

Szintaxis:

$$\begin{aligned} A, A', A_1, \dots &\in \mathbf{Ty} ::= \mathbf{Nat} \mid \mathbf{Unit} \mid A_1 \times A_2 \\ t, t', t_1, \dots &\in \mathbf{Tm} ::= x \mid \mathbf{zero} \mid \mathbf{suc} \, t \mid \mathbf{rec} \, t_0 \, x. t_1 \, t \mid \mathbf{tt} \mid \langle t_1, t_2 \rangle \mid \mathbf{proj}_1 \, t \mid \mathbf{proj}_2 \, t \\ \Gamma, \Gamma', \dots &\in \mathbf{Con} ::= \cdot \mid \Gamma, x : A \end{aligned}$$

Környezetek kezelésére vonatkozó szabályok:

$$\begin{aligned} \text{dom}(\cdot) &:= \{\} \\ \text{dom}(\Gamma, x : A) &:= \{x\} \cup \text{dom}(\Gamma) \\ \overline{\cdot \, \mathbf{wf}} & \end{aligned} \tag{1}$$

$$\frac{\Gamma \, \mathbf{wf} \quad x \notin \text{dom}(\Gamma)}{\Gamma, x : A \, \mathbf{wf}} \tag{2}$$

$$\frac{\Gamma \, \mathbf{wf} \quad x \notin \text{dom}(\Gamma)}{(x : A) \in \Gamma, x : A} \tag{3}$$

$$\frac{(x : A) \in \Gamma \quad y \notin \text{dom}(\Gamma)}{(x : A) \in \Gamma, y : A'} \tag{4}$$

Termek típusozási szabályai:

$$\frac{(x : A) \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : A} \tag{5}$$

$$\frac{\Gamma \, \mathbf{wf}}{\Gamma \vdash \mathbf{zero} : \mathbf{Nat}} \tag{6}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : \mathbf{Nat}}{\Gamma \vdash \mathbf{suc} \, t : \mathbf{Nat}} \tag{7}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t_0 : A \quad \Gamma, x : A \vdash t_1 : A \quad \Gamma \vdash t : \mathbf{Nat}}{\Gamma \vdash \mathbf{rec} \, t_0 \, x. t_1 \, t : A} \tag{8}$$

$$\frac{\Gamma \, \mathbf{wf}}{\Gamma \vdash \mathbf{tt} : \mathbf{Unit}} \tag{9}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 : A_1 \quad \Gamma \vdash t_2 : A_2}{\Gamma \vdash \langle t_1, t_2 \rangle : A_1 \times A_2} \tag{10}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : A_1 \times A_2}{\Gamma \vdash \mathbf{proj}_1 \, t : A_1} \tag{11}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : A_1 \times A_2}{\Gamma \vdash \mathbf{proj}_2 \, t : A_2} \tag{12}$$

Operációs szemantika:

$$\overline{\mathbf{zero} \, \mathbf{val}} \tag{13}$$

$$\frac{t \, \mathbf{val}}{\mathbf{suc} \, t \, \mathbf{val}} \tag{14}$$

$$\frac{t \mapsto t'}{\mathbf{suc} \, t \mapsto \mathbf{suc} \, t'} \tag{15}$$

$$\frac{t \mapsto t'}{\mathbf{rec} \, t_0 \, x. t_1 \, t \mapsto \mathbf{rec} \, t_0 \, x. t_1 \, t'} \tag{16}$$

$$\overline{\mathbf{rec} \, t_0 \, x. t_1 \, \mathbf{zero} \mapsto t_0} \tag{17}$$

$$\frac{t \, \mathbf{val}}{\mathbf{rec} \, t_0 \, x. t_1 \, (\mathbf{suc} \, t) \mapsto t_1[x \mapsto \mathbf{rec} \, t_0 \, x. t_1 \, t]} \tag{18}$$

$$\overline{\mathbf{tt} \, \mathbf{val}} \tag{19}$$

$$\frac{t_1 \text{ val} \quad t_2 \text{ val}}{\langle t_1, t_2 \rangle \text{ val}} \quad (20)$$

$$\frac{t_1 \mapsto t'_1}{\langle t_1, t_2 \rangle \mapsto \langle t'_1, t_2 \rangle} \quad (21)$$

$$\frac{t_1 \text{ val} \quad t_2 \mapsto t'_2}{\langle t_1, t_2 \rangle \mapsto \langle t_1, t'_2 \rangle} \quad (22)$$

$$\frac{t \mapsto t'}{\text{proj}_1 t \mapsto \text{proj}_1 t'} \quad (23)$$

$$\frac{t \mapsto t'}{\text{proj}_2 t \mapsto \text{proj}_2 t'} \quad (24)$$

$$\frac{t_1 \text{ val} \quad t_2 \text{ val}}{\text{proj}_1 \langle t_1, t_2 \rangle \mapsto t_1} \quad (25)$$

$$\frac{t_1 \text{ val} \quad t_2 \text{ val}}{\text{proj}_2 \langle t_1, t_2 \rangle \mapsto t_2} \quad (26)$$

Kiértékelés nulla vagy több lépésben:

$$\overline{t \mapsto^* t} \quad (27)$$

$$\frac{t \mapsto t' \quad t' \mapsto^* t''}{t \mapsto^* t''} \quad (28)$$

Tételek:

1. Unicitás: ha $\Gamma \vdash t : A$ és $\Gamma \vdash t : A'$, akkor $A = A'$.
2. Környezet permutálhatósága: ha $\Gamma \vdash t : A$ és Γ' a Γ egy permutációja, akkor $\Gamma' \vdash t : A$.
3. Gyengítés: ha $\Gamma \vdash t : A$ és $x \notin \text{dom}(\Gamma)$, akkor $\Gamma, x : A' \vdash t : A$.
4. Helyettesítési lemma: ha $\Gamma \vdash t : A$ és $\Gamma, x : A \vdash t' : A'$, akkor $\Gamma \vdash t'[x \mapsto t] : A'$.
5. Dekompozíció: ha $\Gamma \vdash t'[x \mapsto t] : A'$, akkor minden olyan A -ra, melyre $\Gamma \vdash t : A$, $\Gamma, x : A \vdash t' : A'$.
6. Nincs olyan t , hogy $t \text{ val}$ és $t \mapsto t'$
7. Determinisztikusság: Ha $t \mapsto t'$ és $t \mapsto t''$, akkor $t' = t''$.
8. Típusmegőrzés: ha $\cdot \vdash t : A$, akkor vagy $t \text{ val}$, vagy létezik olyan t' , hogy $t \mapsto t'$.
9. Haladás: ha $\cdot \vdash t : A$ és $t \mapsto t'$, akkor $\cdot \vdash t' : A$.