

5. Tutoriumsblatt zur Mathematik 2

Aufgabe 10

Untersuchen Sie die Folgen auf Monotonie ((streng) monoton wachsend/fallend oder keine Monotonie), Beschränktheit (nach oben/unten beschränkt bzw. beides oder beides nicht) und Konvergenz

b) $b_n := \frac{n^2+n}{n^2}$

c) $c_n := (-1)^n \cdot \frac{n^2+n}{n^2}$

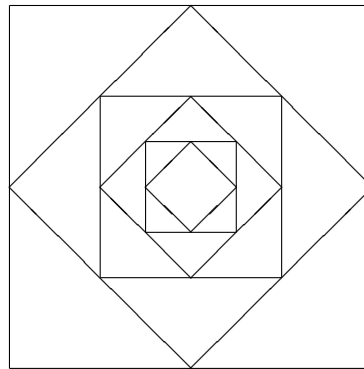
Aufgabe 11

Die Folge (a_n) sei definiert durch $a_1 := 1$ und $a_{n+1} := \sqrt{6 + a_n}$.

- a) Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion die Ungleichung $a_n \leq 3$.
- b) Beweisen Sie, dass die Folge (a_n) monoton wachsend ist.
- c) Zeigen Sie, dass die Folge (a_n) konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

Aufgabe 12

Die nebenstehende Skizze zeigt den Beginn einer Folge von Quadraten. Das äußere Quadrat besitzt eine Fläche von $4m^2$. Jedes Quadrat der Folge entsteht dadurch, dass die Mittelpunkte der Seiten des vorhergehenden Quadrates der Folge verbunden werden. Bestimmen Sie die Summe der Flächen aller dieser unendlich vielen Quadrate.



Aufgabe 13

Bestimmen Sie die Werte der folgenden Reihen:

a) $\sum_{k=0}^{\infty} 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^k$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k$

Aufgabe 14

Untersuchen Sie die Zahlenfolge (a_n) auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

$$a_n = \begin{cases} 10^n & \text{falls } n < 10^{100} \\ \left(\frac{3}{4}\right)^n & \text{falls } n \geq 10^{100} \text{ und } n \text{ durch } 5 \text{ teilbar} \\ \frac{(-1)^n}{n!} & \text{falls } n \geq 10^{100} \text{ und } n \text{ nicht durch } 5 \text{ teilbar} \end{cases}$$