

Szintaxis:

$$\begin{aligned}
 A, A', A_1, \dots &\in \text{Ty} ::= \text{Unit} \mid A_1 \times A_2 \mid \text{Empty} \mid A_1 + A_2 \\
 t, t', t_1, \dots &\in \text{Tm} ::= \text{tt} \mid \langle t_1, t_2 \rangle \mid \text{proj}_1 t \mid \text{proj}_2 t \mid \text{abort}^A t \mid \text{inj}_1^{A_1, A_2} t \mid \text{inj}_2^{A_1, A_2} t \mid \text{case } t \, x_1. t_1 \, x_2. t_2 \\
 \Gamma, \Gamma', \dots &\in \text{Con} ::= \cdot \mid \Gamma, x : A
 \end{aligned}$$

Környezetek kezelésére vonatkozó szabályok:

$$\begin{aligned}
 \text{dom}(\cdot) &:= \{\} \\
 \text{dom}(\Gamma, x : A) &:= \{x\} \cup \text{dom}(\Gamma)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\cdot \text{wf}}{\Gamma \text{wf}} \quad (1)$$

$$\frac{\Gamma \text{wf} \quad x \notin \text{dom}(\Gamma)}{\Gamma, x : A \text{wf}} \quad (2)$$

$$\frac{\Gamma \text{wf} \quad x \notin \text{dom}(\Gamma)}{(x : A) \in \Gamma, x : A} \quad (3)$$

$$\frac{(x : A) \in \Gamma \quad y \notin \text{dom}(\Gamma)}{(x : A) \in \Gamma, y : A'} \quad (4)$$

Termek típusozási szabályai:

$$\frac{(x : A) \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : A} \quad (5)$$

$$\frac{\Gamma \text{wf}}{\Gamma \vdash \text{tt} : \text{Unit}} \quad (6)$$

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 : A_1 \quad \Gamma \vdash t_2 : A_2}{\Gamma \vdash \langle t_1, t_2 \rangle : A_1 \times A_2} \quad (7)$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : A_1 \times A_2}{\Gamma \vdash \text{proj}_1 t : A_1} \quad (8)$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : A_1 \times A_2}{\Gamma \vdash \text{proj}_2 t : A_2} \quad (9)$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : \text{Empty}}{\Gamma \vdash \text{abort}^A t : A} \quad (10)$$

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 : A_1}{\Gamma \vdash \text{inj}_1^{A_1, A_2} t_1 : A_1 + A_2} \quad (11)$$

$$\frac{\Gamma \vdash t_2 : A_2}{\Gamma \vdash \text{inj}_2^{A_1, A_2} t_2 : A_1 + A_2} \quad (12)$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : A_1 + A_2 \quad \Gamma, x_1 : A_1 \vdash t_1 : A \quad \Gamma, x_2 : A_2 \vdash t_2 : A}{\Gamma \vdash \text{case } t \, x_1. t_1 \, x_2. t_2 : A} \quad (13)$$

Operációs szemantika:

$$\frac{}{\text{tt val}} \quad (14)$$

$$\frac{t_1 \text{ val} \quad t_2 \text{ val}}{\langle t_1, t_2 \rangle \text{ val}} \quad (15)$$

$$\frac{t_1 \mapsto t'_1}{\langle t_1, t_2 \rangle \mapsto \langle t'_1, t_2 \rangle} \quad (16)$$

$$\frac{t_1 \text{ val} \quad t_2 \mapsto t'_2}{\langle t_1, t_2 \rangle \mapsto \langle t_1, t'_2 \rangle} \quad (17)$$

$$\frac{t \mapsto t'}{\text{proj}_1 t \mapsto \text{proj}_1 t'} \quad (18)$$

$$\frac{t \mapsto t'}{\text{proj}_2 t \mapsto \text{proj}_2 t'} \quad (19)$$

$$\frac{t_1 \text{ val} \quad t_2 \text{ val}}{\text{proj}_1 \langle t_1, t_2 \rangle \mapsto t_1} \quad (20)$$

$$\frac{t_1 \text{ val} \quad t_2 \text{ val}}{\text{proj}_2 \langle t_1, t_2 \rangle \mapsto t_2} \quad (21)$$

$$\frac{t \text{ val}}{\text{inj}_1^{A_1, A_2} t \text{ val}} \quad (22)$$

$$\frac{t \text{ val}}{\text{inj}_2^{A_1, A_2} t \text{ val}} \quad (23)$$

$$\frac{t \mapsto t'}{\text{abort}^A t \mapsto \text{abort}^A t'} \quad (24)$$

$$\frac{t \mapsto t'}{\text{inj}_1 t \mapsto \text{inj}_1 t'} \quad (25)$$

$$\frac{t \mapsto t'}{\text{inj}_2 t \mapsto \text{inj}_2 t'} \quad (26)$$

$$\frac{t \mapsto t'}{\text{case } t \text{ } x_1.t_1 \text{ } x_2.t_2 \mapsto \text{case } t' \text{ } x_1.t_1 \text{ } x_2.t_2} \quad (27)$$

$$\frac{t \text{ val}}{\text{case } (\text{inj}_1^{A_1, A_2} t) \text{ } x_1.t_1 \text{ } x_2.t_2 \mapsto t_1[x_1 \mapsto t]} \quad (28)$$

$$\frac{t \text{ val}}{\text{case } (\text{inj}_2^{A_1, A_2} t) \text{ } x_1.t_1 \text{ } x_2.t_2 \mapsto t_2[x_2 \mapsto t]} \quad (29)$$

Kiértékelés nulla vagy több lépésben:

$$\overline{t \mapsto^* t} \quad (30)$$

$$\frac{t \mapsto t' \quad t' \mapsto^* t''}{t \mapsto^* t''} \quad (31)$$

Tételek:

1. Unicitás: ha  $\Gamma \vdash t : A$  és  $\Gamma \vdash t : A'$ , akkor  $A = A'$ .
2. Környezet permutálhatósága: ha  $\Gamma \vdash t : A$  és  $\Gamma'$  a  $\Gamma$  egy permutációja, akkor  $\Gamma' \vdash t : A$ .
3. Gyengítés: ha  $\Gamma \vdash t : A$  és  $x \notin \text{dom}(\Gamma)$ , akkor  $\Gamma, x : A' \vdash t : A$ .
4. Helyettesítési lemma: ha  $\Gamma \vdash t : A$  és  $\Gamma, x : A \vdash t' : A'$ , akkor  $\Gamma \vdash t'[x \mapsto t] : A'$ .
5. Dekompozíció: ha  $\Gamma \vdash t'[x \mapsto t] : A'$ , akkor minden olyan  $A$ -ra, melyre  $\Gamma \vdash t : A$ ,  $\Gamma, x : A \vdash t' : A'$ .
6. Nincs olyan  $t$ , hogy  $t \text{ val}$  és  $t \mapsto t'$
7. Determinisztikusság: Ha  $t \mapsto t'$  és  $t \mapsto t''$ , akkor  $t' = t''$ .
8. Típusmegőrzés: ha  $\cdot \vdash t : A$ , akkor vagy  $t \text{ val}$ , vagy létezik olyan  $t'$ , hogy  $t \mapsto t'$ .
9. Haladás: ha  $\cdot \vdash t : A$  és  $t \mapsto t'$ , akkor  $\cdot \vdash t' : A$ .