

Szintaxis:

$$\begin{aligned} A, A', A_1, \dots &\in \text{Ty} ::= \text{Nat} \mid A_1 \rightarrow A_2 \\ t, t', t_1, \dots &\in \text{Tm} ::= x \mid \text{zero} \mid \text{suc } t \mid \text{rec } t_0 x.t_1 t \mid \lambda^A x.t \mid t t' \\ \Gamma, \Gamma', \dots &\in \text{Con} ::= \cdot \mid \Gamma, x : A \end{aligned}$$

Környezetek kezelésére vonatkozó szabályok:

$$\begin{aligned} \text{dom}(\cdot) &:= \{\} \\ \text{dom}(\Gamma, x : A) &:= \{x\} \cup \text{dom}(\Gamma) \\ \overline{\cdot \text{wf}} & \end{aligned} \tag{1}$$

$$\frac{\Gamma \text{wf} \quad x \notin \text{dom}(\Gamma)}{\Gamma, x : A \text{wf}} \tag{2}$$

$$\frac{\Gamma \text{wf} \quad x \notin \text{dom}(\Gamma)}{(x : A) \in \Gamma, x : A} \tag{3}$$

$$\frac{(x : A) \in \Gamma \quad y \notin \text{dom}(\Gamma)}{(x : A) \in \Gamma, y : A'} \tag{4}$$

Termek típusozási szabályai:

$$\frac{(x : A) \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : A} \tag{5}$$

$$\frac{\Gamma \text{wf}}{\Gamma \vdash \text{zero} : \text{Nat}} \tag{6}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : \text{Nat}}{\Gamma \vdash \text{suc } t : \text{Nat}} \tag{7}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t_0 : A \quad \Gamma, x : A \vdash t_1 : A \quad \Gamma \vdash t : \text{Nat}}{\Gamma \vdash \text{rec } t_0 x.t_1 t : A} \tag{8}$$

$$\frac{\Gamma, x : A_1 \vdash t : A_2}{\Gamma \vdash \lambda^{A_1} x.t : A_1 \rightarrow A_2} \tag{9}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : A_1 \rightarrow A_2 \quad \Gamma \vdash t_1 : A_1}{\Gamma \vdash t t_1 : A_2} \tag{10}$$

Operációs szemantika:

$$\overline{\text{zero val}} \tag{11}$$

$$\frac{t \text{ val}}{\text{suc } t \text{ val}} \tag{12}$$

$$\frac{t \mapsto t'}{\text{suc } t \mapsto \text{suc } t'} \tag{13}$$

$$\frac{t \mapsto t'}{\text{rec } t_0 x.t_1 t \mapsto \text{rec } t_0 x.t_1 t'} \tag{14}$$

$$\overline{\text{rec } t_0 x.t_1 \text{ zero} \mapsto t_0} \tag{15}$$

$$\frac{t \text{ val}}{\text{rec } t_0 x.t_1 (\text{suc } t) \mapsto t_1[x \mapsto \text{rec } t_0 x.t_1 t]} \tag{16}$$

$$\overline{\lambda^A x.t \text{ val}} \tag{17}$$

$$\frac{t \mapsto t'}{t t_1 \mapsto t' t_1} \tag{18}$$

$$\frac{t \text{ val} \quad t_1 \mapsto t'_1}{t t_1 \mapsto t t'_1} \tag{19}$$

$$\frac{t_1 \text{ val}}{(\lambda^A x. t_2) t_1 \mapsto t_2[x \mapsto t_1]} \quad (20)$$

Kiértékelés nulla vagy több lépésben:

$$\overline{t \mapsto^* t} \quad (21)$$

$$\frac{t \mapsto t' \quad t' \mapsto^* t''}{t \mapsto^* t''} \quad (22)$$

Tételek:

1. Unicitás: ha $\Gamma \vdash t : A$ és $\Gamma \vdash t : A'$, akkor $A = A'$.
2. Környezet permutálhatósága: ha $\Gamma \vdash t : A$ és Γ' a Γ egy permutációja, akkor $\Gamma' \vdash t : A$.
3. Gyengítés: ha $\Gamma \vdash t : A$ és $x \notin \text{dom}(\Gamma)$, akkor $\Gamma, x : A' \vdash t : A$.
4. Helyettesítési lemma: ha $\Gamma \vdash t : A$ és $\Gamma, x : A \vdash t' : A'$, akkor $\Gamma \vdash t'[x \mapsto t] : A'$.
5. Dekompozíció: ha $\Gamma \vdash t'[x \mapsto t] : A'$, akkor minden olyan A -ra, melyre $\Gamma \vdash t : A$, $\Gamma, x : A \vdash t' : A'$.
6. Nincs olyan t , hogy $t \text{ val}$ és $t \mapsto t'$
7. Determinisztikusság: Ha $t \mapsto t'$ és $t \mapsto t''$, akkor $t' = t''$.
8. Típusmegőrzés: ha $\cdot \vdash t : A$, akkor vagy $t \text{ val}$, vagy létezik olyan t' , hogy $t \mapsto t'$.
9. Haladás: ha $\cdot \vdash t : A$ és $t \mapsto t'$, akkor $\cdot \vdash t' : A$.