A matematika megalapozása típuselmélettel

Kaposi Ambrus

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Az informatika napjainkban – modern megközelítések és kapcsolódások.
Az MTA Informatika- és Számítástudományi Bizottság rendezvénye

Budapest
2026. január 8.

Tartalom

Írásos változat:
Kaposi Ambrus, Molnár Zoltán. Mi az a típuselmélet és mire jó?
Érintő Elektronikus Matematikai Lapok

Számítógépes bizonyításellenőrző (proof assistant)

- A matematikust segíti a bizonyítás leírásában és ellenőrzi a bizonyítást

Számítógépes bizonyításellenőrző (proof assistant)

- A matematikust segíti a bizonyítás leírásában és ellenőrzi a bizonyítást
  - $\leftrightarrow$ automata tételbizonyítók (SMT solvers, pl. Z3)

Számítógépes bizonyításellenőrző (proof assistant)

- A matematikust segíti a bizonyítás leírásában és ellenőrzi a bizonyítást
  - $\leftrightarrow$ automata tételbizonyítók (SMT solvers, pl. Z3)
  - Példák:

Agda Idris Isabelle LEAN THEOREM PROVER ROCQ

Számítógépes bizonyításellenőrző (proof assistant)

- A matematikust segíti a bizonyítás leírásában és ellenőrzi a bizonyítást
  - $\leftrightarrow$ automata tételbizonyítók (SMT solvers, pl. Z3)
  - Példák:

- Kik használják ezeket?

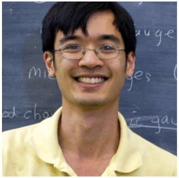
Felhasználó: Vladimir Voevodsky

- 1989. Voevodskii, Kapranov. ∞-groupoids as a model for a homotopy category. Communications of the Moscow Mathematical Society
- 1998. Simpson. Homotopy types of strict 3-groupoids
  - Cáfolja a fenti cikk fő eredményét
- 2013. Voevodsky elismeri a hibát
- Innentől azzal foglalkozik, hogy hogyan lehet számítógéppel bizonyításokat ellenőrizni, és Rocq-ban dolgozik

Felhasználó: Peter Scholze

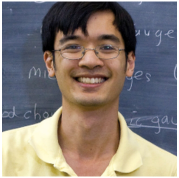
- Liquid tensor experiment: egy likvid vektorterekről szóló tétel (Clausen–Scholze)
  - 2020 dec. Scholze eddigi legfontosabb tétele, nem teljesen biztos a helyességében, még senki sem ellenőrizte
  - 2021 jún. Lean-ben formalizálták a kérdéses részeket (Johan Commelin vezetésével)
  - 2022 júl. Teljesen kész a formalizálás.
  - Tanulságok: egyszerűsödött a bizonyítás, Scholze megértette, mitől működik

Felhasználó: Terence Tao

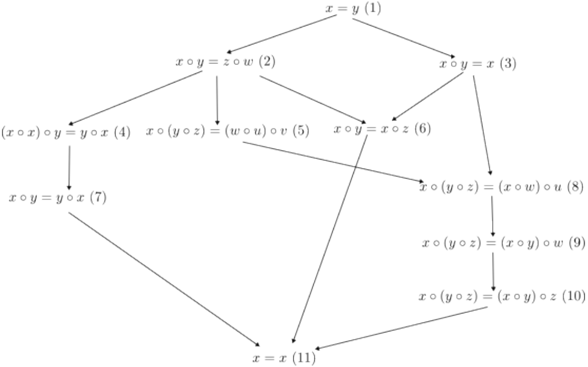


- Magma: egy A halmaz és egy $\circ : A \times A \to A$ függvény
- Katalogizálni az egyenlőségeket, melyekben max. 5 változó van. Például:
  - $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$
  - $x = y$
  - $x = x$

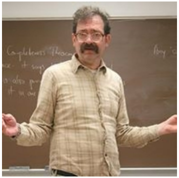
Felhasználó: Terence Tao



- Magma: egy A halmaz és egy $\circ : A \times A \to A$ függvény
- Katalogizálni az egyenlőségeket, melyekben max. 5 változó van.



Felhasználó: Randall Holmes



- 2010. Bebizonyította Quine „New Foundations" halmazelméletének konzisztenciáját
- Nem bírta kivárni a bírálókat
- 2015. Sky Wilshaw segítségével Lean-ben formalizálta

Felhasználó: Kevin Buzzard

- Elégedetlen, hogy 17 évet kell várni, hogy az Annals of Mathematics visszavonjon egy hibás cikket
- 2017. Az Imperial College-ben péntek esténként formalizáló klubot alapított, azóta ez nemzetközivé vált, és a teljes BSc/MSc szintű matematikát belekódolták Lean-be

Formális nyelv a számítógépes bizonyításellenőrzők mögött

- Elsőrendű logika és halmazelmélet: Mizar
- Egyszerű típuselmélet: Isabelle
- Martin-Löf típuselmélete: Agda Idris LEAN THEOREM PROVER ROCQ

Halmazelmélet és típuselmélet

$t \in A$ $\qquad\qquad$ $t : A$

Halmazelmélet és típuselmélet

$t \in A$

$t : A$

$f : A \to B$

Absztrakció

- halmazelmélet $\sim$ assembly,
  típuselmélet $\sim$ Java

Absztrakció

- halmazelmélet $\sim$ assembly,
  típuselmélet $\sim$ Java
- Benacerraf. What Numbers Could not Be (1965)

Absztrakció

- halmazelmélet $\sim$ assembly,
  típuselmélet $\sim$ Java
- Benacerraf. What Numbers Could not Be (1965)
  - Zermelo: $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \ldots$

Absztrakció

- halmazelmélet $\sim$ assembly,
  típuselmélet $\sim$ Java
- Benacerraf. What Numbers Could not Be (1965)
  - Zermelo: $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \ldots$
  - Neumann: $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots$

Absztrakció

- halmazelmélet $\sim$ assembly,
  típuselmélet $\sim$ Java
- Benacerraf. What Numbers Could not Be (1965)
  - Zermelo: $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \ldots$
  - Neumann: $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots$
  - A kettőt megkülönbözteti a $0 \in 2$ állítás.

Absztrakció

- halmazelmélet $\sim$ assembly,
  típuselmélet $\sim$ Java
- Benacerraf. What Numbers Could not Be (1965)
  - Zermelo: $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \ldots$
  - Neumann: $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots$
  - A kettőt megkülönbözteti a $0 \in 2$ állítás.
- Bourbaki: ha két halmaz bijekcióban áll, nem szabad megkülönböztetni őket

Absztrakció

- halmazelmélet $\sim$ assembly,
  típuselmélet $\sim$ Java
- Benacerraf. What Numbers Could not Be (1965)
  - Zermelo: $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \ldots$
  - Neumann: $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots$
  - A kettőt megkülönbözteti a $0 \in 2$ állítás.
- Bourbaki: ha két halmaz bijekcióban áll, nem szabad megkülönböztetni őket
  - Általánosabban: izomorf struktúrák megkülönböztethetetlenek.

Absztrakció

- halmazelmélet $\sim$ assembly,
  típuselmélet $\sim$ Java
- Benacerraf. What Numbers Could not Be (1965)
  - Zermelo: $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \ldots$
  - Neumann: $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots$
  - A kettőt megkülönbözteti a $0 \in 2$ állítás.
- Bourbaki: ha két halmaz bijekcióban áll, nem szabad megkülönböztetni őket
  - Általánosabban: izomorf struktúrák megkülönböztethetetlenek.
    Pl. ha $M \simeq N$ monoidok, és az egyik kommutatív, a másik is

Absztrakció

- halmazelmélet $\sim$ assembly,
  típuselmélet $\sim$ Java
- Benacerraf. What Numbers Could not Be (1965)
  - Zermelo: $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \ldots$
  - Neumann: $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots$
  - A kettőt megkülönbözteti a $0 \in 2$ állítás.
- Bourbaki: ha két halmaz bijekcióban áll, nem szabad megkülönböztetni őket
  - Általánosabban: izomorf struktúrák megkülönböztethetetlenek.
    Pl. ha $M \simeq N$ monoidok, és az egyik kommutatív, a másik is
- A típuselmélet nyelve ezt úgy éri el, hogy bizonyos dolgok nem kimondhatók: nincs $\in$, $\cup$, $\cap$

Absztrakció

- halmazelmélet $\sim$ assembly,
  típuselmélet $\sim$ Java
- Benacerraf. What Numbers Could not Be (1965)
  - Zermelo: $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \dots$
  - Neumann: $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \dots$
  - A kettőt megkülönbözteti a $0 \in 2$ állítás.
- Bourbaki: ha két halmaz bijekcióban áll, nem szabad megkülönböztetni őket
  - Általánosabban: izomorf struktúrák megkülönböztethetetlenek. Pl. ha $M \simeq N$ monoidok, és az egyik kommutatív, a másik is
- A típuselmélet nyelve ezt úgy éri el, hogy bizonyos dolgok nem kimondhatók: nincs $\in$, $\cup$, $\cap$
- Lehet-e ilyen megszorított környezetben formalizálni a matematikát?

Absztrakció

- halmazelmélet $\sim$ assembly,
  típuselmélet $\sim$ Java
- Benacerraf. What Numbers Could not Be (1965)
  - Zermelo: $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \ldots$
  - Neumann: $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots$
  - A kettőt megkülönbözteti a $0 \in 2$ állítás.
- Bourbaki: ha két halmaz bijekcióban áll, nem szabad megkülönböztetni őket
  - Általánosabban: izomorf struktúrák megkülönböztethetetlenek.
    Pl. ha $M \simeq N$ monoidok, és az egyik kommutatív, a másik is
- A típuselmélet nyelve ezt úgy éri el, hogy bizonyos dolgok nem kimondhatók: nincs $\in$, $\cup$, $\cap$
- Lehet-e ilyen megszorított környezetben formalizálni a matematikát?
  - Hasonló próbálkozás volt a Principia Mathematica...

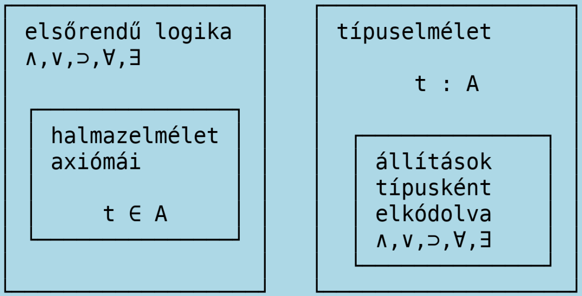
Absztrakció

- halmazelmélet $\sim$ assembly,
  típuselmélet $\sim$ Java
- Benacerraf. What Numbers Could not Be (1965)
  - Zermelo: $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \dots$
  - Neumann: $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \dots$
  - A kettőt megkülönbözteti a $0 \in 2$ állítás.
- Bourbaki: ha két halmaz bijekcióban áll, nem szabad megkülönböztetni őket
  - Általánosabban: izomorf struktúrák megkülönböztethetetlenek.
    Pl. ha $M \simeq N$ monoidok, és az egyik kommutatív, a másik is
- A típuselmélet nyelve ezt úgy éri el, hogy bizonyos dolgok nem kimondhatók: nincs $\in$, $\cup$, $\cap$
- Lehet-e ilyen megszorított környezetben formalizálni a matematikát?
  - Hasonló próbálkozás volt a Principia Mathematica...
  - Igen: Kevin Buzzard által vezetett Lean mathlib implementáció

Absztrakció

- halmazelmélet $\sim$ assembly,
  típuselmélet $\sim$ Java
- Benacerraf. What Numbers Could not Be (1965)
  - Zermelo: $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \ldots$
  - Neumann: $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots$
  - A kettőt megkülönbözteti a $0 \in 2$ állítás.
- Bourbaki: ha két halmaz bijekcióban áll, nem szabad megkülönböztetni őket
  - Általánosabban: izomorf struktúrák megkülönböztethetetlenek. Pl. ha $M \simeq N$ monoidok, és az egyik kommutatív, a másik is
- A típuselmélet nyelve ezt úgy éri el, hogy bizonyos dolgok nem kimondhatók: nincs $\in$, $\cup$, $\cap$
- Lehet-e ilyen megszorított környezetben formalizálni a matematikát?
  - Hasonló próbálkozás volt a Principia Mathematica...
  - Igen: Kevin Buzzard által vezetett Lean mathlib implementáció
- Szinonímák az absztrakcióra: reprezentáció-függetlenség, strukturalizmus, parametricitás, uniformitás, természetesség, információ elrejtése

Technikai különbségek



Technikai különbségek

elsőrendű logika
∧,∨,⊃,∀,∃

halmazelmélet
axiómái

t ∈ A

típuselmélet

t : A

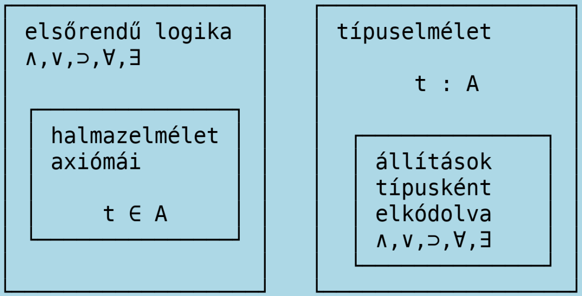
állítások
típusként
elkódolva
∧,∨,⊃,∀,∃

Néhány példa:

$0 \in 2$ állítás

$0 : 2$ nyelvtanilag hibás

Technikai különbségek



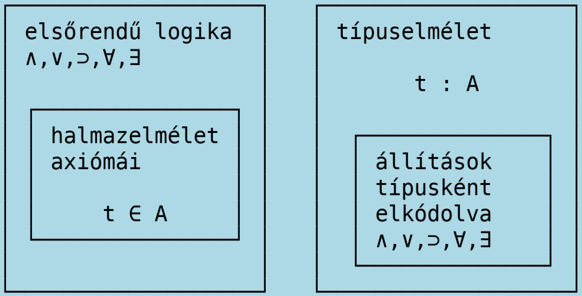
Néhány példa:

$0 \in 2$ állítás

$1 \in \forall$ nyelvtanilag hibás

$0 : 2$ nyelvtanilag hibás

Technikai különbségek



Néhány példa:

$0 \in 2$ állítás

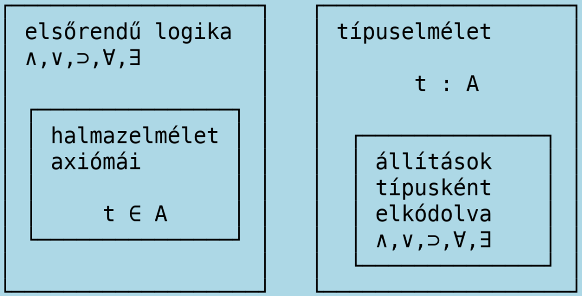
$1 \in \forall$ nyelvtanilag hibás

$t \in A$ dinamikus információ

$0 : 2$ nyelvtanilag hibás

$t : A$ statikus információ

Technikai különbségek



Néhány példa:

$0 \in 2$ állítás

$1 \in \forall$ nyelvtanilag hibás

$t \in A$ dinamikus információ

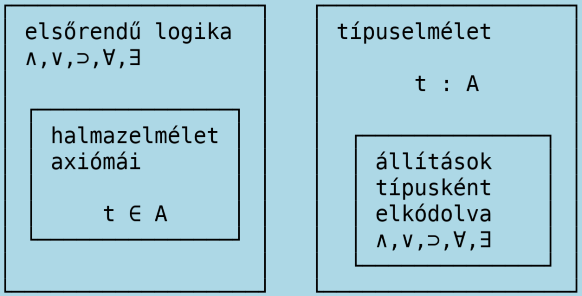
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

$0 : 2$ nyelvtanilag hibás

$t : A$ statikus információ

$n : \mathbb{N}$, de $n : \mathbb{Z}$ nem teljesül

Technikai különbségek



Néhány példa:

$0 \in 2$ állítás	$0 : 2$ nyelvtanilag hibás
$1 \in \forall$ nyelvtanilag hibás	
$t \in A$ dinamikus információ	$t : A$ statikus információ
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$	$n : \mathbb{N}$, de $n : \mathbb{Z}$ nem teljesül
részhalmaz, karakterisztikus függvény	csak karakterisztikus függvény,
	pl. $\mathsf{isNonNeg} : \mathbb{Z} \to \mathsf{Bool}$

Konstruktivitás

- Klasszikus logika: kizárt harmadik elve (minden A állításra $A \vee \neg A$), kiválasztási axióma

Konstruktivitás

- Klasszikus logika: kizárt harmadik elve (minden A állításra $A \vee \neg A$), kiválasztási axióma
- A típuselmélet általánosabb, lehetünk konstruktívak és klasszikusak is

Konstruktivitás

- Klasszikus logika: kizárt harmadik elve (minden A állításra $A \vee \neg A$), kiválasztási axióma
- A típuselmélet általánosabb, lehetünk konstruktívak és klasszikusak is
- Ha nem használjuk a fenti klasszikus elveket, akkor a típuselmélet axióma-mentes!

Konstruktivitás

- Klasszikus logika: kizárt harmadik elve (minden A állításra $A \vee \neg A$), kiválasztási axióma
- A típuselmélet általánosabb, lehetünk konstruktívak és klasszikusak is
- Ha nem használjuk a fenti klasszikus elveket, akkor a típuselmélet axióma-mentes!
  - $\forall\, x, y \in \mathbb{N}.\, \exists\, z \in \mathbb{N}.\, (z|x) \wedge (z|y) \wedge \forall\, z' \in \mathbb{N}.\, ((z'|x) \wedge (z'|y)) \supset z' \leq z$

    $\Pi x, y : \mathbb{N}.\, \Sigma z : \mathbb{N}.\, (z|x) \times (z|y) \times \Pi z' : \mathbb{N}.\, ((z'|x) \times (z'|y)) \to z' \leq z$

Konstruktivitás

- Klasszikus logika: kizárt harmadik elve (minden A állításra $A \vee \neg A$), kiválasztási axióma
- A típuselmélet általánosabb, lehetünk konstruktívak és klasszikusak is
- Ha nem használjuk a fenti klasszikus elveket, akkor a típuselmélet axióma-mentes!
  - $\forall x, y \in \mathbb{N}.\, \exists z \in \mathbb{N}.\, (z|x) \wedge (z|y) \wedge \forall z' \in \mathbb{N}.\, ((z'|x) \wedge (z'|y)) \supset z' \leq z$

    $\Pi x, y : \mathbb{N}.\, \Sigma z : \mathbb{N}.\, (z|x) \times (z|y) \times \Pi z' : \mathbb{N}.\, ((z'|x) \times (z'|y)) \to z' \leq z$
  - $2 = 2$ bizonyítása bizonyítja $(1 + 1 = 2)$-t is.

Konstruktivitás

- Klasszikus logika: kizárt harmadik elve (minden A állításra $A \vee \neg A$), kiválasztási axióma
- A típuselmélet általánosabb, lehetünk konstruktívak és klasszikusak is
- Ha nem használjuk a fenti klasszikus elveket, akkor a típuselmélet axióma-mentes!
  - $\forall x, y \in \mathbb{N}.\, \exists z \in \mathbb{N}.\, (z|x) \wedge (z|y) \wedge \forall z' \in \mathbb{N}.\, ((z'|x) \wedge (z'|y)) \supset z' \leq z$

    $\Pi x, y : \mathbb{N}.\, \Sigma z : \mathbb{N}.\, (z|x) \times (z|y) \times \Pi z' : \mathbb{N}.\, ((z'|x) \times (z'|y)) \to z' \leq z$
  - $2 = 2$ bizonyítása bizonyítja $(1 + 1 = 2)$-t is.
- Bishop 1967-ben megmutatta, hogy az analízist fel lehet építeni konstruktívan is.

Konstruktivitás

- Klasszikus logika: kizárt harmadik elve (minden A állításra $A \vee \neg A$), kiválasztási axióma
- A típuselmélet általánosabb, lehetünk konstruktívak és klasszikusak is
- Ha nem használjuk a fenti klasszikus elveket, akkor a típuselmélet axióma-mentes!
  - $\forall x, y \in \mathbb{N}.\, \exists z \in \mathbb{N}.\, (z|x) \wedge (z|y) \wedge \forall z' \in \mathbb{N}.\, ((z'|x) \wedge (z'|y)) \supset z' \leq z$

    $\Pi x, y : \mathbb{N}.\, \Sigma z : \mathbb{N}.\, (z|x) \times (z|y) \times \Pi z' : \mathbb{N}.\, ((z'|x) \times (z'|y)) \to z' \leq z$
  - $2 = 2$ bizonyítása bizonyítja $(1 + 1 = 2)$-t is.
- Bishop 1967-ben megmutatta, hogy az analízist fel lehet építeni konstruktívan is.
  - Óvatosnak kell lenni. Pl. f injektivitása: $x \neq y \to f(x) \neq f(y)$ helyett $f(x) = f(y) \to x = y$

Extenzionalitás

- Halmazelmélet: ha két halmaznak ugyanazok az elemei, akkor egyenlők

Extenzionalitás

- Halmazelmélet: ha két halmaznak ugyanazok az elemei, akkor egyenlők
- Típuselméletben ez értelmetlen (egy term csak egy típusba tartozik)

Extenzionalitás

- Halmazelmélet: ha két halmaznak ugyanazok az elemei, akkor egyenlők
- Típuselméletben ez értelmetlen (egy term csak egy típusba tartozik)
- Helyette: Voevodsky univalence axiómája: $(A \cong B) \to (A = B)$

Extenzionalitás

- Halmazelmélet: ha két halmaznak ugyanazok az elemei, akkor egyenlők
- Típuselméletben ez értelmetlen (egy term csak egy típusba tartozik)
- Helyette: Voevodsky univalence axiómája: $(A \cong B) \to (A = B)$
- Következmény: az egyenlőség már nem feltétlenül *állítás*!

Extenzionalitás

- Halmazelmélet: ha két halmaznak ugyanazok az elemei, akkor egyenlők
- Típuselméletben ez értelmetlen (egy term csak egy típusba tartozik)
- Helyette: Voevodsky univalence axiómája: $(A \cong B) \to (A = B)$
- Következmény: az egyenlőség már nem feltétlenül *állítás*!

A típus állítás, ha minden $a, a' : A$-ra az $a =_A a'$ típusnak van eleme

A típus halmaz, ha minden $a, a' : A$-ra az $a =_A a'$ állítás

A típus groupoid, ha minden $a, a' : A$-ra az $a =_A a'$ halmaz

$\ldots$

Extenzionalitás

- Halmazelmélet: ha két halmaznak ugyanazok az elemei, akkor egyenlők
- Típuselméletben ez értelmetlen (egy term csak egy típusba tartozik)
- Helyette: Voevodsky univalence axiómája: $(A \cong B) \to (A = B)$
- Következmény: az egyenlőség már nem feltétlenül *állítás*!

  A típus állítás, ha minden $a, a' : A$-ra az $a =_A a'$ típusnak van eleme
  A típus halmaz, ha minden $a, a' : A$-ra az $a =_A a'$ állítás
  A típus groupoid, ha minden $a, a' : A$-ra az $a =_A a'$ halmaz
  $\dots$

- Példák:
  Állítások: $2 =_{\mathbb{N}} 3$, $\Pi x : \mathbb{N}.\, x + 1 =_{\mathbb{N}} 1 + x$, $\Pi x : \mathbb{N}.\, (x = 1) \times (x = 2)$

Extenzionalitás

- Halmazelmélet: ha két halmaznak ugyanazok az elemei, akkor egyenlők
- Típuselméletben ez értelmetlen (egy term csak egy típusba tartozik)
- Helyette: Voevodsky univalence axiómája: $(A \cong B) \to (A = B)$
- Következmény: az egyenlőség már nem feltétlenül *állítás*!

  A típus állítás, ha minden $a, a' : A$-ra az $a =_A a'$ típusnak van eleme

  A típus halmaz, ha minden $a, a' : A$-ra az $a =_A a'$ állítás

  A típus groupoid, ha minden $a, a' : A$-ra az $a =_A a'$ halmaz

  ...

- Példák:
  Állítások: $2 =_{\mathbb{N}} 3$, $\Pi x : \mathbb{N}.\, x + 1 =_{\mathbb{N}} 1 + x$, $\Pi x : \mathbb{N}.\, (x = 1) \times (x = 2)$
  Halmazok: $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\{0, 1\}$

Extenzionalitás

- Halmazelmélet: ha két halmaznak ugyanazok az elemei, akkor egyenlők
- Típuselméletben ez értelmetlen (egy term csak egy típusba tartozik)
- Helyette: Voevodsky univalence axiómája: $(A \cong B) \to (A = B)$
- Következmény: az egyenlőség már nem feltétlenül *állítás*!

  A típus állítás, ha minden $a, a' : A$-ra az $a =_A a'$ típusnak van eleme
  A típus halmaz, ha minden $a, a' : A$-ra az $a =_A a'$ állítás
  A típus groupoid, ha minden $a, a' : A$-ra az $a =_A a'$ halmaz
  $\dots$

- Példák:
  Állítások: $2 =_{\mathbb{N}} 3$, $\Pi x : \mathbb{N}.\, x + 1 =_{\mathbb{N}} 1 + x$, $\Pi x : \mathbb{N}.\, (x = 1) \times (x = 2)$
  Halmazok: $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\{0, 1\}$
  Groupoidok: halmaz, magma, csoport, gyűrű

Extenzionalitás

- Halmazelmélet: ha két halmaznak ugyanazok az elemei, akkor egyenlők
- Típuselméletben ez értelmetlen (egy term csak egy típusba tartozik)
- Helyette: Voevodsky univalence axiómája: $(A \cong B) \to (A = B)$
- Következmény: az egyenlőség már nem feltétlenül *állítás*!

  A típus állítás, ha minden $a, a' : A$-ra az $a =_A a'$ típusnak van eleme

  A típus halmaz, ha minden $a, a' : A$-ra az $a =_A a'$ állítás

  A típus groupoid, ha minden $a, a' : A$-ra az $a =_A a'$ halmaz

  ...

- Példák:
  Állítások: $2 =_{\mathbb{N}} 3$, $\Pi x : \mathbb{N}. x + 1 =_{\mathbb{N}} 1 + x$, $\Pi x : \mathbb{N}. (x = 1) \times (x = 2)$
  Halmazok: $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\{0, 1\}$
  Groupoidok: halmaz, magma, csoport, gyűrű
  $e, e' : (\{0, 1\} =_{\text{halmaz}} \{0, 1\})$

Típuselmélet és univalence

- A típuselmélet megvalósítja Benacerraf álmát: a matematika olyan megalapozása, amelyben lehet reprezentáció-függetlenül érvelni

Típuselmélet és univalence

- A típuselmélet megvalósítja Benacerraf álmát: a matematika olyan megalapozása, amelyben lehet reprezentáció-függetlenül érvelni
- Voevodsky univalence axiómája $\big((A \cong B) \to (A = B)\big)$ ezt belsővé teszi

Típuselmélet és univalence

- A típuselmélet megvalósítja Benacerraf álmát: a matematika olyan megalapozása, amelyben lehet reprezentáció-függetlenül érvelni
- Voevodsky univalence axiómája $\big((A \cong B) \to (A = B)\big)$ ezt belsővé teszi
- Ez azonban axióma:

Típuselmélet és univalence

- A típuselmélet megvalósítja Benacerraf álmát: a matematika olyan megalapozása, amelyben lehet reprezentáció-függetlenül érvelni
- Voevodsky univalence axiómája $\big((A \cong B) \to (A = B)\big)$ ezt belsővé teszi
- Ez azonban axióma:
  - ✓ absztrakció
  - ✓ extenzionalitás
  - X konstruktivitás
- Coquand és mtsai kidolgozták a típuselmélet ∞-groupoidokra épülő modelljét, és erre alapozva megadták a kubikális típuselmélet
  - ✓ absztrakció
  - ✓ extenzionalitás
  - ✓ konstruktivitás
  - X A típuselmélet megértéséhez kellenek a ∞-dimenziós absztrakt terek

Típuselmélet és univalence

- A típuselmélet megvalósítja Benacerraf álmát: a matematika olyan megalapozása, amelyben lehet reprezentáció-függetlenül érvelni
- Voevodsky univalence axiómája $\big((A \cong B) \to (A = B)\big)$ ezt belsővé teszi
- Ez azonban axióma:
  - ✓ absztrakció
  - ✓ extenzionalitás
  - X konstruktivitás
- Coquand és mtsai kidolgozták a típuselmélet ∞-groupoidokra épülő modelljét, és erre alapozva megadták a kubikális típuselmélet
  - ✓ absztrakció
  - ✓ extenzionalitás
  - ✓ konstruktivitás
  - X A típuselmélet megértéséhez kellenek a ∞-dimenziós absztrakt terek
- Saját kutatás (folyamatban): Higher Observational Type Theory
  - ✓ absztrakció
  - ✓ extenzionalitás
  - ✓ konstruktivitás
  - ✓ egyszerű szabályok, prematematikai intuíciókkal indokolhatók