

Szintaxis:

$$\begin{aligned} A, A', A_1, \dots &\in \text{Ty} ::= | A_1 \rightarrow A_2 | \text{Unit} | A_1 \times A_2 \\ t, t', t_1, \dots &\in \text{Tm} ::= x | \lambda^A x. t | t t' | \text{tt} | \langle t_1, t_2 \rangle | \text{proj}_1 t | \text{proj}_2 t \\ \Gamma, \Gamma', \dots &\in \text{Con} ::= \cdot | \Gamma, x : A \end{aligned}$$

Környezetek kezelésére vonatkozó szabályok:

$$\begin{aligned} \text{dom}(\cdot) &:= \{\} \\ \text{dom}(\Gamma, x : A) &:= \{x\} \cup \text{dom}(\Gamma) \end{aligned} \tag{1}$$

$$\frac{\Gamma \text{ wf} \quad x \notin \text{dom}(\Gamma)}{\Gamma, x : A \text{ wf}} \tag{2}$$

$$\frac{\Gamma \text{ wf} \quad x \notin \text{dom}(\Gamma)}{(x : A) \in \Gamma, x : A} \tag{3}$$

$$\frac{(x : A) \in \Gamma \quad y \notin \text{dom}(\Gamma)}{(x : A) \in \Gamma, y : A'} \tag{4}$$

Termek típusozási szabályai:

$$\frac{(x : A) \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : A} \tag{5}$$

$$\frac{\Gamma, x : A_1 \vdash t : A_2}{\Gamma \vdash \lambda^{A_1} x. t : A_1 \rightarrow A_2} \tag{6}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : A_1 \rightarrow A_2 \quad \Gamma \vdash t_1 : A_1}{\Gamma \vdash t t_1 : A_2} \tag{7}$$

$$\frac{\Gamma \text{ wf}}{\Gamma \vdash \text{tt} : \text{Unit}} \tag{8}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 : A_1 \quad \Gamma \vdash t_2 : A_2}{\Gamma \vdash \langle t_1, t_2 \rangle : A_1 \times A_2} \tag{9}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : A_1 \times A_2}{\Gamma \vdash \text{proj}_1 t : A_1} \tag{10}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : A_1 \times A_2}{\Gamma \vdash \text{proj}_2 t : A_2} \tag{11}$$

Operációs szemantika:

$$\overline{\lambda^A x. t \text{ val}} \tag{12}$$

$$\frac{t \mapsto t'}{t t_1 \mapsto t' t_1} \tag{13}$$

$$\frac{t \text{ val} \quad t_1 \mapsto t'_1}{t t_1 \mapsto t t'_1} \tag{14}$$

$$\frac{t_1 \text{ val}}{(\lambda^A x. t_2) t_1 \mapsto t_2[x \mapsto t_1]} \tag{15}$$

$$\overline{\text{tt val}} \tag{16}$$

$$\frac{t_1 \text{ val} \quad t_2 \text{ val}}{\langle t_1, t_2 \rangle \text{ val}} \tag{17}$$

$$\frac{t_1 \mapsto t'_1}{\langle t_1, t_2 \rangle \mapsto \langle t'_1, t_2 \rangle} \tag{18}$$

$$\frac{t_1 \text{ val} \quad t_2 \mapsto t'_2}{\langle t_1, t_2 \rangle \mapsto \langle t_1, t'_2 \rangle} \quad (19)$$

$$\frac{t \mapsto t'}{\text{proj}_1 t \mapsto \text{proj}_1 t'} \quad (20)$$

$$\frac{t \mapsto t'}{\text{proj}_2 t \mapsto \text{proj}_2 t'} \quad (21)$$

$$\frac{t_1 \text{ val} \quad t_2 \text{ val}}{\text{proj}_1 \langle t_1, t_2 \rangle \mapsto t_1} \quad (22)$$

$$\frac{t_1 \text{ val} \quad t_2 \text{ val}}{\text{proj}_2 \langle t_1, t_2 \rangle \mapsto t_2} \quad (23)$$

Kiértékelés nulla vagy több lépésben:

$$\overline{t \mapsto^* t} \quad (24)$$

$$\frac{t \mapsto t' \quad t' \mapsto^* t''}{t \mapsto^* t''} \quad (25)$$

Tételek:

1. Unicitás: ha  $\Gamma \vdash t : A$  és  $\Gamma \vdash t : A'$ , akkor  $A = A'$ .
2. Környezet permutálhatósága: ha  $\Gamma \vdash t : A$  és  $\Gamma'$  a  $\Gamma$  egy permutációja, akkor  $\Gamma' \vdash t : A$ .
3. Gyengítés: ha  $\Gamma \vdash t : A$  és  $x \notin \text{dom}(\Gamma)$ , akkor  $\Gamma, x : A' \vdash t : A$ .
4. Helyettesítési lemma: ha  $\Gamma \vdash t : A$  és  $\Gamma, x : A \vdash t' : A'$ , akkor  $\Gamma \vdash t'[x \mapsto t] : A'$ .
5. Dekompozíció: ha  $\Gamma \vdash t'[x \mapsto t] : A'$ , akkor minden olyan  $A$ -ra, melyre  $\Gamma \vdash t : A$ ,  $\Gamma, x : A \vdash t' : A'$ .
6. Nincs olyan  $t$ , hogy  $t \text{ val}$  és  $t \mapsto t'$
7. Determinisztikusság: Ha  $t \mapsto t'$  és  $t \mapsto t''$ , akkor  $t' = t''$ .
8. Típusmegőrzés: ha  $\cdot \vdash t : A$ , akkor vagy  $t \text{ val}$ , vagy létezik olyan  $t'$ , hogy  $t \mapsto t'$ .
9. Haladás: ha  $\cdot \vdash t : A$  és  $t \mapsto t'$ , akkor  $\cdot \vdash t' : A$ .