Таблица 18

Решение линейной системы методом квадратных корней

a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_{i5}	b_i	Σ	Разделы схемы
1	3	−2	0	−2	0,5	0,5	
3	4	−5	1	−3	5,4	5,4	
−2	−5	3	−2	2	5,0	1,0	*А*
0	1	−2	5	3	7,5	14,5	
−2	−3	2	3	4	3,3	7,3	
t_{i1}	t_{i2}	t_{i3}	t_{i4}	t_{i5}	y_i	Σ	
$\underline{1}$	3	−2	0	−2	0,5	0,5	
	$\underline{2,2361i}$	−0,4472*i*	−0,4472*i*	−1,3416*i*	−1,7471*i*	−1,7471*i*	
		$\underline{0,8944i}$	2,0125*i*	1,5653*i*	−7,5803*i*	−3,1081*i*	*Б*
			$\underline{3,0414}$	2,2194	−2,2928	2,9679	
				$\underline{0,8221i}$	0,1643*i*	0,9859*i*	
−6,0978	−2,2016	−6,8011	−0,8996	0,1998		x_i	*В*
−5,0973	−1,2017	−5,8004	0,1007	1,1992		$\overline{x}_i$	

$\overline{x}_i = x_i + 1$, помещая их в разделе *В*. Например,

$$x_3 = \frac{y_3 - t_{35}x_5 - t_{34}x_4}{t_{33}} =$$
$$= \frac{-7,5803i - 1,5652i \cdot 0,1998 - 2,0125i \cdot (-0,8996)}{0,8944i} = -6,8011.$$

§ 9. Схема Халецкого

Для удобства рассуждений систему линейных уравнений запишем в матричном виде

$$Ax = b, \tag{1}$$

где $A = [a_{ij}]$ — квадратная матрица порядка n и

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} a_{1,\,n+1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n,\,n+1} \end{bmatrix}$$

— векторы-столбцы. Представим матрицу A в виде произведения нижней треугольной матрицы $B = [b_{ij}]$ и верхней треугольной матрицы $C = [c_{ij}]$ с единичной диагональю, т. е.

$$A = BC, \tag{2}$$

где

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \ldots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда элементы b_{ij} и c_{ij} определяются по формулам

$$\left.\begin{aligned} &b_{i1} = a_{i1}, \\ &b_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik}c_{kj} \qquad (i \geqslant j > 1) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

и

$$\left.\begin{aligned} &c_{1j} = \frac{a_{1j}}{b_{11}}, \\ &c_{ij} = \frac{1}{b_{ii}}\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik}c_{kj}\right) \qquad (1 < i < j). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Отсюда искомый вектор x может быть вычислен из цепи уравнений

$$By = b, \qquad Cx = y. \tag{5}$$

Так как матрицы B и C — треугольные, то системы (5) легко решаются, а именно:

$$\left.\begin{aligned} &y_1 = \frac{a_{1,\,n+1}}{b_{11}}, \\ &y_i = \frac{1}{b_{ii}}\left(a_{i,\,n+1} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik}y_k\right) \qquad (i > 1) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

и

$$\left.\begin{aligned} &x_n = y_n, \\ &x_i = y_i - \sum_{k=i+1}^{n} c_{ik}x_k \qquad (i < n). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Из формул (6) видно, что числа y_i выгодно вычислять вместе с коэффициентами c_{ij}. Этот метод получил название *схемы Халецкого*. В схеме применяется обычный контроль с помощью сумм.

Заметим, что если матрица A — симметрическая, т. е. $a_{ij} = a_{ji}$, то

$$c_{ij} = \frac{b_{ji}}{b_{ii}} \qquad (i < j).$$

Схема Халецкого удобна для работы на вычислительных машинах, так как в этом случае операции «накопления» (3) и (4) можно проводить без записи промежуточных результатов.

Пример. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} 3x_1+x_2-x_3+2x_4&=6;\\ -5x_1+x_2+3x_3-4x_4&=-12;\\ 2x_1+x_3-x_4&=1;\\ x_1-5x_2+3x_3-3x_4&=3. \end{aligned}\right\}$$

Решение (см. таблицу 19).

В первый раздел таблицы 19 впишем матрицу коэффициентов системы, ее свободные члены и контрольные суммы.

Далее, так как $b_{i1}=a_{i1}$ ($i=1, 2, 3, 4$), то первый столбец из раздела I переносится в первый столбец раздела II.

Чтобы получить первую строку раздела II, делим все элементы первой строки раздела I на элемент $a_{11}=b_{11}$, в нашем случае на 3. Имеем:

$$c_{12}=\frac{1}{3}=0,(3);$$

$$c_{13}=-\frac{1}{3}=-0,(3);$$

$$c_{14}=\frac{2}{3}=0,(6);$$

$$c_{15}=\frac{6}{3}=2;$$

$$c_{16}=\frac{11}{3}=2,(6).$$

Переходим к заполнению второго столбца раздела II, начиная со второй строки. Пользуясь формулами (3), определяем b_{j2}:

$$b_{22}=a_{22}-b_{21}c_{12}=1-\left(-5\cdot\frac{1}{3}\right)=\frac{8}{3}=2,66\,(6);$$

$$b_{32}=a_{32}-b_{31}c_{12}=0-2\cdot\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}=0,(6);$$

$$b_{42}=a_{42}-b_{41}c_{12}=-5-1\cdot\frac{1}{3}=-5\frac{1}{3}=-5,(3).$$

Далее, определяя c_{2j} ($j=3, 4, 5, 6$) по формулам (4), заполняем вторую строку раздела II:

$$c_{23}=\frac{1}{b_{22}}(a_{23}-b_{21}c_{13})=\frac{3}{8}\left[3-(-5)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\right]=\frac{1}{2};$$

$$c_{24}=\frac{1}{b_{22}}(a_{24}-b_{21}c_{14})=\frac{3}{8}\left[(-4)-(-5)\cdot\frac{2}{3}\right]=-\frac{1}{4};$$

$$c_{25}=\frac{1}{b_{22}}(a_{25}-b_{21}c_{15})=\frac{3}{8}\left[(-12)-(-5)\cdot 2\right]=-\frac{3}{4};$$

$$c_{26}=\frac{1}{b_{22}}(a_{26}-b_{21}c_{16})=\frac{3}{8}\left[(-17)-(-5)\cdot\frac{11}{3}\right]=\frac{1}{2}.$$

Таблица 19

	x_1	x_2	x_3	x_4		Σ	x_1	x_2	x_3	x_4		Σ
I	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	3	1	−1	2	6	11
	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}	−5	1	3	−4	−12	−17
	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{36}	2	0	1	−1	1	3
	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	a_{46}	1	−5	3	−3	3	−1
II	b_{11} 1	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	c_{16}	3 1	0,333333	−0,333333	0,666667	2	3,666667
	b_{21}	b_{22} 1	c_{23}	c_{24}	c_{25}	c_{26}	−5	2,666667 1	0,5	−0,25	−0,75	0,5
	b_{31}	b_{32}	b_{33} 1	c_{34}	c_{35}	c_{36}	2	−0,666667	2 1	−1,25	−1,75	−2
	b_{41}	b_{42}	b_{43}	b_{44} 1	c_{45}	c_{46}	1	−5,333333	6	2,5 1	3	4
III					y_1	x_1					2	1
					y_2	x_2					−0,75	−1
					y_3	x_3					−1,75	2
					y_4	x_4					3	3

Затем переходим к третьему столбцу, вычисляя его элементы b_{33} и b_{34} по формулам (3) и т. д., пока не будет заполнена вся таблица раздела II. Таким образом, заполнение раздела II происходит способом «елочки»: столбец — строка, столбец — строка и т. д.

В разделе III, пользуясь формулами (6) и (7), определяем y_i и x_i $(i=1, 2, 3, 4)$.

Текущий контроль осуществляется с помощью столбца $\sum$, над которым производятся те же действия, что и над столбцом свободных членов.

§ 10. Метод итерации

При большом числе неизвестных линейной системы схема метода Гаусса, дающая точное решение, становится весьма сложной. В этих условиях для нахождения корней системы иногда удобнее пользоваться приближенными численными методами. Изложим здесь один из этих методов — *метод итерации*.

Пусть дана линейная система

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Введя в рассмотрение матрицы

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix},$$

систему (1) коротко можно записать в виде матричного уравнения

$$Ax=b. \qquad (1')$$

Предполагая, что диагональные коэффициенты

$$a_{ii}\neq 0 \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

разрешим первое уравнение системы (1) относительно x_1, второе — относительно x_2 и т. д. Тогда получим эквивалентную систему

$$\left.\begin{array}{l} x_1=\beta_1+\alpha_{12}x_2+\alpha_{13}x_3+\ldots+\alpha_{1n}x_n, \\ x_2=\beta_2+\alpha_{21}x_1+\alpha_{23}x_3+\ldots+\alpha_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n=\beta_n+\alpha_{n1}x_1+\alpha_{n2}x_2+\ldots+\alpha_{n,\,n-1}x_{n-1}, \end{array}\right\} \qquad (2)$$

где

$$\beta_i=\frac{b_i}{a_{ii}}; \qquad \alpha_{ij}=-\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \qquad \text{при } i\neq j$$

и $\alpha_{ij}=0$ при $i=j$ $(i, j=1, 2, \ldots, n)$.

Введя матрицы

$$\alpha=\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \beta=\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_n \end{bmatrix},$$

систему (2) можем записать в матричной форме

$$x=\beta+\alpha x. \qquad (2')$$

Систему (2) будем решать методом последовательных приближений. За нулевое приближение принимаем, например, столбец свободных членов $x^{(0)}=\beta$.

Далее, последовательно строим матрицы-столбцы

$$x^{(1)}=\beta+\alpha x^{(0)}$$

(первое приближение),

$$x^{(2)}=\beta+\alpha x^{(1)}$$

(второе приближение) и т. д.

Вообще говоря, любое $(k+1)$-е приближение вычисляют по формуле

$$x^{(k+1)}=\beta+\alpha x^{(k)} \qquad (k=0, 1, 2, \ldots). \qquad (3)$$

Если последовательность приближений $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}, \ldots$ имеет предел

$$x=\lim_{k\to\infty} x^{(k)},$$

то этот предел является решением системы (2). В самом деле, переходя к пределу в равенстве (3), будем иметь:

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k+1)}=\beta+\alpha\lim_{k\to\infty} x^{(k)}$$

или

$$x=\beta+\alpha x,$$

т. е. предельный вектор x является решением системы (2′), а следовательно, и системы (1).

Напишем формулы приближений в развернутом виде:

$$\left.\begin{array}{l} x_i^{(0)}=\beta_i, \\ x_i^{(k+1)}=\beta_i+\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_j^{(k)} \\ (\alpha_{ii}=0;\ i=1, \ldots, n;\ k=0, 1, 2, \ldots). \end{array}\right\} \qquad (3')$$