Az alábbi programozási nyelvvel foglalkozunk. Szintaxis:

$$\begin{array}{lll}
A, A', A_1, \ldots \in \mathsf{Ty} & ::= & \mathsf{Nat} \mid A_1 \Rightarrow A_2 \mid \mathsf{Unit} \mid A_1 \times A_2 \mid \mathsf{Empty} \mid A_1 + A_2 \\
e, e', e_1, \ldots \in \mathsf{Tm} & ::= & x \mid \mathsf{zero} \mid \mathsf{suc}\, e \mid \mathsf{rec}\, e_0\, x.e_1\, e \mid \lambda^A x.e \mid e\, e' \mid \mathsf{tt} \mid \langle e_1, e_2 \rangle \mid \mathsf{proj}_1\, e \mid \mathsf{proj}_2\, e \\
 & & \mid \mathsf{abort}^A\, e \mid \mathsf{inj_1}^{A_1,A_2}\, e \mid \mathsf{inj_2}^{A_1,A_2}\, e \mid \mathsf{case}\, e\, x_1.e_1\, x_2.e_2 \\
\Gamma, \Gamma', \ldots \in \mathsf{Con} & ::= & \cdot \mid \Gamma, x : A
\end{array}$$

Környezetek kezelésére vonatkozó szabályok:

$$\frac{}{\cdot\ \mathsf{wf}} \quad (1)$$

$$dom(\cdot) := \{\}$$

$$dom(\Gamma, x : A) := \{x\} \cup dom(\Gamma)$$

$$\frac{\Gamma\ \mathsf{wf} \qquad x \notin dom(\Gamma)}{\Gamma, x : A\ \mathsf{wf}} \quad (2)$$

$$\frac{\Gamma\ \mathsf{wf} \qquad x \notin dom(\Gamma)}{(x : A) \in \Gamma, x : A} \quad (3)$$

$$\frac{(x : A) \in \Gamma \qquad y \notin dom(\Gamma)}{(x : A) \in \Gamma, y : A'} \quad (4)$$

Kifejezések típusozási szabályai:

$$\frac{(x : A) \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : A} \quad (5)$$

$$\frac{\Gamma\ \mathsf{wf}}{\Gamma \vdash \mathsf{zero} : \mathsf{Nat}} \quad (6)$$

$$\frac{\Gamma \vdash e : \mathsf{Nat}}{\Gamma \vdash \mathsf{suc}\, e : \mathsf{Nat}} \quad (7)$$

$$\frac{\Gamma, x : A_1 \vdash e : A_2}{\Gamma \vdash \lambda^{A_1} x.e : A_1 \Rightarrow A_2} \quad (8)$$

$$\frac{\Gamma \vdash e : A_1 \Rightarrow A_2 \qquad \Gamma \vdash e_1 : A_1}{\Gamma \vdash e\, e_1 : A_2} \quad (9)$$

$$\frac{\Gamma\ \mathsf{wf}}{\Gamma \vdash \mathsf{tt} : \mathsf{Unit}} \quad (10)$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : A_1 \qquad \Gamma \vdash e_2 : A_2}{\Gamma \vdash \langle e_1, e_2 \rangle : A_1 \times A_2} \quad (11)$$

$$\frac{\Gamma \vdash e : A_1 \times A_2}{\Gamma \vdash \mathsf{proj}_1\, e : A_1} \quad (12)$$

$$\frac{\Gamma \vdash e : A_1 \times A_2}{\Gamma \vdash \mathsf{proj}_2\, e : A_2} \quad (13)$$

$$\frac{\Gamma \vdash e : \mathsf{Empty}}{\Gamma \vdash \mathsf{abort}^A\, e : A} \quad (14)$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : A_1}{\Gamma \vdash \mathsf{inj_1}^{A_1,A_2}\, e_1 : A_1 + A_2} \quad (15)$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_2 : A_2}{\Gamma \vdash \mathsf{inj_2}^{A_1,A_2}\, e_2 : A_1 + A_2} \quad (16)$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_0 : A \qquad \Gamma, x : A \vdash e_1 : A \qquad \Gamma \vdash e : \mathsf{Nat}}{\Gamma \vdash \mathsf{rec}\, e_0\, x.e_1\, e : A} \quad (17)$$

$$\frac{\Gamma \vdash e : A_1 + A_2 \qquad \Gamma, x_1 : A_1 \vdash e_1 : A \qquad \Gamma, x_2 : A_2 \vdash e_2 : A}{\Gamma \vdash \mathsf{case}\, e\, x_1.e_1\, x_2.e_2 : A} \quad (18)$$

Operációs szemantika:

$$\frac{}{\mathsf{zero}\ \mathsf{val}} \quad (19)$$

$$\frac{e\ \mathsf{val}}{\mathsf{suc}\, e\ \mathsf{val}} \quad (20)$$

$$\frac{}{\lambda^A x.e\ \mathsf{val}} \quad (21)$$

$$\frac{}{\mathsf{tt}\ \mathsf{val}} \quad (22)$$

$$\frac{e_1\ \mathsf{val} \qquad e_2\ \mathsf{val}}{\langle e_1, e_2 \rangle\ \mathsf{val}} \quad (23)$$

$$\frac{e\ \mathsf{val}}{\mathsf{inj_1}^{A_1,A_2}\, e\ \mathsf{val}} \quad (24)$$

$$\frac{e\ \mathsf{val}}{\mathsf{inj_2}^{A_1,A_2}\, e\ \mathsf{val}} \quad (25)$$

$$\frac{e \longmapsto e'}{\mathsf{suc}\, e \longmapsto \mathsf{suc}\, e'} \quad (26)$$

$$\frac{e \longmapsto e'}{\mathsf{rec}\, e_0\, x.e_1\, e \longmapsto \mathsf{rec}\, e_0\, x.e_1\, e'} \quad (27)$$

$$\frac{}{\mathsf{rec}\, e_0\, x.e_1\, \mathsf{zero} \longmapsto e_0} \quad (28)$$

$$\frac{e \longmapsto e'}{e\, e_1 \longmapsto e'\, e_1} \quad (29)$$

$$\frac{}{(\lambda^A x.e_2)\, e_1 \longmapsto e_2[x \mapsto e_1]} \quad (30)$$

$$\frac{e_1 \longmapsto e_1'}{\langle e_1, e_2 \rangle \longmapsto \langle e_1', e_2 \rangle} \quad (31)$$

$$\frac{e_1\ \mathsf{val} \qquad e_2 \longmapsto e_2'}{\langle e_1, e_2 \rangle \longmapsto \langle e_1, e_2' \rangle} \quad (32)$$

$$\frac{e \longmapsto e'}{\mathsf{proj}_1\, e \longmapsto \mathsf{proj}_1 e'} \quad (33)$$

$$\frac{e \longmapsto e'}{\mathsf{proj}_2\, e \longmapsto \mathsf{proj}_2 e'} \quad (34)$$

$$\frac{e_1\ \mathsf{val} \qquad e_2\ \mathsf{val}}{\mathsf{proj}_1\, \langle e_1, e_2 \rangle \longmapsto e_1} \quad (35)$$

$$\frac{e_1\ \mathsf{val} \qquad e_2\ \mathsf{val}}{\mathsf{proj}_2\, \langle e_1, e_2 \rangle \longmapsto e_2} \quad (36)$$

$$\frac{e \longmapsto e'}{\mathsf{abort}^A\, e \longmapsto \mathsf{abort}^A\, e'} \quad (37)$$

$$\frac{e \longmapsto e'}{\mathsf{inj}_1\, e \longmapsto \mathsf{inj}_1\, e'} \quad (38)$$

$$\frac{e \longmapsto e'}{\mathsf{inj}_2\, e \longmapsto \mathsf{inj}_2\, e'} \quad (39)$$

$$\frac{e\ \mathsf{val}}{\mathsf{rec}\, e_0\, x.e_1\, (\mathsf{suc}\, e) \longmapsto e_1[x \mapsto \mathsf{rec}\, e_0\, x.e_1\, e]} \quad (40)$$

$$\frac{e \longmapsto e'}{\mathsf{case}\, e\, x_1.e_1\, x_2.e_2 \longmapsto \mathsf{case}\, e'\, x_1.e_1\, x_2.e_2} \quad (41)$$

$$\frac{e\ \mathsf{val}}{\mathsf{case}\, (\mathsf{inj_1}^{A,A'}\, e)\, x_1.e_1\, x_2.e_2 \longmapsto e_1[x_1 \mapsto e]} \quad (42)$$

$$\frac{e\ \mathsf{val}}{\mathsf{case}\, (\mathsf{inj_2}^{A,A'}\, e)\, x_1.e_1\, x_2.e_2 \longmapsto e_2[x_2 \mapsto e]} \quad (43)$$

Kiértékelés nulla vagy több lépésben:

$$\frac{}{e \longmapsto^* e} \quad (44)$$

$$\frac{e \longmapsto e' \qquad e' \longmapsto^* e''}{e \longmapsto^* e''} \quad (45)$$

A feladatokban minden AST (absztakt szintaxisfa), ABT (absztrakt kötéses fa) és levezetés az 1. oldalon szereplő definíciókkal van megadva.

1. Az alábbi ABT-egyenlőségek közül melyek igazak? Karikázd be!

   a) $\lambda^{\mathsf{Nat}} x.\lambda^{\mathsf{Nat}\Rightarrow\mathsf{Nat}} y.y\,x = \lambda^{\mathsf{Nat}} y.\lambda^{\mathsf{Nat}\Rightarrow\mathsf{Nat}} x.x\,y$

   b) $\big(\lambda^{\mathsf{Nat}} x.\mathsf{suc}\,(\mathsf{suc}\,x)\big)\,(\mathsf{suc}\,\mathsf{zero}) = \mathsf{suc}\,(\mathsf{suc}\,(\mathsf{suc}\,\mathsf{zero}))$

   c) $\lambda^{\mathsf{Nat}} x.y\,x = \lambda^{\mathsf{Nat}} y.x\,y$

2. Az összeadást a következő kifejezéssel adjuk meg:

$$\mathsf{plus} := \lambda^{\mathsf{Nat}} x.\lambda^{\mathsf{Nat}} y.\mathsf{rec}\,y\,(z.\mathsf{suc}\,z)\,x$$

   a) Üres környezetben mi ennek a típusa? Tehát a fenti plus-hoz mely A-ra vezethető le, hogy $\cdot \vdash \mathsf{plus} : A$?

   b) Melyik igaz az alábbiak közül a fenti plus-ra? Karikázd be!

$$\big(\mathsf{plus}\,(\mathsf{suc}\,\mathsf{zero})\big)\,(\mathsf{suc}\,(\mathsf{suc}\,\mathsf{zero})) \longmapsto \big(\lambda^{\mathsf{Nat}} y.\mathsf{rec}\,y\,(z.\mathsf{suc}\,z)\,(\mathsf{suc}\,\mathsf{zero})\big)\,(\mathsf{suc}\,(\mathsf{suc}\,\mathsf{zero}))$$
$$\big(\mathsf{plus}\,(\mathsf{suc}\,\mathsf{zero})\big)\,(\mathsf{suc}\,(\mathsf{suc}\,\mathsf{zero})) \longmapsto \mathsf{rec}\,(\mathsf{suc}\,\mathsf{zero})\,(z.\mathsf{suc}\,z)\,(\mathsf{suc}\,(\mathsf{suc}\,\mathsf{zero}))$$
$$\big(\mathsf{plus}\,(\mathsf{suc}\,\mathsf{zero})\big)\,(\mathsf{suc}\,(\mathsf{suc}\,\mathsf{zero})) \longmapsto \mathsf{suc}\,(\mathsf{suc}\,(\mathsf{suc}\,\mathsf{zero}))$$

   c) Az alábbiak közül melyek igazak a fenti plus-ra? Karikázd be!

$$\big(\mathsf{plus}\,(\mathsf{suc}\,\mathsf{zero})\big)\,(\mathsf{suc}\,(\mathsf{suc}\,\mathsf{zero})) \longmapsto^* \mathsf{suc}\,(\mathsf{suc}\,(\mathsf{suc}\,\mathsf{zero}))$$
$$\big(\mathsf{plus}\,(\mathsf{suc}\,\mathsf{zero})\big)\,(\mathsf{suc}\,(\mathsf{suc}\,\mathsf{zero})) \longmapsto^* \big(\mathsf{plus}\,(\mathsf{suc}\,\mathsf{zero})\big)\,(\mathsf{suc}\,(\mathsf{suc}\,\mathsf{zero}))$$
$$\mathsf{suc}\,(\mathsf{suc}\,(\mathsf{suc}\,\mathsf{zero})) \longmapsto^* \big(\mathsf{plus}\,(\mathsf{suc}\,\mathsf{zero})\big)\,(\mathsf{suc}\,(\mathsf{suc}\,\mathsf{zero}))$$
$$\big(\mathsf{plus}\,x_1\,(\mathsf{suc}\,(\mathsf{suc}\,\mathsf{zero}))\big) \longmapsto^* \mathsf{suc}\,(\mathsf{suc}\,x_1)$$
$$\big(\mathsf{plus}\,(\mathsf{suc}\,(\mathsf{suc}\,\mathsf{zero}))\big)\,x_1 \longmapsto^* \mathsf{suc}\,(\mathsf{suc}\,x_1)$$
$$\big(\mathsf{plus}\,(\mathsf{suc}\,(\mathsf{suc}\,x_1))\big)\,x_2 \longmapsto^* \mathsf{suc}\,(\mathsf{suc}\,((\mathsf{plus}\,x_1)\,x_2))$$

   d) Tegyük fel, hogy $\cdot \vdash e_1 : \mathsf{Nat}$ és $e_1\ \mathsf{val}$. Bizonyítsd be, hogy $\mathsf{rec}\,\mathsf{zero}\,(z.\mathsf{suc}\,z)\,e_1 \longmapsto^* e_1$!

3. Egy adott típushoz tartozó operátorokat bevezető- és eliminációs operátorok csoportokra bontjuk. Melyek a bevezető operátorok? Karikázd be!

   a) $\mathsf{zero}, \mathsf{suc}, \lambda, \mathsf{tt}, \langle -, - \rangle, \mathsf{inj}_1, \mathsf{inj}_2$
   b) rec, (függvény-applikáció), $\mathsf{proj}_1, \mathsf{proj}_2, \mathsf{abort}, \mathsf{case}$
   c) $\mathsf{zero}, \mathsf{suc}$, (függvény-applikáció), $\mathsf{proj}_1, \mathsf{proj}_2, \mathsf{inj}_1, \mathsf{inj}_2$

4. Melyik vezethető le az alábbiak közül? Karikázd be!

   a) $\cdot \vdash \mathsf{proj}_2 \langle \lambda^{\mathsf{Nat}} x.\mathsf{suc}\, x, \mathsf{zero} \rangle : \mathsf{Nat} \Rightarrow \mathsf{Nat}$
   b) $\cdot \vdash \mathsf{suc}\,(\mathsf{suc}\,\mathsf{zero}) : \mathsf{Nat} \Rightarrow \mathsf{Nat}$
   c) $\cdot, x : \mathsf{Nat}, y : \mathsf{Nat} \Rightarrow \mathsf{Nat} \vdash \mathsf{rec}\, y\, (z.z)\, (\mathsf{suc}\,(\mathsf{suc}\, x)) : \mathsf{Nat} \Rightarrow \mathsf{Nat}$

5. Melyik vezethető le az alábbiak közül? Karikázd be!

   a) $\cdot, x : \mathsf{Nat} \times (\mathsf{Nat} \Rightarrow \mathsf{Nat}) \vdash (\mathsf{proj}_2\, x)\, (\mathsf{suc}\,(\mathsf{proj}_1\, x)) : \mathsf{Nat}$
   b) $\cdot, x : \mathsf{Nat} \times (\mathsf{Nat} \Rightarrow \mathsf{Nat}) \vdash (\mathsf{suc}\,(\mathsf{proj}_2\, x))\, (\mathsf{proj}_1\, x) : \mathsf{Nat}$
   c) $\cdot, x : \mathsf{Nat} \times (\mathsf{Nat} \Rightarrow \mathsf{Nat}) \vdash (\mathsf{suc}\,(\mathsf{proj}_1\, x))\, (\mathsf{proj}_2\, x) : \mathsf{Nat}$

6. Adottak A_1, A_2, A_3 típusok. Írj egy olyan e kifejezést, melyre levezethető, hogy $\cdot, f : (A_1 \times A_2) \Rightarrow A_3 \vdash e : A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow A_3)$!

7. Melyek igazak az alábbiak közül? Karikázd be őket!

   a) Ha $\cdot \vdash e : A$, akkor létezik olyan e', hogy $e \longmapsto e'$.
   b) Ha $\cdot \vdash e : A$, akkor vagy $e\,\mathsf{val}$, vagy pedig létezik olyan e', hogy $e \longmapsto e'$.
   c) Ha $\cdot \vdash e : A$, és $e \longmapsto e'$, akkor $\cdot \vdash e' : A$.
   d) Van olyan e kifejezés, melyre nincs olyan e', hogy $e \longmapsto e'$.
   e) Minden e kifejezéshez és Γ környezethez maximum egy A típus létezik, hogy $\Gamma \vdash e : A$.

8. Írj olyan e kifejezést, melyre nincs Γ és A, hogy $\Gamma \vdash e : A$!

9. Az 1. oldalon a pár konstruktornak ($\langle -, - \rangle$) mohó operációs szemantikája van. A (23), (31), (32), (33), (34), (35), (36) szabályokat mely szabályokkal helyettesítsük, hogy lusta operációs szemantikát kapjunk? Karikázd be!

   a)

$$\frac{e_1\,\mathsf{val} \qquad e_2\,\mathsf{val}}{\langle e_1, e_2 \rangle\,\mathsf{val}} \qquad \frac{e \longmapsto e'}{\mathsf{proj}_1\, e \longmapsto \mathsf{proj}_1\, e'} \qquad \frac{e \longmapsto e'}{\mathsf{proj}_2\, e \longmapsto \mathsf{proj}_2\, e'} \qquad \frac{e_1\,\mathsf{val}}{\mathsf{proj}_1\, \langle e_1, e_2 \rangle \longmapsto e_1} \qquad \frac{e_2\,\mathsf{val}}{\mathsf{proj}_2\, \langle e_1, e_2 \rangle \longmapsto e_2}$$

   b)

$$\frac{}{\langle e_1, e_2 \rangle\,\mathsf{val}} \qquad \frac{e \longmapsto e'}{\mathsf{proj}_1\, e \longmapsto \mathsf{proj}_1\, e'} \qquad \frac{e \longmapsto e'}{\mathsf{proj}_2\, e \longmapsto \mathsf{proj}_2\, e'} \qquad \frac{}{\mathsf{proj}_1\, \langle e_1, e_2 \rangle \longmapsto e_1} \qquad \frac{}{\mathsf{proj}_2\, \langle e_1, e_2 \rangle \longmapsto e_2}$$

   c)

$$\frac{}{\langle e_1, e_2 \rangle\,\mathsf{val}} \qquad \frac{e_1 \longmapsto e_1'}{\langle e_1, e_2 \rangle \longmapsto \langle e_1', e_2 \rangle} \qquad \frac{e_1\,\mathsf{val} \qquad e_2 \longmapsto e_2'}{\langle e_1, e_2 \rangle \longmapsto \langle e_1, e_2' \rangle} \qquad \frac{}{\mathsf{proj}_1\, \langle e_1, e_2 \rangle \longmapsto e_1} \qquad \frac{}{\mathsf{proj}_2\, \langle e_1, e_2 \rangle \longmapsto e_2}$$

10. Az 1. oldalon az operációs szemantika név szerinti paraméterátadást használ a függvényekre. Érték szerinti paraméterátadás esetén a (30) szabályt az alábbi két szabályra cseréljük le.

$$\frac{e\,\mathsf{val} \qquad e_1 \longmapsto e_1'}{e\,e_1 \longmapsto e\,e_1'} \qquad \frac{e_1\,\mathsf{val}}{(\lambda^A x.e_2)\,e_1 \longmapsto e_2[x \mapsto e_1]}$$

A következő kifejezéseket adjuk meg (ahol plus az a kifejezés, amit a 2. feladatban megadtunk).

$$e_a := \big(\lambda^{\mathsf{Nat}}x.(\mathsf{plus}\,x)\,\mathsf{zero}\big)\,\big(\mathsf{case}\,(\mathsf{inj}_1\,(\mathsf{suc}\,\mathsf{zero}))\,(x_1.\mathsf{suc}\,x_1)\,(x_2.\mathsf{zero})\big)$$
$$e_b := \big(\lambda^{\mathsf{Nat}}x.(\mathsf{plus}\,x)\,x\big)\,\big(\mathsf{case}\,(\mathsf{inj}_1\,(\mathsf{suc}\,\mathsf{zero}))\,(x_1.\mathsf{suc}\,x_1)\,(x_2.\mathsf{zero})\big)$$
$$e_c := \big(\lambda^{\mathsf{Nat}}x.(\mathsf{plus}\,\mathsf{zero})\,\mathsf{zero}\big)\,\big(\mathsf{case}\,(\mathsf{inj}_1\,(\mathsf{suc}\,\mathsf{zero}))\,(x_1.\mathsf{suc}\,x_1)\,(x_2.\mathsf{zero})\big)$$

Egészítsd ki az alábbi szavak egyikével mind a három esetben: kevesebb, ugyanannyi, több!

a) Érték szerinti paraméterátadás esetén e_a kiértékelése .... lépésből áll, mint név szerinti paraméterátadás esetén.
b) Érték szerinti paraméterátadás esetén e_b kiértékelése .... lépésből áll, mint név szerinti paraméterátadás esetén.
c) Érték szerinti paraméterátadás esetén e_c kiértékelése .... lépésből áll, mint név szerinti paraméterátadás esetén.

11. Adj meg egy olyan e kifejezést, melyre az alábbiak levezethetők (e-re gondolhatsz úgy, mint a $*2+1$ függvényre):

$$e\,\mathsf{zero} \longmapsto^* \mathsf{suc}\,\mathsf{zero}$$
$$e\,(\mathsf{suc}\,\mathsf{zero}) \longmapsto^* \mathsf{suc}\,(\mathsf{suc}\,(\mathsf{suc}\,\mathsf{zero}))$$
$$e\,(\mathsf{suc}\,(\mathsf{suc}\,\mathsf{zero})) \longmapsto^* \mathsf{suc}\,(\mathsf{suc}\,(\mathsf{suc}\,(\mathsf{suc}\,(\mathsf{suc}\,\mathsf{zero}))))$$
$$e\,(\mathsf{suc}\,(\mathsf{suc}\,(\mathsf{suc}\,\mathsf{zero}))) \longmapsto^* \mathsf{suc}\,(\mathsf{suc}\,(\mathsf{suc}\,(\mathsf{suc}\,(\mathsf{suc}\,(\mathsf{suc}\,(\mathsf{suc}\,\mathsf{zero}))))))$$

12. Vezesd le az 1. oldalon megadott típusozási szabályokkal, hogy az előző feladatban megadott e-re $\cdot \vdash e : \mathsf{Nat} \Rightarrow \mathsf{Nat}$!

13. Az $\alpha.A\,\mathsf{poly}$ ítélethez a következő levezetési szabályokat adjuk meg. Azt fejezik ki, hogy $\alpha.A$ egy polinomiális típusoperátor.

$$\frac{}{\alpha.\alpha\,\mathsf{poly}} \quad (46)$$

$$\frac{}{\alpha.\mathsf{Nat}\,\mathsf{poly}} \quad (47)$$

$$\frac{}{\alpha.\mathsf{Unit}\,\mathsf{poly}} \quad (48)$$

$$\frac{\alpha.A_1\,\mathsf{poly} \qquad \alpha.A_2\,\mathsf{poly}}{\alpha.A_1 \times A_2\,\mathsf{poly}} \quad (49)$$

$$\frac{}{\alpha.\mathsf{Empty}\,\mathsf{poly}} \quad (50)$$

$$\frac{\alpha.A_1\,\mathsf{poly} \qquad \alpha.A_2\,\mathsf{poly}}{\alpha.A_1 + A_2\,\mathsf{poly}} \quad (51)$$

A generikus map operátorhoz az 1. oldalon megadott programozási nyelvet a következőképp egészítjük ki. Szintaxis:

$$e, e', \ldots \in \mathsf{Tm} ::= \ldots \mid \mathsf{map}^{\alpha.A}(x'.e'')\,e$$

Típusozási szabály:

$$\frac{\alpha.A\,\mathsf{poly} \qquad \Gamma, x' : A' \vdash e'' : A'' \qquad \Gamma \vdash e : A[\alpha \mapsto A']}{\Gamma \vdash \mathsf{map}^{\alpha.A}(x'.e'')\,e : A[\alpha \mapsto A'']} \quad (52)$$

Operációs szemantika (az inj_1 és inj_2 operátoroknak nem írjuk ki a típusparamétereit):

$$\frac{}{\mathsf{map}^{\alpha.\alpha}(x'.e'')\,e \longmapsto e''[x' \mapsto e]} \quad (53)$$

$$\frac{}{\mathsf{map}^{\alpha.\mathsf{Nat}}(x'.e'')\,e \longmapsto e} \quad (54)$$

$$\frac{}{\mathsf{map}^{\alpha.\mathsf{Unit}}(x'.e'')\,e \longmapsto e} \quad (55)$$

$$\frac{}{\mathsf{map}^{\alpha.A_1 \times A_2}(x'.e'')\,e \longmapsto \langle \mathsf{map}^{\alpha.A_1}(x'.e'')\,(\mathsf{proj}_1\,e), \mathsf{map}^{\alpha.A_2}(x'.e'')\,(\mathsf{proj}_2\,e)\rangle} \quad (56)$$

$$\frac{}{\mathsf{map}^{\alpha.\mathsf{Empty}}(x'.e'')\,e \longmapsto e} \quad (57)$$

$$\frac{}{\mathsf{map}^{\alpha.A_1 + A_2}(x'.e'')\,e \longmapsto \mathsf{case}\,e\,x_1.\big(\mathsf{inj}_1\,(\mathsf{map}^{\alpha.A_1}(x'.e'')\,x_1)\big)\,x_2.\big(\mathsf{inj}_2\,(\mathsf{map}^{\alpha.A_2}(x'.e'')\,x_2)\big)} \quad (58)$$

Tekintsük az $e := \mathsf{map}^{\alpha.\mathsf{Unit}\times(\alpha+\alpha)}\,\big(x'.\mathsf{case}\,x'\,x_1.\mathsf{zero}\,(x_2.\mathsf{suc}\,x_2)\big)\,\langle \mathsf{tt}, \mathsf{inj}_2\,(\mathsf{inj}_1\,\mathsf{tt})\rangle$ kifejezést! Mely A-ra igaz, hogy $\cdot \vdash e : A$ levezethető? Írd le a levezetés legutolsó lépését (tehát az 52. szabály alkalmazását)! Tipp: ki kell találnod, hogy mi a A' és mi a A'' típus az 52. szabályban.

Írd le, hogy mire értékelődik ki e!

Írd le, hogy mire értékelődik ki az alábbi kifejezés!

$$\mathsf{map}^{\alpha.\mathsf{Unit}\times(\alpha+\alpha)}\,\big(x'.\mathsf{case}\,x'\,x_1.\mathsf{zero}\,(x_2.\mathsf{suc}\,x_2)\big)\,\langle \mathsf{tt}, \mathsf{inj}_2\,(\mathsf{inj}_2\,\mathsf{zero})\rangle$$

14. Az általános induktív típusokhoz az 1. oldalon megadott típusrendszert a következőkkel egészítjük ki (most csak polinomiális típusoperátorokkal megadott induktív típusokat engedélyezünk). Szintaxis:

$$A, A_1, ... \in \mathsf{Ty} \ ::= ... \mid \alpha \mid \mathsf{ind}^{\alpha.A} \tag{59}$$

$$e, e', ... \in \mathsf{Tm} ::= ... \quad \mid \mathsf{fold}^{\alpha.A}\, e \mid \mathsf{rec}^{\alpha.A}\, e \tag{60}$$

Típusrendszer:

$$\frac{\alpha.A\,\mathsf{poly} \qquad \Gamma \vdash e : A[\alpha \mapsto \mathsf{ind}^{\alpha.A}]}{\Gamma \vdash \mathsf{fold}^{\alpha.A}\, e : \mathsf{ind}^{\alpha.A}} \tag{61}$$

$$\frac{\alpha.A\,\mathsf{poly} \qquad \Gamma, x : A[\alpha \mapsto A'] \vdash e_1 : A' \qquad \Gamma \vdash e : \mathsf{ind}^{\alpha.A}}{\Gamma \vdash \mathsf{rec}^{\alpha.A}\, x.e_1\, e : A'} \tag{62}$$

Operációs szemantika:

$$\frac{}{\mathsf{fold}^{\alpha.A}\, e\,\mathsf{val}} \tag{63}$$

$$\frac{e \longmapsto e'}{\mathsf{rec}^{\alpha.A}\, x.e_1\, e \longmapsto \mathsf{rec}^{\alpha.A}\, x.e_1\, e'} \tag{64}$$

$$\frac{}{\mathsf{rec}^{\alpha.A}\, x.e_1\, (\mathsf{fold}^{\alpha.A}\, e) \longmapsto e_1[x \mapsto \mathsf{map}^{\alpha.A}\, y.(\mathsf{rec}^{\alpha.A}\, x.e_1\, y)\, e]} \tag{65}$$

A Nat típusra most már nincs szükségünk (tehát kivehetjük a Nat, zero, suc, rec operátorokat a szintaxisból illetve a (6)–(7), (17), (19)–(20), (26)–(28), (40) szabályokat). Ehelyett a Nat típust úgy adjuk meg, hogy $Nat := \mathsf{ind}^{\alpha.\alpha+\mathsf{Unit}}$. Add meg ekkor a $zero : \mathsf{ind}^{\alpha.\alpha+\mathsf{Unit}}$ és a $suc : \mathsf{ind}^{\alpha.\alpha+\mathsf{Unit}} \Rightarrow \mathsf{ind}^{\alpha.\alpha+\mathsf{Unit}}$ reprezentációját!

$zero :=$

$suc :=$

Hogyan adhatók meg az alábbi típusok? Néhány példát megadtunk.

természetes számok	$\mathsf{ind}^{\alpha.\mathsf{Unit}+\alpha}$
bináris fák, melyeknél a leveleknél egy természetes szám van	$\mathsf{ind}^{\alpha.\mathsf{Nat}+(\alpha\times\alpha)}$
természetes számok listái	
természetes számok nemüres listái	
bináris fák, a csomópontoknál természetes számok	
kettő, három vagy négyfelé ágazó fák	
kételemű típus	
négyelemű típus	

Tipp: az utolsó kettőhöz nem muszáj ind-et használni (de lehet).

15. Egy polimorfizmussal rendelkező nyelv az alábbi módon adható meg (ez NEM az 1. oldal kiegészítése, hanem önnálló). Szintaxis:

$$\begin{aligned} A, A_1, A', ... &\in \mathsf{Ty} \ ::= \alpha \mid A_1 \Rightarrow A_2 \mid \forall\alpha.A \\ e, e_1, e', ... &\in \mathsf{Tm} ::= x \mid \lambda^A x.e \mid e\,e' \mid \Lambda\alpha.e \mid e[A] \end{aligned}$$

Típusrendszer:

$$\Delta, \Delta', ... \in \mathsf{TCon} ::= \cdot \mid \Delta, \alpha \tag{66}$$

$$\begin{aligned} dom(\cdot) &:= \{\} \\ dom(\Delta, \alpha) &:= \{\alpha\} \cup dom(\Delta) \end{aligned} \tag{67}$$

$$\frac{}{\cdot\ \mathsf{wf}} \tag{68}$$

$$\frac{\Delta\ \mathsf{wf} \qquad \alpha \notin dom(\Delta)}{\Delta, \alpha\ \mathsf{wf}} \tag{69}$$

$$\frac{\Delta\ \mathsf{wf} \qquad \alpha \notin dom(\Delta)}{\alpha \in \Delta, \alpha} \tag{70}$$

$$\frac{\alpha \in \Delta \qquad \alpha \notin dom(\Delta)}{\alpha \in \Delta, \alpha'} \tag{71}$$

$$\frac{\alpha \in \Delta}{\Delta \vdash \alpha} \tag{72}$$

$$\frac{\Delta \vdash A_1 \qquad \Delta \vdash A_2}{\Delta \vdash A_1 \Rightarrow A_2} \tag{73}$$

$$\frac{\Delta, \alpha \vdash A}{\Delta \vdash \forall\alpha.A} \tag{74}$$

$$\frac{(x : A) \in \Gamma}{\Delta\,\Gamma \vdash x : A} \tag{75}$$

$$\frac{\Delta\,\Gamma, x : A_1 \vdash e : A_2}{\Delta\,\Gamma \vdash \lambda^{A_1} x.e : A_1 \Rightarrow A_2} \tag{76}$$

$$\frac{\Delta\,\Gamma \vdash e : A_1 \Rightarrow A_2 \qquad \Delta\,\Gamma \vdash e : A_1}{\Delta\,\Gamma \vdash e\,e_1 : A_2} \tag{77}$$

$$\frac{\Delta, \alpha\,\Gamma \vdash e : A}{\Delta\,\Gamma \vdash \Lambda\alpha.e : \forall\alpha.A} \tag{78}$$

$$\frac{\Delta\,\Gamma \vdash e : \forall\alpha.A \qquad \Delta \vdash A_1}{\Delta\,\Gamma \vdash e[A_1] : A[\alpha \mapsto A_1]} \tag{79}$$

Adj meg olyan kifejezést, melynek az alábbi a típusa:

$$\forall\alpha.\forall\beta.\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)$$

Hány különféleképpen működő kifejezés van, amelynek az alábbi a típusa? Az első példát beírtuk. Egészítsd ki!

típus	darabszám
$\forall\alpha.\alpha \Rightarrow \alpha$	1
$\forall\alpha.\alpha \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \alpha)$	
$\forall\alpha.(\alpha \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \alpha$	
$\forall\alpha.\alpha \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \alpha$	

16. $A < A'$ azt jelenti, hogy A altípusa A'-nek. Melyik az alábbiak közül a függvény altípus helyes levezetési szabálya? Karikázd be!

$$\frac{A_1' < A_1 \qquad A_2 < A_2'}{(A_1 \Rightarrow A_2) < (A_1' \Rightarrow A_2')} \qquad \frac{A_1 < A_1' \qquad A_2 < A_2'}{(A_1 \Rightarrow A_2) < (A_1' \Rightarrow A_2')} \qquad \frac{A_1 < A_1' \qquad A_2' < A_2}{(A_1 \Rightarrow A_2) < (A_1' \Rightarrow A_2')}$$

Melyik altípusozási szabály helyes az alábbiak közül? Karikázd be!

$$\frac{}{\mathsf{Unit} < A} \qquad \frac{}{A < \mathsf{Unit}} \qquad \frac{}{A < \mathsf{Empty}}$$