

FESB-Split

Mikrovalna elektronika 1.

I. Zanchi

Z. Blažević

Uvod

Govoreći o mikrovalovima razmatrat ćemo pojave u jednom izdvojenom dijelu elektromagnetskog spektra koji graniči s jedne strane s UHF područjem radio spektra, a s druge s infracrvenim dijelom spektra. Grubo rečeno to bi bilo frekvencijsko područje između 1 GHz i 100 GHz. Razlozi zbog kojih je izdvojeno upravo ovo područje sadržani su u specifičnoj tehnici koja ga karakterizira, a koja je uvedena zbog činjenice da su valne duljine u mikrovalnom području usporedive, odnosno istog reda veličine kao i fizičke dimenzije elemenata krugova. Ilustrirat ćemo posebnost primijenjene tehnike na jednom primjeru.

Jednostavni titrajni krug čija je rezonantna frekvencija primjerice 10 MHz sastoji se od zavojnice duljine l od N zavoja površine S , odnosno koeficijenta samoindukcije L :

$$L \sim N^2 \frac{S}{l},$$

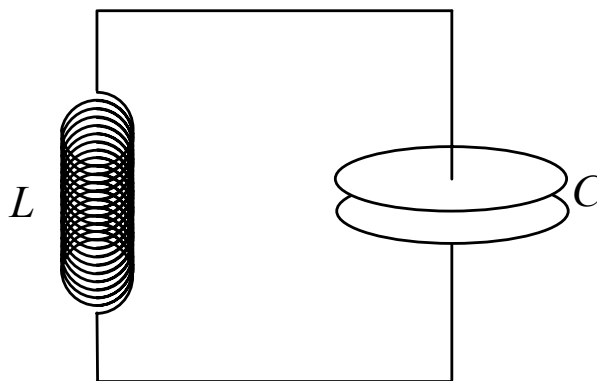
i kondenzatora površine ploča S i razmaka među pločama d kapaciteta C :

$$C \sim \frac{S}{d},$$

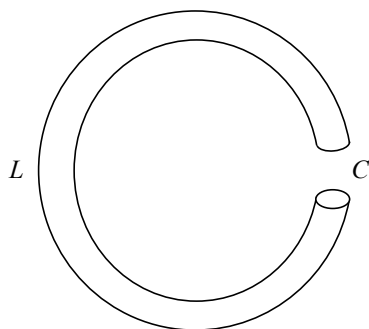
prikazan je na sl. 1a. Ako bi sve linearne dimenzije tog kruga smanjili za faktor 1000, za isti faktor porasla bi i rezonantna frekvencija:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}},$$

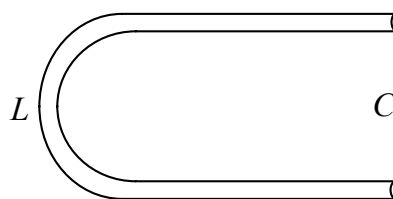
za isti faktor, odnosno iznosila bi 10 GHz. Međutim, pod pretpostavkom da sl. 1a prikazuje stvarne dimenzije titrajnog kruga, njihovo smanjenje za toliki faktor bilo bi nerealno. Ne samo što bi takav krug bilo veoma teško izvesti, nego bi i energija sadržana u polju kondenzatora bila manja zbog smanjenog probojnog napona uslijed smanjene površine ploča kondenzatora i smanjenog razmaka među pločama a faktor dobrote Q bio bi umanjen uslijed povećanja otpora kao posljedice smanjenja presjeka žice vodiča.



Slika 1a. Titrajni krug s koncentriranim elementima



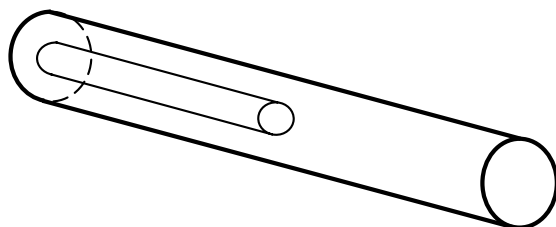
Slika 1b. Smanjenje broja zavoja i površine ploča



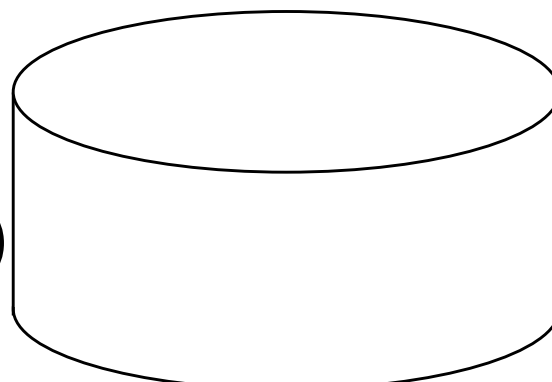
Slika 1c. Smanjenje površine zavoja i razmaka među elektrodama

Za realizaciju titrajnog kruga mikrovalne rezonantne frekvencije od 10 GHz pristupit ćemo preoblikovanju kruga tako da umanjimo koeficijent samoindukcije smanjenjem broja zavoja N i kapacitet C smanjenjem površina S ploča i povećanjem razmaka d među elektrodama, dok krug ne poprimi izgled kao na sl. 1b. Nadalje, smanjenjem površine S zavoja također umanjujemo koeficijent samoindukcije, pa dobivamo oblik kao na sl. 1c. Ova transformacija oblika zavojnice i kondenzatora učinjena je s ciljem postizanja rezonantne frekvencije 10 GHz, a da pri tome fizičke dimenzije sklopa ostanu realne, odnosno istog reda veličine kao što je i valna duljina.

Međutim, pri titranju elektromagnetske energije u sklopu određeni dio energije se isijava u okolni prostor u obliku elektromagnetskih valova. Da bi spriječili elektromagnetsko zračenje nadalje modificiramo dobiveni krug na sl. 1c tako da ga oklopimo vodljivim stjenkama, pa ga možemo preinačiti kao na sl. 1d, dakle do dvaju koaksijalnih valjaka, pretvarajući jedan dio vodiča u oklop. Sada je gotovo čitavo elektromagnetsko polje sadržano između valjaka i zračenje je značajno smanjeno jer je svedeno na otvor. Konačno, da bi potpuno otklonili gubitke uslijed zračenja dolazimo do strukture cilindričnog rezonatora na sl. 1e. Evidentno je da u slučaju frekvencija iz mikrovalnog spektra više ne možemo govoriti o koncentriranim elementima induktivitetu L i kapacitetu C kao kod kruga na sl. 1a koji oscilira na 10 MHz. Umjesto toga tretiramo krugove s distribuiranim elementima. Međutim, ovakvi krugovi opisani su parcijalnim diferencijalnim jednačbama. Ipak, zbog poteškoća matematičke prirode nastojimo, kad god je to moguće prikazati krugove koncentriranim elementima. Nadalje, konstatirajmo da su pojmovi napon i struja postali nejednoznačni zbog usporedivosti dimenzija kruga s duljinom vala.



Slika 1d. Koaksijalna linija



Slika 1e. Cilindrični rezonator

Stoga je jedino na što se sa sigurnošću možemo osloniti u rješavanju takvih krugova rješavanje Maxwellovih jednadžbi. Međutim, vrlo je teško tražiti rješenja Maxwellovih jednadžbi u iole složenijoj strukturi. Čak i u slučaju kad ih je matematički moguće naći teško ih je interpretirati. Stoga je ono što želimo realizirati pokušaj da pojedini dio mikrovalnog sklopa analiziramo kao odvojenu jedinicu i istražimo njen utjecaj na propagaciju elektromagnetskog vala u sklopu, pa tek onda tretirati složenu mikrovalnu strukturu kao skup tako odvojenih elemenata poznatih karakteristika. Ovo bi bilo analogno tretmanu električnih krugova s koncentriranim elementima.

Na kraju ovog uvodnog izlaganja iznesimo nekoliko podataka o razvoju i ulozi mikrovalne tehnike. Iako je predmetom razmatranja gotovo od samih početaka razvoja radijske tehnike krajem XIX. stoljeća, svoj prvi pravi procvat teorija i tehnika doživjela je u tijeku i nakon II. svjetskog rata. Taj napredak povezan je s razvojem u prvom redu radara, ali i vrlo usmjerenih veza. Daljnji intenzivni razvoj zasnovan je na razvoju poluvodičkih mikrovalnih aktivnih elemenata velike snage, koji imaju zadovoljavajući stupanj iskorištenja i koji su postali pouzdani, relativno jeftini i lako dostupni. To je otvorilo mogućnost za čitav niz primjena mikrovalova. Osim efikasnih radio veza za svrhe komunikacija ili čak bežičnog prijenosa energije, spomenimo primjenu u prehrambenoj industriji, za brzo zagrijavanje materijala itd.

Mikrovalna elektronika razmatra pasivne i aktivne elemente mikrovalnih krugova. Veliki dio mikrovalne elektronike temelji se na klasičnoj elektrodinamici i fizici čvrstog stanja, što smatramo da je u velikoj mjeri već poznato, pa ćemo ta znanja samo dopunjavati i primjenjivati.

1. Prijenosna linija

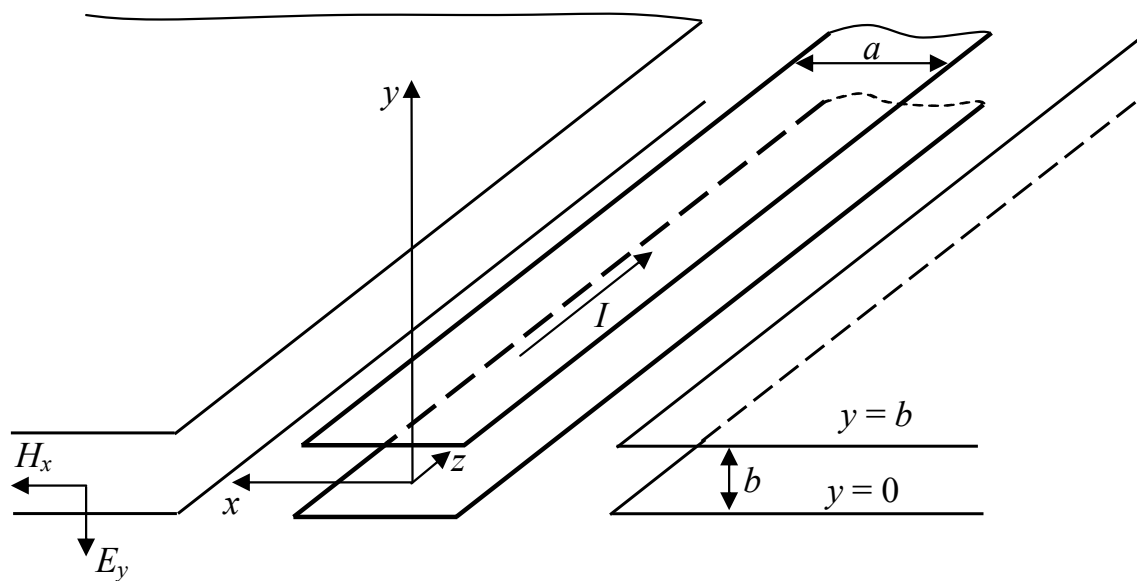
Promotrimo trakastu liniju na sl. 1. Uzbuđujemo je ravnim valom koji se propagira duž osi z . Vrijedi:

$$E_x = E_z = 0, E_y \neq 0$$

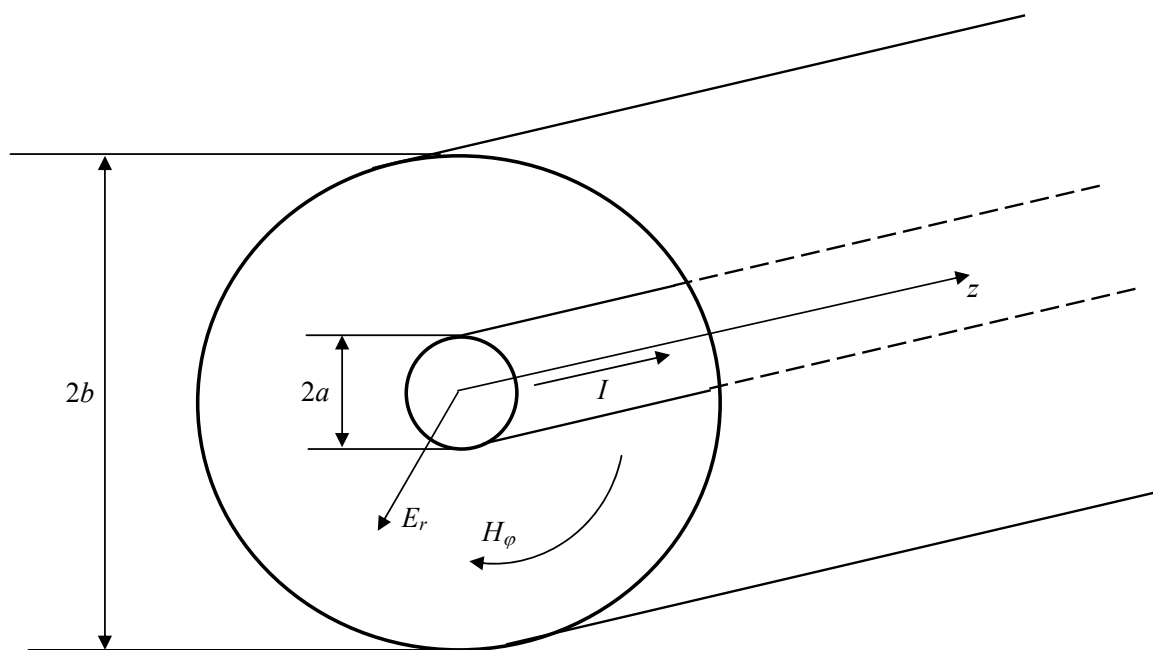
$$H_y = H_z = 0, H_x \neq 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\bullet) = \frac{\partial}{\partial y}(\bullet) = 0,$$

pri čemu se derivacije (\bullet) odnose kako na E tako i H komponente polja.



Slika 1. Trakasta linija



Slika 2. Koaksijalna linija

Za usporedbu promotrimo i slučaj koaksijalne linije na sl. 2 kroz čije vodljive dijelove protječe struja I . U idealnom dielektriku koaksijalne linije bez gubitaka elektromagnetsko polje se može opisati kao:

$$\begin{aligned} E_z = E_\varphi = 0, \quad E_r \neq 0, \\ H_z = H_r = 0, \quad H_\varphi \neq 0, \\ \frac{\partial}{\partial \varphi}(\bullet) = 0. \end{aligned}$$

Zbog aksijalne simetrije komponenta električnog polja E_r je svugdje ista u jednom presjeku na određenom iznosu radijusa r , kao i magnetskog polja H_φ , pa je njihova derivacija po azimutu φ jednaka nuli.

U svakoj točki prostora između vodiča, uz pretpostavku linearnog, homogenog i izotropnog medija bez gubitaka u kojem se propagira promatrani elektromagnetski val vrijede Maxwellove jednadžbe u obliku:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (\text{a})$$

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{b})$$

Konkretno za našu trakastu liniju uzbuđenu ravnim valom:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{e}_y E_y \\ \vec{H} &= \vec{e}_x H_x \end{aligned}$$

te iz (a) imamo za kartezijev koordinatni sustav:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\mu \vec{e}_x \frac{\partial H_x}{\partial t}, \\ &\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) = \mu \frac{\partial H_x}{\partial t}, \end{aligned}$$

odnosno zbog $E_z = 0$ imamo konačno:

$$\boxed{\frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu \frac{\partial H_x}{\partial t}}. \quad (*)$$

Slično iz (b) dobivamo:

$$-\left(\frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z} \right) = \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t},$$

a zbog $H_z = 0$ imamo i drugu jednadžbu:

$$\boxed{\frac{\partial H_x}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}}. \quad (**)$$

Međutim, možemo lako prijeći na drugi način, jer je polje:

$$H_x = \frac{I}{a},$$

$$\int_0^b \vec{E} d\vec{y} = -U \Rightarrow E_y b = -U \Rightarrow E_y = -\frac{U}{b}.$$

Uvrštavajući u (*) i (**) dobivamo:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial z} &= -\frac{\mu b}{a} \frac{\partial I}{\partial t} \\ \frac{\partial I}{\partial z} &= -\frac{\varepsilon a}{b} \frac{\partial U}{\partial t} \end{aligned} \right\}.$$

Uz:

$L = \mu \frac{b}{a}$ induktivitet po jedinici duljine (podužni induktivitet),

$C = \varepsilon \frac{a}{b}$ kapacitet po jedinici duljine (podužni kapacitet),

imamo:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial z} &= -L \frac{\partial I}{\partial t} \\ \frac{\partial I}{\partial z} &= -C \frac{\partial U}{\partial t} \end{aligned} \right\}.$$

Kako se uzbudni ravni val propagira duž osi z , polja E_y , H_x te napon U i struja I funkcije su koordinate z i vremena t (pa stoga u jednadžbama imamo parcijalne derivacije).

Za koaksijalnu liniju računamo u cilindričnom koordinatnom sustavu:

$$\text{rot } \vec{E} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r} \vec{e}_r & \vec{e}_\varphi & \frac{1}{r} \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_r & rE_\varphi & E_z \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\varphi + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (rE_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_z.$$

Kako postoje samo radijalna komponenta električnog polja i azimutalna komponenta magnetskog polja koje su međusobno okomite i nalaze se u transverzalnoj ravnini koja je okomita na smjer propagacije elektromagnetskog vala (os z), odnosno nema longitudinalnih komponenti polja (u smjeru osi z), govorimo transverzalnom

elektromagnetskom (TEM) modu propagacije vala. Za taj slučaj uvrštavajući u (a) i (b) imamo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_r}{\partial z} \vec{e}_\varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \vec{e}_z &= -\mu \frac{\partial H_\varphi}{\partial t} \vec{e}_\varphi, \\ -\frac{\partial H_\varphi}{\partial z} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial (r H_\varphi)}{\partial r} \vec{e}_z &= \varepsilon \frac{\partial E_r}{\partial t} \vec{e}_r,\end{aligned}$$

iz čega proizlazi:

$$\boxed{\frac{\partial E_r}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_\varphi}{\partial t}} \quad (*)$$

$$\boxed{-\frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial E_r}{\partial t}} \quad (**)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r H_\varphi)}{\partial r} = 0. \quad (***)$$

Prve dvije jednačbe (*) i (**) povezuju vremenske i prostorne promjene polja, dok posljednja (***) kaže da nema promjene električnog polja po azimutu, dok magnetsko polje opada linearno s radijusom. Koristeći Ampereov zakon imamo magnetsko polje:

$$H_\varphi = \frac{I}{2\pi r}.$$

Integriramo li prvi izraz (*) od a do b i uvažavajući da su r i φ ortogonalne varijable:

$$\int_a^b \frac{\partial E_r}{\partial z} dr = -\mu \int_a^b \frac{\partial H_\varphi}{\partial t} dr \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} \int_a^b E_r dr = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \int_a^b H_\varphi dr = \frac{\mu}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_a^b I \frac{dr}{r}.$$

Isti postupak ponavljamo i za (**), te naposljetku dobivamo sljedeće relacije:

$$\left. \begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial z} &= -\frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \cdot \frac{\partial I}{\partial t} \\ \frac{\partial I}{\partial z} &= -\frac{2\pi\varepsilon}{\ln \frac{b}{a}} \cdot \frac{\partial U}{\partial t}\end{aligned} \right\}.$$

Uvedemo li induktivitet i kapacitet po jedinici duljine koaksijalne linije kao:

$$\begin{aligned}L &= \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a}, \\ C &= \frac{2\pi\varepsilon}{\ln \frac{b}{a}},\end{aligned}$$

dobivamo:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial z} &= -L \frac{\partial I}{\partial t} \\ \frac{\partial I}{\partial z} &= -C \frac{\partial U}{\partial t} \end{aligned} \right\}.$$

Dakle, za obje prijenosne linije izveli smo prvi par jednažbi elektromagnetskog polja:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial z} - \mu \frac{\partial H_x}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ I. (trakasta linija), odnosno } \left. \begin{aligned} \frac{\partial E_r}{\partial z} + \mu \frac{\partial H_\phi}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial H_\phi}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial E_r}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ I. (koaksijalna linija),}$$

na drugi par jednažbi napona i struje:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial z} + L \frac{\partial I}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial I}{\partial z} + C \frac{\partial U}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ II. .}$$

Ove jednažbe možemo preformulirati tako da opisuju samo jednu veličinu, napon ili struju:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial z} &= -L \frac{\partial I}{\partial t} \\ \frac{\partial I}{\partial z} &= -C \frac{\partial U}{\partial t} \end{aligned} \right\} \text{ par jednažbi I. reda } \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} &= -L \frac{\partial^2 I}{\partial z \partial t} \\ \frac{\partial^2 I}{\partial z \partial t} &= -C \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \text{ par jednažbi II. reda,}$$

odnosno:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = LC \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}.$$

Slično možemo ponoviti i za struju, pa na konačno imamo sljedeći par jednažbi:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - LC \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} - LC \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Ekvivalentno možemo govoriti i o jednažbama koje tretiraju električno i magnetsko polje, konkretno za trakastu liniju:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Vidimo da bez obzira imamo relaciju u obliku:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{III.})$$

koju nazivamo **telegrafska jednadžba** ako tretiramo napon i struju, a **valna jednadžba** ako tretiramo komponente elektromagnetskog polja. Pri tome je $p = p(z, t)$, a:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

brzina propagacije vala na promatranoj liniji. Opće rješenje jednadžbe (III.) je:

$$p(z, t) = f\left(t - \frac{z}{v}\right) + g\left(t + \frac{z}{v}\right),$$

pri čemu je:

$f\left(t - \frac{z}{v}\right)$ - val proizvoljnog oblika koji se propagira u smjeru rastućeg z (upadni val),

$g\left(t + \frac{z}{v}\right)$ - val proizvoljnog oblika koji se propagira u smjeru padajućeg z (reflektirani).

Oba vala putuju linijom konstantnom brzinom v . Da bismo to pokazali uočimo neku vrijednost funkcije f :

$$f\left(t - \frac{z}{v}\right) = f_1.$$

Ona će imati dakle vrijednost $f = f_1$ kad god je ispunjeno da je:

$$t - \frac{z}{v} = t'.$$

To znači da ukoliko poraste vrijeme istodobno mora porasti i z da bi t' ostao nepromijenjen (odnosno fazna brzina konstantna). Dakle, evidentno je da se vrijednost f_1 pomiče nepromijenjenom brzinom v u smjeru rastućeg z . Slično možemo pokazati za g da se kreće nepromijenjenom brzinom u smjeru padajućeg z .

Pretpostavimo da je p iz (III.) napon prijenosne linije:

$$U(z, t) = f\left(t - \frac{z}{v}\right) + g\left(t + \frac{z}{v}\right),$$

tada je struja zbog $\frac{\partial U}{\partial z} = -L \frac{\partial I}{\partial t}$:

$$I(z, t) = \sqrt{\frac{C}{L}} \left[f\left(t - \frac{z}{v}\right) - g\left(t + \frac{z}{v}\right) \right],$$

pri čemu je veličina:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

karakteristična impedancija prijenosne linije, definirana kao omjer napona i struje na liniji bez gubitaka beskonačne duljine (slučaj kada postoji samo upadni val napona i struje). Tako je za:

- trakastu liniju: $Z_0 = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \doteq 60 \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} \cdot \frac{b}{a},$
- koaksijalnu liniju: $Z_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \ln \frac{b}{a} \doteq 60 \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} \cdot \ln \frac{b}{a}.$

Snaga upadnog vala je:

$$P = U_{up} \cdot I_{up}^* = \left\{ \begin{array}{l} \frac{U_{up}^2}{Z_0} = U_{up}^2 \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{U_{up}^2 C}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{LC}} = 2vW_{el} \\ I_{up}^2 Z_0 = I_{up}^2 \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{I_{up}^2 L}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{LC}} = 2vW_{mag} \end{array} \right\} = v(W_{el} + W_{mag}),$$

gdje su W_{el} i W_{mag} električna i magnetska energija po jedinici duljine linije ($W_{el} = W_{mag}$).
Pretpostavimo harmonijsku uzbuđu. Tada je:

$$p(t) \propto e^{j\omega t}, \text{ a } \frac{\partial p}{\partial t} = j\omega p \text{ i } \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\omega^2 p,$$

pa se valna jednadžba (III.) postaje **Helmholtzova** jednadžba:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{v^2} p = 0.$$

Karakteristična jednadžba uz pretpostavljeno rješenje u obliku $p(z) = Ce^{uz}$ je:

$$u^2 + \frac{\omega^2}{v^2} = 0 \Rightarrow u = \pm j \frac{\omega}{v},$$

pa je rješenje ove diferencijalne jednadžbe:

$$\begin{aligned} p(z, t) &= Ae^{j\omega t} e^{-j\frac{\omega}{v}z} + Be^{j\omega t} e^{j\frac{\omega}{v}z}, \\ p(z, t) &= Ae^{j\omega\left(t - \frac{z}{v}\right)} + Be^{j\omega\left(t + \frac{z}{v}\right)}, \\ p(z, t) &= \left(Ae^{-j\frac{\omega}{v}z} + Be^{j\frac{\omega}{v}z} \right) e^{j\omega t}. \end{aligned}$$

Pri tome je: $\beta = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$ **fazna konstanta**, te za liniju bez gubitaka možemo pisati:

$$p(z,t) = (Ae^{-j\beta z} + Be^{j\beta z})e^{j\omega t}.$$

Konstante A i B određujemo iz početnih uvjeta koji vladaju na liniji, a kako vremensku ovisnost podrazumijevamo kao harmonijsku, često ju izostavljamo iz relacija.

Valna jednadžba

Promotrimo prijenosnu liniju bez gubitaka na sl. 3. Ekvivalentna shema odsječka takve linije prikazana je na sl. 4. Pri tome je totalni diferencijal napona i struje:

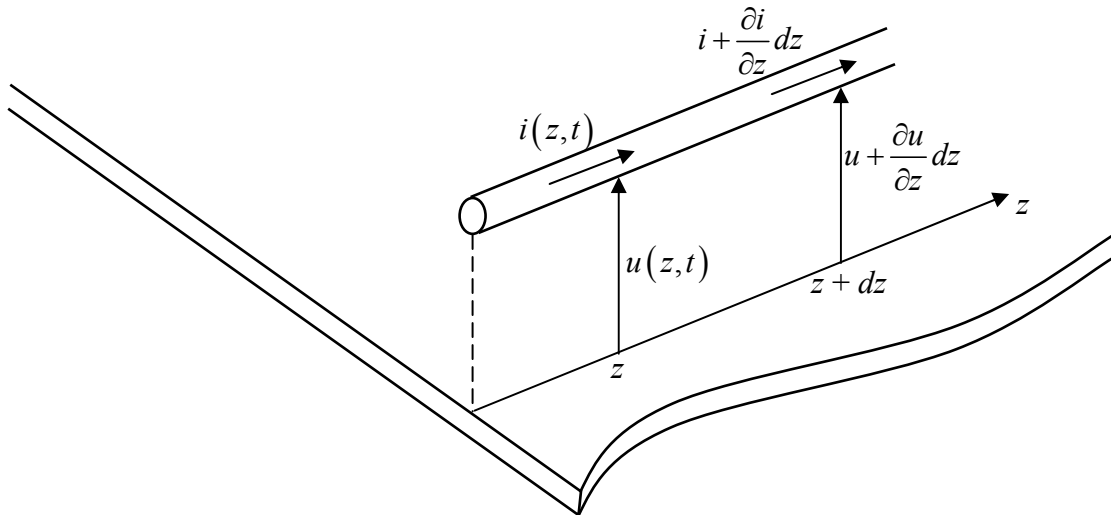
$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx \text{ i } di = \frac{\partial i}{\partial x} dx.$$

Primjenom Kirchoofovih zakona imamo sljedeće jednadžbe strujnih krugova:

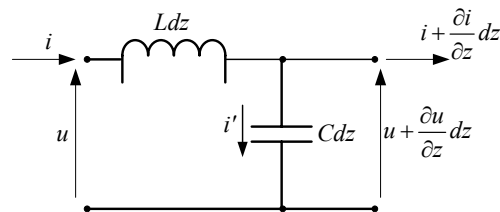
$$(Ldz) \frac{\partial i}{\partial t} + \left(u + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right) = u \Rightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial z} = -L \frac{\partial i}{\partial t}} \quad (\text{I})$$

$$\left(i + \frac{\partial i}{\partial z} dz \right) + i' = i \quad \left. \begin{array}{l} i' = (Cdz) \frac{\partial u}{\partial t} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial i}{\partial z} = -C \frac{\partial u}{\partial t}} \quad (\text{II})$$

Iz (I) i (II), naizmjeničnim deriviranjem obje strane jednakosti po vremenu odnosno po duljini imamo:



Slika 3. Prijenosna linija: vodič iznad idealno vodljive ravnine



Slika 4. Ekvivalentna shema elementarnog dijela prijenosne linije

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 i}{\partial z^2} + C \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 i}{\partial z \partial t} + C \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t} + L \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + L \frac{\partial^2 i}{\partial z \partial t} = 0 \end{aligned},$$

iz čega konačno dobivamo jednadžbe napona i struje na liniji:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - LC \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 i}{\partial z^2} - LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Ove jednadžbe nam omogućavaju uvid u događanja na liniji kada je ona uzbuđena harmonijskim funkcijama.

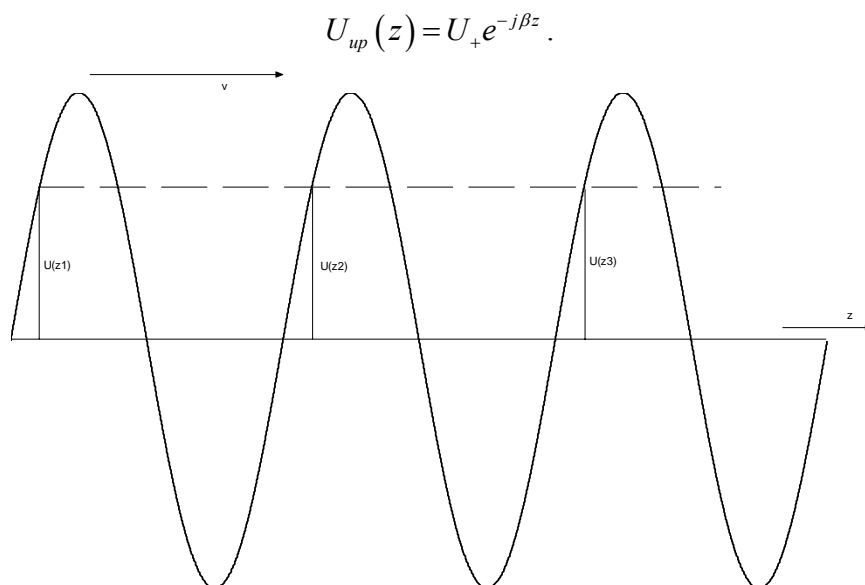
Ako je linija beskonačno duga, nema reflektiranog vala. Omjer napona i struje u bilo kojoj točki takve linije jednak je karakterističnoj impedanciji:

$$Z_0 = \frac{u}{i} = \sqrt{\frac{L}{C}},$$

koja ovisi o geometrijskim svojstvima prijenosne linije kao što je to pokazano na primjerima trakaste i koaksijalne linije. Ako bismo u određenom trenutku t snimili napone na beskonačnoj liniji, odnosno *liniji zaključenoj karakterističnom impedancijom*, lako bismo definirali valnu duljinu λ kao (sl. 5):

$$\lambda = \frac{2\pi v}{\omega} = \frac{v}{f}.$$

Promotrimo sada na sl. 3 gibanje upadnog naponskog vala na liniji:



Slika 5. Snimak upadnog naponskog vala na liniji u trenutku t

Prema definiciji, napon u nekoj točki $z_2 = z_1 + \lambda$ ima istu vrijednost kao i napon u točki z_1 , tj. $U(z_2) = U(z_1)$:

$$U(z_2) = U(z_1) \Rightarrow U_+ e^{-j\beta z_1} = U_+ e^{-j\beta z_2} \Rightarrow U_+ e^{-j\beta z_1} = U_+ e^{-j\beta(z_1 + \lambda)}.$$

Da bi to bilo ispunjeno mora biti:

$$e^{-j\beta\lambda} = 1 \Rightarrow \cos(\beta\lambda) - j\sin(\beta\lambda) = 1 \Rightarrow \beta\lambda = 0, 2\pi, 4\pi, \dots,$$

a prema tome najmanja razlika $z_2 - z_1$ je za: $\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi v}{\omega}$.

U općem slučaju, odnosno za neku *liniju konačne duljine* postoji upadni i reflektirani val. Napišimo rješenje za napon na liniji tako da ispred zagrade izlučimo izraz za upadni val:

$$u(z, t) = U_+ e^{j\omega\left(t - \frac{z}{v}\right)} \left[1 + \frac{U_-}{U_+} e^{j2\frac{\omega}{v}z} \right].$$

Analizirajmo izraz u uglatoj zagradi. Taj izraz jednak je jedinici kada nema reflektiranog vala ($U_- = 0$). Drugi član u zagradi predstavlja kompleksnu veličinu koja ima svoju amplitudu i fazu, a koju zovemo **koeficijent refleksije**. Ona predstavlja omjer upadnog i reflektiranog vala u određenoj točki z linije:

$$\Gamma(z) = \frac{U_-}{U_+} e^{j2\frac{\omega}{v}z} = \frac{U_-}{U_+} e^{j2\beta z}.$$

Snaga koju prenosi upadni val je:

$$P_{up} = \frac{|U_+|^2}{Z_0},$$

a snaga koju prenosi reflektirani val je:

$$P_{ref} = \frac{|U_-|^2}{Z_0}.$$

$$\text{Zbog } \Gamma(z) = \frac{U_-}{U_+} e^{j2\frac{\omega}{v}z} = \frac{|U_-|}{|U_+|} e^{j\theta} e^{j2\beta z} \Rightarrow |\Gamma|^2 = \frac{|U_-|^2}{|U_+|^2}, \text{ pa je: } \boxed{|\Gamma|^2 = \frac{P_{ref}}{P_{up}}}.$$

Za liniju bez gubitaka modul koeficijenta refleksije je konstantan duž linije:

$$|\Gamma| = |\Gamma(0)| = |\Gamma(z)| = |\Gamma(l)| = \text{konst.}^i.$$

Ukupna prenesena snaga ili snaga predana opterećenju na kraju *linije bez gubitaka* je razlika upadne i reflektirane snage:

$$P_t = P_{up} - P_{ref} = (1 - |\Gamma|^2) P_{in}.$$

ⁱ Ako imamo liniju s gubicima ovo ne vrijedi, a snaga predana teretu je:

$$P_t = P_{up}(z=l) - P_{ref}(z=l) = [1 - |\Gamma(z=l)|^2] P_{up}(z=l).$$

Smithov dijagram

Polazeći od valne jednadžbe uz pretpostavku harmonijske uzbude $p(t) \propto e^{j\omega t}$, dobili smo Helmholtzovu jednadžbu:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{v^2} p = 0,$$

s općim rješenjem:

$$p(z, t) = Ae^{j\omega t} e^{-j\frac{\omega}{v}z} + Be^{j\omega t} e^{j\frac{\omega}{v}z}.$$

Ako generator postavimo u položaj $z = z_0$, $z' = z - z_0$, kao na sl. 6, možemo pisati rješenja valnih jednadžbi za napon i struju na liniji bez gubitaka:

$$u(z', t) = U_+(z_0) e^{j\omega\left(t - \frac{z'}{v}\right)} + U_-(z_0) e^{j\omega\left(t + \frac{z'}{v}\right)},$$

$$i(z', t) = \frac{1}{Z_0} \left[U_+(z_0) e^{j\omega\left(t - \frac{z'}{v}\right)} - U_-(z_0) e^{j\omega\left(t + \frac{z'}{v}\right)} \right].$$

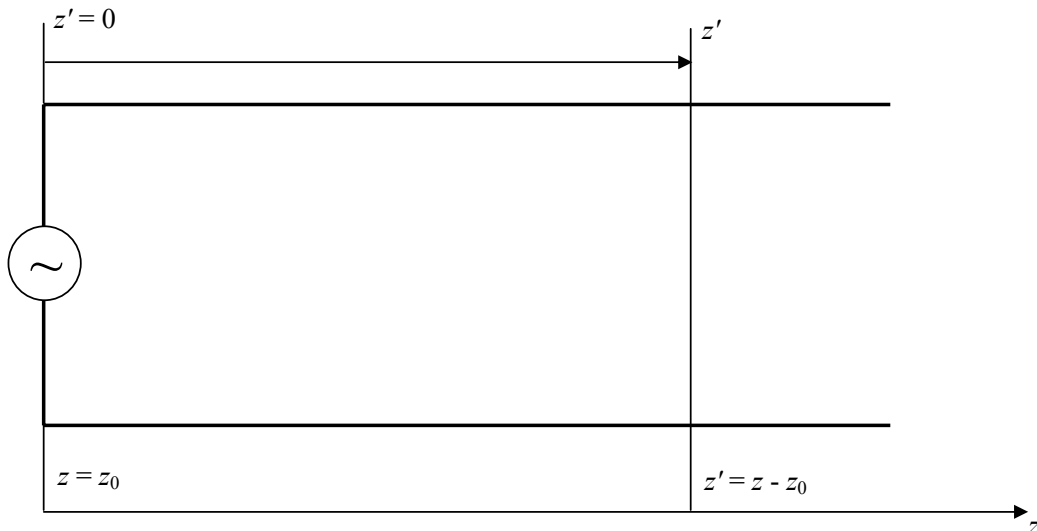
U $z_0 = 0 \Rightarrow z = z'$, pa je:

$$u(z, t) = U_+(0) e^{j\omega\left(t - \frac{z}{v}\right)} \left[1 + \frac{U_-(0)}{U_+(0)} e^{j\frac{2\omega z}{v}} \right],$$

uz koeficijent refleksije:

$$\Gamma(z) = \frac{U_-(0)}{U_+(0)} e^{j2\frac{\omega}{v}z} = \frac{|U_-(0)|}{|U_+(0)|} e^{j\theta} e^{j2\beta z},$$

i faznu konstantu $\beta = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$. Dakle, koeficijent refleksije je kompleksna veličina:



Slika 6. Priključak generatora u točku $z = z_0$ prijenosne linije

$$\Gamma = \Gamma(z) = p + jq.$$

Fazorski dijagram koeficijenta refleksije možemo prikazati u Γ -ravnini kao na sl. 7. Pri tome je smjer rastućeg faznog kuta koeficijenta refleksije $+2\beta z$ (rotacija u pozitivnom smjeru) smjer kretanja po liniji *od generatora* (prema teretu), dok smjer padajućeg kuta $-2\beta z$ (rotacija u smjeru kazaljke sata) smjer kretanja *prema generatoru*.

Napišimo izraze za napon i struju na liniji u ovisnosti o koeficijentu refleksije:

$$u(z, t) = U_+ e^{j\omega\left(t - \frac{z}{v}\right)} [1 + \Gamma(z)],$$

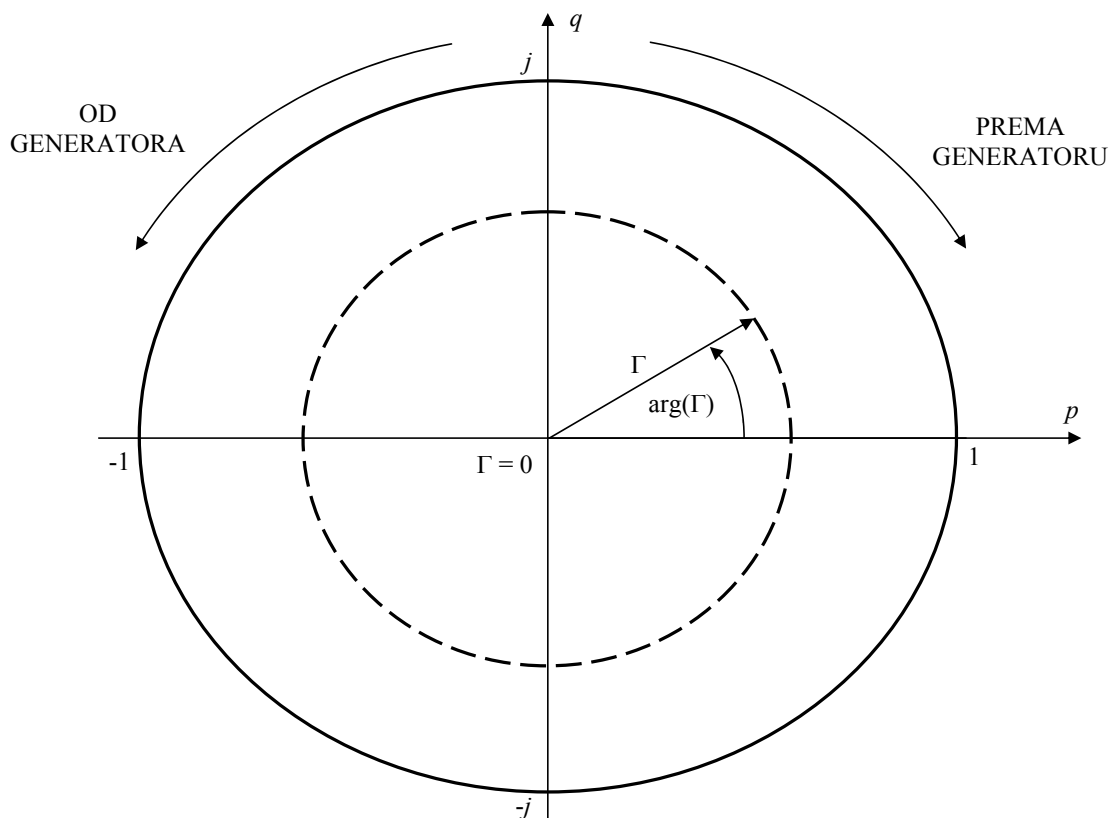
$$i(z, t) = \frac{U_+}{Z_0} e^{j\omega\left(t - \frac{z}{v}\right)} [1 - \Gamma(z)].$$

Koeficijent stojnih valova KSV na prijenosnoj liniji definira se kao omjer maksimalne i minimalne vrijednosti napona na liniji, vrijednosti koje dobijemo lako ako u gornje jednadžbe uvrstimo:

$$\Gamma = \begin{cases} |\Gamma| e^{j0} = |\Gamma| \Leftrightarrow \max \\ |\Gamma| e^{j\pi} = -|\Gamma| \Leftrightarrow \min \end{cases},$$

pa je:

$$KSV = \frac{|U_{\max}|}{|U_{\min}|} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}.$$



Slika 7. Γ -ravnina

Apsolutna vrijednost koeficijenta refleksije može se, dakle, izraziti preko KSV koji je očito skalarna veličina ili snaga:

$$|\Gamma| = \frac{KSV - 1}{KSV + 1}, \text{ odnosno } |\Gamma|^2 = \frac{P_{ref}}{P_{up}}.$$

Intervali u kojima su definirani apsolutna koeficijenta refleksije i KSV ako se promatraju isključivo pasivni sklopovi su $|\Gamma| \in [-1, 1]$, $KSV \in [1, +\infty)$.

Impedancija na nekom mjestu z na liniji je omjer napona i struje u toj točki:

$$Z(z) = \frac{u(z, t)}{i(z, t)} = \frac{U_+ e^{j\omega(t - \frac{z}{v})} [1 + \Gamma(z)]}{\frac{U_+}{Z_0} e^{j\omega(t - \frac{z}{v})} [1 - \Gamma(z)]},$$

$$Z(z) = Z_0 \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)},$$

pa je:

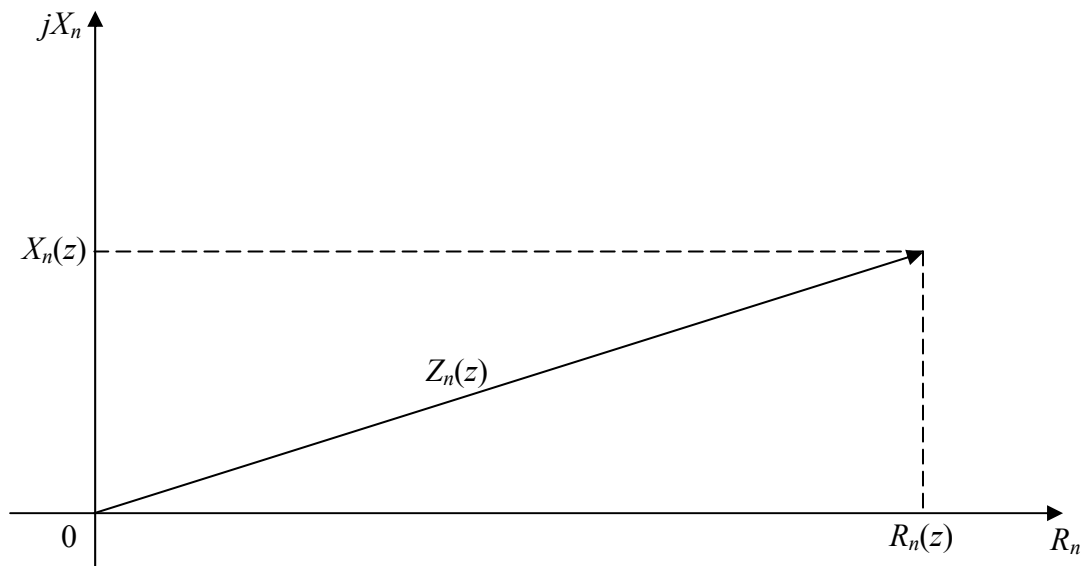
$$\Gamma(z) = \frac{Z(z) - Z_0}{Z(z) + Z_0}.$$

Definirajmo **normiranu impedanciju** kao:

$$Z_n(z) = \frac{Z(z)}{Z_0} = \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)},$$

pa se koeficijent refleksije na nekom mjestu z na liniji može izraziti kao:

$$\Gamma = \frac{Z_n - 1}{Z_n + 1}. \quad (\$ \$)$$



Slika 8. Z_n -ravnina

Već smo rekli da gibanju po liniji odgovara u $\Gamma(z)$ -ravnini kruženje po kružnici konstantnog radijusa $|\Gamma(z)| = konst.$. Pri tome se mijenja argument koeficijenta refleksije, a to znači da je formulom za normiranu impedanciju $Z_n(z)$ određen za svaki položaj z linije. Također, za fiksni položaj na liniji promjena impedancije je moguća ako mijenjamo frekvenciju, jer se tada mijenja električna duljina linije.

Međutim, navikli smo promatrati fazor impedancije u kompleksnoj Z_n -ravnini, kao što je prikazano na sl. 8. Postavlja se pitanje kako normiranu impedanciju Z_n unijeti u Γ -kružnicu. Naime, transformacijom Γ u Z_n ravninu moguće je nekoj točki iz Z -ravnine pridijeliti određenu vrijednost Γ u Γ -ravnini. Drugim riječima pravce konstantnog realnog dijela i imaginarnog dijela treba preslikati u Γ -ravninu a njihova vrijednost će odrediti normiranu impedanciju Z_n . Napišimo stoga koeficijent refleksije u obliku:

$$\Gamma(z) = \frac{Z_n(z) - 1 + 2 - 2}{Z_n(z) + 1} = 1 - \frac{2}{Z_n(z) + 1},$$

odnosno:

$$\Gamma(z) = 1 - \frac{1}{\frac{Z_n(z)}{2} + \frac{1}{2}}.$$

Dalje imamo da je:

$$\Gamma(z) = 1 - \frac{1}{\frac{R_n(z)}{2} + \frac{1}{2} + j \frac{X_n(z)}{2}},$$

pri čemu: $R_n \in [0, +\infty)$ & $X_n \in (-\infty, +\infty)$, jer pretpostavljamo pasivne sklopove.

Nećemo posebno dokazivati ovaj korak transformacije, ali provjerimo za nekoliko točaka:

$$\frac{1}{\frac{R_n}{2} + j \frac{X_n}{2} + \frac{1}{2}} = A + jB,$$

što je prikazano u tablici 1 za $R_n = 0$.

TABLICA 1. VRIJEDNOSTI X_n UZ $R_n = 0$

$X_n (R_n = 0)$	$A + jB$
0	$2 + j0$
∞	$0 + j0$
1	$1 - j$
-1	$1 + j$

Naime (\$\$) je bilinearna transformacija, kod koje se vrijednosti jedne kompleksne veličine pridružuje druga kompleksna veličina. Da se pokazati da se kružnica iz jedne preslikava u kružnicu iz druge, što može biti i pravac ako središte odmaknemo dovoljno od ishodišta.

Grafički postupak preslikavanja je sljedeći. Zbog preglednosti tretiramo odvojeno realni i imaginarni dio normirane impedancije. Najprije preslikajmo iz Z_n -ravnine krivulje konstantnog realnog dijela R_n na kojima se mijenja imaginarni dio, a zatim krivulje

konstantnog imaginarnog dijela X_n na kojima se mijenja realni dio. Preslikavanje realnog dijela prikazan je na sl. 9a. U Z_n -ravnini krivulje konstantnog realnog dijela $R_n = konst.$ su pravci paralelni s ordinatom. Svi pravci realnog dijela impedancije iz Z_n -ravnine preslikali su se u kružnice u Γ -ravnini, čija su središta između 0 i 1. Primijetimo da što je veći iznos realnog dijela R_n , to je radijus odgovarajuće kružnice manji. Na svakoj od kružnica nalaze se sve normirane impedancije čiji realni dio odgovara pripadajućem radijusu kružnice. Analogan postupak preslikavanja primjenjujemo i za imaginarni dio X_n na sl. 9b. Ovim preslikavanjem dobili smo i familiju kružnica konstantnog imaginarnog dijela X_n . Usporedbom (preklapanjem) dobivenih dijagrama vidimo da se kružnice konstantnog realnog dijela sijeku pod pravim kutom s kružnicama konstantnog imaginarnog dijela, odnosno te su kružnice ortogonalne. Dijagram normiranih impedancija u ravnini koeficijenta refleksije naziva se još i Smithov dijagram, a njegov izgled prikazan je na sl. 9c. Pri tome u slučaju pasivnih sklopova realni dio ne može biti negativan, pa se u tom slučaju koristimo dijagramom prikazanim na desnoj strani sl. 9c.

Krivulje $R_n = konst.$ i $X_n = konst.$ u Γ -ravnini mogu se dobiti i analitički.

Analitičko određivanje krivulja $R_n = konst.$ i $X_n = konst.$ u $\Gamma(z)$ -ravnini

Impedancija i koeficijent refleksije kompleksne su veličine, pa pišemo:

$$Z_n(z) = R_n + jX_n, \quad \Gamma(z) = p + jq.$$

Vrijedi:

$$Z_n = R_n + jX_n = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma},$$

te je:

$$R_n + jX_n = \frac{1 + (p + jq)}{1 - (p + jq)} \cdot \frac{1 + p + jq}{1 + p + jq},$$

$$R_n + jX_n = \frac{1 - p^2 - q^2}{(1 - p)^2 + q^2} + j \frac{2q}{(1 - p)^2 + q^2}.$$

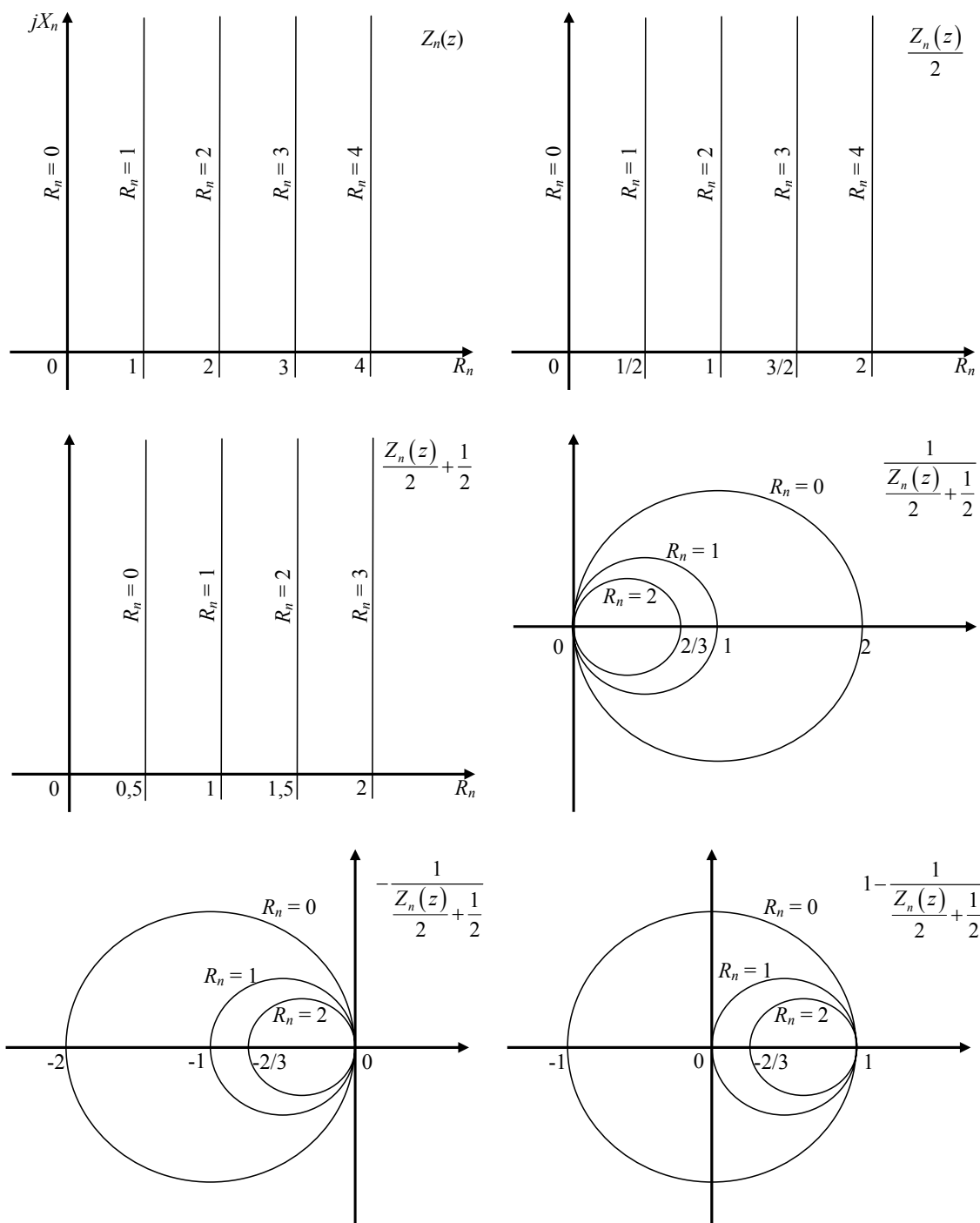
Stoga su realni i imaginarni dio normirane impedancije izraženi preko realnog i imaginarnog dijela koeficijenta refleksije jednaki:

$$R_n = \frac{1 - p^2 - q^2}{(1 - p)^2 + q^2}, \quad X_n = \frac{2q}{(1 - p)^2 + q^2}.$$

S nekoliko elementarnih matematičkih manipulacija dolazimo do familija kružnica konstantnog X_n i familija kružnica konstantnog R_n :

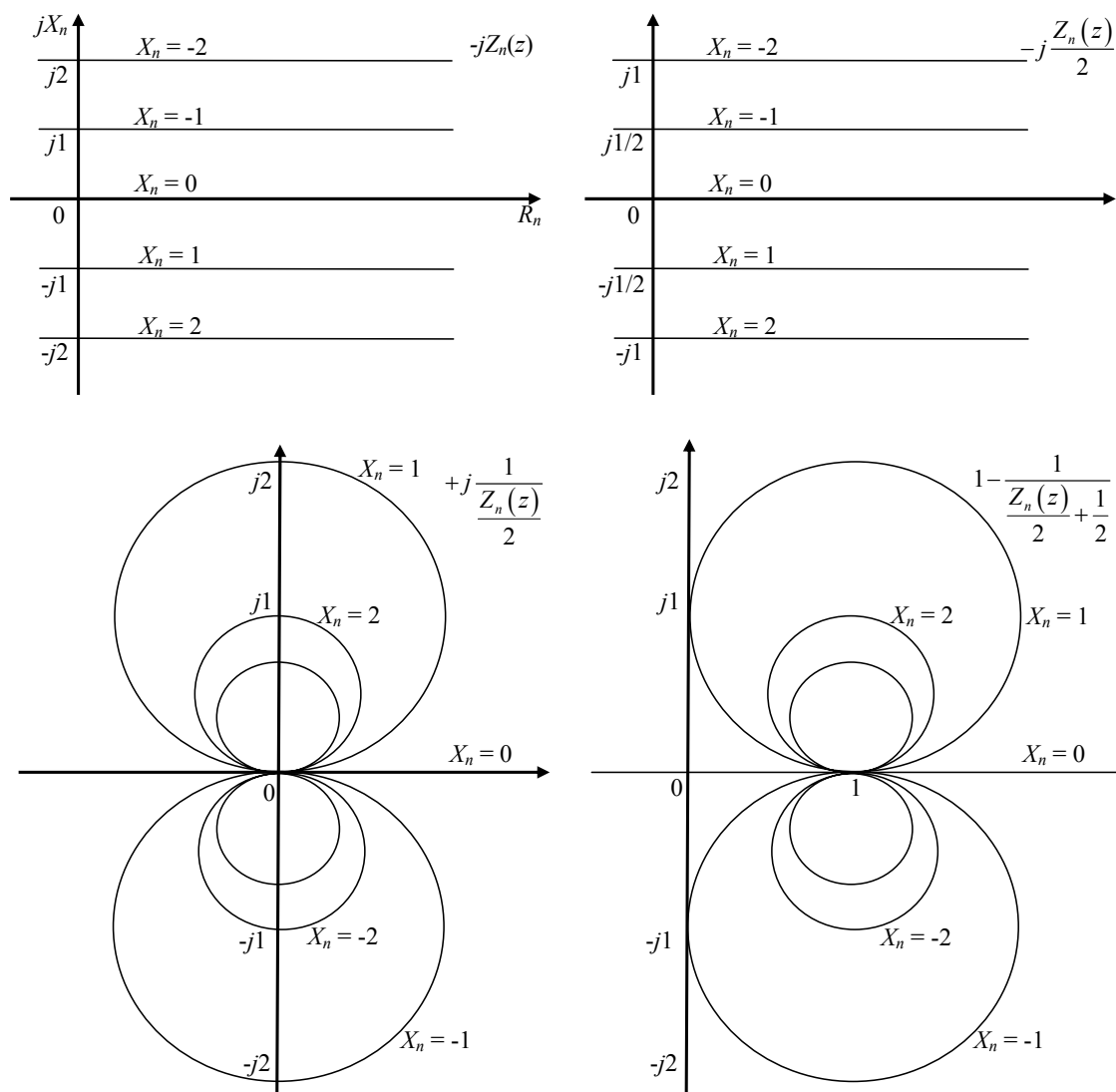
$$\left(p - \frac{R_n}{1 + R_n} \right)^2 + q^2 = \left(\frac{1}{1 + R_n} \right)^2,$$

$$(p - 1)^2 + \left(q - \frac{1}{X_n} \right)^2 = \left(\frac{1}{X_n} \right)^2.$$



Slika 9a. Preslikavanje realnog dijela normirane impedancije iz Z_n -ravnine u Γ -ravninu

Dakle, rezimirajmo rezultat preslikavanja. U kompleksnoj Z_n -ravnini postoje dvije familije međusobno okomitih pravaca, od kojih su jedni pravci konstantnog realnog dijela, a drugi pravci konstantnog imaginarnog dijela normirane impedancije. Te dvije familije međusobno okomitih pravaca preslikani su u $\Gamma(z)$ -ravnini u dvije familije ortogonalnih kružnica (te kružnice sijeku se pod pravim kutom). Prvu familiju predstavljaju kružnice konstantnog normiranog realnog otpora R_n koje se međusobno tangiraju u točki $(1, 0)$. Polumjer tih kružnica je:



Slika 9b. Preslikavanje imaginarnog dijela iz Z_n -ravnine u Γ -ravninu

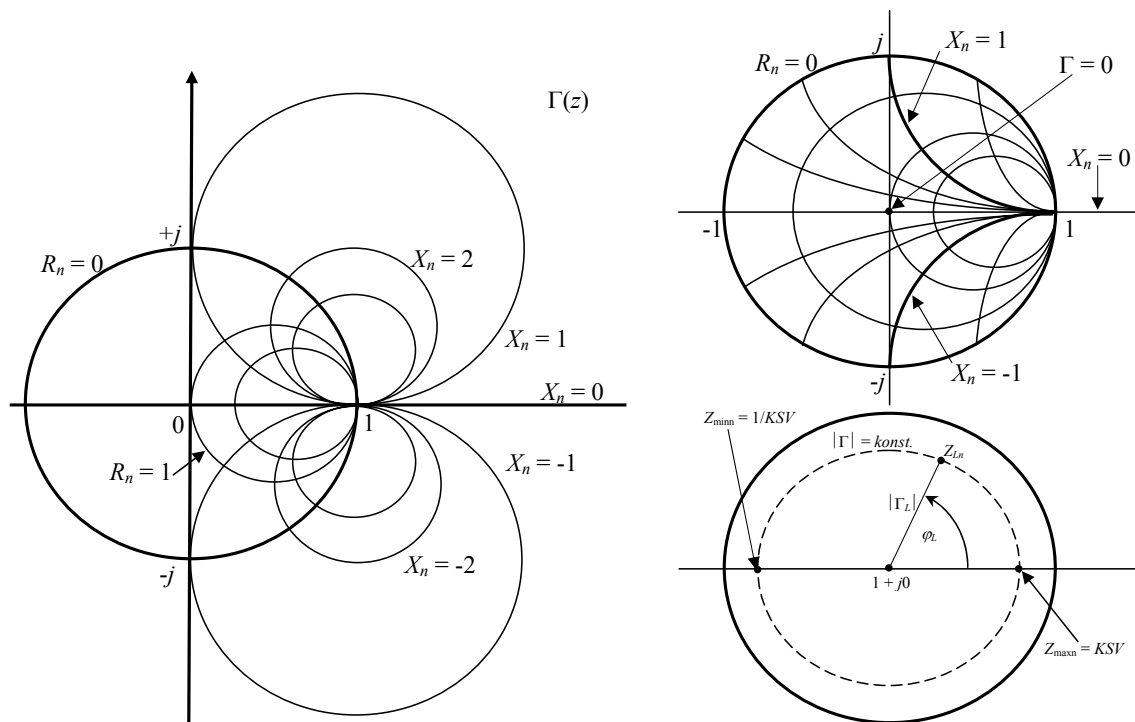
$$r = \frac{1}{R_n + 1},$$

a središta S su im na realnoj osi između točaka (0,0) i (1,0) u točki $(1 - r, 0)$:

$$S(1 - r, 0) = S\left(\frac{R_n}{R_n + 1}, 0\right).$$

Kružnice konstantne normirane reaktancije X_n imaju središta na pravcu paralelnom s imaginarnom osi, a koji prolazi kroz točku (1,0). Te kružnice imaju zajedničku tangentu realnu os, a određene su:

- središtem u točki $S\left(1, \frac{1}{X_n}\right)$,
- radijusom $\frac{1}{X_n}$.



Slika 9c. Smithov dijagram: dijagram normiranih impedancija u Γ -ravnini

Već ranije smo istakli da, ako se promatraju pasivni sklopovi, u $\Gamma(z)$ -ravnini maksimalni mogući $\Gamma(z)$ je radijusa jednakog jedinici. Dakle, svaka moguća normirana impedancija nalazi se unutar kruga radijusa $|\Gamma(z)| = 1$, za razliku od $Z_n(z)$ -ravnine u kojoj može biti bilo gdje na neograničenim pravicima. Ovaj dijagram impedancije u kompleksnoj $\Gamma(z)$ -ravnini, odnosno ove ortogonalne familije kružnica nazvali smo Smithov dijagram. Dijelom Smithovog dijagrama možemo smatrati i familiju koncentričnih kružnica sa središtem u $S(0,0)$ i radijusa od 0 do 1.

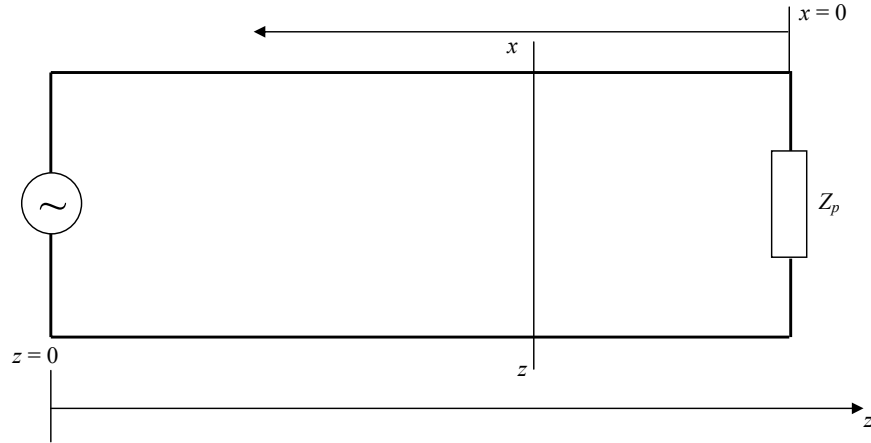
Uočimo da je promjena impedancije kao funkcija promjene položaja na liniji jednoznačno određena. Nadalje, eventualno postojanje gušenja na liniji očitavalo bi se na liniji kao promjena radijusa pri rotaciji uslijed promjene položaja, što će biti pokazano u sljedećem poglavlju.

Smithov dijagram nam pruža sljedeće mogućnosti:

1. omogućava proučavanje svojstava prijenosne linije u smislu njenog ponašanja kao transformatora impedancije,
2. omogućava određivanje ulazne impedancije linije poznate električne duljine zaključene poznatim opterećenjem,
3. prikladan je kod računanja prilagođenja prijenosnih linija,
4. koristan je pri konstrukciji filtara i sl.

Impedancija kratkospojene i otvorene linije

Izrazimo koeficijent refleksije $\Gamma(z)$ u nekoj točki z na liniji duljine l kao funkciju od koeficijenta refleksije $\Gamma(l)$ na kraju linije i udaljenosti x od kraja, odnosno opterećenja, kao što je prikazano na sl. 10. Koeficijent refleksije na proizvoljnom mjestu na liniji je:



Slika 10. Računanje pomaka po liniji od tereta

$$\Gamma(z) = \frac{U_{ref}(z)}{U_{up}(z)} = \frac{U_-}{U_+} e^{j2\beta z},$$

a na kraju linije je:

$$\Gamma(l) = \frac{U_-}{U_+} e^{j2\beta l}.$$

Kako je $z = l - x$:

$$\Gamma(z) = \Gamma(l - x) = \frac{U_-}{U_+} e^{j2\beta(l-x)} = \frac{U_-}{U_+} e^{j2\beta l} e^{-j2\beta x},$$

odnosno:

$$\Gamma(z) = \Gamma(l) e^{-j2\beta x}.$$

Izrazimo sada impedanciju u proizvoljnoj točki linije kao funkciju udaljenosti od kraja linije i impedancije na kraju. Normirana impedancija u proizvoljnoj točki linije je:

$$Z_n(z) = \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)} = \frac{1 + \Gamma(l) e^{-j2\beta x}}{1 - \Gamma(l) e^{-j2\beta x}},$$

a u točki opterećenja je:

$$Z_n(l) = Z_{pn} \text{ i } \Gamma(l) = \frac{Z_{pn} - 1}{Z_{pn} + 1}.$$

Uvrstimo:

$$Z_n(z) = \frac{1 + \frac{Z_{pn} - 1}{Z_{pn} + 1} e^{-j2\beta x}}{1 - \frac{Z_{pn} - 1}{Z_{pn} + 1} e^{-j2\beta x}} \cdot \frac{(Z_{pn} + 1) e^{j\beta x}}{(Z_{pn} + 1) e^{j\beta x}},$$

imamo:

$$Z_n(x) = \frac{Z_{pn} + j \operatorname{tg} \beta x}{1 + j Z_{pn} \operatorname{tg} \beta x}.$$

Kao primjer uzmimo kratko spoјenu liniju, slučaj koji opisuje sl. 11.a. Kako je $Z_{pn} = 0$:

$$Z_n(x) = j \operatorname{tg} \beta x .$$

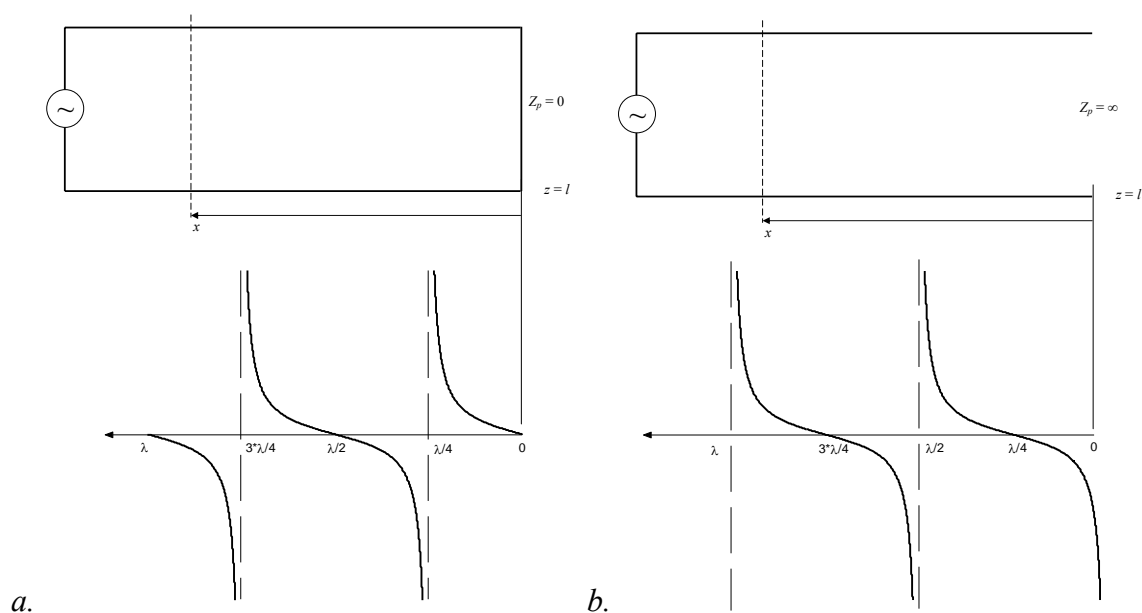
Za $x = 0$ u tom slučaju je $Z_n(z) = 0$, a na mjestu udaljenom za četvrtinu valne duljine od kratkog spoja je:

$$x = \frac{\lambda}{4} \Rightarrow \beta x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{tg} \beta x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = \infty ,$$

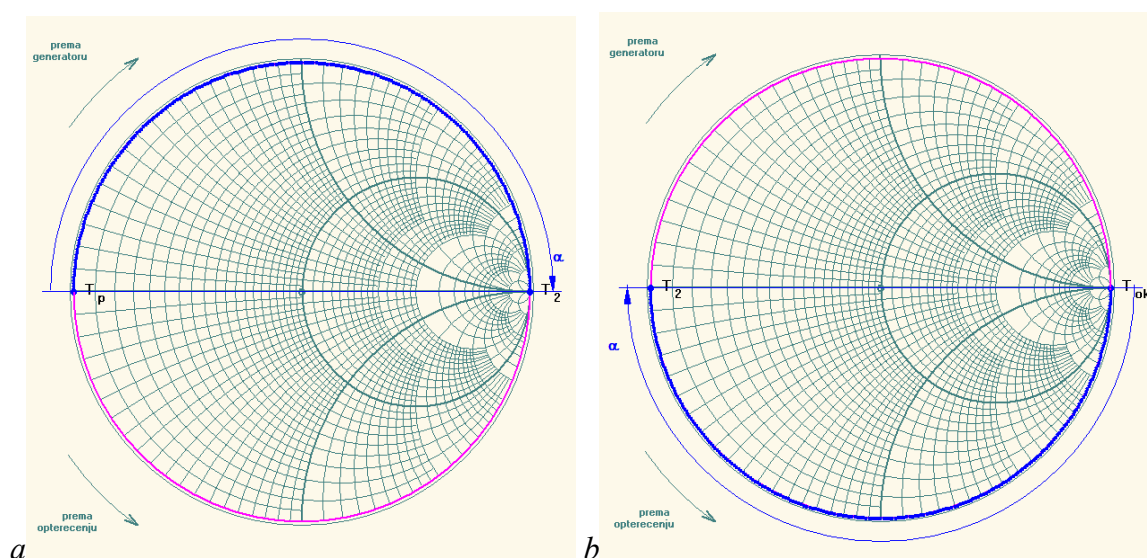
što odgovara situaciji otvorenog kruga ($Z\left(x = \frac{\lambda}{4}\right) = \infty$).

Ako promotrimo slučaj otvorene linije kao na sl. 11.b, imamo $Z_{pn} = \infty$ te je:

$$Z_n(z) = -j \operatorname{ctg} \beta x .$$



Slika 11. a. Impedancija na kratkospojenoj liniji; b. Impedancija na otvorenoj liniji;



Slika 12. a. Pomak za četvrtinu valne duljine od kratkog spoja na mjestu tereta;
b. Pomak za četvrtinu valne duljine od otvorenog kruga na mjestu tereta

Pogledajmo te situacije na Smithovom dijagramu na sl. 12. Za slučaj kratkospojene linije kružnica konstantnog koeficijenta refleksije je $R_n = 0$ (obod), točka kratkog spoja je T_p a pomakom za kut $\alpha = \pi$ (četvrtina valne duljine) dolazimo u točku T_2 na suprotnom kraju kružnice $R_n = 0$, koja odgovara otvorenom krugu. U slučaju otvorene linije imamo obrnutu situaciju.

Stojni val na prijenosnoj liniji

Promotrimo rješenje za napon na liniji u ovisnosti o koordinati x (vidi sl. 10). Našli smo da je koeficijent refleksije na liniji u ovisnosti o koeficijentu refleksije na mjestu tereta $\Gamma_L = \Gamma(l)$:

$$\Gamma(x) = \Gamma_L e^{-j2\beta x}.$$

Relacija za napon na liniji može pisati u obliku:

$$U(z) = U(l-x) = U(x) = U_+ e^{j\beta(l-x)} \left[1 + \frac{U_-}{U_+} e^{j2\beta(l-x)} \right].$$

Ova relacija predstavlja naponski stojni val koji nastaje vektorskim zbrajanjem upadnog i reflektiranog naponskog vala. Odgovarajućim izborom parametara i konstrukcije prijenosne linije mogu se proizvesti veoma visoki naponi i struje efektom stojnih valova. Uzevši da je amplituda upadnog naponskog vala na mjestu tereta jednaka:

$$U_L = U_+ e^{-j\beta l},$$

možemo pisati:

$$U(x) = U_L e^{j\beta x} [1 + \Gamma(x)].$$

Pretpostavimo da mjerimo detektorom amplitudu napona na prijenosnoj liniji karakteristične impedancije Z_0 i električne duljine l izražene u valnim duljinama, kao na sl. 13. Pri tome, pomicanje detektora po liniji od tereta prema generatoru znači kretanje u pozitivnom smjeru osi x . Razložimo relaciju za napon na pojedine članove u sljedećem obliku:

$$U(x) = (U_L + U_L \Gamma_L e^{-j2\beta x}) e^{j\beta x}.$$

Uzmimo u fazorskom dijagramu napon na mjestu tereta U_L kao referentni napon. Imamo fazorski dijagram stojnog vala kao na sl. 14, pri čemu smo uzeli da je koeficijent refleksije na mjestu tereta:

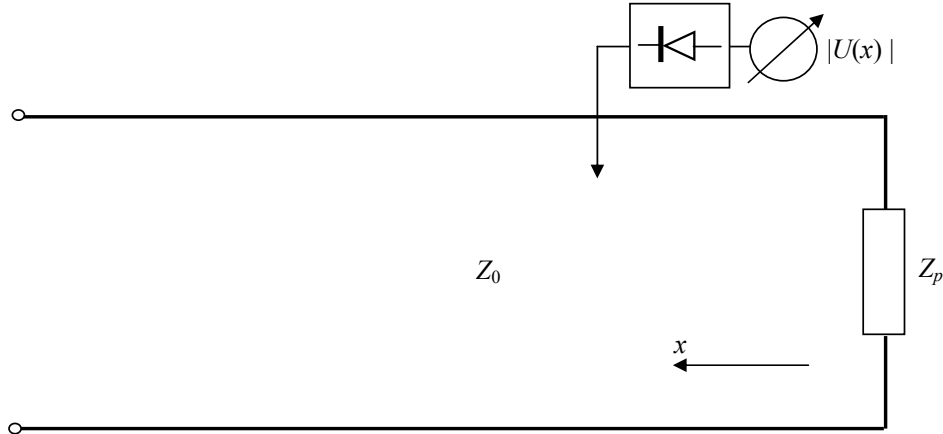
$$\Gamma_L = |\Gamma_L| e^{j\varphi_L} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}.$$

Apsolutna vrijednost napona na izlazu detektora je:

$$|U(x)| = |U_L| \left| 1 + |\Gamma_L| e^{j(\varphi_L - 2\beta x)} \right|,$$

odnosno:

$$|U(x)| = |U_L| \sqrt{1 + 2|\Gamma_L| \cos(\varphi_L - 2\beta x) + |\Gamma_L|^2}.$$



Slika 13. Mjerenje naponskog stojnog vala na liniji

Ekstremi stojnog (stacionarnog ili stajaćeg) vala mogu se odmah odrediti s pomoću dobivene relacije:

$$\cos(\varphi_L - 2\beta x) = \begin{cases} -1 \Rightarrow U_{\min} = |U(x_{\min})| = |U_L|(1 - |\Gamma_L|) \\ +1 \Rightarrow U_{\max} = |U(x_{\max})| = |U_L|(1 + |\Gamma_L|) \end{cases},$$

pri čemu je položaj ekstrema odatle, uz $n = 0, 1, 2, \dots$:

$$x_{\min} = \frac{\varphi_L + (2n+1)\pi}{2\beta},$$

$$x_{\max} = \frac{\varphi_L + 2n\pi}{2\beta}.$$

Uočimo da je razmak između uzastopnih ekstrema stojnog vala jednak:

$$|x_{\min} - x_{\max}| = \frac{\lambda}{4},$$

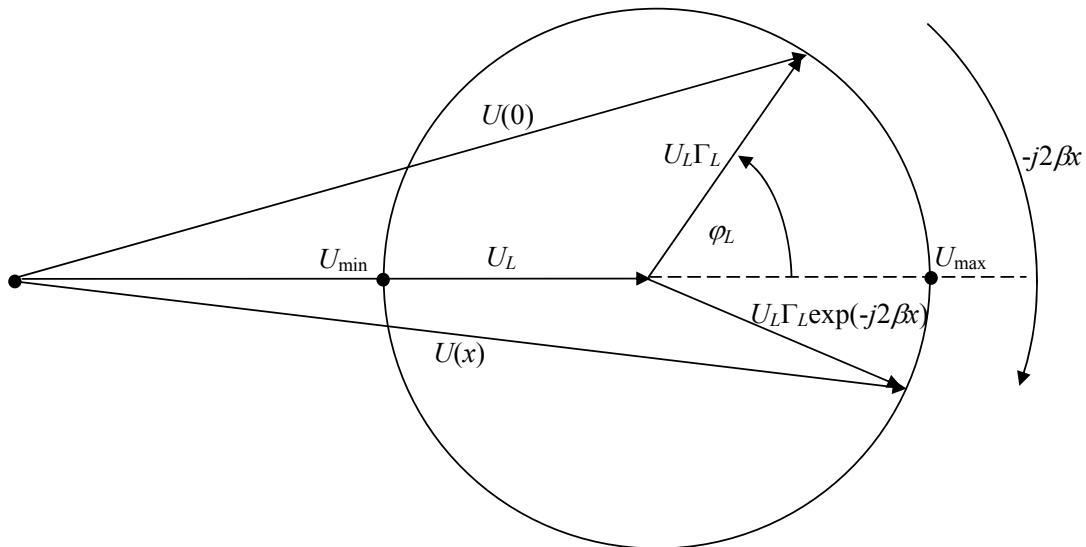
pa možemo zaključiti da se *amplituda napona na liniji izmjenjuje nakon četvrtine valne duljine*, odnosno *ponavlja nakon pola valne duljine*, bez obzira na iznos i kut opterećenja. Napon na liniji je:

$$u(x, t) = U(x)e^{j\omega t} = |U(x)|e^{j[\omega t + \phi(x)]},$$

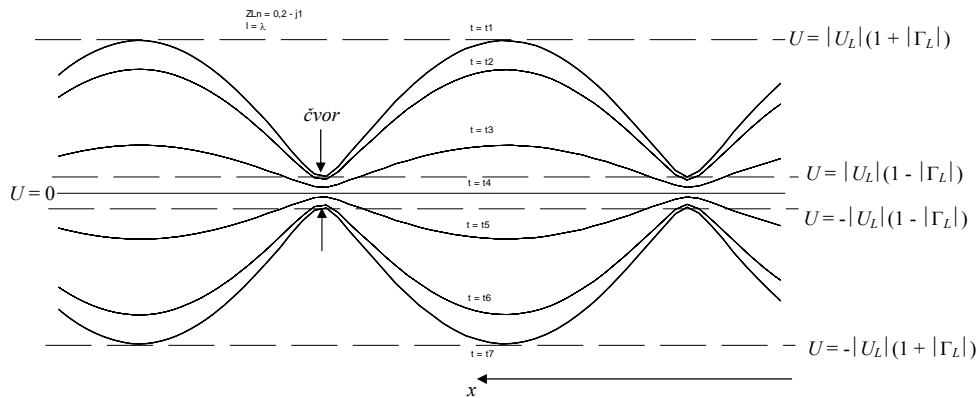
pri čemu je $\phi(x)$ faza napona u točki x na liniji, a $\omega = 2\pi f$ kružna frekvencija. Na sl. 15 dat je primjer stojnog vala na punovalnoj liniji zaključenoj impedancijom u tijeku jedne periode. Val se ponaša kao da diše, uočavaju se dolovi (čvorovi) i bregovi stojnog vala. U čvoru se napon mijenja u manjim granicama između $\pm |U_L|(1 - |\Gamma_L|)$, a visina brijega oscilira od nule do $|U_L|(1 + |\Gamma_L|)$.

Definirajmo sada koeficijent stojnih valova *KSV* kao omjer maksimalne i minimalne vrijednosti amplitude napona na prijenosnoj liniji:

$$KSV = \frac{|U_{\max}|}{|U_{\min}|} = \frac{1 + |\Gamma_L|}{1 - |\Gamma_L|},$$



Slika 14. Fazorski dijagram stojnog vala na prijenosnoj liniji



Slika 15. Dijagram stojnog vala na punovalnoj liniji zaključenoj teretom normirane impedancije $Z_{Ln} = 0,2 - j1$ u tijeku jedne periode

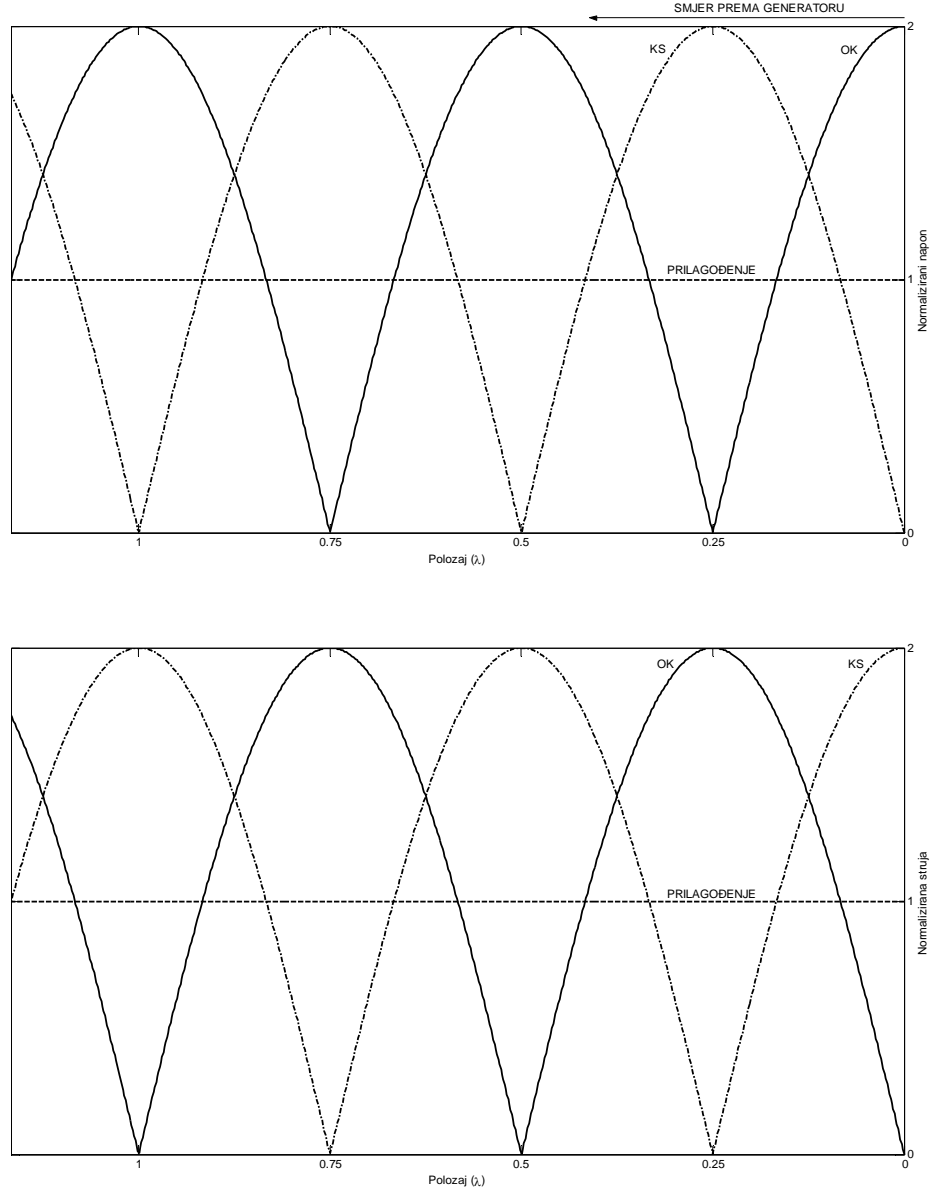
pri čemu je za liniju bez gubitaka apsolutna vrijednost koeficijenta refleksije na liniji konstantna, odnosno: $|\Gamma_L| = |\Gamma| = konst.$

Promotrimo sada posebne slučajeve stojnog vala:

- prilagođenje: $Z_L = Z_0 \Rightarrow \Gamma_L = 0, (KSV = 1) \Rightarrow |U(x)| = |U_L| = konst.$,
- kratki spoj: $Z_L = 0 \Rightarrow \Gamma_L = -1, (KSV = \infty) \Rightarrow |U(x)| = 2|U_L||\sin \beta x|$,
- otvoreni krug: $Z_L = \infty \Rightarrow \Gamma_L = 1, (KSV = \infty) \Rightarrow |U(x)| = 2|U_L||\cos \beta x|$.

Grafički, karakteristika naponskog stojnog vala u ovim karakterističnim slučajevima izgleda kao na sl. 16. (Za vježbu ponovite ovu analizu stojnog vala za struju na liniji.) Uočimo da su napon i struja u protufazi, odnosno ovisno o slučaju jedan prethodi ili zaostaje za drugim četvrtinu valne duljine tj. za 90° . U slučaju prilagođenja amplituda napona i struje je konstantna, odnosno nema stojnih valova na liniji. To je očekivano jer u se u tom slučaju cijela energija upadnog vala apsorbira od strane prilagođene impedancije opterećenja pa nema reflektiranog vala. Vidimo da se jedino tada linija s raspodijeljenim parametrima može poistovjetiti s električnim krugom s koncentriranim parametrima.

Interesantno je u sklopu ove analize pobliže promotriti što se događa s impedancijom na prijenosnoj liniji. Relaciju za impedanciju na liniji izveli smo prije:



Slika 16. Dijagrami stojnog vala napona i struje na prijenosnoj liniji bez gubitaka u slučajevima zaključenja linije kratkim spojem, otvorenim krugom i prilagođenom impedancijom

$$Z(x) = \frac{U(x)}{I(x)} = Z_0 \frac{Z_p + jZ_0 \operatorname{tg} \beta x}{Z_0 + jZ_p \operatorname{tg} \beta x} = Z_0 \frac{1 + \Gamma_L e^{-j2\beta x}}{1 - \Gamma_L e^{-j2\beta x}} = Z_0 \frac{1 + \Gamma(x)}{1 - \Gamma(x)}.$$

Prema tome, ekstremne vrijednosti impedancije na liniji su u točkama ekstrema stojnog vala i realne su vrijednosti:

- maksimalna impedancija: $Z_{\max} = Z(x = x_{\max}) = Z_0 \frac{1 + |\Gamma_L|}{1 - |\Gamma_L|} = Z_0 \cdot KSV,$
- minimalna impedancija: $Z_{\min} = Z(x = x_{\min}) = Z_0 \frac{1 - |\Gamma_L|}{1 + |\Gamma_L|} = \frac{Z_0}{KSV},$

i predstavljaju sjecišta kružnice konstantne amplitude koeficijenta refleksije na liniji i pravca $jX_n = 0$ u Smithovom dijagramu (posljedično, nalaze se na suprotnim stranama te kružnice), kao što je prikazano na sl. 9c (prikaz u donjem desnom kutu slike). Nadalje, znamo li da je period funkcije tangens jednak π , znači da se impedancija na liniji ponavlja nakon pola valne duljine (jer je $\beta x = \pi$). No što ako se pomaknemo po liniji za četvrtinu valne duljine? Tada je impedancija:

$$Z\left(x + \frac{\lambda}{4}\right) = Z_0 \frac{1 + \Gamma\left(x + \frac{\lambda}{4}\right)}{1 - \Gamma\left(x + \frac{\lambda}{4}\right)} = Z_0 \frac{1 + \Gamma_L e^{-j2\beta\left(x + \frac{\lambda}{4}\right)}}{1 - \Gamma_L e^{-j2\beta\left(x + \frac{\lambda}{4}\right)}} = Z_0 \frac{1 - \Gamma_L e^{-j2\beta x}}{1 + \Gamma_L e^{-j2\beta x}} = Z_0 \frac{1 - \Gamma(x)}{1 + \Gamma(x)} = \frac{Z_0}{Z(x)},$$

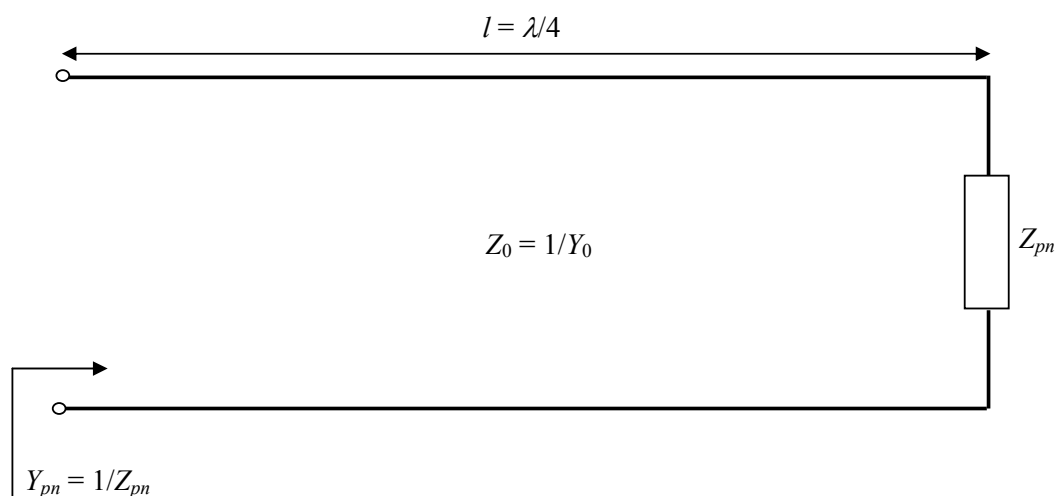
odnosno normirana impedancija:

$$\boxed{Z_n\left(x + \frac{\lambda}{4}\right) = \frac{1}{Z_n(x)} = Y_n(x)}.$$

Dakle, pomakom po prijenosnoj liniji bez gubitaka za četvrtinu valne duljine dolazimo u točku u kojoj mjerimo točno recipročnu vrijednost normirane impedancije iz prethodnog očitavanja, odnosno vrijednost normirane admitancije Y_n . U Smithovom dijagramu pomakom za četvrtinu valne duljine vala koji se propagira linijom bez gubitaka, odnosno za kut 180° prelazimo iz normirane impedancije u normiranu admitanciju, odnosno te dvije točke nalaze se na suprotnim stranama kružnice konstantne apsolutne vrijednosti koeficijenta refleksije na liniji.

Neka je sada linija duljine jednake četvrtini valne duljine elektromagnetskog vala koji se njome propagira. Možemo zaključiti da se sa ulaza četvrtvalne linije mjeri recipročna vrijednost normirane impedancije opterećenja, odnosno njegova normirana admitancija, kao što je prikazano na sl. 17. Stoga se četvrtvalna linija često naziva i *četvrtvalni transformator impedancije*.

Tako, ukoliko je takva linija zaključena kratkim spojem, na ulazu se vidi otvoreni krug i obrnuto, što je izvedeno i ranije (vidi sl. 11 i 12).



Slika 17. Četvrtvalni transformator impedancije

Homogene prijenosne linije s gubicima

Do sada smo razmatrali pojave na prijenosnoj liniji bez gubitaka, odnosno otpor vodiča i vodljivost dielektrika između vodiča imali su vrijednost jednaku nuli. Sada se želimo upoznati sa specifičnostima kod linija koje nisu idealne, odnosno kod kojih osim raspodijeljenog induktiviteta i kapaciteta imamo i raspodijeljeni otpor i vodljivost. U tom slučaju vrijedi općenitiji oblik jednadžbi homogene prijenosne linije:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} &= -\left(R + L \frac{\partial}{\partial t}\right) i \\ \frac{\partial i}{\partial z} &= -\left(G + C \frac{\partial}{\partial t}\right) u \end{aligned} \right\}.$$

Analizu ćemo ograničiti na slučaj harmonijskih napona i struja:

$$u(z, t) = U(z) e^{j\omega t} \quad i(z, t) = I(z) e^{j\omega t}.$$

U tom slučaju su gornje jednadžbeⁱⁱ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dU}{dz} &= -(R + j\omega L) I \\ \frac{dI}{dz} &= -(G + j\omega C) U \end{aligned} \right\}.$$

Deriviranjem prve jednadžbe po z i uvrštavanjem druge u dobivenu jednadžbu imamo:

$$\frac{d^2 U}{dz^2} - (R + j\omega L)(G + j\omega C)U = 0.$$

Sličnim deriviranjem druge jednadžbe dobivamo diferencijalnu jednadžbu za struju:

$$\frac{d^2 I}{dz^2} - (R + j\omega L)(G + j\omega C)I = 0.$$

Rješenje jednadžbe za napon je:

$$U(z) = U_+ e^{-\gamma z} + U_- e^{+\gamma z},$$

gdje je:

$$\gamma = \left[(R + j\omega L)(G + j\omega C) \right]^{\frac{1}{2}} = \alpha + j\beta \quad (!)$$

ⁱⁱ Poseban je slučaj linija s gubicima kada linija zrači dio energije u obliku elektromagnetskog vala (antena). Tada to zračenje možemo uračunati tako da uz Jouleove gubitke uključimo imaginarni induktivitet $-jL_r$ i imaginarni kapacitet $-jC_r$ po jedinici duljine te bi u jednadžbama umjesto R imali $R + \omega L_r$, a umjesto G član $G + \omega C_r$. Uočimo da gubici uslijed elektromagnetskog zračenja prema ovom modelu rastu s frekvencijom.

konstanta propagacije i kompleksna je veličina. Njezin realni dio, označimo ga s α , je konstanta gušenja, a imaginarni dio β je fazna konstanta (radian po jedinici duljine).

Iz prethodnih relacija da se izračunati:

$$\alpha = \left\{ \frac{1}{2} \left[\sqrt{(RG - \omega^2 LC) + \omega^2 (LG + RC)^2} + RG - \omega^2 LC \right] \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\beta = \left\{ \frac{1}{2} \left[\sqrt{(RG - \omega^2 LC) + \omega^2 (LG + RC)^2} - RG + \omega^2 LC \right] \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

U ranijim izlaganjima smo promatrali liniju bez gubitaka ($R = G = 0$), gdje je $\alpha = 0$, a $\gamma = j\beta$, pa se u tom slučaju β može nazivati i konstantom propagacije. Kao i ranije, i u slučaju linije s gubicima rješenje valne jednadžbe predstavljaju dva vala od kojih jedan propagira u smjeru rastućeg z (upadni val) brzinom ω/β :

$$U_{up} = U_+ e^{-\gamma z} e^{j\omega t} = U_+ e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)}.$$

Brzina kojom se prostire konstantna faza (fazna brzina) dobiva se kao:

$$\omega t - \beta z = konst. \left| \frac{d}{dt} \right|,$$

$$\omega - \beta \frac{dz}{dt} = 0,$$

te je:

$$v = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta}.$$

Međutim, vidimo da se isti val i prigušuje s $e^{-\alpha}$ po jedinici duljine linije. U_- predstavlja amplitudu povratnog vala koji se propagira u smjeru $-z$ istom brzinom i jednakim prigušenjem po jedinici duljine. Izvedimo sada s pomoću jednadžbe:

$$\frac{dI}{dz} = -(G + j\omega C)U,$$

struju I :

$$I = -\frac{1}{R + j\omega L} \frac{dU}{dz} = \frac{\gamma}{R + j\omega L} (U_+ e^{-\gamma z} + U_- e^{+\gamma z}).$$

Uvrštavajući izraz (!) za konstantu propagacije imamo:

$$I = \sqrt{\frac{G + j\omega C}{R + j\omega L}} (U_+ e^{-\gamma z} - U_- e^{+\gamma z}),$$

odnosno:

$$I = \frac{1}{Z_0} (U_+ e^{-\gamma z} - U_- e^{+\gamma z}),$$

gdje je Z_0 karakteristična impedancija linije s gubicima:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}},$$

pri čemu smo to ustvrdili samo na temelju fizikalne dimenzije. Prokomentirajmo stoga fizikalni smisao te veličine. Pretpostavimo stoga da je prijenosna linija beskonačno duga. Uslijed gubitaka na liniji ($R \neq 0$, $G \neq 0$), postoji gušenje pa se upadni val $U_+ \exp(-\gamma z)$ smanjuje kako napreduje duž linije. Konačno, u vrlo dalekoj točki val će se sasvim prigušiti. Budući da smo pretpostavili da nema diskontinuiteta na liniji nego tek u beskonačnosti, onda neće postojati reflektirani val, pa vrijede relacije za napon i struju na takvoj liniji:

$$U(z) = U_+ e^{-\gamma z}$$

$$I(z) = \frac{\gamma}{R + j\omega L} e^{-\gamma z}.$$

Napon i struja na liniji su u fazi, a njihov omjer:

$$\frac{U(z)}{I(z)} = Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

jednak je karakterističnoj impedanciji linije. Vidimo da je to zaista impedancija u bilo kojoj točki linije (ne ovisi o položaju z na liniji) u slučaju postojanja samo jednog vala. Možemo stoga reći i da se beskonačna linija ponaša kao idealno prilagođena prijenosna linija proizvoljne duljine (ili obrnuto). Napomenimo još da se omjer U/I (ekvivalentno E/H) odnosi na ravninu okomitu na smjer širenja vala, gdje je U napon u toj ravnini, a I struja kroz ravninu.

Općenito, omjer napona i struje na nekom mjestu $z = l - x$ linije je impedancija u toj točki linije:

$$Z(z) = \frac{U(z)}{I(z)} = Z_0 \frac{1 + \frac{U_-}{U_+} e^{2\gamma z}}{1 - \frac{U_-}{U_+} e^{2\gamma z}} = Z_0 \frac{1 + \frac{U_-}{U_+} e^{2\gamma l} e^{-2\gamma x}}{1 - \frac{U_-}{U_+} e^{2\gamma l} e^{-2\gamma x}} = Z_0 \frac{1 + \Gamma_L e^{-2\gamma x}}{1 - \Gamma_L e^{-2\gamma x}} = Z(x),$$

$$Z(x) = Z_0 \frac{1 + |\Gamma_L| e^{j\varphi_L} e^{2\gamma x}}{1 - |\Gamma_L| e^{j\varphi_L} e^{2\gamma x}},$$

odnosno:

$$Z(x) = Z_0 \frac{1 + |\Gamma_L| e^{-2\alpha x} e^{j\psi}}{1 - |\Gamma_L| e^{-2\alpha x} e^{j\psi}},$$

gdje je $\psi = -2\beta x + \varphi_L$.

Želimo ovdje naglasiti da se i problematika linija s gubicima može izučavati s pomoću Smithovog dijagrama. Međutim treba uočiti da različitim točkama linije odgovaraju različiti koeficijenti refleksije Γ i to ne samo po argumentu kao što je to slučaj s linijom bez gubitaka, nego i po apsolutnoj vrijednosti zbog faktora $e^{-2\alpha x}$. To znači da kretanje po prijenosnoj liniji odgovara kretanje po logaritamskim spiralama u Smithovom

dijagramu. Pri tome, naravno, moramo poznavati konstantu gušenja α . Koeficijent refleksije na liniji je:

$$\Gamma(x) = \Gamma(l)e^{-2\gamma x} = \Gamma(l)e^{-2\alpha x}e^{-j2\beta x}$$

Dakle, udaljavanjem od tereta prema generatoru koeficijent refleksije na liniji, odnosno njegova apsolutna vrijednost smanjuje se eksponencijalno.

Primjer.

Treba odrediti ulaznu impedanciju linije sljedećih karakteristika: karakteristična impedancija $Z_0 = 50 \Omega$, električna duljina $l = 0,2\lambda$ i gušenja $\alpha l = 0,15$ nepera. Impedancija opterećenja na kraju linije je $Z_p = (100 + j70) \Omega$.

Najprije riješimo ovaj primjer kao da nema gušenja. Dakle:

$$Z_{pn} = \frac{100 + j70}{50} = 2 + j1,4$$

određuje točku T_p na Smithovom dijagramu na sl. 18. Za istu liniju ali bez gubitaka ulazna impedancija Z_{ul} bila bi pomaknuta na kružnici konstantnog koeficijenta refleksije $|\Gamma| = konst.$ (crtkano) u odnosu na impedanciju tereta Z_p za kut:

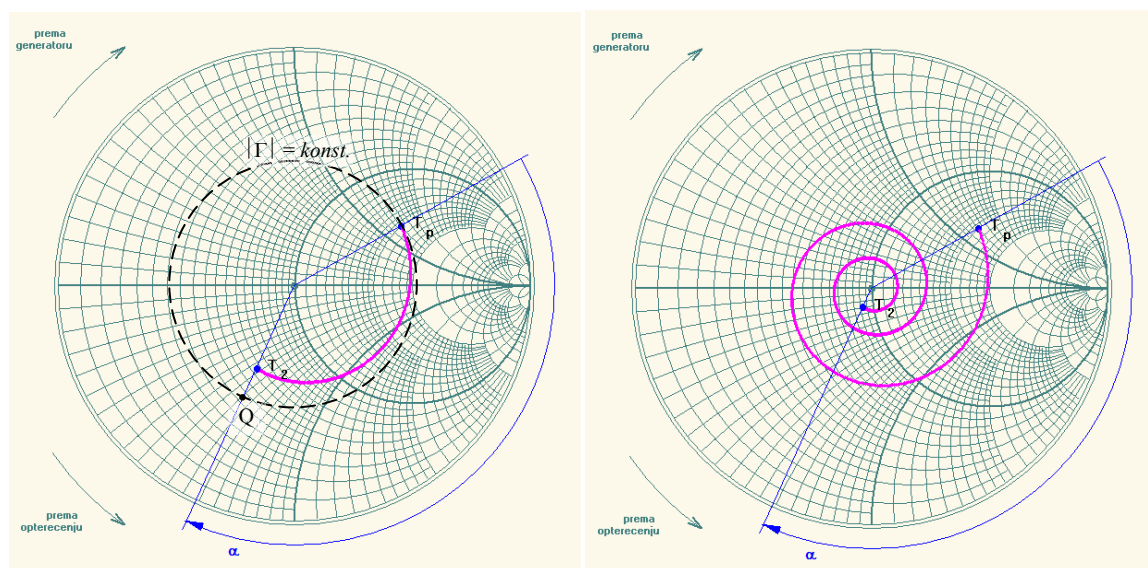
$$\alpha = \beta l = \frac{2\pi}{\lambda} l = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 0,2\lambda = 72^\circ$$

prema generatoru, odnosno u negativnom smjeru. Tako dolazimo u točku Q na kružnici. Međutim, zbog gušenja koeficijenta refleksije na liniji za faktor:

$$e^{-2\alpha l} = e^{-2 \cdot 0,15} = 0,742$$

je:

$$|\Gamma_{ul}| = 0,742 |\Gamma(l)|.$$



Slika 18. Rješenje primjera na Smithovom dijagramu za prijenosnu liniju s gubicima duljine $0,2\lambda$ (lijevo) odnosno duljine $1,2\lambda$ (desno)

Skratimo li u točki Q radijus kružnice 0,742 puta dolazimo do ulazne impedancije:

$$Z_{uln} = 0,575 - j0,47 \Rightarrow Z_{ul} = (28,75 - j23,5) \Omega.$$

Primijetimo da je teret induktivnog karaktera, a da se s ulaza vidi impedancija kapacitivnog karaktera. Slučaj duljine linije 1,2 valne duljine prikazan je na sl. 18 desno.

Usporedimo sada faznu brzinu linije bez gubitaka s faznom brzinom linije s malim gubicima ($R \ll \omega L$, $G \ll \omega C$). U prvom slučaju je:

$$\alpha = 0 \Rightarrow \gamma = j\beta = j \frac{\omega}{v} = j\omega\sqrt{LC}.$$

Fazna brzina elektromagnetskog vala na prijenosnoj liniji bez gubitaka je:

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}.$$

Dakle, *fazna brzina ne ovisi o frekvenciji*.

Promotrimo konstantu propagacije u drugom slučaju:

$$\gamma = \alpha + j\beta = \left[(R + j\omega L)(G + j\omega C) \right]^{\frac{1}{2}} = j\omega\sqrt{LC} \left[\left(1 + \frac{R}{j\omega L} \right) \left(1 + \frac{G}{j\omega C} \right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Razvijmo ovaj izraz u binomni red uz $R \ll \omega L$ i $G \ll \omega C$:

$$\gamma = \alpha + j\beta = j\omega\sqrt{LC} \left[\left(1 + \frac{R}{j2\omega L} + \frac{R^2}{8\omega^2 L^2} + \dots \right) \left(1 + \frac{G}{j2\omega C} + \frac{G^2}{8\omega^2 C^2} + \dots \right) \right].$$

Zanemarujući članove iza trećeg člana unutar zagrada dobivamo:

$$\gamma = \alpha + j\beta \doteq j\omega\sqrt{LC} \left[1 - \frac{j}{2\omega} \left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right) + \frac{1}{8\omega^2} \left(\frac{R}{L} - \frac{G}{C} \right)^2 \right],$$

iz čega slijede približne relacije za konstantu gušenja:

$$\alpha = \frac{\sqrt{LC}}{2} \left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right) = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{G}{2} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{R}{2Z_0'} + \frac{GZ_0'}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{R}{Z_0'} + \frac{G}{Y_0'} \right),$$

gdje je:

$$Z_0' = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{Y_0'}$$

karakteristična impedancija a Y_0' karakteristična admitancija ovakve linije ali za slučaj bez gubitaka, i faznu konstantu:

$$\beta = \omega\sqrt{LC} \left[1 + \frac{1}{8\omega^2} \left(\frac{R}{L} - \frac{G}{C} \right)^2 + \dots \right] = \beta_0 \left[1 + \frac{1}{8\omega^2} \left(\frac{R}{L} - \frac{G}{C} \right)^2 + \dots \right],$$

gdje je $\beta_0 = \omega\sqrt{LC}$ fazna konstanta linije bez gušenja.

Vidimo da *konstanta gušenja prijenosne linije s malim gubicima ovisi isključivo o parametrima linije i nije funkcija frekvencije*. Znači da će se sve frekvencije iz spektra signala koji se propagira linijom podjednako gušiti (uz pretpostavku da nema elektromagnetskog zračenja). Međutim, *fazna konstanta je ovisna o frekvenciji* (efekt drugog reda). To znači da je i fazna brzina:

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \left[1 + \frac{1}{8\omega^2} \left(\frac{R}{L} - \frac{G}{C} \right)^2 + \dots \right]$$

ovisna o frekvenciji. Ova činjenica je uzrok izobličenja signala i u telekomunikacijama se nastoji smanjiti njezin utjecaj. To je moguće ako je ispunjen tzv. *Heavisideov uvjet*:

$$\boxed{\frac{R}{L} = \frac{G}{C}}.$$

Razmotrimo i karakterističnu impedanciju linije s malim gubicima:

$$Z_0 = \left[\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C} \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \left[\frac{1 - \frac{R}{j\omega L}}{1 - \frac{G}{j\omega C}} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Razvijmo dobiveni izraz u red potencija i zanemarimo članove drugog i viših redova:

$$\frac{R}{\omega L} \ll 1 \& \frac{G}{\omega C} \ll 1 \Rightarrow Z_0 \doteq \sqrt{\frac{L}{C}} \left(1 - \frac{jR}{2\omega L} \right) \left(1 + \frac{jG}{2\omega C} \right) \approx \sqrt{\frac{L}{C}} \left[1 - \frac{j}{2\omega} \left(\frac{R}{L} - \frac{G}{C} \right) \right].$$

Vidimo da je u prvoj aproksimaciji karakteristična impedancija linije kompleksna. Međutim, za dovoljno visoke frekvencije utjecaj reaktancije je malen. Reaktancija je približno jednaka nuli ukoliko je ispunjen Heavisideov uvjet, pa je u tom slučaju:

$$\frac{R}{L} = \frac{G}{C} \Rightarrow Z_0 \doteq Z_0'.$$

Energija na prijenosnoj liniji

Razmatranja o energiji na prijenosnoj liniji provest ćemo na odsječku linije duljine $\Delta z = z_2 - z_1$, pri čemu je $z_2 > z_1$. Pretpostavljamo da energija ulazi u odsječak na mjestu z_1 , a izlazi na mjestu z_2 . Energija koja uđe u promatrani odsječak bit će veća od one koja izađe iz njega za gubitke u tom odsječku i energiju koja će se nagomilati u njemu, odnosno u elektromagnetskom polju reaktivnih elemenata tog osječka. Da bi to pokazali

napišimo jednadžbe homogene prijenosne linije s harmonijskom uzbuđom i uzmimo konjugiranom kompleksnu vrijednost druge jednadžbe i pomnožimo:

$$\frac{dU}{dz} = -(R + j\omega L)I \Big| \cdot I^*$$

$$\frac{dI}{dz} = -(G + j\omega C)U \Big| \cdot U^*$$

Zbroj tako dobivenih jednadžbi je:

$$\frac{dU}{dz} I^* + \frac{dI^*}{dz} U = -(R + j\omega L)II^* - (G + j\omega C)UU^*.$$

Uočimo da je:

$$\frac{dU}{dz} I^* + \frac{dI^*}{dz} U = \frac{d(UI^*)}{dz}$$

te pomnožimo posljednji izraz s $\frac{1}{2}$ i integrirajmo po z u granicama od z_1 do z_2 . Tada je:

$$\frac{U(z_1)I^*(z_1)}{2} = \frac{U(z_2)I^*(z_2)}{2} + \frac{1}{2} \int_{z_1}^{z_2} [(R + j\omega L)II^* + (G + j\omega C)UU^*] dz.$$

Gornji izraz predstavlja prosječnu snagu na mjestu z_1 prijenosne linije. Analizirajmo поближе taj izraz. Napišimo ga u obliku:

$$\frac{U(z_1)I^*(z_1)}{2} = \frac{U(z_2)I^*(z_2)}{2} + \frac{1}{2} \int_{z_1}^{z_2} (RII^* + GUU^*) dz + \frac{j\omega}{2} \int_{z_1}^{z_2} [(LII^* + CUU^*)] dz.$$

Vidimo da se kompleksna snaga, koja ulazi u razmatrani odsječak linije, troši dijelom na zagrijavanje vodiča i dielektrika, dijelom se akumulira u električnom i magnetskom polju, a ostatak izlazi na mjestu z_2 odsjeka. Ovim je pokazano ono što smo tvrdili u početku.

Gušenje na prijenosnoj liniji

Recimo nešto više o gušenju na prijenosnim linijama. Do sada smo imali izraz za gušenje:

$$\alpha = \left\{ \frac{1}{2} \left[\sqrt{(RG - \omega^2 LC) + \omega^2 (LG + RC)^2} + RG - \omega^2 LC \right] \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Uzimajući aproksimaciju za linije s malim gubicima dobivamo približnu vrijednost konstante gušenja:

$$R \ll \omega L \text{ \& } G \ll \omega C \Rightarrow \alpha = \frac{R}{2Z_0'} + \frac{G}{2} Z_0'.$$

Kao što se vidi iz dobivenog izraza, konstanta gušenja je izražena pomoću parametara linije. Jedinica za konstantu gušenja je neper po metru (N/m), odnosno $[\alpha(\text{N/m}) \times 8,686]$ decibela po metru ($1\text{N} = 8,686 \text{ dB}$). Budući da je gušenje prema definiciji smanjenje amplitude za iznos $e^{-\alpha}$ po jedinici duljine linije, promotrimo ponovo val kojim putuje samo u jednom smjeru, primjerice upadni val:

$$U(z) = U_+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z},$$

$$I(z) = \frac{U_+}{Z_0} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}.$$

Srednja vrijednost radne snage u nekoj točki z linije može se izraziti (u slučaju upadnog vala):

$$P = \text{Re} \left[\frac{UI^*}{2} \right] = \frac{|U_+|^2}{2 \text{Re}[Z_0]} e^{-2\alpha z}.$$

Izračunajmo sada koliko se promijenila snaga po duljini linije. Ta promjena je:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta \left(\frac{|U_+|^2}{2 \text{Re}[Z_0]} e^{-2\alpha z} \right)}{\Delta z} = \frac{d}{dz} \left(\frac{|U_+|^2}{2 \text{Re}[Z_0]} e^{-2\alpha z} \right) = -2\alpha P = \frac{dP}{dz},$$

iz čega slijedi da je:

$$\boxed{\alpha = -\frac{\frac{dP}{dz}}{2P}}.$$

Budući je:

$$\frac{d(UI^*)}{dz} = -(R + j\omega L)II^* - (G + j\omega C)UU^*,$$

uvrstimo li za napon i struju samo upadni val imamo:

$$\frac{d(UI^*)}{dz} = -(R + j\omega L) \frac{|U_+|^2}{2Z_0 Z_0^*} e^{-2\alpha z} - (G + j\omega C) |U_+|^2 e^{-2\alpha z}.$$

Kako je:

$$\frac{dP}{dz} = \frac{d}{dz} \left[\text{Re} \frac{UI^*}{2} \right] = -\frac{R}{2} \frac{|U_+|^2}{|Z_0|^2} e^{-2\alpha z} - \frac{G}{2} |U_+|^2 e^{-2\alpha z},$$

slijedi za konstantu gušenja izraz:

$$\alpha = + \frac{\frac{|U_+|^2}{2} \left(\frac{R}{|Z_0|^2} + G \right) e^{-2\alpha z}}{2 \operatorname{Re} \frac{UI^*}{2}} = \frac{\frac{1}{2} \cancel{\frac{|U_+|^2}{2}} \left(\frac{R}{|Z_0|^2} + G \right) \cancel{e^{-2\alpha z}}}{\cancel{2} \frac{\cancel{|U_+|^2}}{\cancel{2} \operatorname{Re} Z_0} \cancel{e^{-2\alpha z}}} = \frac{1}{2} \frac{\frac{R}{|Z_0|^2} + G}{\frac{1}{\operatorname{Re} Z_0}}.$$

Budući da je za:

$$R \ll \omega L \text{ \& } G \ll \omega C \Rightarrow Z_0 \doteq Z_0' \left[1 - \frac{j}{2\omega} \left(\frac{R}{L} - \frac{G}{C} \right) \right],$$

znači:

$$\operatorname{Re} Z_0 \doteq Z_0' = \sqrt{\frac{L}{C}},$$

$$|Z_0|^2 = |Z_0'|^2 + \frac{|Z_0'|^2}{4\omega^2} \left(\frac{R}{L} - \frac{G}{C} \right)^2 \approx Z_0'^2 = \frac{L}{C}.$$

Stoga je:

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{R}{Z_0'^2} + G}{\frac{1}{Z_0'}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{R}{Z_0'} + G Z_0' \right),$$

što smo dobili i prije. Primijetimo da su ove aproksimacije to opravdanije što je frekvencija viša, uz pretpostavku da nema zračenja u obliku elektromagnetskih valova od promatrane prijenosne linije.

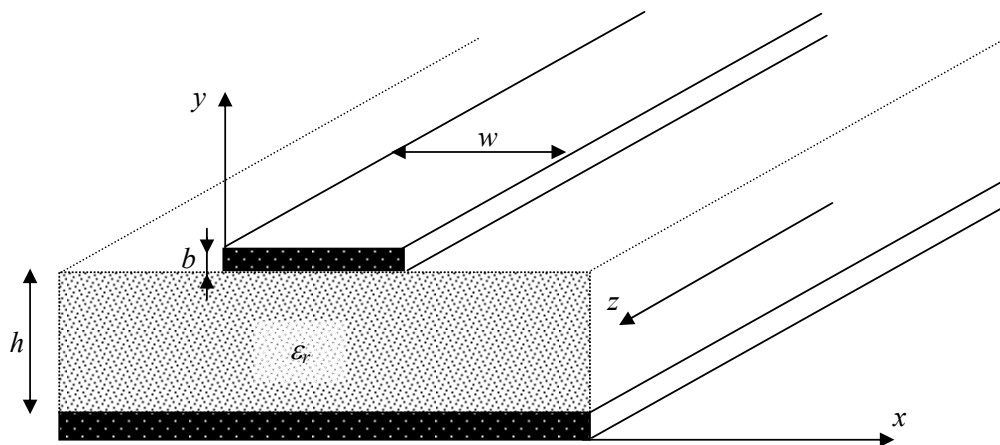
2. Trakaste linije

Imajući u vidu značenje mikrovalne linije kao neizostavnog dijela svakog mikrovalnog sklopa kojom se realiziraju pasivni elementi mreže, jasno je da se koriste različite konfiguracije linija, primjerice koaksijalni valovod. U gradnji mikrovalnih integriranih sklopova (MIC) često se koristi trakasta linija koja može imati različite oblike. To je posebno slučaj kod sklopova koji koriste poluvodičke komponente, dakle male snage, u koje se planarne linije mogu jednoznačno i elegantno ugraditi. Valovodi se koriste kod većih snaga i frekvencija viših od cca 2 GHz.

Osnovni tipovi trakastih linija su sljedeći.

1. Mikrotrakasta linija

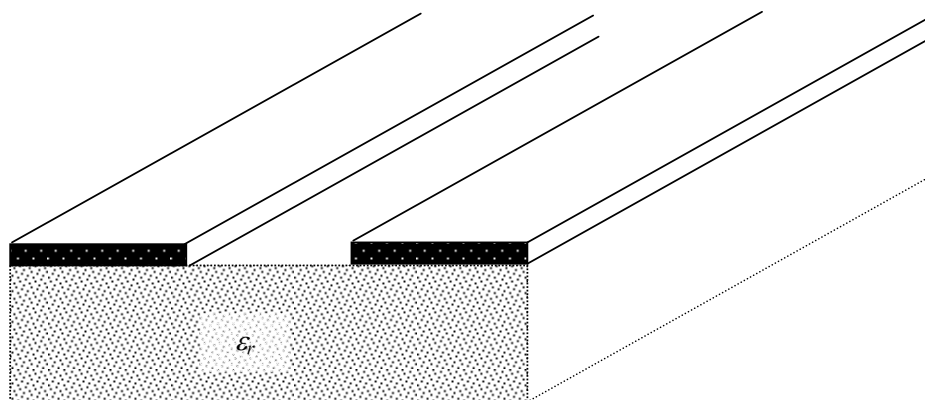
Sastoji se od dielektrične podloge (supstrata) koji je metaliziran po čitavoj jednoj površini, a tanka metalna vrpca je na drugoj površini, kao što je prikazano na sl. 1.



Slika 1. Mikrotrakasta linija (microstrip line)

2. Linija s prorezom

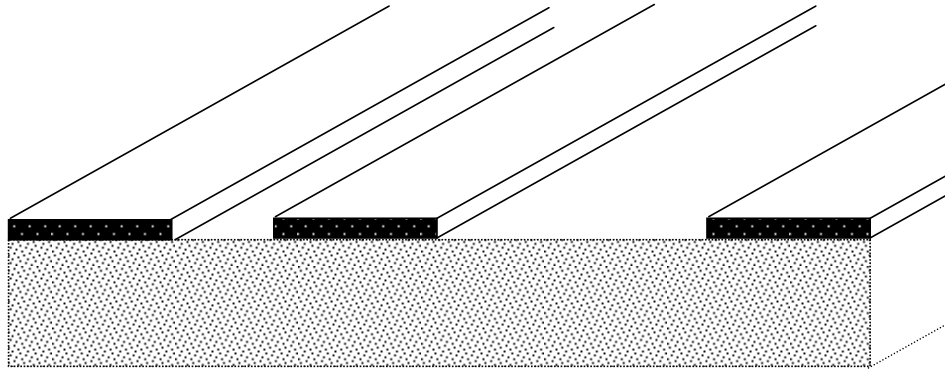
Kod linije s prorezom su vodiči linije u istoj ravnini, kao što se vidi na sl. 2.



Slika 2. Linija s prorezom (slot line)

3. Koplanarni valovod

Koplanarni valovod prikazan je na sl. 3.



Slika 3. *Koplanarni valovod (coplanar waveguide)*

Sve ove planarne linije su nehomogene jer se elektromagnetski val propagira dijelom kroz dielektričnu podlogu ($\epsilon_r \neq 1$), a dijelom kroz zrak. Propagacija se stoga odvija s pomoću hibridnih modova, koji imaju svih šest komponenti elektromagnetskog polja (i transverzalne i longitudinalne). Kod mikrotrakaste linije su međutim longitudinalna komponenta E_z električnog i longitudinalna komponenta H_z magnetskog polja vrlo male amplitude, pa se može smatrati da se val propagira kvazi-transverzalnim elektromagnetskim modom (kvazi-TEM).

Mikrotrakasta linija

Karakteristične veličine odnosno parametri mikrotrakaste linije su sljedeći:

- h – debljina dielektrične podloge,
- ϵ_r – relativna dielektrična konstanta (ovisi o primjeni, a često je 10 ili više),
- w – širina trake, koja je istog reda veličine kao i h ,
- b – debljina trake ($b/h \ll 1$).

Električno polje na nekom presjeku linije u nekom trenutku vremena je kao na sl. 4. Val se propagira s obzirom na transverzalni diskontinuitet dijelom kroz zrak, a dijelom kroz dielektričnu podlogu. Ako bi se i pretpostavilo da je elementarni mod koji se propagira linijom TEM, fazna brzina vala:

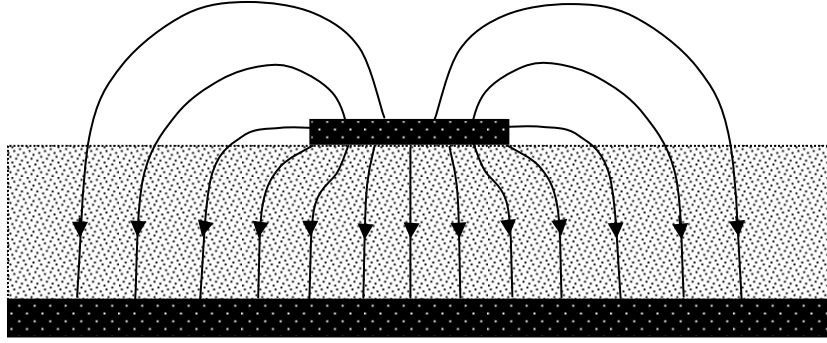
$$v_p = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}},$$

je uslijed različite relativne dielektrične konstante dielektrika i zraka različita u različitim dijelovima linije. Problem bi bilo lakše riješiti kada bi imali istu liniju, ali okruženu beskonačnim homogenim dielektrikom.

Na granici dielektrik - zrak mora vrijediti da su tangencijalne komponente na granici iste u oba sredstva:

$$y = h \Rightarrow \begin{cases} E_{x,diel.} = E_{x,zrak} \\ H_{y,diel.} = H_{y,zrak} \end{cases} \quad (\bullet)$$

Maxwellove jednadžbe vrijede svugdje, a za homogene sredine bez gubitaka:



Slika 4. Električno polje u presjeku mikrotrakaste linije

$$\nabla \times \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\vec{e}_x E_x + \vec{e}_y E_y + \vec{e}_z E_z).$$

Izjednačavajući x komponente vektora u posljednjoj jednadžbi dobivamo:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t}.$$

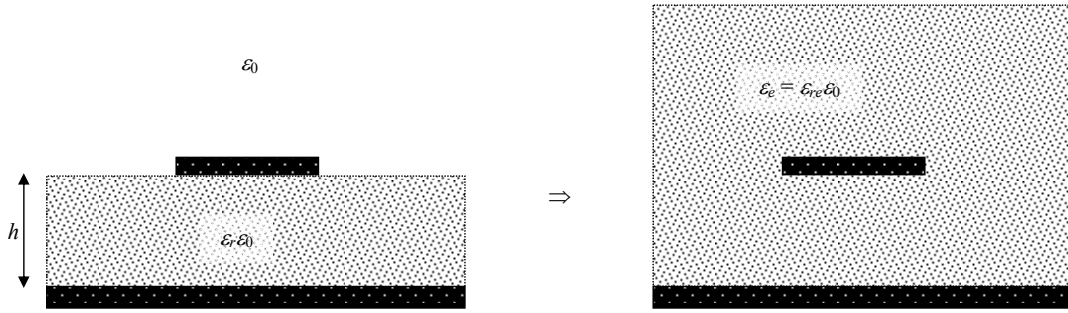
Dakle na granici vrijedi:

$$y = h \Rightarrow \begin{cases} \left. \frac{\partial H_z}{\partial y} \right|_{diel.} - \left. \frac{\partial H_y}{\partial z} \right|_{diel.} = \varepsilon \left. \frac{\partial E_x}{\partial t} \right|_{diel.} \\ \left. \frac{\partial H_z}{\partial y} \right|_{zrak} - \left. \frac{\partial H_y}{\partial z} \right|_{zrak} = \varepsilon_0 \left. \frac{\partial E_x}{\partial t} \right|_{zrak} \end{cases}.$$

Zbog (•) imamo:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial H_z}{\partial y} \right|_{diel.} - \left. \frac{\partial H_y}{\partial z} \right|_{diel.} &= \varepsilon_r \varepsilon_0 \left. \frac{\partial E_x}{\partial t} \right|_{diel.} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \left. \frac{\partial E_x}{\partial t} \right|_{zrak} = \varepsilon_r \left. \frac{\partial H_z}{\partial y} \right|_{zrak} - \varepsilon_r \left. \frac{\partial H_y}{\partial z} \right|_{zrak}, \\ \left. \frac{\partial H_z}{\partial y} \right|_{diel.} - \varepsilon_r \left. \frac{\partial H_z}{\partial y} \right|_{zrak} &= (1 - \varepsilon_r) \frac{\partial H_y}{\partial z}. \end{aligned}$$

Za $\varepsilon_r = 1$ i $H_y \neq 0$ desna strana je različita od nule, pa stoga i lijeva, što opet znači da je longitudinalna (aksijalna) komponenta magnetskog polja H_z različita od nule. Tako se može zaključiti da se uslijed postojanja granice zrak – dielektrik ne može prostirati samo TEM mod koji bi bio bez aksijalne komponente magnetskog polja. Međutim da se pokazati da su te komponente malene. Istaknimo da se aksijalna komponenta H_z javlja i u slučaju da pokušamo zadovoljiti gornju jednadžbu na način da transverzalnu komponentu H_y magnetskog polja izjednačimo s nulom, odnosno da bi postojalo magnetsko polje u tom slučaju mora postojati i H_z komponenta zbog solenoidalnog karaktera magnetskog polja (divergencija magnetskog polja jednaka je nuli).



Slika 5. Ekvivalentni model mikrotrakaste linije

U slučaju da je cijeli prostor ispunjen homogenim dielektrikom, tada ne bi bilo problema određivanju fazne brzine vala na liniji, jer bi val bio zaista TEM. Stoga se problem tretira na sljedeći način. Razmatra se fiktivna linija istih dimenzija kao i stvarna ali gdje je traka "utopljena" u dielektrik, kao što je prikazano na sl. 5. Potom se odredi zamjenska veličina, ekvivalentna relativna dielektrična konstanta ε_e koja ovisi o relativnoj dielektričnoj konstanti ε_r i debljini h podloge:

$$\varepsilon_e = f(\varepsilon_r, h).$$

Dakle, kad bi imali mikrotrakastu liniju čiji je dielektrik čisti vakuum ($\varepsilon_r = 1$) imali bi TEM mod i brzinu propagacije:

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}.$$

Uzmimo da je kapacitet po jedinici duljine takve linije C_0 i da je isti kao u elektrostatičkom slučaju. Zanemarujući gubitke koji se mogu pojaviti na liniji, njena karakteristična impedancija bila bi:

$$Z_0 = \frac{1}{v_0 C_0}.$$

Ako sada pretpostavimo fiktivnu mikrotrakastu liniju gdje je cijeli prostor ispunjen dielektrikom relativne permitivnosti ε_r tako da je traka "utopljena" u taj medij vrijedi zbog $\mu_r \cong 1$:

$$v_d = \frac{v_0}{\sqrt{\varepsilon_r}}, \quad C_d = \varepsilon_r C_0 \quad \text{i} \quad Z_d = \frac{1}{v_d C_d} = \frac{Z_0}{\sqrt{\varepsilon_r}}.$$

Kod realne mikrostrip linije gdje je između trake i uzemljene ravnine dielektrik relativne permitivnosti $\varepsilon_r > 1$ a iznad trake zrak $\varepsilon_r \approx 1$ kao na sl. 5 lijevo, može se pretpostaviti da se vrijednosti fazne brzine vala na liniji v_m , kapaciteta po duljini linije C_m i karakteristične impedancije Z_m nalaze negdje između navedenih vrijednosti koje bi bile da je cijeli prostor vakuum, odnosno ispunjen homogenim i izotropnim dielektrikom:

$$\begin{aligned} v_d &< v_m < v_0, \\ C_d &> C_m > C_0, \\ Z_d &< Z_m < Z_0. \end{aligned}$$

Nadalje se može definirati:

$$v_m = \frac{v_0}{\sqrt{\epsilon_{ref}}}, \quad C_m = \epsilon_{ref} C_0 \quad \text{i} \quad Z_m = \frac{Z_0}{\sqrt{\epsilon_{ref}}},$$

pri čemu je: $1 < \epsilon_{ref} < \epsilon_r$. Efektivna dielektrična konstanta se može definirati kao:

$$\epsilon_{ref} = 1 + q(\epsilon_r - 1),$$

pri čemu je:

$$q = q(h, \epsilon_r) < 1.$$

Uobičajene su aproksimacije za efektivnu dielektričnu konstantu za različite debljine podloge h i širine trake w . Pri tome se pojavljuju aproksimacije različitih autora od kojih ćemo navesti jednu od najčešće korištenih. Za različite relativne širine trake vrijedi, uz pretpostavku da je traka beskonačno tanka ($b = 0$):

$$\frac{w}{h} > 1 \Rightarrow \begin{cases} \epsilon_{ref} = \frac{1}{2}(\epsilon_r + 1) + \frac{1}{2}(\epsilon_r - 1) \left(1 + 12 \frac{h}{w}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ Z_m = \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_{ref}}} \left[\frac{w}{h} + 1,393 + 0,667 \ln \left(1,444 + \frac{w}{h}\right) \right]^{-1} \quad (\Omega) \end{cases},$$

$$\frac{w}{h} \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} \epsilon_{ref} = \frac{1}{2}(\epsilon_r + 1) + \frac{1}{2}(\epsilon_r - 1) \left[\left(1 + 12 \frac{h}{w}\right)^{-\frac{1}{2}} + 0,04 \left(1 - \frac{w}{h}\right)^2 \right] \\ Z_m = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_{ref}}} \ln \left(\frac{8h}{w} + \frac{4w}{h} \right) \quad (\Omega) \end{cases}.$$

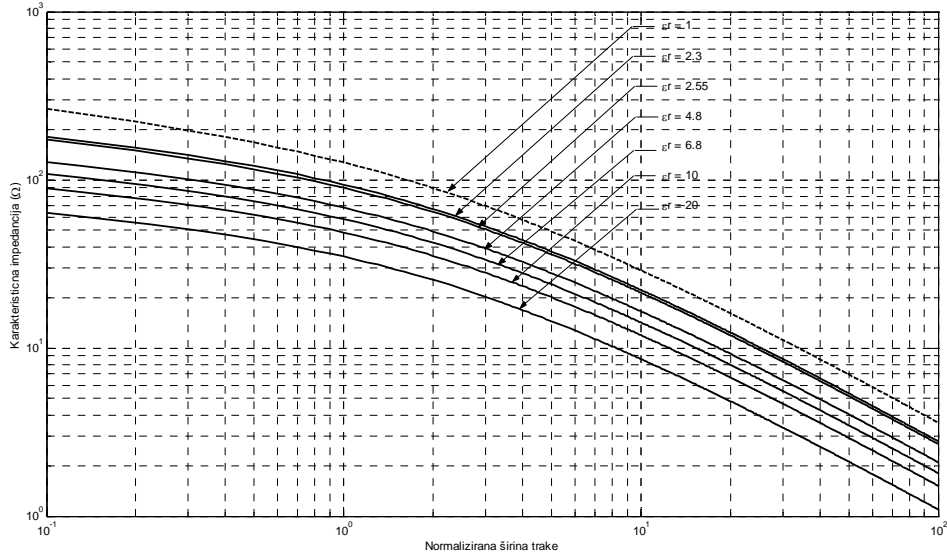
Dane relacije ne uzimaju u obzir malu, ali konačnu debljinu b trake. Relacija koja bi to uzela u obzir mogla bi umjesto stvarne širine trake w uzeti efektivnu širinu w_{ef} zamišljene beskonačno tanke trake koja ju korigira za zadanu debljinu b :

$$w_{ef} = w + \frac{b}{\pi} \left(1 + \ln \frac{2x}{b} \right),$$

pri čemu je:

$$x = \begin{cases} h, & \frac{h}{w} > \frac{1}{2\pi} \\ 4\pi w, & \frac{h}{w} \leq \frac{1}{2\pi} \end{cases}.$$

Primijetimo da je za $b = 0$ efektivna širina trake jednaka stvarnoj $w_{ef} = w$. Konačno, trebalo bi uzeti u obzir i činjenicu da su relacije za određivanje linijskog kapaciteta C_0 i funkcije q dobivene metodama elektrostatike, pa su neovisne o frekvenciji. Uzimajući u obzir i frekvencijsku ovisnost (vremenska disperzija signala) može se relativna efektivna permitivnost korigirati kao:



Slika 6. Dijagram karakteristične impedancije mikrotrakaste linije u ovisnosti o normaliziranoj širini trake i permitivnosti podloge

$$\varepsilon_{ref}(f) = \varepsilon_r - \frac{\varepsilon_r - \varepsilon_{ref0}}{1 + G \cdot \left(\frac{f}{f_d}\right)^2}, \quad (\varepsilon_{ref0} = \varepsilon_{ref}(f=0)),$$

gdje je:

$$f_d = \frac{1}{2\mu_0} \cdot \frac{Z_m}{h},$$

a:

$$G = 0,6 + 0,009Z_m.$$

Napomenimo da ako je $f \ll f_d$ tada možemo smatrati da efektivna permitivnost ε_e nije funkcija frekvencije, odnosno da je konstanta (obično se za određivanje frekvencije f_d koristi nomogram ovisno o Z_m i h). Često je potrebno odrediti normaliziranu širinu trake w/h za zahtijevanu karakterističnu impedanciju Z_m . Uz karakterističnu impedanciju slobodnog prostora $Z_0 = 120\pi$, ako je:

$$\frac{w}{h} < 2 \Rightarrow \frac{w}{h} \doteq 4 \left(\frac{1}{2} e^A - e^{-A} \right)^{-1},$$

uz:

$$A = \pi \sqrt{2(\varepsilon_r + 1)} \frac{Z_m}{Z_0} + \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1} \left(0,23 + \frac{0,11}{\varepsilon_r} \right),$$

i:

$$\frac{w}{h} > 2 \Rightarrow \frac{w}{h} \doteq \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r \pi} \left[\ln(B - 1) + 0,39 - \frac{0,61}{\varepsilon_r} \right] + \frac{2}{\pi} [B - 1 - \ln(2B - 1)],$$

uz:

$$B = \frac{\pi}{2\sqrt{\epsilon_r}} \cdot \frac{Z_0}{Z_m}.$$

Ovo znači da, ako se želi dizajnirati mikrotrakastu liniju određene karakteristične impedancije Z_m , može se izračunati faktor A te provjeriti zadovoljava li nejednakost $w > 2h$; ako ne zadovoljava potrebno je izračunati faktor B , te odrediti normaliziranu širinu trake koja mora biti veća od dva.

Uz našu aproksimaciju da se na mikrostrip liniji propagira TEM mod, uz korigiranu efektivnu dielektričnu konstantu vrijedi da su fazna brzina i valna duljina signala koji se propagira na liniji:

$$v_p = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{re}}} \text{ i } \lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_{re}}},$$

pri čemu je λ_0 valna duljina ravnog vala u slučaju njegovog širenja u slobodnom prostoru. Prisjetimo se da efektivna permitivnost ovisi o normaliziranoj širini trake, pa tako to isto vrijedi i za faznu brzinu vala i njegovu valnu duljinu, a posljedično i za faznu konstantu:

$$\beta_g = \frac{2\pi}{\lambda_g}.$$

Da bi imali kompletnu informaciju o karakteristikama linije, treba uzeti u obzir i da su prisutni gubici na liniji, i to u vodiču α_c i u dielektriku α_d . Gubici u vodiču u decibelima po metru duljine linije daju se procijeniti s pomoću relacija:

$$\frac{w}{h} \leq 1 \Rightarrow \alpha_c = 1,38 A_c \frac{R_s}{h Z_m} \cdot \frac{32 - \left(\frac{w_{ef}}{h}\right)^2}{32 + \left(\frac{w_{ef}}{h}\right)^2} \left(\frac{\text{dB}}{\text{m}}\right),$$

$$\frac{w}{h} \geq 1 \Rightarrow \alpha_c = 6,1 \cdot 10^{-5} A_c \frac{R_s Z_m \epsilon_{re}}{h} \cdot \left[\frac{w_{ef}}{h} + \frac{0,667 \frac{w_{ef}}{h}}{\frac{w_{ef}}{h} + 1,444} \right] \frac{32 - \left(\frac{w_{ef}}{h}\right)^2}{32 + \left(\frac{w_{ef}}{h}\right)^2} \left(\frac{\text{dB}}{\text{m}}\right),$$

gdje je:

$$A_c = 1 + \frac{h}{w_{ef}} \left[1 + \frac{1,25}{\pi} \ln \frac{2x}{b} \right],$$

pri čemu je faktor x kao i prije, a površinski otpor R_s ovisi o specifičnoj vodljivosti korištenog metala σ_c i frekvenciji signala f i jednak je:

$$R_s = \sqrt{\frac{\pi \mu f}{\sigma_c}}.$$

U praksi se međutim koristi gornja granica za iznos gubitaka uslijed konačne vodljivosti vodiča:

$$\alpha_{c\max} = \frac{8,686R_s}{wZ_m} \left(\frac{\text{dB}}{\text{m}} \right) = \frac{R_s}{wZ_m} \left(\frac{\text{N}}{\text{m}} \right).$$

Gubitke u dielektriku možemo opisati relacijom:

$$\alpha_d = 27,3 \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r - 1} \cdot \frac{\varepsilon_{re} - 1}{\sqrt{\varepsilon_{re}}} \cdot \frac{1 + \text{tg } \delta}{\lambda_0},$$

pri čemu je δ **kut gubitaka** za dielektrik vodljivosti σ_c :

$$\text{tg } \delta = \frac{\sigma_d}{\omega \varepsilon_r \varepsilon_0}.$$

3. Valovodi

Refleksija i lom ravnog vala na granici dvaju sredstava

Pod pretpostavkom homogenog propagacijskog medija bez gubitaka valnu jednadžbu možemo pisati u obliku:

$$\nabla^2 \vec{R} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial t^2} = \vec{0},$$

pri čemu se ova jednadžba može odnositi na električno ili magnetsko polje, odnosno:

$$\vec{R} \rightarrow \vec{E} \wedge \vec{H}.$$

Ako je uzbuda harmonijska vrijedi:

$$\vec{R}(x, y, z, t) = \vec{R}(x, y, z) e^{j\omega t} \Rightarrow \nabla^2 \vec{R} - \omega^2 \mu\epsilon \vec{R} = \vec{0}$$

Ako se radi o propagacijskom mediju s gubicima tada uzimamo da je:

$$\sigma \neq 0 \Rightarrow \vec{G} = \sigma \vec{E},$$

odnosno osim struja pomaka postoji i konduktivna gustoća struje u smjeru električnog polja pa treba raditi s valnom jednadžbom u obliku:

$$\nabla^2 \vec{R} - \omega^2 \mu\epsilon \left(1 + j \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right) \vec{R} = \vec{0},$$

te tada umjesto realne dielektrične konstante:

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r,$$

imamo kompleksnu dielektričnu konstantu:

$$\epsilon' = \epsilon_0 \epsilon_r' = \epsilon_0 \left(\epsilon_r + j \frac{\sigma}{\omega\epsilon_0} \right).$$

Za sada se ograničavamo na pojednostavljeni slučaj bez gubitaka. Valnu jednadžbu možemo riješiti za slučaj električnog polja, pa uslijed sveze:

$$\text{rot} \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}$$

slijedi rješenje za magnetsko polje. Promotrimo elektromagnetski val koji propagira u smjeru osi z' , kako je prikazano na sl. 1. Smjer propagacije z' određen je s:

$$\vec{v} \times \vec{e}_{z'} = \vec{0},$$

pri čemu je v iznos brzine propagacije vala u promatranom mediju, pa je stoga u ravnini okomitoj na os z' (točka T):

$$\vec{r} \cdot \vec{e}_{z'} = 0.$$

Polarizacija elektromagnetskog vala definirana je smjerom vektora električnog polja u odnosu na ravninu incidencije vala. Ravnina incidencije je ravnina prostiranja elektromagnetskog vala, a određuju je normala na graničnu plohu i vektor smjera propagacije. *Ako je vektor električnog polja paralelan ravnini incidencije govorimo o paralelnoj (vertikalnoj) polarizaciji, a ako je okomit na tu ravninu govorimo o normalnoj (horizontalnoj) propagaciji.*

Rješenje valne jednadžbe u slučaju električnog polja je:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 e^{j(\omega t - \vec{\beta} \cdot \vec{r})} + \vec{E}_2 e^{j(\omega t + \vec{\beta} \cdot \vec{r})},$$

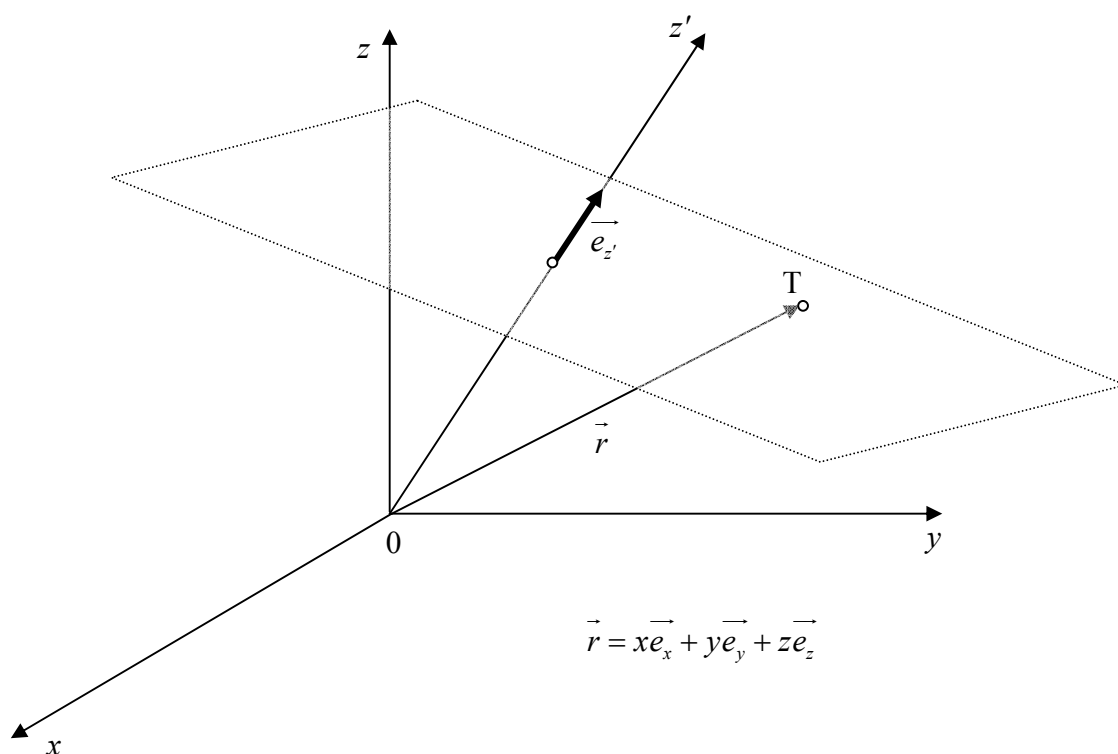
gdje je vektor smjera propagacije:

$$\vec{\beta} = \frac{\omega}{v^2} \vec{v} = \beta_z \vec{e}_{z'},$$

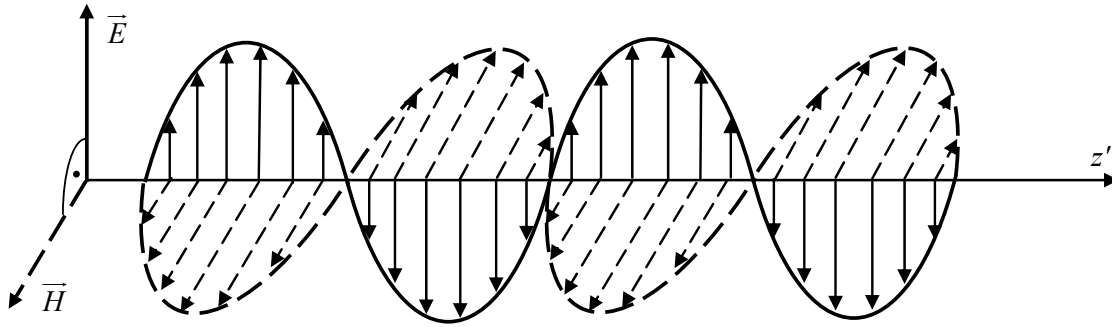
pa je:

$$\vec{\beta} \cdot \vec{r} = \beta_z \vec{e}_{z'} \cdot \vec{r} = \beta_z z'.$$

Vektori \vec{E}_1 i \vec{E}_2 su kompleksne amplitude upadnog i reflektiranog vala i funkcije su isključivo prostornih koordinata. S pomoću rješenja za električno polje korištenjem spomenute Maxwellove jednadžbe dolazimo do rješenja za magnetsko polje u obliku:



Slika 1. Koordinatni sustav za opis geometrije propagacije elektromagnetskog vala



Slika 2. Prikaz ravnog elektromagnetskog vala u fiksnom vremenskom trenutku

$$\vec{H} = \frac{1}{\eta} \left\{ \vec{e}_z \times \left[\vec{E}_1 e^{j(\omega t - \vec{\beta} \cdot \vec{r})} + \vec{E}_2 e^{j(\omega t + \vec{\beta} \cdot \vec{r})} \right] \right\},$$

pri čemu je:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}},$$

karakteristična impedancija sredstva u kojem se propagira elektromagnetski val. Kao što je vidljivo iz njihovih rješenja, električno i magnetsko polje međusobno su u fazi s obzirom na vremensku ovisnost, a prostorno su pomaknuta za kut $\pi/2$, i nema komponente u smjeru propagacije (longitudinalne komponente). Ukoliko postoji samo upadni val, slika vala u prostoru u nekom trenutku vremena izgleda poput one na sl. 2. Pretpostavimo sada da ravni elektromagnetski val koji se propagira u homogenom i izotropnom mediju permitivnosti ε_1 i permeabilnosti μ_1 upada na idealno ravnu i glatku površinu homogenog i izotropnog sredstva permitivnosti ε_2 i permeabilnosti μ_2 , kao što je prikazano na sl. 3. Da bi rješenja za polje zadovoljila granične uvjete mora vrijediti Snellov zakon loma:

$$\frac{\sin \theta''}{\sin \theta} = \frac{v_2}{v_1},$$

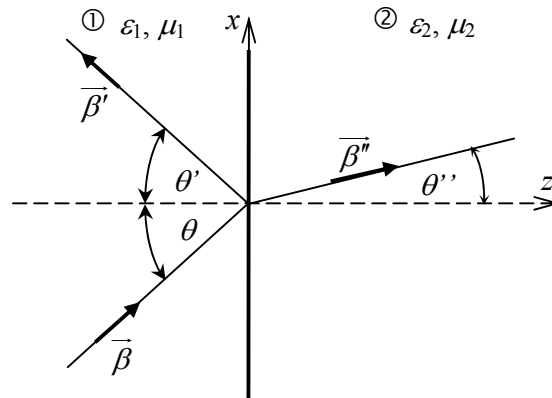
i zakon refleksije zbog:

$$\beta' = \beta \Rightarrow \theta = \theta'.$$

Neka je upadni val polariziran okomito na ravninu incidencije, odnosno:

$$\vec{E} = \vec{e}_y E_y,$$

pa možemo pisati:



Slika 3. Refleksija i lom ravnog vala na granici dvaju sredstava

$$\begin{aligned}\vec{\beta} \cdot \vec{r} &= (\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_z) \cdot (x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z) \Rightarrow \vec{E} = \vec{e}_y E_y = \vec{e}_y E_{y1} e^{-j\beta(x \sin \theta + z \cos \theta)}, \\ \vec{\beta}' \cdot \vec{r} &= (\sin \theta \vec{e}_x - \cos \theta \vec{e}_z) \cdot (x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z) \Rightarrow \vec{E}' = \vec{e}_y E'_y = \vec{e}_y E'_{y1} e^{-j\beta(x \sin \theta - z \cos \theta)}, \\ \vec{\beta}'' \cdot \vec{r} &= (\sin \theta'' \vec{e}_x + \cos \theta'' \vec{e}_z) \cdot (x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z) \Rightarrow \vec{E}'' = \vec{e}_y E''_y = \vec{e}_y E''_{y1} e^{-j\beta(x \sin \theta'' + z \cos \theta'')}.\end{aligned}$$

U dijelu prostora ispunjenim sredstvom 1 ukupno polje je zbroj vektora upadnog i reflektiranog vala, pa je tu ukupno električno polje:

$$\vec{E}_y = \vec{E} + \vec{E}' \Rightarrow E_y = E_{y1} e^{-j\beta(x \sin \theta + z \cos \theta)} \left(1 + \frac{E'_{y1}}{E_{y1}} e^{j2\beta z \cos \theta} \right).$$

Primjenjujući definiciju koeficijenta refleksije kao omjera reflektiranog i upadnog vala imamo:

$$\Gamma(z) = \frac{E'_{y1}}{E_{y1}} e^{j2\beta z \cos \theta},$$

pa možemo pisati konačno:

$$E_y = E_{y1} e^{-j\beta(x \sin \theta + z \cos \theta)} [1 + \Gamma(z)].$$

Očigledno postoji stojni val u smjeru osi z , odnosno okomito na graničnu površinu, i val koji propagira u smjeru osi x i osi z . Ako je sredstvo 2 idealni vodič $\varepsilon_2 = \infty$ tada je polje u tom dijelu prostora jednako nuli ($E'' = 0$). Na granici dvaju sredstava vrijedi $E_y = 0$, odnosno:

$$z = 0 \Rightarrow E'_{y1} = -E_{y1} \ \& \ \Gamma(z = 0) = \frac{E'_{y1}}{E_{y1}} \Rightarrow \Gamma(z = 0) = -1,$$

pa uvrštavajući taj rezultat u prethodnu relaciju za koeficijent refleksije dobivamo:

$$\Gamma(z) = -1 \cdot e^{j2\beta z \cos \theta},$$

što opet uvrštavamo u relaciju za ukupno polje kao funkciju prostornih koordinata i vremena, uvažavajući da je pretpostavljena harmonijska uzbuda:

$$E_y = -2jE_{y1} e^{j(\omega t - \beta x \sin \theta)} \sin(\beta z \cos \theta).$$

Dakle, val se potpuno reflektira na graničnoj plohi ($|\Gamma(z = 0)| = 1$). Ukupno polje u sredstvu 1 možemo interpretirati kao da se sastoji od dva vala: jednog *stojnog vala* u smjeru okomitom na graničnu plohu i jednog *putujućeg vala* sa smjerom širenja duž granične plohe. Val koji se propagira uz graničnu plohu, odnosno u smjeru osi x :

$$\begin{aligned}\omega t - \beta x \sin \theta &= \text{konst.} \left| \frac{d}{dt} \right., \\ \omega - \beta \frac{dx}{dt} \sin \theta &= 0.\end{aligned}$$

Definirajući faznu brzinu kao brzinu napredovanja faze vala u vremenu imamo:

$$v_p = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta \sin \theta}.$$

Kako je $\sin \theta \leq 1$, fazna brzina mjerena duž granične plohe veća je od brzine u smjeru propagacije:

$$v_p \geq v_{pn} = \frac{\omega}{\beta}.$$

Potražimo položaj prve ravnine paralelne s graničnom površinom na kojoj je zadovoljen uvjet $E_y = 0$. To će biti za:

$$-\sin(\beta z \cos \theta) = 0 \Rightarrow -\beta z \cos \theta = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

odnosno uvažavajući da je fazna konstanta:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow -z = \frac{n\pi}{\beta \cos \theta} = \frac{n\lambda}{2 \cos \theta}.$$

Prva nula električnog polja je:

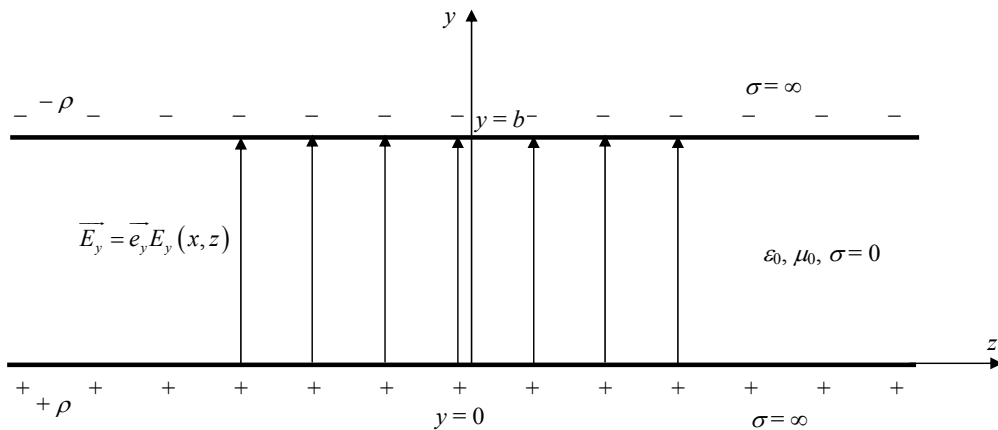
$$-z = \frac{\lambda}{2 \cos \theta} = \frac{\lambda_n}{2},$$

dakle na pola valne duljine od granične površine.

Postavimo sada dvije idealno vodljive ravnine tako da su međusobno razmaknute za b , okomito na smjer električnog polja (os y), odnosno paralelno XZ ravnini, kao što je prikazano na sl. 4. Na vodljivim ravninama $y = 0$ i $y = b$ vrijede granični uvjeti:

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{D} = \zeta \\ \vec{n} \times \vec{H} = \vec{\kappa} \end{cases},$$

pri čemu je ζ površinska gustoća naboja u amper-sekundama po metru kvadratnom, a κ iznos površinske gustoće struje u amperima po metru, a normala je u smjeru osi y , odnosno suprotnom, ovisno o graničnoj površini koju promatramo.



Slika 4. Postupak formiranja valovoda na osnovi fenomena refleksije

Dakle, imamo:

$$y = 0 \Rightarrow \begin{cases} \vec{e}_y \cdot (\varepsilon_0 \vec{E}) = \zeta \\ \vec{e}_y \times \vec{H} = \vec{\kappa} \end{cases} \text{ i } y = b \Rightarrow \begin{cases} \vec{e}_y \cdot (\varepsilon_0 \vec{E}) = -\zeta \\ -\vec{e}_y \times \vec{H} = \vec{\kappa} \end{cases}.$$

Ako sada uzmemo u obzir da u smjeru z postoji stojni val, može se zaključiti da je moguće dobiti propagaciju elektromagnetskog vala u cijevi pravokutnog presjeka duž granične plohe, kao što je prikazano na sl. 5. Valna duljina tog vala koji se propagira strukturom jednaka je:

$$\lambda_g = \lambda_p = \frac{\lambda}{\sin \theta}.$$

Prema sl. 6, imamo:

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sin \theta} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{n\lambda}{2a}\right)^2}}$$

Ako izraz pod korijenom postane jednak nuli tada $\lambda_p \rightarrow \infty$, pa propagacija prestaje, odnosno kritična valna duljina λ_c je za određenu širinu ovako konstruiranog pravokutnog valovoda poprečnog presjeka širine a i visine b :

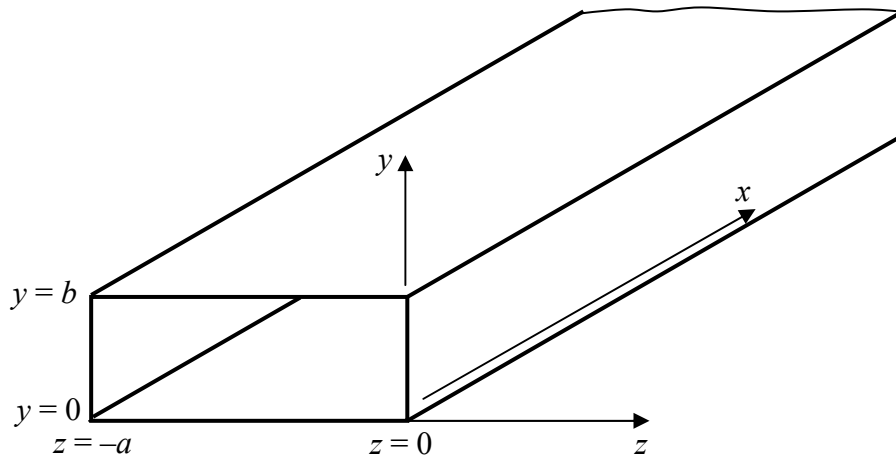
$$\frac{n\lambda_c}{2a} = 1 \Rightarrow \lambda_c = \frac{2a}{n}.$$

U tom slučaju je fazna konstanta u smjeru propagacije (osi x):

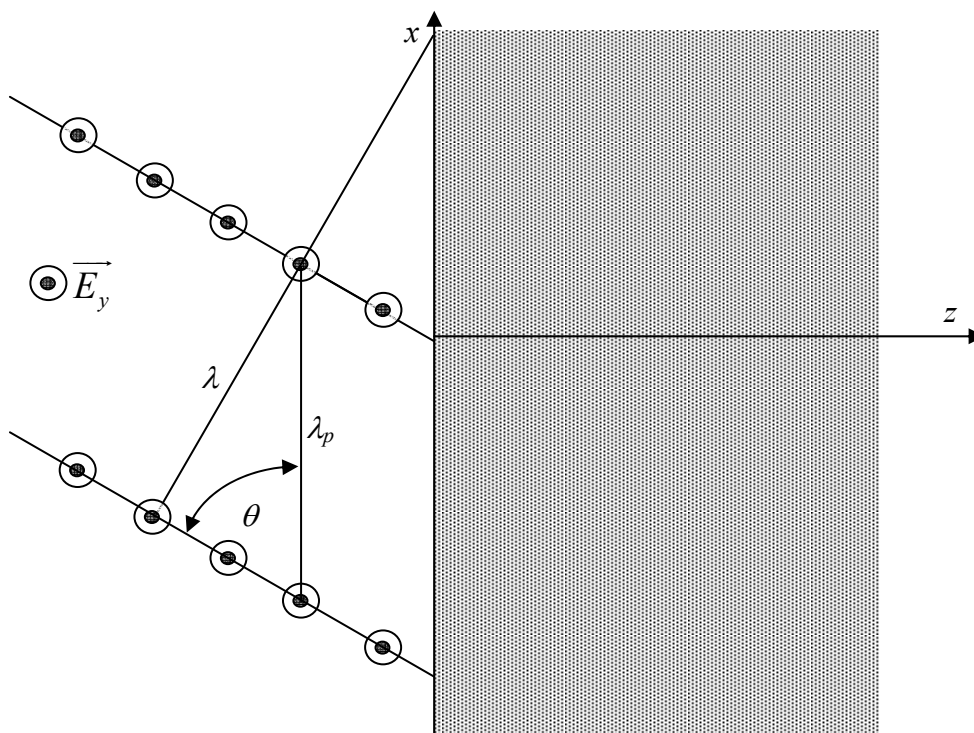
$$\beta_g = \beta \sin \theta = \beta \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \beta \sqrt{1 - \left(\frac{n\lambda}{2a}\right)^2},$$

pa možemo pisati:

$$\beta_g = \beta \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2} \text{ ili } \beta_g = \beta \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2},$$



Slika 5. Pravokutni valovod



Slika 6. Odnos valne duljine upadnog vala i valne duljine vala koji se propagira duž osi x

pri čemu je f_c kritična frekvencija. Ako za valnu duljinu signala u danom sredstvu vrijedi:

$$\lambda = \frac{v}{f} \geq \lambda_c = \frac{2a}{n} \Rightarrow \beta_g = j\beta'_g \Rightarrow e^{j\beta_g x} = e^{-\beta'_g x}, \beta'_g \in \mathbb{R},$$

odnosno imamo gušenje duž osi x .

Homogeni valovodi

U poglavlju 1. pokazali smo da možemo istraživati prijenosne linije analiziranjem elektromagnetskog polja, ali također do istih rezultata dolazimo analizom napona i struje na liniji. U ovom poglavlju želimo pokazati da se prijenosne linije iz prethodnog poglavlja mogu shvatiti kao specijalni slučaj u teoriji idealnih homogenih valovoda. Za razliku od koaksijalne linije gdje kod jedne frekvencije može postojati samo jedan mod propagacije, kod valovoda može postojati i koristi se više modova. U kasnijim razmatranjima pokazat ćemo da svakom od tih modova možemo pridružiti po jednu prijenosnu liniju. Govoreći o homogenim valovodima, uočimo da se njihova homogenost očituje u identičnim presjecima u svim ravninama koje su okomite na smjer propagacije elektromagnetskog vala.

Valovodi s idealno vodljivim stjenkama

Razmatranja o valovodima upućuju nas na rješavanje valnih jednadžbi u valovodu. Kao što je istaknuto njihova rješenja omogućavaju postojanje više modova

propagacije. Također, rješenja tih jednačbi moraju zadovoljiti granične uvjete koji za idealno vodljive stjenke valovoda glase:

$$\begin{aligned}\vec{n} \times \vec{E} &= \vec{0} \Rightarrow E_t = 0 \\ \vec{n} \times \vec{H} &= \vec{\kappa} \\ \vec{n} \cdot \vec{D} &= \zeta \\ \vec{n} \cdot \vec{B} &= 0 \Rightarrow B_n = 0\end{aligned},$$

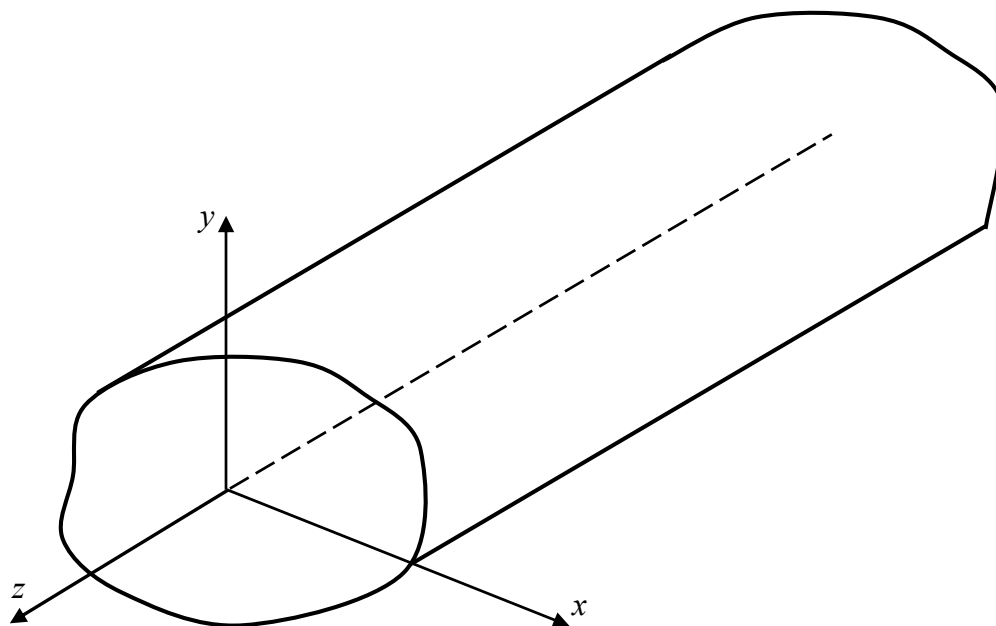
gdje je E_t tangencijalna komponenta električnog polja s obzirom na promatranu površinu, B_n iznos vektora normalne komponente magnetske indukcije, a n iznos vektora normale na tu površinu. Kao što je već navedeno ζ je površinska gustoća naboja, a κ iznos površinske gustoće struje.

Nadalje pretpostavimo da su uzbudna polja kao i kod prijenosnih linija harmonijske funkcije vremena, odnosno:

$$B, D, E, H \sim e^{j\omega t} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = j\omega.$$

U razmatranju pođimo od Maxwellovih jednačbi kojem vrijede u svakoj točki prostora, pa tako i unutar homogenog i izotropnog valovoda:

$$\begin{aligned}\text{rot } \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -j\omega\mu\vec{H}, \\ \text{rot } \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = j\omega\varepsilon\vec{E}, \\ \text{div } \vec{B} &= 0 \Rightarrow \text{div } \vec{H} = 0, \\ \text{div } \vec{D} &= 0 \Rightarrow \text{div } \vec{E} = 0.\end{aligned}$$



Slika 7. Homogeni valovod

Želimo li eliminirati jednog od vektora polja iz gornjih jednadžbi, izračunajmo rotor prve jednadžbe:

$$\text{rot rot } \vec{E} = -j\omega\mu \text{rot } \vec{H} = -j\omega\mu(j\omega\varepsilon\vec{E}) = \omega^2\mu\varepsilon\vec{E}.$$

Budući da vrijedi:

$$\text{rot rot } \vec{E} = \text{grad div } \vec{E} - (\nabla \cdot \nabla) \vec{E}$$

možemo uz upotrebu posljednje Maxwelllove jednadžbe za homogeni valovod pisati:

$$\text{rot rot } \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E} = -\Delta \vec{E},$$

odnosno u Kartezijevim koordinatama:

$$\text{rot rot } \vec{E} = -\Delta \vec{E} = -\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2}.$$

Dakle, možemo pisati Helmholtzovu jednadžbu za električno polje, a slično bi dobili i za magnetsko polje:

$$\begin{aligned}\Delta \vec{E} + \omega^2\mu\varepsilon\vec{E} &= \vec{0}, \\ \Delta \vec{H} + \omega^2\mu\varepsilon\vec{H} &= \vec{0}.\end{aligned}$$

Ove jednadžbe možemo napisati u obliku:

$$\begin{aligned}(\Delta + \omega^2\mu\varepsilon)\vec{E} &= \vec{0}, \\ (\Delta + \omega^2\mu\varepsilon)\vec{H} &= \vec{0}.\end{aligned}$$

Ove jednadžbe vrijede u svakoj točki unutar valovoda, a sada želimo naći rješenje za električno i magnetsko polje unutar valovoda koja zadovoljavaju granične uvjete. Promotrimo homogeni valovod proizvoljnog presjeka kao na sl. 7. Smjer propagacije je smjer osi z , odnosno paralelan je stjenkama valovoda, pa je na granici $E_z = 0$. Presjeci valovoda mogu biti pravokutni, kružni, sa srednjim vodičem i sl. Rješenja će imati oblik:

$$\begin{aligned}\vec{E}(x, y, z, t) &= \vec{E}(x, y)e^{j(\omega t \mp \beta_g z)}, \\ \vec{H}(x, y, z, t) &= \vec{H}(x, y)e^{j(\omega t \mp \beta_g z)}.\end{aligned}$$

Do ovih rješenja može se doći rješavanjem pomoću Fourierove metode za rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, ali i intuitivno. Protumačimo stoga to rješenje. Ono sadrži faktor ovisan o vremenu $e^{j\omega t}$ što je očekivano uzmemo li u obzir da smo već istaknuli da su električno i magnetsko polje harmonijske funkcije vremena. S druge strane, činjenica da se elektromagnetski val propagira u smjeru osi z , a da su svi transverzalni presjeci duž osi z isti, omogućuje na da izdvojimo faktor $e^{\pm j\beta_g z}$ koji karakterizira ovisnost polja o koordinati z .

Činjenica da smo ovisnost funkcije polja o prostornim koordinatama razdvojili na faktore kojih je jedan funkcija isključivo transverzalnih koordinata x i y , a drugi

longitudinalne z odnosno one duž koje se elektromagnetski val propagira, sugerira nam da Laplaceov operator Δ napišemo kao:

$$\Delta = \Delta_{tr} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Tada je, ako promatramo samo upadni val uvažavajući da je polje harmonijsko:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} = -\beta_g^2.$$

Sada možemo Helmholtzovu jednadžbu pojednostavniti kao:

$$\begin{aligned} \left\{ \Delta_{tr} + (\omega^2 \mu \epsilon - \beta_g^2) \right\} \vec{E}(x, y) &= \vec{0}, \\ \left\{ \Delta_{tr} + (\omega^2 \mu \epsilon - \beta_g^2) \right\} \vec{H}(x, y) &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Svaka od ovih vektorskih jednadžbi je sada dvodimenzionalna i predstavlja sistem od tri skalarne jednadžbe, i to za svaku komponentu elektromagnetskog polja ($E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$). Prve tri jednadžbe za električno polje su:

$$\begin{aligned} \left\{ \Delta_{tr} + (\omega^2 \mu \epsilon - \beta_g^2) \right\} E_x(x, y) &= 0, \\ \left\{ \Delta_{tr} + (\omega^2 \mu \epsilon - \beta_g^2) \right\} E_y(x, y) &= 0, \\ \left\{ \Delta_{tr} + (\omega^2 \mu \epsilon - \beta_g^2) \right\} E_z(x, y) &= 0, \end{aligned}$$

a slično je i za magnetsko polje:

$$\begin{aligned} \left\{ \Delta_{tr} + (\omega^2 \mu \epsilon - \beta_g^2) \right\} H_x(x, y) &= 0, \\ \left\{ \Delta_{tr} + (\omega^2 \mu \epsilon - \beta_g^2) \right\} H_y(x, y) &= 0, \\ \left\{ \Delta_{tr} + (\omega^2 \mu \epsilon - \beta_g^2) \right\} H_z(x, y) &= 0. \end{aligned}$$

Dakle, treba riješiti ovaj sistem od šest jednadžbi sa šest nepoznanica. Rješenja sistema moraju zadovoljavati s jedne strane Maxwellove jednadžbe, a s druge strane granične uvjete na stjenkama valovoda.

Da bi došli do tih rješenja najprije vektore električnog i magnetskog polja rastavimo na transverzalne komponente koje su neke vektorske funkcije koordinata x i y i longitudinalne komponente koje su neke skalarne funkcije koordinata x i y . Dakle:

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, y) &= \vec{E}_{tr}(x, y) + \vec{e}_z E_z(x, y), \\ \vec{H}(x, y) &= \vec{H}_{tr}(x, y) + \vec{e}_z H_z(x, y). \end{aligned}$$

Slično za operator ∇ pišemo:

$$\nabla = \nabla_{tr} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Sada prve dvije Maxwellove jednadžbe možemo pisati u obliku:

$$\begin{aligned} \left(\nabla_{tr} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (\vec{E}_{tr} + \vec{e}_z E_z) &= -j\omega\mu (\vec{H}_{tr} + \vec{e}_z H_z), \\ \left(\nabla_{tr} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (\vec{H}_{tr} + \vec{e}_z H_z) &= j\omega\varepsilon (\vec{E}_{tr} + \vec{e}_z E_z). \end{aligned}$$

Iz ovih jednadžbi slijedi veza između transverzalnih i aksijalnih komponenti elektromagnetskog polja u homogenom valovodu:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{tr} &= \frac{1}{\omega^2 \mu \varepsilon - \beta_g^2} \left[\nabla_{tr} \left(\frac{\partial E_z}{\partial z} \right) - j\omega\mu \nabla_{tr} \times \vec{e}_z H_z \right] \\ \vec{H}_{tr} &= \frac{-1}{\omega^2 \mu \varepsilon - \beta_g^2} \left[\nabla_{tr} \left(\frac{\partial H_z}{\partial z} \right) - j\omega\varepsilon \nabla_{tr} \times \vec{e}_z E_z \right] \end{aligned} \quad \text{iii}$$

Dakle, da bi dobili vrijednosti transverzalnih komponenti elektromagnetskog polja potrebno je znati aksijalne komponente električnog i magnetskog polja. Njih pak možemo dobiti rješavajući Helmholtzovu jednadžbu za određenu komponentu polja, konkretno za longitudinalnu komponentu električnog i magnetskog polja:

$$\begin{aligned} \left\{ \Delta_{tr} + (\omega^2 \mu \varepsilon - \beta_g^2) \right\} E_z(x, y) &= 0, \\ \left\{ \Delta_{tr} + (\omega^2 \mu \varepsilon - \beta_g^2) \right\} H_z(x, y) &= 0. \end{aligned}$$

Naravno da će svako od ovih rješenja zadovoljavati Maxwellove jednadžbe, ali također moraju zadovoljiti i *granične uvjete* koje smo napisali na početku, jer i oni proizlaze iz Maxwellovih jednadžbi. Naime, već smo uočili da, uslijed toga što na graničnoj površini vrijedi:

$$\vec{n} \times \vec{E} = \vec{0},$$

slijedi da je tangencijalna komponenta električnog polja jednaka nuli, odnosno $E_z = 0$. Nadalje, iz graničnog uvjeta:

$$\vec{n} \cdot \vec{B} = 0,$$

slijedi da je normalna komponenta magnetske indukcije jednaka nuli, odnosno $B_n = 0$, što, uzimajući u obzir da je normala na graničnu površinu okomita na smjer propagacije vala, kod izotropnih sredina znači i da je normalna komponenta magnetskog polja jednaka nuli, pa na granici vrijedi:

iii Namjerno je učinjena određena nedosljednost u ovom izrazu. Naime iako smo već istakli da je:

$$\frac{\partial}{\partial z} = -j\beta_g,$$

ipak je član unutar okruglih zagrada ostavljen u obliku parcijalne derivacije po z kako bi izrazi za transverzalne komponente elektromagnetskog polja bili analogni.

$$\vec{n} \cdot \vec{H} = \vec{n} \cdot (\vec{H}_{tr} + \vec{H}_z) = \vec{n} \cdot \vec{H}_{tr} = 0.$$

Međutim, ako u ovaj uvjet uvrstimo vrijednost transverzalne komponente magnetskog polja u ovisnosti o longitudinalnim komponentama električnog i magnetskog polja, slijedi:

$$\vec{n} \cdot \vec{H}_{tr} = \frac{-\vec{n}}{\omega^2 \mu \epsilon - \beta_g^2} \left[\nabla_{tr} \left(\frac{\partial H_z}{\partial z} \right) - j \omega \epsilon \nabla_{tr} \times \vec{e}_z E_z \right],$$

pa slijedi, uz $E_z = 0$:

$$\vec{n} \cdot \nabla_{tr} \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0,$$

odnosno uz:

$$\frac{\partial}{\partial z} = -j \beta_g \Rightarrow \vec{n} \cdot \nabla_{tr} \frac{\partial H_z}{\partial z} \propto \vec{n} \cdot \nabla_{tr} H_z = \frac{\partial H_z}{\partial n} = 0.$$

Dakle na granici vrijedi:

$$\left. \begin{array}{l} E_z = 0 \\ \frac{\partial H_z}{\partial n} = 0 \end{array} \right\}. \quad (o)$$

Granični uvjeti za aksijalne komponente elektromagnetskog polja su različiti. Stoga ćemo samo u izuzetnim slučajevima u rješenjima jednadžbi za transverzalne komponente polja imati jednake vlastite vrijednosti aksijalnih komponenti. Zato općenito definiramo dva načina propagacije elektromagnetskog vala kroz homogeni valovod, odnosno dva tipa modova. Jedan tip predstavljaju transverzalno električni modovi (TE), kod kojih je u svim točkama presjeka okomitog na pravac propagacije, pa tako i u čitavom valovodu aksijalna komponenta električnog polja jednaka nuli, a drugi tip modova su transverzalno magnetski modovi (TM), kod kojih je u svim točkama presjeka aksijalna komponenta magnetskog polja jednaka nuli, odnosno u svim točkama homogenog valovoda:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_z = 0, H_z \neq 0 \Rightarrow \text{TE} \\ E_z \neq 0, H_z = 0 \Rightarrow \text{TM} \end{array} \right.$$

Dakle, u homogenom valovodu pri propagaciji TE modova postoje samo transverzalne komponente električnog polja, a pri propagaciji TM modova postoje samo transverzalne komponente magnetskog polja.

Uvrstimo li sada odgovarajući uvjet u vezu između transverzalnih i longitudinalnih komponenti harmonijskog polja za TE modove imamo:

$$E_z = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_{tr} = \frac{-j \omega \mu \nabla_{tr} \times \vec{e}_z H_z}{\omega^2 \mu \epsilon - \beta_g^2} = \frac{j \omega \mu}{\omega^2 \mu \epsilon - \beta_g^2} \vec{e}_z \times \nabla_{tr} H_z \\ \vec{H}_{tr} = -\frac{\nabla_{tr} \frac{\partial H_z}{\partial z}}{\omega^2 \mu \epsilon - \beta_g^2} = \frac{j \beta_g}{\omega^2 \mu \epsilon - \beta_g^2} \nabla_{tr} H_z \end{array} \right. .$$

Slično dobivamo i za transversalne komponente elektromagnetskog vala u slučaju propagacije TM modovima:

$$H_z = 0 \Rightarrow \begin{cases} \vec{E}_t = \frac{-j\beta_g}{\omega^2\mu\epsilon - \beta_g^2} \nabla_t E_z \\ \vec{H}_t = \frac{j\omega\epsilon}{\omega^2\mu\epsilon - \beta_g^2} \vec{e}_z \times \nabla_t E_z \end{cases}.$$

Uočimo da iz gornjih relacija proizlazi za ovaj moda propagacije:

$$\vec{E}_t = \frac{j\omega\mu}{\omega^2\mu\epsilon - \beta_g^2} \vec{e}_z \times \frac{\vec{H}_t (\omega^2\mu\epsilon - \beta_g^2)}{j\beta_g}$$

odnosno:

$$\vec{E}_t = \frac{\omega\mu}{\beta_g} \vec{e}_z \times \vec{H}_t,$$

a slično je i u slučaju TM moda:

$$\vec{H}_t = \frac{\omega\epsilon}{\beta_g} \vec{e}_z \times \vec{E}_t.$$

Iz ova dva posljednja izraza proizlazi da su u svakoj točki unutar homogenog valovoda transversalne komponente električnog i magnetskog polja međusobno okomiti vektori. To znači da u svakom presjeku homogenog valovoda okomitom na pravac propagacije imamo sliku ravnog vala.

Rezimirajmo ovu analizu do sada. Polazeći od Maxwellovih jednadžbi i uz odgovarajuće opravdanje rastavljanjem komponenti elektromagnetskog polja te operatora ∇ u kartezijevom sustavu na transversalne i longitudinalne komponente, našli smo ovisnost transversalnih komponenti polja o longitudinalnim komponentama u općem slučaju. Da bi odredili te transversalne komponente potrebno je poznavati longitudinalne komponente polja. Ove posljednje nalazimo rješavajući Helmholtzove (valne) jednadžbe za te komponente. Mogućnost da te jednadžbe svedemo na dvodimenzionalne ostvarena je činjenicom da se elektromagnetsko polje propagira duž osi z . Rješenja za longitudinalne komponente električnog i magnetskog polja za koje smo pokazali da je na granici longitudinalna komponenta električnog polja E_z jednaka nuli, kao i parcijalna derivacija po varijabli z longitudinalne komponente magnetskog polja H_z .

Dvodimenzionalna Helmholtzova jednadžba može se napisati u generaliziranom obliku kao:

$$-\Delta u = k^2 u,$$

gdje je:

$$k^2 = \omega^2\mu\epsilon - \beta_g^2$$

vlastita (svojstvena) vrijednost operatora, koju treba odrediti tako da rješenja valne jednadžbe zadovolje rubne uvjete. Ovaj problem gdje treba naći rješenja tako da se odredi konstanta na način da rješenja zadovolje rubne uvjete zove se **problem svojstvenih vrijednosti** (*eigenvalue problem*). Rješenja jednadžbe su **svojstvene**

funkcije, a vrijednosti konstanti kojoj odgovaraju pojedine vlastite funkcije zovu se vlastite vrijednosti.

Da se pokazati, što će biti učinjeno kasnije, da konstanta k^2 zadovoljava posljednji uvjet u slučaju kad *nije negativna*. Dakle:

$$k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon - \beta_g^2 \geq 0.$$

Ovaj uvjet ispunjen je za određenu kružnu frekvenciju ω ako vrijedi nejednakost:

$$\omega^2 \mu \varepsilon > \beta_g^2.$$

S druge strane znamo da je ovisnost polja o koordinati z :

$$u(z) \sim e^{-j\beta_g z}.$$

Val će se dakle propagirati u smjeru rastućeg z *samo ako je veličina β_g realna*, što znači β_g^2 pozitivan i realan broj. Naime, u slučaju da je β_g imaginaran, odnosno neka je:

$$\beta_g = -j\beta', \quad \beta' \in \mathbb{R}^+,$$

gdje je β' realna i pozitivna veličina, onda je ovisnost polja o varijabli z koja raste u smjeru propagacije:

$$u(z) \sim e^{-j\beta_g z} = e^{-j(-j\beta')z} = e^{-\beta' z},$$

što znači da se polje u guši pri napredovanju duž smjera propagacije (osi z), što drugim riječima znači da nema uvjeta za propagaciju elektromagnetskog vala duž homogenog valovoda.

Dakle uvjet za propagaciju u slučaju idealnog valovoda (s idealno vodljivim stjenkama ispunjenog homogenim i izotropnim dielektričnim medijem bez gubitaka ili vakuumom) je:

$$\beta_g^2 > 0 \text{ \& } \beta_g \in \mathbb{R},$$

odnosno:

$$\omega^2 \mu \varepsilon \geq \beta_g^2 \quad (*),$$

pri čemu je $\omega^2 \mu \varepsilon$ također realna i pozitivna veličina. Obzirom na izneseno moguće je naći neku kružnu frekvenciju ω_k kod koje uvjet (*) upravo prestaje važiti, odnosno takvom da još uvijek postoji uvjet za propagaciju. Za svaku nižu frekvenciju nema propagacije bez gušenja. Dakle, ta **kritična frekvencija** je za:

$$\omega = \omega_k \Rightarrow \beta_g = 0 \Rightarrow \omega_k^2 \mu \varepsilon = k^2 \Rightarrow \omega_k = \frac{k}{\sqrt{\mu \varepsilon}},$$

odnosno:

$$k^2 = \omega_k^2 \mu \varepsilon.$$

Kako je konstanta propagacije, odnosno fazna konstanta:

$$\beta_g^2 = \omega^2 \mu \varepsilon - k^2,$$

možemo je izraziti općenito kao funkciju kritične frekvencije:

$$\beta_g = \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon - k^2} = \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon - \omega_k^2 \mu \varepsilon},$$

$$\boxed{\beta_g = \sqrt{\mu \varepsilon (\omega^2 - \omega_k^2)}}.$$

Istakli smo da će vlastita vrijednost k^2 ovisiti o rubnim uvjetima, što znači i o geometriji presjeka homogenog valovoda. Iz toga proizlazi da će kritična frekvencija ω_k biti različito definirana za različite tipove presjeka valovoda. Međutim, ovako definirana konstanta propagacije kao i uvjet kojeg smo na nju postavili vrijedit će kod svih tipova presjeka homogenog valovoda.

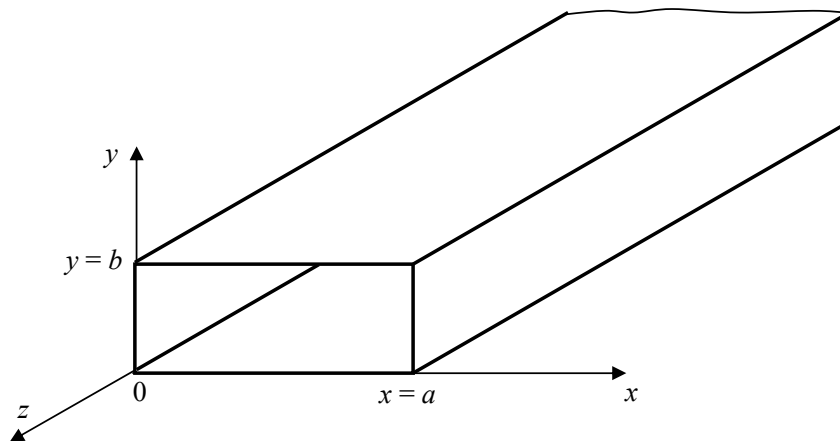
Valovod pravokutnog presjeka

Razmotrimo kao prvi primjer rješavanja propagacije u homogenom idealnom valovodu valovod pravokutnog presjeka, koji je često u upotrebi u praksi. Orijentirajmo koordinatni sustav kao što je prikazano na sl. 8 i pretpostavimo da se valovodom širi TE mod. Dakle longitudinalna komponenta električnog polja jednaka je nuli dok za ostale pretpostavljamo da su različite od nule:

$$\text{TE: } E_z = 0 \text{ \& } E_x, E_y, H_x, H_y, H_z \neq 0.$$

Izrazimo sada transverzalne komponente elektromagnetskog polja pomoću aksijalne komponente magnetskog polja. Prema onome od ranije za TE mod vrijedi:

$$E_z = 0 \Rightarrow \begin{cases} \vec{E}_{tr} = \frac{j\omega\mu}{\omega^2 \mu \varepsilon - \beta_g^2} \vec{e}_z \times \nabla_{tr} H_z \\ \vec{H}_{tr} = \frac{j\beta_g}{\omega^2 \mu \varepsilon - \beta_g^2} \nabla_{tr} H_z \end{cases}. \quad (\infty)$$



Slika 8. Homogeni valovod pravokutnog poprečnog presjeka

Dakle, trebamo iz dvodimenzionalne Helmholtzove jednadžbe izračunati longitudinalnu komponentu magnetskog polja H_z , koja će istovremeno zadovoljavati rubne uvjete (o), koji za ovaj slučaj pravokutnog presjeka postaju, prvi uvjet na granici za električno polje:

$$E_z = 0,$$

međutim u slučaju TE moda ova komponenta je ionako jednaka nuli u svim točkama prostora, pa moramo koristiti uvjet za longitudinalnu komponentu magnetskog polja na granici, što je u konkretnom slučaju:

$$\frac{\partial H_z}{\partial n} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial H_z}{\partial y} = 0, & y = 0, y = b \\ \frac{\partial H_z}{\partial x} = 0, & x = 0, x = a \end{cases}.$$

Helmholtzova jednadžba u pravokutnom koordinatnom sustavu za longitudinalnu komponentu magnetskog polja glasi:

$$\{\Delta_{tr} + k^2\} H_z(x, y) = 0$$

Pretpostavimo, u skladu s metodom separacije varijabli, da je rješenje ove jednadžbe moguće napisati u obliku:

$$H_z(x, y) = X(x)Y(y).$$

U tom slučaju je:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial x} = XY' &\Rightarrow \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = X''Y, \\ \frac{\partial H_z}{\partial y} = XY' &\Rightarrow \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} = XY'', \end{aligned}$$

pa je:

$$\begin{aligned} X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) + k^2 X(x)Y(y) &= 0 \mid : XY, \\ \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + k^2 &= 0. \end{aligned}$$

Vidimo da je ta jednadžba kod koje je prvi član funkcija isključivo varijable x , drugi funkcija isključivo varijable y te da zbrojeni daju konstantu $-k^2$. Stoga, i budući da su x i y ortogonalne varijable, jednadžba može biti zadovoljena samo u slučaju da je svaki od tih članova jednak konstanti. Dakle, posljednja jednadžba ima rješenje ako je:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -k_x^2 \text{ i } \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -k_y^2, (**)$$

gdje su k_x^2 i k_y^2 konstante pa je:

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2.$$

Obične diferencijalne jednačbe (**) imaju sljedeća rješenja:

$$X(x) = Me^{px} \Rightarrow X'(x) = Mpe^{px} \Rightarrow X''(x) = Mp^2 e^{px},$$

pa je karakteristična jednačba:

$$p^2 = -k_x^2 \Rightarrow p_{1,2} = \pm jk_x,$$

što daje rješenje prve jednačbe u obliku:

$$X(x) = C_1 e^{jk_x x} + C_2 e^{-jk_x x},$$

odnosno:

$$X(x) = A_1 \cos k_x x + A_2 \sin k_x x.$$

Slično imamo za rješenje druge diferencijalne jednačbe:

$$Y(y) = B_1 \cos k_y y + B_2 \sin k_y y.$$

Konstante A_1 , A_2 , B_1 i B_2 određujemo iz rubnih uvjeta. Ako imamo samo polazni val koji se giba u smjeru rastućeg z možemo pisati:

$$H_z(x, y, z) = X(x)Y(y)e^{-j\beta_g z},$$

odnosno uvrštavajući dobivena rješenja:

$$H_z(x, y, z) = (A_1 \cos k_x x + A_2 \sin k_x x)(B_1 \cos k_y y + B_2 \sin k_y y)e^{-j\beta_g z}.$$

Da bi upotrijebili granični uvjet za magnetsko polje derivirajmo najprije posljednju relaciju po varijabli x te potom dobiveni izraz izjednačimo s nulom na granici:

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = (-A_1 k_x \sin k_x x + A_2 k_x \cos k_x x)(B_1 \cos k_y y + B_2 \sin k_y y)e^{-j\beta_g z} = 0,$$

$$x = 0 \Rightarrow A_2 k_x (B_1 \cos k_y y + B_2 \sin k_y y) = 0,$$

$$x = a \Rightarrow (-A_1 k_x \sin k_x a + A_2 k_x \cos k_x a)(B_1 \cos k_y y + B_2 \sin k_y y) = 0.$$

Gornje jednačbe zadovoljene su ako je:

$$A_2 = 0,$$

$$A_1 k_x \sin k_x a = 0 \Rightarrow k_x a = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

iz čega je:

$$k_x = \frac{n\pi}{a}.$$

Sada učinimo isto ali sada prvo derivirajmo komponentu polja po varijabli y na granici:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = (A_1 \cos k_x x + A_2 k_x \sin k_x x) (-B_1 k_y \sin k_y y + B_2 k_y \cos k_y y) e^{-j\beta_g z} = 0,$$

$$y = 0 \Rightarrow (A_1 \cos k_x x + A_2 k_x \sin k_x x) B_2 k_y = 0,$$

$$y = b \Rightarrow (A_1 \cos k_x x + A_2 k_x \sin k_x x) (-B_1 k_y \sin k_y b + B_2 k_y \cos k_y b) = 0.$$

Objekti su zadovoljene za:

$$B_2 = 0,$$

$$-B_1 k_y \sin k_y b = 0 \Rightarrow k_y b = m\pi, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

iz čega je opet:

$$k_y = \frac{m\pi}{b}.$$

Dakle, longitudinalna komponenta magnetskog polja je:

$$H_z(x, y, z) = A_1 B_1 \cos \frac{n\pi}{a} x \cdot \cos \frac{m\pi}{b} y \cdot e^{-j\beta_g z}.$$

Uzimajući da je $A_1 B_1 = H_0$, te uz vezu (oo) transverzalnih i aksijalnih komponenti elektromagnetskog polja imamo rješenje za TE mod u homogenom valovodu pravokutnog presjeka dimenzija ($a \times b$) uz harmonijsku uzbuđu:

$$E_x(x, y, z, t) = \frac{j\omega\mu m\pi}{(\omega^2\mu\epsilon - \beta_g^2)b} H_0 \cos \frac{n\pi x}{a} \cdot \sin \frac{m\pi y}{b} \cdot e^{j(\omega t - \beta_g z)},$$

$$E_y(x, y, z, t) = \frac{j\omega\mu n\pi}{(\omega^2\mu\epsilon - \beta_g^2)a} H_0 \sin \frac{n\pi x}{a} \cdot \cos \frac{m\pi y}{b} \cdot e^{j(\omega t - \beta_g z)},$$

$$E_z(x, y, z, t) = 0,$$

$$H_x(x, y, z, t) = \frac{j\beta_g n\pi}{(\omega^2\mu\epsilon - \beta_g^2)a} H_0 \sin \frac{n\pi x}{a} \cdot \cos \frac{m\pi y}{b} \cdot e^{j(\omega t - \beta_g z)},$$

$$H_y(x, y, z, t) = \frac{j\beta_g m\pi}{(\omega^2\mu\epsilon - \beta_g^2)b} H_0 \cos \frac{n\pi x}{a} \cdot \sin \frac{m\pi y}{b} \cdot e^{j(\omega t - \beta_g z)},$$

$$H_z(x, y, z, t) = H_0 \cos \frac{n\pi x}{a} \cdot \cos \frac{m\pi y}{b} \cdot e^{j(\omega t - \beta_g z)}.$$

Odredimo sada kritičnu frekvenciju za pravokutni valovod kojim se širi TE mod. Znamo da je:

$$\omega_k = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} k = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} (k_x^2 + k_y^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\omega_k = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \left[\left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Konstanta propagacije je:

$$\beta_g = \pm \sqrt{\mu\epsilon(\omega^2 - \omega_k^2)} = \pm \sqrt{\omega^2 \mu\epsilon - \left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2\right]}.$$

Također možemo izračunati i kritičnu valnu duljinu λ_k :

$$\beta_k = \frac{2\pi}{\lambda_k} = \frac{\omega_k}{v} \Rightarrow \lambda_k = \frac{2\pi v}{\omega_k} \Rightarrow \lambda_k = \frac{2\pi}{\omega_k \sqrt{\mu\epsilon}},$$

odnosno:

$$\lambda_k = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2}}.$$

Ekvivalentni postupak mogli bi provesti i za TM modove kod kojeg je aksijalna komponenta magnetskog polja jednaka nuli ($H_z = 0$). Granični uvjeti za aksijalnu komponentu električnog polja bili bi sljedeći:

$$E_z = 0 \text{ za } x = 0; x = a,$$

$$E_z = 0 \text{ za } y = 0; y = b.$$

Dobili bi iste rezultate:

$$k_x = \frac{n\pi}{a} \text{ i } k_y = \frac{m\pi}{b}$$

Naime usporedbom vlastitih vrijednosti za TE i TM modove utvrdili smo da su te vrijednosti u ovom izuzetnom slučaju jednake, što vrijedi samo za valovode s pravokutnim presjekom. Kod drugih tipova presjeka to nije tako. Posljedica toga su jednake konstante propagacije β_g , kritična frekvencija ω_k i kritična valna duljina λ_k za TE i TM modove kod pravokutnog valovoda.

Ranije smo predstavili rješenje za elektromagnetsko polje u pravokutnom valovodu za slučaj da se propagira općenito TE_{nm} mod. Istražimo sada pobliže kakvo je polje u valovodu za pojedine modove, odnosno pojedine n i m . Kao česti slučaj koristi se za propagaciju TE_{10} mod. Izračunajmo prostornu ovisnost i skicirajmo polje u valovodu za taj mod propagacije. Iz rješenja za polje slijedi za $n = 1$ i $m = 0$:

$$E_x = 0,$$

$$E_y = -\frac{j\omega\mu}{k^2 a} H_0 \sin \frac{\pi x}{a} \cdot e^{-j\beta_g z} = E_0 \sin \frac{\pi x}{a} \cdot e^{-j\beta_g z}$$

$$E_z = 0,$$

$$H_x = -\frac{j\pi\beta_g}{k^2 a} H_0 \sin \frac{\pi x}{a} \cdot e^{-j\beta_g z} = \frac{\beta_g}{\omega\mu} E_0 \sin \frac{\pi x}{a} \cdot e^{-j\beta_g z},$$

$$H_y = 0,$$

$$H_z = H_0 \cos \frac{\pi x}{a} \cdot e^{-j\beta_g z}.$$

Slika elektromagnetskog polja u homogenom pravokutnom valovodu prikazana je na sl. 9 u različitim ravninama. Pri tom su silnice električnog polja označene punom linijom, a magnetskog crtkano. Uočimo da su sve komponente polja titraju i propagiraju duž osi valovoda u fazi. Vidimo da je električno polje u presjeku okomitom na smjer propagacije najvećeg intenziteta u sredini tog presjeka, a opada do nule kako se krećući po osi x približavamo stjenkama valovoda. Istovremeno, x -komponenta magnetskog polja slijedi taj trend dok je obrnut slučaj za aksijalnu odnosno z -komponentu koja je u sredini presjeka jednaka nuli a maksimalna na rubovima. Kako je vektor magnetskog polja zbroj tih dviju komponenti, znači da se magnetsko polje savija u smjeru propagacije kako se krećemo prema rubu valovoda gledano u ravnini XZ.

Ostaje još pitanje uzbuđivanja TE moda u valovodu. Znamo da odgovor na pitanje hoće li i kojim će se modom elektromagnetsko polje propagirati ovisi o frekvenciji narinutog signala, dimenzijama i tipu presjeka valovoda te o karakteristikama dielektrika kojim je valovod ispunjen. Da bi ostvarili propagaciju TE modom možemo uzbuditi y -komponentu električnog polja koje će pobuditi i magnetsko polje. Uzmimo stoga da je valovod s jedne strane zaključen kratkim spojem. Stoga na udaljenosti od kratkog spoja za četvrtinu valne duljine elektromagnetskog vala koji se širi valovodom $\lambda_g/4$ napravimo mali otvor i kroz njega progurajmo vertikalnu antenu koju može predstavljati mali dio središnjeg vodiča u koaksijalnom kabelu (što znači da njime i dovodimo uzbudni signal odgovarajuće frekvencije), kao što je prikazano na sl. 10a. Dio elektromagnetske energije koju zrači antena će se propagirati u smjeru kratkog spoja te će se potom reflektirati natrag prema anteni te pri refleksiji od idealno vodljive površine kratkospojnika doživjeti skok od π radijana. Ukupna duljina električne staze bit će polovina valne duljine $\lambda_g/2$ signala, što znači da se, računajući sa skokom u fazi uslijed refleksije od kratkog spoja, reflektirani val vraća u fazi s valom kojeg emitira antena. Drugim riječima, u tom dijelu valovoda egzistira stojni val i to takav da osigurava maksimalno polje u točki odašiljača. Na taj način je osigurano da čitava elektromagnetska energija koju zrači antena propagira u željenom smjeru. Isto uzbudno polje možemo emitirati i tako da se inicijalno pobuđuje magnetsko polje u valovodu, tako da unutrašnji vodič koaksijalnog kabla koji izlazi iz rupice na stjenci valovoda formiramo u magnetsku petljicu, što je prikazano na sl. 10b. Da bi uzбудili odgovarajuće magnetsko polje petljica mora ležati paralelno YZ ravnini.

Izračunajmo sada i kritičnu frekvenciju TE₁₀ moda. Za $n = 1$ i $m = 0$ imamo:

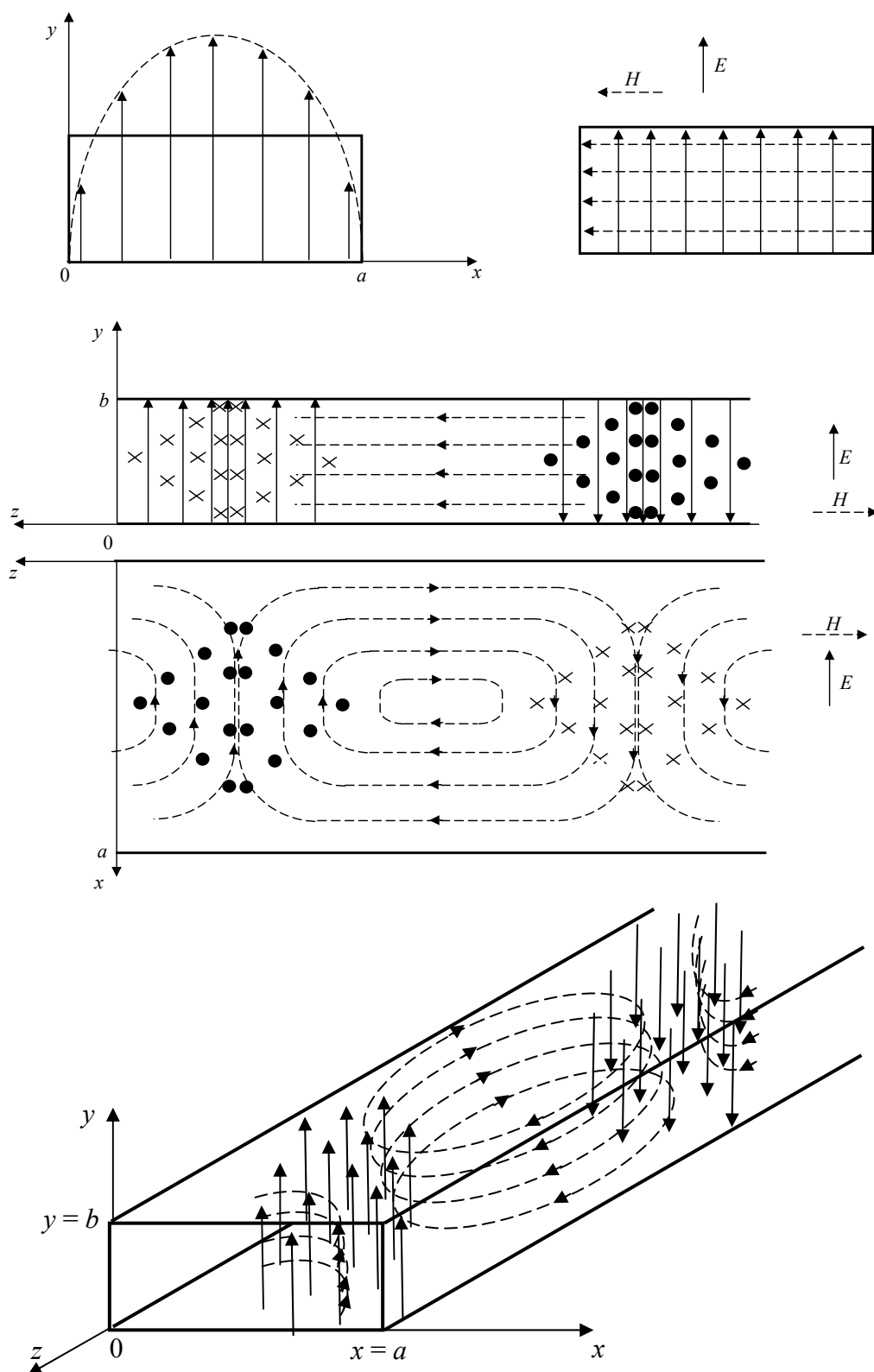
$$\omega_{k,10} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \left(\frac{\pi}{a} \right).$$

Uočimo da je, u slučaju da smo pretpostavili da je $b < a$, to najniža kritična frekvencija, odnosno ujedno i najniža moguća frekvencija koja se kojom se elektromagnetski val može propagirati u valovodu pravokutnog presjeka. Naime, za svaki $m \neq 0$ kritična frekvencija je viša, a kako je uz:

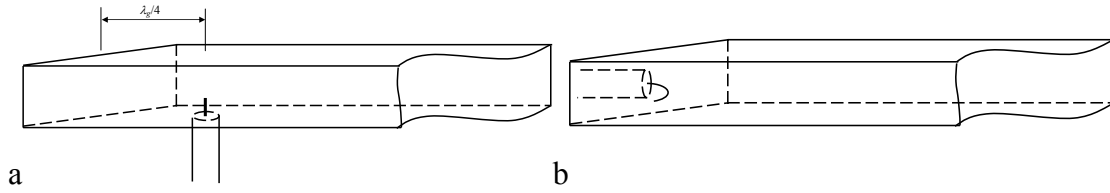
$$b < a \Rightarrow \frac{\pi}{a} < \frac{\pi}{b},$$

što znači da je kritična frekvencija TE₁₀ moda niža od kritične frekvencije TE₀₁ moda, a pogotovo ostalih TE modova. Kasnije ćemo pokazati da je to najniža moguća

frekvencija kojom se val može propagirati duž valovoda uopće, bez obzira na to kojim modom se isti propagira. Mod s najnižom kritičnom frekvencijom zove se **dominantni mod**, pa stoga TE_{10} mod zovemo dominantnim modom u homogenom pravokutnom valovodu.



Slika 9. Prikaz elektromagnetskog polja koje se propagira TE_{10} modom u homogenom valovodu pravokutnog presjeka



Slika 10. Dva načina uzbude TE_{10} moda u pravokutnom valovodu

Prije smo istakli da TE i TM modovi u pravokutnom valovodu imaju iste vlastite vrijednosti, a time i jednake kritične frekvencije. Međutim ispišimo sada rješenja za TM modove, koje dobivamo istim postupkom kao i rješenja za TE modove ali uz korištenje graničnog uvjeta za longitudinalnu komponentu električnog polja kako je već navedeno:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{-j\beta_g n\pi}{k^2 a} E_0 \cos \frac{n\pi x}{a} \cdot \sin \frac{m\pi y}{b} \cdot e^{-j\beta_g z}, \\ E_y &= \frac{-j\beta_g m\pi}{k^2 b} E_0 \sin \frac{n\pi x}{a} \cdot \cos \frac{m\pi y}{b} \cdot e^{-j\beta_g z}, \\ E_z &= -E_0 \sin \frac{n\pi x}{a} \cdot \sin \frac{m\pi y}{b} \cdot e^{-j\beta_g z}, \\ H_x &= \frac{-j\omega\epsilon m\pi}{k^2 b} E_0 \sin \frac{n\pi x}{a} \cdot \cos \frac{m\pi y}{b} \cdot e^{-j\beta_g z}, \\ H_y &= \frac{j\omega\epsilon n\pi}{k^2 a} E_0 \cos \frac{n\pi x}{a} \cdot \sin \frac{m\pi y}{b} \cdot e^{-j\beta_g z}, \\ H_z &= 0. \end{aligned}$$

Iz gornjih relacija očigledno je da ne može egzistirati ni TM_{10} ni TM_{01} mod u pravokutnom valovodu. U bilo kojem od tih slučajeva jednake su nuli sve komponente električnog i magnetskog polja. To je očigledno i sa fizikalnog stajališta. Jer činjenica da za razliku od električnog polja koje ima svoje izvore i ponore na stjenkama valovoda, tj. čije silnice završavaju i izvire iz naboja, to nije slučaj s magnetskim poljem. Magnetsko polje je solenoidalno, odnosno sve silnice zatvorene su u sebe, pa ne mogu samo dvije prostorne komponente biti jednake nuli a treća ne. Budući da je stoga kritična frekvencija TM_{11} najmanja u odnosu na kritične frekvencije ostalih TM modova u pravokutnom valovodu, ali je još uvijek veća od kritične frekvencije TE_{10} moda jasna je naša prijašnja tvrdnja.

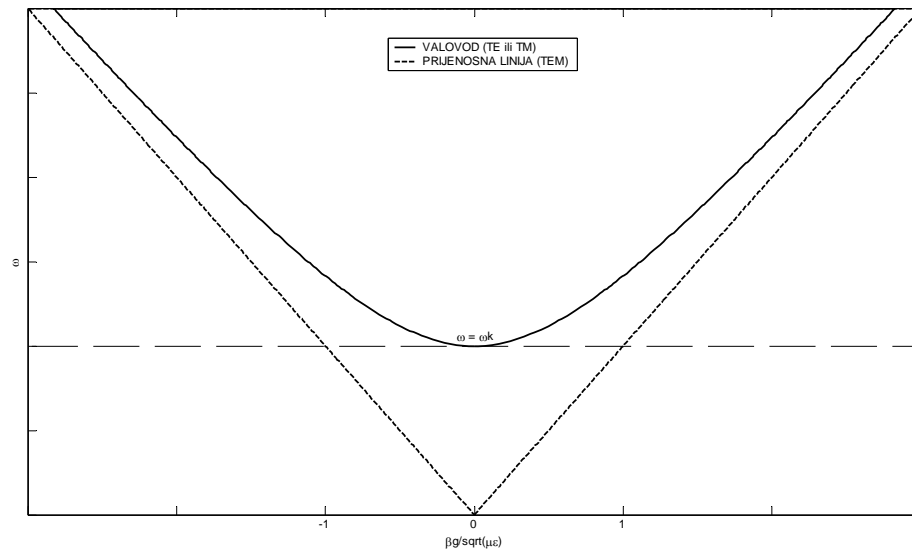
U našem razmatranju o pravokutnom valovodu uočimo karakterističnu činjenicu kojom se on razlikuje od uobičajene prijenosne linije, da se njim za određene dimenzije ne mogu propagirati polja nižih frekvencija, odnosno konstanta propagacije β_g postaje imaginarna i takva se polja brzo guše. Zbog usporedbe nacrtajmo ovisnost konstante propagacije kod obične prijenosne linije i valovoda kao funkcije frekvencije, kao što je prikazano na sl. 11. Kod valovoda fazna konstanta je:

$$\beta_g = \pm \sqrt{\mu\epsilon} (\omega^2 - \omega_k^2)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \beta_g = \beta \sqrt{1 - \frac{\omega_k^2}{\omega^2}},$$

ili:

$$\frac{\beta_g}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \pm \sqrt{\omega^2 - \omega_k^2},$$

a kod prijenosne linije je:



Slika 11. Ovisnost konstante propagacije o frekvenciji u valovodu i na prijenosnoj liniji

$$\beta_g = \beta = \omega \sqrt{\mu\epsilon} ,$$

ili:

$$\frac{\beta_g}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \pm \omega .$$

Vidimo da propagacija u valovodu postoji pri frekvenciji $\omega \geq \omega_k$. Kad se frekvencija uzbuđenog signala približava kritičnoj frekvenciji vrijedi:

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_k} \beta_g = 0 \Rightarrow \lambda_g = \frac{2\pi}{\beta_g} = \infty .$$

Nadalje, pitamo se da li mogu postojati takvi modovi kod kojih su obje longitudinalne komponente elektromagnetskog polja, odnosno E_z i H_z jednake nuli. Ako pogledamo vezu (oo) između transverzalnih i longitudinalnih komponenti u pravokutnom valovodu, vidimo da bi to bilo moguće jedino u slučaju da je:

$$\beta_g = \beta = \omega \sqrt{\mu\epsilon} \Rightarrow \text{TEM} ,$$

a to je pak konstanta propagacije ravnog vala (TEM mod propagacije). Kod istraživanja koaksijalne linije vidimo da se njome propagira TEM mod, no da se pokazati da TEM mod ne može egzistirati unutar šupljeg valovoda. Dakle, TEM se može propagirati samo tamo gdje postoje višestruke vodljive konture koje su razdvojene primjerice dvožični vod (parica) ili trakasta linija.

Cilindrični valovod

Izvedimo sada rješenja za homogeni valovod kružnog poprečnog presjeka radijusa a , prikazanog na sl. 12. Cilindrični valovod može se promatrati kao posebni

slučaj eliptičnog valovoda kojeg se također često susreće u praksi. Zbog oblika valovoda analizu ćemo provesti u cilindričnom koordinatnom sustavu. Kao i u slučaju pravokutnog valovoda pretpostavljamo harmonijsku uzbudu te da elektromagnetski val propagira duž osi z :

$$\begin{aligned}\vec{E}(r, \varphi, z, t) &= \vec{E}(r, \varphi) e^{j(\omega t - \beta_g z)}, \\ \vec{H}(r, \varphi, z, t) &= \vec{H}(r, \varphi) e^{j(\omega t - \beta_g z)}.\end{aligned}$$

Helmholtzovu jednadžbu za longitudinalne komponente električnog i magnetskog polja kao funkcije transverzalnih koordinata pišemo u cilindričnim koordinatama:

$$\begin{aligned}\left\{ \Delta_{tr} + (\omega^2 \mu \varepsilon - \beta_g^2) \right\} E_z(r, \varphi) &= 0, \\ \left\{ \Delta_{tr} + (\omega^2 \mu \varepsilon - \beta_g^2) \right\} H_z(r, \varphi) &= 0.\end{aligned}$$

Kako su te jednadžbe za aksijalnu komponentu električnog i magnetskog polja istovjetne, označimo ta polja kao:

$$E_z(r, \varphi), H_z(r, \varphi) \rightarrow Q(r, \varphi),$$

te razvijmo valnu jednadžbu:

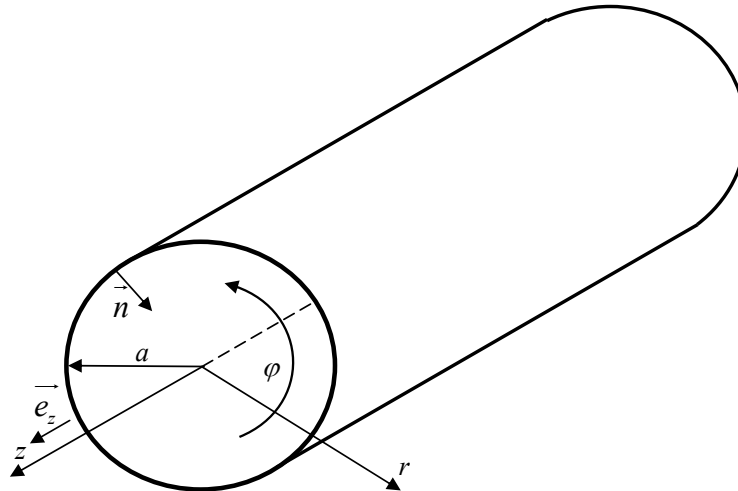
$$\frac{\partial^2 Q}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial Q}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 Q}{\partial \varphi^2} + (\omega^2 \mu \varepsilon - \beta_g^2) Q = 0.$$

Riješimo dobivenu jednadžbu metodom separacije varijabli. Neka je:

$$Q = Q(r, \varphi) = R(r) \phi(\varphi).$$

Uvrštavanjem u prethodnu jednadžbu dobivamo:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \phi \frac{dR}{dr} + \frac{1}{r^2} R \frac{d^2 \phi}{d\varphi^2} + k^2 R \cdot \phi = 0 \left| \cdot \frac{r^2}{R \cdot \phi} \right.,$$



Slika 12. Homogeni cilindrični valovod

odnosno:

$$\frac{\phi''}{\phi} + \frac{r^2 R'' + rR'}{R} + k^2 r^2 = 0$$

pri čemu smo označili:

$$R'' = \frac{d^2 R(r)}{dr^2} \text{ i } \phi'' = \frac{d^2 \phi(\varphi)}{d\varphi^2}.$$

Vidimo da je prvi član u dobivenoj diferencijalnoj jednadžbi funkcija isključivo varijable φ , a drugi i treći član isključivo varijable r . Dakle, kao i u prethodnoj analizi pravokutnog valovoda, diferencijalnu jednadžbu rastavljamo na dvije obične diferencijalne jednadžbe:

$$\frac{\phi''}{\phi} = -m^2,$$

$$\frac{r^2 R'' + rR'}{R} + k^2 r^2 = m^2,$$

gdje je m konstanta. Rješenja ovih jednadžbi su:

$$\phi(\varphi) = A_m \sin m\varphi + B_m \cos m\varphi,$$

$$R(r) = C_m J_m(kr) + D_m Y_m(kr),$$

pri čemu je $J_m(kr)$ Besselova funkcija m -tog reda prve vrste, a $Y_m(kr)$ Besselova funkcija m -tog reda druge vrste, a A_m, B_m, C_m, D_m konstante koje tek treba odrediti uz uvažavanje graničnih uvjeta. Rješenje za polje je dakle:

$$Q(r, \varphi) = [C_m J_m(kr) + D_m Y_m(kr)](A_m \sin m\varphi + B_m \cos m\varphi).$$

Promotrimo rješenja za TE modove kod kojih je longitudinalna komponentna električnog polja jednaka nuli ($E_z = 0$). To znači da se funkcija Q odnosi na aksijalnu komponentu magnetskog polja, pa je:

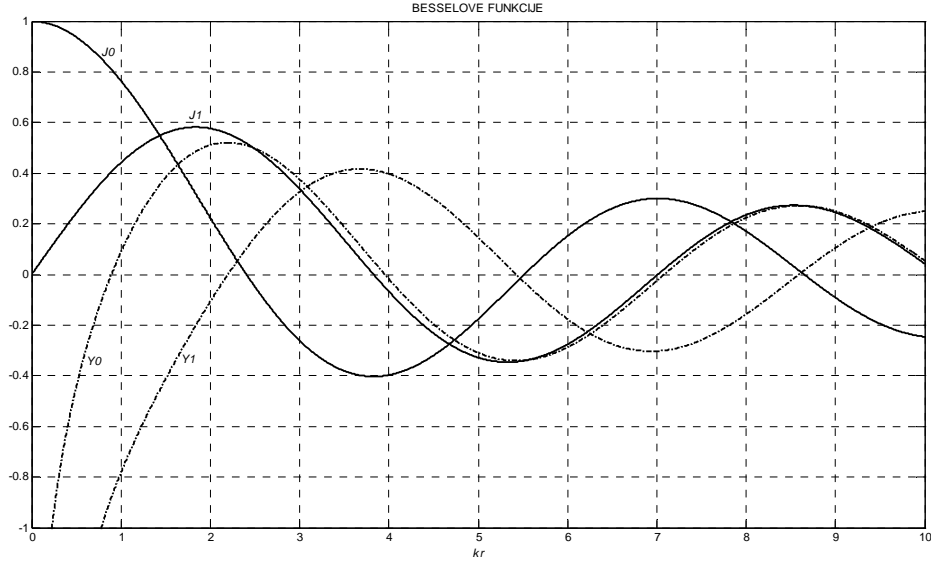
$$H_z(r, \varphi, z) = [C_m J_m(kr) + D_m Y_m(kr)](A_m \sin m\varphi + B_m \cos m\varphi) e^{-j\beta_g z}.$$

Granični uvjet za tu komponentu polja je, uzimajući u obzir da je su vektori normale na graničnu površinu i ort vektor u smjeru osi r antiparalelni:

$$r = a \Rightarrow \frac{\partial H_z}{\partial n} = 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial H_z}{\partial r} \right|_{r=a} = 0.$$

Promotrimo sada opće rješenje Helmholtzove jednadžbe u cilju određivanja nepoznatih konstanti. Predstavimo stoga spomenute Besselove funkcije dijagramom na sl. 13. Iz slike vidimo da je u osi valovoda:

$$kr = 0 \Rightarrow Y_m(0) = -\infty \text{ i } J_m(0) = 0 \wedge 1.$$



Slika 13. Besselove funkcije nultog i prvog reda prve i druge vrste

Dakle, prihvatimo li da konstanta D_m može biti različita od nule, dobili bi nerazumno rješenje za polje u središtu. Stoga ta konstanta mora biti jednaka nuli: $D_m = 0$. Nadalje, ovisnost o azimutu φ može se izraziti kao:

$$A_m \sin m\varphi + B_m \cos m\varphi = \sqrt{A_m^2 + B_m^2} \cos(m\varphi + \theta),$$

gdje je:

$$\theta = \arctg \frac{A_m}{B_m}.$$

Ne gubeći na općenitosti, može se odabrati položaj referentne osi φ tako da bude $\theta = 0$, dakle $A_m = 0$, pa je:

$$H_z = H_0 J_m(kr) \cos m\varphi e^{-j\beta_g z}.$$

Granični uvjet zahtijeva da bude:

$$\left. \frac{\partial H_z}{\partial r} \right|_{r=a} = k H_0 J'_m(ka) \cos m\varphi e^{-j\beta_g z} = 0,$$

odnosno:

$$J'_m(ka) = 0.$$

Postoji beskonačno mnogo točaka koje zadovoljavaju posljednji zahtjev. Nul-točkama prve derivacije J'_m Besselove funkcije prve vrste odgovaraju maksimumi Besselove funkcije prve vrste J_m . Iz slike 13, očitavanjem tih maksimuma dolazimo do tablice 1. U tablici je dat realni broj n korijena $J'_m(ka)$, pri čemu je izostavljen $ka = 0$. Time je definiran TE_{mn} mod u homogenom valovodu kružnog presjeka. Tako primjerice vrijednošću $ka = 1,84$ definiran TE_{11} mod propagacije. Broj m je naravno cijeli broj zbog jednoznačnosti rješenja po azimutu:

$$\cos m\varphi = \cos[m(\varphi + 2\pi)] \Rightarrow m = 0, 1, 2, \dots,$$

**TABLICA 1. MAKSIMUMI BESSELOVIH FUNKCIJA ZA
ODREĐIVANJE TE_{mn} MODOVA U HOMOGENOM CILINDRIČNOM VALOVODU**

$\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}$	0	1	2	3	...
1	3,83	1,84	3,05	4,20	...
2	7,02	5,33	6,70	8,20	...
.
.
.

a označava broj ciklusa promjene aksijalne komponente magnetskog polja H_z kada azimut φ varira od 0 do 2π . Ako taj broj ciklusa promjene ne bi bio cijeli broj, odnosno ako zadnji ciklus promjene ne bi bio okončan imali bi višeznačno rješenje po azimutu, a to je nemoguće. Broj n kaže koliko puta prva derivacija $J'_m(kr)$ prođe kroz nulu, a s time i vrijednost azimutalne komponente električnog polja E_φ kad varijabla r raste od 0 do a (pri čemu se ne računa $r = 0$). Sada iz veze transverzalnih i longitudinalnih komponenti koju smo izveli na početku razmatranja o homogenim valovodima uvrštavajući $E_z = 0$ možemo izračunati ostale (transverzalne) komponente polja za TE modove u cilindričnom homogenom valovodu:

$$\vec{E}_{tr} = \frac{j\omega\mu}{k^2} \vec{e}_z \times \nabla_{tr} H_z,$$

$$\vec{H}_{tr} = -\frac{\nabla_{tr} \left(\frac{\partial H_z}{\partial z} \right)}{k^2}.$$

Tako je transverzalna komponenta električnog polja:

$$\vec{E}_{tr} = \frac{j\omega\mu}{k^2} \vec{e}_z \times \left(\vec{e}_r \frac{\partial H_z}{\partial r} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right) = \frac{j\omega\mu}{k^2} \left[\left(\frac{\partial H_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\varphi + \left(-\frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \frac{1}{r} \right) \vec{e}_r \right].$$

Rješenje za transverzalne komponente elektromagnetskog polja u promatranom tipu valovoda pišemo u obliku:

$$E_r = -\frac{1}{r} \frac{j\omega\mu}{k^2} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi},$$

$$E_\varphi = \frac{j\omega\mu}{k^2} \frac{\partial H_z}{\partial r},$$

$$H_r = \frac{j\beta_g}{k^2} \frac{\partial H_z}{\partial r},$$

$$H_\varphi = \frac{j\beta_g}{k^2} \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi}.$$

Konstantu propagacije odredimo iz svojstvenih vrijednosti:

$$k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon - \beta_g^2 \Rightarrow \beta_g = \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon - k^2},$$

što možemo napisati u za našu analizu prikladnijem obliku:

$$\beta_g = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \frac{(ka)^2}{a^2}}.$$

Kako smo vidjeli, granični uvjeti zadovoljeni su na diskretnim vrijednostima (ka) . Izračunajmo kritičnu valnu duljinu λ_c kod koje prestaje propagacija:

$$\omega_c^2 \mu \epsilon = \frac{(ka)^2}{a^2} = \left(\frac{2\pi}{\lambda_c} \right)^2,$$

iz čega izlazi:

$$\boxed{\lambda_c = \frac{2\pi a}{(ka)}}.$$

Iz tablice 1 vidimo da je najmanji mogući (ka) jednak $(ka) = 1,84$ i da odgovara TE_{11} modu. Da se pokazati da taj mod ima maksimalnu kritičnu valnu duljinu u odnosu na sve ostale modove propagacije, pa je TE_{11} mod *dominantni mod* u cilindričnom valovodu.

Za dokaz te tvrdnje trebalo bi istražiti kritičnu valnu duljinu za TM modove. Rješenja za TM modove u cilindričnom valovodu su kako slijedi. Longitudinalna komponenta magnetskog polja jednaka je nuli po definiciji, a električnog:

$$E_z = E_0 J_m(kr) \sin m\varphi,$$

a transverzalne komponente električnog polja su (izvedite za vježbu magnetsko polje):

$$E_r = \frac{\beta_g}{\omega^2 \mu \epsilon - \beta_g^2} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi},$$

$$E_\varphi = \frac{\beta_g}{\omega^2 \mu \epsilon - \beta_g^2} \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r}.$$

Granični uvjet za TM modove je da longitudinalna komponenta električnog polja na stjenci valovoda bude jednaka nuli, pa je:

$$E_z|_{r=a} = 0 \Rightarrow J_m(ka) = 0.$$

Vratimo se sada opet dijagramu na sl. 13. Kako maksimumi Besselove funkcije prve vrste (nule njene prve derivacije) prethode nulama te funkcije, kritična valna duljina za TM_{mn} modove (koju računamo prema relaciji istog oblika kao i za TE modove) manja je od kritične valne duljine za TE_{mn} modove, pa je tako TE_{11} mod dominantni mod.

Homogeni dielektrični valovod

U prošlim poglavljima analizirali smo homogene valovode s idealno vodljivim stjenkama. Osnovni fizikalni princip koji omogućava propagaciju valova u takvom valovodu bazira se na činjenici da elektromagnetski val koji koso upadne na granicu dielektrika – vodič propagira duž granične plohe. Međutim, dade se pokazati, što ćemo ovdje i uraditi, da nije neophodno za propagaciju vala duž granične plohe imati vodič. Totalnu refleksiju vala moguće je postići i na granici dvaju dielektrika u određenim uvjetima, što daje naslutiti mogućnost gradnje valovoda bez vodiča.

Da bi istražili tu mogućnost sjetimo se zakona loma i refleksije na granici dvaju sredstava različitih elektromagnetskih svojstava (sl. 3). Općenito postoji upadni, reflektirani i lomljeni val definiran jednadžbama koje smo izveli ranije:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_1 e^{-j\vec{\beta} \cdot \vec{r}} & \vec{H} &= \frac{\vec{\beta} \times \vec{E}}{\omega\mu_1} \\ \vec{E}' &= \vec{E}'_1 e^{-j\vec{\beta}' \cdot \vec{r}} & \vec{H}' &= \frac{\vec{\beta}' \times \vec{E}'}{\omega\mu_1} \\ \vec{E}'' &= \vec{E}''_1 e^{-j\vec{\beta}'' \cdot \vec{r}} & \vec{H}'' &= \frac{\vec{\beta}'' \times \vec{E}''}{\omega\mu_2}\end{aligned}$$

Uvrštenjem graničnih uvjeta:

$$\begin{aligned}\vec{n} \times (\vec{E} + \vec{E}' - \vec{E}'') &= \vec{0}, \\ \vec{n} \times (\vec{H} + \vec{H}' - \vec{H}'') &= \vec{0},\end{aligned}$$

dobili smo Snellov zakon koji kaže da se funkcije sinusa kuta upada i kuta loma odnose kao brzine propagacije elektromagnetskog vala u odgovarajućim sredstvima na čijoj se granici val lomi, odnosno:

$$\frac{\sin \theta''}{\sin \theta} = \frac{v_2}{v_1}.$$

Budući da je:

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{\mu_2 \epsilon_2}} \text{ i } v_1 = \frac{1}{\sqrt{\mu_1 \epsilon_1}},$$

slijedi:

$$\frac{\sin \theta''}{\sin \theta} = \sqrt{\frac{\mu_1 \epsilon_1}{\mu_2 \epsilon_2}}.$$

Ako je ispunjen uvjet da je $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ (dijamagnetični medij) što je u praksi najčešći slučaj slijedi:

$$\frac{\sin \theta''}{\sin \theta} = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}}.$$

Ako smo odabrali sredstvo 1 (dakle ono iz kojega dolazi upadni val na granicu) dielektrički gušće od sredstva 2, tj. da je $\epsilon_1 > \epsilon_2$, izraz na desnoj strani ove relacije je veći od jedinice:

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 \Rightarrow \frac{\sin \theta''}{\sin \theta} > 1 \Rightarrow \sin \theta'' > \sin \theta \Rightarrow \theta'' > \theta ,$$

odnosno kut loma je veći od kuta upada. Očigledno je da će povećanjem kuta upada θ rasti i kut loma θ'' i konačno kod nekog graničnog kuta upada θ_{gr} postaje:

$$\theta = \theta_{gr} \Rightarrow \sin \theta'' = 1 ,$$

pa je granični kut određen relacijom:

$$\sin \theta_{gr} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} .$$

Taj kut θ_{gr} zove se **kut totalne interne refleksije**. Za svaki $\theta > \theta_{gr}$ Snellov zakon može biti zadovoljen jedino ako je θ'' kompleksna veličina:

$$\sin \theta'' = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \sin \theta > 1 .$$

Dakle,

$$\sin \theta'' = \sin(A \pm jB) > 1 .$$

Izračunajmo:

$$\cos \theta'' = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta''} = \pm j \sqrt{\sin^2 \theta'' - 1} .$$

Zbog $\sin \theta'' > 1$ očigledno je kosinus kuta loma *čisto imaginaran*, (izraz pod korijenom je realan) i može ga se izraziti kao funkciju kuta upada u obliku:

$$\cos \theta'' = \pm j \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \sqrt{\sin^2 \theta - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} .$$

Izračunajmo polje u sredstvu 2:

$$\vec{E}'' = \vec{E}_1'' e^{-j \vec{\beta}'' \cdot \vec{r}}$$

Zbog:

$$\vec{\beta}'' \cdot \vec{r} = \beta'' (x \sin \theta'' + z \cos \theta'') = \beta'' x \sin \theta'' + \beta'' z \cos \theta'' ,$$

odnosno u funkciji kuta upada:

$$\vec{\beta}'' \cdot \vec{r} = \beta'' x \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \sin \theta + j \beta'' z \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \sqrt{\sin^2 \theta - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} .$$

Budući da je na graničnoj plohi:

$$\beta \sin \theta = \beta'' \sin \theta'' ,$$

pa je, uz Snellov zakon loma:

$$\beta'' = \beta \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} ,$$

pa je:

$$\vec{\beta}'' \cdot \vec{r} = \beta x \sin \theta + j\beta z A,$$

pri čemu je:

$$A = \sqrt{\sin^2 \theta - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$$

realna veličina. Dakle, polje je u slučaju okomite polarizacije:

$$\vec{E}'' = \vec{e}_y E_1'' e^{-\beta z A} e^{-j\beta x \sin \theta}.$$

Ovo rješenje znači da i u slučaju totalne refleksije u sredstvu 2 imamo polje koje se propagira duž granične plohe (os x) bez gušenja s faznom konstantom β (kao i upadni val), ali da to polje *eksponencijalno opada s dubinom u sredstvu 2* (faktor $e^{-\beta z A}$). Fazna brzina prostiranja jednaka je:

$$v = \frac{\omega}{\beta \sin \theta}.$$

Električno polje u sredstvu 1 u slučaju totalne refleksije dobije se kao suma upadnog i reflektiranog vala koji su paralelnog smjera i jednakih amplituda i koje se propagira duž granične plohe kako je pokazano već ranije. Upadni val je:

$$\vec{E} = \vec{E}_{y1} e^{-j\beta x \sin \theta} e^{-j\beta z \cos \theta}.$$

Očigledno je fazna brzina vala u sredstvu 1 koji se širi duž granice jednaka faznoj brzini vala u sredstvu 2. Drugačije ne bi mogli biti zadovoljeni uvjeti u svakoj točki prostora i u svakom trenutku vremena.

Dakle, zaključujemo sljedeće. U slučaju da se val širi sredstvom $\epsilon_1 > \epsilon_2$ na granici se u određenim uvjetima elektromagnetska energija totalno reflektira. Pri tome postoji elektromagnetski val koji se propagira uz graničnu plohu. Ako bismo računali prijenos snage iz sredstva 1 u 2 dobili bismo da je jednak nuli za kutove upada veće od graničnog. To znači da cjelokupna energija koja dolazi iz sredstva 1 na granicu ostaje u toj sredini, dok u sredstvo 2 ne prelazi ništa od te energije. Međutim, komponente elektromagnetskog polja postoje, samo se elektromagnetski val u sredstvu 2 eksponencijalno prigušuje s udaljavanjem od granice. Val se propagira u dielektrički gušćoj sredini duž granične plohe. Dakle, koristeći takav princip moguće je sagraditi dielektrični valovod čije stjenke nisu metalne već predstavljaju granicu dielektrik – zrak.

Homogeni dielektrični valovod kružnog presjeka

Želimo istražiti uvjete propagacije elektromagnetskog vala u dielektričnom valovodu kružnog presjeka, koji je prikazan na sl. 14. Dakle, u skladu s gore uočenim val će se propagirati u sredstvu 1, dok s druge strane moramo ostvariti da se u sredstvu 2 ne širi energija, dakle da nema elektromagnetskog zračenja od promatrane strukture. To znači da kompleksni Poyntingov vektor ima imaginarnu radijalnu komponentu. Naravno da će tada rubni uvjeti biti različiti od onih koje bi imali za idealno vodljive stjenke. Granični uvjeti za elektromagnetsko polje su:

$$\vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = \vec{0} \Rightarrow E_{t1} = E_{t2}^{iv},$$

$$\vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{0} \Rightarrow H_{t1} = H_{t2}.$$

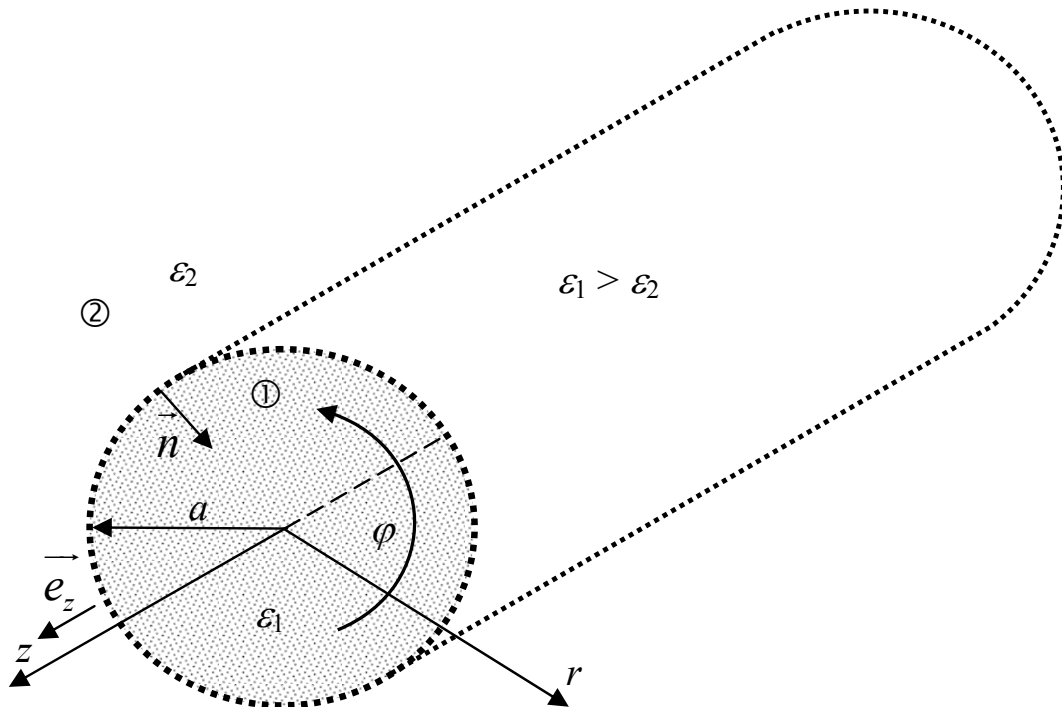
Primijetimo da u ovom slučaju nema površinskih struja na granici ($\kappa = 0$), a ni površinskih naboja ($\zeta = 0$) kao što je to slučaj s idealno vodljivim stjenkama cilindričnog valovoda, jer granična ploha nije vodljiva (granica je između dielektrika bez gubitaka).

Napišimo sada Helmholtzovu jednadžbu u sredstvu 1. Pri tome i ovdje pretpostavljamo harmonijsko polje i propagaciju u smjeru osi z :

$$r < a \Rightarrow \begin{cases} \left\{ \Delta_{tr} + (\omega^2 \mu_1 \varepsilon_1 - \beta_g^2) \right\} \vec{E}_1 = \vec{0} \\ \left\{ \Delta_{tr} + (\omega^2 \mu_1 \varepsilon_1 - \beta_g^2) \right\} \vec{H}_1 = \vec{0} \end{cases},$$

pri čemu je a polumjer kružnog presjeka. Slično za elektromagnetski val u sredstvu 2 vrijede jednadžbe:

$$r > a \Rightarrow \begin{cases} \left\{ \Delta_{tr} + (\omega^2 \mu_2 \varepsilon_2 - \beta_g^2) \right\} \vec{E}_2 = \vec{0} \\ \left\{ \Delta_{tr} + (\omega^2 \mu_2 \varepsilon_2 - \beta_g^2) \right\} \vec{H}_2 = \vec{0} \end{cases}.$$



Slika 14. Homogeni dielektrični valovod kružnog presjeka

^{iv} U ovu relaciju je kao poseban slučaj uključena longitudinalna komponenta električnog polja za koju prema tome vrijedi $E_{z1} = E_{z2}$.

^v Uočimo da smo bez obrazloženja pisali istu konstantu propagacije u oba sredstva, odnosno $\beta_{g1} = \beta_{g2} = \beta_g$. To je logično ako uzmemo da se elektromagnetski val propagira duž osi z , a u sredstvu 2 postoji polje pa fazne konstante moraju biti iste da bi bili zadovoljeni rubni uvjeti u svakom položaju i u svakom trenutku, kao što je uostalom objašnjeno i u uvodu ovog poglavlja.

Najčešće je u stvarnosti dielektrik 2 zrak pa je $\varepsilon_2 \approx \varepsilon_0$ i $\mu_2 \approx \mu_0$. Već znamo da rješenja Helmholtzovih jednadžbi daju elektromagnetsko polje koje je ili oscilatorno ili eksponencijalno. To ovisi o veličini $k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon - \beta_g^2$. Budući da želimo propagaciju u sredini 1 mora vrijediti:

$$\omega^2 \mu_1 \varepsilon_1 - \beta_g^2 > 0,$$

Ovdje ćemo bez posebnog dokazivanja ustvrditi da općenito postoje **hibridni modovi propagacije**, tj. takvi kod kojih elektromagnetski val ima različite od nule obje longitudinalne komponente polja, i aksijalnu komponentu električnog E_z i aksijalnu komponentu magnetskog polja H_z . Dakle, u našem slučaju dielektričnog valovoda kružnog presjeka treba naći rješenja dvodimenzionalne Helmholtzove jednadžbe za longitudinalne komponente polja E_z i H_z i to tako da budu zadovoljeni rubni uvjeti na $r = a$, a ti su:

$$r = a \Rightarrow \begin{cases} E_{z1} = E_{z2} \\ H_{z1} = H_{z2} \end{cases},$$

a ta rješenja budu periodična po azimutu φ zbog jednoznačnosti te da su konačna u sredstvu 1. Pri tome biramo cilindrični koordinatni sustav, pa su Helmholtzove jednadžbe oblika:

$$\{\nabla_r + k^2\} u(r, \varphi) = 0,$$

odnosno:

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + k^2 \right] u(r, \varphi) = 0. \quad (*)$$

Neka je moguće u rješenju za $u(r, \varphi)$ separirati ovisnost o r i ovisnost o φ :

$$u(r, \varphi) = R(r) \cdot \phi(\varphi).$$

Uvrstimo li ovo u jednadžbu (*), slijedi nakon dijeljenja s $R(r) \cdot \phi(\varphi)$ te množenja s r^2 :

$$\frac{r^2 R''(r) + r R'(r)}{R(r)} + \frac{\phi''(\varphi)}{\phi(\varphi)} + k^2 r^2 = 0. \quad (**)$$

Budući da su r i φ nezavisne varijable, a prvi treći član su funkcija isključivo varijable r dok je drugi ne ovisi o varijabli r , onda ta jednadžba može biti zadovoljena samo ako je:

$$\frac{\phi''(\varphi)}{\phi(\varphi)} = -m^2,$$

te da funkcija $\phi(\varphi)$, da bi bila jednoznačna, zadovoljava periodičnost po azimutu:

$$\phi(0) = \phi(2\pi),$$

pri čemu je m realna konstanta. Ova obična diferencijalna jednadžba za funkciju ϕ daje rješenje koje zadovoljava gornje uvjete:

$$\phi(\varphi) = A_m \sin m\varphi + B_m \cos m\varphi.$$

Uvrstimo sada to razmatranje za funkciju ϕ u (**) pa je:

$$\frac{r^2 R''(r) + rR'(r)}{R(r)} = m^2.$$

Za funkciju $R(r)$ vrijedit će dakle jednažba:

$$R'' + \frac{1}{r} R' + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0. \quad (***)$$

Rješenje za $R = R(r)$ (dakle komponente polja kao funkcije varijable r) moraju zadovoljiti sljedeće. U sredini 1, dakle za $r < a$ mora biti:

$$r < a \Rightarrow |R(r)| < \infty.$$

S druge strane zahtjev je da samo u sredini 2 vrijedi:

$$r > a \Rightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} R(r) = 0.$$

Rješenje jednažbe (**) koje zadovoljava prvi uvjet, dakle u sredini 1 dano je Besselovom funkcijom m -tog reda prve vrste (sl. 13 i 14):

$$r < a \Rightarrow R_u(r) = J_m(k_u r),$$

ako je $k^2 = k_u^2 > 0$ (k^2 pozitivan). Indeks "u" označava unutrašnjost dielektričnog valovoda. U sredstvu 2 funkcija:

$$r > a \Rightarrow R_v(r) = C_m K_m(k_v r)$$

ispunjava uvjet:

$$r > a \Rightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} R_v(r) = 0,$$

ako je $k^2 = -k_v^2 < 0$ (k^2 negativan). $K_m(k_v r)$ je Macdonaldova funkcija ili modificirana Besselova funkcija m -tog reda. Umjesto $u(r, \varphi)$ možemo sada napisati izraze za longitudinalne komponente elektromagnetskog vala $E_{zu}, H_{zu}, E_{zv}, H_{zv}$ za m -ti mod:

$$\begin{aligned} r < a \Rightarrow & \begin{cases} E_{zu}^m = E_{z0u}^m J_m(k_u r) \sin m\varphi e^{-j\beta_g z} \\ H_{zu}^m = H_{z0u}^m J_m(k_u r) \cos m\varphi e^{-j\beta_g z} \end{cases} \\ r > a \Rightarrow & \begin{cases} E_{zv}^m = E_{z0v}^m K_m(k_v r) \sin m\varphi e^{-j\beta_g z} \\ H_{zv}^m = H_{z0v}^m K_m(k_v r) \cos m\varphi e^{-j\beta_g z} \end{cases} \end{aligned}$$

gdje je:

$$k_u^2 = \omega^2 \mu_1 \varepsilon_1 - \beta_g^2 > 0,$$

$$-k_v^2 = \omega^2 \mu_2 \varepsilon_2 - \beta_g^2 < 0.$$

Aksijalne komponente vektora električnog, odnosno magnetskog polja moraju zadovoljiti granične uvjete:

$$r = a \Rightarrow \begin{cases} E_{zu} = E_{zv} \\ H_{zu} = H_{zv} \end{cases},$$

i to za svaki pojedini mod m :

$$r = a \Rightarrow \begin{cases} E_{0zu}^m J_m(k_u a) = E_{0zv}^m K_m(k_v a) \\ H_{0zu}^m J_m(k_u a) = H_{0zv}^m K_m(k_v a) \end{cases}.$$

Transverzalne komponente vektora električnog i magnetskog polja u i u prostoru oko dielektričnog valovoda mogu se sada izračunati kad znamo aksijalne pomoću poznatih jednadžbi kojima su izražene transverzalne komponente pomoću aksijalnih. Tako su sada azimutalne komponente:

$$r < a \Rightarrow \begin{cases} E_{\varphi u}^m = \left[E_{0zu}^m \frac{j m \beta_g}{k_u^2 r} J_m(k_u r) + H_{0zu}^m \frac{j \omega \mu_1}{k_u} J_m'(k_u r) \right] \sin m \varphi e^{-j \beta_g z} \\ H_{\varphi u}^m = \left[E_{0zu}^m \frac{j \omega \varepsilon_1}{k_u} J_m'(k_u r) + H_{0zu}^m \frac{j m \beta_g}{k_u^2 r} J_m(k_u r) \right] \cos m \varphi e^{-j \beta_g z} \end{cases},$$

$$r > a \Rightarrow \begin{cases} E_{\varphi v}^m = \left[E_{0zv}^m \frac{j m \beta_g}{k_v^2 r} K_m(k_v r) + H_{0zv}^m \frac{j \omega \mu_2}{k_v} K_m'(k_v r) \right] \sin m \varphi e^{-j \beta_g z} \\ H_{\varphi v}^m = \left[E_{0zv}^m \frac{j \omega \varepsilon_2}{k_v} K_m'(k_v r) + H_{0zv}^m \frac{j m \beta_g}{k_v^2 r} K_m(k_v r) \right] \cos m \varphi e^{-j \beta_g z} \end{cases},$$

i za radijalne komponente:

$$r < a \Rightarrow \begin{cases} E_{ru}^m = - \left[E_{0zu}^m \frac{j \beta_g}{k_u} J_m'(k_u r) + H_{0zu}^m \frac{j \omega \mu_1 m}{k_u^2 r} J_m(k_u r) \right] \cos m \varphi e^{-j \beta_g z} \\ H_{ru}^m = \left[E_{0zu}^m \frac{j \omega \varepsilon_1 m}{k_u^2 r} J_m(k_u r) + H_{0zu}^m \frac{j \beta_g}{k_u} J_m'(k_u r) \right] \sin m \varphi e^{-j \beta_g z} \end{cases},$$

$$r > a \Rightarrow \begin{cases} E_{rv}^m = - \left[E_{0zv}^m \frac{j \beta_g}{k_v} K_m'(k_v r) + H_{0zv}^m \frac{j \omega \mu_2 m}{k_v^2 r} K_m(k_v r) \right] \cos m \varphi e^{-j \beta_g z} \\ H_{rv}^m = \left[E_{0zv}^m \frac{j \omega \varepsilon_2 m}{k_v^2 r} K_m(k_v r) + H_{0zv}^m \frac{j \beta_g}{k_v} K_m'(k_v r) \right] \sin m \varphi e^{-j \beta_g z} \end{cases}.$$

Ove relacije vrijede za bilo koji mod reda m . Pri tome smo pretpostavili da postoje aksijalne komponente i električnog i magnetskog polja, dakle, općenito su to hibridni modovi.

Promotrimo sada konkretni slučaj za $m = 0$. Iz relacija za polje vidimo da u tom slučaju opet imamo aksijalno simetrične modove jer je jedna longitudinalna komponenta polja jednaka nuli. Konkretno TE mod u dielektričnom valovodu znači:

$$\begin{aligned} E_{zu}^0 &= E_{zv}^0 = 0 \\ H_{zu}^0 &= H_{0zu}^0 J_0(k_u r) e^{-j\beta_g z}, \quad r < a \\ H_{zv}^0 &= H_{0zv}^0 K_0(k_v r) e^{-j\beta_g z}, \quad r > a \end{aligned}$$

Transverzalne komponente polja za TE modove izračunamo iz jednadžbi u kojima su transverzalne komponente električnog i magnetskog polja vezane s longitudinalnom komponentom električnog polja, pa su one:

$$\begin{aligned} H_r^0 &= \frac{j\beta_g}{\omega^2 \mu \epsilon - \beta_g^2} \frac{\partial H_z^0}{\partial r} \\ E_\phi^0 &= \frac{j\beta_g}{\omega^2 \mu \epsilon - \beta_g^2} \frac{\partial H_z^0}{\partial r} \end{aligned}$$

odnosno:

$$\begin{aligned} H_{ru}^0 &= \frac{j\beta_g H_{0zu}^0}{k_u} J_1(k_u r) e^{-j\beta_g z}, \quad r < a \\ H_{rv}^0 &= \frac{j\beta_g H_{0zv}^0}{k_v} K_1(k_v r) e^{-j\beta_g z}, \quad r > a \\ E_{\phi u}^0 &= \frac{j\omega \mu_1 H_{0zu}^0}{k_u} J_1(k_u r) e^{-j\beta_g z}, \quad r < a \\ E_{\phi v}^0 &= \frac{j\omega \mu_2 H_{0zv}^0}{k_v} K_1(k_v r) e^{-j\beta_g z}, \quad r > a \end{aligned}$$

pri čemu smo uvažili da je:

$$\begin{aligned} \int J_1(k_v r) dx &= J_0(k_v r), \\ \int K_1(k_v r) dx &= -K_0(k_v r). \end{aligned}$$

Na granici $r = a$ potrebno je zadovoljiti granične uvjete za tangencijalne komponente električnog polja i normalne komponente magnetske indukcije odnosno:

$$r = a \Rightarrow \begin{cases} E_{tu} = E_{tv} \Rightarrow E_{\phi u}^0 = E_{\phi v}^0 \\ H_{tu} = H_{tv} \Rightarrow H_{zu}^0 = H_{zv}^0 \\ B_{nu} = B_{nv} \Rightarrow \mu_1 H_{ru}^0 = \mu_2 H_{rv}^0 \end{cases}.$$

Uvjet za tangencijalne komponente magnetskog polja TE moda na granici dvaju dielektrika daje:

$$r = a \Rightarrow H_{0zu}^0 J_0(k_u a) = H_{0zv}^0 K_0(k_v a),$$

odnosno:

$$H_{0zv}^0 = H_{0zu}^0 \frac{J_0(k_u a)}{K_0(k_v a)}.$$

Uvjet za normalne komponente magnetske indukcije, uz pretpostavku izotropnog medija, daje:

$$r = a \Rightarrow -\frac{\mu_1 H_{0zu}^0}{k_u} J_1(k_u a) = -\frac{\mu_2 H_{0zv}^0}{k_v} K_1(k_v a),$$

iz čega slijedi nakon uvrštavanja rezultata za H_{0zv}^0 :

$$\frac{\mu_1 \cancel{H_{0zu}^0} J_1(k_u a)}{k_u} = \frac{\mu_2 \cancel{H_{0zu}^0} \frac{J_0(k_u a)}{K_0(k_v a)} K_1(k_v a)}{k_v},$$

ili:

$$\boxed{-\frac{\mu_1 J_1(k_u a)}{k_u J_0(k_u a)} + \frac{\mu_2 K_1(k_v a)}{k_v K_0(k_v a)} = 0}. \quad (!)$$

Tu je:

$$k_u^2 + k_v^2 = (\omega^2 \mu_1 \varepsilon_1 - \beta_g^2) + (\beta_g^2 - \omega^2 \mu_2 \varepsilon_2) = \omega^2 (\mu_1 \varepsilon_1 - \mu_2 \varepsilon_2).$$

U slučaju da je $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$, što je često ispunjeno:

$$k_u^2 + k_v^2 = \omega^2 \mu_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2).$$

Pomoću karakteristične jednadžbe (!) možemo izvršiti identifikaciju aksijalno simetričnih modova u dielektričnom valovodu kružnog presjeka. Da bi ti modovi propagacije egzistirali korijeni te jednadžbe moraju biti realni. Pokušajmo dobiti te modove grafičkom konstrukcijom. Zbog jednostavnosti stavimo $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ i uz upotrebu Matlaba nacrtajmo grafove spomenutih Besselovih funkcija na sl. 15. Zatim nacrtajmo grafove:

$$-\frac{J_1(k_u a)}{k_u J_0(k_u a)} \text{ i } \frac{K_1(k_v a)}{k_v K_0(k_v a)}.$$

Superpozicijom tih dvaju grafova dobivamo korijene karakteristične jednadžbe. Međutim, ti korijeni moraju biti realni, što znači da moraju postojati sjecišta. To ovisi o onoj vrijednosti ($k_u a$) koju dobijemo iz:

$$(k_u a)^2 = \omega^2 a^2 \mu_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - (k_v a)^2.$$

U slučaju:

$$(k_v a) = 0 \Rightarrow (k_u a) = \omega a \sqrt{\mu_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}.$$

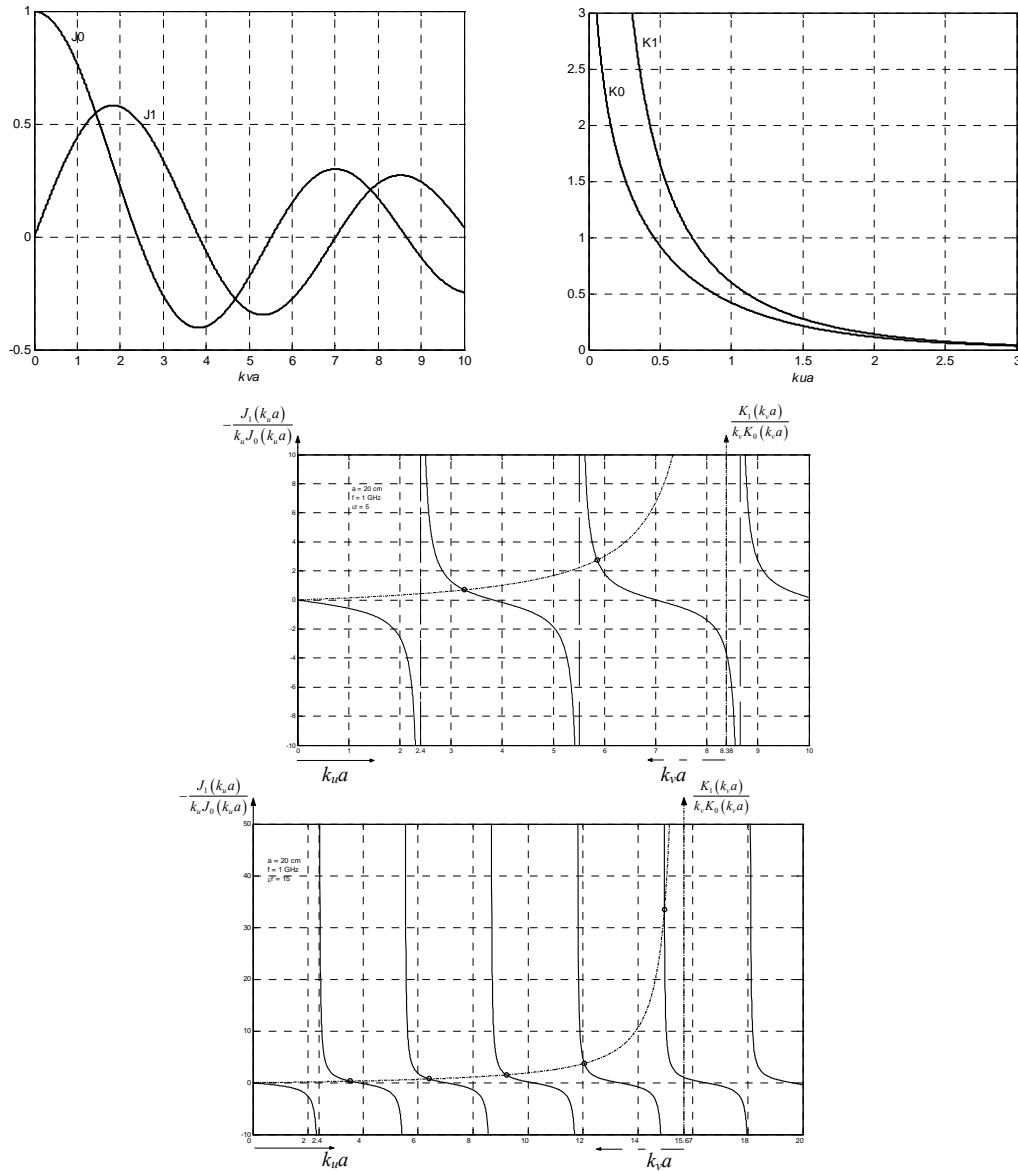
Ako je točka ($k_u a$) niža od prvog korijena Besselove funkcije J_0 (ta vrijednost prve nule jednaka je 2,4) onda ne postoji realni korijen (nema sjecišta na dijagramu), pa nisu mogući TE modovi propagacije kod takvog dielektričnog valovoda ili

propagacija na tim frekvencijama. Kritična frekvencija za postojanje TE modova je tada:

$$f_k = \frac{\omega_k}{2\pi} = \frac{2,4}{2\pi\sqrt{\mu_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}}.$$

Za frekvencije niže od kritične frekvencije dielektrični valovod zrači energiju koja se tada širi u sredstvu 2, dok je kod frekvencija iznad kritične elektromagnetski val u sredstvu 2 prigušen pa se energija ne zrači u taj dio prostora. Na sl. 15 prikazana su dva slučaja jednakih dielektričnih valovoda ali ispunjenim izotropnim sredstvima različite permitivnosti. Vidimo da u oba slučaja imamo da je vrijednost člana $(k_u a)$ za $(k_v a) = 0$ tolika da postoji više od jednog sjecišta. To znači da postoji istovremeno više TE modova, dva u prvom slučaju a pet u drugom.

Analizom ekvivalentnoj ovoj može se istraživati uvjete za propagaciju TM modova. Da se pokazati da je kritična frekvencija koju se dobije za prvi korijen Besselove funkcije identična za TE i TM modove.



Slika 15. TE modovi propagacije u različitim dielektričnim valovodima

4. Uvod u opću teoriju valovoda

Naša razmatranja idealnih homogenih valovoda u prethodnom poglavlju doveli su nas do određenih zaključaka. Polje koje se propagira u valovodu (bilo električno ili magnetsko) funkcija je prostornih i vremenskih koordinata, oblika:

$$u(x, y, z, t) = u(x, y) e^{j(\omega t - \beta_g z)}.$$

Pri tome mogući su općenito TE, TM, TEM i hibridni modovi propagacije elektromagnetskog vala. Postojanje određenog tipa moda ovisi o dodatnim uvjetima, u prvom redu rubnim uvjetima. Nadalje, izrazili smo transverzalne komponente polja pomoću njihovih aksijalnih komponenti:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_{tr} + \vec{e}_z E_z, \\ \vec{H} &= \vec{H}_{tr} + \vec{e}_z H_z.\end{aligned}$$

Longitudinalne komponente definirane su pak rješenjima Helmholtzove (ili valne) jednačbe s time da ova rješenja moraju zadovoljiti granične uvjete na rubu presjeka valovoda i ovisi o varijablama presjeka. Također smo izračunali da su transverzalne komponente magnetskog i električnog polja međusobno okomite, primjerice za TM mod:

$$\vec{H}_{tr} = \frac{\omega \epsilon}{\beta_g} \vec{e}_z \times \vec{E}_{tr}.$$

Detaljnije smo se upoznali s TE_{n0} modovima u pravokutnom valovodu kod kojih je:

$$\begin{aligned}E_{xn} &= E_{zn} = 0 \\ E_{yn} &= E_{y0n} \sin \frac{n\pi x}{a}.\end{aligned}$$

Odgovarajuća vlastita vrijednost je:

$$k_n^2 = \omega^2 \mu \epsilon - \beta_g^2 = \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2.$$

Kako je n prirodni broj vlastita vrijednost, a tome i vlastite funkcije su diskretne vrijednosti. Nadalje iz spomenutog principa evidentno je da su vlastite vrijednosti realne veličine. Međutim nije odmah jasno mogu li postojati takva rješenja, dakle takve vlastite funkcije u kojima je k_n^2 kompleksna veličina.

Pretpostavimo da je veličina:

$$u(x, y, z, t) = u(x, y) e^{j(\omega t - \gamma_n z)},$$

pri čemu je:

$$k_n^2 = \omega^2 \mu \epsilon - \gamma_n^2,$$

uz kompleksnu konstantu propagacije za taj mod:

$$\gamma_n = \alpha_n + j\beta_{gn}.$$

pa je E_{yn} vlastita funkcija modificirane Helmholtzove jednadžbe za slučaj TE_{n0} modova:

$$\frac{d^2 E_{yn}}{dx^2} + k_n^2 E_{yn} = 0,$$

pri čemu ta komponenta polja nije funkcija varijable y . Ona mora zadovoljiti granične uvjete (sl. 16):

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \\ x=a \end{array} \right\} \Rightarrow E_{yn} = 0.$$

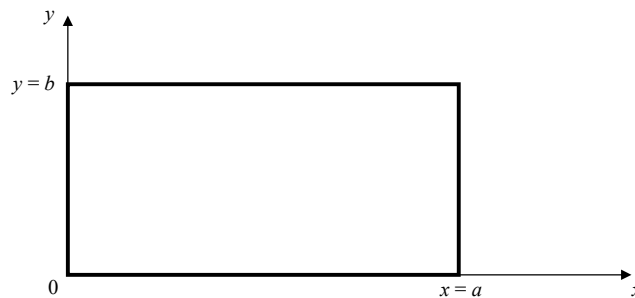
Budući da komponenta polja E_y može biti kompleksna funkcija, množenjem Helmholtzove jednadžbe s njegovom konjugirano kompleksnom vrijednošću E_{yn}^* dobijemo:

$$E_{yn}^* \frac{d^2 E_{yn}}{dx^2} + k_n^2 E_{yn} E_{yn}^* = 0.$$

Integriranjem gornjeg izraza u granicama od 0 do a slijedi:

$$\begin{aligned} \int_0^a E_{yn}^* \frac{d^2 E_{yn}}{dx^2} dx + k_n^2 \int_0^a E_{yn} E_{yn}^* dx &= 0, \\ \int_0^a \frac{d}{dx} \left(E_{yn}^* \frac{d^2 E_{yn}}{dx^2} \right) dx - \int_0^a \frac{dE_{yn}^*}{dx} \frac{dE_{yn}}{dx} dx + k_n^2 \int_0^a |E_{yn}|^2 dx &= 0 \\ \left[E_{yn}^* \frac{d^2 E_{yn}}{dx^2} \right]_0^a - \int_0^a \left| \frac{dE_{yn}}{dx} \right|^2 dx + k_n^2 \int_0^a |E_{yn}|^2 dx &= 0. \end{aligned}$$

Sada uzmimo u obzir granične uvjete, odnosno da komponenta polja E_{yn} mora biti jednaka nuli na $x = 0$ i $x = a$. Dakle i konjugirano kompleksna vrijednost te komponente je također jednaka nuli, pa je prvi član u posljednjem izrazu jednak nuli. Stoga je:



Slika 16. Poprečni presjek promatranog homogenog valovoda

$$k_n^2 = \frac{\int_0^a \left| \frac{dE_{yn}}{dx} \right|^2 dx}{\int_0^a |E_{yn}|^2 dx}.$$

Posljednja relacija nam govori da u slučaju postojanja nekog polja E_{yn} u valovodu vlastita vrijednost k_n^2 ne može biti negativna niti kompleksna vrijednost. Dakle, *vlastite vrijednosti su pozitivne i realne bez obzira kakva je vlastita funkcija*, što smo željeli i dokazati.

Nadalje dokažimo i istražimo tvrdnju da su dvije različite vlastite funkcije s različitim vlastitim vrijednostima *ortogonalne*. Matematički izražena ta tvrdnja glasi u slučaju TE_{n0} moda i TE_{p0} moda u pravokutnom valovodu:

$$\int_0^a E_{yn} E_{yp} dx = 0, \quad n \neq p.$$

Pojam ortogonalnost upotrijebljen je po analogiji na ortogonalnost dvaju vektora iznosa čiji je skalarni produkt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}.$$

Dokaz ove tvrdnje je kako slijedi. Budući da su E_{yn} i E_{yp} vlastite funkcije, onda svaka od njih mora zadovoljavati odgovarajuću Helmholtzovu jednadžbu:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E_{yn}}{dx^2} + k_n^2 E_{yn} &= 0 \\ \frac{d^2 E_{yp}}{dx^2} + k_p^2 E_{yp} &= 0 \end{aligned}.$$

Množenjem prve s E_{yp} a druge s E_{yn} te oduzimanjem dobivenih jednadžbi imamo:

$$E_{yp} \frac{d^2 E_{yn}}{dx^2} - E_{yn} \frac{d^2 E_{yp}}{dx^2} + (k_n^2 - k_p^2) E_{yn} E_{yp} = 0.$$

To se da napisati kao:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(E_{yp} \frac{dE_{yn}}{dx} \right) - \cancel{\frac{dE_{yp}}{dx} \frac{dE_{yn}}{dx}} - \frac{d}{dx} \left(E_{yn} \frac{dE_{yp}}{dx} \right) + \cancel{\frac{dE_{yp}}{dx} \frac{dE_{yn}}{dx}} + (k_n^2 - k_p^2) E_{yn} E_{yp} &= 0, \\ \frac{d}{dx} \left(E_{yp} \frac{dE_{yn}}{dx} - E_{yn} \frac{dE_{yp}}{dx} \right) + (k_n^2 - k_p^2) E_{yn} E_{yp} &= 0. \end{aligned}$$

Integracijom dobivenog izraza od 0 do a dobivamo:

$$\left[E_{yp} \frac{dE_{yn}}{dx} - E_{yn} \frac{dE_{yp}}{dx} \right]_0^a + (k_n^2 - k_p^2) \int_0^a E_{yn} E_{yp} dx = 0.$$

Budući da na granicama vrijedi:

$$E_{yp}(0) = E_{yp}(a) = E_{yn}(0) = E_{yn}(a) = 0,$$

slijedi da je:

$$(k_n^2 - k_p^2) \int_0^a E_{yn} E_{yp} dx = 0.$$

Budući da su vlastite vrijednosti različite i različite od nule mora biti:

$$k_n^2 \neq k_p^2 \neq 0 \Rightarrow \int_0^a E_{yn} E_{yp} dx = 0,$$

što je i trebalo dokazati. U općem obliku, za valovod proizvoljnog presjeka vrijedi:

$$n \neq p \Rightarrow \int_S \vec{E}_{tn} \vec{E}_{tp} dS = 0.$$

Da bi bolje shvatili fizikalno značenje ortogonalnosti izračunajmo snagu koja se prenosi valovodom u kojem su superponirana dva vala. U tu svrhu izračunajmo kompleksni Poyntingov vektor preko površine presjeka valovoda, odnosno snagu P elektromagnetskog vala koja se kroz poprečni presjek valovoda propagira uzduž njegove osi:

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_S (\vec{E}_{tr} \times \vec{H}_{tr}^*) \cdot d\vec{S} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_S \vec{e}_z \cdot (\vec{E}_{tr} \times \vec{H}_{tr}^*) \cdot dS.$$

U našem konkretnom slučaju u kojem se propagiraju dva TE moda (TE_{p0} i TE_{n0}) imamo sljedeće:

$$\begin{aligned} E_{zp} &= E_{zn} = E_{xp} = E_{xn} = 0, \\ E_y &= E_{yn} + E_{yp}, \\ \vec{H}_{tr} &= \vec{H}_{tn} + \vec{H}_{tp}. \end{aligned}$$

Kod TE_{i0} (i prirodan broj) je:

$$H_y = 0 \Rightarrow \vec{H}_{tr} = \vec{e}_x H_x,$$

te je:

$$H_x = H_{xn} + H_{xp}.$$

Zbog:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H},$$

je:

$$-\frac{\partial E_y}{\partial z} = -j\omega\mu H_x \Rightarrow H_x = \frac{j\gamma}{\omega\mu} E_y^{\text{vi}},$$

odnosno:

^{vi} Ako ne bi bilo gubitaka u valovodu dobili bi opći oblik za TE modove:

$$\gamma = 0 + j\beta_g \Rightarrow H_x = -\frac{\beta_g}{\omega\mu} E_y.$$

$$H_x = \frac{j}{\omega\mu} (\gamma_n E_{yn} + \gamma_p E_{yp}).$$

Našu relaciju za propagiranu snagu u smjeru osi z sada možemo pisati kao:

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_0^a \int_0^b -E_y H_x^* dx dy \quad \text{vii},$$

odnosno uvrštavajući dobivene sveze između komponenti elektromagnetskog polja:

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_0^a \int_0^b -(E_{yn} + E_{yp}) \frac{j}{\omega\mu} (\gamma_n^* E_{yn}^* + \gamma_p^* E_{yp}^*) dx dy,$$

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{j}{\omega\mu} \int_0^a \int_0^b \left(-|E_{yn}|^2 \gamma_n^* + \gamma_n^* E_{yn}^* E_{yp} + \gamma_p^* E_{yp}^* E_{yn} + |E_{yp}|^2 \gamma_p^* \right) dx dy \right\}.$$

Budući da su drugi i treći član podintegralne funkcije jednaki nuli zbog ortogonalnosti, slijedi da je ukupna snaga:

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ -\frac{j}{\omega\mu} \int_0^a \int_0^b \left(|E_{yn}|^2 \gamma_n^* + |E_{yp}|^2 \gamma_p^* \right) dS \right\} = P_n + P_p.$$

Iz posljednje relacije zaključujemo da kad vrijedi ortogonalnost ukupna snaga koja se prenosi svim modovima jednaka je sumi snaga koje prenose pojedini modovi, iz čega zaključujemo da nema interakcije između elektromagnetskih valova koji se propagiraju valovodom različitim modovima.

Ako je neki E_{yn} vlastita funkcija, onda je i veličina E'_{yn} koju dobijemo množenjem E_{yn} s proizvoljnom konstantom vlastita funkcija, koja ima istu vlastitu vrijednost. Koristeći ovu činjenicu možemo izvesti normalizaciju koja je u našem primjeru TE_{n0} moda homogenog valovoda pravokutnog poprečnog presjeka dimenzija $a \times b$ dana relacijom:

$$\int_0^a E_{yn}^2 dx = 1.$$

Budući da smo imali za:

$$E_{yn} = E_{y0n} \sin \frac{n\pi x}{a},$$

mora biti ispunjeno za tu E'_{yn} da je:

$$\int_0^a E_{y0n}^2 \sin^2 \frac{n\pi x}{a} dx = 1 \Rightarrow E_{y0n}^2 \int_0^a \sin^2 \frac{n\pi x}{a} dx = 1 \Rightarrow E_{y0n}^2 \cdot \frac{a}{2} = 1,$$

iz čega slijedi da je:

vii Znak minusa ispred E_y u relaciji je zbog toga što je propagacija u smjeru osi $+z$, a vrijedi: $-\vec{e}_y \times \vec{e}_x = \vec{e}_z$.

$$E_{y0n} = \sqrt{\frac{2}{a}},$$

pa je **normalizirana vlastita funkcija polja**:

$$E'_{yn} = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}.$$

Nadalje konstatirajmo da je polje u valovodu suma polja od pojedinih modova kojima broj raste u beskonačnost.^{viii} To znači da je u općem slučaju polje u valovodu beskonačna suma vlastitih funkcija s pripadnim vlastitim vrijednostima, pa to možemo napisati u općem obliku:

$$u(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m u_m(x),$$

pri čemu su u_m normalizirane vlastite funkcije polja. U našem konkretnom slučaju TE_{n0} modova:

$$E_y(x) = \sum_{m=1}^{\infty} v_n E'_{yn}(x),$$

pri čemu su koeficijenti v_n definirani relacijom:

$$v_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \int_0^a E_y(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx.$$

Gornja razmatranja u svezi su sa zbivanjima u pravokutnom valovodu i to za TE_{n0} modove. Bez posebnog dokazivanja ustvrditi ćemo da se slična svojstva vlastitih funkcija mogu pokazati da vrijede u općem slučaju valovoda konstantnog presjeka. U svim našim razmatranjima smatramo da možemo rješavati poopćenu valnu (Helmholtzovu) jednadžbu:

$$\text{rot rot } \vec{E}_{trn} - \text{grad div } \vec{E}_{trn} - k^2 \vec{E}_{trn} = \vec{0}, (*)$$

koja vrijedi u čitavom presjeku valovoda i to za propagaciju u +z smjeru i za:

$$k^2 = \omega^2 \mu \epsilon - \gamma^2,$$

uz:

$$\gamma = \alpha + j\beta.$$

Gornju jednadžbu dobivamo uz:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= (\vec{E}_r + \vec{e}_z E_z) e^{-\gamma z}, \\ \vec{H} &= (\vec{H}_r + \vec{e}_z H_z) e^{-\gamma z}. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem u Maxwellove jednadžbe slijedi:

^{viii} Ovu tvrdnju nećemo posebno dokazivati.

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{E}_{tr} &= -j\omega\mu\vec{e}_z H_z, \\ \operatorname{rot} \vec{H}_{tr} &= -j\omega\varepsilon\vec{e}_z E_z,\end{aligned}$$

odnosno:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{E}_{tr} &= \gamma E_z, \\ \operatorname{div} \vec{H}_{tr} &= \gamma H_z,\end{aligned}$$

nakon čega slijedi jednačba (**).

Rješenja te jednačbe moraju zadovoljiti uvjete na granici. Budući da je longitudinalna komponenta električnog polja na konturi jednaka nuli slijedi da je na granici:

$$E_z = 0 \Rightarrow \begin{cases} \vec{n} \times \vec{E}_{tr} = \vec{0} \\ \operatorname{div} \vec{E}_{tr} = 0 \end{cases}.$$

Mogli bi i ovdje dokazati da je:

$$k_n^2 = \frac{\int_S \left(|\operatorname{rot} \vec{E}_{trn}|^2 + |\operatorname{div} \vec{E}_{trn}|^2 \right) dS}{\int_S |\vec{E}_{tr}|^2 dS},$$

realna i pozitivna veličina.

Nadalje, mogli bi dokazati da su različiti modovi propagacije međusobno ortogonalni, dakle da vrijedi:

$$\int_S (\vec{E}_{trn} \cdot \vec{E}_{trp}) dS = 0, \quad n \neq p, \quad k_n \neq 0, \quad k_p \neq 0,$$

što se odnosi i na komponente magnetskog polja.

Prihvatimo poopćenje normalizacije svake vlastite funkcije kao:

$$\int_S (\vec{E}_{trn} \cdot \vec{E}_{trn}) dS = 1,$$

te napišimo vrijednost polja pomoću sume modova:

$$\vec{E}_{tr} = \sum_n v_n \vec{E}_{trn},$$

gdje su koeficijenti:

$$v_n = \int_S (\vec{E}_{tr} \cdot \vec{E}_{trn}) dS.$$

Međutim, da bi zaista generalizirali problem morali bi smatrati da općenito postoji upadni i povratni val što bi mogli izraziti relacijom:

$$\vec{E} = \sum_n \left[\vec{E}_{trn} (v_n^+ e^{-\gamma_n z} + v_n^- e^{\gamma_n z}) + \vec{e}_z \frac{\operatorname{div} \vec{E}_{trn}}{\gamma_n} (v_n^+ e^{-\gamma_n z} - v_n^- e^{\gamma_n z}) \right] \quad (\text{AA})$$

odnosno:

$$\vec{H} = \sum_n \left[\frac{\vec{e}_z \times \vec{E}_{trn}}{Z_{0n}} (v_n^+ e^{-\gamma_n z} - v_n^- e^{\gamma_n z}) - \frac{\text{rot } \vec{E}_{trn}}{Z_{0n} \gamma_n} (v_n^+ e^{-\gamma_n z} + v_n^- e^{\gamma_n z}) \right], \quad (\text{BB})$$

pri čemu je:

$$\gamma_n^2 = k_n^2 - \omega^2 \mu \epsilon.$$

Gornje jednadžbe su općenite i treba voditi računa pri interpretaciji o egzistenciji pojedinog moda kojeg stvarno promatramo. Naime ako bi to bio samo TE mod u jednadžbi (AA) za električno polje otpada drugi član, a valna impedancija bila bi:

$$\text{TE: } Z_{0n} = \frac{j\omega\mu}{\gamma_n},$$

odnosno za slučaj bez gubitaka:

$$\gamma_n = j\beta_{gn} \Rightarrow Z_{0n\text{TE}} = \frac{\omega\mu}{\beta_{gn}}.$$

Kod TM modova otpada drugi član u (BB), a valna impedancija je:

$$\text{TM: } Z_{0n} = \frac{\gamma_n}{j\omega\epsilon},$$

dok kod TEM moda propagacije otpada drugi član u obje jednadžbe (AA) i (BB), a valna impedancija je:

$$\text{TEM: } Z_{0n} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}.$$

Relacije (AA) i (BB) sadrže koeficijente:

$$v_n^+ e^{-\gamma_n z} \pm v_n^- e^{\gamma_n z}.$$

Oni imaju isti oblik kao izrazi za napon i struju kod prijenosne linije:

$$U(z) = U_+ e^{-\gamma z} + U_- e^{+\gamma z},$$

$$I(z) = \frac{1}{Z_0} (U_+ e^{-\gamma z} - U_- e^{+\gamma z}),$$

pa bi se relacije (AA) i (BB) mogle napisati u obliku:

$$\vec{E} = \sum_n \left[\vec{E}_{trn} U_n(z) + \vec{e}_z \frac{\text{div } \vec{E}_{trn}}{\gamma_n} Z_{0n} I_n(z) \right],$$

$$\vec{H} = \sum_n \left[\vec{e}_z \times \vec{E}_{trn} I_n(z) - \frac{\text{rot } \vec{E}_{trn}}{Z_{0n} \gamma_n} U_n(z) \right].$$

Na ovaj način smo uveli u praksu našu raniju tvrdnju da ćemo svaki mod u valovodu tretirati kao posebnu prijenosnu liniju. Pri tome bi U_n i I_n predstavljali napon i struju tih linija za n -ti mod.

Izračunajmo sada snagu prenesenu nekim valovodom. Ta snaga je:

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_S \vec{e}_z \cdot (\vec{E} \times \vec{H}^*) dS = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_S \vec{E} \cdot (-\vec{e}_z \times \vec{H}^*) dS.$$

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_S \sum_n E_{zn} V_n^*(z) \cdot \sum_n E_{zn}^* I_n^*(z) \cdot dS,$$

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_S \sum_n V_n(z) I_n^*(z) dS = \sum_n P_n,$$

pri čemu je P_n snaga koja se prenosi n -tim modom ako bi imali samo upadni val:

$$P_n = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(U_n \cdot I_n^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(I_n Z_{0n} \cdot I_n^*) = \frac{1}{2} |I_n|^2 Z_{0n}.$$

Dakle, snaga koja se prenese valovodom posredstvom n modova ekvivalentna je snazi koja se prenese s n odgovarajućih prijenosnih linija.

Fazna i grupna brzina elektromagnetskog vala

Razmatranjima o prostiranju elektromagnetskog vala duž aksijalne osi valovoda ustvrdili smo da postoje iste zakonitosti pojedinog moda kao i za napon i struju neke prijenosne linije. Međutim naglasimo činjenicu da fazna konstanta u valovodu ima različitu ovisnost o frekvenciji od fazne konstante kod prijenosne linije. Odnosno sjetimo se da kod idealne prijenosne linije karakteristična impedancija nije ovisna o frekvenciji:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}},$$

dok fazna konstanta:

$$\beta_g = \beta = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda},$$

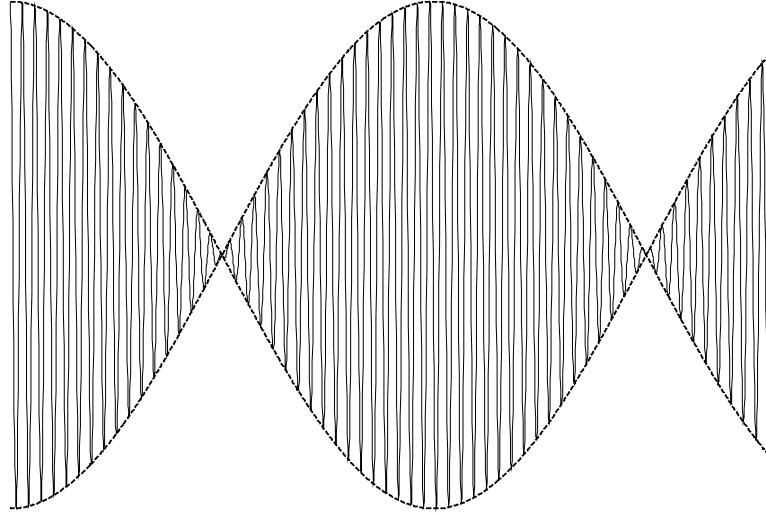
ovisi linearno o frekvenciji (sl. 11). Kod valovoda je fazna konstanta:

$$\beta_g = \sqrt{\mu\epsilon(\omega^2 - \omega_k^2)}.$$

Budući da je fazna brzina:

$$v_p = \frac{\omega}{\beta_g},$$

kod prijenosne linije ona nije funkcija frekvencije dok kod valovoda jest. Dva vala različitih frekvencija koji se propagiraju valovodom imat će dakle različite fazne brzine. Pretpostavimo da imamo signal kao superpoziciju dvaju valova frekvencija ω i $\omega + \Delta\omega$ te faznih konstanti β_g i $\beta_g + \Delta\beta_g$ i, zbog jednostavnosti, jednakih amplituda A koji je opisan relacijom:



Slika 17. Superpozicija dvaju valova različitih frekvencija u valovodu

$$\begin{aligned} & A \cos(\beta_g z - \omega t) + A \cos\left[(\beta_g + \Delta\beta_g)z - (\omega + \Delta\omega)t\right] = \\ & = 2A \cos\left[\frac{1}{2}(\Delta\beta_g z - \Delta\omega t)\right] \cdot \cos\left[\left(\beta_g + \frac{1}{2}\Delta\beta_g\right)z - \left(\omega + \frac{1}{2}\Delta\omega\right)t\right], \end{aligned}$$

pri čemu izraz:

$$\cos\left[\frac{1}{2}(\Delta\beta_g z - \Delta\omega t)\right],$$

predstavlja envelopu ili ovojnici vala, što je skicirano na sl. 17. Brzina kojom se propagira envelopa duž valovoda je konstantna:

$$\Delta\beta_g z - \Delta\omega t = konst.,$$

pa je:

$$\frac{d}{dz}(\Delta\beta_g z - \Delta\omega t) = 0 \Rightarrow \Delta\beta_g \frac{dz}{dt} - \Delta\omega = 0.$$

Brzina kojom se duž valovoda propagira envelopa vala je u skladu s definicijom:

$$v_{env} = \frac{dz}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta_g}.$$

Izraz:

$$\cos\left[\left(\beta_g + \frac{1}{2}\Delta\beta_g\right)z - \left(\omega + \frac{1}{2}\Delta\omega\right)t\right],$$

predstavlja val ispod envelope koji se giba brzinom jednakoj srednjoj faznoj brzini pojedinih superponiranih valova. *Energija koju nose ti signali putovat će brzinom kojom se širi envelopa.* U slučaju da razlika u frekvencijama tih signala postane jednaka nuli ($\Delta\omega = 0$), dva signala postaju jedan i brzina envelope, dakle brzina kojom se propagira energija a koju zovemo **grupna brzina** je:

$$v_g = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta_g} = \frac{d\omega}{d\beta_g}.$$

Dakle, *grupna brzina je brzina prostiranja energije elektromagnetskog vala kružne frekvencije ω .*

Grupna brzina u valovodu konstantnog presjeka *bez gubitaka* je:

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta_g} = \frac{1}{\frac{d\beta_g}{d\omega}} = \frac{\sqrt{\mu\epsilon(\omega^2 - \omega_k^2)}}{\mu\epsilon\omega} = \frac{1}{\mu\epsilon} \frac{\beta_g}{\omega} = \frac{1}{\mu\epsilon} \frac{1}{v_p},$$

odnosno vrijedi:

$$\boxed{v_p v_g = \frac{1}{\mu\epsilon} = v_0^2}.$$

Drugim riječima, umnožak brzine kojom se propagira faza elektromagnetskog vala i brzine kojom se propagira njegova envelope odnosno brzine širenja energije koju taj val nosi, jednaka je kvadratu brzine propagacije elektromagnetskog vala u neograničenom sredstvu zadanih karakteristika. Ako bi to sredstvo bilo vakuum bilo bi:

$$\mu = \mu_0, \epsilon = \epsilon_0 \Rightarrow v_p v_g = c^2,$$

odnosno tada bi taj umnožak fazne i grupne brzine bilo jednak kvadratu brzine propagacije elektromagnetskog vala u slobodnom prostoru, odnosno kvadratu brzine svjetlosti c . Naime:

$$v_p = \frac{\omega}{\beta_g} = \frac{\omega}{\sqrt{\mu\epsilon(\omega^2 - \omega_k^2)}};$$

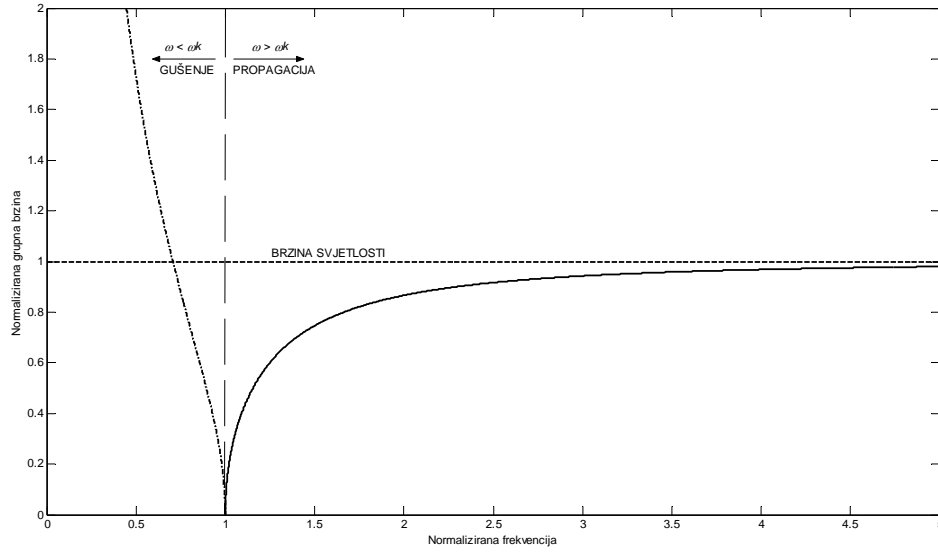
ako se frekvencija približava kritičnoj tada je: $\lim_{\omega \rightarrow \omega_k} v_p = \infty$.

U valovodu je uvijek fazna brzina veća od brzine svjetlosti u sredstvu kojim je ispunjena unutrašnjost valovoda ($v_p > v_0$). Međutim činjenica da je umnožak fazne i grupne brzine konstantan znači:

$$v_p > v_0 \ \& \ v_p v_g = v_0^2 \Rightarrow \underline{v_g < v_0},$$

odnosno daje na znanje da nije narušeno pravilo teorije relativnosti te da se energija elektromagnetskog vala u valovodu stvarno propagira brzinom manjom od brzine svjetlosti.^{ix} Uočimo da za TEM mod, čija je osnovna karakteristika da nema longitudinalne komponente polja, uslijed linearne ovisnosti brzine propagacije o frekvenciji vrijedi:

^{ix}Međutim, drugačija činjenica vrijedi ako promatramo signale čije su frekvencije manje od kritične frekvencije odnosno koje valovod prigušuje, a što se može uočiti i na sl. 16. Da se pokazati da u tom slučaju dio elektromagnetske energije koja unatoč gušenju stigne do točke prijama može doći brzinom većom od svjetlosti, pri čemu nije narušena kauzalnost (moguće je poslati i informaciju). Istaknimo da je analiza tog slučaja analogna predstavljenoj analizi i ni u čemu ne narušava izvedene zaključke a niti postavlja bilo kakve dodatne ograde, te da može poslužiti kao još jedna u nizu potvrda efikasnosti Maxwellove teorije elektromagnetizma. Pojava je eksperimentalno potvrđena, a često se u literaturi naziva **mikrovalno tuneliranje**.



Slika 18. Grupna brzina u ovisnosti o frekvenciji

$$\omega_k = 0 \Rightarrow v_p = v_g = v_0.$$

Na sl. 18 prikazan je dijagram ovisnosti grupne brzine o frekvenciji, pri čemu su obje veličine normalizirane kritičnom frekvencijom. Uočimo da je za frekvencije manje od kritične grupna brzina (kao i fazna brzina) je imaginarna.

Gubici u homogenim valovodima

Do sada smo promatrali modove u idealnim homogenim valovodima, tj. onima čije su stjenke idealno vodljive. Realni valovodi imaju konačno vodljive stjenke, a stoga se mijenjaju rubni uvjeti. Dok smo kod valovoda s idealno vodljivim stjenkama imali situaciju u kojoj nema tangencijalne komponente električnog polja, kod realnih valovoda postoji i ta komponenta. Dakle, umjesto rubnog uvjeta za idealni valovod:

$$\sigma \rightarrow \infty \Rightarrow E_t = 0,$$

na granici realnih valovoda vrijedi:

$$\sigma < \infty \Rightarrow E_{t1} = E_{t2}.$$

Slično tome više ne vrijedi kao kod idealnih valovoda:

$$\sigma \rightarrow \infty \Rightarrow H_t = \kappa,$$

gdje je κ površinska gustoća struje, već je na granici:

$$\sigma < \infty \Rightarrow H_{t1} = H_{t2}.$$

Činjenica da postoji tangencijalna komponenta električnog i magnetskog polja na granici znači da će se određena snaga, iako mala, gubiti u stjenkama valovoda i prema tome predstavljati gubitke u promatranom valovodu. Stoga će se snaga koja se propagira valovodom smanjivati po zakonu:

$$P = P_0 e^{-2\alpha z},$$

gdje je P_0 snaga u točki $z = 0$, a α konstanta gušenja koju želimo izračunati, odnosno:

$$\frac{dP}{dz} = -2\alpha P \Rightarrow \alpha = -\frac{\frac{dP}{dz}}{2P}.$$

Izračunajmo stoga promjenu snage u smjeru propagacije. Znamo da je za k -ti mod snaga:

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_S (\vec{E}_{trk} \times \vec{H}_{tr}^*) \cdot d\vec{S}.$$

Kako je otprije poznato komponente polja možemo izraziti preko normiranih vrijednosti, te su promatrane transverzalne komponente:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{trk} &= \vec{E}_{trk \text{ norm}} \cdot U_k(z), \\ \vec{H}_{trk} &= \vec{e}_z \times \vec{E}_{trk \text{ norm}} \cdot I_k(z). \end{aligned}$$

Njihovim uvrštavanjem u relaciju za snagu dobivamo:

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_S (\vec{E}_{trk \text{ norm}} U_k \times \vec{e}_z \times \vec{E}_{trk \text{ norm}}^* I_k^*) \cdot d\vec{S} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_S \vec{e}_z \cdot (\vec{E}_{trk \text{ norm}} \cdot \vec{E}_{trk \text{ norm}}^*) U_k I_k^* \cdot d\vec{S},$$

odnosno kako je presjek S funkcija varijabli x i y , a struja i napon nisu već su funkcije isključivo varijable z možemo pisati:

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ U_k I_k^* \int_S \left[\vec{e}_z \cdot (\vec{E}_{trk \text{ norm}} \cdot \vec{E}_{trk \text{ norm}}^*) \right] \cdot d\vec{S} \right\}.$$

Kako su pod integralom normirane vrijednosti vrijedi:

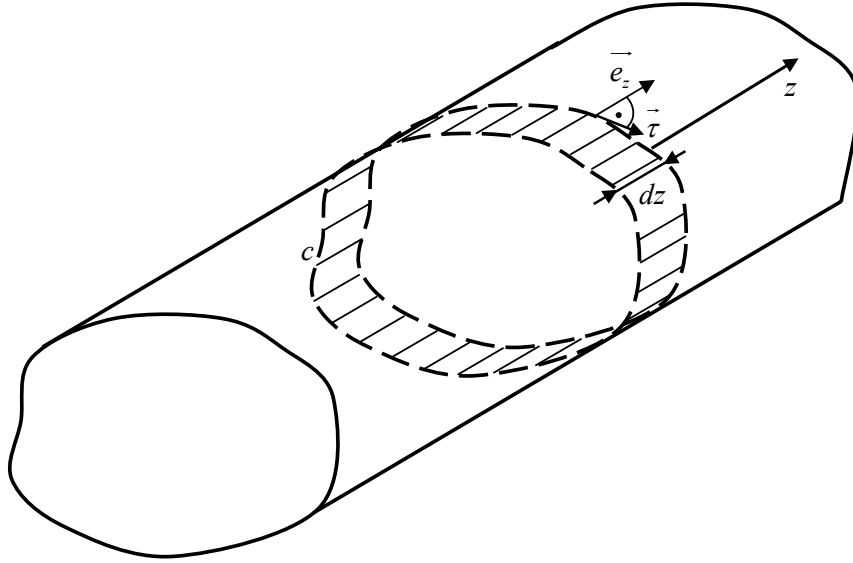
$$\int_S \left[\vec{e}_z \cdot (\vec{E}_{trk \text{ norm}} \cdot \vec{E}_{trk \text{ norm}}^*) \right] \cdot d\vec{S} = 1,$$

pa je:

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (U_k I_k^*) = \frac{1}{2} |I_k|^2 Z_{0k}.$$

Promotrimo gubitak snage dP za infinitezimalno mali pomak dz u smjeru propagacije kao na sl. 19, pri čemu je površina integracije S prikazana crtano određena krivuljom c koja omeđuje presjek valovoda i duljinom dz :

$$dP = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \oint_c \int_z^{z+dz} (\vec{E}_k \times \vec{H}_k^*) \cdot (\vec{\tau} ds \times \vec{e}_z dz),$$



Slika 19. Proračun snage vala koji se propagira valovodom

pri čemu je ds elementarni pomak po krivulji c , a normala na stjenku valovoda (površinu S) je:

$$\vec{e}_0 = \vec{\tau} \times \vec{e}_z.$$

U računanju ove relacije poslužimo se rezultatom kojeg dobijemo za odnos električnog i magnetskog polja kod prolaza ravnog vala kroz vodljive sredine:

$$\vec{e}_0 \times \vec{E}_k^* = \frac{1+j}{2} \delta \mu \omega \vec{H}_k^*,$$

gdje je δ debljina kože koja opisuje stupanj penetracije elektromagnetskog vala u stjenke konačne vodljivosti valovoda:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}},$$

a σ specifična vodljivost stjenke valovoda. Dakle, izraz za gubitke postaje:

$$dP = -\frac{1}{4} \text{Re} \left[(1+j) \delta \mu \omega \oint_c \int_z^{z+dz} (\vec{H}_k \cdot \vec{H}_k^*) \cdot ds dz \right],$$

odnosno:

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{1}{4} \delta \mu \omega \oint_c |\vec{H}_k|^2 ds.$$

Uvrstimo li ovo u izraz za konstantu gušenja dobivamo:

$$\alpha = \frac{\oint_c \delta \mu \omega |\vec{H}_k|^2 ds}{8P} = \frac{\oint_c \delta \mu \omega |\vec{H}_k|^2 ds}{4|I_k|^2 Z_{0k}}.$$

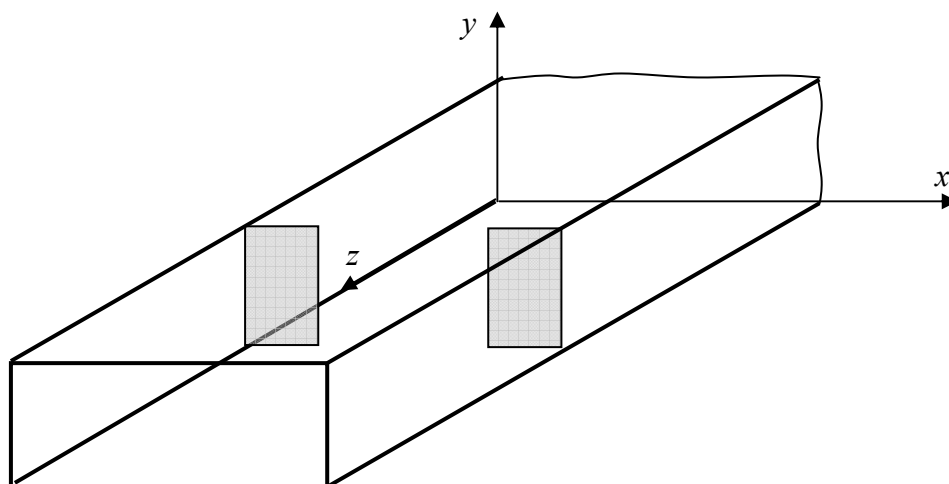
Mikrovalni diskontinuiteti

U prethodnim razmatranjima tretirali smo valovode kao beskonačno duge mikrovalne "uređaje" za prijenos energije. Međutim, očigledno ovi imaju smisla tek kada povezuju određene mikrovalne uređaje. Dakle pred nas se postavlja zahtjev razmatranja zbivanja u valovodima kada su na njih priključeni određeni diskontinuiteti. Da bi problem samo naznačili, pretpostavimo da je u pravokutnom valovodu vodljiva pregrada zanemarive debljine kao na sl. 20. Kao što je naglašeno i prije, ako se radi o pregradi od idealnog vodiča tada je tangencijalna komponenta električnog polja jednaka nuli na njenim stjenkama. Međutim da smo u tom valovodu imali TE₁₀ mod propagacije taj uvjet na pregradi nije za njega zadovoljen. Stoga će se na mjestu diskontinuiteta generirati određeni broj ostalih modova tako da spomenuti granični uvjet bude zadovoljen. Većina tih modova ili svi nemaju mogućnost propagacije (konstanta propagacije imaginarna vrijednost), pa na izvjesnoj udaljenosti od diskontinuiteta u smjeru propagacije nemamo više tih modova. Polje na mjestu diskontinuiteta kao i svagdje u valovodu može se predložiti linearnom kombinacijom funkcija polja od raznih modova. Ovdje ćemo bez dokazivanja ortogonalnosti ustvrditi:

$$\int_S (\vec{E}_{tn} \cdot \vec{E}_{tk}) dS = 0, \quad n \neq k.$$

Posljedica ortogonalnosti dvaju različitih modova propagacije očituje se u tome da se valovodom propagira napose snaga svakog pojedinog moda bez interakcije.

Obzirom na činjenicu da se elektromagnetska polja propagiraju duž valovoda na isti način kao napon i struja po prijenosnoj liniji, te nadalje da smo utvrdili za jednostavne strukture linija prijelaz s jednih na drugi par veličina, moguće je i ovdje na valovodima definirati u matematičkom smislu par veličina slično naponu i struji čiji će omjer predstavljati impedanciju. Na ovaj način moći ćemo zbivanja u valovodu na kojeg su priključeni određeni diskontinuiteti odnosno sklopovi tretirati u velikom broju slučajeva analizom krugova s raspodijeljenim parametrima koju već poznajemo. Pri tome ćemo, obzirom na ortogonalnost moći svaki pojedini mod zamijeniti posebnom prijenosnom linijom.



Slika 20. Vodljiva pregrada u pravokutnom valovodu

Promotrimo primjer TE₁₀ moda koji je dominantan u pravokutnom valovodu. Transverzalne komponente polja su u tom slučaju:

$$E_y = E_0 \sin \frac{\pi x}{a} \cdot e^{-j\beta_g z},$$

$$H_x = \frac{\beta_g}{\omega\mu} E_0 \sin \frac{\pi x}{a} \cdot e^{-j\beta_g z},$$

Uvedimo sada funkcije U i I koje ne ovise o transverzalnim koordinatama, a zadržavaju samo ovisnost o z :

$$E_y = U(z) \frac{1}{K} \sin \frac{\pi x}{a},$$

$$H_x = I(z) \frac{1}{K} \sin \frac{\pi x}{a},$$

gdje je:

$$U(z) = KE_0 e^{-j\beta_g z},$$

$$I(z) = K \frac{\beta_g}{\omega\mu} E_0 e^{-j\beta_g z}.$$

Snaga prenesena pomoću transverzalnih komponenti elektromagnetskog polja je:

$$P = \iint_S E_y H_x^* dS = \frac{\beta_g}{\omega\mu} E_0^2 \int_0^a \int_0^b \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx dy,$$

$$P = \frac{\beta_g E_0^2}{2\omega\mu} \frac{ab}{2}.$$

Snaga predstavljena naponom i strujom je:

$$P = \frac{1}{2} \frac{UU^*}{Z_0} = \frac{1}{2} \frac{K^2 E_0^2}{Z_0},$$

isto tako:

$$P = \frac{1}{2} II^* Z_0 = \frac{1}{2} \frac{\beta_g^2}{\omega^2 \mu^2} K^2 E_0^2 Z_0,$$

odnosno:

$$P = \frac{1}{2} UI^* = \frac{1}{2} \frac{\beta_g}{\omega\mu} K^2 E_0^2.$$

Vidimo da je valna impedancija valovoda:

$$Z_0 = \frac{\omega\mu}{\beta_g},$$



Slika 21. Terminiranje valovoda prilagođenom impedancijom

a konstanta K :

$$K^2 = \frac{ab}{2} \frac{\beta_g}{\omega\mu} Z_0 \Rightarrow K = \sqrt{\frac{ab}{2}}.$$

U slučaju valovoda koji je opterećen proizvoljnim diskontinuitetom općenito postoji upadni i reflektirani val, pa možemo pisati iste jednadžbe za napon i struju kao i kod prijenosne linije:

$$U(z) = U_+ e^{-j\beta_g z} + U_- e^{j\beta_g z},$$

$$I(z) = \frac{1}{Z_0} (U_+ e^{-j\beta_g z} - U_- e^{j\beta_g z}).$$

Promotrimo za primjer prilagođenu impedanciju, ostvarenu kao na sl. 21. U tom slučaju nema reflektiranog vala pa možemo pisati:

$$U(z) = U_+ e^{-j\beta_g z},$$

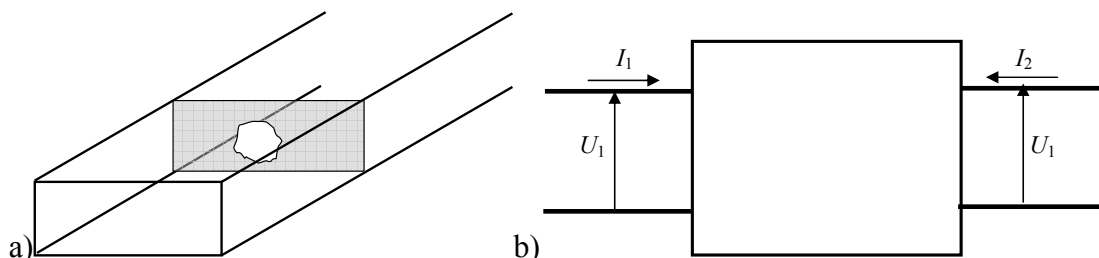
$$I(z) = \frac{U_+}{Z_0} e^{-j\beta_g z},$$

te je normirana impedancija:

$$Z_n(z) = \frac{Z(z)}{Z_0} = \frac{1}{Z_0} \frac{U(z)}{I(z)} = 1,$$


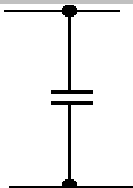
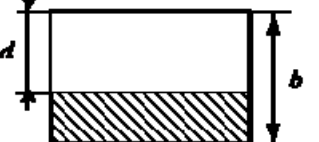
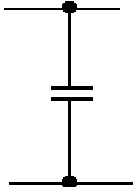
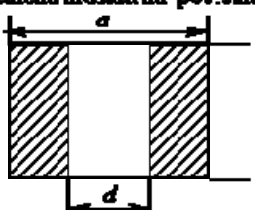
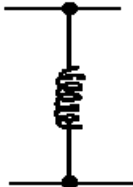
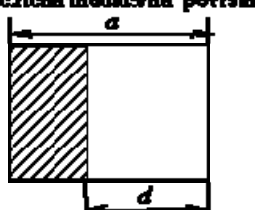
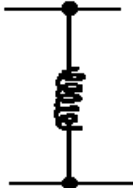
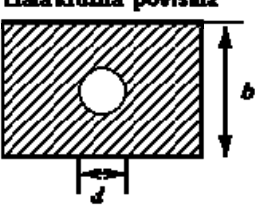
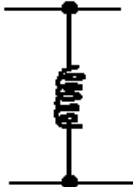
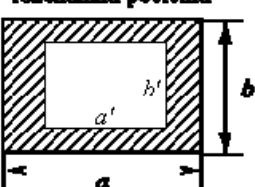
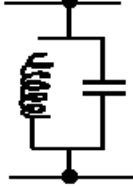
kao što smo već znali za slučaj prilagođenog opterećenja na prijenosnoj liniji.

Općenito u slučaj diskontinuiteta u valovodu kao primjerice na sl. 22a, možemo predstaviti ekvivalentnom shemom za sklopove s dva priključka kao na sl. 22b, pa možemo pisati:



Slika 22. a. Diskontinuitet u obliku tanke ravnine sa šupljinom proizvoljnog presjeka,
b. Ekvivalentna shema

TABLICA 1. RAZLIČITI TIPOVI PREGRADA U PRAVOKUTNOM VALOVODU

	Poprečni presjek	Ekvivalentna shema	Normirana impedancija
1	<p>simetrična kapacitivna površina</p> 		$\frac{Z}{Z_0} = -j \frac{\lambda_g}{4b} \left(\ln \frac{2b}{\pi d} + \frac{b^2}{2\lambda_g^2} \right); \quad \frac{d}{b} \ll 1$ $\frac{Z}{Z_0} = -j \frac{2b\lambda_g}{\pi^2 (b-d)^2}; \quad \frac{b-d}{b} \ll 1$
2	<p>asimetrična kapacitivna površina</p> 		$\frac{Z}{Z_0} = -j \frac{\lambda_g}{8b} \left(\ln \frac{2b}{\pi d} + \frac{b^2}{\lambda_g^2} \right); \quad \frac{d}{b} \ll 1$ $\frac{Z}{Z_0} = -j \frac{b\lambda_g}{\pi^2 (b-d)^2}; \quad \frac{b-d}{b} \ll 1$
3	<p>simetrična induktivna površina</p> 		$\frac{Z}{Z_0} = j \frac{a}{\lambda_g} \tan^2 \frac{\pi d}{2a} \left(1 + 6 \frac{\pi^2 d^2}{\lambda_g^2} \right); \quad \frac{d}{a} \ll 1$ $\frac{Z}{Z_0} = j \frac{a}{\lambda_g} \cot^2 2\pi \frac{a-d}{a} \left[1 + \frac{8\pi^2 (a-d)^2}{3\lambda_g^2} \right]; \quad \frac{a-d}{a} \ll 1$
4	<p>asimetrična induktivna površina</p> 		$\frac{Z}{Z_0} = \frac{j2a^3}{\pi^2 \lambda_g (a-d)^2 \left[1 + \frac{\pi^2 (a-d)^2}{\lambda_g^2} \ln \frac{\pi(a-d)}{2a} \right]}; \quad \frac{a-d}{a} \ll 1$
5	<p>malakružna površina</p> 		$\frac{Z}{Z_0} = j \frac{2\pi d^3}{\lambda_g b \lambda_g}; \quad d \ll b$
6	<p>rezonantna površina</p> 		$\frac{Z}{Z_0} \rightarrow \infty, \quad \frac{a'}{b'} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a'} \right)^2} = \frac{a}{b} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a} \right)^2}$

$$U_1 = I_1 Z_{11} + I_2 Z_{12}$$

$$U_2 = I_1 Z_{21} + I_2 Z_{22},$$

ili u matričnom obliku:

$$[U] = [Z] \times [I] \Leftrightarrow \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}.$$

Zbog simetričnosti vrijedi da je:

$$Z_{12} = Z_{21}.$$

Vidimo da je Z -matrica u ovom slučaju 2×2 , dok bi u slučaju strukture s n priključaka ta matrica bila dimenzija $n \times n$. Različiti tipovi prepreka u pravokutnom valovodu i njihove ekvivalentne sheme predstavljene su u tablici 1.

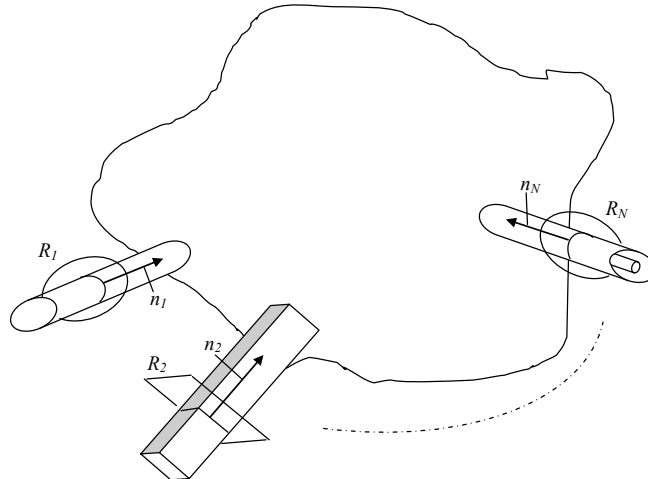
5. Mikrovalni sklopovi

Valovodi služe za prijenos energije između različitih mikrovalnih sklopova. Pri tome, nastojimo da se taj prijenos odvija jednim modom propagacije, kojeg znamo pobuditi i kojeg znamo primiti. Na prijelazu iz valovoda u neku mikrovalnu strukturu, da bi bili zadovoljeni uvjeti na granici, generira se niz modova zbog zadovoljenja tih uvjeta. Međutim, ti modovi se prigušuju u valovodu (fazna konstanta im je imaginarna) i na nekoj udaljenosti od te strukture iščezavaju. Stoga ćemo umjesto računanja polja što bi predstavljalo nepremostive poteškoće smatrati da je promatrana struktura kutija koju poznamo preko zbivanja na njenim priključcima (prijenosnim linijama i valovodima). Referentnu ravninu u tim priključcima odabiremo dovoljno daleko od strukture kako bi izbjegli mogućnost postojanja neželjenih modova. Dakle, mi tu strukturu odnosno mikrovalni sklop možemo opisati pomoću matrice impedancija ili tzv. matrica raspršenja. Pri tome, ograničit ćemo se na promatranje linearnih, pasivnih sklopova.

Na sl. 1 je prikazana jedna takva struktura s N priključaka. U svakom priključku propagira se po jedan mod. Ako bi se u fizičkom priključku propagiralo više modova tada bi ih zamijenili s odgovarajućim brojem linija. Na slici su označene referentne ravnine koje su okomite na smjer propagacije. U referentnoj ravnini k -tog priključka postoje transverzalne komponente električnog i magnetskog polja, koje možemo predočiti izrazima:

$$\begin{aligned}\vec{E}_{tr,k} &= \vec{E}'_{tr,k}(x, y)U_k(z), \\ \vec{H}_{tr,k} &= \vec{H}'_{tr,k}(x, y)I_k(z),\end{aligned}$$

pri čemu su $E'_{tr,k}$ i $H'_{tr,k}$ normalizirane funkcije polja k -tog priključka koji se može poistovjetiti s fizičkim priključkom ako u njemu propagira samo jedan mod. Međutim, ako postoji više modova tada je to samo električki priključak koji odgovara određenom modu. Koeficijenti U_k i I_k zadovoljavaju jednadžbe prijenosne linije, kako je prikazano u poglavlju 4. Međutim treba uočiti da će bilo U_k bilo I_k predstavljati koeficijente "napona" odnosno "struje" koji su superpozicija vala koji dolazi u strukturu i vala koji dolazi iz nje, dakle veličine proporcionalne stojnom valu. Mi međutim želimo izraziti E_k i H_k pomoću tzv. normalnih modova, a koji će tretirati putujuće valove u smjeru strukture i u suprotnom smjeru. Takvi modovi biti će definirani diferencijalnom jednadžbom oblika:



Slika 1. Mikrovalna struktura s N priključaka raznih tipova

$$\frac{\partial a_k}{\partial z} = p a_k,$$

gdje je p konstanta. Rješenja ove jednadžbe su putujući valovi:

$$U_k = U_k^+ e^{-\gamma_k z} + U_k^- e^{+\gamma_k z}$$

$$I_k = \frac{1}{Z_{0k}} (U_k^+ e^{-\gamma_k z} - U_k^- e^{+\gamma_k z})$$

Onaj u smjeru strukture označimo s:

$$a_k = r U_k^+ e^{-\gamma_k z},$$

dok je putujući val iz strukture:

$$b_k = r U_k^- e^{+\gamma_k z}.$$

Odredimo tako realnu konstantu r da nam radna snaga k -tog priključka koja se propagira u smjeru strukture bude:

$$P_{k,up} = a_k \cdot a_k^*,$$

a radna snaga koja izlazi iz k -tog priključka:

$$P_{k,iz} = b_k \cdot b_k^*.$$

Stoga je ukupna radna snaga k -tog priključka:

$$P_k = P_{k,up} - P_{k,iz} = a_k a_k^* - b_k b_k^*. (*)$$

Od ranije znamo da je snaga P_k izražena pomoću stojnih valova:

$$P_k = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(U_k I_k^*).$$

Dakle je:

$$P_k = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{r} a_k + \frac{1}{r} b_k \right) \left(\frac{1}{r} a_k^* - \frac{1}{r} b_k^* \right) \frac{1}{Z_{0k}^*},$$

$$P_k = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{r^2} (a_k a_k^* - a_k b_k^* + a_k^* b_k - b_k b_k^*) \frac{1}{Z_{0k}^*} \right].$$

Drugi i treći član u zagradi su zbrojeni čisto imaginarni broj jer uzevši:

$$\left. \begin{aligned} a_k &= A_1 + jA_2 \\ b_k &= B_1 + jB_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_k^* b_k - a_k b_k^* = jA_1 (B_2 - B_1),$$

pa je uz (*):

$$P_k = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \frac{1}{\operatorname{Re}(Z_{0k})} (a_k a_k^* - b_k b_k^*) = a_k a_k^* - b_k b_k^*,$$

iz čega slijedi da je:

$$\frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \frac{1}{\operatorname{Re}(Z_{0k})} = 1 \Rightarrow \boxed{r = \sqrt{\frac{1}{2 \operatorname{Re}(Z_{0k})}}}.$$

Dakle, promatrač u referentnoj ravnini k -tog priključka promatra dva putujuća vala, od kojih je jedan ide u smjeru normale, čija je efektivna amplituda a_k . Taj val može u promatrani sklop dolaziti iz generatora ili neke druge strukture. Drugi val efektivne vrijednosti b_k propagira se u suprotnom smjeru. On dolazi u referentnu ravninu k -tog priključka iz strukture i to bilo kao posljedica refleksije upadnog vala od strukture zbog neprilagođenja, bilo zbog uzbudivanja tog od ostalih priključaka. Dakle struktura je karakterizirana s dva fenomena: refleksije i transmisije. Znači i matrica raspršenja koja će povezivati međusobno sve upadne valove sa svim izlaznim valovima iz strukture imat će elemente koji karakteriziraju koeficijente refleksije, odnosno transmisije.

Pozabavimo se malo gornjom relacijom. Rekli smo da su napon i struja u k -tom priključku i to u referentnoj ravnini:

$$\begin{aligned} U_k &= \frac{1}{r} (a_k + b_k) \\ I_k &= \frac{1}{r Z_{0k}} (a_k - b_k) \end{aligned} \quad (**)$$

gdje je (za slučaj da nema gubitaka):

$$\begin{aligned} a_k &= r U_k^+(z_0) e^{-j\beta_{gk}z} = a_{k0} e^{-j\beta_{gk}z} \\ b_k &= r U_k^-(z_0) e^{+j\beta_{gk}z} = b_{k0} e^{+j\beta_{gk}z} \end{aligned}$$

pri čemu smo pretpostavili da je z udaljenost od ishodišta koordinatnog sustava do referentne ravnine. Stoga bi a_{k0} i b_{k0} bile vrijednosti upadnog i reflektiranog naponskog vala u ishodištu.

Pretpostavimo sada da su svi priključci osim i -tog prilagođeni i da nemaju priključen generator. Dakle je:

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{i-1} = a_{i+1} = \dots = a_N = 0 \text{ \& } a_i \neq 0.$$

Tada je na nekom mjestu z i -tog priključka omjer vala koji dolazi iz strukture, koji u ovom slučaju predstavlja val reflektiran od strukture (jer su svi ostali $a_{k,k \neq i} = 0$) i vala koji ulazi u strukturu jednak koeficijentu refleksije i -tog priključka:

$$\Gamma_i = \frac{b_i}{a_i} = \frac{b_{i0} e^{+j\beta_{gi}z}}{a_{i0} e^{-j\beta_{gi}z}} = \frac{b_{i0}}{a_{i0}} e^{j2\beta_{gi}z}.$$

Dogovorimo se sada o izboru položaja ishodišta koordinatnog sustava. Neka je $z = 0$ u referentnoj ravnini i -tog priključka, pa je koeficijent refleksije:

$$\Gamma_i = \frac{b_{i0}}{a_{i0}} = s_{ii},$$

odnosno možemo pisati:

$$b_i = s_{ii} a_i.$$

Dakle element matrice s_{ii} jednak je **koeficijentu refleksije** Γ_i u specijalnom slučaju kada su svi priključci osim k -tog prilagođeni. Zamijenimo sada prilagođeno opterećenje u j -tom priključku prilagođenim generatorom koji u referentnu ravninu j -tog priključka odašilje upadni val a_j . Snagu tog generatora osjeća i -ti priključak, pa je njegov izlazni signal povećan za $s_{ij}a_j$, tj. on je jednak:

$$b_i = s_{ii} a_i + s_{ij} a_j.$$

Ovdje je s_{ij} **koeficijent transmisije** u i -tom priključku zbog generatora u j -tom priključku. Ako ovo poopćimo na svih N ulaza vrijedi:

$$\begin{aligned} b_1 &= s_{11}a_1 + s_{12}a_2 + \dots + s_{1N}a_N \\ b_2 &= s_{21}a_1 + s_{22}a_2 + \dots + s_{2N}a_N \\ &\vdots \\ b_N &= s_{N1}a_1 + s_{N2}a_2 + \dots + s_{NN}a_N \end{aligned},$$

ili u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1N} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{N1} & s_{N2} & \cdots & s_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}.$$

Dakle, ako struktura ima N priključaka, odnosno općenito N upadnih valova a_1, a_2, \dots, a_N i N izlaznih valova s efektivnim amplitudama b_1, b_2, \dots, b_N onda su ti valovi međusobno povezani relacijom:

$$[b] = [S] \times [a],$$

gdje je $[S]$ $N \times N$ matrica, a $[b]$ i $[a]$ su $N \times 1$ odnosno jednostupčane matrice.

Pretpostavimo sada da je mikrovalna struktura kojoj želimo napisati matricu raspršenja idealna, što znači da se u njoj neće trošiti elektromagnetska energija. To znači da je suma snaga koje uđu u strukturu jednaka sumi snaga koje iz nje izađu:

$$P = \sum_{i=1}^N (a_i a_i^* - b_i b_i^*) = 0.$$

Napišimo ovo u matričnom obliku:

$$[\widetilde{a}]^* [a] - [\widetilde{b}]^* [b] = 0,$$

gdje je $[\widetilde{a}]^*$ transponirana konjugirana matrica matrice $[a]$. Ako u tu relaciju uvrstimo:

$$[b] = [S][a] \text{ i } [\widetilde{b}]^* = [\widetilde{a}]^* [S]^*$$

dobije se:

$$\begin{aligned}\widetilde{[a]}^* [a] - \widetilde{[a]}^* \widetilde{[S]}^* [S] [a] &= 0, \\ \widetilde{[a]}^* ([E] - \widetilde{[S]}^* [S]) [a] &= 0,\end{aligned}$$

iz čega slijedi svojstvo matrice raspršenja za strukturu bez gubitaka:

$$\boxed{\widetilde{[S]}^* [S] = [E]}, \quad (!)$$

gdje je $[E]$ jedinična $N \times N$ matrica:

$$[E] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Ako strukture koje promatramo ispunjavaju izotropni mediji moglo bi se pomoću Maxwellovih jednažbi dokazati da za koeficijente transmisije vrijedi princip recipročnosti, odnosno:

$$S_{ij} = S_{ji},$$

što onda znači da je:

$$\begin{aligned}\widetilde{[S]}^* &= [S]^* \\ \widetilde{[S]} &= [S]\end{aligned} \quad (!!)$$

Međutim moguće je definirati mikrovalnu strukturu s N priključaka i pomoću matrice impedancija $[Z]$, odnosno matrice admitancija $[Y]$. Za svaki priključak znamo koeficijente U_k i I_k . U tom slučaju mogli bi napisati relacije:

$$\begin{aligned}[U] &= [Z][I] \\ [I] &= [Y][U]\end{aligned} \quad (***)$$

iz čega slijedi da su $[Z]$ i $[Y]$ $N \times N$ matrice pri čemu su $[U]$ i $[I]$ jednostupčane matrice, te:

$$[Z] = [Y]^{-1}.$$

Uzimajući u obzir (**) te da je karakteristična impedancija realna jer nema gubitaka imamo:

$$\begin{aligned}a_k &= \frac{r}{2}(U_k + Z_{0k} I_k) \\ b_k &= \frac{r}{2}(U_k - Z_{0k} I_k)\end{aligned},$$

pa uvrštavajući izraz za r dobivamo:

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{8Z_{0k}}}(U_k + Z_{0k}I_k)$$

$$b_k = \frac{1}{\sqrt{8Z_{0k}}}(U_k - Z_{0k}I_k) \quad ,$$

Ako ovo proširimo na svih N ulaza i napišemo u matričnoj formi:

$$\begin{aligned} [a] &= [V'] + [I'] \\ [b] &= [V'] - [I'] \end{aligned} \quad ,$$

gdje su elementi:

$$V'_k = \frac{V_k}{\sqrt{8Z_{0k}}} \quad \text{i} \quad I'_k = \frac{I_k Z_{0k}}{\sqrt{8Z_{0k}}} .$$

Uvrstimo (***) u posljednju matričnu jednadžbu, pa je:

$$\begin{aligned} [a] &= ([Z] + [E])[I'] \\ [b] &= ([Z] - [E])[I'] \end{aligned} \quad .$$

Uz relaciju:

$$[b] = [S][a] ,$$

dobije se veza između matrice raspršenja i matrice impedancije:

$$\begin{aligned} [S][a] &= ([Z] - [E])([Z] + [E])^{-1} [a] , \\ \boxed{[S] &= ([Z] - [E])([Z] + [E])^{-1}} . \end{aligned}$$

Sličnim postupkom možemo dobiti vezu između $[Y]$ i $[Z]$ matrica s matricom $[S]$:

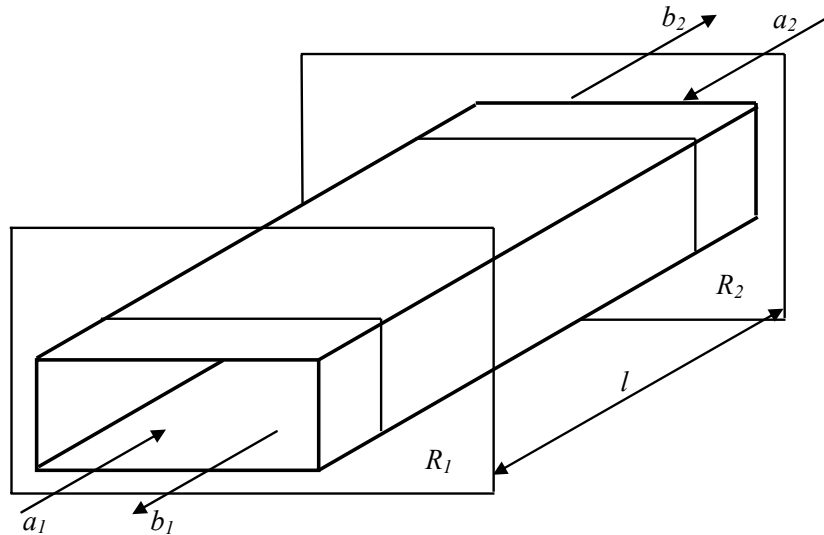
$$\begin{aligned} [Y] &= ([E] - [S])([E] + [S])^{-1} \\ [Z] &= ([E] + [S])([E] - [S])^{-1} . \end{aligned}$$

Rezimirajmo još za kraj da se formiranje matrice raspršenja za pasivne linearne strukture zasniva na zakonu o očuvanju energije (!), uvjeta recipročnosti (!!) odnosno neregiprocčnosti te na simetrijama, koje su rezultat geometrijskih i elektroničkih svojstava pojedine strukture. Sada ćemo to ilustrirati na određenim primjerima.

Valovod (waveguide)

Neka je promatrana mikrovalna struktura jedan odsječak homogenog valovoda duljine l , primjerice kao na sl. 2. S obzirom da struktura ima dva priključka možemo pisati:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} .$$



Slika 2. Odsječak pravokutnog valovoda duljine l

Uz uvjet da je odsječak valovoda ispunjen izotropnim medijem on je recipročan, pa je i matrica raspršenja recipročna:

$$s_{12} = s_{21}.$$

Nadalje, moguće je prilagoditi obje strane, pa su koeficijenti refleksije:

$$s_{11} = s_{22} = 0.$$

Sada možemo pisati:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & s_{12} \\ s_{12} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}.$$

Polje se propagira u $+z$ smjeru, pa budući da nema gubitaka unutar odsječka vrijedi:

$$b_2 = a_1 e^{-j\beta_g(z+l)},$$

odnosno ako ishodište $z = 0$ postavimo u referentnu ravninu R_1 :

$$b_2 = a_1 e^{-j\beta_g l}.$$

Kako je:

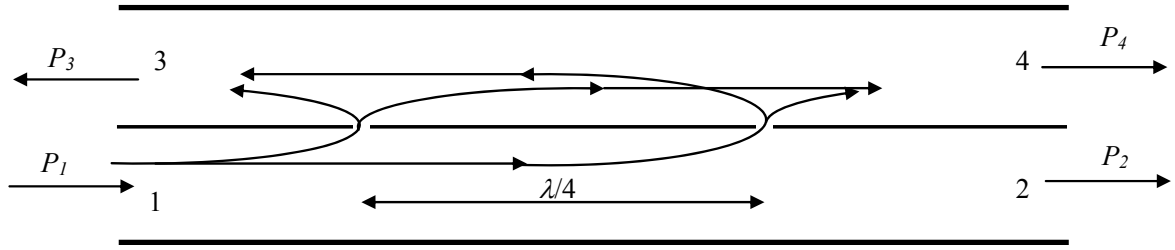
$$s_{22} = 0 \Rightarrow b_2 = s_{21}a_1 \Rightarrow s_{21} = s_{12} = e^{-j\beta_g l},$$

matrica raspršenja za odsječak homogenog valovoda s idealno vodljivim stjenkama bit će:

$$[S] = e^{-j\beta_g l} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sprega dvaju valovoda - usmjerni sprežnik (directional coupler)

Promotrimo spregu dvaju valovoda ostvarenu dvama otvorima međusobno razmaknutim četvrtinu valne duljine, čiji je uzdužni presjek prikazan na sl. 3.



Slika 3. Usmjerni sprežnik

Postavimo generator na neki od priključaka sklopa. Elektromagnetska energija koja prodire kroz bliži otvor te se propagira natrag prema drugom priključku na istoj strani (iz 1 u 3 ili iz 2 u 4 i obrnuto) poništava se valom koji prodire kroz dalji otvor i koji se propagira u istom smjeru, uslijed toga što su ta dva vala u protufazi. Nasuprot tome, dijelovi energije koja prodire kroz otvore te se propagira prema naprijed konstruktivno interferiraju. Drugim riječima želimo da primjerice energija propagira iz priključka 1 u 2 i 4, ali ne u 3.

Svim ulazi mogu se prilagoditi pa je:

$$s_{11} = s_{22} = s_{33} = s_{44} = 0.$$

Kako u idealnom slučaju nema prijenosa energije iz priključka 1 u 3, iz 2 u 4 i obrnuto možemo pisati:

$$s_{13} = s_{31} = s_{24} = s_{42} = 0.$$

Nadalje je zbog dvostruke simetričnosti usmjernog sprežnika:

$$\begin{aligned} s_{12} &= s_{21} = s_{34} = s_{43} = A \\ s_{14} &= s_{41} = s_{23} = s_{32} = B \end{aligned}$$

pa je matrica raspršenja:

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & s_{12} & 0 & s_{14} \\ s_{12} & 0 & s_{14} & 0 \\ 0 & s_{14} & 0 & s_{12} \\ s_{14} & 0 & s_{12} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A & 0 & B \\ A & 0 & B & 0 \\ 0 & B & 0 & A \\ B & 0 & A & 0 \end{bmatrix}.$$

Zbog:

$$[\widetilde{S}]^* [S] = [E],$$

što je posljedica zakona o očuvanju energije primijenjene na idealnu strukturu možemo pisati:

$$\begin{bmatrix} 0 & A^* & 0 & B^* \\ A^* & 0 & B^* & 0 \\ 0 & B^* & 0 & A^* \\ B^* & 0 & A^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & A & 0 & B \\ A & 0 & B & 0 \\ 0 & B & 0 & A \\ B & 0 & A & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

iz čega slijedi:

$$\begin{aligned} |A|^2 + |B|^2 &= 1 \\ A^* B + B^* A &= 0 \end{aligned}$$

Neka je A realna veličina. Onda je:

$$\left. \begin{array}{l} |B|^2 = 1 - A^2 \\ B = -B^* \end{array} \right\} \Rightarrow B = j\sqrt{1 - A^2}.$$

Konačni oblik matrice raspršenja za idealni usmjerni sprežnik je:

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & A & 0 & j\sqrt{1 - A^2} \\ A & 0 & j\sqrt{1 - A^2} & 0 \\ 0 & j\sqrt{1 - A^2} & 0 & A \\ j\sqrt{1 - A^2} & 0 & A & 0 \end{bmatrix}.$$

Za usmjerne sprežnike definiramo faktor sprege u decibelima kao:

$$FS = 10 \log \frac{P_1}{P_4},$$

te kako u praksi nema idealnih sprežnika i faktor usmjerenosti:

$$FU = 10 \log \frac{P_1}{P_3},$$

pri čemu uzimamo da su svi priključci prilagođeni te da se prilagođeni generator nalazi na priključku 1, odnosno:

$$P_1 = \frac{1}{2} a_1 a_1^*,$$

$$P_i = \frac{1}{2} b_i b_i^*, \quad i = 2, 3, 4..$$

Neka je primjerice faktor sprege 3 dB. Tada je:

$$FS = 10 \log \frac{P_1}{P_4} = 3 \text{ dB} \Rightarrow P_1 = 2P_4 \Rightarrow |a_1|^2 = 2|b_4|^2,$$

Koristeći matricu raspršenja imamo da je:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A & 0 & j\sqrt{1 - A^2} \\ A & 0 & j\sqrt{1 - A^2} & 0 \\ 0 & j\sqrt{1 - A^2} & 0 & A \\ j\sqrt{1 - A^2} & 0 & A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$b_4 = ja_1 \sqrt{1 - A^2} \Rightarrow |a_1|^2 = 2|a_1|^2 (1 - A^2) \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

pa ona za 3-dB usmjerni sprežnik glasi:

$$[S]_{3\text{dB}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & j \\ 1 & 0 & j & 0 \\ 0 & j & 0 & 1 \\ j & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Slično možemo izvesti matricu raspršenja za 10-dB usmjerni sprežnik kao:

$$[S]_{10\text{dB}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & j \\ 3 & 0 & j & 0 \\ 0 & j & 0 & 3 \\ j & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Magični T

Magični T je element s četiri ulaza kao što je prikazano na sl. 4. Ako elektromagnetski val ulazi na priključku 4 on se podjednako raspoređuje na otvore 1 i 2. Sprega između tih priključaka odvija se preko magnetskog polja kao što je prikazano na sl. 5b. Vektor električnog polja je u fazi u obje grane (1 i 2) pa su valovi koji dođu u te otvore u fazi i jednake amplitude. Ako uzbudimo otvor 3 (*E*-otvor) električno polje je u protufazi u otvorima 1 i 2 s jednakom amplitudom, kao na sl. 5a. Iz geometrije na sl. 5 je evidentno da nema direktnog širenja vala iz 3 u 4 te zbog recipročnosti ni iz 4 u 3.

Zbog geometrije odnosno recipročnosti možemo staviti:

$$S_{ij} = S_{ji}.$$

Dakle, između priključaka 3 i 4 ne postoji prijenos, a element je recipročan. To znači:

$$\begin{aligned} S_{34} &= S_{43} = 0 \\ S_{21} &= S_{12} \quad S_{23} = S_{32} \\ S_{13} &= S_{31} \quad S_{24} = S_{42} \\ S_{14} &= S_{41} \end{aligned}.$$

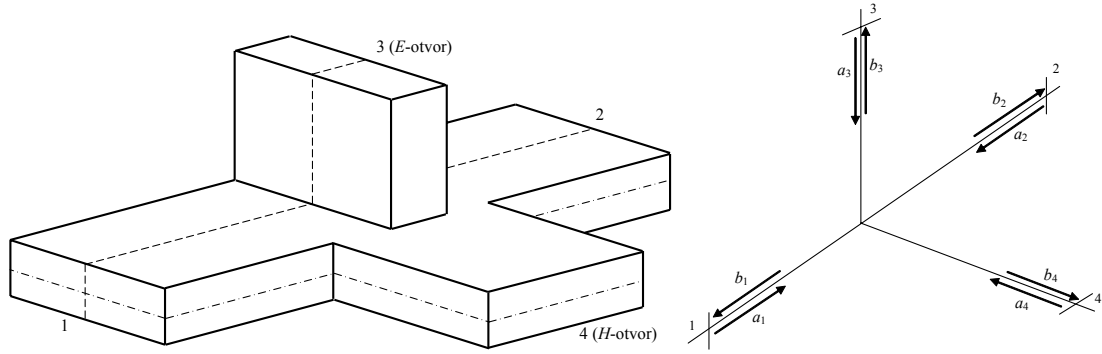
Iz slike polja na sl. 5a možemo zaključiti da su priključci 1 i 2 s obzirom na 3 u protufazi pa su koeficijenti matrice:

$$S_{13} = S_{31} = -S_{23} = -S_{32},$$

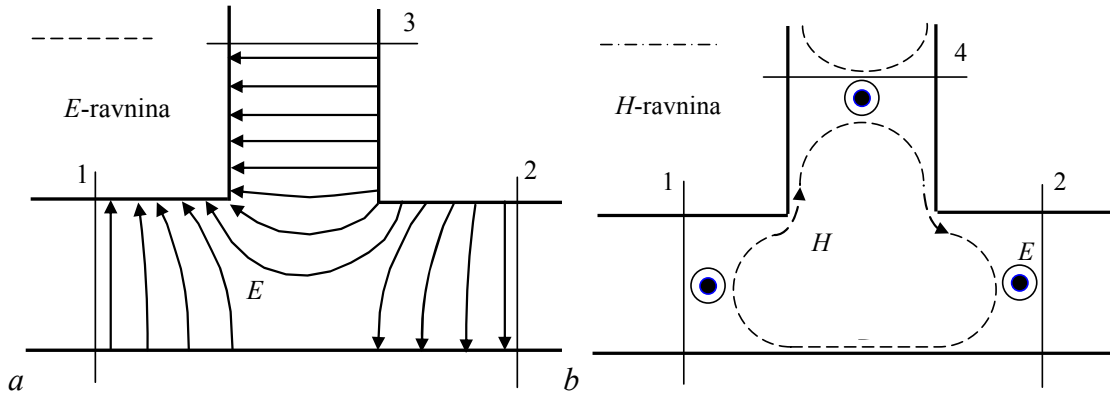
dok iz slike polja na sl. 5b zaključujemo da su priključci 1 i 2 s obzirom na 4 u fazi, pa su:

$$S_{14} = S_{41} = S_{24} = S_{42}.$$

Dakle, matrica raspršenja je:



Slika 4. Magični T



Slika 5. T-element u: a. E-ravnini (presjek crtano) b. H-ravnini (presjek crta-točka),

$$[S] = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{12} & s_{22} & -s_{13} & s_{14} \\ s_{13} & -s_{13} & s_{33} & 0 \\ s_{14} & s_{14} & 0 & s_{44} \end{bmatrix}.$$

Može se pomoću svojstva matrice raspršenja dokazati da ako izvršimo prilagođenje na priključcima 3 i 4, postojat će prilagođenje i na ulazima 1 i 2, te da nema ni prijenosa energije iz 1 u 2, pa je:

$$s_{11} = s_{22} = s_{33} = s_{44} = 0 \text{ i } s_{12} = s_{21} = 0.$$

Dakle, uvrstimo $s_{33} = s_{44} = 0$ u posljednju relaciju za matricu raspršenja i uzmimo u obzir svojstvo matrice (!):

$$\begin{bmatrix} s_{11}^* & s_{12}^* & s_{13}^* & s_{14}^* \\ s_{12}^* & s_{22}^* & -s_{13}^* & s_{14}^* \\ s_{13}^* & -s_{13}^* & 0 & 0 \\ s_{14}^* & s_{14}^* & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{12} & s_{22} & -s_{13} & s_{14} \\ s_{13} & -s_{13} & 0 & 0 \\ s_{14} & s_{14} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Imamo:

$$\left. \begin{aligned} |s_{11}|^2 + |s_{12}|^2 + |s_{13}|^2 + |s_{14}|^2 &= 1 \\ |s_{12}|^2 + |s_{22}|^2 + |s_{13}|^2 + |s_{14}|^2 &= 1 \\ |s_{13}|^2 + |s_{13}|^2 &= 1 \\ |s_{14}|^2 + |s_{14}|^2 &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow s_{13} = s_{14} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

pa je stoga:

$$\left. \begin{aligned} |s_{11}|^2 + |s_{12}|^2 &= 0 \\ |s_{12}|^2 + |s_{22}|^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow |s_{11}|^2 = |s_{22}|^2 = -|s_{12}|^2,$$

što je ispunjeno ako je:

$$s_{11} = s_{22} = s_{12} = 0,$$

čime su dokazane prethodne tvrdnje^x. Konačno, matrica raspršenja magičnog T glasi:

$$[S] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Promotrimo sljedeći primjer prikazan na sl. 6. Prilagođeni generator koji daje snagu:

$$P_g = \frac{1}{2} a_g a_g^* = \frac{1}{2} |a_g|^2$$

je na ulazu 1, a svi ostali zaključeni su prilagođenom impedancijom. Stoga je:

$$a_1 = a_g, \quad a_2 = a_3 = a_4 = 0,$$

pa je onda:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Imamo:

$$b_1 = 0 \Rightarrow P_{1izl} = 0$$

$$b_2 = 0 \Rightarrow P_{2izl} = 0$$

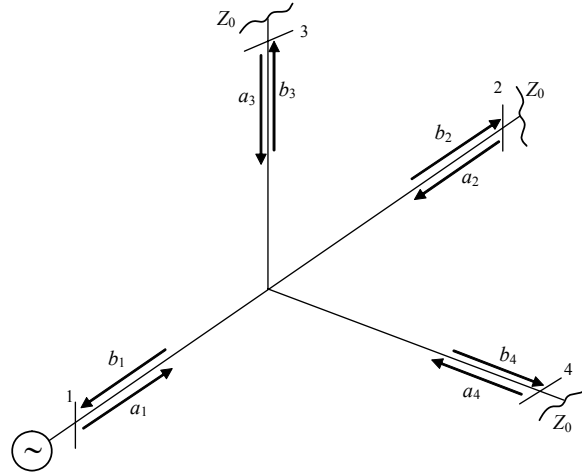
$$b_3 = \frac{a_g}{\sqrt{2}} \Rightarrow P_{3izl} = \frac{1}{2} |b_3|^2 = \frac{1}{4} |a_g|^2 = \frac{1}{2} P_g.$$

$$b_4 = \frac{a_g}{\sqrt{2}} \Rightarrow P_{4izl} = \frac{1}{2} |b_4|^2 = \frac{1}{4} |a_g|^2 = \frac{1}{2} P_g$$

Iz ovoga možemo zaključiti sljedeće.

^x Mogli smo primjerice koristiti i jednadžbu koju dobijemo množenjem drugog retka i 3. stupca:

$$s_{12}^* s_{13} - s_{22}^* s_{13} = 0.$$



Slika 6. Potpuno prilagođeni magični T s izvorom na ulazu 1

Ako prilagodimo E-otvor (3) i H-otvor (4), onda mogu biti prilagođeni i preostali ulazi. Nadalje, ako su ulazi prilagođeni nema prijenosa energije iz priključka 1 i 2, i obrnuto. Dakle, ako je prilagođeni generator u 1, pola snage odlazi u priključak 4, a pola u 3. Kako su oba prilagođena snaga se tu sasvim potroši i gledano iz referentne ravnine priključka 1 cijeli sklop je prilagođen. Priključimo sada na ulaz 2 neprilagođeno opterećenje $Z_2 \neq Z_0$. Tada je koeficijent refleksije na priključku 2 različit od nule, pa je:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_g \\ \Gamma_2 b_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Međutim kako je i dalje:

$$b_1 = b_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0,$$

odnosno ništa ne dolazi u 2 pa se nema ni što reflektirati. Dakle, ako bilo kakvo pasivno opterećenje priključimo na 2 to se u ovom slučaju neće osjetiti, odnosno bit će isto kao i da je taj ulaz prilagođen. Zamijenimo nadalje pasivno opterećenje na ulazu 2 prilagođenim generatorom, tako da je:

$$a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, a_3 = a_4 = 0.$$

Znači da je sada:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

te imamo:

$$b_1 = b_2 = 0$$

$$b_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} a_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} a_2.$$

$$b_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} a_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} a_2$$

Ako su signali generatora u fazi i jednake amplitude:

$$a_1 = a_2 = |a_g| e^{j\phi_g} \Rightarrow \begin{cases} b_3 = 0 \\ b_4 = \sqrt{2} |a_g| e^{j\phi_g} \end{cases},$$

sva snaga ide u priključak 4, a ako su u protufazi:

$$a_1 = -a_2 = |a_g| e^{j\phi_g} \Rightarrow \begin{cases} b_3 = \sqrt{2} |a_g| e^{j\phi_g} \\ b_4 = 0 \end{cases}$$

sva snaga ići će prema priključku 3. Za proizvoljnu razliku u fazi signala generatora amplituda signala na priključku 3 odnosno 4 bit će proporcionalna faznoj razlici, pa se priključivanjem dioda na te priključke može ostvariti fazni detektor. Primjena magičnog T je višestruka. Osim spomenute, primjerice da se pomoću matrice raspršenja pokazati da se priključenjem kratkospojnika odgovarajuće duljine na ulaze 3 i 4 može prilagoditi bilo koja impedancija na priključku 2.

Recipročni T element

Promotrimo recipročni T element s tri priključka na sl. 7, koji nije trostruko simetričan. Tvrdimo, a to želimo i dokazati, da nije moguće prilagoditi sva tri ulaza elementa. To znači da ako prilagodimo posebno ulaz 1 i ulaz 2 gledano s ulaza 3 sklop nije prilagođen. To izraženo elementima matrice raspršenja znači:

$$s_{11} = s_{22} = 0 \Rightarrow s_{33} \neq 0.$$

Da bi to dokazali pretpostavimo da vrijedi:

$$s_{11} = s_{22} = s_{33} = 0.$$

Uvažavajući činjenicu da je element recipročan možemo pisati:

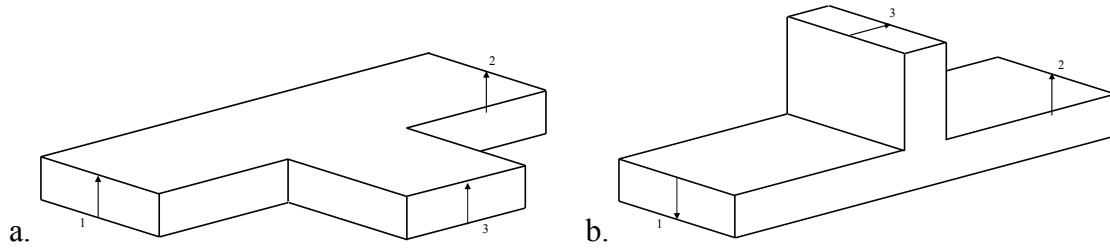
$$\begin{bmatrix} 0 & s_{12}^* & s_{13}^* \\ s_{12}^* & 0 & s_{23}^* \\ s_{13}^* & s_{23}^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & s_{12} & s_{13} \\ s_{12} & 0 & s_{23} \\ s_{13} & s_{23} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

iz čega imamo:

$$\begin{aligned} s_{13}^* s_{23} &= 0 \\ s_{13} s_{12}^* &= 0, \\ s_{12}^* s_{23} &= 0 \end{aligned}$$

što je zadovoljeno samo u trivijalnom slučaju kada su svi članovi matrice raspršenja jednaki nuli, pa zaključujemo da barem jedan s_{ii} mora biti različit od nule što isključuje mogućnost potpunog prilagođenja takvog elementa.

Izvedimo sada matrice raspršenja za ove elemente. Pri tome slike polja su kao na sl. 5. Iz geometrije zaključujemo:



Slika 7. Recipročni T element; a. H-element, b. E-element

$$s_{13} = s_{23}, \text{ za H-element,}$$

$$s_{13} = -s_{23}, \text{ za E-element.}$$

Zahtjev za oba elementa je da se sa ulaza 3 vidi prilagođenje, odnosno: $s_{33} = 0$.

Dakle, vrijedi:

$$[S]_H = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{12} & s_{22} & s_{13} \\ s_{13} & s_{13} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & C \\ B & A & C \\ C & C & 0 \end{bmatrix},$$

$$[S]_E = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{12} & s_{22} & -s_{13} \\ s_{13} & -s_{13} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & C \\ B & A & -C \\ C & -C & 0 \end{bmatrix},$$

pri čemu smo zbog simetričnosti elemenata s obzirom na priključak 3 pretpostavili da je:

$$s_{11} = s_{22} = A.$$

Koristeći svojstvo (!) matrice raspršenja dobivamo:

- za H-element:

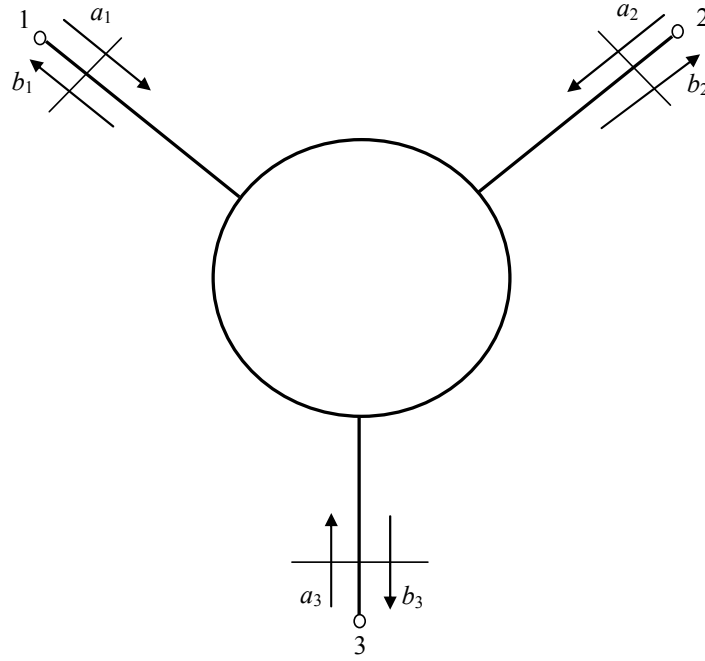
$$[S]_H = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & \sqrt{2} \\ -1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

- za E-element:

$$[S]_E = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Cirkulator

Zaključili smo da je nemoguće prilagoditi sva tri ulaza kod recipročnog elementa s tri ulaza. Međutim, to se može ostvariti ako se izvede prikladan neregipročni element s tri ulaza. Neregipročni sklop (kod kojeg je $s_{ij} \neq s_{ji}$) moguće je ostvariti uz pomoć ferita (Pogl. 6), koji stvaraju neizotropni medij za magnetsko polje. Takav element naziva se cirkulator (sl. 9), a koristi se kod relativno malih snaga.



Slika 8. Trostruko simetrična recipročna struktura s tri priključka

Promotrimo najprije recipročnu trostruko simetričnu strukturu s tri ulaza kao na sl. 8. Ako je struktura *trostruko simetrična*, što znači da vidimo isto s ulaza 1 uz određene veličine na 2 i 3 kao i s 2 uz isti val na 1 i 3, odnosno s 3 uz isti val na 1 i 2, vrijedi:

$$\begin{aligned} s_{11} &= s_{22} = s_{33} = A \\ s_{12} &= s_{21} = s_{23} = s_{32} = s_{13} = s_{31} = B \end{aligned}$$

te matrica raspršenja takvog elementa glasi:

$$[S] = \begin{bmatrix} A & B & B \\ B & A & B \\ B & B & A \end{bmatrix}.$$

Primijenimo li svojstvo (!) koje uslijed recipročnosti možemo napisati kao:

$$[\widetilde{S}]^* [S] = [E] \Rightarrow [S]^* [S] = [E],$$

imamo:

$$\begin{bmatrix} A^* & B^* & B^* \\ B^* & A^* & B^* \\ B^* & B^* & A^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B & B \\ B & A & B \\ B & B & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

iz čega dobivamo sustav jednažbi:

$$A^* A + 2B^* B = 1 \quad (1)$$

$$AB^* + A^* B + B^* B = 0 \quad (2)$$

Ako bi trostruko simetrična struktura mogla biti prilagođena tako da je na sva tri ulaza koeficijent refleksije jednak nuli, mora biti $A = 0$. S pomoću gornjih jednažbi odmah zaključujemo da u tom slučaju mora biti i $B = 0$, odnosno da nije moguće prilagoditi takav sklop. Ako se prikladno odabere referentna ravnina A može biti realan, pa je tada (1):

$$\begin{aligned} A^2 + 2|B|^2 &= 1 \\ B &= |B|e^{j\theta} \end{aligned} \quad (3)$$

i (2):

$$A|B|e^{-j\theta} + A|B|e^{j\theta} + |B|^2 = 0 \Rightarrow 2A \cos \theta + |B| = 0. \quad (4)$$

Iz (4):

$$|B| = -2A \cos \theta,$$

što uvrštavajući u (3) daje:

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 + 8 \cos^2 \theta}}.$$

Najbolje što se može postići u smislu prilagođenja je kada je A minimalan, odnosno kada je kut $\theta = 0$, što znači da je B realan. Tada je:

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = -\frac{2}{3}.$$

To znači da se kod najboljeg prilagođenja snaga dijeli tako da se 1/9 snage reflektira od ulaza, a 8/9 prelazi u preostale ulaze i to simetrično. Naime, stavimo li da je:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix},$$

imamo:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{3}a_1 - \frac{2}{3}a_2 - \frac{2}{3}a_3 \\ b_2 &= -\frac{2}{3}a_1 + \frac{1}{3}a_2 - \frac{2}{3}a_3 \\ b_3 &= -\frac{2}{3}a_1 - \frac{2}{3}a_2 + \frac{1}{3}a_3 \end{aligned}$$

Ako je generator na ulazu 1, a na priključcima 2 i 3 nalaze se opterećenja prilagođena tim priključcima tada je:

$$a_1 = a_g, \quad a_2 = a_3 = 0,$$

te imamo:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{3}a_g \Rightarrow P_{ref1} = \frac{1}{2}|b_1|^2 = \frac{1}{9}P_g \\ b_2 &= b_3 = -\frac{2}{3}a_g \Rightarrow P_{ref2} = P_{ref3} = \frac{4}{9}P_g \end{aligned} ,$$

čime smo dokazali prethodnu tvrdnju.

Dakle, možemo postaviti sljedeće zahtjeve za cirkulator. Kako sklop možemo prilagoditi, te kako je isti neregipročan i trostruko simetričan, vrijedi:

$$\begin{aligned} s_{11} = s_{22} = s_{33} &= A = 0 \\ s_{12} = s_{23} = s_{31} &= B \\ s_{21} = s_{32} = s_{13} &= C \end{aligned} .$$

Dakle matrica raspršenja cirkulatora poprima oblik:

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & B & C \\ C & 0 & B \\ B & C & 0 \end{bmatrix},$$

te primjenjujući svojstvo (!) imamo:

$$\begin{bmatrix} 0 & C^* & B^* \\ B^* & 0 & C^* \\ C^* & B^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & B & C \\ C & 0 & B \\ B & C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

iz čega je:

$$\begin{aligned} |C|^2 + |B|^2 &= 1 \\ B^*C &= 0 \end{aligned} .$$

Ovaj sustav jednačbi možemo zadovoljiti na dva načina. Prva mogućnost je:

$$C \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} B = 0 \\ |C| = 1 \end{cases} .$$

Tada matrica raspršenja glasi:^{xi}

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Druga mogućnost je:

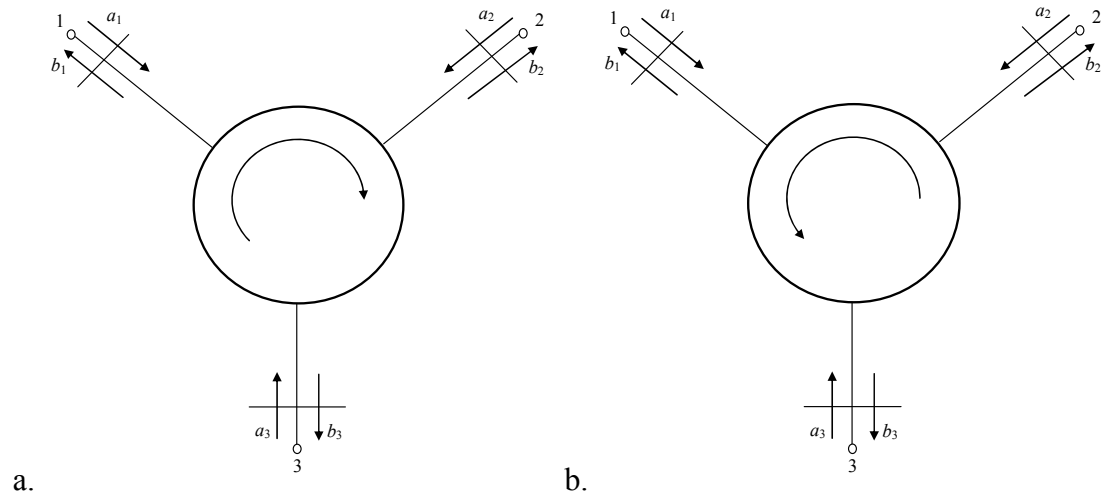
$$B \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} |B| = 1 \\ C = 0 \end{cases} ,$$

pa je matrica raspršenja:

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Interpretirajmo oba rješenja. U prvom slučaju imamo:

^{xi} Umjesto $C = 1$, možemo uzeti $C = -1$ ili $C = \pm j$ što ne mijenja ništa osim izbora referentne ravnine.



Slika 9. a. "Desni" cirkulator; b. "Lijevi cirkulator"

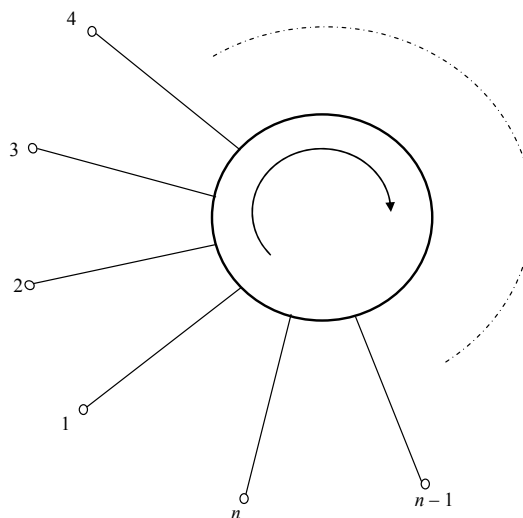
$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = a_3 \\ b_2 = a_1 \\ b_3 = a_2 \end{cases}$$

Ovo znači da snaga što je priključimo na ulaz 1 čitava izađe na ulaz 2, dok na 3 ne ide direktno iz tog ulaza nikakva energija, jer je $s_{13} = s_{31} = 0$. Slično možemo zaključiti i za ostale ulaze. Dakle ovaj slučaj daje cirkulaciju energije u smjeru kazaljke na satu (1-2-3-1). U drugom slučaju imamo:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = a_2 \\ b_2 = a_3 \\ b_3 = a_1 \end{cases}$$

što znači cirkulaciju u suprotnom smjeru (1-3-2-1).

Općenito možemo napisati matricu raspršenja za idealni cirkulator s n ulaza (sl. 10), za kojeg vrijedi:



Slika 10. "Desni" cirkulator s n priključaka

$$\begin{aligned} s_{11} &= s_{22} = s_{33} = \dots = s_{nn} = 0 \\ s_{12} &= s_{23} = s_{34} = \dots = s_{n-1,n} = B, \\ s_{21} &= s_{32} = s_{13} = \dots = s_{n,n-1} = C \end{aligned}$$

te, kako nema izravnog prijenosa energije između priključaka koji nisu susjedni:

$$s_{13} = s_{31} = s_{14} = s_{41} = \dots = s_{1n} = s_{n1} = s_{24} = s_{42} = \dots = \dots = s_{n-2,n} = s_{n,n-2} = 0,$$

pa je matrica raspršenja za cirkulaciju u smjeru kazaljke na satu ($C = 1, B = 0$):

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matricu raspršenja "lijevog" cirkulatora možemo dobiti ako matricu raspršenja "desnog" cirkulatora rotiramo za jedan redak prema dolje.

6. Feriti

Danas čitav niz mikrovalnih elemenata primjenjuje magnetizirane ferite kojima je osnovno svojstvo da imaju tenzorsku karakteristiku permeabilnosti, a skalarnu dielektričnu konstantu u mikrovalnom frekvencijskom području. Takvi elementi su zbog činjenice da su ispunjeni neizotropnim medijem neregipročni i pri rješavanju Maxwellovih jednačbi unutar tih elemenata treba obavezno voditi računa o tenzorskim karakteristikama permeabilnosti. Ekvivalentni postupak bio bi kod analize elemenata gdje umjesto ferita koristimo plazmu, pri čemu dielektrična konstanta ima tenzorsku karakteristiku, a permeabilnost je skalar.

U kemijskom pogledu, feriti su spojevi željeza, kisika i cinka, uz male dodatke nikla i mangana.

Makroskopska teorija odnosno fenomenološki model

Smatramo da je sredina ferita sačinjena od elektronskih spinova koji se ponašaju kao magnetski dipoli odnosno zvrkovi. Karakteristično je da magnetski dipolni moment i spin kod elektrona antiparalelni.

Prisjetimo se najprije nekih definicija iz fizike važnih za ovu analizu.

Zakretni moment, odnosno moment sile je:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F},$$

gdje je \vec{r} radij-vektor od točke u kojoj računamo moment do hvatišta sile \vec{F} .

Moment količine gibanja je:

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v},$$

pri čemu je m masa a \vec{v} brzina.

Vrijedi sljedeća tvrdnja.

Vremenska promjena momenta količine gibanja jednaka je zakretnom momentu.

Da bi dokazali ovu tvrdnju postupimo na sljedeći način. Izračunajmo:

$$\frac{d\vec{N}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Imamo da je:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{v} \times m\vec{v} = \vec{0}.$$

Prema II. Newtonovom zakonu je:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F},$$

pa vrijedi:

$$\frac{d\vec{N}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F},$$

čime smo dokazali prethodnu tvrdnju.

Iz gornjih razmatranja slijedi da je moment količine gibanja \vec{N} konstantan ako ne djeluje na tijelo nikakav vanjski moment ili ako je suma svih momenata koji djeluju na tijelo jednaka nuli, što je slučaj u konzervativnom polju:

$$\vec{F} = \vec{r}_0 f(r) \rightarrow \frac{d\vec{N}}{dt} = 0.$$

Pod pojmom **spin** podrazumijevamo moment količine gibanja čestica oko vlastite osi koja prolazi težištem. Spin elektrona je:

$$\vec{N} = 0,52723 \cdot 10^{-34} \text{ Js}.$$

Definiramo li magnetski dipolni moment $\vec{\mu}$, koji je ekvivalentan momentu male magnetske petlje, onda će vanjsko magnetsko polje djelovati na taj zvrk zakretnim momentom:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}.$$

Kod elementarnih čestica postoji sljedeća relacija između magnetskog dipolnog momenta i momenta količine gibanja:

$$\vec{\mu} = \gamma \vec{N},$$

pri čemu je za elektron $\gamma = -1,759 \cdot 10^{11} \text{ kg}^{-1}$.

Istaknimo da spinski moment količine gibanja nije jednak aktualnom momentu količine gibanja. Spin je, osim toga, kvantna veličina. Ponašanje spina slično je ponašanju male magnetske petlje:

1. ima magnetsko polje slično magnetskom dipolu,
2. na njega djeluje zakretni moment u vanjskom magnetskom polju,
3. vrijedi unutar izvora $\text{div } \vec{B} = 0$ kao kod izvora magnetskog polja.

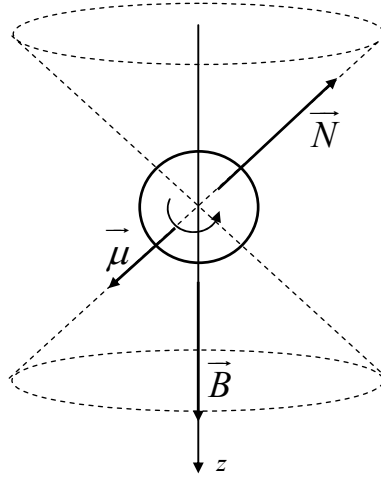
Dakle, u vanjskom magnetskom polju \vec{B} na elektron djeluje zakretni moment $\vec{\tau}$. Zbog postojanja tog zakretnog momenta postoji i vremenska promjena momenta količine gibanja:

$$\frac{d\vec{N}}{dt} = \vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} = \gamma \vec{N} \times \vec{B}.$$

Uslijed vremenske promjene momenta količine gibanja pojavi se precesija zvrka. Izaberimo koordinatni sustav kao na sl. 1 tako da je magnetska indukcija usmjerena u smjeru osi z:

$$\vec{B} = B_z \vec{e}_z.$$

Tada je prethodna jednadžba:



Slika 1. Precesija uslijed magnetskog polja

$$\vec{e}_x \dot{N}_x + \vec{e}_y \dot{N}_y + \vec{e}_z \dot{N}_z = \gamma \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ N_x & N_y & N_z \\ 0 & 0 & B_z \end{vmatrix},$$

pa je:

$$\begin{aligned} \dot{N}_x &= \gamma N_y B_z, \\ \dot{N}_y &= -\gamma N_x B_z. \end{aligned}$$

Deriviramo li prvu jednadžbu po vremenu t te eliminacijom N_y dobivamo diferencijalu jednadžbu:

$$\ddot{N}_x = -\gamma^2 B_z^2 N_x,$$

čije je rješenje:

$$N_x = N_0 \sin(\omega_0 t),$$

pri čemu je kružna frekvencija:

$$\omega_0 = \gamma B_z$$

frekvencija precesije. Sada iz:

$$\dot{N}_y = \frac{\ddot{N}_x}{\gamma B_z} \Rightarrow N_y = \frac{\dot{N}_x}{\gamma B_z},$$

imamo:

$$N_y = N_0 \cos(\omega_0 t).$$

Za ovakav model ferita tražimo linearizirane jednadžbe gibanja zvrkova u slučaju da na njih djeluju različita vanjska polja. Ukoliko su sile posljedica vanjskog polja, vidjeli smo da vektor magnetizacije precesira oko tog polja *frekvencijom koju određuje jakost polja B*. Ako postoji gušenje, dakle, ako postoje neki gubici amplituda precesije opada sve dok vektori $\vec{\mu}$ i \vec{B} ne postanu paralelni, a tada je i:

$$\frac{d\vec{N}}{dt} = \vec{0}.$$

Međutim, dodavanjem radio-frekvencijskog (RF) polja precesija se može očuvati. Smjer tog dodatnog RF polja mora biti okomit na smjer istosmjernog (statičkog) polja B . Ako je, uz to, frekvencija precesije jednaka frekvenciji RF magnetskog polja, amplituda precesije je maksimalna.

Definirajmo sada magnetizaciju sistema, odnosno kako se u vanjskom polju orijentiraju spinovi ferita. Stoga definirajmo najprije magnetski moment po jedinici volumena:

$$\vec{M} = n \vec{\mu},$$

gdje je n broj spinova po jedinici volumena. Zbog:

$$\frac{d\vec{N}}{dt} = \gamma \vec{N} \times \vec{B} \text{ i } \vec{\mu} = \gamma \vec{N}$$

vrijedi:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = n \frac{d\vec{\mu}}{dt} = n\gamma \frac{d\vec{N}}{dt} = n\gamma (\vec{n} \times \vec{B}),$$

odnosno:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma (\vec{M} \times \vec{B}) = \gamma \mu_0 (\vec{M} \times \vec{H}).$$

Ovime smo dobili jednadžbu gibanja vektora volumenske magnetizacije, koja predstavlja osnovu za analizu ferita pri mikrovalnim frekvencijama.

Pretpostavimo li da nema gušenja te da je polje B statičko (odnosno konstantno), možemo tada definirati slučaj u kojem su svi spinovi orijentirani i izravnani sa smjerom vektora \vec{B}_0 i \vec{M}_0 , pri čemu je \vec{M}_0 maksimalna magnetizacija kod određene temperature. U tom slučaju kažemo da je ferit zasićen.

Dodajmo sada još i malu izmjeničnu komponentu magnetskog polja frekvencije ω . Uzmemo li u obzir teoriju malog signala imamo:

$$\begin{aligned} |\vec{h}| \ll |\vec{H}_0| &\Rightarrow \vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{h}e^{j\omega t} \\ |\vec{m}| \ll |\vec{M}_0| &\Rightarrow \vec{M} = \vec{M}_0 + \vec{m}e^{j\omega t} \end{aligned}$$

Neka pojedini vektori imaju sljedeće komponente kao i ranije:

$$\begin{aligned} \vec{H}_0 &= \vec{e}_z H_{0z} \\ \vec{M}_0 &= \vec{e}_z M_{0z} \\ \vec{h} &= \vec{e}_x h_x + \vec{e}_y h_y + \vec{e}_z h_z \\ \vec{m} &= \vec{e}_x m_x + \vec{e}_y m_y + \vec{e}_z m_z \end{aligned}$$

Sada jednadžbu gibanja možemo pisati kao:

$$\frac{d}{dt}(\vec{M} + \vec{m}e^{j\omega t}) = \gamma \mu_0 [(\vec{M}_0 + \vec{m}e^{j\omega t}) \times (\vec{H}_0 + \vec{h}e^{j\omega t})]$$

Budući da iznos vektora magnetizacije M_0 nije funkcija vremena te kako je isti paralelan sa statičkim magnetskim poljem imamo da je:

$$M_0 \neq f(t) \& \vec{M}_0 \parallel \vec{H}_0 \Rightarrow \frac{d\vec{M}_0}{dt} = \vec{0},$$

odnosno:

$$\gamma\mu_0 (\vec{M}_0 \times \vec{H}_0) = \vec{0}.$$

Ako pretpostavimo da vrijedi teorija malog signala zanemarujemo male veličine drugog i viših redova, pa je:

$$j\omega\vec{m} = -\gamma\mu_0 \left[(\vec{m} \times \vec{H}_0) + (\vec{M}_0 \times \vec{h}) \right],$$

odnosno komponente su:

$$\begin{aligned} j\omega m_x &= -\gamma\mu_0 (m_y H_{0z} - h_y M_{0z}) \\ j\omega m_y &= \gamma\mu_0 (m_x H_{0z} - h_x M_{0z}) \quad , \\ m_z &= 0 \end{aligned}$$

odnosno:

$$\begin{aligned} m_x &= \frac{j\gamma\mu_0}{\omega} H_{0z} m_y - \frac{j\gamma\mu_0}{\omega} M_{0z} h_y \\ m_y &= \frac{j\gamma\mu_0}{\omega} M_{0z} h_x - \frac{j\gamma\mu_0}{\omega} H_{0z} m_x \quad . \\ m_z &= 0 \end{aligned}$$

Uvrstimo li sada m_y iz druge u prvu jednadžbu te m_x iz druge u prvu, dobivamo m_x kao funkciju h_x i h_y te m_y kao funkciju h_x i h_y , pa ovaj sustav jednadžbi možemo napisati u matričnom obliku:

$$\vec{m} = \overleftrightarrow{\chi}_m \vec{h},$$

gdje je $\overleftrightarrow{\chi}_m$ tenzor magnetske susceptibilnosti i jednak je:

$$\overleftrightarrow{\chi}_m = \begin{bmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & 0 \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

gdje su:

$$\begin{aligned} \chi_{xx} = \chi_{yy} &= \frac{\omega_0 \mu_0 M_{0z}}{\omega_0^2 - \omega^2}, \\ \chi_{xy} = -\chi_{yx} &= \frac{j\omega \gamma \mu_0 M_{0z}}{\omega_0^2 - \omega^2}, \end{aligned}$$

gdje je:

$$\omega_0 = \gamma\mu_0 H_0,$$

frekvencija precesije.

U klasičnoj elektrodinamici, vektor magnetizacije u sredstvu definiran je kao:

$$\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H},$$

odnosno:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H},$$

uz:

$$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H},$$

iz čega je:

$$\vec{M} = \vec{H}(\mu_r - 1),$$

pa je:

$$\chi_m = \mu_r - 1.$$

Stoga je sada tenzor relativne magnetske permeabilnosti:

$$\overleftrightarrow{\mu}_{rm} = [E] + \overleftrightarrow{\chi}_{rm},$$

odnosno:

$$\overleftrightarrow{\mu}_{rm} = \begin{bmatrix} \mu_r & -j\kappa & 0 \\ j\kappa & \mu_r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

gdje je:

$$\mu_r = 1 + \chi_{xx},$$

$$-j\kappa = \chi_{xy}.$$

Vidimo da su singulariteti upravo kada je frekvencija izmjeničnog RF signala jednaka frekvenciji precesije ($\omega = \omega_0$). Dakle u slučaju da je RF polje frekvencije kao i precesija spina, amplitude precesije su maksimalne, a *posljedica je izrazita tenzorska karakteristika permeabilnosti, dakle izrazito neizotropna sredina.*

Beskonačni feritni medij

Promotrimo kakva je posljedica tenzorskog karaktera permeabilnosti na prostiranje elektromagnetskog vala. Taj problem ćemo analizirati na propagaciji elektromagnetskog vala kroz beskonačni feritni medij.

Elektromagnetsko polje u takvom mediju je opisano Maxwelllovim jednadžbama:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= -j\omega \overleftrightarrow{\mu}_r \mu_0 \vec{h}, \\ \text{rot } \vec{h} &= j\omega \epsilon \vec{E}. \end{aligned}$$

Ovdje pretpostavljamo da je ferit idealni dielektrik, pa je $\sigma = 0 \Rightarrow G = \sigma E = 0$. Naravno da je za realizaciju ovakve sredine, dakle za postojanje tenzora $\overleftrightarrow{\mu}_r$, nužno magnetiziranje vanjskim statičkim poljem \vec{H}_0 u smjeru osi z.

Iz gornjih jednadžbi želimo eliminirati magnetsko polje h pa primjenjujemo operaciju rotor na drugu jednadžbu te u dobivenu uvrstimo prvu:

$$\text{rot rot } \vec{h} = \omega^2 \varepsilon \mu_0 \vec{\mu}_r \vec{h},$$

odnosno:

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{h}) - (\nabla \cdot \nabla) \vec{h} = \nabla(\nabla \cdot \vec{h}) - \Delta \vec{h} = \omega^2 \varepsilon \mu_0 \vec{\mu}_r \vec{h}.$$

Pretpostavit ćemo da ravni val propagira u smjeru r s konstantom propagacije k , odnosno da je u obliku:

$$e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})},$$

gdje je:

$$\begin{aligned} \vec{k} &= \vec{e}_x k_x + \vec{e}_y k_y + \vec{e}_z k_z, \\ \vec{r} &= \vec{e}_x x + \vec{e}_y y + \vec{e}_z z. \end{aligned}$$

Tada iz prethodnoga dobivamo sljedeći sustav jednačbi:

$$\left. \begin{aligned} (\omega^2 \varepsilon \mu_0 \mu_r - k_y^2 - k_z^2) h_x + (k_x k_y - j \omega \varepsilon \mu_0 \kappa) h_y + k_x k_z h_z &= 0 \\ (k_x k_y + j \omega^2 \varepsilon \mu_0 \kappa) h_x + (\omega^2 \varepsilon \mu_0 \mu_r - k_x^2 - k_z^2) h_y + k_y k_z h_z &= 0 \\ k_x k_z h_x + k_y k_z h_y + (\omega^2 \varepsilon \mu_0 - k_x^2 - k_z^2) h_z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Za ovaj sustav homogenih jednačbi za h_x, h_y, h_z postoji netrivialno rješenje u slučaju kada je determinanta koeficijenata A jednaka nuli.

Da bi dobili jasniju fizikalnu sliku o pojavi pretpostavimo da se smjer propagacije ravnog vala podudara sa smjerom magnetizacije, dakle da se propagira u smjeru osi z . tada slijedi da je:

$$k_x = k_y = 0, \quad k_z = \beta.$$

Tada možemo pisati gornji sistem jednačbi u pojednostavljenom obliku:

$$\left. \begin{aligned} (\omega^2 \varepsilon \mu_0 \mu_r - \beta^2) h_x - j \omega \varepsilon \mu_0 \kappa h_y &= 0 \\ j \omega^2 \varepsilon \mu_0 \kappa h_x + (\omega^2 \varepsilon \mu_0 \mu_r - \beta^2) h_y &= 0 \\ h_z &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Izjednačimo sada determinantu sistema s nulom:

$$\begin{vmatrix} \omega^2 \varepsilon \mu_0 \mu_r - \beta^2 & -j \omega \varepsilon \mu_0 \kappa \\ j \omega^2 \varepsilon \mu_0 \kappa & \omega^2 \varepsilon \mu_0 \mu_r - \beta^2 \end{vmatrix} = 0,$$

iz čega dobivamo dva moguća rješenja za konstantu propagacije β :

$$\begin{aligned} \beta_+ &= \omega \sqrt{\varepsilon \mu_0 (\mu_r + \kappa)}, \\ \beta_- &= \omega \sqrt{\varepsilon \mu_0 (\mu_r - \kappa)}. \end{aligned}$$

Uvrstimo li sada dobivene izraze za konstantu propagacije u gornje jednadžbe dobivamo da je u slučaju β_+ :

$$h_x = -jh_y,$$

a u slučaju β_- :

$$h_x = +jh_y.$$

Ova rješenja predstavljaju dva cirkularno polarizirana vala od kojih prvi rotira suprotno smjeru kazaljke na satu pri propagaciji duž $+z$, a drugi u smjeru kazaljke na satu. Naime, neki linearno polarizirani val možemo prikazati kao superpoziciju dvaju cirkularno polariziranih valova jednake amplitude koji rotiraju istom brzinom u suprotnim smjerovima, kao što je prikazano na sl. 2. Kod cirkularno polariziranog vala trenutne vrijednosti polja rotiraju kako se val prostire duž primjerice $+z$ osi.

Dakle, možemo smatrati da u feritu postoje dva cirkularno polarizirana vala koji rotiraju u suprotnim smjerovima. Međutim, *ti valovi vide različitu permeabilnost*, za koju možemo smatrati da je efektivna statička permeabilnost i to za $+$ smjer rotacije (smjer kazaljke na satu):

$$\mu^+ = \mu - \kappa\mu_0,$$

dok za $-$ smjer rotacije (suprotno od kazaljke na satu):

$$\mu^- = \mu + \kappa\mu_0.$$

Da bi to objasnili sjetimo se da je $\vec{\mu}_r$ tenzor, pa je:

$$\vec{b} = \vec{\mu} \vec{h}$$

odnosno:

$$\begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \mu_0 \begin{bmatrix} \mu_r & j\kappa & 0 \\ -j\kappa & \mu_r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix}.$$

Za $+$ smjer rotacije dobivamo:

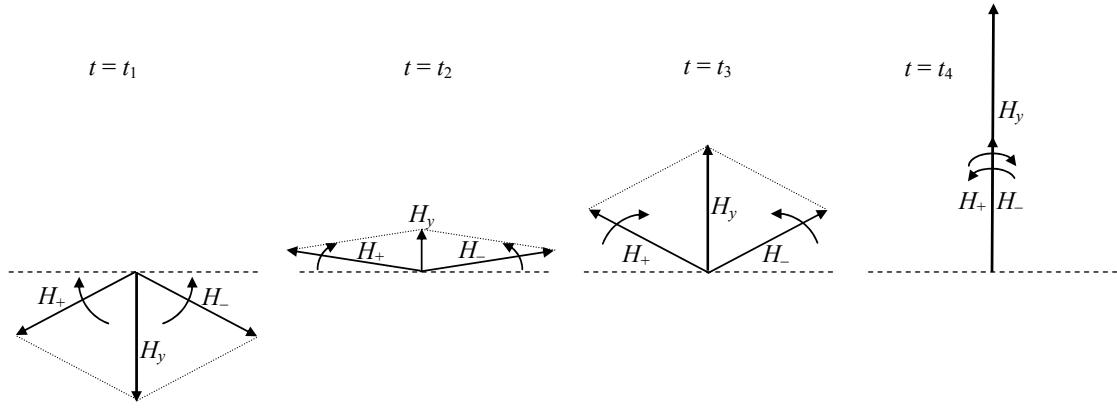
$$\begin{aligned} b_x &= \mu_0 \mu_r h_x + j\kappa \mu_0 h_y \\ b_y &= -j\kappa \mu_0 h_x + \mu_0 \mu_r h_y, \\ b_z &= \mu_0 h_z \end{aligned}$$

iz čega uvrštavajući vezu između x i y komponente izmjeničnog magnetskog polja imamo:

$$h_x = jh_y \Rightarrow \begin{cases} (\mu - \kappa\mu_0) h_x \rightarrow \mu^+ h_x \\ (\mu - \kappa\mu_0) h_y \rightarrow \mu^+ h_y \end{cases}.$$

Slično dobijemo i za $-$ smjer rotacije:

$$h_x = -jh_y \Rightarrow \begin{cases} (\mu + \kappa\mu_0) h_x \rightarrow \mu^- h_x \\ (\mu + \kappa\mu_0) h_y \rightarrow \mu^- h_y \end{cases}.$$



Slika 2. Linearno polarizirani val kao superpozicija dvaju cirkularno polariziranih valova jednakih amplituda koji rotiraju u suprotnim smjerovima

Da bi dobili ukupno polje koje se propagira u $+z$ smjeru, potrebno je superponirati ova dva cirkularno polarizirana vala.

Neka je u ravnini $z = 0$ polje:

$$h = \vec{e}_x h_x(0),$$

dakle ima smjer osi x . Stoga je u $z = 0$ ukupni val iznosa $h = h_x(0)$ sastavljen od dvaju jednakih po amplitudi ali suprotno rotirajućih valova pa, u skladu sa sl. 2, vrijedi u ravnini $z = 0$:

$$h_x(0) = 2h_x^+ = 2h_x^-.$$

U nekoj ravnini $z \neq 0$ vrijedi:

$$h_x(z) = h_x^+(z) + h_x^-(z) = \frac{h_x^+(0)}{2} e^{-j\beta_+ z} + \frac{h_x^-(0)}{2} e^{-j\beta_- z}$$

odnosno:

$$h_x(z) = \frac{h_x(0)}{2} (e^{-j\beta_+ z} + e^{-j\beta_- z}).$$

Stoga što je, ovisno o smjeru rotacije:

$$h_y = \mp j h_x$$

imamo:

$$h_x(z) = -j \frac{h_x(0)}{2} (e^{-j\beta_+ z} - e^{-j\beta_- z}).$$

Dakle, komponente ravnog vala su:

$$h_x(z) = h_x(0) \cos\left(\frac{\beta_+ - \beta_-}{2} z\right) e^{-j\frac{\beta_+ + \beta_-}{2} z}$$

$$h_y(z) = h_x(0) \sin\left(\frac{\beta_+ - \beta_-}{2} z\right) e^{-j\frac{\beta_+ + \beta_-}{2} z}.$$

Rezimirajmo karakteristike ponašanja tog vala pri propagaciji duž $+z$ osi, ako je ferit magnetiziran duž iste osi. Linearno polarizirani val u feritu rotira. Kut polarizacije ravnog vala promijeni se za vrijednost:

$$\theta = \frac{\beta_+ - \beta_-}{2} l,$$

na putu duljine l kroz feritni medij.

Promotrimo što se događa ukoliko se okrene smjer vanjskog statičkog magnetskog polja za 180° odnosno od:

$$\vec{H}_0 = \vec{e}_z H_{0z},$$

na:

$$\vec{H}_0 = -\vec{e}_z H_{0z}.$$

Zbog toga što je $\vec{M}_0 \parallel \vec{H}_0$ veličina κ mijenja predznak, pa je:

$$\mu^+ = \mu + |\kappa|,$$

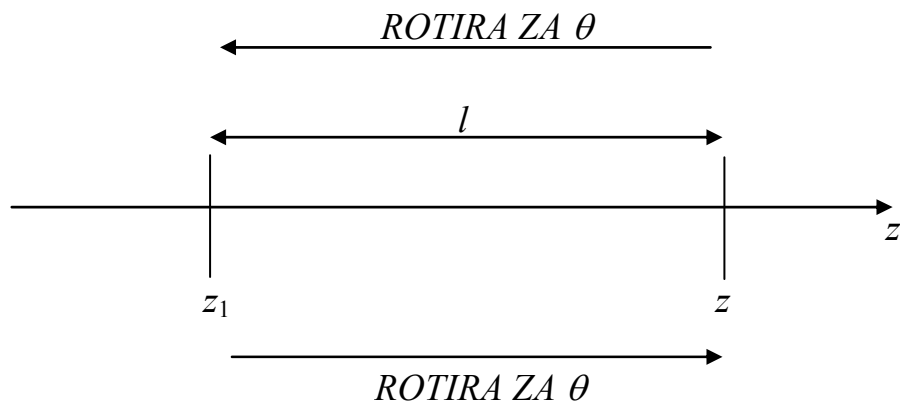
$$\mu^- = \mu - |\kappa|,$$

odnosno:

$$\beta_+ = \omega \sqrt{\epsilon \mu_0 (\mu_r - |\kappa|)},$$

$$\beta_- = \omega \sqrt{\epsilon \mu_0 (\mu_r + |\kappa|)}.$$

Možemo ustanoviti da bi val koji se propagira u $+z$ smjeru imao suprotan smjer polarizacije u slučaju kada okrenemo smjer polja. Posljedica toga je nrecipročnost jer valu koji se reflektira os polarizacije rotira suprotno smjeru kazaljke na satu, ako je upadnom valu rotirala u smjeru kazaljke na satu. Dakle, reflektirani val će na putu l rotirati ponovo za kut θ pa je totalna rotacija nakon puta l u $-$ smjeru jednaka 2θ (sl. 3). Ovo svojstvo nrecipročnosti često se koristi u praksi, a naziva se **Faradayeva rotacija**.



Slika 3. Geometrija propagacije u feritu – Faradayeva rotacija

7. Rezonatori

Promotrimo titrajni krug kao na sl. 1, pri čemu uzimamo u obzir i Jouleove gubitke u krugu predstavljene koncentriranim otporom R . Pri tome, promatramo stabilno stanje sklopa. Uzimajući da je struja i promjena u vremenu količine naboja q izbačenog iz ravnoteže:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt},$$

možemo pisati diferencijalnu jednadžbu ovog strujnog kruga u obliku:

$$L \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C} q(t) = u(t)$$

te ukoliko je uzbuda harmonijska odnosno:

$$u(t) = U_0 e^{j\omega t} = U_0 e^{j2\pi f t},$$

možemo pretpostaviti rješenje za količinu naboja izbačenog iz električne ravnoteže u obliku:

$$q(t) = q_0 e^{j(\omega t - \Phi)},$$

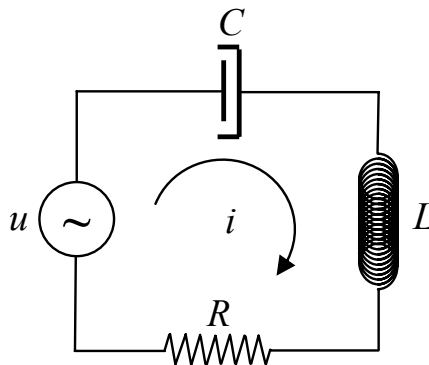
pri čemu je q_0 konstanta pa, uvrštavajući taj rezultat u diferencijalnu jednadžbu strujnog kruga imamo:

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega \frac{R}{L} \right) q_0 = \frac{U_0}{L} \Rightarrow q_0 \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \frac{R^2}{L^2}} e^{j\Phi} = \frac{U_0}{L},$$

što uz Thompsonovu formulu za titrajno vrijeme T , odnosno rezonantnu frekvenciju titrajnog kruga:

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

daje rješenje za naboj u stacionarnom stanju:



Slika 1. Serijski titrajni krug s gubicima

$$q(t) = \frac{U_0 e^{j(\omega t - \Phi)}}{L \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \frac{R^2}{L^2}}}, \quad \Phi = \arctg \frac{\omega R}{L(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

U uvjetima rezonancije, odnosno kada je frekvencija jednaka rezonantnoj imamo:

$$\omega = \omega_0 \Rightarrow \Phi = 90^\circ \Rightarrow q(t) = \frac{U_0}{\omega_0 R} e^{j\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Struja u titrajnom krugu je:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = j\omega q(t) \Rightarrow i(t) = \omega q(t) e^{j\frac{\pi}{2}} = I_0 e^{j\omega t},$$

pri čemu je onda:

$$I_0 = \omega q_0 e^{-j\left(\Phi + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Drugim riječima:

$$\omega = \omega_0 \Rightarrow i(t) = \frac{U_0}{R} e^{j\omega_0 t} = \frac{u(t)}{R},$$

što znači da je u uvjetima rezonancije struja u fazi s naponom. Vršna električna energija uskladištena u kondenzatoru je:

$$W_{el} = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_0^2}{2C} e^{j(2\omega t - 2\Phi - \pi)},$$

dok je magnetska pohranjena u svitku:

$$W_{mag} = \frac{LI_0^2}{2} e^{j(2\omega t - 2\Phi)}.$$

Stoga je omjer električne i magnetske energije funkcija frekvencije:

$$\frac{W_{el}}{W_{mag}} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} e^{j\pi}.$$

Iz posljednje relacije zaključujemo da za frekvencije manje od rezonantne krugom dominira električna energija, a za veće od rezonantne magnetska, odnosno možemo pisati:

$$\begin{aligned} \omega < \omega_0 &\Rightarrow |W_{el}| > |W_{mag}| \\ \omega = \omega_0 &\Rightarrow |W_{el}| = |W_{mag}| \\ \omega > \omega_0 &\Rightarrow |W_{el}| < |W_{mag}| \end{aligned}$$

Dakle, možemo zaključiti da su u LC titrajnom krugu bez gubitaka na rezonantnoj frekvenciji električna i magnetska energija jednakog iznosa i pomaknute u vremenu za fazni kut 180° .

Uvjet za slobodne oscilacije ovog sklopa možemo dobiti ako napon izjednačimo s nulom^{xii}:

$$L \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C} q(t) = 0,$$

pa uzimajući da je naboj različit od nule i da je u početnom trenutku $q = q_0$ te označavajući:

$$\Omega = -\frac{R}{2L} + j\omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{R}{2\omega_0 L}\right)^2},$$

rješenje za naboj u slučaju slobodnih oscilacija titrajnog kruga s gubicima možemo pisati kao:

$$q(t) = q_0 e^{-\frac{R}{2L}t} e^{j\omega_0 t \sqrt{1 - \left(\frac{R}{2\omega_0 L}\right)^2}} \Rightarrow q(t) = q_0 e^{\Omega t},$$

Promotrimo malo detaljnije ovaj rezultat. Vidimo da u izrazu postoje dva eksponencijalna faktora, jedan koji opisuje opadanje amplitude naboja u vremenu i drugi koji opisuje osciliranje tog naboja. Uočimo da u slučaju bez gubitaka imamo neprigušene oscilacije na rezonantnoj frekvenciji, odnosno idealno "oštru" rezonanciju, dok u slučaju da imamo gubitke postoji gušenje, odnosno prigušene oscilacije, a krivulja rezonancije se širi na pojas frekvencija oko idealne rezonantne frekvencije. Također, ukoliko imamo gubitke koji su:

$$R \geq 2\omega_0 L, \quad (*)$$

tada nema efekta rezonancije.

Definirajmo stoga faktor dobrote titrajnog kruga na sl. 1 u rezonanciji kao mjeru oštrote rezonancije, kao omjer vršne uskladištene energije u krugu i disipirane energije tijekom jednog ciklusa izmjene naponske pobude:

$$Q = 2\pi \cdot \frac{\text{VRŠNA USKLADIŠTENA ENERGIJA}}{\text{PROSJEČNA DISIPRANA ENERGIJA PO CIKLUSU}},$$

odnosno:

$$Q = \omega_0 \cdot \frac{\text{VRŠNA USKLADIŠTENA ENERGIJA}}{\text{PROSJEČNA DISIPRANA SNAGA}}.$$

Upotrebom gornjih relacija lako se nađe izraz za faktor dobrote titrajnog kruga:

^{xii} Napomenimo da promatramo stabilno stanje. Da bi postojala bilo kakva električna aktivnost u titrajnom krugu mora postojati neka pobuda, a u ovom slučaju postupak koji slijedi analogan je analizi impulsnog odziva kruga, odnosno odzivu na Diracovu δ -pobudu. Stoga smo mogli poći i od diferencijalne jednadžbe u obliku:

$$L \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C} q(t) = U_0 \delta(t).$$

$$Q = \omega_0 \frac{|W_L|}{P} = \omega_0 \frac{|W_C|}{P} = \omega_0 \frac{\frac{1}{2} L I_0^2}{\frac{1}{2} R I_0^2} = \omega_0 \frac{\frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C}}{\frac{1}{2} R (\omega_0 q_0)^2},$$

odnosno:

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 R C} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}},$$

pa možemo pisati relaciju za naboj u obliku:

$$q(t) = q_0 e^{-\frac{\omega_0}{2Q} t} e^{j\omega_0 t \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4Q}\right)^2}}.$$

Sada uvjet (*) koji opisuje koliki mogu biti maksimalni gubici pri kojima možemo uočiti efekt rezonancije možemo pisati kao $Q \geq 0,5$.

Energija uskladištena u rezonatoru u uvjetima rezonancije je:

$$W = \frac{q^2}{2C} = W_0 e^{-\frac{\omega_0}{Q} t} = W_0 e^{-\frac{t}{\tau}},$$

pri čemu je vremenska konstanta:

$$\tau = \frac{Q}{\omega_0} = \frac{L}{R}.$$

Vidimo da uskladištena energija eksponencijalno opada to sporije što su manji gubici i veći induktivitet u krugu, odnosno što je veći faktor dobrote.

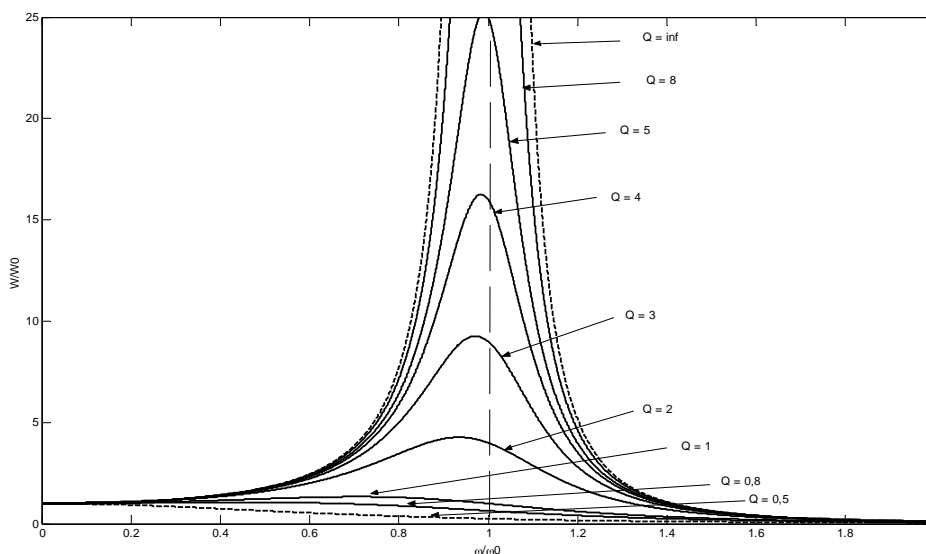
Promotrimo sada ovisnost energije o frekvenciji ako je uzbuda harmonijska:

$$\begin{aligned} |W| &= \frac{|q|^2}{2C} = \frac{1}{2L^2 C} \frac{U_0^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{\omega \omega_0}{Q}\right)^2} = \frac{U_0^2}{2L} \frac{\omega_0^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{\omega \omega_0}{Q}\right)^2} = \\ &= \frac{U_0^2}{2\omega_0^2 L} \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \frac{1}{Q^2} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{U_0^2}{2} \frac{C}{L} \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \frac{1}{Q^2} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}, \end{aligned}$$

odnosno:

$$|W| = \frac{|W_0|}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \frac{1}{Q^2} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}.$$

Ova jednadžba opisana je dijagramom na sl. 2 za različite faktore dobrote. Vidimo da o faktoru dobrote ovisi i položaj maksimuma krivulje rezonancije, odnosno stvarna rezonantna frekvencija.



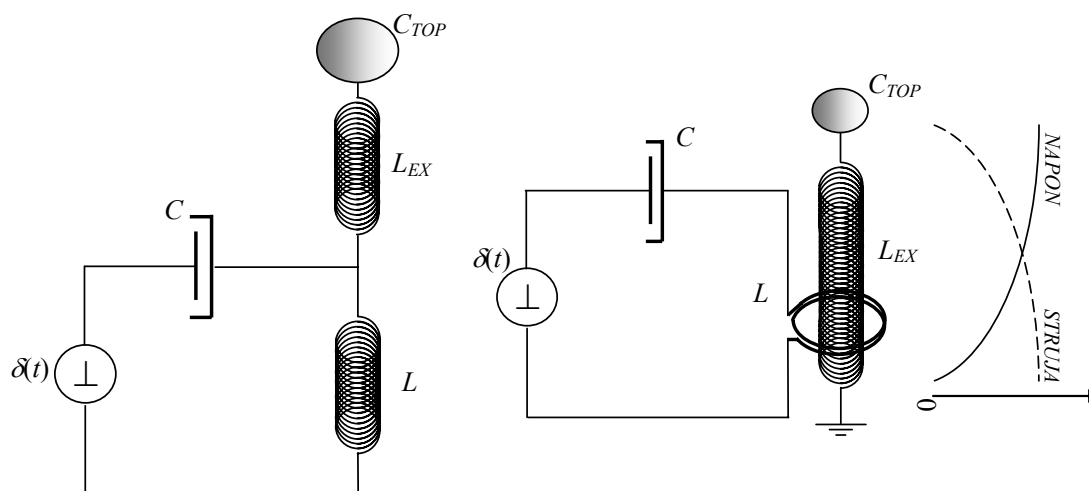
Slika 2. Karakteristika rezonatora za različite faktore dobrote

Da bi lakše ostvarili veći faktor dobrote na zadanoj rezonantnoj frekvenciji poželjno je povećavati induktivitet, što možemo ostvariti povećanjem broja zavoja, što znači i povećanje duljine žice. Za sada bez intervencije u zadani titrajni krug, da bi povećali taj induktivitet dodajmo titrajnom jednu dodatnu zavojnicu s velikim brojem zavoja (velike duljine žice) zaključenu kapacitivnom elektrodom kao na sl. 2, i to tako da period oscilacija dodanog titrajnog kruga bude isti kao i zadani. Nadalje, da bi postigli maksimalnu električnu aktivnost u krugu i što je moguće veću rezonantnu frekvenciju, dimenzionirajmo zadani rezonantni krug tako da smanjimo induktivitet skraćivanjem zavojnice tako da postane od tek nekoliko zavoja, ali neka su sada nešto veće površine nego prije. Tu zavojnicu koristit ćemo kao primar, pri čemu se dodatna zavojnica prebacuje u sekundar te uzemljuje na slobodnom kraju. Da bi podesili istu rezonantnu frekvenciju u sekundarnom kao i u primarnom krugu, induktivitet dodatne zavojnice povećavamo povećanjem broja zavoja, i to na način da ukupna duljina žice od točke uzemljenja bude približno jednaka četvrtini valne duljine u uvjetima rezonancije. Dakle, dobili smo magnetski spregnute titrajne krugove iste rezonantne frekvencije, ali dijametralno različitog odnosa induktiviteta i kapaciteta, odnosno Q-faktora^{xiii}. Energija generirana na strani primara malog faktora dobrote prelijeva se u sekundarni svitak velikog faktora dobrote. Uočimo da smo u sekundarnom krugu značajno smanjili kapacitet reducirajući ga na kapacitet vršne elektrode, pri čemu smo donji kraj zavojnice uzemljili. Znači vrijedi:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{L_{EX}C_{TOP}}}.$$

Pri tome, da bi izbjegli cijepanje rezonantne krivulje uslijed međusobnog utjecaja zavojnica sprega između primarnog i sekundarnog titrajnog kruga mora biti slaba (u praksi faktor sprege između 0,1 i 0,2), a uslijed povećanja duljine žice posebnu pozornost treba posvetiti Jouleovim gubicima, a gubitke uslijed elektromagnetskog zračenja možemo reducirati pravilnim dizajnom sekundarnog svitka.

^{xiii} Dobili smo konstrukcije poznatih Teslinih rezonantnih transformatora.



Slika 3. Konstrukcija rezonantnog svitka s raspodijeljenim parametrima – helikoidalni rezonator s uzбудom ili Teslin rezonantni transformator

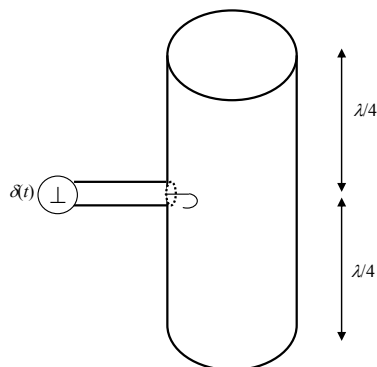
Ovaj postupak nameće duljinu žice u sekundarnom krugu koja je usporediva s valnom duljinom signala pa više ne možemo primjenjivati aproksimacije kojima se koristimo pri analizi krugova s koncentriranim elementima, kod kojih smo pretpostavili zbog kratke duljine žice da se promjena električnog stanja izvora bez kašnjenja prenosi do svih elemenata u krugu. Došli smo do strukture sekundara u obliku uzemljenog helikoidalnog rezonatora zaključenog vršnim kapacitetom, odnosno valovodne strukture kroz koju propagira usporeni elektromagnetski val. Sada, uz poštivanje odgovarajućih graničnih uvjeta, možemo primijeniti standardnu analizu koju smo primijenili i na ostale aksijalno simetrične valovodne strukture^{xiv}, a povećanje efekta rezonancije bit će *posljedica stojnih valova koji se propagiraju strukturom*. Stoga je položaj primarne zavojnice u području čvora stojnog vala. Ako bi električna duljina sekundara postala jednaka četvrtini valne duljine, teoretski možemo svesti vršni kapacitet na nulu i postići maksimalni efekt rezonancije na zadanoj frekvenciji. U tom slučaju napon na vrhu zavojnice postiže maksimalnu vrijednost koja je ograničena gubicima, kao i struja u točki uzemljenja odnosno točki kratkog spoja^{xv}. Dakle, postigli smo povećanje rezonancije povećanjem induktiviteta dodatne zavojnice, ali i određenim ograničenim povećanjem frekvencije. Također, primijetimo važnu činjenicu da sada imamo sekundar s beskonačno mnogo viših harmonika, jer električna duljina rezonatora može biti neparan broj četvrtina valne duljine polja koje se propagira u sekundaru. Međutim, treba napomenuti da povećanje duljine žice povećava i omske gubitke, što u praksi značajno utječe na efekt rezonancije ostvaren pri višim harmonicima (vidi sl. 2).

Sada, ako bi željeli značajno povećati frekvenciju, da bi spriječili zračenje sekundar možemo pretvoriti u cilindrični valovod koji je na jednom kraju kratko spojen a, umjesto u praksi problematičnog otvorenog kruga na visokim

^{xiv} Međutim, takva analiza za svitak od velikog broja zavoja je samo približno točna i to za radio-frekvencijsko područje. Naime, da se pokazati da se valne jednačbe ne mogu separirati u helikoidalnim koordinatama te da ne postoji striktno rješenje Maxwellovih jednačbi za solenoidalni svitak.

^{xv} Primijetimo da smo ovdje uzemljenje poistovjetili s idealnim kratkim spojem. Drugim riječima, aproksimirali smo (za dovoljno niske frekvencije) Zemlju kondenzatorom beskonačnog kapaciteta (što je slučaj DC uzbuđe) i zanemarili otpor uzemljenja, a pri čemu je tada točka uzemljenja u stvari čvor stojnog vala (napon u točki uzemljenja jednak je nuli).

frekvencijama, valovod produžujemo za četvrtinu valne duljine i zatvorimo ga kratkim spojem^{xvi}. Na taj način smo zatvorili elektromagnetski val u sekundaru koji je sada poluvalni, a ostaje još problem uzbuđivanja tog vala. Stoga, kao što je pokazano u uvodu, primarni titrajni krug pretvaramo u koaksijalni kabel te, kao što smo promatrali prije kod uzbude TE moda u valovodu, petljicu koja predstavlja djelić središnjeg vodiča uvučemo u valovod u položaju čvora stojnog vala, odnosno u središnjem dijelu rezonatora, kao što je prikazano na sl. 4. Tako smo ostvarili oscilatorni krug zadovoljavajućeg faktora dobrote i na mikrovalnim frekvencijama. Dakle, i ovim putom došli smo do strukture cilindričnog rezonatora kao i u uvodu. Možemo zaključiti da, i to bez obzira na oblik poprečnog presjeka, odgovarajuće dimenzioniranim homogenim valovodom s idealno vodljivim stjenkama koji je zaključen kratkim spojem s obje strane možemo ostvariti efikasni rezonator u mikrovalnom pojasu frekvencija. Tada se u svrhe analize mogu koristiti rješenja za odgovarajuće tipove valovoda koje smo izveli prije, a različitim oblicima rezonatora možemo ostvariti različite modove. Nadalje, mikrovalni titrajni krug možemo ostvariti i postavljanjem diskontinuiteta u obliku šuplje vodljive pregrade na odgovarajućoj udaljenosti od kratkog spoja u valovodu. Da se pokazati da najbolji faktor dobrote ima kuglasti rezonator (maksimalni volumen), ali je njega teško ostvariti u praksi.

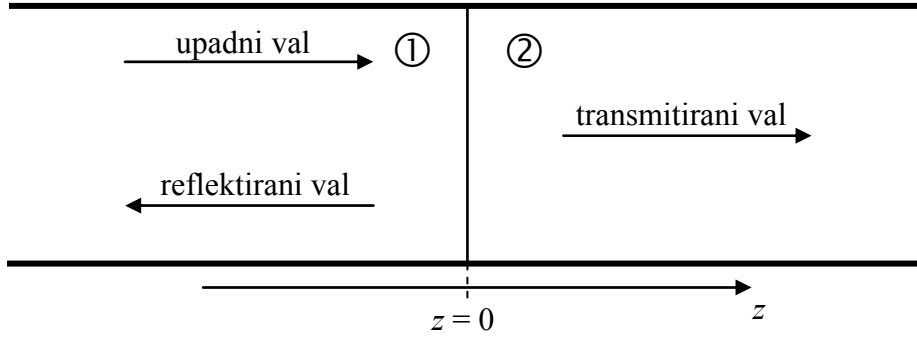


Slika 4. Cilindrični rezonator

Mikrovalni rezonatori

Rezonatori ili rezonantne šupljine u mikrovalnoj tehnici predstavljaju elemente koji su ekvivalentni titrajnim krugovima kod nižih frekvencija. U uvodnim razmatranjima pokazano je kako se može postupati te koji nas razlozi vode pri modifikaciji titrajnog kruga s koncentriranim elementima do rezonantne šupljine, u kojoj više ne možemo precizno odvojiti kapacitet od induktiviteta. U skladu s gornjom usporedbom osnovi zahtjev kojeg rezonantna šupljina treba ispuniti da bude rezonator je da se u njoj može uskladištiti elektromagnetska energija pomoću višestruke refleksije valova na njenim stjenkama, odnosno formiranjem stojnog vala u različitim smjerovima. Gledano općenito, svaka šupljina omeđena vrlo dobro vodljivim stjenkama i ispunjena dielektrikom s malim gubicima mogla bi poslužiti kao rezonator. Međutim određivanje (računanje) rezonantne frekvencije u općem slučaju predstavljalo bi nepremostive poteškoće.

^{xvi} Ovaj korak mogli smo uraditi i prije tako da učinimo sklopove sa sl. 3 simetričnima dodavanjem druge jednake dodatne zavojnice na drugi kraj rezonatora. U tom slučaju, sekundar nije uzemljen, ima dvostruku duljinu žice a zaključen je s oba kraja metalnim sferama jednakog kapaciteta.



Slika 5. Pregrada u valovodu

Da bi uočili kako je moguće formirati neki mikrovalni rezonator, pogledajmo najprije što se dešava s elektromagnetskim poljem u valovodu s diskontinuitetom (sl. 5). Interesira nas kakve su transverzalne komponente električnog i magnetskog polja (dakle, one komponente koje sudjeluju u prijenosu energije duž valovoda) u sredstvu 1 odnosno 2. Evidentno je da će se upadni val djelomično reflektirati na granici sredstava, a djelomično proći u sredstvo 2 (transmitirani val). Uz pretpostavku da je valovod beskonačno dug u smjeru osi z u sredstvu 2 nema stojnog vala.

Podsjetimo se jednadžbi iz poglavlja 4 za transverzalne komponente električnog i magnetskog polja:

$$\begin{aligned}\vec{E}_{trk}(x, y, z) &= \vec{E}_{trk\,norm}(x, y) \cdot U_k(z), \\ \vec{H}_{trk}(x, y, z) &= \vec{e}_z \times \vec{E}_{trk\,norm}(x, y) \cdot I_k(z).\end{aligned}$$

Možemo pisati:

$$\begin{aligned}\vec{E}_{trk}(x, y, z) &= \vec{F}(x, y) \cdot U_k(z), \\ \vec{H}_{trk}(x, y, z) &= \vec{G}(x, y) \cdot I_k(z),\end{aligned}$$

odnosno:

$$\begin{aligned}\vec{E}_{trk}(x, y, z) &= \vec{F}(x, y) \frac{1}{r} \cdot (a_k + b_k), \\ \vec{H}_{trk}(x, y, z) &= \vec{G}(x, y) \frac{1}{Z_{0k} r} \cdot (a_k - b_k),\end{aligned}$$

Uzmimo da postoji samo val u jednom smjeru:

$$\begin{aligned}E_{trk} &= |\vec{E}_{trk}| = |\vec{F}(x, y)| \frac{1}{r} a_k, \\ H_{trk} &= |\vec{H}_{trk}| = |\vec{G}(x, y)| \frac{1}{Z_{0k} r} a_k.\end{aligned}$$

Znamo da je karakteristična impedancija k -tog moda u valovodu definirana kao:

$$Z_{0k} = \frac{E_{trk}}{H_{trk}},$$

gdje su E_{trk} i H_{trk} polja putujućeg vala u jednom smjeru. Stoga možemo gornje jednadžbe napisati kao:

$$E_{trk} = F(x, y) \frac{1}{r} a_k,$$

$$H_{trk} Z_{0k} = E_{trk} = G(x, y) \frac{1}{r} a_k.$$

Iz posljednjeg slijedi da je:

$$\boxed{G(x, y) = F(x, y)}.$$

Naša pretpostavka je da val na granicu dielektrika dolazi iz sredstva 1. Stoga će u sredstvu 1 postojati i upadni i reflektirani val od granične plohe (ako pretpostavimo da se val propagira samo jednim modom možemo izostaviti indeks k):

$$E_{tr1} = F(x, y)(a_1 + b_1),$$

$$H_{tr1} = \frac{F(x, y)}{Z_{01}}(a_1 - b_1).$$

U sredstvu 2 postoji val koji dolazi iz sredstva 1. Pod pretpostavkom da se valovod proteže u beskonačnost, nema reflektiranog vala, pa je:

$$E_{tr2} = F(x, y)a_2,$$

$$H_{tr2} = \frac{F(x, y)}{Z_{02}}a_2,$$

pri čemu je dakle:

$$a_2 = a_0 e^{-j\beta_{g2}z}.$$

Na granici sredstva odaberimo da je $z = 0$ kao na sl. 5, pa uzimajući u obzir činjenicu da su polja E_{tr} i H_{tr} tangencijalne na graničnu plohu slijedi:

$$z = 0 \Rightarrow \begin{cases} E_{tr1} = E_{tr2} \\ H_{tr1} = H_{tr2} \end{cases}.$$

Dakle, uz $E_{tr}(z = 0) = E_{tr0}$ i $H_{tr}(z = 0) = H_{tr0}$ je i:

$$\frac{E_{tr10}}{H_{tr10}} = \frac{E_{tr20}}{H_{tr20}}. (*)$$

Karakteristična impedancija je u dijelu valovoda ispunjenog sredstvom 2 je:

$$Z_{02} = \frac{E_{tr2}}{H_{tr2}},$$

što zbog (*) mora biti, gledajući u ravnini $z = 0$:

$$Z_{02} = \frac{E_{tr20}}{H_{tr20}} = \frac{E_{tr10}}{H_{tr10}}.$$

Uzimajući da je granična površina određena s $z = 0$ imamo:

$$Z_{02} = \frac{F(x, y)(a_0 + b_0)}{\frac{F(x, y)}{Z_{01}}(a_0 - b_0)},$$

te je:

$$Z_{02} = Z_{01} \frac{a_0 + b_0}{a_0 - b_0}.$$

Uz određene elementarne matematičke operacije nalazimo da je na graničnoj površini:

$$b_0 = a_0 \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}},$$

pa je iznos transverzalne komponente električnog polja na mjestu diskontinuiteta:

$$E_{tr0} = F(x, y) a_0 \left(1 + \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} \right),$$

iz čega slijedi:

$$a_0 F(x, y) = E_{tr0} \frac{1}{1 + \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}}}.$$

Slično dobijemo i:

$$b_0 F(x, y) = E_{tr0} \frac{1}{1 + \frac{Z_{02} + Z_{01}}{Z_{02} - Z_{01}}}.$$

Sada možemo napisati izraze za transverzalne komponente polja u bilo kojoj točki z pomoću karakterističnih impedancija Z_{01} i Z_{02} te vrijednosti električnog polja na granici sredstva:

$$E_{tr1}(z) = E_{tr0} \left(\frac{Z_{01} + Z_{02}}{2Z_{02}} e^{-j\beta_{g1}z} + \frac{Z_{02} + Z_{01}}{2Z_{02}} e^{j\beta_{g1}z} \right)$$

$$H_{tr1}(z) = E_{tr0} \left(\frac{Z_{01} + Z_{02}}{2Z_{01}Z_{02}} e^{-j\beta_{g1}z} - \frac{Z_{02} + Z_{01}}{2Z_{01}Z_{02}} e^{j\beta_{g1}z} \right).$$

Pretpostavimo sada da je sredstvo 2 idealni vodič. Slijedi da je $E_{tr2} = 0$ i $Z_{02} = 0$. Na granici treba vrijediti uvjet kao i ranije što znači da je $E_{tr20} = 0$. Primijetimo da je na granici transverzalna komponenta različita od nule, odnosno da u $z = 0$ imamo plošnu gustoću struje κ :

$$\vec{n} \times \vec{H}_r = \vec{\kappa},$$

pri čemu je n normala na graničnu plohu. Karakteristična impedancija u sredstvu 2 je, s druge strane određena kao:

$$Z_{02} = \frac{E_{tr0}}{H_{tr0}},$$

pa je:

$$H_{tr0} = \frac{E_{tr0}}{Z_{02}} = \frac{0}{0} \neq 0,$$

te možemo pisati:

$$E_{tr1}(z) = \frac{E_{tr0}}{2Z_{02}} (Z_{01}e^{-j\beta_{g1}z} - Z_{01}e^{j\beta_{g1}z}),$$

odnosno:

$$E_{tr1}(z) = jH_{tr0}Z_{01} \left(\frac{e^{-j\beta_{g1}z} - e^{j\beta_{g1}z}}{j2} \right),$$

iz čega odmah slijedi (izbacujući indeks 1 iz prethodnih relacija):

$$E_{tr1}(z) = E_{tr} = jH_{tr0}Z_0 \sin(-\beta_g z)$$

Slično je i za transverzalnu komponentu magnetskog polja:

$$H_{tr} = H_{tr1}(z) = \frac{E_{tr0}}{Z_{02}} \left(\frac{e^{-j\beta_{g1}z} + e^{j\beta_{g1}z}}{2} \right),$$

odnosno:

$$H_{tr} = H_{tr0} \cos(-\beta_g z).$$

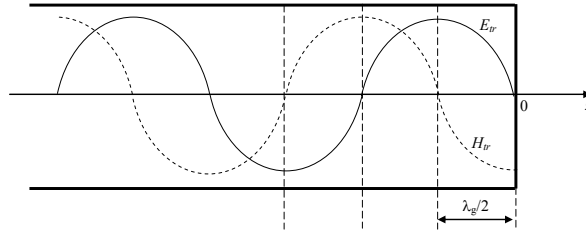
Impedancija Z u svakoj točki unutar dijela valovoda ispunjenog sredstvom 1 je sada:

$$Z(z) = \frac{E_{tr}}{H_{tr}} = jZ_0 \operatorname{tg}(-\beta_g z).$$

Iz posljednjih relacija za polje možemo zaključiti sljedeće. Transverzalna komponenta električnog i transverzalna komponenta magnetskog polja varira po zakonu sinusa s udaljenošću od idealno vodljive pregrade. Pri tome je naravno na granici transverzalna komponenta električnog polja jednaka nuli. Magnetsko polje je pomaknuto za četvrtinu valne duljine $\lambda_g/4$ u odnosu na električno polje po z . Da bi bio zadovoljen granični uvjet $H_{tr1} = H_{tr2}$, u sredini 2 magnetsko polje zamjenjuje površinska gustoća struje. Vidimo, nadalje, da se slika polja na prepereci identično ponavlja nakon $z = \lambda_g/2$. To znači da ne bi narušili konfiguraciju polja ako bi na toj udaljenosti od prve pregrade postavili drugu pregradu (ukoliko nađemo način da to polje uzbuđujemo). Na taj način formirali smo rezonator. Uočimo još da je impedancija Z identična s impedancijom kratkospojene linije. Na sl. 6 prikazan je raspored polja za gornji slučaj.

Uvid u pojave u rezonatoru najbolje ćemo steći rješavajući valnu jednadžbu za polje:

$$(\nabla^2 + k^2)u(x, y, z) = 0,$$



Slika 6. Polje u kratkospojenom valovodu

gdje je u bilo koja komponenta polja E ili H .

Rezonantna šupljina pravokutnog presjeka

Pozabavit ćemo se rješenjima u pravokutnom rezonatoru (sl. 7), pa odabiremo i takav koordinatni sustav. Dakle, posljednju jednadžbu možemo pisati za bilo koju komponentu električnog polja E_x , E_y ili E_z :

$$\frac{\partial^2 E_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial z^2} + k^2 E_i = 0;$$

(neka i ima vrijednosti $i = 1, 2, 3$, pri čemu se brojevi prema redoslijedu odnose na koordinate x , y i z). Ovu jednadžbu možemo riješiti separacijom varijabli, ako stavimo:

$$E_n = E_n(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z),$$

što, uvrštavanjem u prethodnu jednadžbu daje:

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} + k^2 = 0.$$

Gornja jednadžba može se zadovoljiti ako je:

$$\frac{X''}{X} = -k_x^2, \quad \frac{Y''}{Y} = -k_y^2, \quad \frac{Z''}{Z} = -k_z^2.$$

Komponenta E_x mora zadovoljiti sljedeće granične uvjete:

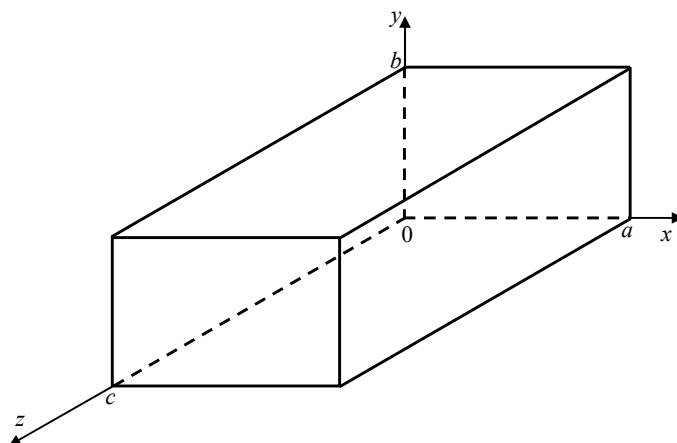
- 1) za $x = 0, x = a \Rightarrow E_x \neq 0$,
- 2) za $y = 0, y = b \Rightarrow E_x = 0$,
- 3) za $z = 0, z = c \Rightarrow E_x = 0$.

Rješenje za ovisnost polja o x je prema tome u obliku:

$$X(x) = A_1 \sin(k_x x) + A_2 \cos(k_x x).$$

Graničnih uvjet 1) bit će ispunjen u gornjem rješenju za $X(x)$ ako je ($m = 1, 2, 3, \dots$):

$$A_1 = 0 \text{ i } k_x = \frac{m\pi}{a}.$$



Slika 7. Rezonator pravokutnog presjeka

Druga obična diferencijalna jednadžba za ovisnost komponente polja E_x o koordinati y , dakle $Y(y)$, daje rješenje:

$$Y(y) = B_1 \sin(k_y y) + B_2 \cos(k_y y),$$

koje zadovoljava granični uvjet 2) ako je ($n = 1, 2, 3, \dots$):

$$B_2 = 0 \text{ i } k_y = \frac{n\pi}{a}.$$

Konačno, rješenje treće diferencijalne jednadžbe za ovisnost komponente polja E_x o z koordinati je:

$$Z(z) = C_1 \sin(k_z z) + C_2 \cos(k_z z),$$

koje zadovoljava uvjet 3) uz ($l = 1, 2, 3, \dots$):

$$C_2 = 0 \text{ i } k_z = \frac{l\pi}{c}.$$

Sada možemo pisati rješenje za komponentu polja E_x u obliku:

$$E_x = E_{x0} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z).$$

Sada na sličan način možemo izračunati komponentu polja E_y za koju postavljamo granične uvjete:

- 4) za $x = 0, x = a \Rightarrow E_y = 0$,
- 5) za $y = 0, y = b \Rightarrow E_y \neq 0$,
- 6) za $z = 0, z = c \Rightarrow E_y = 0$,

što bi dalo rješenje:

$$E_y = E_{y0} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z).$$

Granični uvjeti za komponentu polja E_z su:

- 7) za $x = 0, x = a \Rightarrow E_z = 0$,
- 8) za $y = 0, y = b \Rightarrow E_z = 0$,
- 9) za $z = 0, z = c \Rightarrow E_z \neq 0$,

pa je:

$$E_z = E_{z0} \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z).$$

Konstante $E_{x0} = A_2$, B_1 , C_1 , odnosno E_{y0} i E_{z0} su neodređene i želimo naći njihovu međusobnu ovisnost. Ona slijedi iz uvjeta da, budući pretpostavljamo da unutar rezonatora nema naboja, odnosno:

$$\text{div } \vec{E} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = 0,$$

pa je:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = k_x E_{x0} + k_y E_{y0} + k_z E_{z0} = 0.$$

Iz prethodno dobivenih rješenja za k , uzimajući u obzir da vrijedi:

$$k^2 = -k_x^2 - k_y^2 - k_z^2,$$

te ako stavimo:

$$k^2 = \omega_0^2 \mu \epsilon,$$

gdje je $\omega_0 = 2\pi f_0$ rezonantna frekvencija, imamo:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \left[\left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{l\pi}{c} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Na osnovu dviju dimenzija (a i b primjerice) i rezonantne frekvencije određena je treća dimenzija rezonatora za određene m , n i l .

Modovi u pravokutnom rezonatoru su TE_{mnl} i TM_{mnl} . Istovremeno u rezonatoru mogu egzistirati i TM i TE modovi, a gornja jednačba za rezonantnu frekvenciju vrijedi za oba tipa moda u šupljini pravokutnog presjeka. Za svaku rezonantnu frekvenciju moguća su dva moda, jedan TE i drugi TM. Pri tome, da bi postojalo polje, barem dvije od vrijednosti m , n i l moraju biti različite od nule. Naime, ako je $m = n = 0$ i $l \neq 0$, znači da je $k_x = k_y = 0$ i $k_z \neq 0$. Tada je:

$$E_x = E_{x0} \cdot 1 \cdot 0 \cdot \sin(k_z z) = 0,$$

$$E_y = E_{y0} \cdot 0 \cdot 1 \cdot \sin(k_z z) = 0,$$

$$E_z = E_{z0} \cdot 0 \cdot 0 \cdot \sin(k_z z) = 0,$$

odnosno polje u rezonatoru ne postoji. Ako je samo jedna od veličina m , n ili l jednaka nuli, dvije od komponenti električnog polja su jednake nuli. Tako primjerice TE_{m0l} mod ima komponente $E_x = E_z = 0$ i $E_y \neq 0$.

Nadalje, interesira nas još i magnetsko polje, koje dobijemo primjenom Maxwellove jednadžbe:

$$\text{rot } \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H},$$

pa je:

$$\begin{aligned} H_x &= j \frac{E_{z0}k_z - E_{y0}k_z}{\omega\mu} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z), \\ H_y &= j \frac{E_{x0}k_z - E_{z0}k_x}{\omega\mu} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z), \\ H_z &= j \frac{E_{y0}k_x - E_{x0}k_y}{\omega\mu} \cos(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z). \end{aligned}$$

Skicirajmo polje za TE₁₀₁ mod u rezonantnoj šupljini pravokutnog presjeka (sl. 8). U tom slučaju je:

$$E_x = E_z = 0$$

$$E_y = E_{y0} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{c}z\right)$$

$$H_x = -jE_{y0} \frac{\pi}{c\omega_k\mu} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{\pi}{c}z\right) = -jE_{y0} \frac{1}{2c} \frac{\lambda_R}{\eta} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{\pi}{c}z\right),$$

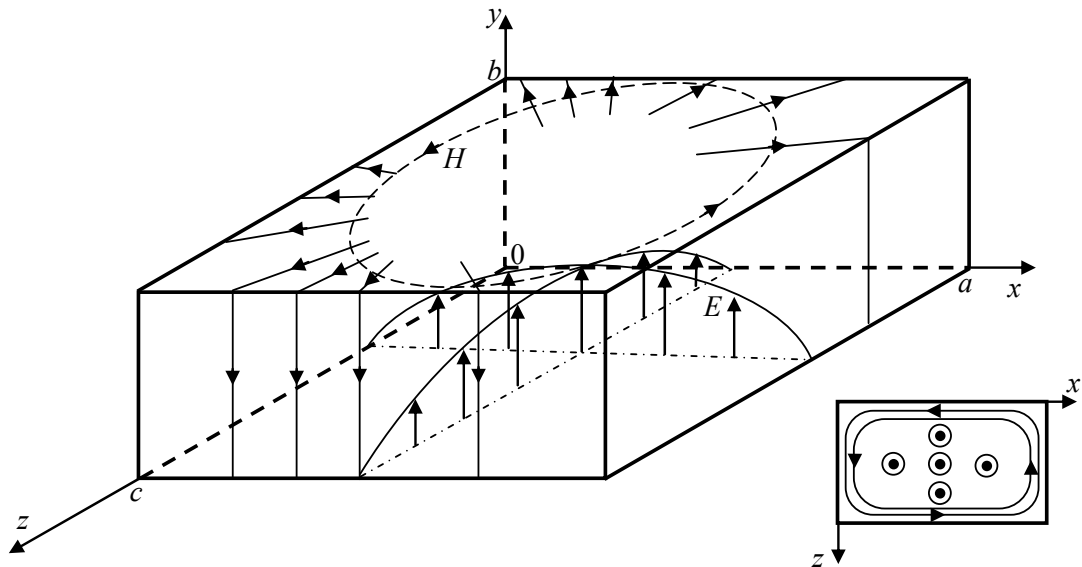
$$H_y = 0$$

$$H_z = -jE_{y0} \frac{\pi}{a\omega_k\mu} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{c}z\right) = -jE_{y0} \frac{1}{2a} \frac{\lambda_R}{\eta} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{c}z\right)$$

pri čemu je:

$$\lambda_0 = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{\mu\varepsilon}} \text{ i } \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = 120\pi\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}.$$

U nekom trenutku t ta je slika dana kao što je prikazano na sl. 8.



Slika 8. Skica polja TE₁₀₁ moda u pravokutnom rezonatoru u trenutku t

Rješavanju problema rezonantne šupljine pravokutnog presjeka mogli smo pristupiti i na nešto jednostavniji način. Zaključimo li valovod kratkim spojem s jedne strane, doći će do refleksije i formirat će se stojni val u valovodu. Na mjestu kratkog spoja električno polje je nula, a sljedeća nula udaljena je $\lambda_g/2$, pa na toj udaljenosti možemo postaviti još jedan kratki spoj tako da taj odsječak valovoda ostane zatvoren. Tako, ostvarena je rezonantna šupljina pravokutnog oblika. U ovakvoj strukturi moguće je ostvariti rezonanciju svakim od modova propagacije, a svakom modu odgovara beskonačno mnogo rješenja što ovisi o broju ciklusa izmjene stojnih valova između stjenki valovoda. Uzmimo zbog jednostavnosti da pravokutnim valovodom propagira TE_{10} mod. Tada je u šupljini longitudinalna komponenta električnog polja jednaka nuli, a longitudinalna komponenta magnetskog polja stojnog elektromagnetskog vala je suma valova koji putuju u suprotnim smjerovima:

$$H_z = H_1 \cos \frac{\pi x}{a} e^{j(\omega t - \beta_g z)} + H_2 \cos \frac{\pi x}{a} e^{j(\omega t + \beta_g z)}$$

Ova komponenta polja na graničnim površinama okomitim na smjer propagacije jednaka je nuli (imamo refleksiju vala od vodljive površine), pa je:

$$\left. \begin{matrix} z=0 \\ z=c \end{matrix} \right\} \Rightarrow H_z = 0 \Rightarrow \begin{cases} H_1 = -H_2 = H_0 \\ \beta_g c = l\pi, l=1,2,\dots \end{cases},$$

te imamo konačno izraz:

$$H_z = -2jH_0 \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{l\pi z}{c} e^{j\omega t}.$$

Slično dobijemo i transverzalne komponente stojnog vala kao:

$$\begin{aligned} H_x &= 2j \frac{a}{c} H_0 \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{l\pi z}{c} e^{j\omega t}, \\ E_y &= -2 \frac{\omega \mu a}{\pi} H_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{l\pi z}{c} e^{j\omega t}. \end{aligned}$$

Ovaj mod propagacije naziva se TE_{10l} rezonantni mod. Da bi dobili izraz za rezonantnu frekvenciju poslužimo se valnom jednačbom za transverzalnu komponentu električnog polja:

$$\Delta E_y + \omega^2 \mu \epsilon E_y = 0,$$

što uvrštavajući prethodni izraz za polje daje:

$$\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{d}\right)^2 + \omega_{10p}^2 \mu \epsilon = 0,$$

te je rezonantna frekvencija:

$$\omega_{10l} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{c}\right)^2}.$$

U općem slučaju za TE_{mnl} i TM_{mnl} modove imat ćemo rezonantnu frekvenciju:

$$\omega_{mnl} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{c}\right)^2}.$$

Energija sadržana u električnom polju je:

$$W_{el} = \frac{\epsilon}{2} \int_0^a \int_0^b \int_0^c E_y^2 dx dy dz = \mu H_0^2 \frac{ab(a^2 + b^2)}{2c} e^{j2\omega t},$$

a magnetska energija je sadržana od doprinosa energija transverzalne i longitudinalne komponente magnetskog polja u volumenu rezonatora:

$$W_{mag} = \frac{\mu}{2} \int_0^a \int_0^b \int_0^c (H_x^2 + H_z^2) dx dy dz = \mu H_0^2 \frac{ab(a^2 + c^2)}{2c} e^{j2\omega t} e^{j\pi}.$$

Dakle, u uvjetima rezonancije električna i magnetska energija jednake su amplitude i međusobno pomaknute u fazi za kut 180° , što smo zaključili i u prethodnom slučaju rezonatora sastavljenog od koncentriranih elemenata. To znači da će u nekom trenutku sva energija biti sadržana u magnetskom polju, da bi nakon četvrtine perioda vala sva bila u električnom polju. Izračunajmo sada faktor dobrote pravokutnog rezonatora prema definicijskoj formuli:

$$Q = \omega_0 \frac{|W_{mag}|}{P} = \omega_0 \frac{|W_{el}|}{P}.$$

Znači, da bi izračunali faktor dobrote, potrebno je poznavati vršnu vrijednost jedne od tih energija. Vršna magnetska energija rezonatora volumena V je:

$$|W_{mag}| = \frac{\mu}{2} \iiint_V |H|^2 dV = \mu H_0^2 \frac{ab(a^2 + c^2)}{2c},$$

dok disipirana snaga P ovisi o tangencijalnoj komponenti polja na stjenkama valovoda generirajući struju na graničnoj površini koja uzrokuje zagrijavanje stjenki:

$$P = \frac{1}{2} R_s \iint_S |H_t|^2 dS,$$

$$P = \frac{R_s}{2} \left[2 \int_0^a \int_0^c (|H_x|^2 + |H_z|^2) \Big|_{y=0} dx dz + 2 \int_0^b \int_0^c |H_z|^2 \Big|_{x=0} dy dz + 2 \int_0^a \int_0^b |H_x|^2 \Big|_{z=0} dx dy \right],$$

$$P = 4H_0^2 R_s \left(\frac{a^3}{4c} + \frac{ac}{4} + \frac{bc}{2} + \frac{a^3 b}{2c^2} \right) = H_0^2 \frac{\omega_0 \mu \delta}{2} \frac{a^3 c + ac^3 + 2bc^3 + 2a^3 b}{c},$$

pri čemu je δ debljina kože a R_s površinski otpor stjenke u uvjetima rezonancije:

$$R_s = \sqrt{\frac{\omega_0 \mu}{2\sigma}} = \frac{\omega_0 \mu \delta}{2}.$$

Stoga, faktor dobrote pravokutnog rezonatora ovisi, osim o geometriji, i o debljini kože:

$$Q = \frac{abc(a^2 + b^2)}{\delta(a^3c + ac^3 + 2bc^3 + 2a^3b)}.$$

Zaključujemo da faktor dobrote ovisi o kvaliteti stijenke i konstrukciji rezonatora.

Za kockasti rezonator faktor dobrote je:

$$Q = \frac{a}{3\delta} = \frac{a}{3} \sqrt{\frac{\omega_0 \mu \sigma}{2}}.$$

Ako u kockastom rezonatoru oscilira TE₁₀₁ mod, tada je faktor dobrote u ovom posebnom slučaju:

$$Q = \frac{\pi}{3} \sqrt{\frac{\sigma}{\omega_{101} \epsilon}}.$$

Iz dobivenih relacija dalo bi se uočiti da je faktor dobrote razmjernan volumenu rezonatora (kuglasti rezonator bio bi najbolji s tog stajališta). Za svaki mod, faktor dobrote određen je u zadanom rezonatoru dimenzijama i gubicima na stjenkama, odnosno rezonantnom frekvencijom, pri čemu je potrebno uočiti da različiti modovi imaju različite faktore dobrote. U svakom slučaju, Q-faktor bit će veći što su manje vrijednosti magnetskog polja na površinama, dakle što su manje površinske gustoće struje.

Cilindrični rezonator

Predstavimo još rješenja za polje u cilindričnom rezonatoru na sl. 9. Kao i kod pravokutnog rezonatora, rješenje za TE modove implicira da je aksijalna komponenta magnetskog polja u takvoj strukturi:

$$H_z(r, \varphi, z) = H_1 J_m(kr) \cos m\varphi e^{-j\beta_g z} + H_2 J_m(kr) \cos m\varphi e^{+j\beta_g z} \text{ xvii}.$$

Slično kao i prije, zbog graničnih uvjeta na $z = 0$ i $z = c$ bit će:

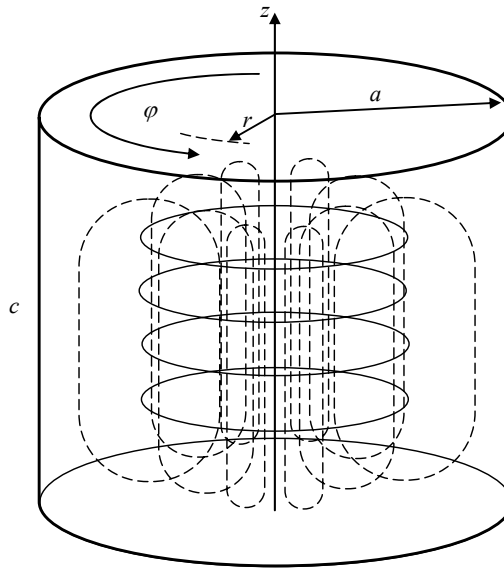
$$H_z(r, \varphi, z) = 2jH_0 J_m(kr) \cos m\varphi \sin \beta_g z,$$

odnosno, uz (l prirodni broj):

$$\beta_g c = l\pi \Rightarrow H_z = 2jH_0 J_m(kr) \cos m\varphi \sin \frac{l\pi z}{c}.$$

^{xvii} U relaciji je izostavljena vremenska ovisnost polja, odnosno stavili smo da je:

$$H_z(r, \varphi, z, t) = H_z(r, \varphi, z) e^{j\omega t}.$$



Slika 9. Cilindrični rezonator (TE_{10l} mod)

Polje mora zadovoljiti i granični uvjet za magnetsko polje na $r = a$:

$$\left. \frac{\partial H_z}{\partial r} \right|_{r=a} = 0 \Rightarrow J'_m(ka) = 0.$$

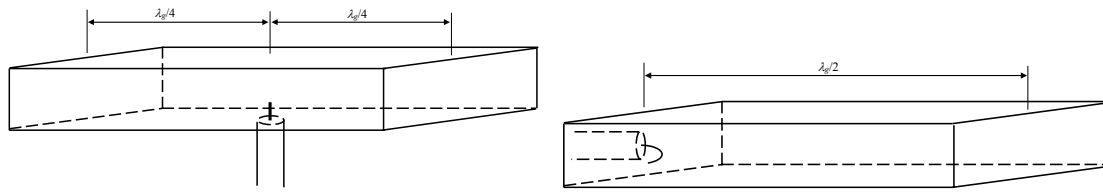
Uzmimo primjer TE_{10l} moda. Iz tablice 1 u poglavlju 4. za $n = 1$ i $m = 0$ imamo rješenje: $ka = 3,83$, pa je u tom slučaju rješenje za komponente stojnog elektromagnetskog vala:

$$\begin{aligned} H_z &= 2jH_0J_0\left(3,83\frac{r}{a}\right)\sin\frac{l\pi z}{c}, \\ H_r &= -2j\frac{\pi a}{c}\frac{H_0}{3,82}J_1\left(3,83\frac{r}{a}\right)\cos\frac{l\pi z}{c}, \\ E_\phi &= 2\omega\mu a\frac{H_0}{3,82}J_1\left(3,83\frac{r}{a}\right)\sin\frac{l\pi z}{c}. \end{aligned}$$

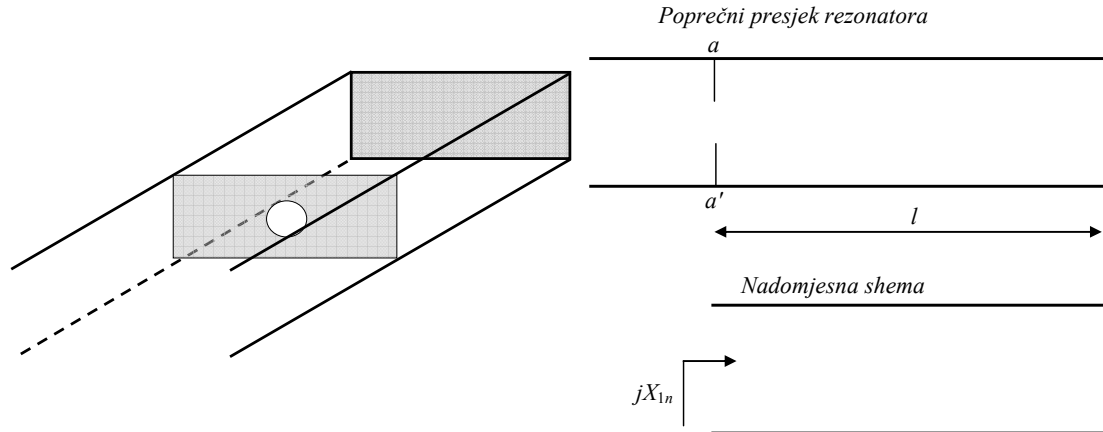
Kao što je prikazano na sl. 9, u slučaju TE_{10l} moda oscilacija silnice električnog polja (puna linija) zatvorene su u kružnice koje leže u transverzalnoj $R\phi$ ravnini, dok se silnice magnetskog polja (crtkano) zatvaraju okomito na silnice električnog polja i leže u RZ ravnini a konstantne su linijske gustoće po azimutu.

Rezonatori s otvorom

Da bi uzbudili rezonator te da bi bili u stanju nadomještati energiju koja se potroši na zagrijavanje stjenki rezonatora, neophodno je da rezonator ima nekakav otvor. Naravno da će taj otvor imati utjecaja na konfiguraciju polja u rezonatoru i imat će svoju nadomjesnu shemu, koja će upotpuniti nadomjesnu shemu izoliranog rezonatora. Rezonator se može uzbuditi preko valovoda pomoću otvora u stjenci, a moguće ga je uzbuditi i koaksijalnom linijom koja završava bilo petljicom ili antenicom, kao na sl. 10. Uobičajena sprema valovoda i rezonatora je okrugli otvor kao na sl. 11.



Slika 10. Načini uzbude pravokutnog rezonatora s pomoću koaksijalne linije



Slika 11. Uzbuda pravokutnog rezonatora s pomoću valovoda s otvorom

Vanjski krug može biti čvršće ili slabije vezan za rezonator. Ovisno o tome vanjski krug imat će veći ili manji utjecaj na Q-faktor i rezonantnu frekvenciju rezonatora. Ovo ćemo ilustrirati na primjeru rezonatora kao dijela pravokutnog valovoda koji je priključen na ostatak valovoda preko otvora na sl. 11.

Da se izračunati da pretvoriti u nadomjesnoj shemi paralelnim induktivitetom čija je normirana reaktancija (poglavlje 4, tablica 1):

$$X_{an} = \frac{X_a}{Z_0} = \frac{d^3}{3ab} \beta_g = A\beta_g,$$

pri čemu je d promjer otvora, a $a \times b$ dimenzije poprečnog presjeka valovoda. Normirana ulazna impedancija kratkospojenog valovoda u ravnini aa' je:

$$X_{1n} = \operatorname{tg}(\beta_g l)$$

Govoreći o pravokutnom valovodu, pokazali smo da je moguće pregraditi valovod kratkim spojem na udaljenosti $l_{KS} = \lambda_g/2$, odnosno:

$$\theta = \beta_g l_{KS} = \frac{2\pi}{\lambda_g} \cdot \frac{\lambda_g}{2} = \pi.$$

Međutim, na udaljenosti l postavili induktivni otvor kako bi omogućili protok elektromagnetske energije u rezonator, pa je stoga $l \neq l_{KS}$. Ako je položaj otvora blizu $\theta = \pi$, odnosno:

$$|\pi - \beta_g l| < 0,1,$$

vrijedi:

$$\operatorname{tg}(\beta_g l) = -\operatorname{tg}(\pi - \beta_g l) \doteq \beta_g l - \pi.$$

Ukupna ulazna impedancija u rezonator će sada biti impedancija u točkama aa' bez prepreke paralelno spojena s impedancijom prepreke:

$$Z_{uln} = j \frac{X_{an} X_{ln}}{X_{an} + X_{ln}} \doteq j \frac{A\beta_g (\beta_g l - \pi)}{A\beta_g + \beta_g l - \pi}.$$

Iz ove relacije vidimo da ulazna impedancija postaje jednaka nuli, dakle dolazi do električne rezonancije kada je $\beta_g l = \pi$. Ovo je karakteristika serijskog titrajnog kruga, te tako možemo prikazati rezonator s otvorom, ali čija je duljina $\beta_g l = \pi$. Ako želimo rezonator koji je paralelni titrajni krug odabrali bi $\beta_g l$ tako da nam se kratki spoj preslikava u otvoreni krug dodavanjem induktiviteta otvora. Tada bi u rezonanciji imali beskonačnu ulaznu impedanciju odnosno, ako se radi o rezonatoru s gubicima, maksimalnu ulaznu impedanciju.

Za svaki rezonator možemo definirati:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ i } Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R},$$

pri čemu su ω_0 rezonantna frekvencija i Q_0 faktor dobrote u slučaju neopterećenog rezonatora. Spregu ćemo prikazati kao idealni transformator omjera $N : 1$ s čijim je primarom serijski spojen induktivitet otvora L_a (sl. 12). Uzimajući da je induktivitet L_a zanemariv u odnosu na induktivitet rezonatora L , Q-faktor opterećenog rezonatora je:

$$Q_L = \frac{\omega_0 L}{R + n^2 Z_0}.$$

Stavivši:

$$\beta = \frac{n^2 Z_0}{R} \Rightarrow Q_L = \frac{\omega_0 L}{R(1 + \beta)},$$

dobivamo:

$$\frac{1}{Q_L} = \frac{1}{Q_0} + \frac{\beta R}{L\omega_0}.$$

Faktor dobrote vanjskog kruga je:

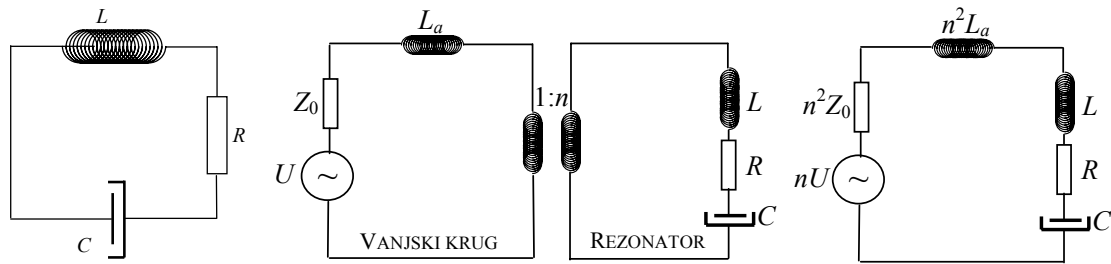
$$Q_{ext} = \frac{\omega_0 L}{n^2 Z_0} = \frac{\omega_0 L}{\beta R},$$

pa je:

$$\frac{1}{Q_L} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_{ext}}.$$

U slučaju:

$$\beta = 1 \Rightarrow Q_0 = Q_{ext} = 2Q_L.$$



Slika 12. Ekvivalentna shema pravokutnog rezonatora uzbuđenog s pomoću valovoda s otvorom

S vrijednošću $\beta = 1$ preslika impedancije izvora jednaka je otporu rezonatora odnosno $R = n^2 Z_0$ i rezonator je prilagođen. Ta je vrijednost kritična sprege. Slučaj $\beta < 1$ je slučaj podkritične sprege, a slučaj $\beta > 1$ je slučaj nadkritične sprege. Preduvjet za naponski maksimum u rezonanciji je u slučaju podkritične sprege. Preduvjet za naponski maksimum je da rezonator radi u podkritičnoj sprezi.

8. Mikrovalni aktivni elementi

Mikrovalni aktivni elementi su **mikrovalne cijevi** koje koristimo kod velikih snaga i **mikrovalni poluvodički elementi** koje koristimo kod malih snaga. Cijevi koje se koriste u mikrovalnoj tehnici su različite izvedbe od onih koje koristimo kod nižih frekvencija, i ne mogu se na tako visokim frekvencijama koristiti cijevi koje su dizajnirane za relativno niske frekvencije. Uzmimo primjer triode. Kao aktivni elementi, dakle za gradnju oscilatora i pojačala u mikrovalnoj tehnici triode ne mogu zadovoljiti. Naime historijski se nastojalo najprije triode prilagoditi sve višim frekvencijama, pa se na taj način došlo u njihovoj primjeni do nekoliko stotina megaherca pa čak i do 3 GHz. Osnovna ograničenja u radu triode nastupaju kada je vrijeme proleta elektrona između anode i katode istog reda veličine kao period izmjene signala kojeg generiramo ili pojačavamo (dakle onog signala koji je na rešetci). Za normalan rad triode potrebno je da elektroni putuju u prostoru između rešetke i anode za vrijeme kada je izmjenično polje takvo da ih usporava i na taj način elektroni predaju energiju izmjeničnom električnom polju. Međutim, ako se oni dugo zadržavaju u prostoru, poremeti se taj fazni odnos i može doći do toga da oni više ne mogu predavati energiju nego uzimaju energiju. U tom slučaju energija izmjeničnog polja (impedancija opterećenja) odlazi na ubrzavanje elektrona, te je tada trioda neupotrebljiva kao pojačalo ili oscilator. Izlaz iz ovog problema možemo tražiti u smanjenju udaljenosti između elektroda, što ima lošu posljedicu u povećanju kapaciteta. Drugi način je da ubrzamo elektrone jakim istosmjernim poljem odnosno povećanjem anodnog napona, pa se elektroni kratko zadržavaju u prostoru između elektroda, ali se tada povećava anodna disipacija. U svakom slučaju, efikasna primjena triode u mikrovalnoj tehnici predstavlja problem, te je bilo potrebno naći nešto kvalitativno novo što bi zamijenilo triodu.

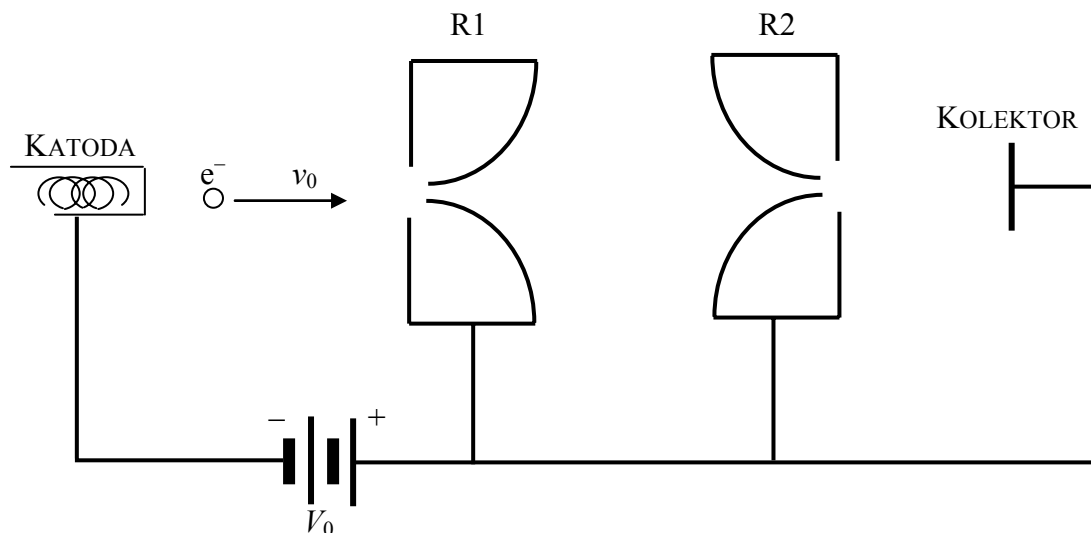
Razvio se stoga čitav niz novih elektronskih uređaja, u prvom redu klistron, magnetron i cijev s putujućim valom. U novije vrijeme u gradnji mikrovalnih oscilatora i pojačala sve više uzimaju učešća poluvodički elementi. To su u prvom redu Gunn-dioda i lavinska dioda, zatim tranzistori koje koristimo do frekvencija 7 GHz i više, te snagama do nekoliko desetaka ili stotina milivati.

Klistron

Klistron je mikrovalna cijev u kojoj se odvija proces interakcije elektromagnetskog polja i snopa elektrona, čime se pridodaju još neki efekti proleta elektrona. Ukoliko u izmjenično električno polje ubacujemo snop elektrona koji mijenja gustoću u ovisnosti da li polje koči elektrone (jedna poluperioda polja) ili ih ubrzava (druga poluperioda polja), možemo postići efekt da snop elektrona predaje energiju polju i to je osnovni princip rada klistrona.

Dvorezonantni klistron

Promotrimo dvorezonantni klistron na sl. 1. Sastoji se principijelno od katode, dva rezonatora i kolektora. R1 i R2 su rezonatori visokog faktora dobrote i u njima elektromagnetsko polje može dugo titrati. Između rezonatora R1 i katode obično se nalaze elektrode za fokusiranje snopa.



Slika 1. Dvorezonantni klistron

Katoda termionskom emisijom isijava elektrone. Ovi se ubrzavaju u jakom istosmjernom električnom polju prema prvom rezonatoru. U R1 u prostoru između rešetki vlada promjenjivo električno polje, koje vrši tzv. brzinsku modulaciju elektrona. Naime, za vrijeme pozitivne poluperiode polja ovi se dodatno ubrzavaju, a za vrijeme negativne se usporavaju te takvi dolaze u prostor između rezonatora u kojem smatramo da ne vlada nikakvo polje. Ako prikladno odaberemo razmak između R1 i R2 u kojem putuju elektroni bez dodatne akceleracije (jer nema polja u tom dijelu prostora) može se postići da oni brži elektroni dostignu one sporije koji su ranije napustili R1. Na taj način se može postići da elektroni dolaze grupirani u drugi rezonator R2. Ako je izmjenično polje u R2 u trenutku nailaska grupe elektrona takvog polariteta da ih usporava, onda oni tome polju predaju svoju energiju. Ako bi dio te energije pomoću koaksijalnog kabela odveli na ulazni rezonator ostvarili bi oscilator. Elektroni izlaskom iz R2 nastavljaju svoj put i zaustavljaju se na kolektoru.

Klistron možemo analizirati uz sljedeće pretpostavke, a koje su donekle ispunjene u stvarnosti.

1. Vrijeme prolaska elektrona kroz rešetke prvog, odnosno drugog rezonatora je zanemarivu u usporedbi s periodom. To je postignuto velikim ubrzanjem elektrona (napon 1 kV) i malim razmakom mrežica.
2. Izmjenični napon između rešetki prvog rezonatora znatno je manji od katodnog potencijala.

Neka je v_0 brzina kojom akcelerirani elektroni dolaze do prvog rezonatora. Ona je postignuta djelovanjem napona V_0 između R1 i katode. Kinetička energija elektrona (masa $m_e = 9,12 \cdot 10^{-31}$ kg, naboj $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ As) lansiranog s katode jednaka je električnoj energiji:

$$\frac{m_e v_0^2}{2} = eV_0,$$

pa je brzina kojom elektrona stiže u R1:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2eV_0}{m_e}}.$$

Ako zbog postojanja stojnog vala u R1 postoji između rešetki izmjenični napon $V_1 \sin \omega t$, uz pretpostavku da se taj napon ne mijenja u vremenu proleta elektrona između rešetki, može se izračunati kinetička energija elektrona na izlasku iz prvog rezonatora. Kinetičkoj energiji elektrona koji prolazi R1 u trenutku t_1 sada moramo pribrojiti i energiju koju elektroni izmjene s poljem rezonatora, pa je sada:

$$\frac{m_e v_1^2}{2} = e(V_0 + V_1 \sin \omega t_1),$$

pri čemu je $V_1 \ll V_0$, te je brzina elektrona na izlazu iz R1:

$$v_1 = v_0 \sqrt{1 + \frac{V_1}{V_0} \sin \omega t_1}.$$

Gornja jednačba je jednačba brzinske modulacije. Elektron koji prođe kroz rezonator kada je faza napona $\omega t_1 = 0$ iziđe iz njega s nepromijenjenom brzinom. Međutim brzina v_1 na izlazu iz R1 varira između svoje minimalna i maksimalne brzine:

$$v_{\max} = v_0 \sqrt{1 + \frac{V_1}{V_0}}$$

$$v_{\min} = v_0 \sqrt{1 - \frac{V_1}{V_0}}.$$

Svi ti elektroni imat će dakle distribuciju brzina prema sinusnom zakonu. Pri tome gustoća elektrona pri prolazu snopa kroz prvi rezonator se ne mijenja, ali je postignuta **brzinska modulacija** elektronskog snopa. Pri izlazu iz R1 snop dolazi u međuprostor između rezonatora R1 i R2 za kojeg pretpostavljamo da ne postoji polje, pa tako ni električna sila, te svi elektroni zadržavaju svoju brzinu. Vrijeme T potrebno da pojedini elektron prijeđe put s između dvaju rezonatora bit će dakle jednako:

$$T = \frac{s}{v_1} = \frac{s}{v_0 \sqrt{1 + \frac{V_1}{V_0} \sin \omega t_1}}.$$

Brži elektroni sustižu one s manjom brzinom koji su prije njih prošli kroz R1, pa se postiže i *modulacija gustoće snopa* u tom međuprostoru, odnosno *strujna modulacija*. To sustizanje sporijih elektrona uzrokuje grupiranje elektrona, odnosno dolazi do naizmjeničnog zgušnjavanja i razrjeđenja. Sada je potrebno na neki način zadovoljiti fazne odnose tako da kada u R2 nahrupi dio snopa velike gustoće elektrona faza električnog polja bude takva da ono zakoči elektrone, pa oni predaju energiju polju. Kada kroz R2 prolazi dio snopa male gustoće elektrona, prolaskom kroz rezonator oni se ubrzavaju te oduzimaju energiju polju. Broj elektrona koji oduzima polju energiju

tada je znatno manji od broja elektrona koji mu je predaju, pa je i ukupno predana energija polju mnogo veća. Promotrimo elektron koji stiže u rezonator R1 kada je polje u rezonatoru jednako nuli. Tada je njegov put od R1 do R2 jednak:

$$s = v_0 T_0 .$$

Put od R1 do R2 elektron koji stiže u R1 u minimumu polja prelazi sporije jer polje u rezonatoru koči taj elektron pri čemu ne zaboravljamo da je odaslan ranije te vrijedi:

$$s = v_{\min} T_{\max} = (v_0 - \Delta v) T_{\max} ,$$

dok najbrže stigne onaj koji dolazi u maksimumu polja i koji je odaslan kasnije, pa je:

$$s = v_{\max} T_{\min} = (v_0 + \Delta v) T_{\min} .$$

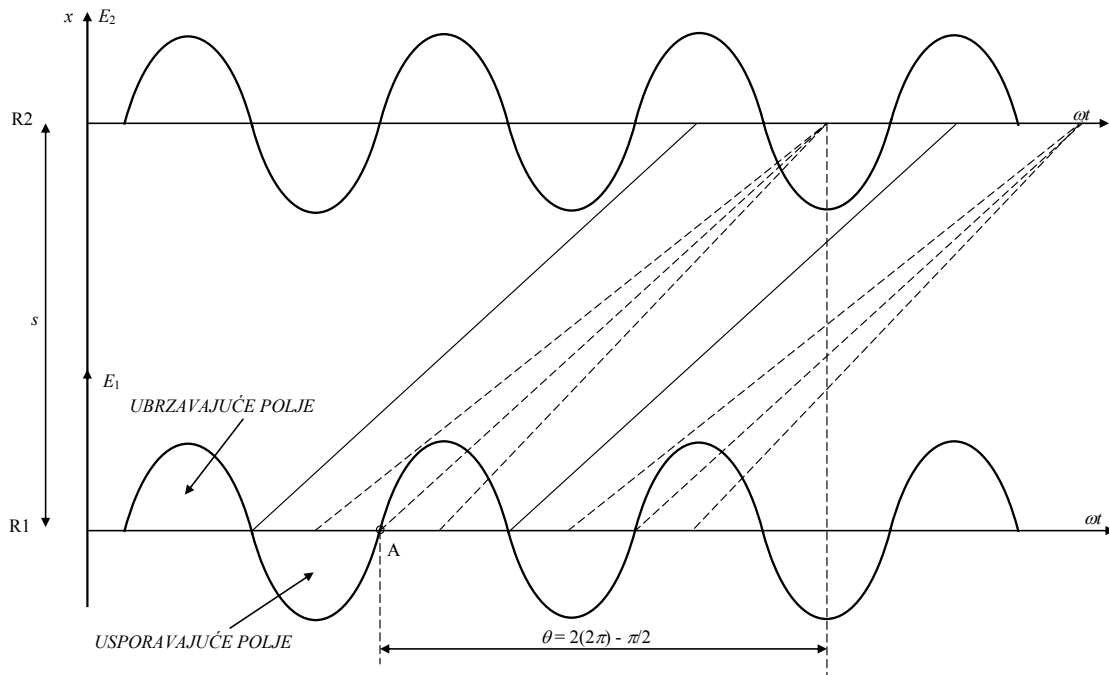
Namještanjem napona V_0 , a time i brzine v_0 elektrona koji izlijeću iz katode možemo postići da većina elektrona koji prođu R1 stignu u R2 u trenutku kada je polje u R2 maksimalno. Ova situacija opisana je brzinskim dijagramom na sl. 2. Faza prolaska kroz R1 od maksimalnog usporavanja do maksimalnog ubrzavanja naziva se *faza grupiranja*.

Tako grupirani elektroni dolaze u rezonator R2 u kojem pretpostavljamo da postoji neko polje u trenutku t_2 :

$$t_2 = t_1 + T ,$$

odnosno odgovarajuća faza je:

$$\omega t_2 = \omega(t_1 + T) = \omega t_1 + \frac{\omega s}{v_0} \left(1 + \frac{V_1}{V_0} \sin \omega t_1 \right)^{-\frac{1}{2}} .$$



Slika 5. Brzinski dijagram dvorezonantnog klizna za optimalni kut proleta

U ovoj jednadžbi sada pretpostavljamo da je amplituda izmjeničnog napona u R1 mnogo manja od katodnog napona, i izraz u zagradi razvijamo u binomni red te zadržimo prva dva člana reda, pri čemu članove višeg reda zanemarujemo, pa je:

$$\frac{V_1}{V_0} \ll 1 \Rightarrow \omega t_2 \doteq \omega t_1 + \theta \left(1 - \frac{V_1}{2V_0} \sin \omega t_1 \right),$$

gdje je:

$$\theta = \frac{\omega s}{v_0},$$

kut proleta elektrona koji nije ubrzan. Gornja jednadžba daje fazni kut ωt_2 mjeren u odnosu na fazu napona u prvom rezonatoru u usporedbi s faznim kutom ωt_1 na R1. Napišimo sada gornju jednadžbu u obliku:

$$\omega \left(t_2 - \frac{s}{v_0} \right) = \omega t_1 - M \sin \omega t_1,$$

gdje je parametar:

$$M = \frac{\theta V_1}{2V_0}.$$

Nacrtajmo fazni kut ωt_1 kao funkciju faznog kuta $\omega(t_2 - s/v_0)$, dakle kuta dolaska na R2 u radijanima umanjenog za faznim kut dolaska neubrzanog elektrona, i to za različite vrijednosti parametra M, što je prikazano na sl. 3. Iz dijagrama vidimo da za određene vrijednosti M (za $M = 1,84$ točke A, B, C primjerice) elektroni mogu napustiti R1 u različitim trenucima, a istovremeno stići na R2. Neka je na R1 gustoća naboja ρ_1 , a na R2 gustoća ρ_2 . Tada je količina naboja koja prođe kroz jedinicu površine kroz rešetku rezonatora R1 za vrijeme dt_1 :

$$dQ_1 = e \rho_1 v_1 dt_1.$$

Ista količina naboja prođe kroz jediničnu površinu rezonatora R2 kroz različito vrijeme dt_2 :

$$dQ_2 = e \rho_2 v_2 dt_2 = dQ_1,$$

pa bi mogli zaključiti da je:

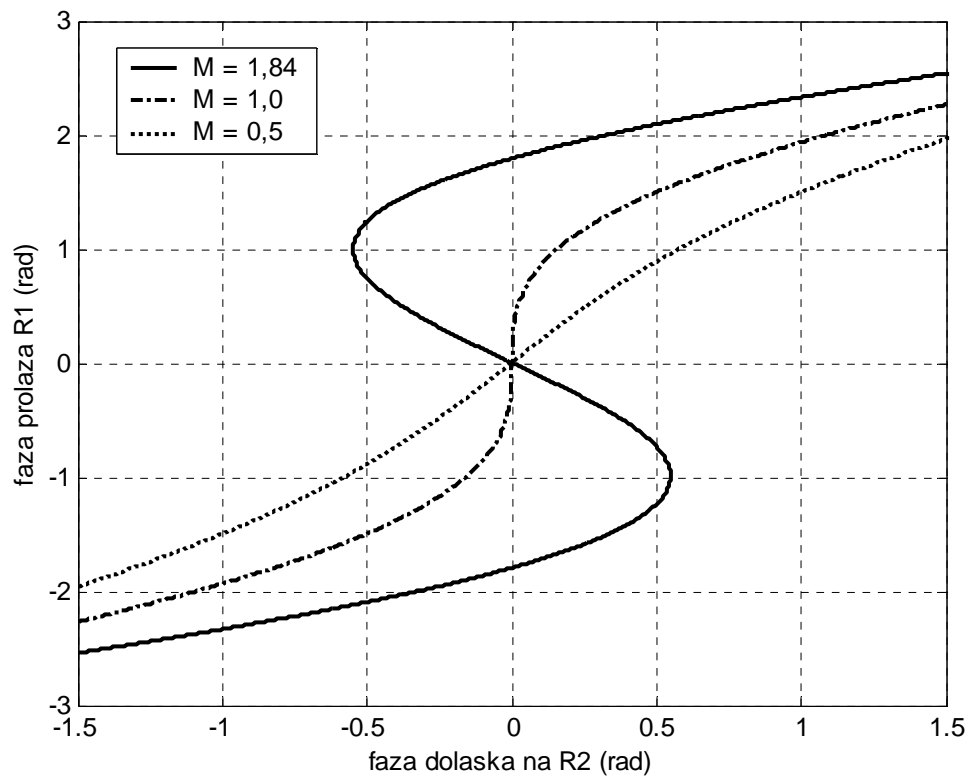
$$\rho_2 v_2 dt_2 = \rho_1 v_1 dt_1.$$

Ova jednadžba ne vrijedi ako elektroni iz snopa pristižu jedni druge, jer u tom slučaju količina naboja koji dođe u vremenskom intervalu dt_2 na R2 mogla je napustiti R1 u različitim trenucima (slučaj $M = 1,84$), pa vrijedi:

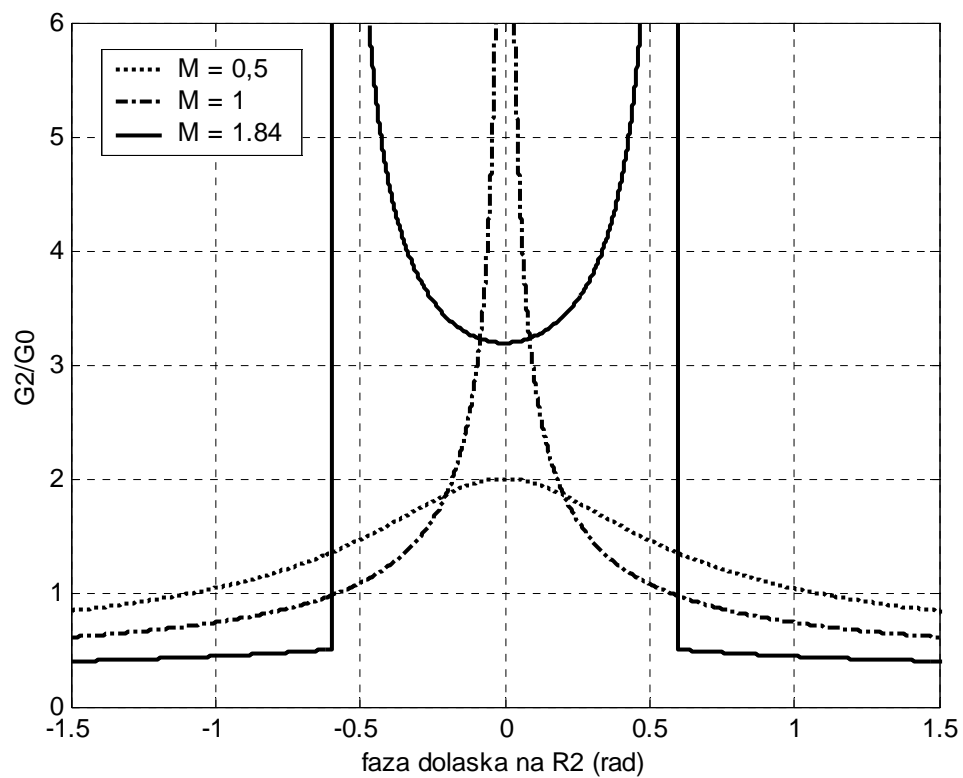
$$\rho_2 v_2 dt_2 = \sum \rho_1 v_1 dt_1.$$

Međutim, zbog toga što smatramo da su mrežice u rezonatoru jedna blizu druge slijedi da je gustoća naboja ista ispred i iza R1, a isto tako je promjena brzine elektrona relativno mala, pa je:

$$\rho_1 \approx \rho_2 \ \& \ v_1 \approx v_2 \approx v_0 \Rightarrow \rho_2 v_2 dt_2 = \rho_1 v_1 \sum dt_1,$$



Slika 3. Ovisnost faze prolaza kroz R1 o fazi dolaska na R2



Slika 4. Ovisnost struje klistrona o fazi dolaska na R2 za različite vrijednosti M

te slijedi:

$$\frac{\rho_2}{\rho_0} = \frac{\sum dt_1}{dt_2} = \sum \frac{d(\omega t_1)}{d(\omega t_2)}.$$

Budući da vrijedi da su gustoće struja snopa koji prolazi kroz rezonatore:

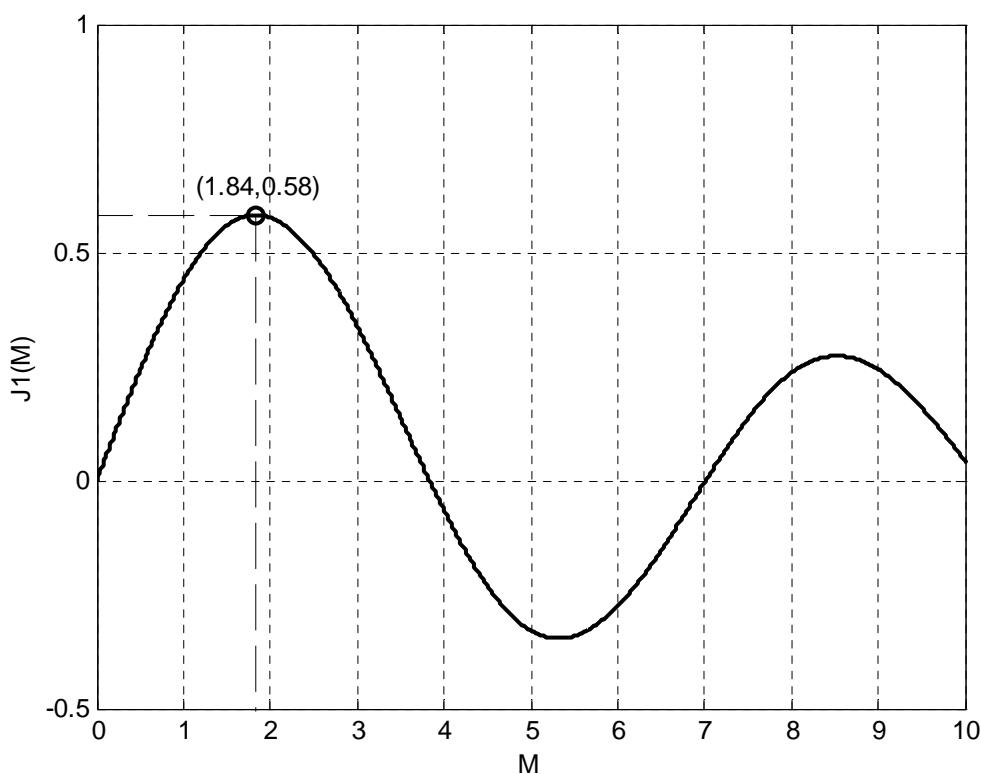
$$\begin{aligned} G_1 &= e\rho_1 v_1 \approx e\rho_0 v_0 = G_0 \\ G_2 &= e\rho_2 v_2 \approx e\rho_2 v_0 \end{aligned},$$

imamo da je:

$$\frac{G_2}{G_0} = \sum \frac{d(\omega t_1)}{d(\omega t_2)},$$

te zaključujemo da je karakteristika omjera struja prikazana na sl. 4 jednaka derivaciji, odnosno nagibu karakteristike prikazane na dijagramu na sl. 3. Dakle, posljedica ovog procesa je struja koja pulsira i to na mjestu R2. Ova struja sadrži mnoštvo harmonika. Rezonator R2 možemo podesiti tako da mu rezonantna frekvencija odgovara osnovnom (ω) ili nekom od viših harmonika, pa klistron možemo upotrijebiti kao multiplikator frekvencije. Na kolektor dolaze usporeni elektroni koji iz R2 izlaze nekom konstantnom brzinom te opet stižu u prostor u kojem nema električnog polja i predstavljaju neku konstantnu struju, a elektroni su svoju energiju u impulsima predali elektromagnetskom polju rezonatora R2.

Da bi odredili optimalni mod rada klistrona treba odrediti izlaznu snagu klistrona i njegov stupanj efikasnosti. Ako je izmjenični napon izlaznog rezonatora R2 $V_2 \sin \omega t$, onda polju rezonatora R2 elektron preda energiju:



Slika 5. Besselova funkcija prvog reda prve vrste

$$W_e = -eV_2 \sin \omega t_2 = -eV_2 \sin \left[\omega t_1 + \theta \left(1 - \frac{V_1}{2V_0} \sin \omega t_1 \right) \right].$$

Prosječna energija po elektronu dobije se kao:

$$\overline{W_e} = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega t_1=0}^{\omega t_1=2\pi} W_e d(\omega t_1) = -\frac{eV_2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \left[\omega t_1 + \theta \left(1 - \frac{V_1}{2V_0} \sin \omega t_1 \right) \right] d(\omega t_1),$$

odnosno:

$$\overline{W_e} = -\frac{eV_2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\omega t_1 + \theta - M \sin \omega t_1) d(\omega t_1).$$

Napišimo posljednju jednadžbu u sljedećem obliku:

$$\overline{W_e} = -\frac{eV_2}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\sin(\omega t_1 + \theta) \cdot \cos(M \sin \omega t_1) - \cos(\omega t_1 + \theta) \cdot \sin(M \sin \omega t_1)] d(\omega t_1).$$

Uzimajući da razvijanjem u red članova:

$$\begin{aligned} \cos(M \sin \omega t_1) &= J_0(M) + 2J_2(M) \cos(2\omega t_1) + 2J_4(M) \cos(4\omega t_1) + \dots \\ \sin(M \sin \omega t_1) &= 2J_1(M) \sin(\omega t_1) + 2J_3(M) \sin(3\omega t_1) + \dots \end{aligned}$$

te kako množeći prvi izraz sa $\sin(\omega t_1 + \theta)$ i integrirajući od 0 do 2π imamo:

$$\int_0^{2\pi} \cos(M \sin \omega t_1) \sin(\omega t_1 - \theta) d(\omega t_1) = 0,$$

dok sličnim postupkom integriranje daje nulu za sve osim za Besselovu funkciju prvog reda, prosječna energija je:

$$\overline{W_e} = -\frac{eV_2}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2J_0(M) \sin \omega t_1 \cdot \cos(\omega t_1 + \theta) d(\omega t_1) = -eV_2 J_1(M) \sin \theta.$$

$J_1(M)$ je Besselova funkcija prvog reda prve vrste i prikazana je na sl. 5. Dakle, dobili smo izraz za prosječnu energiju jednog elektrona koju on preda polju rezonatora R2. Ako naboj koji predaje energiju napušta katodu brzinom N elektrona u sekundi te ako se svi oni pojave u prvom rezonatoru pa i u drugom, onda je srednja izmjenična snaga koju oni predaju rezonatoru R2:

$$P_{\sim} = \overline{W_e} \cdot N = -eNV_2 J_1(M) \sin \theta.$$

Budući da je istosmjerna struja elektrona:

$$I_0 = eN,$$

onda je predana snaga:

$$P_{\sim} = \overline{W_e} \cdot N = -I_0 V_2 J_1(M) \sin \theta.$$

Snaga koju daje izvor napajanja je:

$$P_0 = I_0 V_0,$$

pa je faktor iskorištenja:

$$\eta = \frac{P_{\sim}}{P_0} = -\frac{V_2}{V_0} J_1(M) \sin \theta.$$

Ovom prilikom pretpostavili smo da se ništa energije ne troši na ubrzanje elektrona u R1. Iz posljednje relacije vidimo da je faktor iskorištenja (kao i izmjenična snaga) maksimalan kada je $J_1(M)$ maksimalan a to je kod $M = 1,84$ (vidi sl. 5), a *optimalni kut proleta* je:

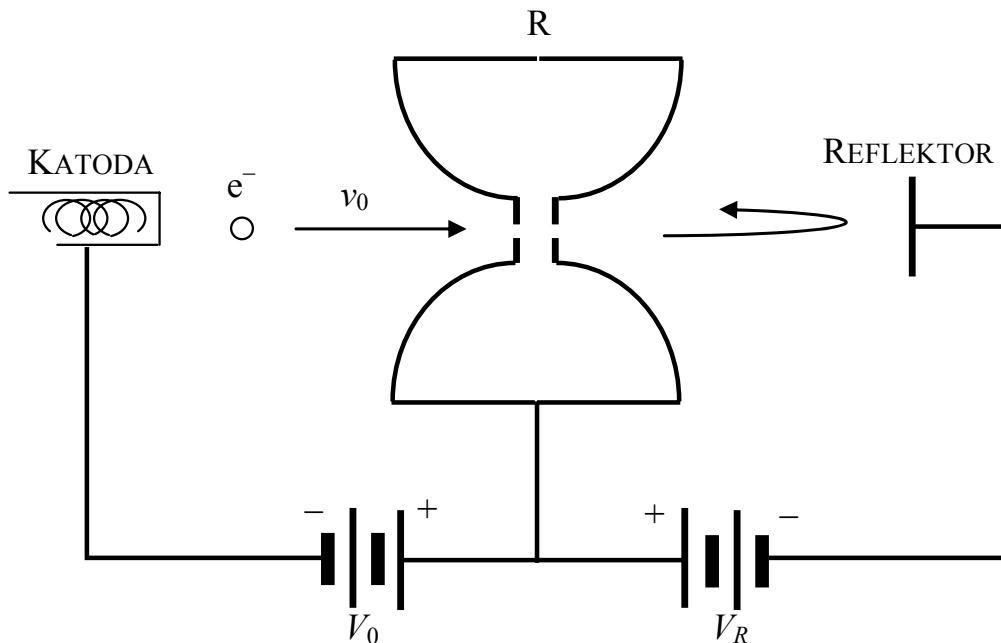
$$\theta = \frac{3\pi}{2} + n \cdot 2\pi = n(2\pi) - \frac{\pi}{2}, n = 1, 2, \dots$$

Faktor iskorištenja ovisi o i omjeru amplituda napona V_2/V_1 koji je znatno manji od 1. Teoretski, za:

$$\frac{V_2}{V_1} = 1 \Rightarrow \eta = 58,2 \, \%.$$

Refleksni klistron

Refleksni klistron je mikrovalni generator male snage reda 10-500 mW i radi na frekvencijama od 1 do 25 GHz s korisnošću 20-30 %. Sadrži jedan rezonator te, uz naponski izvor kojim kontroliramo potencijal katode, i istosmjerni naponski izvor u protuspoju kojim namještamo negativni potencijal reflektora, a njegova shema prikazana je na sl. 6.



Slika 6. Refleksni klistron

Elektroni se ubrzavaju zbog napona V_0 prema rezonatoru. Uslijed izmjeničnog napona između rešetki rezonatora oni se brzinski moduliraju kao i u slučaju klistrona s dva rezonatora. Međutim oni nastavljaju put prema reflektoru koji je na negativnom potencijalu u odnosu na rezonator, tako da ih istosmjerno polje usporava i konačno okreće smjer te oni ponovo prolaze kroz rešetke rezonatora. Kod ovakvog tipa klistrona potrebno je osigurati da niti jedan elektron ne stigne na reflektor ($x < s$), a to je moguće pošto je reflektor nižem potencijalu od katode, odnosno po apsolutnoj vrijednosti je $V_R > V_0$. Razmak s između rezonatora i reflektora treba dimenzionirati tako da kod zadanih istosmjernih napona elektroni u povratku dođu u takvoj fazi u odnosu na električno polje između rešetki da ih ono usporava, što znači da će mu oni predavati energiju. Kod klistrona s dva rezonatora grupiranje elektrona na mjestu R2 zbog brzinske modulacije odvijalo se oko elektrona koji prolazi kroz R1 kad se polje izmijeni iz usporavajućeg u ubrzavajuće i to uslijed toga jer se grupiranje vršilo u prostoru bez polja. Međutim, u slučaju refleksnog klistrona brži elektroni dopiru dalje prema reflektoru, te im treba više vremena da se vrate nego sporijima. Stoga se grupiranje vrši oko elektrona koji prolazi u trenutku kada polje na rezonatoru prelazi iz ubrzavajućeg u usporavajuće. Na brzinskom dijagramu klistrona na sl. 7 i 8 točkom A označena je **kritična faza** oko koje se grupiraju elektroni, odnosno faza polja kod koje prolazi elektron oko kojega se ostali grupiraju. Osim u izvedbi, refleksni klistron je jednostavniji i u upotrebi od klistrona s dva rezonatora. Oscilacije se postižu samo podešavanjem napona reflektora i katode. Teoretski faktor iskorištenja mu je manji, pa se koristi za manje snage, a ne može se koristiti kao multiplikator.

Analizu refleksnog klistrona provodimo slično kao i u prethodnom slučaju. Snop elektrona izbačenih s katode brzinom v_0 :

$$v_0 = \sqrt{\frac{2eV_0}{m_e}}$$

dolazi na prvu rešetku rezonatora, u kojem se brzinski modulira zbog djelovanja električnog polja u rezonatoru te elektroni iz snopa imaju različite početne brzine pri izlasku iz rezonatora. Nakon izlaska iz rezonatora na elektrone koji opet djeluje konstantno polje, koje ga akcelerira i ponovo vraća prema rezonatoru. Put akceleriranog elektrona je:

$$x = v_1 t + \frac{1}{2} a t^2 ,$$

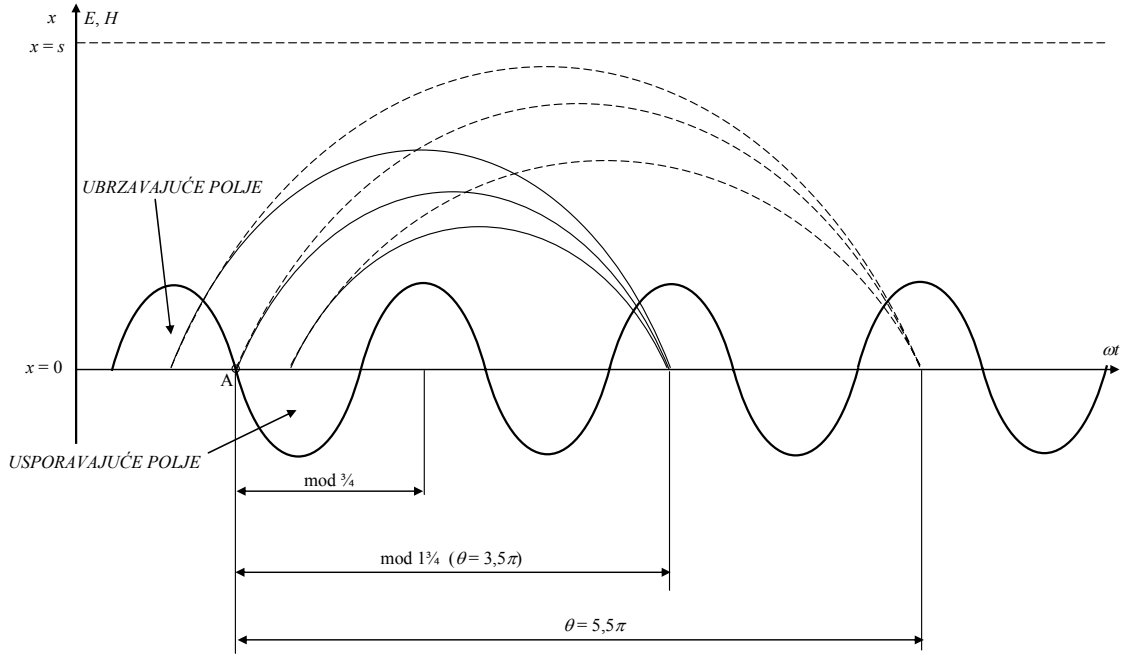
pri čemu svi elektroni imaju istu akceleraciju a ali nemaju svi istu početnu brzinu v_1 . Početna brzina, odnosno brzina kojom elektroni napuštaju drugu rešetku rezonatora ovisi o amplitudi izmjeničnog napona rezonatora:

$$v_1 = v_0 \sqrt{1 + \frac{V_1}{V_0} \sin \omega t_1} .$$

Napon između rešetke na izlazu rezonatora R i reflektora je:

$$V_R - (V_0 + V_1 \sin \omega t) \approx V_R - V_0 \Leftarrow V_1 \ll V_0 .$$

Električno polje između rezonatora i reflektora je, uz pretpostavku da je homogeno:



Slika 7. Brzinski dijagram refleksnog klistrona

$$E = -\frac{V_R - V_0}{s},$$

a sila na elektron je:

$$F_e = -eE = m \frac{d^2 x}{dt^2},$$

pa je akceleracija elektrona:

$$a = \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{e(V_R - V_0)}{m_e s}.$$

Prema tome, uzevši početni uvjet da elektron napušta rezonator ($x = 0$) u trenutku t_1 brzinom v_1 imamo da je:

$$x = \frac{e(V_R - V_0)}{2m_e s} (t_1 - t)^2 + v_1 (t_1 - t),$$

što predstavlja položaj elektrona kao funkciju vremena $f(t - t_1)$. Ako se elektron vrati u rezonator ($x = 0$) u trenutku t_2 , ukupno vrijeme koje prođe od napuštanja rezonatora do povratka u istu točku (drugu rešetku) dobijemo uvrštavanjem $x = 0$ i $t = t_2$:

$$t_2 - t_1 = -\frac{2msv_0}{e(V_R - V_0)},$$

odnosno fazni kut napona pri povratku je:

$$\omega t_2 = \omega t_1 - \frac{2\omega m s v_0}{e(V_R - V_0)} \left(1 + \frac{V_1}{V_0} \sin \omega t_1 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dobili smo izraz analogan izrazu za klistron s dva rezonatora uz vrijednost kuta proleta:

$$\theta = -\frac{2\omega m s v_0}{e(V_R - V_0)}. \quad (*)$$

Sada razvijanjem izraza u zagradi u binomni red te zanemarujući članove višeg reda od drugog, uvažavajući da je amplituda izmjeničnog napona između rešetki rezonatora znatno manja od iznosa napona između katode i rezonatora:

$$\frac{V_1}{V_0} \ll 1 \Rightarrow \omega t_2 \doteq \omega t_1 + \theta \left(1 - \frac{V_1}{2V_0} \sin \omega t_1 \right),$$

gdje je parametar M :

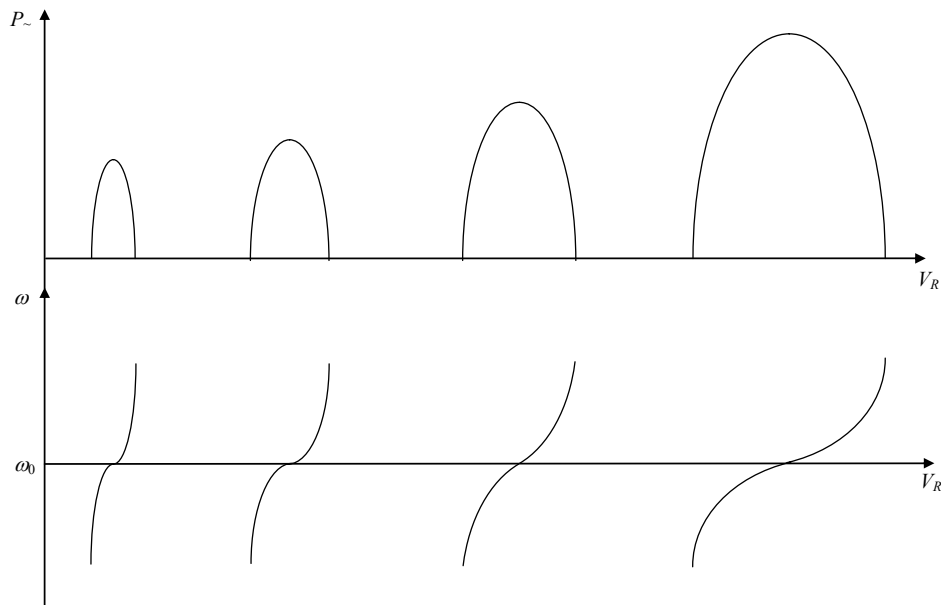
$$M = \frac{\theta V_1}{2V_0}.$$

Dakle faza ponovnog dolaska u rezonator ovisi o konstanti ωt_1 , veličini θ i izmjeničnoj komponenti s amplitudom i članom $\sin \omega t_1$. Da bi došlo do oscilacija kako je već pokazano prije mora biti:

$$\theta = n(2\pi) - \frac{\pi}{2}.$$

Ako posljednju relaciju izjednačimo s (*) imamo da je:

$$\frac{V_0}{(V_R - V_0)^2} = \frac{\left(2n\pi - \frac{\pi}{2} \right)^2 e}{8\omega^2 s^2 m}. \quad (**)$$



Slika 8. Karakteristika refleksnog klistrona

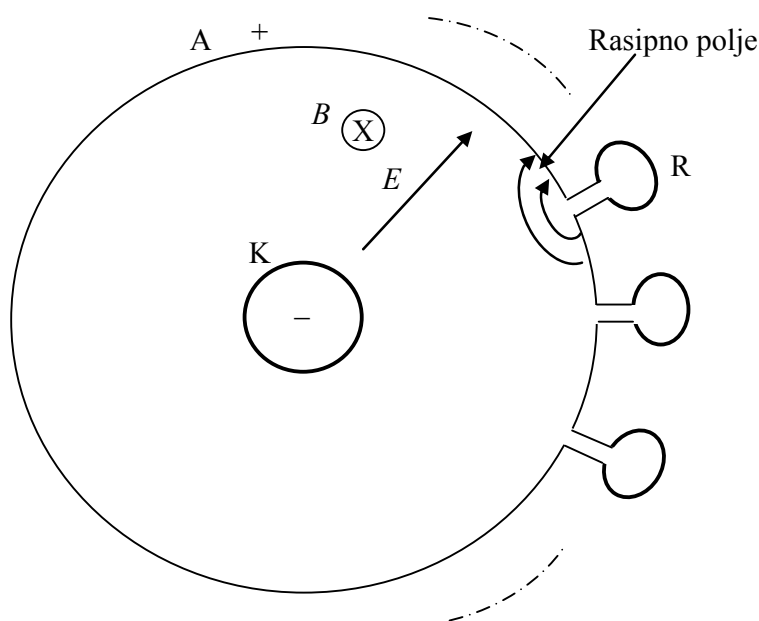
Da bi došlo do oscilacija mora biti zadovoljen ovaj uvjet u pogledu odnosa potencijala reflektora i katode u odnosu na rezonator. Dakle, samo njihovim podešavanjem doći će do oscilacija. Budući da gornju jednadžbu zadovoljava više kombinacija vrijednosti napona V_R i V_0 moguće je osciliranje kod raznih. Da se izračunati da je mikrovalna snaga na izlazu klistrona:

$$P_{\sim} = I_0 V_1 J_1(M) = \frac{2V_0 I_0 M J_1(M)}{2n\pi - \frac{\pi}{2}},$$

što je prikazano dijagramom na sl. 8. Iz relacije (**) vidimo da je uvjet osciliranja, odnosno odgovarajući kut proleta da bi klistron oscilirao moguće realizirati za različite n , što određuje modove refleksnog klistrona. Vidimo da za manji n imamo veću mikrovalnu snagu na izlazu, ali manji n zahtijeva veći napon reflektora V_R za određeni katodni napon V_0 . Stoga su modovi s većim naponom reflektora veće snage, te postoji mod koji daje najveću moguću snagu dok ostali modovi znače manju generiranu snagu. Dijagram je jasniji ako pogledamo brzinski dijagram na sl. 7. Namještanjem napona reflektora možemo doći do faze u kojoj elektroni ne predaju energiju polju rezonatora, pa tu nema ni oscilacija odnosno generiranja mikrovalne snage. Naravno da je malim promjenama potencijala reflektora moguće malo mijenjati parametar θ oko optimalnog za određeni n . Uslijed toga izmjenična snaga na izlazu klistrona će se mijenjati. Međutim promjena u fazi manifestira se kao promjena susceptancije rezonatora, a time i rezonantne frekvencije. Dakle, kao posljedica promjene potencijala reflektora V_R doći će i do promjene rezonantne frekvencije ω .

Magnetron

Za razliku od klistrona kod kojega smo koristili električno polje rezonatora u cilju brzinske modulacije elektrona, kod magnetrona koristimo magnetsko polje, kao što je prikazano na sl. 9. Stoga je magnetron obično izveden u obliku vakumirane cijevi smještene u permanentni magnet.



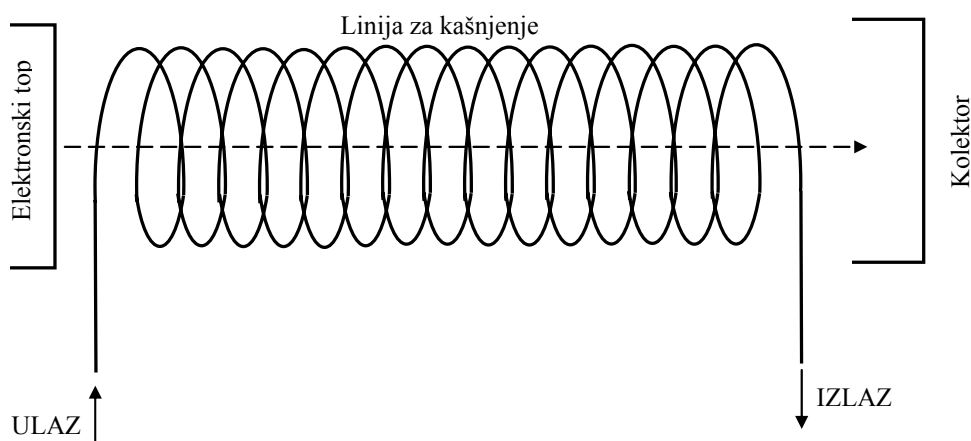
Slika 9. Princip rada magnetrona

Vektor magnetskog polja okomit je na putanju elektrona koje isijava katoda K pod utjecajem visokog potencijala u odnosu na anodu A, te ono zakrivljuje putanje elektrona. Ako je magnetsko polje dovoljno jako tada elektroni ne mogu stići do katode i grupiraju se oko katode (Hallow efekt). Osim istosmjernog polja koje je odgovorno za isijavanje elektrona i magnetskog polja koje zakrivljuje njihove putanje, postavljajući rezonatore oko anode dobivamo i dodatno izmjenično polje. Putanje elektrona treba formirati tako da grupirani elektroni dolaze fazi polja u kojoj mu oni predaju energiju.

Cijev s putujućim valom

Cijev s putujućim valom prikazana je na sl. 10, a radi na sljedećem principu. Snop elektrona ubrzava se u istosmjernom polju koje vlada u cijevi. Da bi elektroni mogli predati energiju izmjeničnom polju, potrebno je da je brzina elektrona jednaka brzini propagacije elektromagnetskog vala u cijevi. Kako elektron ne možemo ubrzati do brzine elektromagnetskog vala u slobodnom prostoru, možemo usporiti polje s pomoću zavojnice. Pri tome, da bi se ostvarilo predavanje energije polju potrebno je da elektroni zadrže nešto veću brzinu od fazine brzine vala, kako bi bilo moguće ostvariti da područja s većom koncentracijom elektrona budu u prostornoj fazi s koćećim poljem. Zavojnicu možemo modelirati kao prijenosnu liniju, pa odgovarajućom konstrukcijom svitka možemo podešavati faznu brzinu elektromagnetskog vala. Izmjena energije između polja i elektrona odvija se cijelom dužinom cijevi te na izlazu imamo značajno pojačanje izmjeničnog signala narinutog na ulaz svitka.

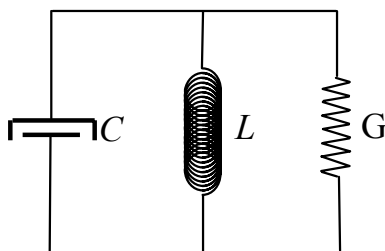
Cijev s putujućim valom koristi se primjerice u radiorelejnim sustavima snage tipično 50 W s radom u području od 2 – 10 GHz. Inače, ima vrlo povoljne karakteristike u pogledu pojačanja u širokom pojasu frekvencija, uz istodobno pojačanje reda veličine od 40 – 60 dB.



Slika 10. Cijev s putujućim valom

Lavinska dioda

Jedan od najperspektivnijih aktivnih elemenata u mikrovalnom području je lavinska dioda. Ona radi na principu generiranja naboja u poluvodiču uslijed sudara zbog čega nastaje lavina naboja koja koristeći vrijeme proleta konstantnom brzinom u *drift* području diode uzrokuje nastajanje negativne konduktancije elementa.



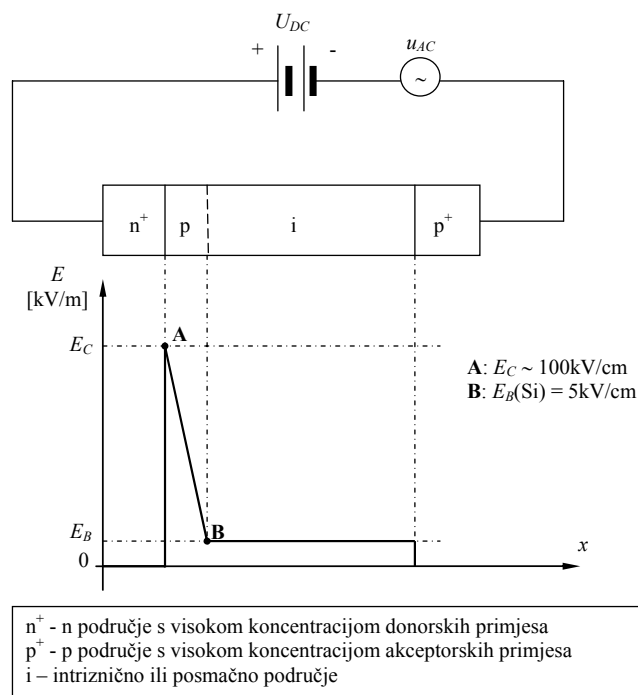
Slika 11. CLG paralelni titrajni krug

Naime, vidjeli smo u prethodnim poglavljima da je moguće u interakciji elektronskog snopa i izmjeničnog polja da se energija snopa preda polju, ako je nailazak elektrona praćen kočecim poljem. Taj mehanizam omogućava osciliranje. Možemo nadalje predstaviti i drugi model koji proizlazi iz gornje fizikalne slike. Ako imamo jedan titrajni krug CLG kao na sl. 11 i na kondenzator C dovedemo neki naboj Q , u krugu će se pojaviti oscilacije na rezonantnoj frekvenciji kruga. Uslijed postojanja pozitivne vodljivosti G oscilacije će se prigušiti. Dakle energija titra izmjenjujući se između električne i magnetske, ali uvijek dio te energije odlazi u toplinsku. Ako sada nađemo mehanizam kojim ćemo dobiti takav element čija će vodljivost biti negativna i spoji se paralelno s gornjim krugom mogu se postići neprigušene oscilacije. Međutim, što to fizikalno znači negativna vodljivost? Takav efekt je moguć u dinamičnim uvjetima, ako je:

$$G = \frac{di}{du} < 0.$$

Znači ako na nekom elementu povećamo napon i posljedica toga je smanjenje struje, tada je vodljivost negativna ($G < 0$). Tako negativna vodljivost je kod nekih elemenata primjerice tunnelske diode realizirana u statičkoj karakteristici. Kod lavinske diode ona je posljedica generiranja elektrona i činjenice da se oni kreću saturiranom brzinom, uslijed čega je struja u krugu u suprotnoj fazi s naponom, a to znači da je i vodljivost negativna.

Lavinsku diodu i njen način rada objasniti ćemo na primjeru Reedove diode $n^+ - p - i - p^+$ koja je predložena od Reeda 1958. godine. No tek 1965. pojavili su se prvi eksperimentalni radovi s diodom koja koristi Reedove prijedloge. Ako $n^+ - p - i - p^+$ diodu reverzno polariziramo na prijelazu $n^+ - p$ kao što je prikazano na sl. 12 javlja se vrlo jako, ali usko lokalizirano polje duž diode. Sloj ispražnjenja još uvijek ima polje od nekoliko kilovolti po centimetru, tako da se elektroni gibaju saturiranom brzinom, dakle neovisno o polju. Vršno polje je još uvijek manje od kritičnog, tj. takvoga kod kojega dolazi do generiranja naboja uslijed multiplikacije. Ako sada istosmjernom polju superponiramo izmjenično polje dolazi do sljedećeg. Za vrijeme pozitivne poluperiode napona polje je u lavinskom području veće od kritičnog ($E > E_C$). Uslijed toga, za čitavo vrijeme trajanja pozitivne poluperiode dolazi do generiranja naboja porastom lavine, pri čemu broj naboja raste eksponencijalno s vremenom. Međutim za vrijeme negativne poluperiode električno polje je manje od kritičnog ($E < E_C$) i naboji se ne generiraju, ali napuštaju lavinsko područje i kreću se saturiranom brzinom duž područja prostornog naboja (u konkretnom slučaju to su šupljine, a elektroni odmah idu u n^+ i ne učestvuju u procesu). Dakle možemo za sada konstatirati sljedeće. Za vrijeme pozitivne poluperiode narinutog izmjeničnog napona dolazi do generiranja naboja, a za vrijeme negativne poluperiode ovi naboji putuju konstantnom brzinom. Dakle, uslijed toga će i vanjskim krugom koji je priključen na diodu teći struja za vrijeme negativne poluperiode, odnosno samo onda kad je polje manje od kritičnog.



Slika 12. Reedova dioda i princip rada

Dakle, efekt kojeg smo željeli postići imamo. Za vrijeme dok je izmjenični napon pozitivan struja ne teče; kad je napon negativan struja ima konačnu vrijednost. Dakle, radi se o negativnom otporu, odnosno negativnoj konduktanciji. Naravno da treba biti ispunjen da je vrijeme τ proleta šupljina kroz područje drifta jednako polovini periode. Kako znamo kolike su saturirane brzine v_e u pojedinom poluvodiču, možemo izabrati područje driftanja:

$$b = v_e \tau = v_e \frac{T}{2} = \frac{\pi v_e}{\omega}.$$

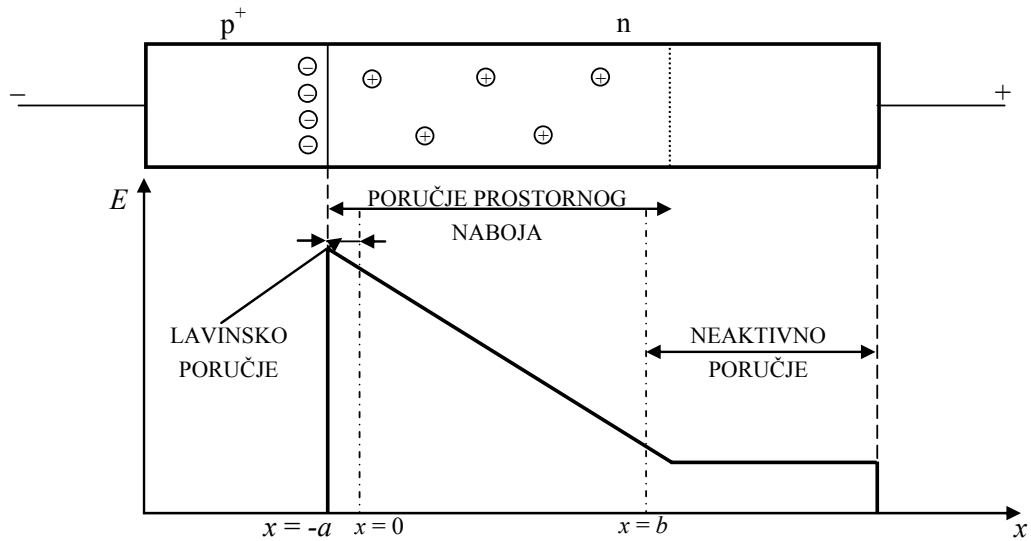
Analizu ćemo provesti uz pretpostavku da je amplituda izmjeničnog signala puno manja od istosmjernog, dakle metodom malog signala. Provest ćemo jednodimenzionalnu analizu, odnosno smatrat ćemo da se čitava pojava odvija u smjeru duljine diode. Nadalje, nećemo direktno promatrati Reedovu strukturu, nego sličnu, ali čije su bitne karakteristike iste kao i kod Reedove, a to je koncentriranost vršnog polja na nekom dužinskom dijelu i postojanje područja sa saturiranim brzinama. Takvu osobinu ima p^+-n (ili p^+-n-n^+) dioda, koja je zajedno s rasporedom električnog polja duž diode prikazana na sl. 13.

Elektroni koji se generiraju u lavinskom području za vrijeme pozitivne poluperiode gibaju se nakon toga u području prostornog naboja brzinom v_e . Dakle, za vrijeme pozitivne poluperiode naboji nastaju, ali ne teče struja. Za vrijeme negativne poluperiode naboji se gibaju i teče struja, kao što je prikazano dijagramima na sl. 14. Fizikalno je možda još jasnija sljedeća slika nastala uz aproksimaciju karakteristike električnog polja (sl. 15). Kao što je vidljivo sa slike, struja u krugu teče tijekom negativne poluperiode narinutog izmjeničnog napona.

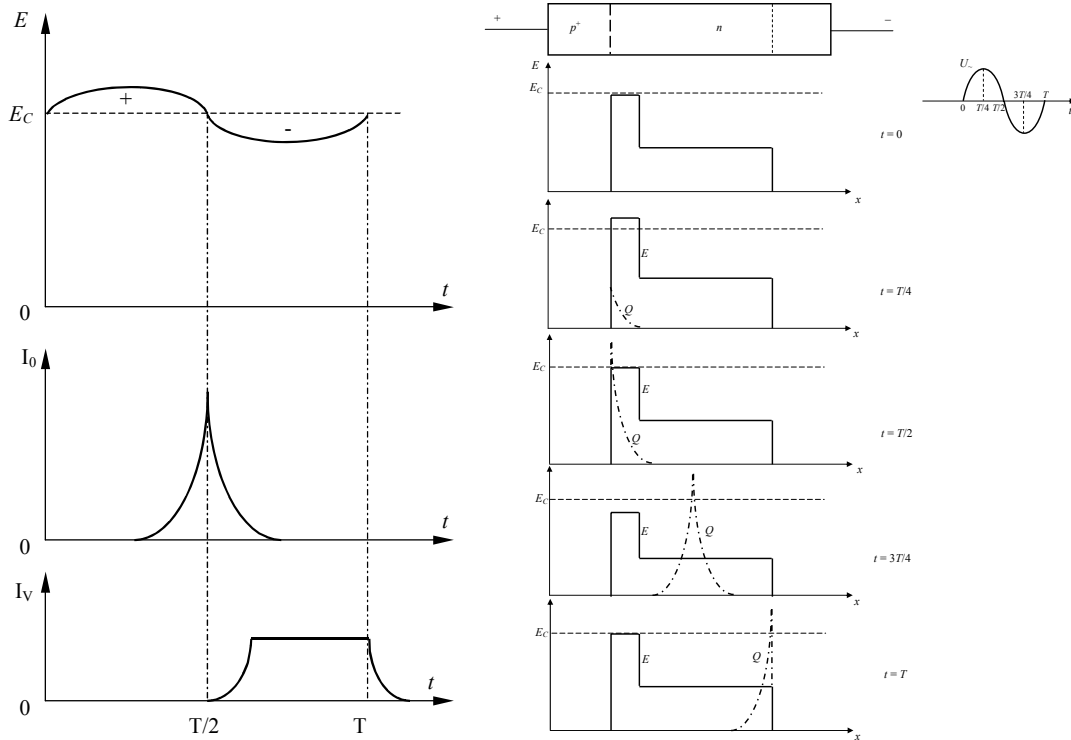
U analizi polazimo od Poissonove jednadžbe:

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon},$$

i jednadžbe kontinuiteta:



Slika 13. p^+-n dioda i karakteristika polja pri reverznoj polarizaciji



Slika 14. Dijagrami struja u ovisnosti o narinutom izmjeničnom naponu (lijevo)

Slika 15. Princip rada p^+-n diode – pojednostavljeni dijagram (desno)

$$\text{div } \vec{G} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = g\rho,$$

pri čemu je g brzina generacije naboja, što za $E = E(x)$ i $G = G(x)$ daje:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{q}{\varepsilon} (N_d + p - n),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial n}{\partial t} &= \frac{1}{q} \frac{\partial G_n}{\partial x} + g \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= -\frac{1}{q} \frac{\partial G_p}{\partial x} + g\end{aligned}$$

pri čemu je N_d koncentracija donora, a G_n i G_p gustoće struja elektrona i šupljina. Brzina generiranja naboja je:

$$g = \alpha |v_n| n + \beta |v_p| p,$$

gdje je α koeficijent ionizacije šupljina, β elektrona, a v_n i v_p su im brzine. α je broj parova elektron-šupljina što ih proizvede jedan naboj na jediničnom putu. Radimo uz pretpostavku da je $\alpha = \beta$ i $v_n = v_p = v$, pa je brzina generacije naboja:

$$g = \alpha v (n + p),$$

nakon čega imamo jednadžbe:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial x} &= \frac{N_d}{\epsilon v} + \frac{1}{\epsilon v} (G_n - G_p) \\ \frac{1}{v} \frac{\partial G_n}{\partial t} &= -\frac{\partial G_n}{\partial x} + \alpha (G_n + G_p) \\ \frac{1}{v} \frac{\partial G_p}{\partial t} &= -\frac{\partial G_p}{\partial x} + \alpha (G_n + G_p)\end{aligned}$$

Uz pretpostavku malog signala je:

$$\begin{aligned}E &= E_0 + E_1 e^{j\omega t} \\ \alpha &= \alpha(E) = \alpha_0 + \alpha_1 e^{j\omega t} \\ G_p &= G_{p0} + G_{p1} e^{j\omega t} \\ G_n &= G_{n0} + G_{n1} e^{j\omega t}\end{aligned}$$

pri čemu je: $E_1 \ll E_0$, $\alpha_1 \ll \alpha_0$, $G_{1p} \ll G_{0p}$, $G_{1n} \ll G_{0n}$. Uvrstimo li ovo u prethodnu jednadžbu i zanemarujući umnoške malih veličina dobivamo relacije za izmjenične komponente:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial x} &= \frac{1}{\epsilon v} (G_{n1} - G_{p1}) \\ \frac{\partial G_n}{\partial x} &= G_{n1} \left(\alpha_0 - \frac{j\omega}{v} \right) + \alpha_0 G_{p1} + \alpha_1 G_0 \\ \frac{\partial G_p}{\partial x} &= G_{n1} \left(\frac{j\omega}{v} - \alpha_0 \right) - \alpha_0 G_{n1} - \alpha_1 G_0\end{aligned}$$

gdje je:

$$G_0 = G_{n0} + G_{p0},$$

ukupna gustoća istosmjernje struje.

Riješimo sada gornje jednadžbe, i to posebno za lavinsko područje (od $x = -a$ do $x = 0$), a posebno za područje prostornog naboja. Nakon određenih matematičkih manipulacija te uvrštavanja graničnih uvjeta i specifičnosti parametra α u lavinskom području da se pokazati da je impedancija tog područja:

$$Z_a = \frac{a}{j\omega\varepsilon A \left(1 - \frac{\omega_a^2}{\omega^2}\right)},$$

gdje je:

$$\omega_a^2 = \frac{2I_0 a \alpha'}{\tau_a \varepsilon A},$$

uz:

$$\alpha' = \left. \frac{\partial \alpha}{\partial E} \right|_{E=E_0},$$

i vrijeme proleta kroz lavinsko područje:

$$\tau_a = \frac{a}{v},$$

pri čemu je A površina presjeka. Možemo zaključiti da se impedancija Z_a može shvatiti kao paralelan spoj svitka induktiviteta L_a i kondenzatora kapaciteta C_a . U području prostornog naboja je $\alpha = 0$. Ukupna struja na nekom položaju x u drift području je:

$$I(x, t) = I_1 e^{-j\omega \frac{x}{v_e}} e^{j\omega t} + j\omega\varepsilon E_1(x) A e^{j\omega t},$$

pri čemu prvi član u izrazu predstavlja konduktivnu struju, a drugi struju pomaka, pa je nakon računanja napona u tom području:

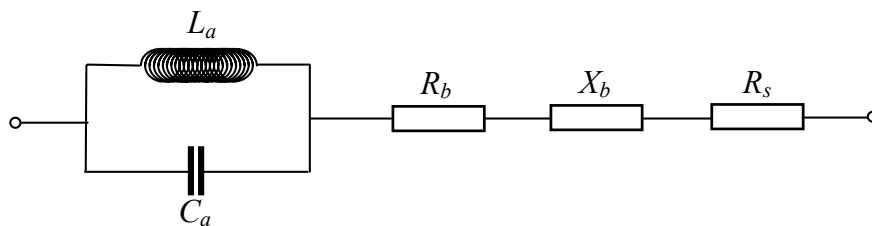
$$Z_b = \frac{1}{j\omega C_b} \left[1 - \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_a^2}} \frac{\sin \theta}{\theta} \right] + \frac{1}{\omega C_b} \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_a^2}} \frac{1 - \cos \theta}{\theta} = j \operatorname{Im}(Z_b) + \operatorname{Re}(Z_b),$$

gdje je θ kut prijenosa:

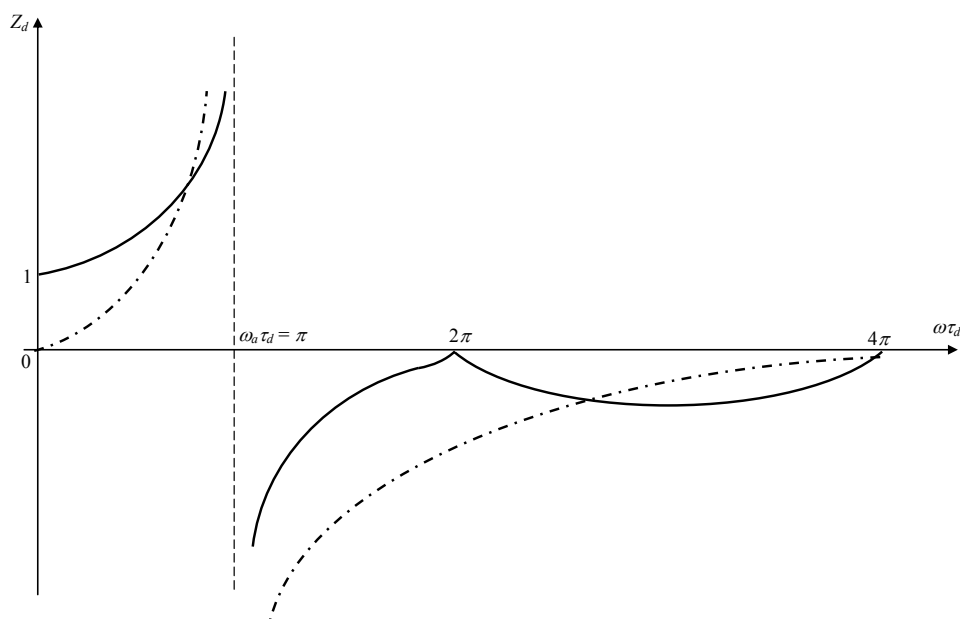
$$\theta = \frac{\omega b}{v} \text{ i } C_b = \frac{\varepsilon A}{b}.$$

Nadomjesna shema prema ovoj analizi prikazana je na sl. 16, a dijagram na sl. 17 uz:

$$R_0 = \frac{\tau_d}{2C_d}.$$

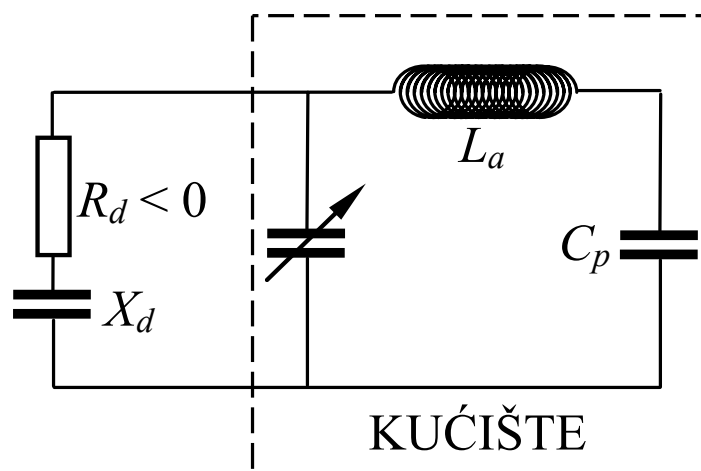


Slika 16. Nadomjesna shema diode



Slika 17. Ovisnost impedancije diode o frekvenciji

Vidimo da će dioda imati negativan dinamički otpor u slučaju da je $\omega > \omega_a$, pa je to područje u kojemu ju možemo koristiti kao oscilator. Uočimo činjenicu da je ona također i kapacitivna u tom području, pa će to značiti da pri gradnji oscilatora vanjski krug mora biti induktivan. Nadalje veličina negativnog otpora je reda veličine oma, pa će biti potrebno izvršiti prilagođenje vanjskog opterećenja na diodu, odnosno na rezonator u kojem je smješten. Stoga možemo koristiti pojednostavljenu shemu kao na sl. 18.



Slika 18. Pojednostavljena shema oscilatora s lavinskom diodom

Gunn dioda

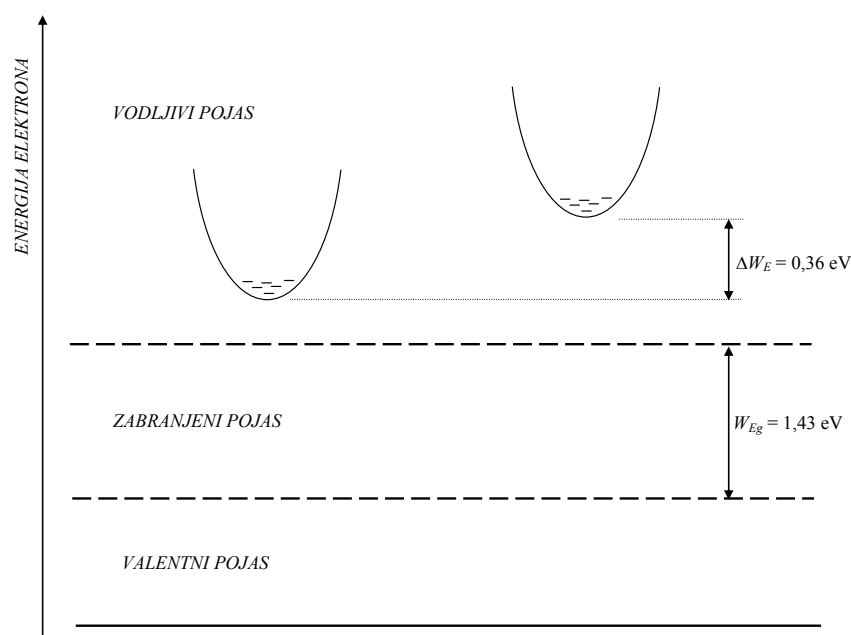
Drugi predstavnik poluvodičkih elemenata koji služe za gradnju mikrovalnih oscilatora je Gunn dioda. U poredbi s lavinskom diodom nedostatak su joj nešto manje snage (komercijalne izvedbe primjerice oko 0,5 W u frekvencijskom području oko 12 GHz), ali prednost je u tome što kod napajanja koristi naponski stabilizirane izvore, dok lavinska koristi izvore konstantne struje, a osim toga naponi su niži kod ove.

Osnovno svojstvo odnosno princip na kojem se zasniva funkcioniranje ovog elementa je sadržano u činjenici da određeni poluvodiči (indijev fosfit InP, galij arsenid GaAs i još neki poluvodiči iz grupe 3 i 5) imaju u vodljivom pojasu dvije energetske doline, kao što je prikazano na sl. 19. Elektroni koji se nalaze u istoj dolini, dakle s manjim energijama imaju pak veću mobilnost, pa s tim i veću brzinu od onih koji se nalaze u višoj dolini. Za elektrone u nižoj dolini vrijedi linearni odnos između brzine i električnog polja. Međutim kada električno polje dosegne kritičnu vrijednost tada elektroni počinju zaposjedati nivoe u gornjoj dolini i uslijed toga dođe do pada njihove brzine. Stoga dijagram ovisnosti brzine o električnom polju izgleda kao na sl. 20. Vidimo da postoji određeno područje u kojemu porastu polja odgovara pad brzine, pa s tim i struje, što predstavlja područje negativne vodljivosti. Kritične vrijednosti polja kod GaAs su oko 3 kV/cm.

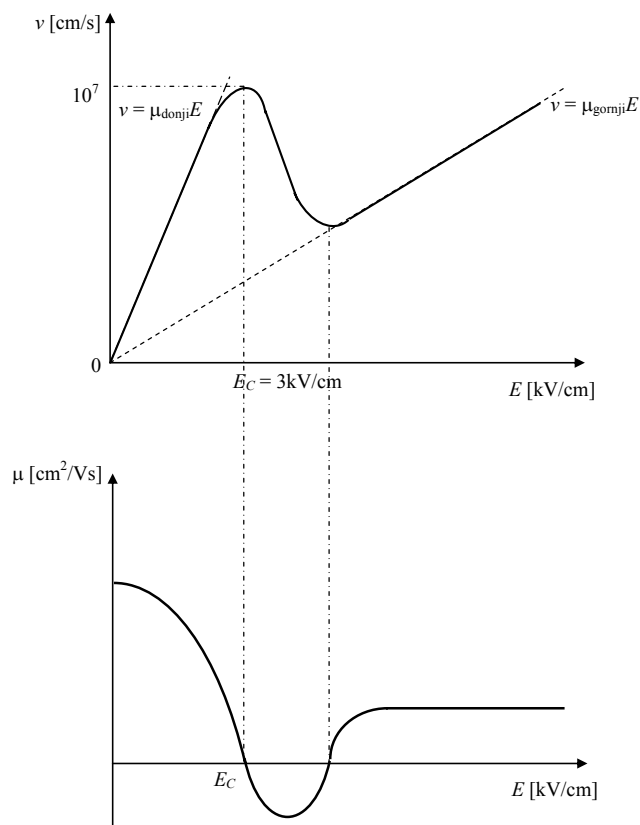
Da bi ovaj efekt bio iskoristiv potrebno je da razlika energija ΔW_E između dviju dolina bude puno veća od termalne energije kod sobne temperature (0,025 eV). To je kod GaAs dobro ispunjeno jer je $\Delta W_E \cong 0,35$ eV. Ako to ne bi bilo tako, već kod sobne temperature imali bi naseljena stanja u gornjoj dolini. Upravo ova činjenica predstavlja ograničenje u dobivanju većih snaga iz jedne diode.

Drugi efekt koji mora biti zadovoljen je sadržan u zahtjevu da razlika energija između dviju dolina treba biti manja od energije zabranjenog pojasa (1,43 eV), odnosno $\Delta W_E < W_{Eg}$, jer bi u protivnom došlo do proboja, odnosno preskakanja elektrona iz valentnog pojasa u vodljivi.

Nadalje, mobilnost elektrona u gornjoj dolini mora biti puno manja od one u donjoj. Ovaj odnos je kod GaAs sljedeći:



Slika 19. Energetski dijagram za GaAs



Slika 20. Karakteristika brzine elektrona u ovisnosti o električnom polju

$$\mu_{gornji} = 8000 \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}}$$

$$\mu_{donji} = 180 \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}}$$

pri čemu je specifična vodljivost:

$$\sigma = en\mu,$$

odnosno gustoća struje:

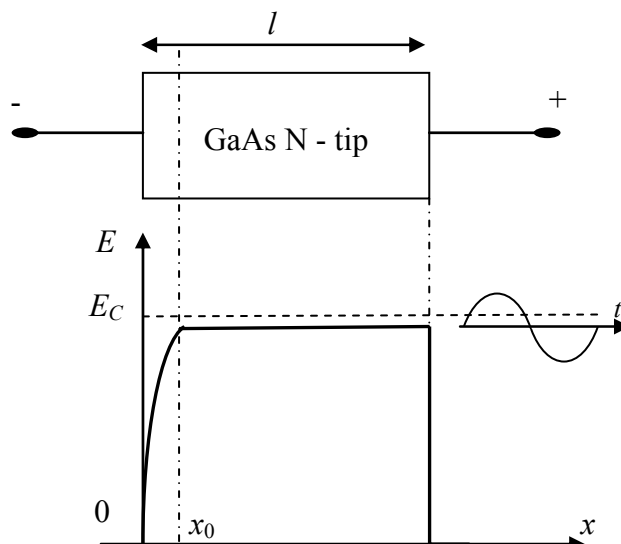
$$G = \sigma E = C\mu E,$$

gdje je C konstanta, a:

$$\mu = \frac{dv}{dE},$$

dinamička mobilnost elektrona.

Promotrimo sada mehanizam rada diode. Potrebno je istaći da ovdje ne postoji dioda u pravom smislu riječi. Naime to je samo komad poluvodiča stisnut između dva omska kontakta. Stoga karakterističnost efekta ne zahtijeva spoj dvaju različito dopiranih poluvodiča kao kod pravih dioda. Polje je konstantno duž uzorka osim u dijelu uz omski kontakt, gdje ima nagli, ali konačni porast. Elektroni ulaze u poluvodič s lijeve strane prema slici i zbog konstantnog polja kreću se prema desnoj strani, gdje konačno izlaze iz poluvodiča. Ako sada poraste napon na poluvodiču, raste i polje, i negdje u blizini lijevog kontakta prelazi kritičnu vrijednost polja. U tom slučaju elektroni koji dođu u taj položaj nekom brzinom izgube brzinu jer se zbog povećanog iznosa polja nađu u gornjoj dolini za koju smo istaknuli da je karakterizira niža mobilnost. Stoga će na tom položaju doći do gomilanja elektrona. Međutim uslijed toga dolazi do formiranja unutrašnjeg polja zbog:

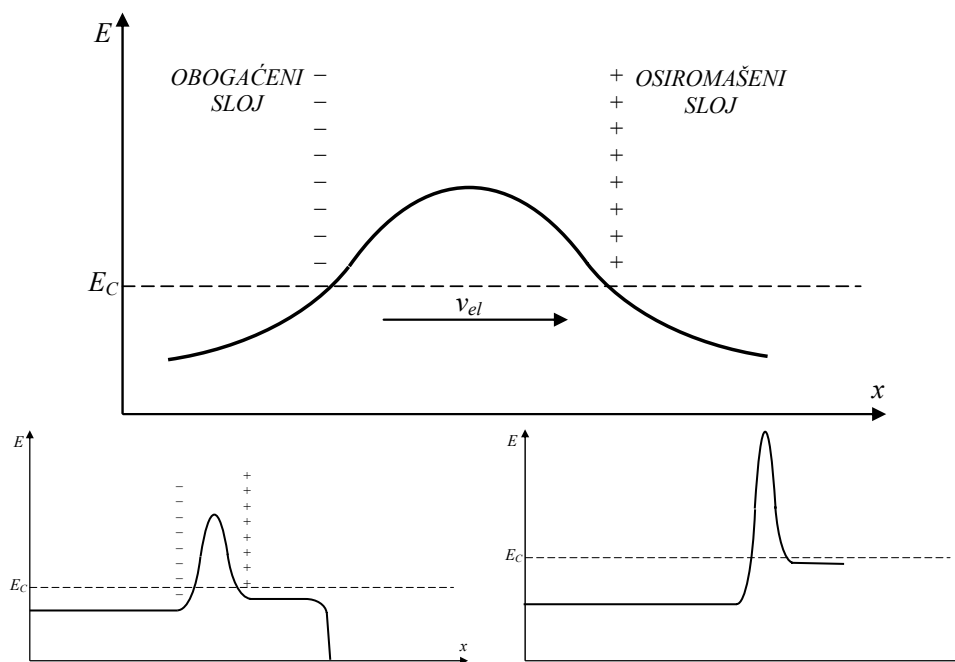


Slika 21. Gunn dioda i karakteristika polja

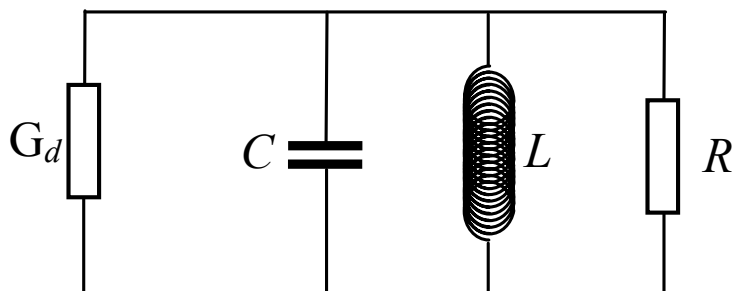
$$\int_0^l E dx = V = konst.,$$

pa je na lijevo od skupine elektrona polje niže od onoga na desno. Stoga se grupiranje elektrona nastavlja, ali isto tako ovi se gibaju udesno zbog postojanja polja. Istovremeno s gibanjem populacija elektrona raste kao na sl. 22. Konačno stignu kao grupa na pozitivni kraj i to rezultira strujnim impulsom kao na slici. Nakon prolaska jedne skupine naboja stvar se ponavlja.

Uslijed poremećaja stvara se na jednom mjestu blizu katode polje veće od kritičnog pa se gomilaju elektroni jer postaju sporiji na putu prema anodi. Njih dakle sustižu oni koje tjera polje manje od kritičnog s lijeva, a od te grupe se udaljavaju oni s desna. Stoga se obrazuje dipolni sloj, kao što je prikazano na sl. 22.



Slika 22. Formiranje dipolnog sloja



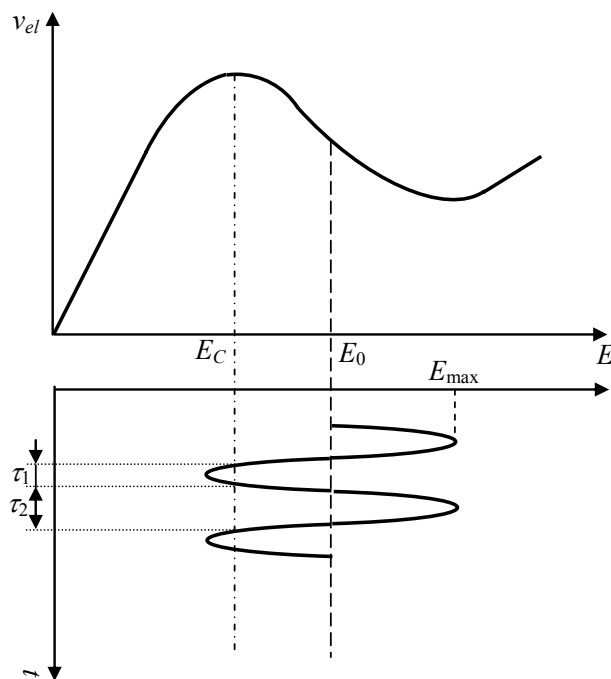
Slika 23. Titrajni krug s LSA

Ovo što je pokazano vrijedi za idealni poluvodič bez diskontinuiteta i nečistoća, što je samo teoretski slučaj. U stvari, postoji neka nečistoća koja se namjerno smjesti u blizinu omskog kontakta, pa onda tu postoji jedan poremećaj u polju koji se širi zbog polja udesno. Međutim u kvrgi je polje veće od kritičnog i kvrga raste zbog istog razloga kao i prije. Ovo je dipolni mod. Evidentno je da ova pojava ovisi o vremenu prijenosa (*transit time*), pa rezonator ne bi bio bitan. (Ovo je Gunn-mod.) Drugi tip oscilacija je tzv. LSA mod u kojem nema transit-time efekta i cijeli poluvodič doveden je u stanje negativne vodljivosti, a postiže se povećanim istosmjernim naponom. Mijenjanje duljine uzorka kod Gunn moda znači mijenjanje frekvencije, ali samo oko određenih granica, pri čemu postoji problem topline koja se ne da odvesti. Kod LSA (Limited Space-charge Accumulator) bitno je iskorištenje statičkih karakteristika s negativnim otporom, ali tako da se onemogući stvaranje dipolnog sloja, a da se koristi kao element s negativnim otporom nadopunjen s odgovarajućim reaktantnim krugom radi postizanja osciliranja, kao što je prikazano shemom na sl. 23. Neka je vrijeme τ_{D1} potrebno da se oformi dipolni sloj nakon što je polje prešlo kritičnu vrijednost E_C . Nadalje, neka je τ_{DA} vrijeme u kojem se taj sloj razgrađuje nakon prestanka uvjeta za njegovu egzistenciju.

Promotrimo sada statičku karakteristiku ovisnosti brzine o iznosu električnog polja $v = v(E)$. Neka je sada na istosmjerno polje E_0 superponirano još i neko izmjenično polje $E_{\max} \sin \omega t$, pri čemu u vremenu τ_1 električno polje manje od kritičnog, a u vremenu τ_2 električno polje je veće od kritičnog. Čim polje postane veće od kritičnog počinje se formirati dipolni sloj. Međutim ako je $\tau_2 < \tau_{D1}$ on se ne oformi (zaključak za visoke frekvencije). Međutim, ako se neka dipolna jezgra i stvori, mora biti $\tau_1 > \tau_{D2}$ da se ona razgradi. U praksi se uzima:

$$\begin{aligned} T &= \tau_1 + \tau_2 < 3\tau_{D1} \\ T &\gg \tau_{D2} \end{aligned}$$

Ovim modom postiže se najbolji faktor iskorištenja i više frekvencije nego kod ostalih modova. Gunn mod je ograničen na oko 10 GHz. Frekvencija 1000 GHz predstavlja teoretsku granicu osciliranja Gunn diode u bilo kojem modu. Ona je definirana vremenom razilaženja naboja u poluvodiču.



Slika 24. Ovisnosti brzine o električnom polju

PIN dioda

PIN dioda (P-I-N, pri čemu je I veliki atom) je element koji posjeduje skoro linearnu karakteristiku impedancije koja se da u širokim granicama kontrolirati strujom kroz diodu. Koriste se kao preklopnici, elektronski upravljani attenuatori, modulatori. Brzine preklapanja su reda veličine nekoliko desetaka nanosekundi i do 80 dB dinamike (0 – 10 mA). Tada se dioda ovisno o prednaponu, odnosno istosmjernoj struji kroz nju koristi ili kao kratki spoj ili kao otvoreni krug.

Varaktor

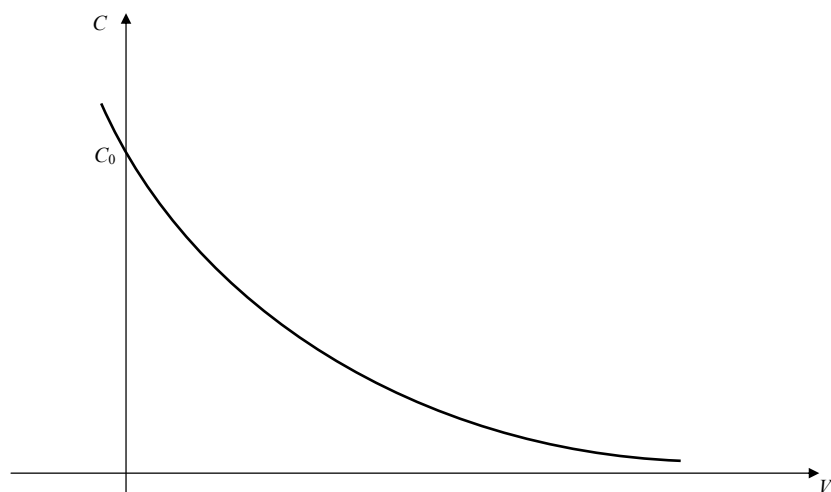
Varaktor je nelinearni element kod kojega postoji nelinearna veza između naboja i napona, odnosno nelinearni kapacitet:

$$C = \frac{C_0}{\left(1 - \frac{V}{\Phi}\right)^k},$$

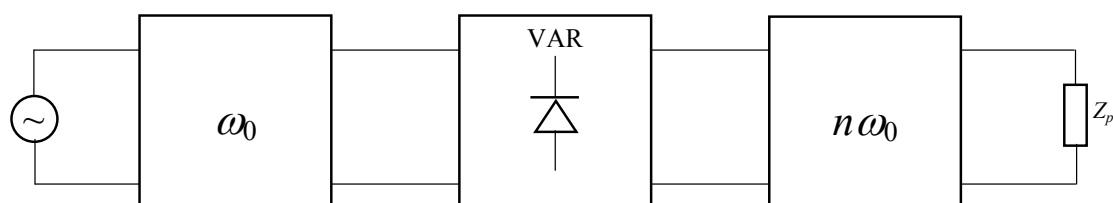
pri čemu parametar k ima vrijednost između $1/2$ i $1/3$, a Φ od $0,4$ - $0,7$, a odnos C_V/C_0 je maksimalno oko 3. Nelinearni kapacitet je s vrlo malim gubicima. Njegova primjena je sljedeća.

1. kao multiplikator frekvencije (spoj na sl. 26), s vrlo visokim faktorom iskorištenja, pri čemu je osjetljiv na prilagođenje,
2. kontrola i upravljanje frekvencijom oscilatora u rezonatoru.

Mogu se koristiti i u parametarskim pojačalima s vrlo niskim šumom zbog efekta nelinearnog negativnog otpora koji se u određenim uvjetima može ostvariti.



Slika 25. Karakteristika nelinearnog kapaciteta u ovisnosti o naponu



Slika 26. Korištenje varaktora kao multiplikatora frekvencije

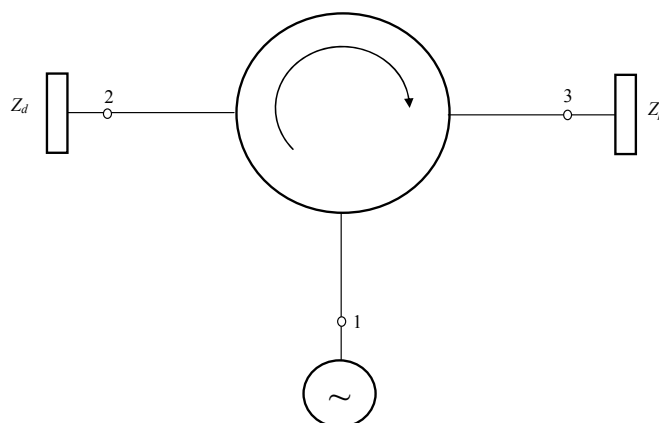
Pojačalo s negativnim otporom uz upotrebu cirkulatora

Promotrimo sklop s cirkulatorom kao na sl. 28. Na ulaz 2 cirkulatora u kojem energija rotira u negativnom smjeru postavljena je dioda s negativnim otporom, a na ulaz 3 prilagođeni potrošač. Koeficijent refleksije na priključku 2 je tada:

$$\Gamma_d = \frac{Z_{dn} - 1}{Z_{dn} + 1} \Rightarrow |\Gamma_d| = \frac{|Z_{dn} - 1|}{|Z_{dn} + 1|}$$

Kako je:

$$\operatorname{Re}(Z_d) < 0 \Rightarrow |\Gamma_d| > 1.$$



Slika 28. Mikrovalno pojačalo s cirkulatorom

Koristeći matricu raspršenja i uzevši u obzir da je koeficijent refleksije na priključku 3 jednak nuli zbog prilagođenja te da je na ulazu 1 prilagođeni generator imamo da je:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_g \\ \Gamma_d b_2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 0 \\ b_2 = a_g \\ b_3 = \Gamma_d b_2 \end{cases} \Rightarrow b_3 = \Gamma_d a_g$$

Kako je iznos povratnog vala, a time i snaga reflektirana od sklopa u generator jednaka nuli što znači da se čitava snaga koja dolazi u granu 3 potroši na prilagođenom opterećenju, imamo da je pojačanje:

$$A_{p0} = \frac{P_{izl}}{P_{ul}} = \frac{|b_3|^2}{|a_g|^2} = |\Gamma_d|^2,$$

a kako je iznos koeficijenta refleksije diode veći od jedinice i pojačanje će također biti veće od jedinice.

U slučaju da potrošač na grani 3 nije prilagođen ($Z_p \neq Z_0$) imamo:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_g \\ \Gamma_d b_2 \\ \Gamma_p b_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = \Gamma_p b_3 \\ b_2 = a_g \\ b_3 = \Gamma_d b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_3 = \Gamma_d a_g \\ b_1 = \Gamma_p \Gamma_d a_g \end{cases},$$

pa je snaga koja se vraća u granu 1 na kojoj je priključen mikrovalni generator koji daje snagu P_g :

$$P_{povl} = \frac{1}{2} |b_1|^2 = \frac{1}{2} |\Gamma_p|^2 |\Gamma_d|^2 |a_g|^2 = |\Gamma_p|^2 |\Gamma_d|^2 P_g,$$

dok je snaga koja se potroši na teretu na izlazu sklopa (priključak 3) jednaka:

$$P_{izl} = \frac{1}{2} (|b_3|^2 - |a_3|^2) = \frac{1}{2} |\Gamma_d|^2 |a_g|^2 (1 - |\Gamma_p|^2).$$

Pojačanje snage je sada:

$$A_p = \frac{P_{izl}}{P_{ul}} = |\Gamma_d|^2 (1 - |\Gamma_p|^2) \leq A_{p0}$$

Očito, u slučaju neprilagođenog opterećenja na izlazu je pojačanje snage ovog pojačala manje nego u slučaju prilagođenja.

Oscilatori s negativnim otporom

Promotrimo oscilator s negativnim otporom ostvaren s pomoću rezonatora u kojem je smješten aktivnim element s negativnim otporom (Gunn dioda) kao na sl. 29. Ekvivalentna shema ovog sklopa prikazana je na istoj slici, pri čemu je Y_d admitancija diode, a Y_p admitancija potrošača. Ukupna admitancija kruga je:

- realni dio: $G = G_d + G_R + G_p$,
- imaginarni dio: $B = B_d + B_p + \omega C_R - \frac{1}{\omega L_R} = \omega C - \frac{1}{\omega L}$.

U slučaju da se radi o linearnim parametrima kruga imamo:

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

$$GU + C \frac{dU}{dt} + \frac{1}{L} \int U dt = 0 \quad \left| \frac{1}{C} \frac{d}{dt} \right.$$

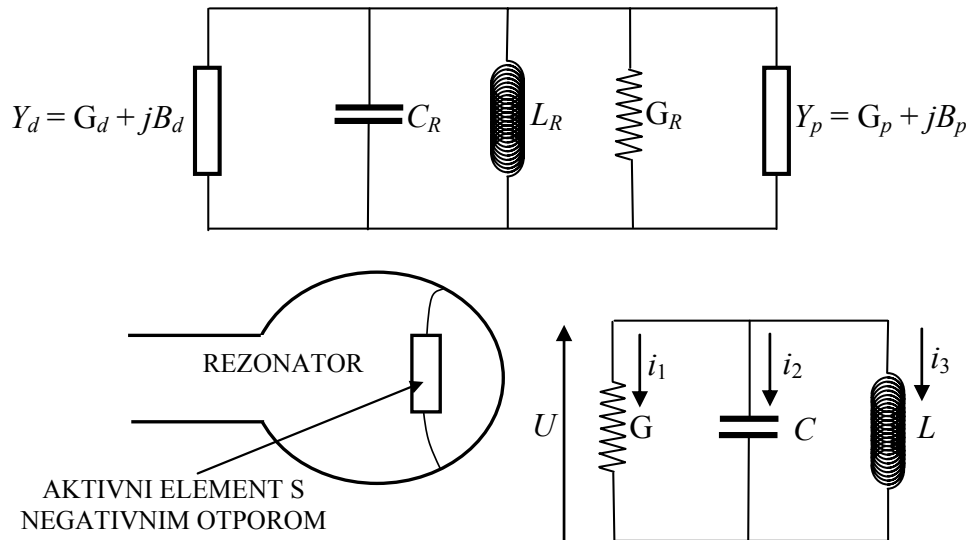
$$\frac{d^2 U}{dt^2} + \frac{G}{C} \frac{dU}{dt} + \frac{1}{LC} U = 0$$

Karakteristična jednačba za ovu diferencijalnu jednačbu je kvadratna jednačba:

$$p^2 + \frac{G}{C} p + \frac{1}{LC} = 0,$$

s rješenjima:

$$p_{1,2} = -\frac{G}{2C} \pm j \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{G^2}{4C^2}}.$$



Slika 29. Prikaz i ekvivalentna shema oscilatora s negativnim otporom

Rješenje za napon je prema tome:

$$U = \text{Re} \left\{ K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} \right\} = e^{-\frac{G}{2C} t} \text{Re} \left\{ K_1 e^{j \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{G^2}{4C^2}} t} + K_2 e^{-j \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{G^2}{4C^2}} t} \right\},$$

što možemo napisati u obliku:

$$U = e^{\alpha t} \operatorname{Re} \{ K_1 \cos \omega t + j K_1 \sin \omega t + K_2 \cos \omega t - j K_2 \sin \omega t \}$$

$$U = e^{\alpha t} (K_1 + K_2) \cos \omega t,$$

odnosno:

$$U = U_0 e^{\alpha t} \sin(\omega t + \varphi),$$

pri čemu smo uzeli da su:

$$\alpha = -\frac{G}{2C} \text{ i } \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{G^2}{4C^2}},$$

a amplitudu U_0 i fazni kut φ dobivamo za napon i fazu u trenutku $t = 0$. Da bi imali oscilacije koje rastu ili se barem ne prigušuju mora biti:

$$\alpha \geq 0 \Rightarrow -\frac{G}{2C} \geq 0 \Rightarrow -(G_d + G_p + G_R) \geq 0.$$

Uzimajući u obzir da je vodljivost diode manja od nule, ovaj uvjet možemo pisati u obliku:

$$|G_d| \geq G_p + G_R.$$

U stacionarnom stanju imamo stabilnu amplitudu, te vrijedi:

$$G_d + G_p + G_R = 0 \Rightarrow G_d = -(G_p + G_R),$$

odnosno gušenje je jednako nuli:

$$\alpha = 0 \Rightarrow -\frac{G}{2C} = 0,$$

pa je rezonantna frekvencija:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{G^2}{4C^2}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \alpha^2} = \sqrt{\frac{1}{LC}},$$

pri čemu je L ukupni induktivitet kruga (ne samo rezonatora), a C ukupni kapacitet. Drugim riječima, oscilator oscilira kod one frekvencije ω_0 kod koje je imaginarni dio admitancije jednak nuli:

$$\omega = \omega_0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow \omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L} = 0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

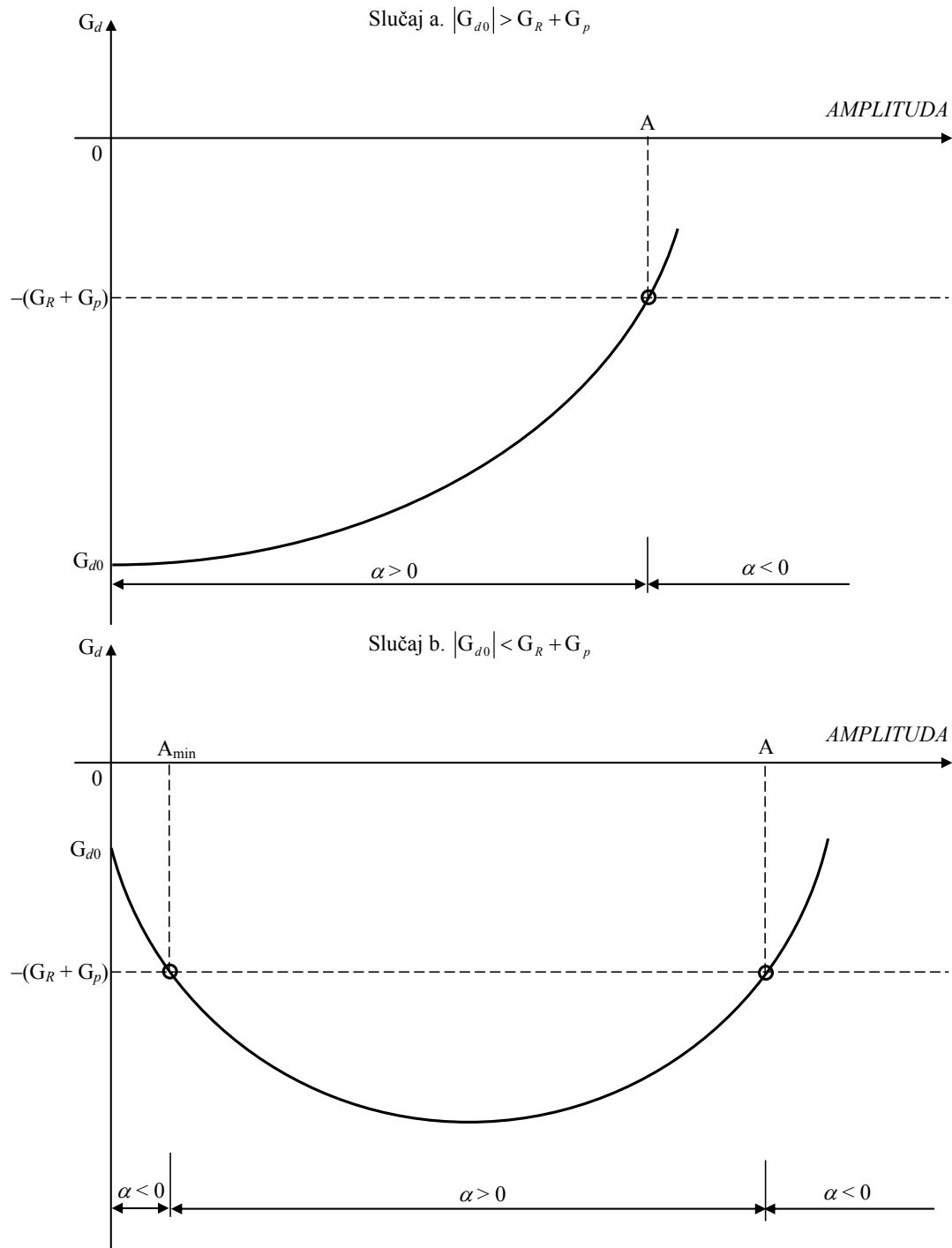
Kapacitet kruga možemo varirati dodavanjem varaktora koji ima kapacitet ovisan o naponu. Variranjem napona na varaktoru možemo modulirati signal:

$$U = U(t) \Rightarrow \omega_0(t) = \frac{1}{\sqrt{LC(U)}}.$$

Dakle, uvjet stacionarnih oscilacija zahtjeva da je ukupna admitancija oscilatora jednaka nuli:

$$\sum Y = 0 \rightarrow \sum G = 0 \& \sum B = 0 .$$

Uslijed nelinearne karakteristike vodljivosti diode u ovisnosti o naponu postoji ograničenje amplitude, kao što je prikazano dijagramima na sl. 30. U slučaju sa sl. 30a imamo samouzbudne oscilacije. Ako amplituda u točki A iz nekog razloga poraste ili opadne uslijed karakteristike vodljivosti rezultat je opet vraćanje na stacionarno stanje, odnosno u točku A. Stoga je točka A stabilna točka. U slučaju sa sl. 30b potrebno je dovesti amplitudu uzbude A_{\min} da bi oscilacije započele, odnosno u područje u kojem vrijedi $\alpha > 0$. Pretpostavimo da smo podesili sklop tako da mu je radna točka u točki A_{\min} , u kojoj su uspostavljeni uvjeti stacionarnog stanja oscilacija. Bilo koja nestabilnost međutim odvlači radnu točku dalje od točke A_{\min} (nestabilna točka); ako se amplituda smanji gušenje je veće od nule i amplituda oscilacija se gasi, ako se amplituda poveća, oscilacije najprije rastu do nekog maksimuma te se smanjuju dok ne stignemo u stabilnu točku. Drugim riječima, stabilnost oscilacija ovisi o predznaku nagiba karakteristike diode u promatranoj točki koja zadovoljava uvjet za stacionarne oscilacije. Očito je da postojanje nestabilne točke ovisi o iznosu ekvivalentne vodljivosti rezonatora i potrošača, u odnosu na vodljivost diode bez uzbudnog napona.

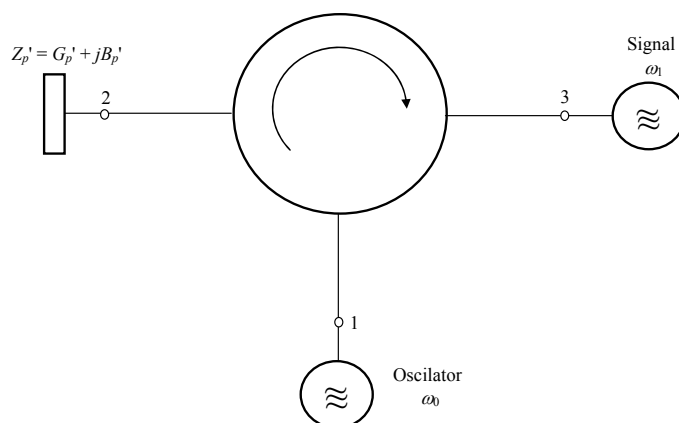


Slika 30. Karakteristika diode i uvjet za oscilacije

Stabiliziranje frekvencije mikrovalnih oscilatora

Ovdje nećemo razmatrati moguće tehnike stabiliziranja frekvencije, već ćemo pobliže upoznati jednu od njih, a koja je prikladna kod korištenja poluvodičkih mikrovalnih oscilatora zbog svoje jednostavnosti.^{xviii} Izvedba ovakvog sistema stabilizacije prikazana je na sl. 31.

^{xviii} Naravno da njeno područje primjene nije ograničeno samo na mikrovalno područje. Radi se o tzv. *injection-locking* metodi, odnosno načinu da se pomoću vanjskog signala, koji se ubacuje u rezonator s promatranim oscilatorom ovaj posljednji sinkronizira.



Slika 31. Metoda stabilizacije mikrovalnih oscilatora upotrebom cirkulatora

Naime, stabilizirani signal frekvencije ω_0 , ali za red ili dva reda veličine manje snage ubacuje se preko cirkulatora u oscilator frekvencije ω . Oscilator je opterećen impedancijom $Z_p' = G_p' + jB_p'$. U slučaju da je $\omega_1 = \omega_0$ oscilator osjeća upadni signal kao promjenu reflektirane snage, što se može prikazati kao promjena impedancije odnosno admitancije koju oscilator vidi s ulaza 1. Naravno da je po iznosu ta promjena opterećenja oscilatora proporcionalna omjeru ulaznog signala i signala iz generatora te faznoj razlici između tih signala.

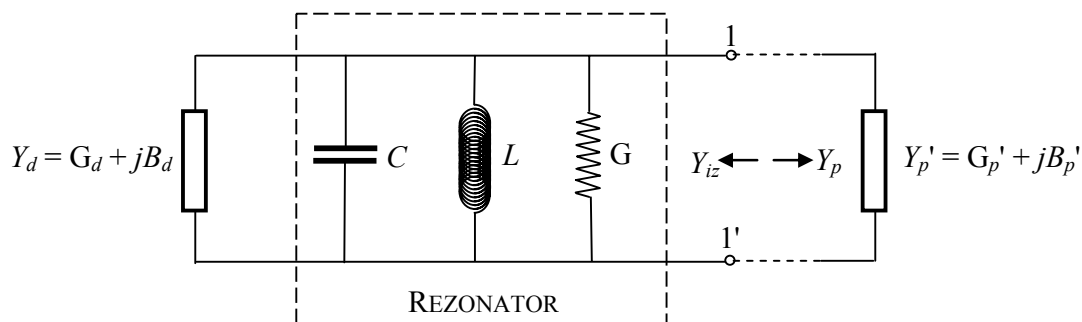
Složimo se sa sljedećom pojednostavljenom nadomjesnom shemom prikazanom na sl. 32. Oscilator je izveden tako da je aktivni element smješten u rezonantnu šupljinu na koju je posredstvom oscilatora priključeno vanjsko opterećenje. Oscilator će oscilirati na onoj frekvenciji na kojoj je suma admitancija pasivnog kruga i admitancije aktivnog elementa jednaka nuli, odnosno:

$$Y_{iz} + Y_p = 0. \quad (1)$$

Sada posredstvom cirkulatora preko oscilatora, dakle u točki 11' dolazi vanjski signal jednake frekvencije. To možemo smatrati posljedicom promijenjene vrijednosti admitancije potrošača Y_p .

Međutim, ako je $\omega_1 \neq \omega_0$ može se smatrati da je došlo do odgovarajuće promjene vanjskog opterećenja i to tako da se uvjet osciliranja (1) može zadovoljiti jedino kod neke druge frekvencije ω različite od ω_0 i štoviše da je uz dovoljnu snagu injektiranog signala ta frekvencija jednaka frekvenciji ω_1 upadnog signala. Ovime smo objasnili fizikalni smisao modela, a sada ga želimo interpretirati i matematički.

Izračunajmo najprije frekvenciju osciliranja samouzbuđivanog oscilatora, odnosno bez prisustva vanjskog signala na sl. 32. Iz uvjeta osciliranja (1) slijedi:



Slika 32. Nadomjesna shema metode stabilizacije frekvencije injekcijom signala

$$G_d + jB_d + j\omega_0 C + G - \frac{j}{\omega_0 L} + G_p + jB_p = 0.$$

Ako stavimo da je rezonantna frekvencija pasivnog titrajnog kruga:

$$\omega_r^2 = \frac{1}{LC},$$

te izjednačimo posebno realni, a posebno imaginarni dio jednadžbe slijedi:

$$G_d + G_p + G = 0,$$

zatim:

$$B_d + \omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L} + B_p = 0 \Big| : C,$$

$$\frac{B_d}{C} + \omega_0 - \frac{\omega_r^2}{\omega_0} + \frac{B_p}{C} = 0 \Big| : \omega_r,$$

$$\frac{\omega_0}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega_0} = \frac{\omega_0^2 - \omega_r^2}{\omega_r \omega_0} = \frac{\omega_0^2 - (\omega_0 - \Delta\omega')^2}{\omega_r \omega_0} \doteq \frac{2\Delta\omega'}{\omega_r} = -\frac{1}{\omega_r C} [B_p(\omega_0) + B_d(\omega_0)].$$

Posljednja jednadžba nam kaže koliko je odstupanje frekvencije osciliranja ω_0 od rezonantne frekvencije ω_r titrajnog kruga uslijed prisustva susceptancije aktivnog elementa B_d i susceptancije opterećenja B_p .

Razmotrimo sada slučaj kada u oscilator injektiramo vanjski signal. U skladu s onim što smo rekli oscilator vidi u ravni 1-1' promjenjivu admitanciju Y_V , radi čega je općenito frekvencija osciliranja ω različita od ω_0 . Admitancija Y_V određena je superpozicijom:

$$Y_V = \frac{i + i_1}{v + v_1},$$

napona v i v_1 i struja i i i_1 u ravni 1-1'. Pri tome je:

$$i = Ie^{j\omega t},$$

struja iz oscilatora u 1-1', zatim:

$$v = Ve^{j(\omega t + \alpha)},$$

napon zbog signala iz oscilatora u 1-1', zatim:

$$i_1 = I_1 e^{j\omega_1 t},$$

struja injektiranog signala te:

$$v_1 = V_1 e^{j(\omega_1 t + \pi + \alpha)},$$

napon vanjskog signala. Fazni pomak π u izrazu za napon v_1 je uslijed toga što vanjski signal donosi energiju u oscilator, pa, ako su u ravni 1-1' u nekom trenutku t struje u fazi, naponi moraju biti u protufazi. Izraz za admitanciju Y_V je dalje:

$$Y_V = \frac{I e^{j\omega t}}{V e^{j(\omega t + \alpha)}} \cdot \frac{1 + \frac{I_1}{I} e^{-j\theta(t)}}{1 - \frac{V_1}{V} e^{-j\theta(t)}},$$

gdje je:

$$\theta(t) = (\omega - \omega_1)t,$$

trenutna razlika faze signala iz oscilatora i injektiranog signala. Međutim, prvi faktor s desne strane predstavlja admitancija opterećenja $Y_p = G_p(\omega) + jB_p(\omega)$ na frekvenciji ω . Pretpostavimo sada, a to je u praksi redovito i ispunjeno, da je $I_1 \ll I$ i $V_1 \ll V$. Tada približno vrijedi:

$$Y_V \doteq [G_p(\omega) + jB_p(\omega)] \left[1 + \frac{I_1}{I} e^{-j\theta(t)} + \frac{V_1}{V} e^{-j\theta(t)} \right],$$

pa je:

$$Y_V \doteq G_p(\omega) + jB_p(\omega) + (A + jB) e^{-j\theta(t)},$$

gdje su A i B određeni iznosima:

$$A = G_p(\omega) \left(\frac{I_1}{I} + \frac{V_1}{V} \right),$$

$$B = B_p(\omega) \left(\frac{I_1}{I} + \frac{V_1}{V} \right).$$

Iz gornje vrijednosti za Y_1 vidimo da je ukupna admitancija koju vidi oscilator u točkama 1-1' sastoji od admitancije opterećenja Y_p na frekvenciji ω i jednog člana koji je vremenski promjenjiv, a njegova apsolutna vrijednost je ovisna o omjeru injektiranog signala i signala oscilatora.

Napišimo sada jednadžbu samouzbuđivanja za ovaj slučaj:

$$Y_d + Y_V = 0,$$

iz koje nakon izjednačavanja imaginarnog dijela s nulom slijedi:

$$\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega} + \frac{B \cos[\theta(t)]}{\omega_r C} - \frac{A \sin[\theta(t)]}{\omega_r C} + \frac{B_p(\omega)}{\omega_r C} + \frac{B_d(\omega)}{\omega_r C} = 0.$$

Vrijedi da je:

$$|\omega - \omega_r| \ll |\omega + \omega_r|,$$

pa je:

$$\frac{\omega_0}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega_0} \doteq \frac{2\Delta\omega''}{\omega_r},$$

pri čemu je:

$$\Delta\omega'' = \omega - \omega_r = (\omega - \omega_0) + (\omega_0 - \omega_r) = \Delta\omega + \Delta\omega',$$

dok je:

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0,$$

razlika frekvencija na kojima radi samouzbuđivani oscilator i onaj s injektiranim signalom, dakle posljedica injektiranog signala. Iz gornje jednadžbe sada možemo izračunati:

$$\omega(t) = \omega_0 + \frac{A \sin[\theta(t)]}{2C} - \frac{B \cos[\theta(t)]}{2C} - \frac{1}{2C} [B_p(\omega) - B_p(\omega_0) + B_d(\omega) - B_d(\omega_0)].$$

Vidimo da će se trenutna frekvencija ω oscilatora u prisustvu vanjskog signala razlikovati od frekvencije ω_0 za dva člana promjenjiva u vremenu i za jedan konstantan član ΔB . Amplitude vremenski promjenjivih članova ovisne su o promjeni opterećenja u 1-1' zbog vanjskog signala. Konstantni član ΔB predstavlja promjenu susceptancije stvarnog opterećenja i diode uslijed promjene frekvencije.

Napišimo sada izlazni signal iz oscilatora u kojega injektiramo signal frekvencije ω_1 :

$$v(t) = V \sin[\omega_1 t + \theta(t)].$$

Međutim, kako oscilator oscilira na trenutnoj frekvenciji ω imamo:

$$\omega(t) = \omega_1 + \frac{d\theta(t)}{dt},$$

pri čemu je $\omega(t)$ određen ranije. Ako je vanjski signal dovoljno jak prisilit će oscilator da radi na frekvenciji ω_1 . U tom slučaju frekvencija oscilatora nije funkcija vremena ($\omega \neq \omega(t)$), a kut θ je konstantan.

Želimo dokazati gornju tvrdnju. Ako u jednadžbu za frekvenciju oscilatora $\omega(t)$ uvrstimo ranije dobiveni izraz, dolazimo do diferencijalne jednadžbe za $\theta(t)$:

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{A \sin \theta}{2C} - \frac{B \cos \theta}{2C} - \Delta\omega - \frac{\Delta B}{2C}.$$

Izvršimo nadalje jednu aproksimaciju. Naime, pretpostavimo da je ΔB zanemarivo mala veličina, pa je:

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{A \sin \theta}{2C} - \frac{B \cos \theta}{2C} - \Delta\omega.$$

Dobivena diferencijalna jednadžba ima dva rješenja.

Prvo rješenje vrijedi za slučaj da je:

$$(\Delta\omega)^2 < \frac{1}{4C^2} (A^2 + B^2) \quad (2)$$

Rješenje za fazni kut θ je neka vremenska funkcija. Međutim, ako nas posebno ne interesira prijelazna pojava nego ustaljeno stanje, pustimo da u tom rješenju $t \rightarrow \infty$. Tada je:

$$\theta = \pi - \arcsin \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} - \arcsin \frac{2C(\Delta\omega)}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Dakle, nakon završene prijelazne pojave kut θ je konstantan i slijedi da je:

$$\omega(t) = \omega_1 + \frac{d\theta}{dt} = \omega_1,$$

odnosno oscilator radi na frekvenciji ω_1 , razlika faza je konstantna. Rekli smo da je ovo rješenje moguće ako je ispunjen uvjet (2). To znači da je maksimalno moguća razlika frekvencija $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_0$ kod koje će doći do sinkronizacije određeno jednačinom:

$$\Delta\omega_{\max} = \frac{1}{2C} \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{1}{2C} \left(\frac{I_1}{I} + \frac{V_1}{V} \right) \sqrt{G_p^2 + B_p^2} = \frac{\omega_0}{Q_{\text{ext}}} \sqrt{\frac{P_i}{P_0}}.$$

Sada izraz za konstantni kut θ pišemo kao:

$$\theta = \pi - \arcsin \frac{B_p(\omega_1)}{\sqrt{A_p^2 + B_p^2}} - \arcsin \frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_{\max}}.$$

Vidimo da je kut θ ovisan o razlici frekvencije i maksimalnoj razlici frekvencije do koje se događa sinkronizacija, a ova je prema gornjem izrazu ovisna o kvadratnom korijenu omjera snage P_i i P_0 tih dvaju signala. U slučaju da je $\omega_0 = \omega_1$ i $B_p = 0$, tada je $\theta = \pi$. Ovime je riješen slučaj sinkroniziranog oscilatora.

Međutim, moguće je za zadani $\Delta\omega$ snaga P_i injektiranog signala nije dovoljno velika da dođe do sinkronizacije, odnosno drugim riječima $\Delta\omega > \Delta\omega_{\max}$. U tom slučaju rješenje diferencijalne jednačine daje kut θ kao periodičku funkciju vremena.

Literatura

- Z. Smrkić, *Mikrovalna elektronika*, Školska knjiga Zagreb, 1990.
- H. A. Atawater, *Introduction to microwave theory*, McGraw-Hill, 1962.
- J. Dekleva, *Izabrana poglavlja iz klasične elektrodinamike*, Elektrotehnički fakultet Split, 1970.
- P. C. J. Hill, *Some applications of the scattering matrix*, Proceedings of the IEE, Vol. 112, No. 1, Jan. 1965, pp. 15-20.