Лабораторная работа № 3

Работа с матрицами

Часть 1. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Теоретическая часть

Наиболее распространенным приемом решения систем линейных уравнений является алгоритм последовательного исключения неизвестных. Этот метод носит название *метода Гаусса*. Для простоты рассуждений ограничимся рассмотрением системы четырех уравнений с четырьмя неизвестными

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= a_{15}\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= a_{25}\\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= a_{35}\\
a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 &= a_{45}
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

Пусть $a_{11} \neq 0$ (*ведущий элемент*). Разделив коэффициенты первого уравнения системы (1) на a_{11}, получим:

$$x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 = b_{15}, \qquad (2)$$

где

$$b_{1j} = a_{1j}/\ a_{11} \quad (j > 1).$$

Пользуясь уравнением (2), легко исключить из системы (1) неизвестную x_1. Для этого достаточно из второго уравнения системы (1) вычесть уравнение (2), умноженное на a_{21}, из третьего уравнения системы (1) вычесть уравнение (2), умноженное на a_{31}, и т. д. В результате получим систему из трех уравнений

$$
\begin{aligned}
a^{(1)}_{22}x_2 + a^{(1)}_{23}x_3 + a^{(1)}_{24}x_4 &= a^{(1)}_{25}\\
a^{(1)}_{32}x_2 + a^{(1)}_{33}x_3 + a^{(1)}_{34}x_4 &= a^{(1)}_{35}\\
a^{(1)}_{42}x_2 + a^{(1)}_{43}x_3 + a^{(1)}_{44}x_4 &= a^{(1)}_{45}
\end{aligned}
\qquad (1')
$$

где коэффициенты $a^{(1)}_{ij}$ (i, j >= 2) вычисляются по формуле

$$a^{(1)}_{ij} = a_{ij} - a_{i1}\, b_{1j} \ (i, j >= 2).$$

Разделив, далее, коэффициенты первого уравнения системы (1') на «ведущий элемент» $a^{(1)}_{22}$, получим уравнение

$$x_2 + b^{(1)}_{23}x_3 + b^{(1)}_{24}x_4 = b^{(1)}_{25}, \qquad (2')$$

где

$$b^{(1)}_{2j} = a^{(1)}_{2j}/\ a^{(1)}_{22} \quad (j > 2).$$

Исключая теперь x_2 таким же образом, каким мы исключили x_1, придем к следующей системе уравнений:

$$
\begin{aligned}
a^{(2)}_{33}x_3 + a^{(2)}_{34}x_4 &= a^{(2)}_{35}\\
a^{(2)}_{43}x_3 + a^{(2)}_{44}x_4 &= a^{(2)}_{45}
\end{aligned}
\qquad (1'')
$$

где коэффициенты $a^{(2)}_{ij}$ (i, j >= 3) вычисляются по формуле

$$a^{(2)}_{ij} = a^{(1)}_{ij} - a^{(1)}_{i2}\, b^{(1)}_{2j} \ (i, j >= 3).$$

Раздели коэффициенты первого уравнения системы (1'') на «ведущий элемент» $a^{(2)}_{33}$, получим уравнение

$$x_3 + b^{(2)}_{34}x_4 = b^{(2)}_{35}, \qquad (2'')$$

где

$b^{(2)}_{3j} = a^{(2)}_{3j}/ a^{(3)}_{33}$ (j > 3).

Исключая теперь x_3 таким же образом, каким мы исключили x_2, будем иметь:

$a^{(3)}_{44}x_4 = a^{(3)}_{45}$, (1''')

где коэффициенты $a^{(3)}_{ij}$ (i, j >= 4) вычисляются по формуле

$a^{(3)}_{ij} = a^{(2)}_{ij} – a^{(2)}_{i3}\, b^{(2)}_{3j}$ (i, j >= 4).

Отсюда

$x_4 = a^{(3)}_{45}/ a^{(3)}_{44} = b^{(3)}_{45}$. (2''')

Остальные неизвестные последовательно определяются из уравнений (2''), (2') и (2):

$x_3 = b^{(2)}_{35} - b^{(2)}_{34}\, x_4$,
$x_2 = b^{(1)}_{25} - b^{(1)}_{24}\, x_4 - b^{(1)}_{23}\, x_3$,
$x_1 = b_{15} - b_{14}\, x_4 – b_{13}\, x_3 – b_{12}\, x_2$.

Таким образом, процесс решения линейной системы по методу Гаусса сводится к построению эквивалентной системы (2), (2'), (2''), (2'''), имеющей треугольную матрицу. Необходимым и достаточным условием применимости метода является неравенство нулю всех «ведущих элементов». Вычисления удобно поместить в таблицу. Приведенная в ней схема называется *схемой единственного деления*. Процесс нахождения коэффициентов $b^{(i-1)}_{ij}$ треугольной системы обычно называется *прямым ходом*, процесс получения значений неизвестных – *обратным ходом*.

Прямой ход начинается с выписывания коэффициентов системы, включая свободные члены (раздел А). Последняя строка раздела А схемы представляет собой результат деления первой строки раздела на «ведущий элемент» a_{11}. Элементы $a^{(1)}_{ij}$ (i, j >= 2) следующего раздела схемы (раздел $А_1$) равны соответствующим элементам a_{ij} предшествующего раздела без произведения их «проекций» на ряды раздела А, содержащие элемент 1 (т. е. на первый столбец и последнюю строку).

Последняя строка раздела $А_1$ находится путем деления первой строки раздела на «ведущий элемент» $a^{(1)}_{22}$. Аналогично строятся следующие разделы. Прямой ход заканчивается, когда мы дойдем до раздела, состоящего из одной строки, не считая преобразованной (раздел $А_3$ в нашем частном случае).

При обратном ходе используются лишь строки разделов $А_i$, содержащие единицы (*отмеченные строки*), начиная с последней. Элемент $b^{(3)}_{45}$ из раздела $А_3$, стоящий в столбце свободных членов отмеченной строки раздела, дает значение x_4. Далее, все остальные неизвестные x_i (i = 3, 2, 1) шаг за шагом находятся с помощью вычитания из свободного члена отмеченной строки суммы произведений ее коэффициентов на соответствующие значения ранее найденных неизвестных. Значения неизвестных последовательно выписываются в последний раздел В. Расставленные там единицы помогают находить для x_i соответствующие коэффициенты в отмеченных строках.

x_1	x_2	x_3	x_4	Свободные члены	**Σ**	Раздел схемы
a_{11} a_{21} a_{31} a_{41} 1	a_{12} a_{22} a_{32} a_{42} b_{12}	a_{13} a_{23} a_{33} a_{43} b_{13}	a_{14} a_{24} a_{34} a_{44} b_{14}	a_{15} a_{25} a_{35} a_{45} b_{15}	a_{16} a_{26} a_{36} a_{46} b_{16}	$А_1$
	$a^{(1)}_{22}$ $a^{(1)}_{32}$ $a^{(1)}_{42}$ 1	$a^{(1)}_{23}$ $a^{(1)}_{33}$ $a^{(1)}_{43}$ $b^{(1)}_{23}$	$a^{(1)}_{24}$ $a^{(1)}_{34}$ $a^{(1)}_{44}$ $b^{(1)}_{24}$	$a^{(1)}_{25}$ $a^{(1)}_{35}$ $a^{(1)}_{45}$ $b^{(1)}_{25}$	$a^{(1)}_{26}$ $a^{(1)}_{36}$ $a^{(1)}_{46}$ $b^{(1)}_{26}$	$А_2$
		$a^{(2)}_{33}$	$a^{(2)}_{34}$	$a^{(2)}_{35}$	$a^{(2)}_{36}$	

		$a^{(2)}_{43}$ 1	$a^{(2)}_{44}$ $b^{(2)}_{34}$	$a^{(2)}_{45}$ $b^{(2)}_{35}$	$a^{(2)}_{46}$ $b^{(2)}_{36}$	A_3
			$a^{(3)}_{44}$ 1	$a^{(3)}_{45}$ $b^{(3)}_{45}$ (x_4)	$a^{(3)}_{46}$ $b^{(3)}_{46}$ $(\underline{x}_4)$	A_4
1	1	1	1	(x_4) (x_3) (x_2) (x_4)	$\underline{x}_4$ $\underline{x}_3$ $\underline{x}_2$ $\underline{x}_4$	B

Для контроля вычислений используются так называемые «контрольные суммы»

$$a_{i6} = \sum_{j=1}^{5} a_{ij} \ (i = 1, 2, \dots, 5), \qquad (3)$$

помещенные в столбец **Σ** и представляющие собой сумму элементов строк матрицы исходной системы (1), включая свободные члены.

Если a_{i6} принять за новые свободные члены в системе (1), то преобразованная линейная система

$$\sum_{j=1}^{4} a_{ij}\, x_j = a_{i6} \ (i = 1, 2, 3, 4) \qquad (4)$$

будет иметь неизвестные x_j, связанные с прежними неизвестными x_j соотношениями

$$x_j = x_j + 1 \ (j = 1, 2, 3, 4). \qquad (5)$$

В самом деле, подставляя формулы (5) в уравнение (4), в силу системы (1) и формул (3) получим тождество

$$\sum_{j=1}^{4} a_{ij}x_j + \sum_{j=1}^{4} a_{ij} = \sum_{j=1}^{5} a_{ij} = a_{i6} \ (i = 1, 2, 3, 4).$$

Вообще, если над контрольными суммами в каждой строке проделывать те же операции, что и над остальными элементами этой строки, то при отсутствии ошибок в вычислениях элементы столбца **Σ** равны суммам элементов соответствующих преобразованных строк. Это обстоятельство служит контролем прямого хода. Обратный ход контролируется нахождением чисел $\underline{x}_j$, которые должны совпадать с числами $x_j + 1$.

Пример. Решить систему

$$\begin{aligned}
7.9x_1 + 5.6x_2 + 5.7x_3 - 7.2x_4 &= 6.68\\
8.5x_1 - 4.8x_2 + 0.8x_3 + 3.5x_4 &= 9.95\\
4.3x_1 + 4.2x_2 - 3.2x_3 + 9.3x_4 &= 8.60\\
3.2x_1 - 1.4x_2 - 8.9x_3 + 3.3x_4 &= 1.00
\end{aligned} \qquad (6)$$

Решение. В раздел А таблицы впишем матрицу коэффициентов системы, ее свободные члены и контрольные суммы. Далее заполняем последнюю (пятую) строку раздела А, деля первую строку на 7.9 (на a_{11}).

Переходим к заполнению раздела A_1 таблицы. Взяв любой элемент раздела А (не находящийся в первой строке), вычитаем из него произведение первого элемента его строки на последний элемент столбца, к которому он принадлежит, и записываем на соответствующее место в разделе A_1 схемы. Например, выбрав $a_{43} = -8.9$, будем иметь:

$$a^{(1)}_{43} = a_{43} - a_{41}\, b_{13} = -8.9 - 3.2*0.72152 = -11.20886.$$

Чтобы получить последнюю строку раздела A_1, делим все члены первой строки этого раздела на $a^{(1)}_{22} = -10.82531$. Например,

$$b^{(1)}_{23} = a^{(1)}_{23}/\, a^{(1)}_{22} = -5.33292/-10.82531 = 0.49263.$$

Аналогичным путем заполняются остальные разделы таблицы. Например,

$$a^{(2)}_{44} = a^{(1)}_{44} - a^{(1)}_{42}\, b^{(1)}_{24} = 6.21645 - (-3.66835)*(-1.03894) = 2.40525.$$

x_1	x_2	x_3	x_4	Свободные члены	**Σ**	Раздел схемы
7.9 8.5 4.3 3.2	5.6 – 4.8 4.2 –1.4	5.7 0.8 – 3.2 – 8.9	–7.2 3.5 9.3 3.3	6.68 9.95 8.60 1.00	18.68 17.95 23.20 – 2.80	A
1	0.70886	0.72152	–0.91139	0.84557	2.36456	
	–10.82531 1.15190 –3.66835	–5.33292 –6.30254 –11.20886	11.24682 13.21898 6.21645	2.76265 4.96405 –1.70582	–2.14876 13.03239 –10.36658	A_1
	1	0.49263	–1.03894	–0.25520	0.19849	
		–6.30254 –9.40172	14.41573 2.40525	5.25801 –2.64198	12.80374 –9.63845	A_2
		1	–2.09836	–0.76536	–1.86372	
			–17.32294	–9.83768	–27.16062	A_3
			1	0.56790	1.56790	
   1	 1	 1	1	0.56790 0.42630 0.12480 0.96710	1.56790 1.42630 1.12480 1.96710	B

Для нахождения неизвестных используем строки, содержащие единицы, начиная с последней (*отмеченной строки*). Неизвестное x_4 представляет собой свободный член последней строки раздела A_3:

$x_4 = b^{(3)}_{45} = 0.56790$.

Значения остальных неизвестных x_3, x_2, x_1 получаются последовательно в результате вычитания из свободных членов отмеченных строк суммы произведений соответствующих коэффициентов $b^{(\ )}_{ij}$ на ранее найденные значения неизвестных. Имеем:

$x_3 = b^{(2)}_{35} – b^{(2)}_{34}\, x_4 = –0.76536 – (–2.09836)*0.56790 = 0.42630$;
$x_2 = b^{(1)}_{25} – b^{(1)}_{24}\, x_4 – b^{(1)}_{33}\, x_3 = –0.25520 – (–1.03894)*0.56790 – 0.49263*0.42630 = 0.12480$;
$x_1 = b_{15} – b_{14}\, x_4 – b_{13}\, x_3 – b_{12}\, x_2 = 0.84557 – (–0.91139)*0.56790 – 0.72152*0.42630 – 0.70886*0.12480 = 0.96710$.

Итак,

$x_1 = 0.96710$; $x_2 = 0.12480$; $x_3 = 0.42630$; $x_4 = 0.56790$.

Текущий контроль вычислений осуществляется с помощью столбца **Σ**, над которым производятся те же действия, что и над остальными столбцами. В результате:

1) Сумма элементов каждой строки схемы (не принадлежащих столбцу **Σ**) должна быть равно элементу этой строки из столбца **Σ**;
2) Корни $\underline{x}_i$, соответствующие столбцу **Σ**, должны быть на единицу больше соответствующих корней системы.

Кстати, если учесть единицы, написанные в разделе B, то опять получится, что и в этом разделе элементы столбца **Σ** являются суммами элементов отвечающих им строк. В нашем случае первое и второе условия выполняются с точностью до единицы последнего разряда. Следовательно, почти достоверно, что вычисления выполнены правильно.

Заметим, что если матрица системы – симметрическая, то соответствующие части разделов A, A_1, A_2, … схемы единственного деления также получаются симметрическими. Это обстоятельство можно использовать для упрощения таблицы.

Время, необходимое для решения линейной системы методом Гаусса, примерно пропорционально кубу числа неизвестных.

Практическая часть

Формат входных данных

Первая строка входного потока данных содержит значение n ($2 \le n \le 100$) – размер (порядок) линейной системы. В следующих строках входного потока данных содержатся значения элементов матрицы при просмотре матрицы по строкам, включая свободные члены. Числа в строках разделяются пробелами.

Набор исходных данных имеет следующий формат:

n
a_{11} a_{12} a_{13} . . . a_{1n} a_{1n+1}
a_{21} a_{22} a_{23} . . . a_{2n} a_{2n+1}
. . .
a_{n1} a_{n2} a_{n3} . . . a_{nn} a_{nn+1}

Здесь n – размер линейной системы,
a_{ij} ($1 \le i,j \le n$) – элементы матрицы,
a_{in+1} (i=1, 2, … n) – свободные члены.

Формат выходных данных

Выведите в выходной поток решения линейной системы, т. е. значения неизвестных x_1, x_2, … x_n, разделяя их пробелами или символами возврата каретки.

Пример входных данных	Пример выходных данных
4 7.9 5.6 5.7 -7.2 6.68 8.5 -4.8 0.8 3.5 9.95 4.3 4.2 -3.2 9.3 8.60 3.2 -1.4 -8.9 3.3 1.00	0.96710 0.12480 0.42630 0.56790

Часть 2. Решение систем линейных уравнений методом предложенного варианта

Вариант 1. Метод квадратных корней (см. файл Метод квадратных корней.pdf)
Вариант 2. Схема Халецкого (см. файл Схема Халецкого.pdf)
Вариант 3. Метод Итераций (см. файл Метод Итераций.pdf).

Задание

Составить программу решения систем линейных уравнений двумя методами:

1. Методом Гаусса (делают все) и
2. Методом предложенного варианта.

Замечание 1. В программе память для матрицы коэффициентов и свободных членов выделять динамически, используя функции С **malloc()** или **calloc()**. Освобождать память с помощью функции С **free().** Примеры для двумерного массива вещественного типа, где nrows - число строк, ncolumns - число столбцов, представлены ниже:

```
/* функция malloc */
	int i;
	double **a = (double **)malloc(nrows * sizeof(double *));
	for(i = 0; i < nrows; i++)
		a[i] = (double *)malloc(ncolumns * sizeof(double));

	/* функция calloc */
	int i;
```

```
	double **a = (double **)calloc(nrows, sizeof(double *));
	for (i = 0; i < nrows; i++)
		a[i] = (double *)calloc(ncolumns, sizeof(double));

	/* функция free */
	int i;
	for (i = 0; i < nrows; i++) free(a[i]);
	free(a);
```

Замечание 2. Доступ к элементам массива можно осуществлять как с помощью индексов, так и с помощью указателей. В последнем случае надо учитывать следующие условия:

- Двумерный массив хранится «построчно».
- Арифметика указателей и арифметика индексов массива идентичны.

Приложение

Пример работы с динамическим массивом

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <time.h>

const int MAX=100;
typedef double ** Matrix;

Matrix mallocMatrix(int, int);
void fillMatrix(Matrix, int, int);
void printMatrix(const Matrix, int, int);

int main()
{
	Matrix m;
	int nrows, ncolumns;
	printf("Enter nrows: ");
	scanf("%d", &nrows);
	while (nrows < 1 || nrows > MAX)
	{
		printf("Invalid choice, try again: ");
		scanf("%d", &nrows);
	}
	printf("Enter ncolumns: ");
	scanf("%d", &ncolumns);
	while (ncolumns < 1 || ncolumns > MAX)
	{
		printf("Invalid choice, try again: ");
		scanf("%d", &ncolumns);
	}
	if ((m = mallocMatrix(nrows, ncolumns)) == NULL)
	{
		printf("malloc error!\n");
		return 1;
	}
	fillMatrix(m, nrows, ncolumns);
	printMatrix(m, nrows, ncolumns);

	int i;
	for (i = 0; i < nrows; i++) free(m[i]);
	free(m);

	return 0;
}

Matrix mallocMatrix(int nrows, int ncolumns)
{
	int i, j;
```

```c
	double **a = (double **)malloc(nrows * sizeof(double *));
	for(i = 0; i < nrows; i++)
		a[i] = (double *)malloc(ncolumns * sizeof(double));
	return a;
}

void fillMatrix(Matrix a, int nrows, int ncolumns)
{
	int i, j;
	srand((unsigned)time(NULL));
	for (i = 0; i < nrows; i++)
		for (j = 0; j < ncolumns; j++)
			a[i][j] = (double)(rand() % 100);
}

void printMatrix(const Matrix a, int nrows, int ncolumns)
{
	int i, j;
	for (i = 0; i < nrows; i++)
	{
		for (j = 0; j < ncolumns; j++)
			printf("%7.1lf\t", a[i][j]);
			/* printf("%7.1lf\t", *(*(a + i) + j)); */
		printf("\n");
	}
	printf("\n");
}
```

Обратите внимание на функцию printMatrix: выражение a[i][j] эквивалентно выражению *(*(a + i) + j)).