(f_3-f_2\right)}\mathrm{e}^{j2\pi tf}\left[f_1\pi t\left(-2f_2\pi t+2j\pi tf-1\right)+\pi f_2t\left(2j\pi tf-1\right)-2j\pi^2t^2f^2+2\pi tf+j\right]\Big|_{f_1^e}^{f_3^e}\end{array}\right]. \quad \text{(C.69.)}$$

D. Interpolacija i numerička integracija

U osnovi je rješavanja inženjerskih problema numeričkim metodama pojam interpolacije funkcije. Također, većina se integrala koje je nužno riješiti pri modeliranju stvarnih problema može riješiti isključivo numerički.

D.1. Interpolacija funkcije

Pod interpolacijom funkcije $x \to f(x)$ razumijeva se izračunavanje vrijednosti funkcije na osnovi danih $(n+1)$ točaka (x_k, f_k). Za funkciju $x \to g(x)$ koja interpolira funkciju f obično se bira polinom:

$$g(x)=P_n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n. \quad \text{(D.1.)}$$

Koeficijenti od a_0 do a_n slijede iz uvjeta:

$$P_n(x_k)=f_k,\quad k=0,1,2,\ldots,n. \quad \text{(D.2.)}$$

Krivulja interpolacijskog polinoma prolazi zadanim točkama interpolirane funkcije (čvorovi interpolacijskog polinoma). Iz uvjeta (D.2.) dolazi se do sustava od $n+1$ jednadžbi s $n+1$ nepoznanica

$$\begin{array}{l} a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\cdots+a_nx_0^n=f_0\\ a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\cdots+a_nx_1^n=f_1\\ \vdots \quad\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots\\ a_0+a_1x_n+a_2x_n^2+\cdots+a_nx_n^n=f_n, \end{array} \quad \text{(D.3.)}$$

što zapisano u matričnom obliku daje:

$$\begin{bmatrix}1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n\\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_0\\ f_1\\ f_2\\ \vdots\\ f_n\end{bmatrix}. \quad \text{(D.4.)}$$