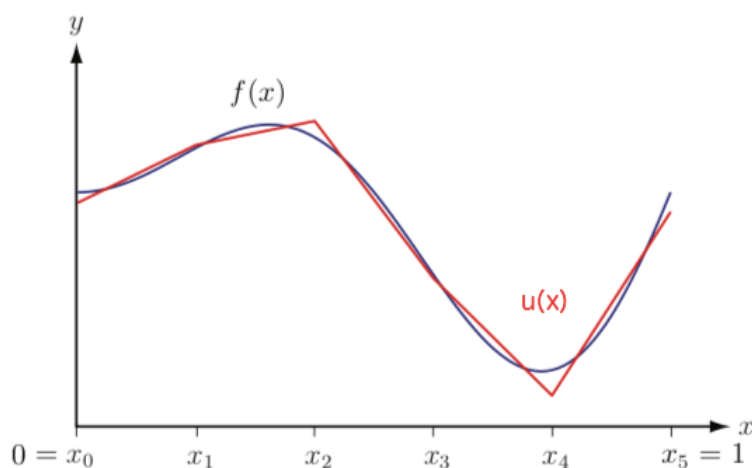


ООPython

Задача 7. Аппроксимация функций методом конечных элементов

Элементы теории

Будем решать задачу аппроксимации заданной функции f кусочно-линейной функцией u :

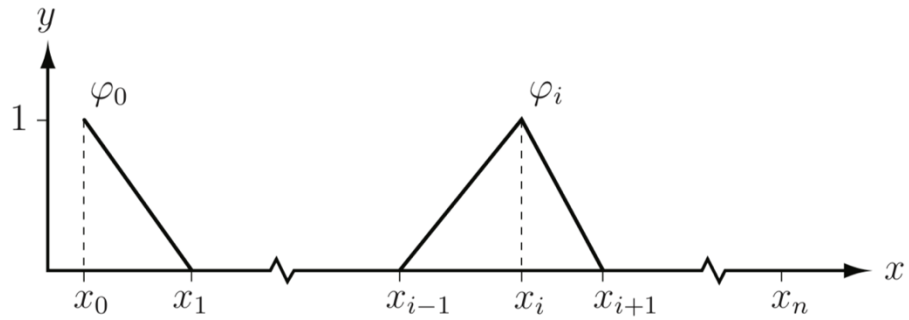


Точки $\{x_j\}$ отрезка, в которых происходит излом функции u , делят отрезок на подобласти – **конечные элементы**.

В пространстве кусочно-линейных функций V имеется базис из т.н. функций-«шляпок» $\{\varphi_j\}$. Т.о. искомую функцию u можно записать в виде суммы с неопределенными коэффициентами $\{\alpha_j\}$:

$$u = \sum_{j=0}^n \alpha_j \varphi_j, \quad n - \text{число конечных элементов} \quad (1)$$

Задача состоит в нахождении этих коэффициентов, при которых функция u будет «близка» к заданной функции f .



Методы нахождения коэффициентов

Метод наименьших квадратов

Будем искать коэффициенты исходя из формулы

$$\int_0^1 [f(x) - u(x)]^2 dx \rightarrow \min_{\{\alpha_j\}} \quad (2)$$

Введем несколько обозначений:

$$\begin{aligned} e &= f - u \\ (f, g) &= \int_0^1 f(x)g(x)dx \end{aligned} \quad (3)$$

Перепишем формулу (2) с учетом новых обозначений:

$$\begin{aligned} \int_0^1 e(x)^2 dx &= (e, e) \rightarrow \min_{\{\alpha_j\}}; \\ (e, e) &= \left(f - \sum_{j=0}^n \alpha_j \varphi_j, f - \sum_{j=0}^n \alpha_j \varphi_j \right) = (f, f) - 2 \sum_{j=0}^n \alpha_j (f, \varphi_j) + \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^n \alpha_p \alpha_q (\varphi_p, \varphi_q) = \\ &= E(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \rightarrow \min_{\{\alpha_j\}} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha_j} = 0, \quad j = 0, \dots, n \quad (5)$$

Пропуская выкладки, для нахождения коэффициентов $\{\alpha_j\}$ получаем СЛАУ:

$$\begin{aligned} M\mathbf{a} &= \mathbf{b} \\ M_{ij} &= (\varphi_i, \varphi_j) \\ b_i &= (f, \varphi_i) \\ i, j &= 0, \dots, n \end{aligned} \quad (6)$$

Решив СЛАУ и найдя коэффициенты $\{\alpha_j\}$, подставим их в формулу (1) – получаем приближенное решение.

Примечание: в случае кусочно-линейной аппроксимации **матрица масс** M_{ij} -

симметричная трехдиагональная, значит, для повышения эффективности расчетов:

- вычислять требуется только элементы матрицы, расположенные на диагоналях
- для решения СЛАУ можно воспользоваться эффективным методом прогонки

L₂-проекция

Будем искать коэффициенты исходя из формулы

$$(e, v) = 0, \quad \forall v \in V, \quad (7)$$

что эквивалентно выполнению условий

$$(e, \varphi_i) = 0, \quad i = 0, \dots, n \quad (8)$$

Покажем это:

- если выполняется (7), то $(e, \varphi_i) = 0$, т.к. $\varphi_i \in V$, $i = 0, \dots, n$
- в обратную сторону: если выполняется (8), то

$$\beta_i (e, \varphi_i) = 0; \quad \sum_{i=0}^n \beta_i (e, \varphi_i) = 0; \quad \left(e, \sum_{i=0}^n \beta_i \varphi_i \right) = 0; \quad (e, v) = 0; \quad \beta_i - \text{произвольное}$$

вещественное число.

Итак:

$$(e, \varphi_i) = 0, \quad i = 0, \dots, n \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \left(f - \sum_{j=0}^n \alpha_j \varphi_j, \varphi_i \right) &= 0, \quad i = 0, \dots, n \\ (f, \varphi_i) - \sum_{j=0}^n (\varphi_i, \varphi_j) \alpha_j &= 0, \quad i = 0, \dots, n \\ \sum_{j=0}^n (\varphi_i, \varphi_j) \alpha_j &= (f, \varphi_i), \quad i = 0, \dots, n \end{aligned} \quad (10)$$

В матричном виде:

$$\begin{aligned} M\mathbf{a} &= \mathbf{b} \\ M_{ij} &= (\varphi_i, \varphi_j) \\ b_i &= (f, \varphi_i) \\ i, j &= 0, \dots, n \end{aligned} \quad (11)$$

Получилась та же СЛАУ, что и в результате применения метода наименьших квадратов.

Примечание: скорее всего, исторически, сначала были получены формулы для элементов матрицы M_{ij} и вектора b_i через метод наименьших квадратов. Исходя из этих формул, можно провести рассуждения в обратном порядке и получить исходную формулу метода – (7).

Интерполяция

Ищем коэффициенты исходя из равенств u и f в узлах интерполяции $\{x_i\}$:

$$u(x_i) = \sum_{j=0}^n \alpha_j \varphi_j(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n \quad (12)$$

В матричной форме эта СЛАУ записывается в виде:

$$\begin{aligned} M\mathbf{a} &= \mathbf{b} \\ M_{ij} &= \varphi_j(x_i) \\ b_i &= f(x_i) \\ i, j &= 0, \dots, n \end{aligned} \quad (13)$$

Регрессия

Ищем коэффициенты исходя из равенств u и f в узлах регрессии $\{x_i\}$:

$$u(x_i) = \sum_{j=0}^n \alpha_j \varphi_j(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, m, \quad m > n \quad (14)$$

Эта СЛАУ – переопределенная, у нее нет решения в классическом понимании. Однако, с помощью метода наименьших квадратов для СЛАУ, можно найти ее псевдорешение – точку в \mathbb{R}^{n+1} , доставляющую минимум функции $F(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$:

$$F(\alpha_0, \dots, \alpha_n) = \sum_{i=0}^m \left(\sum_{j=0}^n \alpha_j \varphi_j(x_i) - f(x_i) \right)^2 \rightarrow \min_{\{\alpha_j\}} \quad (15)$$

Приравниваем нулю производные по коэффициентам:

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_j} = 0, \quad j = 0, \dots, n \quad (16)$$

Пропуская выкладки, для нахождения коэффициентов $\{\alpha_j\}$ получаем СЛАУ:

$$\begin{aligned}
M^T M \mathbf{a} &= M^T \mathbf{b} \\
M_{ij} &= \varphi_j(x_i) \\
b_i &= f(x_i) \\
j &= 0, \dots, n \\
i &= 0, \dots, m
\end{aligned} \tag{17}$$

Задание

Определение классов

Для методов **наименьших квадратов**, **интерполяции** и **регрессии** реализовать соответствующие классы **FEMSolverName**, минимизировав суммарное число строк кода с помощью наследования. В качестве заготовки использовать класс **FEMSolverLeastSquares** из **lecture_11_approximation_of_functions.ipynb**.

Использование классов

Использовать созданные классы для нахождения функций-аппроксимаций функции

$f(x) = 1 + x^2 \sin(2\pi x)$, $x \in I = [0, 1]$. Число конечных элементов на отрезке I : $n = 5$.

В одном графическом окне построить графики:

- функции-аппроксимации, полученной методом наименьших квадратов
- ф ункции-аппроксимации, полученной методом интерполяции; точки

интерполяции $X_{int} = \left\{ x_i : x_i = \frac{1}{5}i, i = 0, \dots, 5 \right\}$

- ф ункции-аппроксимации, полученной методом регрессии; точки регрессии

$X_{reg} = \left\{ x_i : x_i = \frac{1}{7}i, i = 0, \dots, 7 \right\}$

- аппроксимируемой функции f