

Szintaxis:

$$A, A', A_1, \dots \in \text{Ty} ::= \text{Nat} \mid \text{Empty} \mid A_1 + A_2$$

$$t, t', t_1, \dots \in \text{Tm} ::= x \mid \text{zero} \mid \text{suc } t \mid \text{rec } t_0 x.t_1 t \mid \text{abort}^A t \mid \text{inj}_1^{A_1, A_2} t \mid \text{inj}_2^{A_1, A_2} t \mid \text{case } t x_1.t_1 x_2.t_2$$

$$\Gamma, \Gamma', \dots \in \text{Con} ::= \cdot \mid \Gamma, x : A$$

Környezetek kezelésére vonatkozó szabályok:

$$\text{dom}(\cdot) := \{\}$$

$$\text{dom}(\Gamma, x : A) := \{x\} \cup \text{dom}(\Gamma)$$

$$\overline{\cdot \text{wf}} \quad (1)$$

$$\frac{\Gamma \text{wf} \quad x \notin \text{dom}(\Gamma)}{\Gamma, x : A \text{wf}} \quad (2)$$

$$\frac{\Gamma \text{wf} \quad x \notin \text{dom}(\Gamma)}{(x : A) \in \Gamma, x : A} \quad (3)$$

$$\frac{(x : A) \in \Gamma \quad y \notin \text{dom}(\Gamma)}{(x : A) \in \Gamma, y : A'} \quad (4)$$

Termek típusozási szabályai:

$$\frac{(x : A) \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : A} \quad (5)$$

$$\frac{\Gamma \text{wf}}{\Gamma \vdash \text{zero} : \text{Nat}} \quad (6)$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : \text{Nat}}{\Gamma \vdash \text{suc } t : \text{Nat}} \quad (7)$$

$$\frac{\Gamma \vdash t_0 : A \quad \Gamma, x : A \vdash t_1 : A \quad \Gamma \vdash t : \text{Nat}}{\Gamma \vdash \text{rec } t_0 x.t_1 t : A} \quad (8)$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : \text{Empty}}{\Gamma \vdash \text{abort}^A t : A} \quad (9)$$

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 : A_1}{\Gamma \vdash \text{inj}_1^{A_1, A_2} t_1 : A_1 + A_2} \quad (10)$$

$$\frac{\Gamma \vdash t_2 : A_2}{\Gamma \vdash \text{inj}_2^{A_1, A_2} t_2 : A_1 + A_2} \quad (11)$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : A_1 + A_2 \quad \Gamma, x_1 : A_1 \vdash t_1 : A \quad \Gamma, x_2 : A_2 \vdash t_2 : A}{\Gamma \vdash \text{case } t x_1.t_1 x_2.t_2 : A} \quad (12)$$

Operációs szemantika:

$$\overline{\text{zero val}} \quad (13)$$

$$\frac{t \text{ val}}{\text{suc } t \text{ val}} \quad (14)$$

$$\frac{t \mapsto t'}{\text{suc } t \mapsto \text{suc } t'} \quad (15)$$

$$\frac{t \mapsto t'}{\text{rec } t_0 x.t_1 t \mapsto \text{rec } t_0 x.t_1 t'} \quad (16)$$

$$\overline{\text{rec } t_0 x.t_1 \text{ zero} \mapsto t_0} \quad (17)$$

$$\frac{t \text{ val}}{\text{rec } t_0 x.t_1 (\text{suc } t) \mapsto t_1[x \mapsto \text{rec } t_0 x.t_1 t]} \quad (18)$$

$$\frac{t \text{ val}}{\text{inj}_1^{A_1, A_2} t \text{ val}} \quad (19)$$

$$\frac{t \text{ val}}{\text{inj}_2^{A_1, A_2} t \text{ val}} \quad (20)$$

$$\frac{t \mapsto t'}{\text{abort}^A t \mapsto \text{abort}^A t'} \quad (21)$$

$$\frac{t \mapsto t'}{\text{inj}_1 t \mapsto \text{inj}_1 t'} \quad (22)$$

$$\frac{t \mapsto t'}{\text{inj}_2 t \mapsto \text{inj}_2 t'} \quad (23)$$

$$\frac{t \mapsto t'}{\text{case } t \ x_1.t_1 \ x_2.t_2 \mapsto \text{case } t' \ x_1.t_1 \ x_2.t_2} \quad (24)$$

$$\frac{t \text{ val}}{\text{case } (\text{inj}_1^{A_1, A_2} t) \ x_1.t_1 \ x_2.t_2 \mapsto t_1[x_1 \mapsto t]} \quad (25)$$

$$\frac{t \text{ val}}{\text{case } (\text{inj}_2^{A_1, A_2} t) \ x_1.t_1 \ x_2.t_2 \mapsto t_2[x_2 \mapsto t]} \quad (26)$$

Kiértékelés nulla vagy több lépésben:

$$\overline{t \mapsto^* t} \quad (27)$$

$$\frac{t \mapsto t' \quad t' \mapsto^* t''}{t \mapsto^* t''} \quad (28)$$

Tételek:

1. Unicitás: ha $\Gamma \vdash t : A$ és $\Gamma \vdash t : A'$, akkor $A = A'$.
2. Környezet permutálhatósága: ha $\Gamma \vdash t : A$ és Γ' a Γ egy permutációja, akkor $\Gamma' \vdash t : A$.
3. Gyengítés: ha $\Gamma \vdash t : A$ és $x \notin \text{dom}(\Gamma)$, akkor $\Gamma, x : A' \vdash t : A$.
4. Helyettesítési lemma: ha $\Gamma \vdash t : A$ és $\Gamma, x : A \vdash t' : A'$, akkor $\Gamma \vdash t'[x \mapsto t] : A'$.
5. Dekompozíció: ha $\Gamma \vdash t'[x \mapsto t] : A'$, akkor minden olyan A -ra, melyre $\Gamma \vdash t : A$, $\Gamma, x : A \vdash t' : A'$.
6. Nincs olyan t , hogy $t \text{ val}$ és $t \mapsto t'$
7. Determinisztikusság: Ha $t \mapsto t'$ és $t \mapsto t''$, akkor $t' = t''$.
8. Haladás: ha $\cdot \vdash t : A$, akkor vagy $t \text{ val}$, vagy létezik olyan t' , hogy $t \mapsto t'$.
9. Típusmegőrzés: ha $\cdot \vdash t : A$ és $t \mapsto t'$, akkor $\cdot \vdash t' : A$.