

บทที่ 4

การหาปริพันธ์ (Integration)

4.1 ปริพันธ์ (Integral)

4.1.1 ปฏิยานุพันธ์ (Antiderivative)

บทนิยาม 4.1. จะเรียกฟังก์ชัน F ว่า ปฏิยานุพันธ์ (antiderivative) ของ

ฟังก์ชัน f บนช่วง I ถ้า $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุกๆ $x \in I$

ตัวอย่าง 4.1. จงเลือกคำตอบที่ถูกต้อง

1. ปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = 8x^3 + x^2 - 5$ ตรงกับข้อใด

- (1) $8x^4 + x^3 - 5x$ (2) $2x^4 + x^3 - 5x$
 (3) $2x^4 + \frac{x^3}{3} - 5x$ (4) $24x^2 + 2x$

2. ปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = \cos x$ ตรงกับข้อใด

- (1) $-\sin x$ (2) $\sin x + 3$
 (3) $\sin x$ (4) ถูกทั้ง (2) และ (3)

ทฤษฎีบท 4.1. ให้ c เป็นค่าคงตัว ถ้า $F(x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$

แล้ว $F(x) + c$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$

ตัวอย่าง 4.2. จงเลือกคำตอบที่ถูกต้อง

1. ปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = 6x^2 + 4x - 5$ ตรงกับข้อใด

- (1) $8x^4 + x^3 - 5x + c$ (2) $2x^4 + x^3 - 5x + c$
 (3) $2x^4 + \frac{x^3}{3} - 5x + c$ (4) $24x^2 + 2x + c$

2. ปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = \cos x$ ตรงกับข้อใด

- (1) $-\sin x + c$ (2) $\sin x + 3 + c$
 (3) $\sin x + c$ (4) ถูกทั้ง (2) และ (3)

4.1.2 ความหมายและสัญลักษณ์ของปริพันธ์

เรียกระบวนการหาปฏิยานุพันธ์ (antiderivative) ว่า การหาปริพันธ์ (integration) นั่นคือ ถ้า

$$\frac{d}{dx}(F(x)) = f(x)$$

แล้วการหาปริพันธ์ของ $f(x)$ จะได้ผลลัพธ์เป็นปฏิยานุพันธ์ $F(x) + c$

แทนด้วยสัญลักษณ์ $\int f(x) dx = F(x) + c$

โดย เรียก $\int f(x) dx$ ว่า ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต (indefinite integral)

เรียกฟังก์ชัน f ว่า ปริพันธ์ (integrand)

เรียก c ว่า ค่าคงตัวของการหาปริพันธ์ (constant of integration)

ตัวอย่าง 4.3. จงเลือกคำตอบที่ถูกต้อง

1. ค่าของปริพันธ์ $\int (3x^2 + 4x - 5) dx$ ตรงกับข้อใด

- (1) $6x + c$ (2) $x^3 - 2x^2 - 5x + c$
 (3) $x^3 + 2x^2 + 5x + c$ (4) $x^3 + 2x^2 - 5x + c$

2. ค่าของปริพันธ์ $\int \cos x dx$ ตรงกับข้อใด

- (1) $\sec x + c$ (2) $-\sec x + c$
 (3) $\sin x + c$ (4) $-\sin x + c$

4.2 การหาปริพันธ์ (Integration)

4.2.1 สูตรการหาปริพันธ์

จากความหมายของปริพันธ์และสูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน เราสามารถสรุปเป็น สูตรสำหรับการหาปริพันธ์ ได้ดังนี้

1. $\int 1 dx = x + c$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$
3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, a > 0, a \neq 1$
5. $\int e^x dx = e^x + c$
6. $\int \cos x dx = \sin x + c$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + c$
8. $\int \sec^2 x dx = \tan x + c$
9. $\int \csc^2 x dx = -\cot x + c$
10. $\int \sec x \tan x dx = \sec x + c$
11. $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + c$

12. $\int \tan x \, dx = \ln |\sec x| + c$

13. $\int \cot x \, dx = \ln |\sin x| + c$

14. $\int \sec x \, dx = \ln |\sec x + \tan x| + c$

15. $\int \csc x \, dx = \ln |\csc x - \cot x| + c$

16. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \sin^{-1} x + c$

17. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \, dx = \sec^{-1} x + c$

18. $\int \frac{1}{x^2+1} \, dx = \tan^{-1} x + c$

19. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \, dx = \ln |x + \sqrt{x^2-1}| + c$

20. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \, dx = \ln |x + \sqrt{x^2+1}| + c$

21. $\int \frac{1}{x^2-1} \, dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + c$

22. $\int \frac{1}{1-x^2} \, dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + c$

23. $\int \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \sin^{-1} x + c$

24. $\int \sqrt{x^2-1} \, dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2} \ln |x + \sqrt{x^2-1}| + c$

25. $\int \sqrt{x^2+1} \, dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2} \ln |x + \sqrt{x^2+1}| + c$

4.2.2 การหาปริพันธ์โดยใช้สูตร

ทฤษฎีบท 4.2. ให้ k เป็นค่าคงตัว

1. $\int kf(x) \, dx = k \int f(x) \, dx$

2. $\int (f(x) \pm g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx$

เราสามารถหาปริพันธ์ของฟังก์ชัน โดยใช้สูตรการหาปริพันธ์ในหัวข้อ 4.2.1 และทฤษฎีบท 4.2 ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.4. จงหาค่าของปริพันธ์ $\int (8x^3 + x^2 - 5) \, dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 4.5. จงหาค่าของ $\int (8\sqrt[3]{x} - \frac{3}{\sqrt{x}} + \sqrt{3}) \, dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 4.6. จงหาค่าของ $\int (\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2}) \, dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 4.7. จงหาค่าของ $\int (8^x - 3e^x + 5^3) \, dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 4.8. จงเลือกคำตอบที่ถูกต้อง

1. ค่าของปริพันธ์ $\int 3 \sec^2 x \, dx$ ตรงกับข้อใด

(1) $3 \ln(\sec x + \tan x) + c$ (2) $3 \tan^2 x + c$

(3) $3 \ln^2(\sec x + \tan x) + c$ (4) $3 \tan x + c$

2. ค่าของปริพันธ์ $\int (5 \sin x + 2 \cos x) \, dx$ ตรงกับข้อใด

(1) $-2 \sin x + 5 \cos x + c$ (2) $2 \sin x - 5 \cos x + c$

(3) $-2 \sin x - 5 \cos x + c$ (4) $2 \sin x + 5 \cos x + c$

3. ค่าของปริพันธ์ $\int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$ ตรงกับข้อใด

(1) $2 \sin^{-1} x + c$ (2) $2 \sec^{-1} x + c$

(3) $2 \ln |x + \sqrt{x^2-1}| + c$ (4) $\ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + c$

แบบฝึกหัด 4.1.

จะเลือกคำตอบที่ถูกต้อง

1. กำหนดให้ $F(x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- (1) $F(x) = f'(x)$ (2) $F'(x) = f(x)$
 (3) $F'(x) = f'(x)$ (4) $F(x) = f(x)$

2. กำหนดให้ $F(x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- (1) $\int f(x) dx = F'(x) + c$ (2) $\int F(x) dx = f'(x) + c$
 (3) $\int f(x) dx = F(x) + c$ (4) $\int F(x) dx = f(x) + c$

3. ปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = x - \frac{1}{x^2}$ ตรงกับข้อใด

- (1) $2x - \frac{2}{x^3} + c$ (2) $\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + c$
 (3) $2x + \frac{2}{x^3} + c$ (4) $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + c$

4. ค่าของปริพันธ์ $\int (x^3 - 3x^2) dx$ ตรงกับข้อใด

- (1) $\frac{x^4}{4} - x^3 + c$ (2) $\frac{x^4}{4} - 3x^3 + c$
 (3) $x^4 - x^3 + c$ (4) $x^4 - 3x^3 + c$

5. ค่าของปริพันธ์ $\int (x^8 + 3^8) dx$ ตรงกับข้อใด

- (1) $x^9 + \frac{3^9}{9} + c$ (2) $x^9 + 3^8x + c$
 (3) $\frac{x^9}{9} + \frac{3^9}{9} + c$ (4) $\frac{x^9}{9} + 3^8x + c$

6. ค่าของปริพันธ์ $\int (\sqrt{2} + \sqrt[3]{x^2}) dx$ ตรงกับข้อใด

- (1) $\frac{2\sqrt{8}}{3} + \frac{3\sqrt[3]{x^5}}{5} + c$ (2) $\frac{2\sqrt{8}}{3} + \frac{5\sqrt[5]{x^3}}{3} + c$
 (3) $\sqrt{2}x + \frac{5\sqrt[5]{x^3}}{3} + c$ (4) $\sqrt{2}x + \frac{3\sqrt[3]{x^5}}{5} + c$

7. ค่าของปริพันธ์ $\int (\sqrt[3]{x} + 4\sqrt{x}) dx$ ตรงกับข้อใด

- (1) $\frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4} + 6\sqrt{x^3} + c$ (2) $\frac{4\sqrt[3]{x^4}}{3} + 6\sqrt{x^3} + c$
 (3) $\frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4} + \frac{8\sqrt{x^3}}{3} + c$ (4) $\frac{4\sqrt[3]{x^4}}{3} + \frac{8\sqrt{x^3}}{3} + c$

8. ค่าของปริพันธ์ $\int (\frac{1}{x^2} + x^2) dx$ ตรงกับข้อใด

- (1) $\ln(x^2) + \frac{x^3}{3} + c$ (2) $\ln(x^2) + 2x + c$
 (3) $-\frac{1}{x} + \frac{x^3}{3} + c$ (4) $-\frac{1}{x} + 2x + c$

9. ค่าของปริพันธ์ $\int (\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{x^3}) dx$ ตรงกับข้อใด

- (1) $\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2} - \frac{1}{2x^2} + c$ (2) $\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2} + \frac{1}{2x^2} + c$
 (3) $\frac{2\sqrt[3]{x^2}}{3} - \frac{1}{2x^2} + c$ (4) $\ln|\sqrt[3]{x}| + \ln|x^3| + c$

10. ค่าของปริพันธ์ $\int (\frac{2x^5}{3} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}) dx$ ตรงกับข้อใด

- (1) $\frac{x^6}{9} + 3\sqrt[3]{x} + c$ (2) $\frac{x^6}{6} + 3\sqrt[3]{x} + c$
 (3) $\frac{x^6}{9} + \frac{\sqrt[3]{x}}{3} + c$ (4) $\frac{x^6}{6} + \frac{\sqrt[3]{x}}{3} + c$

11. ค่าของปริพันธ์ $\int (\sqrt[4]{x} - \frac{4}{\sqrt[5]{x}}) dx$ ตรงกับข้อใด

- (1) $\frac{4\sqrt[4]{x^5}}{5} - \frac{16\sqrt[4]{x^5}}{5} + c$ (2) $\frac{4\sqrt[4]{x^5}}{5} - 5\sqrt[5]{x^4} + c$
 (3) $\frac{5\sqrt[4]{x^5}}{4} - 5\sqrt[5]{x^4} + c$ (4) $\frac{5\sqrt[4]{x^5}}{4} - \frac{16\sqrt[4]{x^5}}{5} + c$

12. ค่าของปริพันธ์ $\int (\frac{1}{2x^4} - \frac{3}{x}) dx$ ตรงกับข้อใด

- (1) $\frac{1}{6x^3} - \frac{3}{2x^2} + c$ (2) $\ln|2x^4| - 3\ln|x| + c$
 (3) $-\frac{1}{6x^3} + \frac{3}{2x^2} + c$ (4) $-\frac{1}{6x^3} - 3\ln|x| + c$

13. ค่าของปริพันธ์ $\int (\frac{x}{4} + \frac{4}{x}) dx$ ตรงกับข้อใด

- (1) $\frac{x^2}{8} + 4\ln|x| + c$ (2) $\frac{x^2}{8} - \frac{2}{x^2} + c$
 (3) $\frac{x^2}{6} + 4\ln|x| + c$ (4) $\frac{x^2}{6} - \frac{2}{x^2} + c$

14. ค่าของปริพันธ์ $\int (e^x - 5^x) dx$ ตรงกับข้อใด

- (1) $e^x - 5^x + c$ (2) $e^x - \frac{5^x}{\ln 5} + c$
 (3) $e^x - \frac{5^x}{\ln 5} + c$ (4) $\frac{e^{x+1}}{x+1} - \frac{5^{x+1}}{x+1} + c$

15. ค่าของปริพันธ์ $\int (3^x - \frac{1}{x}) dx$ ตรงกับข้อใด

- (1) $\frac{3^x}{\ln 3} + \frac{1}{2x^2} + c$ (2) $\frac{3^x}{\ln 3} - \ln|x| + c$
 (3) $\frac{3^x}{\ln 3} + \frac{1}{2x^2} + c$ (4) $\frac{3^x}{\ln 3} - \ln|x| + c$

16. ค่าของปริพันธ์ $\int (\frac{1}{2x} + 3e^x) dx$ ตรงกับข้อใด

- (1) $\ln|2x| + 3e^x + c$ (2) $\ln|2x| + \frac{3e^{x+1}}{x+1} + c$
 (3) $\frac{1}{2}\ln|x| + 3e^x + c$ (4) $\frac{1}{2}\ln|x| + \frac{3e^{x+1}}{x+1} + c$

17. ค่าของปริพันธ์ $\int 3 \sec x \tan x dx$ ตรงกับข้อใด
 (1) $3 \sec x + c$ (2) $3 \ln |\sec x + \tan x| \ln |\sec x| + c$
 (3) $3x \sec x + c$ (4) $3x \ln |\sec x + \tan x| \ln |\sec x| + c$
18. ค่าของปริพันธ์ $\int (3 \sec^2 x - \csc x \cot x) dx$ ตรงกับข้อใด
 (1) $3 \tan x - \csc x + c$ (2) $3 \tan x + \csc x + c$
 (3) $\sec^3 x - \csc x + c$ (4) $\sec^3 x + \csc x + c$
19. ค่าของปริพันธ์ $\int (2 \tan x - \csc^2 x) dx$ ตรงกับข้อใด
 (1) $\ln |2 \sec x| + \cot x + c$ (2) $\ln |2 \sec x| - \cot x + c$
 (3) $2 \ln |\sec x| + \cot x + c$ (4) $2 \ln |\sec x| - \cot x + c$
20. ค่าของปริพันธ์ $\int \frac{2}{x^2 + 1} dx$ ตรงกับข้อใด
 (1) $\tan^{-1}(2x) + c$ (2) $2 \tan^{-1} x + c$
 (3) $2 \ln |x^2 + 1| + c$ (4) $2 \ln |x + \sqrt{x^2 + 1}| + c$
21. ค่าของปริพันธ์ $\int \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} dx$ ตรงกับข้อใด
 (1) $-3\sqrt{1-x^2} + c$ (2) $3 \sin^{-1} x + c$
 (3) $3 \ln |\sqrt{1-x^2}| + c$ (4) $\sin^{-1}(3x) + c$

4.2.3 การหาปริพันธ์โดยการเปลี่ยนตัวแปร

ให้ F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f และ g เป็นฟังก์ชันทางอนุพันธ์ได้ที่ x โดยกฎลูกโซ่จะไดอนุพันธ์ของ $F(g(x))$ ดังนี้

$$\frac{d}{dx}(F(g(x))) = F'(g(x))g'(x)$$

จะได้

$$\int F'(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + c$$

เนื่องจาก F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f จะได้ $F'(g(x)) = f(g(x))$ ดังนั้น

$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + c$$

ให้ $u = g(x)$ จะได้ค่าเชิงอนุพันธ์ $du = g'(x) dx$ และ

$$\int f(u) du = F(u) + c$$

เรียกวิธีการคำนวณหาปริพันธ์ $\int f(g(x))g'(x) dx$ โดยการจัดให้อยู่ในรูป $\int f(u) du$ ว่า การหาปริพันธ์โดยวิธีการแทนค่าตัวแปร u (method of u -substitution)

สูตรสำหรับการหาปริพันธ์

ให้ u เป็นฟังก์ชันทางอนุพันธ์ได้ที่ x

$$1. \int 1 du = u + c$$

$$2. \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$$

$$3. \int \frac{1}{u} du = \ln |u| + c$$

$$4. \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c, a > 0, a \neq 1$$

$$5. \int e^u du = e^u + c$$

$$6. \int \cos u du = \sin u + c$$

$$7. \int \sin u du = -\cos u + c$$

$$8. \int \sec^2 u du = \tan u + c$$

$$9. \int \csc^2 u du = -\cot u + c$$

$$10. \int \sec u \tan u du = \sec u + c$$

$$11. \int \csc u \cot u du = -\csc u + c$$

$$12. \int \tan u du = \ln |\sec u| + c$$

$$13. \int \cot u du = \ln |\sin u| + c$$

$$14. \int \sec u du = \ln |\sec u + \tan u| + c$$

$$15. \int \csc u du = \ln |\csc u - \cot u| + c$$

$$16. \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}} du = \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + c$$

$$17. \int \frac{1}{u\sqrt{u^2 - a^2}} dx = \frac{1}{a} \sec^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + c$$

$$18. \int \frac{1}{u^2 + a^2} du = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + c$$

$$19. \int \frac{1}{\sqrt{u^2 - a^2}} du = \ln |u + \sqrt{u^2 - a^2}| + c$$

$$20. \int \frac{1}{\sqrt{u^2 + a^2}} du = \ln |u + \sqrt{u^2 + a^2}| + c$$

$$21. \int \frac{1}{u^2 - a^2} du = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + c$$

$$22. \int \frac{1}{a^2 - u^2} du = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+u}{a-u} \right| + c$$

$$23. \int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + c$$

$$24. \int \sqrt{u^2 - a^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln |u + \sqrt{u^2 - a^2}| + c$$

$$25. \int \sqrt{u^2 + a^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln |u + \sqrt{u^2 + a^2}| + c$$

ขั้นตอนการหาปริพันธ์โดยวิธีการแทนค่าตัวแปร n

1. เลือก $u = g(x)$
2. หา $du = g'(x) dx$
3. แทนค่า n และ du (จะได้ปริพันธ์ในรูปตัวแปร n)
4. คำนวณหาปริพันธ์โดยใช้สูตร
5. แทน n ด้วย $g(x)$ (จะได้ผลลัพธ์ในรูปตัวแปร x)

ตัวอย่าง 4.9. จงหาค่าของ $\int \cos(5x) dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 4.12. จงหาค่าของ $\int 6e^{3x} \cos(e^{3x} + 5) dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 4.13. จงหาค่าของ $\int \frac{\cos(5\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 4.14. จงหาค่าของ $\int (e^{5x} + 5^{2x}) dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 4.10. จงหาค่าของ $\int x \cos(3x^2) dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 4.15. จงหาค่าของ $\int x^2 e^{5x^3} dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 4.11. จงหาค่าของ $\int \frac{\cos(2 + \frac{3}{x})}{x^2} dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 4.16. จงหาค่าของ $\int (2x - 1)^3 dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 4.17. จงเลือกค่าตอบที่ถูกต้อง

1. ค่าของปริพันธ์ $\int x(3x^2 - 1)^3 dx$ ตรงกับข้อใด

(1) $\frac{(3x^2 - 1)^4}{4} + c$

(3) $\frac{x(3x^2 - 1)^4}{24} + c$

(2) $\frac{(3x^2 - 1)^4}{12} + c$

(4) $\frac{(3x^2 - 1)^4}{24} + c$

2. ค่าของปริพันธ์ $\int (x^2 - 6x + 5)^4(x - 3) dx$ ตรงกับข้อใด

(1) $\frac{(x^2 - 6x + 5)^5}{10} + c$

(3) $\frac{(x^2 - 6x + 5)^5}{5} + c$

(2) $\frac{(x - 3)(x^2 - 6x + 5)^5}{5} + c$

(4) $\frac{(x - 3)(x^2 - 6x + 5)^5}{10} + c$

3. ค่าของปริพันธ์ $\int \frac{x+1}{(x^2+2x+5)^4} dx$ ตรงกับข้อใด

(1) $\ln |(x^2+2x+5)^4| + c$

(3) $-\frac{1}{3(x^2+2x+5)^3} + c$

(2) $-\frac{1}{3(x^2+2x+5)^3} + c$

(4) $-\frac{1}{10(x^2+2x+5)^5} + c$

4. ค่าของปริพันธ์ $\int 3e^{2x}\sqrt{1+e^{2x}} dx$ ตรงกับข้อใด

(1) $2e^{2x}\sqrt{1+e^{2x}} + c$

(3) $\sqrt{(1+e^{2x})^3} + c$

(2) $2\sqrt{(1+e^{2x})^3} + c$

(4) $\frac{9}{4}\sqrt{(1+e^{2x})^3} + c$

5. ค่าของปริพันธ์ $\int \frac{dx}{3x+1}$ ตรงกับข้อใด

(1) $\frac{1}{3}\ln|3x-1| + c$

(3) $\ln|3x-1| + c$

(2) $3\ln|3x-1| + c$

(4) $-\frac{1}{6(3x+1)^2} + c$

6. ค่าของปริพันธ์ $\int \frac{x}{x^2+9} dx$ ตรงกับข้อใด

(1) $\ln|x^2+9| + c$

(3) $x\ln|x^2+9| + c$

(2) $\frac{1}{2}\ln|x^2+9| + c$

(4) $\frac{x}{2}\ln|x^2+9| + c$

7. ค่าของปริพันธ์ $\int \frac{6\sin(3x)}{5+2\cos(3x)} dx$ ตรงกับข้อใด

(1) $3\ln|5+2\cos(3x)| + c$

(3) $\ln|5+2\cos(3x)| + c$

(2) $-3\ln|5+2\cos(3x)| + c$

(4) $-\ln|5+2\cos(3x)| + c$

8. ค่าของปริพันธ์ $\int \frac{1}{4x^2+9} dx$ ตรงกับข้อใด

(1) $\frac{1}{8}\ln|4x^2+9| + c$

(3) $\frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{2x}{3}\right) + c$

(2) $\frac{1}{6}\tan^{-1}\left(\frac{2x}{3}\right) + c$

(4) $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2x}{3}\right) + c$

9. ค่าของปริพันธ์ $\int \frac{9}{\sqrt{1-9x^2}} dx$ ตรงกับข้อใด

(1) $\sin^{-1}(3x) + c$

(3) $9\sin^{-1}(3x) + c$

(2) $3\sin^{-1}(3x) + c$

(4) $-\frac{1}{3}\sqrt{1-9x^2} + c$

10. ค่าของปริพันธ์ $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-9}} dx$ ตรงกับข้อใด

(1) $\sqrt{x^2-9} + c$

(3) $\frac{1}{3}\sec^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + c$

(2) $\frac{1}{9}\sec^{-1}\left(\frac{x}{9}\right) + c$

(4) $\sec^{-1}(x) + c$

11. ค่าของปริพันธ์ $\int \frac{1}{4x^2-9} dx$ ตรงกับข้อใด

(1) $\frac{1}{6}\tan^{-1}\left(\frac{2x}{3}\right) + c$

(3) $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{2x-9}{2x+9}\right| + c$

(2) $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{2x-9}{2x+9}\right| + c$

(4) $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{2x-9}{2x+9}\right| + c$

แบบฝึกหัด 4.2.

จงเลือกค่าตอบที่ถูกต้อง

1. ค่าของปริพันธ์ $\int (5x-1)^5 dx$ ตรงกับข้อใด

(1) $\frac{1}{6}(5x-1)^6 + c$

(3) $\frac{5}{6}(5x-1)^6 + c$

(2) $\frac{1}{30}(5x-1)^6 + c$

(4) $\frac{6}{5}(5x-1)^6 + c$

2. ค่าของปริพันธ์ $\int \frac{1}{(1-3x)^2} dx$ ตรงกับข้อใด

(1) $\frac{1}{3(1-3x)} + c$

(3) $-\frac{1}{6(1-3x)} + c$

(2) $-\frac{1}{3(1-3x)} + c$

(4) $\ln|(1-3x)^2| + c$

3. ค่าของปริพันธ์ $\int 6x(x^2-2)^3 dx$ ตรงกับข้อใด

(1) $\frac{3x}{2}(x^2-2)^4 + c$

(3) $\frac{3}{2}(x^2-2)^4 + c$

(2) $\frac{3x}{4}(x^2-2)^4 + c$

(4) $\frac{3}{4}(x^2-2)^4 + c$

4. ค่าของปริพันธ์ $\int \frac{12x^2}{(x^3-1)^3} dx$ ตรงกับข้อใด

(1) $-\frac{2}{(x^3-1)^2} + c$

(3) $-\frac{1}{(x^3-1)^4} + c$

(2) $-\frac{6}{(x^3-1)^2} + c$

(4) $-\frac{3}{(x^3-1)^4} + c$

5. ค่าของปริพันธ์ $\int (3x+2)(3x^2+4x)^4 dx$ ตรงกับข้อใด

(1) $\frac{1}{30}(3x^2+4x)^5 + c$

(3) $\frac{1}{10}(3x^2+4x)^5 + c$

(2) $\frac{1}{20}(3x^2+4x)^5 + c$

(4) $\frac{1}{5}(3x^2+4x)^5 + c$

6. ค่าของปริพันธ์ $\int x^4(7 - \frac{x^5}{10})^3 dx$ ตรงกับข้อใด

- (1) $-\frac{1}{2}(7 - \frac{x^5}{10})^4 + c$ (2) $\frac{1}{2}(7 - \frac{x^5}{10})^4 + c$
 (3) $-\frac{1}{8}(7 - \frac{x^5}{10})^4 + c$ (4) $\frac{1}{8}(7 - \frac{x^5}{10})^4 + c$

7. ค่าของปริพันธ์ $\int x\sqrt{1-x^2} dx$ ตรงกับข้อใด

- (1) $-\frac{2}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} + c$ (2) $\frac{2}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} + c$
 (3) $-\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} + c$ (4) $\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} + c$

8. ค่าของปริพันธ์ $\int 6x^2 \sqrt[3]{x^3+5} dx$ ตรงกับข้อใด

- (1) $\frac{9}{2} \sqrt[3]{(x^3+5)^4} + c$ (2) $\frac{3}{2} \sqrt[3]{(x^3+5)^4} + c$
 (3) $\frac{8}{3} \sqrt[3]{(x^3+5)^4} + c$ (4) $8 \sqrt[3]{(x^3+5)^4} + c$

9. ค่าของปริพันธ์ $\int (2x-5) \sqrt[3]{(x^2-5x+1)^2} dx$ ตรงกับข้อใด

- (1) $\frac{5}{6} \sqrt[3]{(x^2-5x+1)^5} + c$ (2) $\frac{5}{3} \sqrt[3]{(x^2-5x+1)^5} + c$
 (3) $\frac{3}{10} \sqrt[3]{(x^2-5x+1)^5} + c$ (4) $\frac{3}{5} \sqrt[3]{(x^2-5x+1)^5} + c$

10. ค่าของปริพันธ์ $\int \frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$ ตรงกับข้อใด

- (1) $8\sqrt{1-4x^2} + c$ (2) $-\sqrt{1-4x^2} + c$
 (3) $-\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2} + c$ (4) $2x \sin^{-1}(2x) + c$

11. ค่าของปริพันธ์ $\int \frac{1}{x^2} \sqrt{2 - \frac{1}{x}} dx$ ตรงกับข้อใด

- (1) $-\frac{2}{3}\sqrt{(2 - \frac{1}{x})^3} + c$ (2) $\frac{2}{3}\sqrt{(2 - \frac{1}{x})^3} + c$
 (3) $-\frac{4}{3}\sqrt{(2 - \frac{1}{x})^3} + c$ (4) $\frac{4}{3}\sqrt{(2 - \frac{1}{x})^3} + c$

12. ค่าของปริพันธ์ $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} dx$ ตรงกับข้อใด

- (1) $\frac{1}{2(1+\sqrt{x})} + c$ (2) $-\frac{1}{2(1+\sqrt{x})} + c$
 (3) $\frac{2}{1+\sqrt{x}} + c$ (4) $-\frac{2}{1+\sqrt{x}} + c$

13. ค่าของปริพันธ์ $\int \sec^2 x(1 - \tan x)^9 dx$ ตรงกับข้อใด

- (1) $\frac{1}{10}(1 - \tan x)^{10} + c$ (2) $\frac{1}{10} \sec^2 x(1 - \tan x)^{10} + c$
 (3) $-\frac{1}{10}(1 - \tan x)^{10} + c$ (4) $-\frac{1}{10} \sec^2 x(1 - \tan x)^{10} + c$

14. ค่าของปริพันธ์ $\int \sin(4x)\sqrt{2 - \cos(4x)} dx$ ตรงกับข้อใด

- (1) $-\frac{2}{3}\sqrt{(2 - \cos(4x))^3} + c$ (2) $\frac{2}{3}\sqrt{(2 - \cos(4x))^3} + c$
 (3) $-\frac{1}{6}\sqrt{(2 - \cos(4x))^3} + c$ (4) $\frac{1}{6}\sqrt{(2 - \cos(4x))^3} + c$

15. ค่าของปริพันธ์ $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ ตรงกับข้อใด

- (1) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^4} + c$ (2) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^4} + c$
 (3) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^4} + c$ (4) $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^4} + c$

16. ค่าของปริพันธ์ $\int \frac{4}{2x-1} dx$ ตรงกับข้อใด

- (1) $\ln|2x-1| + c$ (2) $2\ln|2x-1| + c$
 (3) $4\ln|2x-1| + c$ (4) $8\ln|2x-1| + c$

17. ค่าของปริพันธ์ $\int \frac{xdx}{x^2+2}$ ตรงกับข้อใด

- (1) $2\ln|x^2+2| + c$ (2) $\frac{1}{2}\ln|x^2+2| + c$
 (3) $x\ln|x^2+2| + c$ (4) $\ln|x^2+2| + c$

18. ค่าของปริพันธ์ $\int \frac{5x^4}{x^5+1} dx$ ตรงกับข้อใด

- (1) $5x^4 \ln|x^5+1| + c$ (2) $x^4 \ln|x^5+1| + c$
 (3) $5\ln|x^5+1| + c$ (4) $\ln|x^5+1| + c$

19. ค่าของปริพันธ์ $\int \frac{2x-1}{4x^2-4x+5} dx$ ตรงกับข้อใด

- (1) $\ln|4x^2-4x+5| + c$ (2) $\frac{1}{2}\ln|4x^2-4x+5| + c$
 (3) $\frac{1}{4}\ln|4x^2-4x+5| + c$ (4) $\frac{1}{8}\ln|4x^2-4x+5| + c$

20. ค่าของปริพันธ์ $\int \frac{\csc^2 x}{5-\cot x} dx$ ตรงกับข้อใด

- (1) $-\frac{1}{5}\ln|5-\cot x| + c$ (2) $\frac{1}{5}\ln|5-\cot x| + c$
 (3) $-\ln|5-\cot x| + c$ (4) $\ln|5-\cot x| + c$

21. ค่าของปริพันธ์ $\int \frac{\sin(3x)}{1+\cos(3x)} dx$ ตรงกับข้อใด

- (1) $\frac{1}{3}\ln|1+\cos(3x)| + c$ (2) $-\frac{1}{3}\ln|1+\cos(3x)| + c$
 (3) $\ln|1+\cos(3x)| + c$ (4) $-\ln|1+\cos(3x)| + c$

39. ค่าของปริพันธ์ $\int x^2 \csc(x^3) dx$ ตรงกับข้อใด

- (1) $\frac{1}{3} \ln |\csc(x^3) - \cot(x^3)| + c$
- (2) $-\frac{1}{3} \ln |\csc(x^3) - \cot(x^3)| + c$
- (3) $3 \ln |\csc(x^3) - \cot(x^3)| + c$
- (4) $-3 \ln |\csc(x^3) - \cot(x^3)| + c$

40. ค่าของปริพันธ์ $\int x^3 \sec(\frac{x^4}{5}) \tan(\frac{x^4}{5}) dx$ ตรงกับข้อใด

- (1) $\frac{1}{5} \sec(\frac{x^4}{5}) + c$
- (2) $5 \sec(\frac{x^4}{5}) + c$
- (3) $\frac{4}{5} \sec(\frac{x^4}{5}) + c$
- (4) $\frac{5}{4} \sec(\frac{x^4}{5}) + c$

41. ค่าของปริพันธ์ $\int \frac{1}{x^2} \sin(\frac{1}{x}) dx$ ตรงกับข้อใด

- (1) $\cos(\frac{1}{x}) + c$
- (2) $-\cos(\frac{1}{x}) + c$
- (3) $2\cos(\frac{1}{x}) + c$
- (4) $-2\cos(\frac{1}{x}) + c$

42. ค่าของปริพันธ์ $\int \frac{2}{x^3} \sec^2(\frac{3}{x^2}) dx$ ตรงกับข้อใด

- (1) $-\frac{1}{3} \tan(\frac{3}{x^2}) + c$
- (2) $\frac{1}{3} \tan(\frac{3}{x^2}) + c$
- (3) $-\frac{2}{3} \tan(\frac{3}{x^2}) + c$
- (4) $\frac{2}{3} \tan(\frac{3}{x^2}) + c$

43. ค่าของปริพันธ์ $\int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$ ตรงกับข้อใด

- (1) $\frac{1}{2} \sin(\sqrt{x}) + c$
- (2) $\frac{1}{4} \sin(\sqrt{x}) + c$
- (3) $2\sin(\sqrt{x}) + c$
- (4) $\sin(\sqrt{x}) + c$

44. ค่าของปริพันธ์ $\int \frac{\cos(\sqrt[3]{x^2})}{\sqrt[3]{x}} dx$ ตรงกับข้อใด

- (1) $\frac{3}{2} \sin(\sqrt[3]{x^2}) + c$
- (2) $\frac{2}{3} \sin(\sqrt[3]{x^2}) + c$
- (3) $\frac{1}{2} \sin(\sqrt[3]{x^2}) + c$
- (4) $\frac{1}{3} \sin(\sqrt[3]{x^2}) + c$

45. ค่าของปริพันธ์ $\int e^{2x} \sin(e^{2x}) dx$ ตรงกับข้อใด

- (1) $-\frac{1}{4} e^{2x} \cos(e^{2x}) + c$
- (2) $-\frac{1}{2} \cos(e^{2x}) + c$
- (3) $-e^{2x} \cos(e^{2x}) + c$
- (4) $-2 \cos(e^{2x}) + c$

46. ค่าของปริพันธ์ $\int \frac{\sec^2(\ln x)}{x} dx$ ตรงกับข้อใด

- (1) $\tan(\ln x) + c$
- (2) $2\tan(\ln x) + c$
- (3) $\frac{\tan(\ln x)}{x} + c$
- (4) $\frac{2\tan(\ln x)}{x} + c$

47. ค่าของปริพันธ์ $\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx$ ตรงกับข้อใด

- (1) $\ln |\sqrt{9-x^2}| + c$
- (2) $-\sqrt{9-x^2} + c$
- (3) $\frac{1}{3} \sin^{-1}(\frac{x}{3}) + c$
- (4) $\sin^{-1}(\frac{x}{3}) + c$

48. ค่าของปริพันธ์ $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx$ ตรงกับข้อใด

- (1) $\sin^{-1}(e^x) + c$
- (2) $\sin^{-1}(e^{2x}) + c$
- (3) $\sqrt{1-e^{2x}} + c$
- (4) $-\sqrt{1-e^{2x}} + c$

49. ค่าของปริพันธ์ $\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2-1}} dx$ ตรงกับข้อใด

- (1) $2\sec^{-1}(2x) + c$
- (2) $\frac{1}{2}\sec^{-1}(2x) + c$
- (3) $\sec^{-1}(2x) + c$
- (4) $4\sec^{-1}(2x) + c$

50. ค่าของปริพันธ์ $\int \frac{9}{x\sqrt{9x^2-4}} dx$ ตรงกับข้อใด

- (1) $9\sec^{-1}(\frac{3x}{2}) + c$
- (2) $\frac{9}{2}\sec^{-1}(\frac{3x}{2}) + c$
- (3) $\frac{3}{2}\sec^{-1}(\frac{3x}{2}) + c$
- (4) $\frac{27}{2}\sec^{-1}(\frac{3x}{2}) + c$

51. ค่าของปริพันธ์ $\int \frac{1}{9x^2+4} dx$ ตรงกับข้อใด

- (1) $\frac{1}{6} \tan^{-1}(\frac{3x}{2}) + c$
- (2) $\frac{1}{3} \tan^{-1}(\frac{3x}{2}) + c$
- (3) $\frac{1}{2} \tan^{-1}(\frac{3x}{2}) + c$
- (4) $\tan^{-1}(\frac{3x}{2}) + c$

52. ค่าของปริพันธ์ $\int \frac{12x}{x^4+9} dx$ ตรงกับข้อใด

- (1) $\tan^{-1}(\frac{x^2}{3}) + c$
- (2) $2\tan^{-1}(\frac{x^2}{3}) + c$
- (3) $4\tan^{-1}(\frac{x^2}{3}) + c$
- (4) $6\tan^{-1}(\frac{x^2}{3}) + c$

53. ค่าของปริพันธ์ $\int \frac{1}{9x^2-1} dx$ ตรงกับข้อใด

- (1) $\ln |9x^2-1| + c$
- (2) $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{2x-9}{2x+9} \right| + c$
- (3) $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{2x-9}{2x+9} \right| + c$
- (4) $\frac{1}{6} \ln \left| \frac{2x-9}{2x+9} \right| + c$

54. ค่าของปริพันธ์ $\int \frac{6}{4-9x^2} dx$ ตรงกับข้อใด

- (1) $3\ln \left| \frac{2+3x}{2-3x} \right| + c$
- (2) $\frac{3}{2} \ln \left| \frac{2+3x}{2-3x} \right| + c$
- (3) $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{2+3x}{2-3x} \right| + c$
- (4) $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{2+3x}{2-3x} \right| + c$