Szintaxis:

$$
\begin{aligned}
A, A', A_1, \ldots &\in \mathsf{Ty} &&::= \mathsf{Nat} \mid \mathsf{Unit} \mid A_1 \times A_2 \\
t, t', t_1, \ldots &\in \mathsf{Tm} &&::= x \mid \mathsf{zero} \mid \mathsf{suc}\, t \mid \mathsf{rec}\, t_0\, x.t_1\, t \mid \mathsf{tt} \mid \langle t_1, t_2 \rangle \mid \mathsf{proj}_1\, t \mid \mathsf{proj}_2\, t \\
\Gamma, \Gamma', \ldots &\in \mathsf{Con} &&::= \cdot \mid \Gamma, x : A
\end{aligned}
$$

Környezetek kezelésére vonatkozó szabályok:

$$
\begin{aligned}
&dom(\cdot) := \{\} \\
&dom(\Gamma, x : A) := \{x\} \cup dom(\Gamma)
\end{aligned}
$$

$$\frac{}{\cdot\ \mathsf{wf}} \tag{1}$$

$$\frac{\Gamma\ \mathsf{wf} \qquad x \notin dom(\Gamma)}{\Gamma, x : A\ \mathsf{wf}} \tag{2}$$

$$\frac{\Gamma\ \mathsf{wf} \qquad x \notin dom(\Gamma)}{(x : A) \in \Gamma, x : A} \tag{3}$$

$$\frac{(x : A) \in \Gamma \qquad y \notin dom(\Gamma)}{(x : A) \in \Gamma, y : A'} \tag{4}$$

Termek típusozási szabályai:

$$\frac{(x : A) \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : A} \tag{5}$$

$$\frac{\Gamma\ \mathsf{wf}}{\Gamma \vdash \mathsf{zero} : \mathsf{Nat}} \tag{6}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : \mathsf{Nat}}{\Gamma \vdash \mathsf{suc}\, t : \mathsf{Nat}} \tag{7}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t_0 : A \qquad \Gamma, x : A \vdash t_1 : A \qquad \Gamma \vdash t : \mathsf{Nat}}{\Gamma \vdash \mathsf{rec}\, t_0\, x.t_1\, t : A} \tag{8}$$

$$\frac{\Gamma\ \mathsf{wf}}{\Gamma \vdash \mathsf{tt} : \mathsf{Unit}} \tag{9}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 : A_1 \qquad \Gamma \vdash t_2 : A_2}{\Gamma \vdash \langle t_1, t_2 \rangle : A_1 \times A_2} \tag{10}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : A_1 \times A_2}{\Gamma \vdash \mathsf{proj}_1\, t : A_1} \tag{11}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : A_1 \times A_2}{\Gamma \vdash \mathsf{proj}_2\, t : A_2} \tag{12}$$

Operációs szemantika:

$$\frac{}{\mathsf{zero}\ \mathsf{val}} \tag{13}$$

$$\frac{t\ \mathsf{val}}{\mathsf{suc}\, t\ \mathsf{val}} \tag{14}$$

$$\frac{t \longmapsto t'}{\mathsf{suc}\, t \longmapsto \mathsf{suc}\, t'} \tag{15}$$

$$\frac{t \longmapsto t'}{\mathsf{rec}\, t_0\, x.t_1\, t \longmapsto \mathsf{rec}\, t_0\, x.t_1\, t'} \tag{16}$$

$$\frac{}{\mathsf{rec}\, t_0\, x.t_1\, \mathsf{zero} \longmapsto t_0} \tag{17}$$

$$\frac{t\ \mathsf{val}}{\mathsf{rec}\, t_0\, x.t_1\, (\mathsf{suc}\, t) \longmapsto t_1[x \mapsto \mathsf{rec}\, t_0\, x.t_1\, t]} \tag{18}$$

$$\frac{}{\mathsf{tt}\ \mathsf{val}} \tag{19}$$

$$\frac{t_1\ \mathsf{val} \qquad t_2\ \mathsf{val}}{\langle t_1, t_2\rangle\ \mathsf{val}} \tag{20}$$

$$\frac{t_1 \longmapsto t_1'}{\langle t_1, t_2\rangle \longmapsto \langle t_1', t_2\rangle} \tag{21}$$

$$\frac{t_1\ \mathsf{val} \qquad t_2 \longmapsto t_2'}{\langle t_1, t_2\rangle \longmapsto \langle t_1, t_2'\rangle} \tag{22}$$

$$\frac{t \longmapsto t'}{\mathsf{proj}_1\, t \longmapsto \mathsf{proj}_1 t'} \tag{23}$$

$$\frac{t \longmapsto t'}{\mathsf{proj}_2\, t \longmapsto \mathsf{proj}_2 t'} \tag{24}$$

$$\frac{t_1\ \mathsf{val} \qquad t_2\ \mathsf{val}}{\mathsf{proj}_1\, \langle t_1, t_2\rangle \longmapsto t_1} \tag{25}$$

$$\frac{t_1\ \mathsf{val} \qquad t_2\ \mathsf{val}}{\mathsf{proj}_2\, \langle t_1, t_2\rangle \longmapsto t_2} \tag{26}$$

Kiértékelés nulla vagy több lépésben:

$$\frac{}{t \longmapsto^* t} \tag{27}$$

$$\frac{t \longmapsto t' \qquad t' \longmapsto^* t''}{t \longmapsto^* t''} \tag{28}$$

Tételek:

1. Unicitás: ha $\Gamma \vdash t : A$ és $\Gamma \vdash t : A'$, akkor $A = A'$.
2. Környezet permutálhatósága: ha $\Gamma \vdash t : A$ és Γ' a Γ egy permutációja, akkor $\Gamma' \vdash t : A$.
3. Gyengítés: ha $\Gamma \vdash t : A$ és $x \notin dom(\Gamma)$, akkor $\Gamma, x : A' \vdash t : A$.
4. Helyettesítési lemma: ha $\Gamma \vdash t : A$ és $\Gamma, x : A \vdash t' : A'$, akkor $\Gamma \vdash t'[x \mapsto t] : A'$.
5. Dekompozíció: ha $\Gamma \vdash t'[x \mapsto t] : A'$, akkor minden olyan A-ra, melyre $\Gamma \vdash t : A$, $\Gamma, x : A \vdash t' : A'$.
6. Nincs olyan t, hogy $t\,\mathsf{val}$ és $t \longmapsto t'$
7. Determinisztikusság: Ha $t \longmapsto t'$ és $t \longmapsto t''$, akkor $t' = t''$.
8. Haladás: ha $\cdot \vdash t : A$, akkor vagy $t\,\mathsf{val}$, vagy létezik olyan t', hogy $t \longmapsto t'$.
9. Típusmegőrzés: ha $\cdot \vdash t : A$ és $t \longmapsto t'$, akkor $\cdot \vdash t' : A$.