

Neumann János doktori disszertációja

Kaposi Ambrus

Programozási Nyelvek és Fordítóprogramok Tanszék,
Informatikai Kar, ELTE

A gondolkodás architektúrái, Neumann 120 emlékév, ELTE
2023. szeptember 6.

https://en.wikipedia.org/wiki/John_von_Neumann

Contents [hide]

(Top)

› Life and education

› Career and private life

› Mathematics

 Set theory

 Von Neumann paradox

 Proof theory

 Ergodic theory

 Measure theory

 Topological groups

 Functional analysis

 Operator algebras

 Lattice theory

 Mathematical statistics

 Other work

› Physics

› Economics

› Computer science

› Defense work

› Personality

› Recognition

› Legacy

› Selected works

See also

Notes

References

Further reading

External links

Hungarian émigré, concerned that the Soviets would achieve nuclear superiority, he designed and promoted the policy of [mutually assured destruction](#) to limit the arms race.^[21]

In honor of his achievements and contributions to the modern world, he was named in 1999 the [Financial Times Person of the Century](#), as a representative of the century's characteristic ideal that the power of the mind could shape the physical world, and of the "Intellectual brilliance and human savagery" that defined the 20th century.^{[22][23][24]}

Life and education [edit]

Family background [edit]

Von Neumann was born in Budapest, Kingdom of Hungary (which was then part of the [Austro-Hungarian Empire](#)),^{[25][26][27]} on December 28, 1903, to a wealthy, acculturated, and non-observant [Jewish](#) family. His Hungarian birth name was Neumann János Lajos. In Hungarian, the family name comes first, and his given names are equivalent to John Louis in English.^[28]

He was the eldest of three brothers; his two younger siblings were Mihály (English: Michael von Neumann; 1907–1989) and Miklós (Nicholas von Neumann, 1911–2011).^[29] His father, Neumann Miksa (Max von Neumann, 1873–1928) was a banker, who held a [doctorate in law](#). He had moved to Budapest from Pécs at the end of the 1880s.^[30] Miksa's father and grandfather were both born in Ond (now part of the town of [Szerencs](#), [Zemplén County](#), northern Hungary. John's mother was Kann Margit (English: Margaret Kann);^[31] her parents were Jakab Kann and Katalin Meisels of the [Meisels family](#).^[32] Three generations of the Kann family lived in spacious apartments above the Kann-Heller offices in Budapest; von Neumann's family occupied an 18-room apartment on the top floor.^[33]

On February 20, 1913, [Emperor Franz Joseph](#) elevated John's father to the Hungarian nobility for his service to the Austro-Hungarian Empire.^[12] The Neumann family thus acquired the hereditary appellation *Margittai*, meaning "of Margitta" (today [Marghita, Romania](#)). The family had no connection with the town; the appellation was chosen in reference to Margaret, as was their chosen [coat of arms](#) depicting three *marguerites*. Neumann János became margittai Neumann János (John Neumann de Margitta), which he later changed to the German Johann von Neumann.^[34]

Child prodigy [edit]

Von Neumann was a [child prodigy](#). When he was six years old, he could divide two eight-digit numbers in his head^{[35][36]} and could converse in [Ancient Greek](#). When the six-year-old von Neumann caught his mother staring aimlessly, he asked her, "What are you calculating?"^[37]

When they were young, von Neumann, his brothers and his cousins were instructed by governesses. Von Neumann's father believed that knowledge of languages other than their native [Hungarian](#) was essential, so the children were tutored in [English](#), [French](#), [German](#), and

Known for

Abelian von Neumann algebra
Affiliated operator
Almost periodic functions on a locally compact abelian group
Alternating projection method
Amenable group
Arithmetic logic unit
Artificial life
Artificial viscosity
Axiom of regularity
Axiom of limitation of size
Backward induction
Birkhoff-von-Neumann algorithm
Birkhoff-von Neumann theorem
Blast wave (fluid dynamics)
Taylor-von Neumann-Sedov blast wave
Bounded set
(topological vector space)
Calkin correspondence
Carry-save adder
Cellular automata
Class (set theory)
Closed-subgroup theorem for matrix groups
Computer virus
Commutation theorem for traces
Continuous geometry
Coupling constant
Cumulative hierarchy
Decoherence theory (quantum mechanics)
+93 more [show]

Spouses

Marietta Kövesi
(m. 1930; div. 1937)
2/24

Előadás tartalma

1. „Az általános halmazelmélet axiomatikus felépítése” című értekezés
2. Az axiómák
3. Gödel második nemteljességi tétele és Neumann János

ELTE Levéltár doktori szigorlati jegyzőkönyv (i)

A növekedési típusról rövidítési rendszerről	A növekedési típusról	A füldörzsölés módjáról	Jegyzet
Feltekerés: Amerikai és európai művesek között előfordulnak. Típusok: Elengyűjtő, összegző, összefűzési. Elengyűjtő: magas szintűbbek. Összefűzési: magas szintűbbek. Összegző: magas szintűbbek. Elengyűjtő: magas szintűbbek. Összefűzési: magas szintűbbek.	Számolás Cseré Landed Yelleni	1926 Március 6	
Feltekerés: Az általános felhasználásban nincs használat. Típusok: Magas szintű összefűzési. Elengyűjtő: középső szintű összefűzési. Összefűzési: középső szintű összefűzési. Elengyűjtő: középső szintű összefűzési. Összefűzési: középső szintű összefűzési.	Számolás Cseré Landed Yelleni	1928 március 18	
Feltekerés: Lépték el a statisztikai szolgálat magas szintű összefűzési. Típusok: Elengyűjtő, összefűzési. Elengyűjtő: magas szintű összefűzési. Összefűzési: középső szintű összefűzési. Elengyűjtő: középső szintű összefűzési. Összefűzési: középső szintű összefűzési.	Cseré Landed Yelleni	1928 március 18 7.3	
Feltekerés: Amerikai, angol, svéd, német között előfordulnak. Csehországban is használják. Típusok: Elengyűjtő, összefűzési. Elengyűjtő: magas szintű összefűzési. Összefűzési: középső szintű összefűzési. Elengyűjtő: középső szintű összefűzési. Összefűzési: középső szintű összefűzési.	Tükrözés Yelleni		Létezett 1928 március
Feltekerés: Német, svéd, angol, svájci között előfordulnak. Csehországban is használják. Típusok: Elengyűjtő, összefűzési. Elengyűjtő: magas szintű összefűzési. Összefűzési: középső szintű összefűzési. Elengyűjtő: középső szintű összefűzési. Összefűzési: középső szintű összefűzési.	Számolás Cseré Landed Yelleni		Számolás Görögország London 1928 június 3

ELTE Levéltár doktori szigorlati jegyzőkönyv (ii)

Folyószám	Név, kor, vallás	Születésbel	Mely tanintézet végezte tanulmányát
25.	Juhász Jenő 1893 márc. 15. református	Gáloscecs Zemplén várm.	Az I. a részleges tanulmányának sorrendjében az 1893. március 15-i születésű Juhász Jenő, aki a Zempléni felső, a Kassa-mezőszövetségi törzsben végezte tanulmányait, különösen az irodalmi tudományokat, majd a Szegedi Egyetemen szerzett bölcsész diplomát. Az abszolválásának dátuma 1920. január 4.
26.	Margittai Penmann János 1903 decembert 28. izraelita	Bpest	Az I. részleges tanulmányának sorrendjében az 1903. decembert 28.-én született Margittai Penmann János, aki a Kassa-mezőszövetségi törzsben végezte tanulmányait, majd a Szegedi Egyetemen szerzett bölcsész diplomát. Az abszolválásának dátuma 1926. június 1.

ELTE Levéltár doktori szigorlati jegyzőkönyv (iii)

Születésbeli hely	Mely tanintézetben végezte tanulmányait	A szigorlat lezártásának napja
Gáloscecs, Zemplén várm.	Az I. országgyűlési tag., az E. országgyűlési tag., az MTA tag. a BM tag. a műszaki tanintézetben, a K. M. a. a műszaki tanintézetben, a BM a. a gyógyszerészeti körben tanult. Azonban végzette tanulmányai legutolsó jelentésekkel összhangban nem következtek be. Ezért a tanulmányokat 1928. február 25-én fejezte be. Ezután a tanulmányokat a BM tag. a. a műszaki tanintézetben folytatott. Absolviált 1928. jan. 20-án.	1926 február 25.
Budapest	az I. BM rendjélyt a Gyógyász Ág. L. országgyűlési tag. a műszaki tanintézetben végzett 26. július 1926. évre kötött 1926. január 20-án. Ezután a műszaki tanintézetben folytatott. Azonban 1926. I. félévértől 1927. I. félévig a félévét hagyatott. Absolviált 1926. júl. 11-én.	1926 Március 10.

ELTE Levéltár doktori szigorlati jegyzőkönyv (iv)

A szigorlat tárgyal és annak részletes eredménye	A szigorlat általános eredménye	A tudorráavatás napja
<p>Tantervezés: Iratállomási és személyminősítés névrejegyzések törölhetetlensége.</p> <p>Elfogadásától: Szími Nagy József az Országos Egyetem.</p> <p>Földrajz: Magyar nyelvterület.</p> <p style="text-align: center;">Summa cum laude. Emberez.</p> <p>Mellékelláttartágyak: Ungyan, irodalomtörténet</p> <p style="text-align: center;">Summa cum laude</p> <p style="text-align: center;">Latin filológia Művész</p> <p style="text-align: center;">cum laude</p> <p style="text-align: center;">Vilmos H.</p> <p>Érdekkörök: Az általános használaton kívül szíki fotópintérálos.</p> <p>Elfogadásától: Szófi Lipót és Szatmári József</p> <p>Földrajz: Matematika Summa cum laude</p> <p>Mellékelláttartágyak: Körörteophysika</p> <p style="text-align: center;">Summa cum laude</p> <p style="text-align: center;">Chemia laude Tamás</p> <p style="text-align: center;">Ingenieria summa cum laude</p> <p style="text-align: center;">Matematika</p>	<p style="text-align: center;">Summa cum laude</p> <p style="text-align: center;">Lande</p> <p style="text-align: center;">Yokanay</p>	<p>1926</p> <p>Március 6</p> <p>1926.</p> <p>márc. 13.</p>
<p>Tantervezés: Iratállomási és személyminősítés névrejegyzések törölhetetlensége.</p> <p>Elfogadásától: Szími Nagy József az Országos Egyetem.</p> <p>Földrajz: Magyar nyelvterület.</p> <p style="text-align: center;">Summa cum laude. Emberez.</p> <p>Mellékelláttartágyak: Ungyan, irodalomtörténet</p> <p style="text-align: center;">Summa cum laude</p> <p style="text-align: center;">Latin filológia Művész</p> <p style="text-align: center;">cum laude</p> <p style="text-align: center;">Vilmos H.</p> <p>Érdekkörök: Az általános használaton kívül szíki fotópintérálos.</p> <p>Elfogadásától: Szófi Lipót és Szatmári József</p> <p>Földrajz: Matematika Summa cum laude</p> <p>Mellékelláttartágyak: Körörteophysika</p> <p style="text-align: center;">Summa cum laude</p> <p style="text-align: center;">Chemia laude Tamás</p> <p style="text-align: center;">Ingenieria summa cum laude</p> <p style="text-align: center;">Matematika</p>	<p style="text-align: center;">Summa cum laude</p> <p style="text-align: center;">Lande</p> <p style="text-align: center;">Yokanay</p>	<p>1926</p> <p>Március 6</p> <p>1926.</p> <p>márc. 13.</p>

Fejér Lipót



„Kívülállónak nem lehet elmondani, hogy milyen volt Fejér Lipót. Óriás volt. Földöntúli vigasztalás a puszta lénye. Aki nem ismerte, az valamit nem tud a világról, és sohasem is fogja megtudni.”

(Ottlik Géza: Félbeszakadt beszélgetés Réz Pállal)

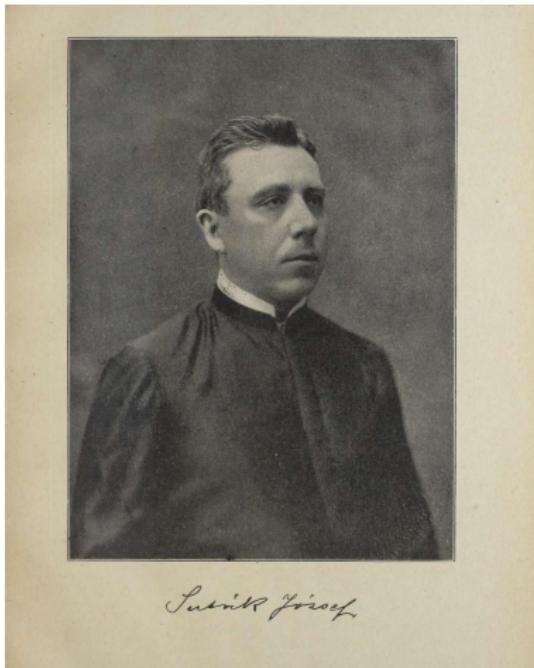
Fejér Lipót



„Koromzay Dénes barátom, a világhírű Magyar Vonósnégyes brácsása, mesélte nekem vagy harminc évvel később, hogy egy előkelő amerikai fogadáson valahogyan egy nagynevű ottani matematikaprofesszor mellé került, aki láthatólag jól értett a zenéhez. Dénes, csak hogy mondjon valamit, megjegyezte, hogy az ő barátjának is, mármint nekem, volt egy zeneértő matematikaprofesszora, akitől nagyra tartottak, Fejér Lipótnak hívták, de hát nem valószínű, hogy valaha is hallotta volna a nevét itt Amerikában. Mire az idős professzor felhördült, elvörösödött, hebegni kezdett, hátrált: 'Hogy - hogy - hogy - hogy hallottam-e a nevét? Ember! Életem legnagyobb élménye, hogy egyszer egy kongresszuson ötlépéssnyire álltam Fejér Lipóttól! Ott állhattam egészen közel hozzá! Ez évtizedekre erőt adott nekem!' ”

(Ottlik Géza: Félbeszakadt beszélgetés Réz Pállal)

Suták József



piarista szerzetes, az Eötvös Collegium egyik első tanára

ELTE Levéltár doktori szigorlati jegyzőkönyv (iv)

A szigorlat tárgyal és annak részletes eredménye	A szigorlat általános eredménye	A tudorráavatás napja
<p>Értekezés: I. Szakácska a recessuminalis névre vonatkozó törléstételről.</p> <p>Elfogadásától: Szentgyörgyi József az Gömböcs Etelén.</p> <p>Földrajz: Magyar nyelvéről. Summa cum laude. Emberez.</p> <p>Mellékelláttartágyak: Ungyan, irodalomtörténet Summa cum laude</p> <p>Latin filológia: Molnár cum laude</p> <p>Uralomtörténet: Vaskó István</p> <p>Érdekelés: Az általános használatban lévő alkalmazásokat.</p> <p>Elfogadásától: Székely Lajos az ifjúság jövőjét.</p> <p>Földrajz: Matematika Summa cum laude</p> <p>Mellékelláttartágyak: Körörteophysika Chemia: Summa cum laude Fizika: Summa cum laude Műszaki</p>	<p>Summa cum laude Yolanta</p>	<p>1926 Március 6</p>
<p>Értekezés: A közeljövőben előfordulható környezeti kihívásokat.</p> <p>Elfogadásától: Fojas Lipót az ifjúság jövőjét.</p> <p>Földrajz: Matematika Summa cum laude</p> <p>Mellékelláttartágyak: Körörteophysika Chemia: Summa cum laude Fizika: Summa cum laude Műszaki</p>	<p>Summa cum laude Yolanta</p>	<p>1926. márc. 13.</p>

Keresés: intézmények (köszönet Németh Gabriellának)

- ▶ Nem találják:
 - ▶ ELTE IK Könyvtár
 - ▶ ELTE BTK Könyvtár
 - ▶ ELTE Központi Könyvtár, Levéltár
 - ▶ OSZK
 - ▶ OMIKK
 - ▶ Rényi Intézet Könyvtár
 - ▶ MTA Könyvtár, Levéltár, Kézirattár (egy része épp költözés alatt)
 - ▶ Library of Congress Neumann-archívuma (13 dobozt végignéztek a kedvünkért az 56-ból)
 - ▶ Országos Rabbiképző – Zsidó Egyetem Könyvtára és Levéltára
 - ▶ Budapest-Fasori Evangélikus Gimnázium
 - ▶ Piarista Levéltár (Suták Józsefnek nincs meg a hagyatéka)

Keresés: emberek

- ▶ Nem hallottak még senkiről, aki valaha látta volna:
 - ▶ Szabó Máté (Oxford, tudománytörténész)
 - ▶ Rédei Miklós (London School of Economics, John von Neumann: Selected Letters 2022 című könyv szerkesztője)
 - ▶ Komjáth Péter (matematikus, akadémikus, már kereste az ELTE Levéltárban évtizedekkel ezelőtt)
 - ▶ Pálfy Péter Pál (matematikus, akadémikus)
 - ▶ Szabó Péter Gábor (informatikus, Szeged, több könyvet írt Kalmár Lászlóról és más magyar matematikusokról)
 - ▶ Máté András (filozófus, ELTE BTK, matematika-tudománytörténész)
 - ▶ Németi István, Andréka Hajnal (matematikusok, logisták)
 - ▶ Oláh-Gál Róbert (matematikus, Sapientia Egyetemen, Marosvásárhely, Bolyai-kutató)
 - ▶ Révész György (matematikus, Észak-Karolinai Egyetem, Fejér Lipót hagyatékát dolgozta fel)
- ▶ Nem válaszoltak:
 - ▶ Marina von Neumann Whitman (Neumann János lánya)
 - ▶ Jan von Plato (logista, Gödel-történész)

Library of Congress Neumann archívumából

BIBLIOGRAPHY OF JOHN VON NEUMANN

1. Über die Lage der Nullstellen gewisser Minimumpolynome. With M. Fekete. Jahresb., 31 (1922) pp. 125-138.
2. Zur Einführung der transfiniten Ordnungszahlen. Acta Szeged, 1 (1923) pp. 199-208.
3. Eine Axiomatisierung der Mengenlehre. Jour. f. Math., 154 (1925), pp. 219-240.
4. Egyenletesen sűrű számsorozatok. Math. Phys. Lapok, 32 (1925), pp. 32-40.
5. Zur Prüferschen Theorie der idealen Zahlen. Acta Szeged, 2 (1926), pp. 193-227.
6. Az általános Nalmazelmélet axiomatikus folépítése. (Doctor's thesis, Univ. of Budapest.) Cf. 18. (1926)
7. Über die Grundlagen der Quantenmechanik. With D. Hilbert and L. Nordheim. Math. Ann., 98 (1927), pp. 1-30.
8. Zur Theorie der Darstellungen kontinuierlicher Gruppen. Sitzungsber. d. Preuss. Akad., (1927), pp. 76-90.
9. Mathematische Begründung der Quantenmechanik. Gött. Nach. (1927), pp. 1-57.
10. Wahrscheinlichkeitstheoretischer Aufbau der Quantenmechanik. Gött. Nach. (1927), pp. 245-272.
11. Thermodynamik quantenmechanischer Gesamtheiten. Gött. Nach. (1927), pp. 273-291.
12. Zur Hilbertschen Beweistheorie. Math. Zschr., 26 (1927), pp. 1-46.
13. Allgemeine Eigenwerttheorie symmetrischer Funktionaloperatoren. "Habilitationsschrift", Univ. of Berlin (1928). Cf. 30.
14. Zerlegung des Intervall es in abzählbar viele kongruente Teilmengen. Fund. Math., 11 (1928), pp. 230-238.
15. Ein System algebraisch unabhängiger Zahlen. Math. Ann. 99 (1928), pp. 134-141.
16. Über die Definition durch transfinite Induktion, und verwandte Fragen der allgemeinen Mengenlehre. Math. Ann., 99 (1928), pp. 373-391.
17. Zur Theorie der Gesellschaftsspiele. Math. Ann., 100 (1928), pp. 295-320.
18. Die Axiomatisierung der Mengenlehre. Math. Zschr., 27 (1928), pp. 669-752.
19. Zur Erklärung einiger Eigenschaften der Spektren aus der Quantenmechanik des Drehelektrons, I. With E. Wigner. Zschr. f. Phys., 47 (1928), pp. 203-220.
20. Einige Bemerkungen zur Diracschen Theorie des Drehelektrons. Zschr. f. Phys., 48

Lábjegyzet

¹⁾ Der Gegenstand dieser Arbeit stimmt in vielen Teilen mit dem meiner Doktor-Dissertation: Der axiomatische Aufbau der allgemeinen Mengenlehre, Budapest, September 1925 (ungarisch), überein.

J. v. Neumann. Die Axiomatisierung der Mengenlehre. Mathematische Zeitschrift volume 27 (1928), pp. 669–752

MTA ajánlás

44 K 785/107. 1.

44 K 785/107. 2.

III. A) alosztály

Meggyőződésünk, hogy a Magyar Tudományos Akadémia Neumann megválasztásával egy elismert munkásági és munkáraje teljeségeiben álló tagot nyerne.
Budapest, 1934. február 7.

Bláthy Ottó Titusz r. t.
Rados Gusztáv r. t.
Kővesligethy Rádó r. t.
Tangl Károly r. t.
Fejér Lipót r. t.
Pogány Béla r. t.
Rybár István r. t.
Ortvay Rudolf l. t.

Neumann János irodalmi működése:

- 1922. 1. Über die Lage der Nullstellen gewisser Minimumpolynome. Mit M. Fekete. Jahress. d. D. M. V., Bd. 31, S. 125–138. (14 S.)
- 1923. 2. Zur Einführung der Transfiniten Ordnungszahlen. Acta Szeged., Bd. 1/4, S. 199–208. (10 S.)
- 1924. — — — — — — — —
- 1925. 3. Eine Axiomatisierung der Mengenlehre. Journ. f. Math., Bd. 154/4, S. 219–240. (22 S.)
- 4. Egyenletesen szűrő számcsorozatok. Math. Phys. Lapok, 32. köt. 32–40. (9 I.)
- 5. Zur Prüferschen Theorie der idealen Zahlen. Acta Szeged., Bd. 2/4, S. 193–227. (35 S.)
- 6. Az általános Halmazelmélet axiomatikus felépítése. Doktor disszertáció a Budapesti egyetemen. (18 I.)
- 7. Über die Grundlagen der Quantenmechanik. Mit D. Hilbert und L. Nordheim. Math. Ann., Bd. 98/1, S. 1–30. (30 S.)
- 8. Zur Theorie der Darstellungen kontinuierlicher Gruppen. Sitzungsber. d. Berl. Akad., 1927, S. 1–15. (15 S.)
- 9. Mathematische Begründung der Quantenmechanik. Gött. Nachr., 1927, S. 1–57. (57 S.)
- 10. Wahrscheinlichkeitstheoretischer Aufbau der Quantenmechanik. Gött. Nachr., 1927, S. 245–272. (28 S.)
- 11. Thermodynamik Quantenmechanischer Gesamttheorie. Gött. Nachr., 1927, S. 273–291. (19 S.)

- 1927. 12. Zur Hilbertschen Beweistheorie. Math. Ztschr., Bd. 26/1, S. 1–46. (46 S.)
- 13. Allgemeine Eigenwerttheorie symmetrischer Funktionaloperatoren. Habilitationsschrift an der Universität Berlin. (Vgl. 30.)
- 14. Zerlegung des Intervales in abzählbar viele Kongruente Teilmengen. Fund. Math., Bd. 11, S. 231–238. (8 S.)
- 15. Ein System algebraisch unabhängiger Zahlen. Math. Ann., Bd. 99/12, S. 134–141. (8 S.)
- 16. Über die Definition durch transfinite Induktion, und verwandte Fragen der allgemeinen Mengenlehre. Math. Ann., Bd. 99/3, S. 373–391. (19 S.)
- 17. Zur Theorie der Gesellschaftsspiele. Math. Ann., Bd. 100/1, 2, S. 295–320. (26 S.)
- 18. Die Axiomatisierung der Mengenlehre. Math. Zschr., Bd. 27/5, S. 669–752. (84 S.)
- 19. Zur Erklärung einiger Eigenschaften der Spektren aus der Quantenmechanik des Dreielektrons, I. Mit E. Wigner. Zschr. für Phys. Bd. 47/3, 4, S. 203–220. (18 S.)
- 20. Einige Bemerkungen zur Diracischen Theorie des Dreielektrons. Zschr. f. Phys., Bd. 48/11, 12, S. 868–881. (14 S.)
- 21. Zur Erklärung..., II. Mit E. Wigner. Zschr. f. Phys., Bd. 49/1, 2, S. 73–94. (22 S.) (Vgl. 20.)
- 22. Zur Erklärung..., III. Mit E. Wigner. — Zschr. f. Phys., Bd. 51/11, 12, S. 844–858. (15 S.) (Vgl. 20.)
- 1929. 23. Über eine Widerspruchsfreiheitsfrage der axiomatischen Mengenlehre. Journ. f. Math., Bd. 160/4, S. 227–241. (15 S.)
- 24. Über die analytischen Eigenschaften von Gruppen linearer Transformationen und ihrer Darstellungen. Math. Zschr., Bd. 30/1, 2, S. 3–42. (40 S.)
- 25. Über merkwürdige diskrete Eigenwerte. Mit E. Wigner. Phys. Zschr., Bd. 30, S. 465–467. (3 S.)
- 26. Über das Verhalten von Eigenwerten bei adiabatischen Prozessen. Mit E. Wigner. Phys. Zschr., Bd. 30, S. 468–470. (3 S.)
- 27. Beweis des Ergodensatzes und des H-Theorems in der neuen Mechanik. Zschr. f. Physik, Bd. 57/1, 2, S. 30–70. (41 S.)

Abraham Fraenkel



„Around 1922-23, being then professor at Marburg University, I received from Professor Erhard Schmidt, Berlin (on behalf of the Redaktion of the *Mathematische Zeitschrift*) a long manuscript of an author unknown to me, Johann von Neumann, with the title *Die Axiomatisierung der Mengenlehre*, this being his eventual doctor dissertation which appeared in the *Zeitschrift* only in 1928, (Vol. 27). I was asked to express my view since it seemed incomprehensible. I don't maintain that I understood everything, but enough to see that this was an outstanding work and to recognize ex ungue leonem. While answering in this sense, I invited the young scholar to visit me (in Marburg) and discussed things with him, strongly advising him to prepare the ground for the understanding of so technical an essay by a more informal essay which should stress the new access to the problem and its fundamental consequences. He wrote such an essay under the title, *Eine Axiomatisierung der Mengenlehre*, and I published it in 1925 in the *Journal für Mathematik* (vol. 154) of which I was then Associate Editor.“

Forrás: John von Neumann, 1903-1957 (Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 64, No. 3, Pt. 2, May 1958) by S. Ulam

Die Axiomatisierung der Mengenlehre¹⁾.

Von

J. v. Neumann in Budapest.

Inhaltsverzeichnis.

Bezeichnungen.

I. Die Axiome.

1. Einleitung.
2. Diskussion der Axiome.
3. Systematisches zur Herleitung.

II. Die elementaren Operationen der Mengenlehre.

1. Hilfssätze.
2. Grunddefinitionen.
3. Einstellen-Funktionen und Elementarmengen.
4. Zusammensetzung von Funktionen.
5. Summe, Durchschnitt und Differenz von zwei Bereichen.
6. Rechenregeln.

III. Die allgemeinen Operationen der Mengenlehre.

1. Vereinigungsbereich und Durchschnitt eines Bereiches von Mengen.
2. Der Bildbereich.
3. Der Potenzbereich (Bereich aller Teilmengen).
4. Der Paarbereich,
5. Der allgemeine Potenzbereich.

IV. Grundbegriffe der Wohlordnung.

1. Die unvollständige Ordnung. Abschnitte.
2. Auferlegte und übertragene Ordnung. Subsumptionsordnung.
3. Eigenschaften der auferlegten und der übertragenen Ordnung.
4. Ähnlichkeit.
5. Vollständige und Wohlordnung.
6. Abschnitte in wohlgeordneten Bereichen.

V. Theorie der Ordnungszahlen.

1. Zählung, Ordnungszahl, Zählbarkeit.
2. Eindeutigkeit der Zählung.
3. Existenz der Zählung.
4. Subsumptionsordnung von Ordnungszahlen.
5. Charakteristische Eigenschaften von Ordnungszahlen.
6. Der Bereich der Ordnungszahlen.

VI. Ähnlichkeit und Ordnungszahlen. Der Wohlordnungssatz.

1. Ähnlichkeit und Ordnungszahlen.
2. Vergleichbarkeit, Eindeutigkeit der Abbildung.
3. Die Wohlordnung des Bereiches aller I-Dinge.
4. Die Wohlordnung beliebiger Bereiche.

VII. Die Äquivalenz und die Kardinalzahlen.

1. Die Äquivalenz.
2. Die Kardinalzahlen oder Mächtigkeiten.
3. Die Vergleichbarkeit.

VIII. Die Endlichkeit. Die ersten Ordnungszahlen.

1. Die Endlichkeit.
2. Eigenschaften der Endlichkeit.
3. Grundoperationen mit Ordnungszahlen.
4. Die natürlichen Zahlen, ω .

IX. Induktionssätze.

1. Die transfinite Induktion.
2. Ein Spezialfall. Die finite (gewöhnliche vollständige) Induktion.

Schluß.

Axiómák

- ▶ 19. század vége: Cantor, Frege

Axiómák

- ▶ 19. század vége: Cantor, Frege
- ▶ 1901 Russell paradoxon: $R = \{x \mid x \notin x\}$, $R \in R \iff R \notin R$

Axiómák

- ▶ 19. század vége: Cantor, Frege
- ▶ 1901 Russell paradoxon: $R = \{x \mid x \notin x\}$, $R \in R \iff R \notin R$
- ▶ Russell paradoxon elkerülése: részhalmaz axióma (Zermelo 1908, Fraenkel 1922)

Axiómák

- ▶ 19. század vége: Cantor, Frege
- ▶ 1901 Russell paradoxon: $R = \{x \mid x \notin x\}$, $R \in R \iff R \notin R$
- ▶ Russell paradoxon elkerülése: részhalmaz axióma (Zermelo 1908, Fraenkel 1922)
- ▶ 1925 Neumann
 - ▶ halmazok, osztályok
 - ▶ véges axiomatizálás
 - ▶ regularitás

Axiómák

- ▶ 19. század vége: Cantor, Frege
- ▶ 1901 Russell paradoxon: $R = \{x \mid x \notin x\}$, $R \in R \iff R \notin R$
- ▶ Russell paradoxon elkerülése: részhalmaz axióma (Zermelo 1908, Fraenkel 1922)
- ▶ 1925 Neumann
 - ▶ halmazok, osztályok
 - ▶ véges axiomatizálás
 - ▶ regularitás
- ▶ Nem halmazokra épít, hanem függvényekre: $A \rightarrow \text{Bool} \cong \mathcal{P}(A)$

Axiómák

- ▶ 19. század vége: Cantor, Frege
- ▶ 1901 Russell paradoxon: $R = \{x \mid x \notin x\}$, $R \in R \iff R \notin R$
- ▶ Russell paradoxon elkerülése: részhalmaz axióma (Zermelo 1908, Fraenkel 1922)
- ▶ 1925 Neumann
 - ▶ halmazok, osztályok
 - ▶ véges axiomatizálás
 - ▶ regularitás
- ▶ Nem halmazokra épít, hanem függvényekre: $A \rightarrow \text{Bool} \cong \mathcal{P}(A)$
- ▶ I.dolog, II.dolog, I.II.dolog

Axiómák

- ▶ 19. század vége: Cantor, Frege
- ▶ 1901 Russell paradoxon: $R = \{x \mid x \notin x\}$, $R \in R \iff R \notin R$
- ▶ Russell paradoxon elkerülése: részhalmaz axióma (Zermelo 1908, Fraenkel 1922)
- ▶ 1925 Neumann
 - ▶ halmazok, osztályok
 - ▶ véges axiomatizálás
 - ▶ regularitás
- ▶ Nem halmazokra épít, hanem függvényekre: $A \rightarrow \text{Bool} \cong \mathcal{P}(A)$
- ▶ I.dolog, II.dolog, I.II.dolog
- ▶ Argumentumok, nagy függvények, kis függvények (argumentumból létrehozva).

Két szort: $\text{tm} \subset \text{TM}$

Bevezető: $\emptyset : \text{tm}$

$- \cdot - : \text{TM} \rightarrow \text{tm} \rightarrow \text{tm} \quad (\forall(x : \text{tm}). f \cdot x = g \cdot x) \rightarrow f = g$

$-, - : \text{tm} \rightarrow \text{tm} \rightarrow \text{tm}$

Aritmetikai: $\text{id} : \text{TM} \quad \text{id} \cdot x = x \quad x \in f := f \cdot x \neq \emptyset$

$\text{const} : \text{tm} \rightarrow \text{TM} \quad \text{const } u \cdot x = u \quad f \subseteq g := \forall x. x \in f \rightarrow x \in g$

$\text{fst} : \text{TM} \quad \text{fst} \cdot (x, y) = x$

$\text{snd} : \text{TM} \quad \text{snd} \cdot (x, y) = y$

$\text{app} : \text{TM} \quad \text{app} \cdot (f, y) = f \cdot y$

$\text{pair} : \text{TM} \rightarrow \text{TM} \rightarrow \text{TM} \quad \text{pair } f g \cdot x = (f \cdot x, g \cdot x)$

$\text{comp} : \text{TM} \rightarrow \text{TM} \rightarrow \text{TM} \quad \text{comp } f g \cdot x = f \cdot (g \cdot x)$

Logikai: $\text{eq} : \text{TM} \quad (x, y) \in \text{eq} \leftrightarrow x = y$

$t : \text{TM} \rightarrow \text{TM} \quad x \in t f \leftrightarrow (\forall(y : \text{tm}). f \cdot (x, y) = \emptyset)$

$\text{extract} : \text{TM} \rightarrow \text{TM} \quad (\exists!y. (x, y) \in f) \rightarrow \text{extract } f \cdot x = y$

Méret: $f : \text{TM}$ és nem $f : \text{tm} \leftrightarrow$ van ráképzés f -ről tm-re

Végtelenség: $\text{nat} : \text{tm}$

$\text{zero} : \text{tm} \quad \text{zero} \in \text{nat}$

$\text{suc} : \text{tm} \rightarrow \text{tm} \quad x \in \text{nat} \rightarrow \text{suc } x \in \text{nat} \text{ és } x \subset \text{suc } x$

$\text{union} : \text{tm} \rightarrow \text{tm} \quad x \in y \rightarrow y \in f \rightarrow x \in \text{union } f$

$\text{pow} : \text{tm} \rightarrow \text{tm} \quad x \subseteq f \rightarrow \exists(y : \text{tm}). (y \in \text{pow } f) \times (x \subseteq\subseteq y)$

Gödel nemteljességi tételei (i)

- ▶ 1900. Hilbert 2. problémája: a számelmélet ellentmondásmentessége

Gödel nemteljességi tételei (i)

- ▶ 1900. Hilbert 2. problémája: a szármelmelet ellentmondásmentessége
- ▶ 1931. Gödel nemteljességi tételei:
 1. A szármelmeletben van olyan állítás, mely nem bizonyítható, és a tagadása sem bizonyítható.
 2. A szármelmelet konzisztenciája nem bizonyítható a szármelmeletben.

Gödel nemteljességi tételei (i)

AUTHOR KATHARINE GATES RECENTLY ATTEMPTED TO MAKE A CHART OF ALL SEXUAL FETISHES.

LITTLE DID SHE KNOW THAT RUSSELL AND WHITEHEAD HAD ALREADY FAILED AT THIS SAME TASK.

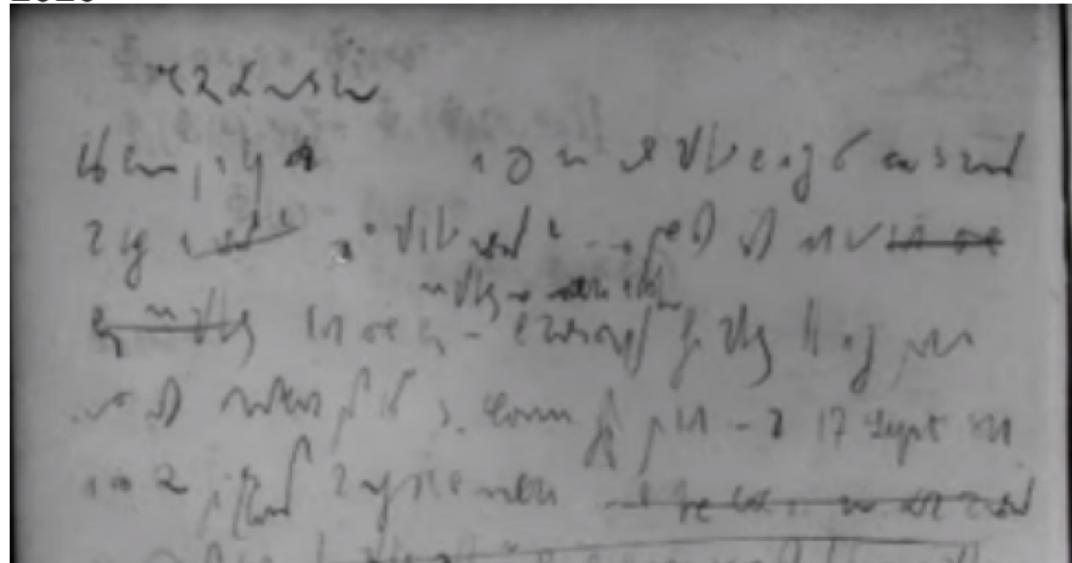
- ▶ 1900. Hilbert 2. problémája: a szármelmelet ellentmondásmentessége
- ▶ 1931. Gödel nemteljességi tételei:
 1. A szármelmeletben van olyan állítás, mely nem bizonyítható, és a tagadása sem bizonyítható.
 2. A szármelmelet konzisztenciája nem bizonyítható a szármelmeletben.



Forrás: <https://xkcd.com/468>

Gödel nemteljességi tételei (ii)

- ▶ Jan von Plato. Can Mathematics be Proved Consistent? : Gödel's Shorthand Notes & Lectures on Incompleteness. Springer 2020



Idővonal

- ▶ 1930. szept. 5–7. Königsbergi konferencia a matematika alapjairól

Idővonal

- ▶ 1930. szept. 5–7. Königsbergi konferencia a matematika alapjairól
- ▶ Gödel az utolsó napon: „Vannak olyan egyszerű állítások (a Goldbach és Fermat-sejtéshez hasonlóak), melyek minden számra igazak, de bebizonyíthatatlanok a klasszikus matematika formális rendszerében.”

Idővonal

- ▶ 1930. szept. 5–7. Königsbergi konferencia a matematika alapjairól
 - ▶ Gödel az utolsó napon: „Vannak olyan egyszerű állítások (a Goldbach és Fermat-sejtéshez hasonlóak), melyek minden számra igazak, de bebizonyíthatatlanok a klasszikus matematika formális rendszerében.”
- ▶ 1930. nov. 17. Gödel beküldi a „Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I” cikket. Csak az első nemteljességi téTEL van benne.

Idővonal

- ▶ 1930. szept. 5–7. Königsbergi konferencia a matematika alapjairól
 - ▶ Gödel az utolsó napon: „Vannak olyan egyszerű állítások (a Goldbach és Fermat-sejtéshez hasonlóak), melyek minden számra igazak, de bebizonyíthatatlanok a klasszikus matematika formális rendszerében.”
- ▶ 1930. nov. 17. Gödel beküldi a „Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I” cikket. Csak az első nemteljességi téTEL van benne.
- ▶ 1930. nov. 20. Neumann ír Gödelnek: a módszerrel megmutattam, hogy a matematika konzisztenciája bebizonyíthatatlan. Nemsokára publikálom.

Idővonal

- ▶ 1930. szept. 5–7. Königsbergi konferencia a matematika alapjairól
 - ▶ Gödel az utolsó napon: „Vannak olyan egyszerű állítások (a Goldbach és Fermat-sejtéshez hasonlóak), melyek minden számra igazak, de bebizonyíthatatlanok a klasszikus matematika formális rendszerében.”
- ▶ 1930. nov. 17. Gödel beküldi a „Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I” cikket. Csak az első nemteljességi téTEL van benne.
- ▶ 1930. nov. 20. Neumann ír Gödelnek: a módszerrel megmutattam, hogy a matematika konzisztenciája bebizonyíthatatlan. Nemsokára publikálom.
- ▶ 1930. nov. 24. Gödel két további oldallal kiegészíti a cikkét. A folyóirat szerkesztője a témavezetője, megoldható a módosítás.

Idővonal

- ▶ 1930. szept. 5–7. Königsbergi konferencia a matematika alapjairól
 - ▶ Gödel az utolsó napon: „Vannak olyan egyszerű állítások (a Goldbach és Fermat-sejtéshez hasonlóak), melyek minden számra igazak, de bebizonyíthatatlanok a klasszikus matematika formális rendszerében.”
- ▶ 1930. nov. 17. Gödel beküldi a „Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I” cikket. Csak az első nemteljességi téTEL van benne.
- ▶ 1930. nov. 20. Neumann ír Gödelnek: a módszerrel megmutattam, hogy a matematika konzisztenciája bebizonyíthatatlan. Nemsokára publikálom.
- ▶ 1930. nov. 24. Gödel két további oldallal kiegészíti a cikkét. A folyóirat szerkesztője a témavezetője, megoldható a módosítás.
- ▶ 1930. nov. 25. Gödel ír Neumannnak: magyarázkodik, hogy miért nem beszélt neki a második nemteljességi téTELről.

Idővonal

- ▶ 1930. szept. 5–7. Königsbergi konferencia a matematika alapjairól
 - ▶ Gödel az utolsó napon: „Vannak olyan egyszerű állítások (a Goldbach és Fermat-sejtéshez hasonlóak), melyek minden számra igazak, de bebizonyíthatatlanok a klasszikus matematika formális rendszerében.”
- ▶ 1930. nov. 17. Gödel beküldi a „Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I” cikket. Csak az első nemteljességi téTEL van benne.
- ▶ 1930. nov. 20. Neumann ír Gödelnek: a módszerrel megmutattam, hogy a matematika konzisztenciája bebizonyíthatatlan. Nemsokára publikálom.
- ▶ 1930. nov. 24. Gödel két további oldallal kiegészíti a cikkét. A folyóirat szerkesztője a témavezetője, megoldható a módosítás.
- ▶ 1930. nov. 25. Gödel ír Neumannnak: magyarázkodik, hogy miért nem beszélt neki a második nemteljességi téTELről.
- ▶ 1930. nov. 29. Neumann ír Gödelnek: mégsem publikálja a bizonyítását.

Összefoglalás

„A shadow is cast on Gödel's great achievement; there is no way of undoing the fact that Gödel together with Hahn played a well-planned trick to persuade von Neumann not to publish.”

Forrás: Jan von Plato. Can Mathematics be Proved Consistent? : Gödel's Shorthand Notes & Lectures on Incompleteness. Springer 2020)

Összefoglalás

„A shadow is cast on Gödel's great achievement; there is no way of undoing the fact that Gödel together with Hahn played a well-planned trick to persuade von Neumann not to publish.”

Forrás: Jan von Plato. Can Mathematics be Proved Consistent? : Gödel's Shorthand Notes & Lectures on Incompleteness. Springer 2020)

„Gödel is absolutely irreplaceable; he is the only mathematician alive about whom I would dare to make this statement,' he wrote to Flexner. 'Salvaging him from the wreck of Europe is one of the great single contributions anyone could make to science at this moment.'”

Forrás: Ananyo Bhattacharya. The Man from the Future: The Visionary Life of John von Neumann. W. W. Norton & Company. 2022.