Решение. Составим схему с единственным делением. При этом будем иметь четыре столбца свободных членов (таблица 17). Заметим, что элементы строк обратной матрицы получаются в обратном порядке.

Таблица 17

Вычисление обратной матрицы методом Гаусса

x_{1j}	x_{2j}	x_{3j}	x_{4j}	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	Σ
1,8	—3,8	0,7	—3,7	1	0	0	0	—4,0
0,7	2,1	—2,6	—2,8	0	1	0	0	—1,6
7,3	8,1	1,7	—4,9	0	0	1	0	13,2
1,9	—4,3	—4,9	—4,7	0	0	0	1	—11,0
1	—2,11111	0,38889	—2,05556	0,55556	0	0	0	—2,22223
	3,57778	—2,87222	—1,36111	—0,38885	1	0	0	—0,04440
	23,51110	—1,13890	10,10559	—4,05551	0	1	0	29,42228
	—0,28889	—5,63889	—0,79444	—1,05554	0	0	1	—6,77776
	1	—0,80279	—0,38043	—0,10868	0,27950	0	0	—0,01241
		17,73557	19,04992	—1,50032	—6,57135	1	0	29,71405
		—5,87081	—0,90434	—1,08694	0,08074	0	1	—6,78134
		1	1,07411	—0,08459	—0,37108	0,05638	0	1,67539
			5,40155	—1,58355	—2,09780	0,33100	1	3,05456
			1	—0,29316	—0,38837	0,06128	0,18513	0,56540
		1		0,23030	0,04607	—0,00944	—0,19885	1,06809
	1			—0,03533	0,16873	0,01573	—0,08920	1,06013
1				—0,21121	—0,46003	0,16284	0,26956	0,76266

На основании результатов таблицы 17 получаем:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} -0{,}21121 & -0{,}46003 & 0{,}16284 & 0{,}26956 \\ -0{,}03533 & 0{,}16873 & 0{,}01573 & -0{,}08920 \\ 0{,}23030 & 0{,}04607 & -0{,}00944 & -0{,}19885 \\ -0{,}29316 & -0{,}38837 & 0{,}06128 & 0{,}18513 \end{bmatrix}.$$

Для проверки составим произведение

$$AA^{-1}=\begin{bmatrix} 1{,}8 & -3{,}8 & 0{,}7 & -3{,}7 \\ 0{,}7 & 2{,}1 & -2{,}6 & -2{,}8 \\ 7{,}3 & 8{,}1 & 1{,}7 & -4{,}9 \\ 1{,}9 & -4{,}3 & -4{,}9 & -4{,}7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -0{,}21121 & -0{,}46003 & 0{,}16284 & 0{,}26956 \\ -0{,}03533 & 0{,}16873 & 0{,}01573 & -0{,}08920 \\ 0{,}23030 & 0{,}04607 & -0{,}00944 & -0{,}19885 \\ -0{,}29316 & -0{,}38837 & 0{,}06128 & 0{,}18513 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 0{,}99997 & 0{,}00000 & -0{,}00001 & 0{,}00000 \\ -0{,}00025 & 0{,}99997 & -0{,}00002 & -0{,}00039 \\ -0{,}00808 & -0{,}01017 & 0{,}99982 & 0{,}00009 \\ 0{,}00000 & 0{,}00000 & 0{,}00000 & 1{,}00048 \end{bmatrix}=$$

$$=E-10^{-3}\cdot\begin{bmatrix} 0{,}03 & 0{,}00 & 0{,}01 & 0{,}00 \\ 0{,}25 & 0{,}03 & 0{,}02 & 0{,}39 \\ 8{,}08 & 10{,}17 & 0{,}18 & -0{,}09 \\ 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & -0{,}48 \end{bmatrix}.$$

Мы видим, что благодаря округлению обратная матрица получилась не вполне точной. Ниже мы укажем (см. § 15) метод исправления элементов приближенной обратной матрицы.

§ 8. Метод квадратных корней

Пусть дана линейная система

$$Ax=b, \tag{1}$$

где $A=[a_{ij}]$ — симметрическая матрица, т. е. $A'=[a_{ji}]=A$. Тогда матрицу A можно представить в виде произведения двух транспонированных между собой треугольных матриц

$$A=T'T, \tag{2}$$

где

$$T=\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad T'=\begin{bmatrix} t_{11} & 0 & \dots & 0 \\ t_{12} & t_{22} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{1n} & t_{2n} & \dots & t_{nn} \end{bmatrix}.$$

Производя перемножение матриц T' и T, для определения элементов t_{ij} матрицы T получим следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} t_{1i}t_{1j}+t_{2i}t_{2j}+\ldots+t_{ii}t_{ij}&=a_{ij} \quad (i<j), \\ t_{1i}^2+t_{2i}^2+\ldots+t_{ii}^2&=a_{ii}. \end{aligned}\right\}$$

Отсюда последовательно находим:

$$\left.\begin{aligned} &t_{11}=\sqrt{a_{11}}, \quad t_{1j}=\frac{a_{1j}}{t_{11}} && (j>1),\\ &t_{ii}=\sqrt{a_{ii}-\sum_{k=1}^{i-1} t_{ki}^2} && (1<i\leqslant n),\\ &t_{ij}=\frac{a_{ij}-\sum_{k=1}^{i-1} t_{ki}t_{kj}}{t_{ii}} && (i<j),\\ &t_{ij}=0 \quad \text{при} \quad i>j. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Система (1) имеет определенное единственное решение, если $t_{ii}\neq 0$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, так как тогда

$$\det A=\det T'\cdot\det T=(\det T)^2=(t_{11}t_{22}\ \ldots\ t_{nn})^2\neq 0.$$

Коэффициенты матрицы T будут действительны, если $t_{ii}^2>0$. В дальнейшем мы, вообще говоря, не будем предполагать это последнее условие выполненным.

При наличии соотношения (2) уравнение (1) эквивалентно двум уравнениям:

$$T'y=b \quad \text{и} \quad Tx=y,$$

или в раскрытом виде

$$\left.\begin{aligned} &t_{11}y_1=b_1,\\ &t_{12}y_1+t_{22}y_2=b_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &t_{1n}y_1+t_{2n}y_2+\ldots+t_{nn}y_n=b_n \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

и

$$\left.\begin{aligned} t_{11}x_1+t_{12}x_2+\ldots+t_{1n}x_n&=y_1,\\ t_{22}x_2+\ldots+t_{2n}x_n&=y_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\ t_{nn}x_n&=y_n. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Отсюда последовательно находим:

$$\left.\begin{aligned} &y_1=\frac{b_1}{t_{11}},\\ &y_i=\frac{b_i-\sum_{k=1}^{i-1} t_{ki}y_k}{t_{ii}} \qquad (i>1) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

и

$$\left.\begin{aligned} &x_n=\frac{y_n}{t_{nn}},\\ &x_i=\frac{y_i-\sum_{k=i+1}^{n} t_{ik}x_k}{t_{ii}} \qquad (i<n). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Изложенный способ решения линейной системы носит название *метода квадратных корней*. Так как матрица A — симметрическая, а матрица T — верхняя треугольная, то в вычислительной схеме можно записывать только $\frac{n}{2}(n+1)$ верхних коэффициентов a_{ij} и t_{ij} $(i\geqslant j)$. При вычислениях применяется обычный контроль с помощью сумм, причем при составлении суммы учитываются все коэффициенты соответствующей строки.

Заметим, что если для некоторой s-й строки имеем $t_{ss}^2<0$, то соответствующие элементы t_{sj} будут мнимыми. Метод формально применим и в этом случае.

При практическом применении метода квадратных корней *прямым ходом* с помощью формул (3) и (6) последовательно вычисляются коэффициенты t_{ij} и y_i $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, а затем *обратным ходом* с помощью формулы (7) находятся неизвестные x_i $(i=n,\ n-1,\ \ldots,\ 1)$.

Пример. Методом квадратных корней решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x_1+3x_2-2x_3\phantom{{}+x_4}-2x_5&=0{,}5;\\ 3x_1+4x_2-5x_3+x_4-3x_5&=5{,}4;\\ -2x_1-5x_2+3x_3-2x_4+2x_5&=5{,}0;\\ x_2-2x_3+5x_4+3x_5&=7{,}5;\\ -2x_1-3x_2+2x_3+3x_4+4x_5&=3{,}3. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Записываем коэффициенты a_{ij} и свободные члены b_i данной системы в начальный раздел A таблицы (таблица 18) и подсчитываем столбец $\sum$. Применяя формулы (3) и (6), последовательно переходя от строки к строке, вычисляем коэффициенты t_{ij} и новые свободные члены y_i и, таким образом, заполняем раздел $Б$ таблицы.

Например,

$$t_{35}=\frac{a_{35}-t_{13}t_{15}-t_{23}t_{25}}{t_{33}}=\frac{2-(-2)(-2)-(-0{,}4472i)(-1{,}3416i)}{0{,}8944i}=1{,}5653i.$$

Для контроля подсчитываем столбец $\sum$. На основании формул (7) находим значения неизвестных x_i и контрольные величины

Таблица 18

Решение линейной системы методом квадратных корней

a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_{i5}	b_i	Σ	Разделы схемы
1	3	−2	0	−2	0,5	0,5	
3	4	−5	1	−3	5,4	5,4	
−2	−5	3	−2	2	5,0	1,0	*А*
0	1	−2	5	3	7,5	14,5	
−2	−3	2	3	4	3,3	7,3	
t_{i1}	t_{i2}	t_{i3}	t_{i4}	t_{i5}	y_i	Σ	
1	3 2,2361i	−2 −0,4472i 0,8944i	0 −0,4472i 2,0125i 3,0414	−2 −1,3416i 1,5653i 2,2194 0,8221i	0,5 −1,7471i −7,5803i −2,2928 0,1643i	0,5 −1,7471i −3,1081i 2,9679 0,9859i	*Б*
−6,0978 −5,0973	−2,2016 −1,2017	−6,8011 −5,8004	−0,8996 0,1007	0,1998 1,1992		x_i $\overline{x}_i$	*В*

$\overline{x}_i = x_i + 1$, помещая их в разделе *В*. Например,

$$x_3 = \frac{y_3 - t_{35}x_5 - t_{34}x_4}{t_{33}} =$$
$$= \frac{-7{,}5803i - 1{,}5652i \cdot 0{,}1998 - 2{,}0125i \cdot (-0{,}8996)}{0{,}8944i} = -6{,}8011.$$

§ 9. Схема Халецкого

Для удобства рассуждений систему линейных уравнений запишем в матричном виде

$$Ax = b, \tag{1}$$

где $A = [a_{ij}]$ — квадратная матрица порядка n и

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} a_{1,\,n+1} \\ \cdots \\ a_{n,\,n+1} \end{bmatrix}$$

— векторы-столбцы. Представим матрицу A в виде произведения нижней треугольной матрицы $B = [b_{ij}]$ и верхней треугольной матрицы $C = [c_{ij}]$ с единичной диагональю, т. е.

$$A = BC, \tag{2}$$

где

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда элементы b_{ij} и c_{ij} определяются по формулам

$$\left.\begin{aligned} b_{i1} &= a_{i1}, \\ b_{ij} &= a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik}c_{kj} \qquad (i \geqslant j > 1) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

и

$$\left.\begin{aligned} c_{1j} &= \frac{a_{1j}}{b_{11}}, \\ c_{ij} &= \frac{1}{b_{ii}}\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik}c_{kj}\right) \qquad (1 < i < j). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Отсюда искомый вектор x может быть вычислен из цепи уравнений

$$By = b, \qquad Cx = y. \tag{5}$$

Так как матрицы B и C — треугольные, то системы (5) легко решаются, а именно:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \frac{a_{1,\,n+1}}{b_{11}}, \\ y_i &= \frac{1}{b_{ii}}\left(a_{i,\,n+1} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik}y_k\right) \qquad (i > 1) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

и

$$\left.\begin{aligned} x_n &= y_n, \\ x_i &= y_i - \sum_{k=i+1}^{n} c_{ik}x_k \qquad (i < n). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Из формул (6) видно, что числа y_i выгодно вычислять вместе с коэффициентами c_{ij}. Этот метод получил название *схемы Халецкого*. В схеме применяется обычный контроль с помощью сумм.

Заметим, что если матрица A — симметрическая, т. е. $a_{ij} = a_{ji}$, то

$$c_{ij} = \frac{b_{ji}}{b_{ii}} \qquad (i < j).$$

Схема Халецкого удобна для работы на вычислительных машинах, так как в этом случае операции «накопления» (3) и (4) можно проводить без записи промежуточных результатов.