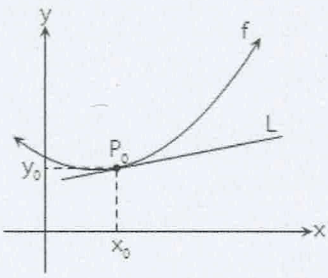
บทที่ 3

การประยุกต์อนุพันธ์ (The Derivative in Applications)

3.1 อนุพันธ์ในทางเรขาคณิต

3.1.1 ความหมายของอนุพันธ์ในทางเรขาคณิต

กำหนดให้ L เป็นเส้นสัมผัส (tangent line) เส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด $P_0(x_0, y_0)$ ดังรูป



โดยบทนิยาม 2.1 และ 2.3 จะได้ความชัน (slope) ของเส้นตรง L ที่จุด (x_0, y_0) คือ $m = f'(x_0)$ หรือ $m = \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(x_0,y_0)}$

ตัวอย่าง 3.1. จงหาความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^2 - 3x$ ที่จุด $(2, -2)$

<u>วิธีทำ</u>

3.1.2 เส้นสัมผัส (Tangent Line)

สมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด (x_0, y_0) คือ $y - y_0 = m(x - x_0)$ โดยที่ $m = f'(x_0)$ หรือ $m = \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(x_0,y_0)}$

ตัวอย่าง 3.2. จงหาสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = \dfrac{x^3}{2} - 3x + \dfrac{1}{2}$ ที่จุด $(-1, 3)$

<u>วิธีทำ</u>

<u>แบบฝึกหัด</u> 3.1.

จงเลือกคำตอบที่ถูกต้อง

1. ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{2}{x} - \sqrt{x}$ ที่จุด $(1, \frac{3}{2})$ ตรงกับข้อใด

   (1) $-\dfrac{3}{2}$ (2) $\dfrac{3}{2}$ (3) $-\dfrac{5}{2}$ (4) $\dfrac{5}{2}$

2. ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = (3x + 1)^2$ ที่จุด $(0, 1)$ ตรงกับข้อใด

   (1) 1 (2) 2 (3) 4 (4) 6

3. ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $x^2 - y^3 = 3$ ที่จุด $(2, 1)$ ตรงกับข้อใด

   (1) $\dfrac{1}{6}$ (2) $-\dfrac{1}{6}$ (3) $\dfrac{4}{3}$ (4) $-\dfrac{4}{3}$

4. ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = 4\sin x$ ที่จุด $(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ตรงกับข้อใด

   (1) $\sqrt{2}$ (2) $2\sqrt{2}$ (3) $\sqrt{3}$ (4) $2\sqrt{3}$

5. สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^3 - x$ ที่จุด $(-1, 0)$ ตรงกับข้อใด

   (1) $4x + y + 4 = 0$ (2) $4x + y - 4 = 0$

   (3) $2x - y - 2 = 0$ (4) $2x - y + 2 = 0$

6. สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{2}{x} - \sqrt{x}$ ที่จุด $(1, \frac{3}{2})$ ตรงกับข้อใด

   (1) $3x + 2y - 6 = 0$ (2) $3x + 2y + 6 = 0$

   (3) $3x - 2y = 0$ (4) $3x + 2y + 1 = 0$

7. สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y^2 - 4x + 3y = 4xy$ ที่จุด $(0, -3)$ ตรงกับข้อใด

   (1) $8x - 3y + 9 = 0$ (2) $8x - 3y - 9 = 0$

   (3) $8x + 3y + 9 = 0$ (4) $8x + 3y - 9 = 0$

3.2 อัตราสัมพัทธ์ (Related Rates)

เมื่อปริมาณ 2 ปริมาณ มีความสัมพันธ์กัน นั่นคือ ถ้าปริมาณหนึ่งมีการเปลี่ยนแปลง จะส่งผลให้อีกปริมาณหนึ่งมีการเปลี่ยนแปลงด้วย และถ้าปริมาณหนึ่งเปลี่ยนแปลงด้วยอัตราการเปลี่ยนแปลงค่าหนึ่ง จะมีผลต่ออัตราการเปลี่ยนแปลงของอีกปริมาณหนึ่งด้วย เราเรียกอัตราการเปลี่ยนแปลงที่มีผลต่อกันเช่นนี้ ว่า **อัตราสัมพัทธ์** (Related Rates)

ตัวอย่าง 3.3. ให้ x, y เป็นฟังก์ชันของ t โดยที่ $x^2 + y^2 = 13$ จงหาความสัมพันธ์ของอัตราการเปลี่ยนแปลงของ x และ y เทียบกับ t

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง 3.4. ให้ x, y เป็นฟังก์ชันของ t โดยที่ $x^2 - 3y = 3$ และ $\frac{dx}{dt} = 5$ จงหา $\frac{dy}{dt}$ ขณะที่ $x = 3$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง 3.5. ถ้าความยาวด้านของสี่เหลี่ยมจัตุรัสเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 2 นิ้ว/วินาที จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่ของสี่เหลี่ยมจัตุรัส ขณะที่สี่เหลี่ยมจัตุรัสมีความยาวด้าน 6 นิ้ว

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง 3.6. ปล่อยลมออกจากบอลลูนทรงกลมด้วยอัตรา 10 ลูกบาศก์นิ้วต่อวินาที จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของรัศมีบอลลูนขณะที่บอลลูนมีรัศมี 8 นิ้ว

<u>วิธีทำ</u>

แบบฝึกหัด 3.2.

จงเลือกคำตอบที่ถูกต้อง

โจทย์ต่อไปนี้ใช้ตอบคำถามข้อ 1-3

ถ้ารัศมีของวงกลมเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 3 นิ้ว/วินาที จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่ของวงกลม ขณะที่วงกลมมีรัศมี 5 นิ้ว

กำหนดให้ A แทนพื้นที่ของวงกลม ขณะเวลา t

r แทนรัศมีของวงกลม ขณะเวลา t

1. ความสัมพันธ์ระหว่าง A และ r ตรงกับข้อใด

(1) $A = \pi r^2$ (2) $A = \frac{4}{3}\pi r^2$

(3) $A = \frac{4}{3}\pi r^3$ (4) $A = 2\pi r$

2. ความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{dA}{dt}$ และ $\frac{dr}{dt}$ ตรงกับข้อใด

(1) $\frac{dA}{dt} = 2\pi r\frac{dr}{dt}$ (2) $\frac{dA}{dt} = \frac{8}{3}\pi r\frac{dr}{dt}$

(3) $\frac{dA}{dt} = 4\pi r^2\frac{dr}{dt}$ (4) $\frac{dA}{dt} = 2\pi\frac{dr}{dt}$

3. อัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่ของวงกลม ขณะที่วงกลมมีรัศมี 5 นิ้ว ตรงกับข้อใด

(1) พื้นที่ของวงกลมลดลงด้วยอัตรา 30π ตารางนิ้ว/วินาที

(2) พื้นที่ของวงกลมเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 30π ตารางนิ้ว/วินาที

(3) พื้นที่ของวงกลมลดลงด้วยอัตรา 300π ตารางนิ้ว/วินาที

(4) พื้นที่ของวงกลมเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 300π ตารางนิ้ว/วินาที

โจทย์ต่อไปนี้ใช้ตอบคำถามข้อ 4-6

บรรจุลมใส่บอลลูนทรงกลมด้วยอัตรา 10 ลูกบาศก์นิ้วต่อวินาที จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของรัศมีของบอลลูน ขณะที่บอลลูนมีรัศมี 5 นิ้ว

กำหนดให้ V แทนปริมาตรของบอลลูน ขณะเวลา t

r แทนรัศมีของบอลลูน ขณะเวลา t

4. ความสัมพันธ์ระหว่าง V และ r ตรงกับข้อใด

(1) $V = 2\pi r$ (2) $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

(3) $V = \pi r^2$ (4) $V = \frac{4}{3}\pi r^2$

5. ความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{dV}{dt}$ และ $\frac{dr}{dt}$ ตรงกับข้อใด

(1) $\frac{dV}{dt} = 2\pi r\frac{dr}{dt}$ (2) $\frac{dV}{dt} = \frac{8}{3}\pi r\frac{dr}{dt}$

(3) $\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2\frac{dr}{dt}$ (4) $\frac{dV}{dt} = 2\pi\frac{dr}{dt}$

6. อัตราการเปลี่ยนแปลงของรัศมีของบอลลูน ขณะที่บอลลูนมีรัศมี 5 นิ้ว ตรงกับข้อใด

(1) รัศมีของบอลลูนเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา $\frac{1}{10\pi}$ นิ้ว/วินาที

(2) รัศมีของบอลลูนลดลงด้วยอัตรา $\frac{1}{10\pi}$ นิ้ว/วินาที

(3) รัศมีของบอลลูนเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา $\frac{3}{4\pi}$ นิ้ว/วินาที

(4) รัศมีของบอลลูนลดลงด้วยอัตรา $\frac{3}{4\pi}$ นิ้ว/วินาที

โจทย์ต่อไปนี้ใช้ตอบคำถามข้อ 7-9

ปล่อยน้ำออกจากถังทรงกระบอกกลมรัศมี 2 ฟุต สูง 6 ฟุต ด้วยอัตรา 1 ลูกบาศก์ฟุตต่อนาที จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของระดับน้ำขณะระดับน้ำสูง 3 ฟุต

กำหนดให้ V แทนปริมาตรของน้ำในถังทรงกระบอกกลม ขณะเวลา t

h แทนระดับของน้ำในถังทรงกระบอกกลม ขณะเวลา t

7. ความสัมพันธ์ระหว่าง V และ h ตรงกับข้อใด

(1) $V = \pi h$ (2) $V = \frac{1}{3}\pi h$

(3) $V = 4\pi h$ (4) $V = \frac{4}{3}\pi h$

8. ความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{dV}{dt}$ และ $\frac{dh}{dt}$ ตรงกับข้อใด

(1) $\frac{dV}{dt} = \pi\frac{dh}{dt}$ (2) $\frac{dV}{dt} = \frac{1}{3}\pi\frac{dh}{dt}$

(3) $\frac{dV}{dt} = 4\pi\frac{dh}{dt}$ (4) $\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi\frac{dh}{dt}$

9. อัตราการเปลี่ยนแปลงของระดับน้ำในถังทรงกระบอกกลม ขณะระดับน้ำสูง 3 ฟุต ตรงกับข้อใด

(1) ระดับน้ำในถังทรงกระบอกกลมเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา $\frac{3}{4\pi}$ ฟุต/นาที

(2) ระดับน้ำในถังทรงกระบอกกลมลดลงด้วยอัตรา $\frac{3}{4\pi}$ ฟุต/นาที

(3) ระดับน้ำในถังทรงกระบอกกลมเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา $\frac{1}{4\pi}$ ฟุต/นาที

(4) ระดับน้ำในถังทรงกระบอกกลมลดลงด้วยอัตรา $\frac{1}{4\pi}$ ฟุต/นาที

โจทย์ต่อไปนี้ใช้ตอบคำถามข้อ 10-12

บันไดยาว 26 ฟุต วางพิงอยู่กับกำแพง ถ้าเลื่อนปลายบันไดด้านล่างออกจากกำแพงด้วยอัตรา 4 ฟุตต่อวินาที แล้วปลายบันไดด้านบนเลื่อนลงด้วยอัตราเท่าใด ขณะที่ปลายบันไดด้านล่างอยู่ห่างกำแพง 10 ฟุต

กำหนดให้ x แทนระยะทางระหว่างปลายบันไดด้านล่างกับกำแพง ขณะเวลา t

y แทนระยะทางระหว่างปลายบันไดด้านบนกับพื้น ขณะเวลา t

10. ความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y ตรงกับข้อใด

(1) $y^2 = x^2 + 26$ (2) $y^2 = x^2 + 676$

(3) $x^2 + y^2 = 26$ (4) $x^2 + y^2 = 676$

11. ความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{dx}{dt}$ และ $\frac{dy}{dt}$ ตรงกับข้อใด

(1) $\frac{dy}{dt} = \frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$ (2) $\frac{dy}{dt} = \frac{y}{x}\frac{dx}{dt}$

(3) $\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$ (4) $\frac{dy}{dt} = -\frac{y}{x}\frac{dx}{dt}$

12. ขณะที่ปลายบันไดด้านล่างอยู่ห่างกำแพง 10 ฟุต ปลายบันไดด้านบนเลื่อนลงด้วยอัตราข้อใด

(1) $\frac{5}{3}$ ฟุตต่อวินาที (2) $-\frac{5}{3}$ ฟุตต่อวินาที

(3) $\frac{5}{2}$ ฟุตต่อวินาที (4) $-\frac{5}{2}$ ฟุตต่อวินาที

<u>โจทย์ต่อไปนี้ใช้ตอบคำถามข้อ 13-15</u>

เปิดน้ำใส่ถังรูปกรวยกลมที่มีความสูง 4 ฟุต และรัศมี 3 ฟุต ด้วยอัตรา 1 ลูกบาศก์ฟุตต่อวินาที จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของรัศมีของผิวน้ำ ขณะที่รัศมีผิวน้ำยาว 2 ฟุต

กำหนดให้ V แทนปริมาตรของน้ำในถังรูปกรวยกลม ขณะเวลา t

r แทนรัศมีของผิวน้ำในถังรูปกรวยกลม ขณะเวลา t

13. ความสัมพันธ์ระหว่าง V และ r ตรงกับข้อใด

(1) $V = \frac{1}{3}\pi r^2$ (2) $V = \frac{4}{3}\pi r^2$

(3) $V = \frac{1}{4}\pi r^3$ (4) $V = \frac{4}{9}\pi r^3$

14. ความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{dV}{dt}$ และ $\frac{dr}{dt}$ ตรงกับข้อใด

(1) $\frac{dV}{dt} = \frac{3}{4}\pi r^2\frac{dr}{dt}$ (2) $\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi r^2\frac{dr}{dt}$

(3) $\frac{dV}{dt} = \frac{2}{3}\pi r\frac{dr}{dt}$ (4) $\frac{dV}{dt} = \frac{8}{3}\pi r\frac{dr}{dt}$

15. อัตราการเปลี่ยนแปลงของรัศมีของผิวน้ำ ขณะที่รัศมีผิวน้ำยาว 2 ฟุต ตรงกับข้อใด

(1) รัศมีของผิวน้ำเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา $\frac{1}{3\pi}$ ฟุต/วินาที

(2) รัศมีของผิวน้ำลดลงด้วยอัตรา $\frac{1}{3\pi}$ ฟุต/วินาที

(3) รัศมีของผิวน้ำเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา $\frac{3}{16\pi}$ ฟุต/วินาที

(4) รัศมีของผิวน้ำลดลงด้วยอัตรา $\frac{3}{16\pi}$ ฟุต/วินาที

<u>โจทย์ต่อไปนี้ใช้ตอบคำถามข้อ 16-18</u>

เปิดน้ำออกจากถังรูปกรวยกลมที่มีความสูง 4 ฟุต และรัศมี 3 ฟุต ด้วยอัตรา 1 ลูกบาศก์ฟุตต่อวินาที จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของระดับน้ำ ขณะที่ระดับน้ำสูง 2 ฟุต

กำหนดให้ V แทนปริมาตรของน้ำในถังรูปกรวยกลม ขณะเวลา t

h แทนระดับน้ำในถังรูปกรวยกลม ขณะเวลา t

16. ความสัมพันธ์ระหว่าง V และ h ตรงกับข้อใด

(1) $V = 3\pi h$ (2) $V = 9\pi h$

(3) $V = \frac{16}{27}\pi h^3$ (4) $V = \frac{3}{16}\pi h^3$

17. ความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{dV}{dt}$ และ $\frac{dh}{dt}$ ตรงกับข้อใด

(1) $\frac{dV}{dt} = 3\pi\frac{dh}{dt}$ (2) $\frac{dV}{dt} = 9\pi\frac{dh}{dt}$

(3) $\frac{dV}{dt} = \frac{16}{9}\pi h^2\frac{dh}{dt}$ (4) $\frac{dV}{dt} = \frac{9}{16}\pi h^2\frac{dh}{dt}$

18. อัตราการเปลี่ยนแปลงของระดับน้ำ ขณะที่ระดับน้ำสูง 2 ฟุต ตรงกับข้อใด

(1) ระดับน้ำเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา $\frac{4}{9\pi}$ ฟุต/วินาที

(2) ระดับน้ำลดลงด้วยอัตรา $\frac{4}{9\pi}$ ฟุต/วินาที

(3) ระดับน้ำเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา $\frac{9}{64\pi}$ ฟุต/วินาที

(4) ระดับน้ำลดลงด้วยอัตรา $\frac{9}{64\pi}$ ฟุต/วินาที

3.3 ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน (Relative Maximum and Minimum)

บทนิยาม 3.1. จะกล่าวว่า f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ (relative maximum) ที่ x_0 ถ้ามีช่วงเปิดที่มี x_0 อยู่ในช่วงซึ่ง $f(x_0) \geq f(x)$ สำหรับทุกๆ x ที่อยู่ในช่วง จะกล่าวว่า f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ (relative minimum) ที่ x_0 ถ้ามีช่วงเปิดที่มี x_0 อยู่ในช่วงซึ่ง $f(x_0) \leq f(x)$ สำหรับทุกๆ x ที่อยู่ในช่วง และจะกล่าวว่า f มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ (relative extremum) ที่ x_0 ถ้า f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือมีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ x_0

ทฤษฎีบท 3.1. ถ้า f มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ (relative extremum) แล้วค่าสุดขีดสัมพัทธ์จะเกิดที่จุดซึ่งมี $f'(x) = 0$ หรือ f ไม่มีอนุพันธ์

<u>หมายเหตุ</u>

เรียกจุดซึ่งมี $f'(x) = 0$ หรือ f ไม่มีอนุพันธ์ จากทฤษฎีบท 3.1 ว่า จุดวิกฤต (critical point)

ทฤษฎีบท 3.2. (First Derivative Test)

ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุดวิกฤต x_0

1. ถ้า $f'(x) > 0$ สำหรับ x ในช่วงเปิดทางซ้ายของ x_0 และ $f'(x) < 0$ สำหรับ x ในช่วงเปิดทางขวาของ x_0 แล้ว f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ที่ x_0
2. ถ้า $f'(x) < 0$ สำหรับ x ในช่วงเปิดทางซ้ายของ x_0 และ $f'(x) > 0$ สำหรับ x ในช่วงเปิดทางขวาของ x_0 แล้ว f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ที่ x_0
3. ถ้า $f'(x) > 0$ สำหรับ x ในช่วงเปิดทางซ้ายและทางขวาของ x_0 หรือ $f'(x) < 0$ สำหรับ x ในช่วงเปิดทางซ้ายและทางขวาของ x_0 แล้ว f ไม่มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ที่ x_0

ทฤษฎีบท 3.3. (Second Derivative Test)

ให้ f เป็นฟังก์ชันหาอนุพันธ์อันดับสองได้ที่จุดวิกฤติ x_0

1. ถ้า $f''(x_0) > 0$ แล้ว f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ที่ x_0
2. ถ้า $f''(x_0) < 0$ แล้ว f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ที่ x_0
3. ถ้า $f''(x_0) = 0$ สรุปไม่ได้

ตัวอย่าง 3.7. จงหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$$

<u>วิธีทำ</u>

แบบฝึกหัด 3.3.

จงเลือกคำตอบที่ถูกต้อง

กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = 4 + 3x - x^3$

จงตอบคำถามข้อ 1-3

1. จุดวิกฤตของ f ตรงกับข้อใด

(1) $(1,6)$ และ $(-1,0)$ (2) $(1,6)$ และ $(-1,2)$

(3) $(1,8)$ และ $(-1,0)$ (4) $(1,8)$ และ $(-1,2)$

2. ข้อใดกล่าวถูกต้อง

(1) f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่จุดวิกฤต $(1,6)$

(2) f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่จุดวิกฤต $(1,8)$

(3) f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่จุดวิกฤต $(-1,0)$

(4) f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่จุดวิกฤต $(-1,2)$

3. ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f ตรงกับข้อใด

(1) 0 (2) 2 (3) 6 (4) 8

กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - 6x + 3$

จงตอบคำถามข้อ 4-5

4. ค่า x ของจุดวิกฤตของ f ตรงกับข้อใด

(1) $2, 3$ (2) $-2, -3$ (3) $-2, 3$ (4) $2, -3$

5. ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f ตรงกับข้อใด

(1) 5 (2) -5 (3) $\dfrac{31}{3}$ (4) $-\dfrac{21}{2}$

กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$

จงตอบคำถามข้อ 6-7

6. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. f มีจุดวิกฤตจำนวน 3 จุด

ข. f มีจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ 2 จุด

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

(1) ข้อ ก. ถูก ข้อ ข. ถูก (2) ข้อ ก. ถูก ข้อ ข. ผิด

(3) ข้อ ก. ผิด ข้อ ข. ถูก (4) ข้อ ก. ผิด ข้อ ข. ผิด

7. จุดสูงสุดสัมพัทธ์ของ f ตรงกับข้อใด

(1) $(1,8)$ (2) $(-1,4)$ (3) $(0,-4)$ (4) $(0,5)$

กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = 4 - 4x^2 + 4x^3 - x^4$

จงตอบคำถามข้อ 8-9

8. ค่าของ x ที่ทำให้ $f'(x) = 0$ ตรงกับข้อใด

(1) $0, -1, -2$ (2) $0, 1, 2$ (3) $-1, -2$ (4) $1, 2$

9. ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f ตรงกับข้อใด

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

3.4 รูปแบบไม่กำหนด

3.4.1 รูปแบบไม่กำหนด (Indeterminate Forms)

รูปแบบไม่กำหนด หมายถึง ลิมิตของฟังก์ชันที่มีค่าอยู่ในรูปที่ยังไม่กำหนดค่า ซึ่งมีทั้งหมด 7 รูปแบบ ได้แก่ $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0$ และ 1^∞

3.4.2 หลักเกณฑ์โลปิตาล (L'Hopital's Rule)

ทฤษฎีบท 3.4. (หลักเกณฑ์โลปิตาลสำหรับรูปแบบ $\dfrac{0}{0}$)
ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันหาอนุพันธ์ได้ในช่วงเปิดที่มี a อยู่ในช่วง โดยที่ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ และ $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$

ถ้า $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (หรือ $\pm\infty$)

แล้ว $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

(เป็นจริงสำหรับ $x \to a^-$, $x \to a^+$, $x \to -\infty$, และ $x \to +\infty$ ด้วย)

ทฤษฎีบท 3.5. (หลักเกณฑ์โลปิตาลสำหรับรูปแบบ $\dfrac{\infty}{\infty}$)
ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันหาอนุพันธ์ได้ในช่วงเปิดที่มี a อยู่ในช่วง โดยที่ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ และ $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty$

ถ้า $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (หรือ $\pm\infty$)

แล้ว $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

(เป็นจริงสำหรับ $x \to a^-$, $x \to a^+$, $x \to -\infty$, และ $x \to +\infty$ ด้วย)

3.4.3 การหาค่าลิมิตรูปแบบไม่กำหนด

1. รูปแบบไม่กำหนด $\frac{0}{0}$

ใช้หลักเกณฑ์โลปิตาลสำหรับรูปแบบ $\frac{0}{0}$ ดังทฤษฎีบท 3.4

ตัวอย่าง 3.8. จงหาค่า $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{e^x - \cos x}$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง 3.9. จงหาค่า $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x - 1}$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง 3.10. จงหาค่า $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - e^{2x} + \sin(2x)}{1 - \cos(3x)}$

<u>วิธีทำ</u>

2. รูปแบบไม่กำหนด $\frac{\infty}{\infty}$

ใช้หลักเกณฑ์โลปิตาลสำหรับรูปแบบ $\frac{\infty}{\infty}$ ดังทฤษฎีบท 3.5

ตัวอย่าง 3.11. จงหาค่า $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง 3.12. จงหาค่า $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - 1}{x^2 + x}$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง 3.13. จงหาค่า $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x + x}{e^{2x} + 1}$

<u>วิธีทำ</u>

<u>แบบฝึกหัด</u> 3.4.

จงเลือกคำตอบที่ถูกต้อง

1. ค่าของ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-\cos x}{x-\sin(3x)}$ ตรงกับข้อใด

(1) $\frac{1}{2}$ (2) 1 (3) -1 (4) หาค่าไม่ได้

2. ค่าของ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x}{\cos x}$ ตรงกับข้อใด

(1) 0 (2) 1 (3) -1 (4) 2

3. ค่าของ $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{x-\pi}{\sin(2\pi-x)}$ ตรงกับข้อใด

(1) $-\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) -1 (4) 1

4. ค่าของ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x-1}{e^{x}-x^2-x-1}$ ตรงกับข้อใด

(1) 0 (2) 1 (3) -1 (4) 2

5. ค่าของ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{e^{-2x}+2x-1}$ ตรงกับข้อใด

(1) 0 (2) $-\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) $\frac{1}{3}$

6. ค่าของ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x}{1+\cos(2x)}$ ตรงกับข้อใด

(1) $-\frac{1}{4}$ (2) $\frac{1}{4}$ (3) -1 (4) 1

7. ค่าของ $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{x}+x^2}{e^{2x}+x}$ ตรงกับข้อใด

(1) 0 (2) $\frac{1}{4}$ (3) $-\infty$ (4) $+\infty$

8. ค่าของ $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+1}{\ln(x^2+1)}$ ตรงกับข้อใด

(1) 0 (2) 1 (3) $-\infty$ (4) $+\infty$

9. ค่าของ $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(e^{x}+2)}{e^{x}+1}$ ตรงกับข้อใด

(1) 0 (2) $\frac{1}{4}$ (3) $-\infty$ (4) $+\infty$