Skript zur Vorlesung

Mathematik 2
(MA2)

Studiengänge Informatik, Technische Informatik und Wirtschaftsinformatik

M. Pohl
OTH Regensburg

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x)$$

Dieses Skript bildet die Grundlage der Lehrveranstaltung *Mathematik 2 (Analysis)*. Es wird durch weitere Beispiele und Anwendungen in der Vorlesung ergänzt.

Inhaltsverzeichnis

0 Vorbemerkungen

Dieses Skriptum soll Sie durch die Vorlesung Mathematik 2 (Analysis) für die Studiengänge der Informatik an der OTH Regensburg begleiten. Es dient für das Selbststudium und kann und soll hierfür durch weitere Lehrbücher ergänzt werden. Folgende Bücher sind als Unterstützung des Selbststudiums sehr gut geeignet:

- Für die Einführung: D. G. Zill: Precalculus with calculus previews. Dieses Buch enthält viele anschauliche Beispiele für die in der Einführung behandelten Grundlagen. Es ist als E-Medium über die Universität Regensburg verfügbar.
- Für Folgen und Reihen: Dieses Thema ist gerade für die Informatik sehr wichtig (z.B. für Algorithmen und Datenstrukturen). Dennoch ist die Beschäftigung mit den Methoden nicht gerade einfach, auch weil es hier keinen anschaulichen Zugang gibt. Dieses Thema ist in den Büchern von J. Stewart (Calculus und Essential Calculus), R. Adams und G. B. Thomas (Analysis I) gut verständlich dargestellt. Für das Buch von Thomas gibt es einen Zugang als E-Medium, allerdings nur für drei Nutzer gleichzeitig. Die Bücher von Stewart und Thomas können auch als hardcopy in der Hochschulbibliothek entliehen werden.
- Stetigkeit, Differential- und Integralrechnung: Diese Themen erlauben einen anschaulicheren Zugang und sind in den Büchern von Stewart, Adams und Thomas ausführlich und schön dargestellt.
- Neben den hier schon genannten Büchern enthält die Literaturliste noch das Buch von P. Hartmann. Dieses Buch ist einerseits als E-Medium über die Hochschulbibliothek verfügbar. Andererseits deckt das Buch die Inhalte der drei Lehrveranstaltungen Mathematik 1, Mathematik 2 und Statistik sehr gut ab. Das Vorgehen in dem Buch von Hartmann ist an manchen Stellen mathematisch genauer und stringenter als im vorliegenden Skriptum.

Die wichtigsten Inhalte der einzelnen Kapitel sind:

1. In der **Einführung** werden einige Grundlagen für die Analysis wiederholt. Die wichtigste Grundlage sind die reellen Zahlen. Die Rechenregeln für die reellen Zahlen sowie für Ungleichungen stimmen mit den entsprechenden Regeln für die rationalen Zahlen überein und sind aus der Schule bekannt. Die wichtigste Eigenschaft der rellen Zahlen besagt, dass $\mathbb{R}$ „keine Löcher“ hat. Ohne diese sogenannte Vollständigkeit wären die Konzepte der Analysis (Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Integrierbarkeit) nicht möglich. Auf der anderen Seite würde eine mathematisch genaue Definition der Vollständigkeit den Rahmen dieser Lehrveranstaltung sprengen.

   Neben den Rechenregeln für die reellen Zahlen wird in diesem Kapitel das Prinzip der vollständigen Induktion wiederholt und für rekursive Definitionen einiger Begriffe verwendet.

2. Das Kapitel über **Folgen und Reihen** beschäftigt sich zunächst mit konvergenten Zahlenfolgen. Mit den Landauschen Symbolen, die das „Wachstumsverhalten“ zweier Folgen vergleichen, lässt sich die Komplexität von Algorithmen beschrei-

ben. Zahlenreihen erhalten wir, wenn wir unendlich viele Zahlen addieren wollen. Dies sind zwar auch „nur“ spezielle Folgen, allerdings können wir deren Konvergenzverhalten aufgrund der speziellen Bauart mit spezielle Werkzeugen untersuchen. Die Potenzreihen sind spezielle Zahlenreihen. Wir können Potenzreihen auch als Polynome mit unendlich vielen Summanden betrachten. Mit Hilfe von Potenzreihen können wir elementare Funktionen wie z.B. die Exponentialfunktion oder die Sinus- und die Cosinusfunktion definieren und deren Eigenschaften untersuchen. Betrachten wir die Exponentialfunktion mit rein imaginären Argumenten, so erhalten wir eine kompakte Darstellung komplexer Zahlen, die für viele Anwendungen sehr komfortabel ist.

3. In dem kurzen Kapitel über **Grenzwerte und Stetigkeit** von Funktionen untersuchen wir erste einfache Eigenschaften von Funktionen. Dabei werden wir die Begriffe vor allem anschaulich untersuchen.

4. Die **Differentialrechnung** ist eines der zentralen Kapiteln in dem wir Funktionen und deren Eigenschaften untersuchen. Wir werden den Begriff der Ableitung an einigen Beispielen anschaulich herleiten, bevor wir diesen Begriff mathematisch genau definieren. Neben der Technik der Differentiation werden wir vor allem Eigenschaften von differenzierbaren Funktionen untersuchen. Hierbei werden wir unter anderem sehen, wie wir beliebige Funktionen mit Hilfe der Taylorpolynome beliebig gut approximieren können.

5. Die **Integralrechnung** ist das zweite zentrale Kapitel über Funktionen. Wir werden bei der anschaulichen Herleitung des Integralbegriffes sehen, dass die Integration in gewissem Sinn die Umkehrung der Differentiation ist. Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung werden wir dieses mathematisch genau formulieren.

Die Beispiele in diesem Skriptum sind oft nur knapp ausgeführt. Die an diesen Stellen fehlenden Details und Zwischenschritte werden im Rahmen des Selbststudiums oder in der Präsenzveranstaltung ergänzt.

Den Schluss dieser Vorbemerkungen soll ein Zitat bilden:

> *Wer die erhabene Weisheit der Mathematik tadelt, nährt sich von Verwirrung.*
>
> LEONARDO DA VINCI, 1452–1519

1 Einführung

1.1 Zahlenmengen

Wir betrachten die folgenden *Mengen von Zahlen,* die durch sukzessive Erweiterung der „naturgegebenen“ Zahlen 1, 2, 3 entstehen.

1. *Die natürlichen Zahlen*

$$\mathbb{N} \quad := \quad \{1,2,3,...\}$$

entstehen dadurch, dass wir den Prozess „zähle eins dazu“ unendlich oft durchführen. Auf der Menge der natürlichen Zahlen können wir uneingeschränkt addieren und multiplizieren. Für Addition und Multiplikation gelten die üblichen Rechenregeln.

2. *Die natürlichen Zahlen einschließlich der Zahl 0*

$$\mathbb{N}_0 \quad := \quad \{0,1,2,3,...\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Diese unscheinbare Erweiterung der natürlichen Zahlen hat weitreichende Konsequenzen. Am weitreichendsten ist hier die Möglichkeit, die natürlichen Zahlen in einem Stellenwertsystem zu schreiben. Diese Darstellung ermöglicht eine einfache Ausführung der schriftlichen Addition und Multiplikation. Bei der früher verwendeten Darstellung mit römischen Ziffern ist dies nicht möglich.

3. *Die ganzen Zahlen*

$$\mathbb{Z} := \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}.$$

Bei den natürlichen Zahlen können wir Addieren und Multiplizieren. Eine Umkehrung der Addition, die Subtraktion, ist dagegen nicht allgemein möglich. Für eine uneingeschränkte Subtraktion benötigen wir zu jeder Zahl deren Negatives. Damit erhalten wir die ganzen Zahlen. Die ganzen Zahlen gestatten uneingeschränkte Addition, Subtraktion und Multiplikation.

4. *Die rationalen Zahlen*

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} \, : \, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}.$$

Bei den ganzen Zahlen können wir die Addition umkehren. Eine Umkehrung der Multiplikation, die Division, ist dagegen nicht allgemein möglich. Für eine uneingeschränkte Division benötigen wir zu jeder Zahl deren Kehrwert. Damit erweitern wir die ganzen Zahlen zu den rationale Zahlen. Bei den rationalen Zahlen sind die Rechenoperationen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division uneingeschränkt durchführbar. Eine Division durch 0 ist nicht möglich, da für alle Zahlen r die Gleichung $0 \cdot r = 0$ gilt. Die rationalen Zahlen sind ein sogenannter Körper, und zwar der kleinste Körper, der alle natürlichen Zahlen enthält. In einem Körper gibt es eine Addition und eine Multiplikation mit folgenden Eigenschaften: Für Addition und Multiplikation gelten das Kommutativgesetz (Summanden und Faktoren dürfen beliebig vertauscht werden) und das Assoziativgesetz (bei Summen

und Produkten von drei oder mehr Zahlen dürfen Klammern beliebig gesetzt und weggelassen werden). Weiter gibt es für die Addition das „neutrale Element“ der 0, das durch $r+0=r$ für alle $r \in \mathbb{Q}$ definiert ist. Und es gibt zu jeder Zahl r eine negative Zahl $-r$ mit $r+(-r)=0$. Analog gibt es für die Multiplikation das „neutrale Element“ 1 (wobei $1 \neq 0$ verlangt werden muss), das durch $r \cdot 1 = r$ für alle $r \in \mathbb{Q}$ definiert ist. Und es gibt zu jeder von 0 verschiedenen Zahl r einen Kehrwert $r^{-1} = \frac{1}{r}$ mit $r \cdot r^{-1} = 1$. Die Verträglichkeit von Addition und Multiplikation ist im Distributivgesetz geregelt, das Ausklammern bzw. Ausmultiplizieren ermöglicht. Neben diesen Rechenregeln, genauer gesagt den Körperaxiomen, ist $\mathbb{Q}$ ein „geordneter Körper“ in dem wir Ungleichungen definieren können. Dies wollen wir im Abschnitt 1.5 tun.
Die rationalen Zahlen können auf zwei Arten dargestellt werden, nämlich als

- Brüche oder
- endliche oder periodisch-unendliche Dezimalbrüche.

Für die Analysis ist der Körper der rationalen Zahlen nicht geeignet, da die rationale Zahlen zu viele „Lücken“ enthalten, wie der folgende Satz zeigt:

Satz 1.1
Es gibt kein $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$.

Beweis: Der Beweis ist ein typischer Widerspruchsbeweis. Wir nehmen an, dass die Aussage falsch ist. Das bedeutet, dass es ein $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ mit $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$ gibt. Dabei können wir annehmen, dass p und q teilerfremd sind, was wir durch eventuelles Kürzen von gemeinsamen Teilern erreichen können. Aus $p^2 = 2q^2$ folgt, dass p^2 eine gerade Zahl ist. Dann muss aber p selbst durch 2 teilbar sein. Es gibt also eine Zahl $r \in \mathbb{Z}$ mit $p = 2r$. Setzen wir dies in die obige Gleichung ein, so erhalten wir $(2r)^2 = 4r^2 = 2q^2$ und daraus folgt $q^2 = 2r^2$. Daher muss q ebenfalls durch 2 teilbar sein. Aus der Annahme folgt also, dass die beiden teilerfremden Zahlen p und q den gemeinsamen Teiler 2 besitzen. Dieser Widerspruch zeigt, dass die Annahme nicht zutreffen kann. Da die Annahme das Gegenteil der Behauptung des Satzes war, muss damit die Aussage des Satzes richtig sein. ■

Bemerkung: Wenn wir die rationalen Zahlen auf einer Zahlengeraden darstellen bedeutet der Satz, dass diese „rationale Zahlengerade“ Löcher hat. Eine genaue Analyse zeigt sogar, dass diese rationale Zahlengerade mehr Löcher als Zahlen hat. Für die in der Analysis untersuchten Grenzprozesse (Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Integrierbarkeit) benötigen wir einen Zahlenkörper ohne Löcher.

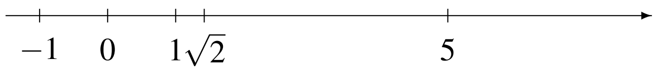
5. *Die reellen Zahlen* $\mathbb{R}$. Die reellen Zahlen entstehen aus den rationalen Zahlen durch „Vervollständigung“. Dabei werden die Lücken zwischen den rationalen Zahlen mit den *Irrationalzahlen* gefüllt. Es gibt mehrere Möglichkeiten, diese Vervollständigung mathematisch exakt zu formulieren. Da dies schwierig zu verstehen ist, enthält dieses Skriptum keine mathematisch saubere Definition der Vollständigkeit. Eine Möglichkeit zur Definition der reellen Zahlen ist die Supremumseigenschaft von beschränkten und nichtleeren Mengen. Dieser Zugang ist in dem Buch von P. Hartmann im Abschnitt 12.1. zu finden.

Die irrationalen Zahlen lassen sich als unendliche nichtperiodische Dezimalzahlen darstellen, wie z.B.

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= 1.414\ldots \\ \pi &= 3.141592654\ldots \\ \mathrm{e} &= 2.71828\ldots\end{aligned}$$

Hier sei noch kurz angemerkt, dass es zwei Arten von irrationalen Zahlen gibt. Dies sind einmal die *algebraischen* Zahlen, die wie z.B. $\sqrt{2}$ Nullstelle von einem Polynom sind. Und es gibt die *transzendenten* Zahlen, die keine Nullstelle von einem Polynom sind. Beispiele für transzendente Zahlen sind e und π.

Die reellen Zahlen kann man auf der *Zahlengeraden* anschaulich darstellen. Dabei entspricht **jedem** Punkt auf einer orientierten Achse in eindeutiger Weise eine reelle Zahl. Die reelle Zahlengerade hat also keine Löcher. Diese anschauliche Deutung der Vollständigkeit ist eine wichtige Grundlage für die Analysis.



Die reellen Zahlen sind wie die rationalen Zahlen ein geordneter Körper.

Für die hier genannten Zahlenmengen gilt: $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

1.2 Sigma-Notation

Die Sigma-Notation bzw. Σ-Notation ist eine nützliche Abkürzung für die Summe von n Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Für die Summe $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ schreiben wir $S = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$. Der Index i heißt *Laufindex*. Der Name den wir für den Laufindex verwenden spielt keine Rolle. Statt i verwenden wir häufig die Laufindizes j, k, l. Der Laufindex entspricht der Schleifenvariable bei `for`-Schleifen und hat nur eine lokale Bedeutung

Es gelten die folgenden Rechenregeln:

1. $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$
2. $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \sum\limits_{j=0}^{n-1} a_{j+1} = \sum\limits_{\nu=m+1}^{m+n} a_{\nu-m}$
3. $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{n+1-i}$
4. $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i + \sum\limits_{i=n+1}^{m} a_i = \sum\limits_{i=1}^{m} a_i$
5. $\sum\limits_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i$
6. $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda a_i = \lambda \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$

In dem Ausdruck $S = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ setzen wir für den Laufindex i zunächst den kleinsten Wert $i = 1$ ein und erhalten den „Anfangswert“ $S = a_1$. Danach vergrößern wir i jeweils um 1 und addieren zu S den entsprechenden Ausdruck a_i. Dies machen wir solange, bis wir als letztes den Wert $i = n$ erhalten. Bei dieser Syntax muss zwingend die obere Grenze des Laufindex größer oder gleich der unteren Grenze sein. Für den Fall $n > m$ vereinbaren wir

$\sum\limits_{i=n}^{m} a_i := 0$. Dies ist eine „leere Summe“, da es keinen zulässigen Wert $n \leq i \leq m$ für den Laufindex i gibt.

1.3 Vollständige Induktion

Die vollständige Induktion ist ein Beweisprinzip mit dem wir unendlich viele Aussagen $A(n)$ beweisen können, die von einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ abhängen. Ein bekanntes Beispiel für eine solche Aussage $A(n)$ ist: für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis n gleich der Zahl $\frac{n(n+1)}{2}$. Das Prinzip der vollständigen Induktion lautet:

Satz 1.2 (Vollständige Induktion)
Es sei $A(n)$ eine Aussage, die von $n \in \mathbb{N}$ abhängt. Weiter seien (IA) und (IS) erfüllt, wobei
Induktionsanfang (IA): $A(1)$ *ist richtig.*
Induktionsschluss (IS): *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $A(n) \Longrightarrow A(n+1)$.*
Dann gilt die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkungen:

1. Im Induktionsschluss muss nicht die Aussage $A(n+1)$ bewiesen werden, sondern es muss nachgewiesen werden, dass die Schlussfolgerung $A(n) \Longrightarrow A(n+1)$ korrekt ist.
2. Diesen Induktionsschluss können wir auch zwei Schritte aufteilen:
   Induktionsannahme: Wir nehmen an, dass für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $A(n)$ gilt.
   Induktionsschritt: Unter dieser Annahme zeigen wir, dass dann auch die Aussage $A(n+1)$ gelten muss.
3. Die grundlegende Idee der vollständigen Induktion ist:
   $A(1) \to A(2) \to A(3) \to \ldots \to A(n) \to A(n+1) \to \ldots$
   Das Prinzip der vollständigen Induktion führt die häufig genutzte aber dennoch legere Pünktchenschreibweise „…“ mathematisch genau aus.
4. Es sei $n_0 \in \mathbb{N}_0$ fest. Die Aussage $A(n)$ können wir für alle $n \in \mathbb{N}_0$, $n \geq n_0$ mit Hilfe vollständiger Induktion nachweisen, indem wir im Induktionsanfang $A(n_0)$ zeigen und dann den Induktionsschluss für alle $n \geq n_0$ durchführen.
5. Nach dem gleichen Prinzip können wir rekursive Definitionen vornehmen. Hier solle ein Ausdruck $F(n)$ für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ oder für alle $n \in \mathbb{N}_0$ definiert werden. Hierzu definieren wir als erstes $F(1)$ (oder $F(n_0)$). Daneben müssen wir eine „Rekursionsvorschrift“ angeben, mit der wir aus dem schon vorliegenden Ausdruck $F(n)$ (für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$) den Ausdruck $F(n+1)$ konstruieren können.

Beispiele: Hier sind zwei einfache Beispiele für eine rekursive Definition.

1. Die Summe $\sum_{i=1}^{n} a_i$ können wir rekursiv definieren durch:
$$\sum_{i=1}^{1} a_i := a_1, \qquad \sum_{i=1}^{k+1} a_i := \left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right) + a_{k+1},\ 1 \leq k \leq n-1.$$
Damit ist die Summe für eine beliebige Anzahl n von Summanden definiert.

   Diese rekursive Definition ist anschaulich naheliegend. Wenn wir n Zahlen addieren wollen, gehen wir genauso vor: Nehme die erste Zahl und addiere danach die jeweils nächste Zahl, bis alle n Zahlen zusammengezählt sind.

2. Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ wollen wir die n-te *Potenz* von a definieren. Die „naive“ Definition mit Pünktchen lautet:
$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$$
Wollen wir die Potenzen mathematisch sauber definieren, können wir die mittels einer rekursiven Definition machen:
$$a^0 := 1 \text{ und } a^{n+1} := a^n \cdot a \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$
Im Fall $n = 0$ liegt eine Potenz mit Null Faktoren vor. Analog zur leeren Summe definieren wir die Potenz a^0 als das neutrale Element bezüglich der Multiplikation, also $a^0 = 1$. Hierbei ist zu beachten, dass der Exponent 0 hier die ganze Zahl Null ist. Diese Festlegung ist im Zusammenhang mit Polynomen und Potenzreihen sehr sinnvoll, da wir uns damit bei den Potenzen x^k die Fallunterscheidung $k \neq 0$ und $k = 0$ ersparen.

Bemerkung: Ein beliebter Fehler ist die „Unvollständige Induktion“. Dies bedeutet, dass aus Spezialfällen (ohne Beweis) auf den allgemeinen Fall geschlossen wird.

Beispiel: *Behauptung:* Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $z(n) = n^2 - n + 41$ eine Primzahl. Es sind tatsächlich $z(1) = 41$, $z(2) = 43$, $z(3) = 47$, $z(4) = 53, \ldots, z(40) = 1601$ alles Primzahlen, was man nachprüfen kann. Nach einer unvollständigen Induktion würde dies zum Nachweis der Behauptung ausreichen. Es gilt jedoch $z(41) = 41^2$, und dies ist keine Primzahl! Die Behauptung ist also falsch.

Satz 1.3 (Geometrische Summenformel)

Für alle $q \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt die Gleichung $\sum_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Beweis: Der Beweis dieses Satzes ist mit zwei verschiedenen Beweismethoden möglich:

1. Durch vollständige Induktion:
Induktionsanfang: Für $n = 0$ erhalten wir $\sum_{k=0}^{0} q^k = q^0 = 1$ und $\frac{1-q^{0+1}}{1-q} = \frac{1-q}{1-q} = 1$.

   Induktionsschluss: Für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gelte $\sum_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Daraus folgt
$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{\left(1-q^{n+1}\right) + (1-q)q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}.$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist damit die Formel für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

2. Durch direktes Nachrechnen: Wir multiplizieren die Summe mit dem Faktor $(1-q)$ und erhalten

$$(1-q) \cdot \sum_{k=0}^{n} q^k = \left(\sum_{k=0}^{n} q^k\right) - \left(\sum_{k=0}^{n} q^{k+1}\right) = \left(\sum_{k=0}^{n} q^k\right) - \left(\sum_{k=1}^{n+1} q^k\right) = 1 - q^{n+1}$$

(„Teleskopsumme“). Hierbei haben wir beim zweite Gleichheitszeichen eine Indexverschiebung bei der zweiten Summe durchgeführt. Aus dieser Gleichung folgt sofort die Behauptung. ■

Bemerkung: Dieser Beweis zeigt, dass die vollständige Induktion als Beweismethode nicht immer das „Mittel der Wahl“ ist. In einigen Fällen ist ein direkter Beweis einfacher durchzuführen.

Folgerung: Für $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x - y} = \sum_{k=0}^{n} x^{n-k} y^k = x^n + x^{n-1} y + x^{n-2} y^2 + \ldots + x y^{n-1} + y^n.$$

Beweis: Diese Formel erhalten wir aus der geometrischen Summenformel, indem wir dort $q = \frac{y}{x}$, $x \neq 0$ einsetzen. Aus der Bedingung $q \neq 1$ wird dabei $x \neq y$.

$$\sum_{k=0}^{n} x^{n-k} y^k = x^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{y}{x}\right)^k = \frac{x^{n+1}}{x} \cdot \frac{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^{n+1}}{1 - \frac{y}{x}} = \frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x - y}$$

Durch direktes Nachrechnen sehen wir, dass diese Formel auch für $x = 0$ gilt. ■

Spezialfälle: Wir multiplizieren die in der Folgerung hergeleitete Formel mit dem Nenner und erhalten die Spezialfälle

1. $n = 1: \; x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$
2. $n = 2: \; x^3 - y^3 = (x^2 + xy + y^2)(x-y)$
3. $n = 3: \; x^4 - y^4 = (x^3 + x^2 y + x y^2 + y^3)(x-y)$

Der erste Spezialfall zeigt, dass die übliche Bezeichnung „dritte Binomische Formel“ für diese Formel eigentlich verkehrt ist.

1.4 Fakultäten und Binomialkoeffizienten

Hier wollen wir zunächst mit der Fakultät eine weitere rekursive Definition betrachten. Mit diesen Fakultäten können wir die sogenannten Binomialkoeffizienten definieren und die Binomische Formel beweisen. Diese Binomische Formel ist eine Verallgemeinerung der „ersten“ und „zweiten Binomischen Formel“ für größere Exponenten.

Die Fakultät von n ist das Produkt aller natürlicher Zahlen von 1 bis n. Die Bezeichnung hierfür ist $n!$. Eine „Pünktchendefinition“ ist $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Eine genaue Definition erfolgt rekursiv:

Definition 1.4 (Fakultäten)
Für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ heißt $n!$ die Fakultät *von n. Die Fakultäten sind definiert durch*

$$0! := 1,\ (n+1)! = (n+1) \cdot n! \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Bemerkung: Ähnlich wie bei den Potenzen vereinbaren wir $0! = 1$.

Definition 1.5 (Binomialkoeffizienten)
Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k \leq n$ definieren wir die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ *(„n über k") als*

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

Bemerkungen:

1. Es gilt $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{n} = 1$ und $\binom{n}{1} = n$.
2. Fakultäten und Binomialkoeffizienten haben folgende Anwendung in der Kombinatorik:
   $n!$ ist die Anzahl der Permutationen von n Objekten bzw. die Anzahl der verschiedenen Anordnungsmöglichkeiten von n (unterscheidbaren) Objekten.
   $\binom{n}{k}$ ist die Anzahl der Möglichkeiten, aus einer Menge von n Objekten eine Teilmenge mit k Objekten auszuwählen.

Satz 1.6
Es seinen $n, k \in \mathbb{N}_0$. Dann gelten für die Binomialkoeffizienten:

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, 0 \leq k \leq n$ *2.* $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Beweis:

1. Dies ist aus Symmetriegründen klar. Wenn wir die Definition der Binomialkoeffizienten betrachten sehen wir, dass sich der Ausdruck $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ nicht ändert, wenn wir k und $n-k$ austauschen.
2. Verwenden wir die Definition der Binomialkoeffizienten, so erhalten wir

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} =$$

$$\frac{(k+1) \cdot n! + (n-k) \cdot N!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \binom{n+1}{k+1}$$

■

Mit Hilfe der Eigenschaften $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ und $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ können wir die Binomialkoeffizienten im *Pascalschen Dreieck* anordnen. Dabei ist ein Eintrag im „Inneren" dieses Dreiecks die Summe der beiden direkt darüber stehenden Zahlen. Der Anfang des Pascalschen Dreiecks ist:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ & & & & & \text{usw.} & & & & & \end{array}$$

Satz 1.7 (Binomische Formel)
Für beliebige Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ und für alle Zahlen $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Beweis: Der Beweis dieses Satzes erfolgt mit Hilfe vollständiger Induktion unter Ausnutzung der beiden Eigenschaften der Binomialkoeffizienten:

Induktionsanfang: Für $n = 0$ lautet die Formel $1 = (a+b)^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = 1$.

Induktionsschluss: Es wird angenommen, dass die Gleichung $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ richtig ist. Wir müssen zeigen, dass diese Gleichung dann auch mit $n+1$ anstelle von n erfüllt ist. Wir multiplizieren die beiden Seiten dieser Gleichung mit $(a+b)$ und erhalten

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n(a+b) = \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right](a+b) \\
&= a\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-(k-1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 + \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Spezialfälle: Der Spezialfall $n = 2$ liefert mit $a = x$ und $b = y$ die „erste binomische Formel“ und mit $a = x$ und $b = -y$ die „zweite binomische Formel“

1. $n = 2: \; (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \quad$ und $\quad (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

2. $n=3: \ (x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$

3. $n=4: \ (x+y)^4 = x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$

1.5 Ungleichungen

Im Abschnitt 1.1 haben wir festgestellt, dass $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ geordnete Körper sind, wir also je zwei Zahlen der Größe nach vergleichen. Wir müssen für die Ordnungsrelation „$<$“ sicherstellen, dass sie mit den Operationen Addition und Multiplikation verträglich ist.

Definition 1.8 (Ungleichungen)
Auf der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist eine Ordnungsrelation „$<$“ definiert. Dabei gilt für zwei reelle Zahlen a und b genau eine der drei Beziehungen

$$a<b,\ a=b \ \text{ oder } \ a>b.$$

Für alle Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gelten die folgenden Regeln:

$$\begin{array}{lcll} a<b, b<c & \Longrightarrow & a<c & \textit{(Transitivität)} \\ a<c, b<d & \Longrightarrow & a+b<c+d & \textit{(Monotonie bezüglich Addition)} \\ a<b, c>0 & \Longrightarrow & ac<bc & \textit{(Monotonie bezüglich Multiplikation).} \end{array}$$

Bemerkungen: Es gelten folgende Schreibweisen und Vereinbarungen:

1. $a \leq b :\Longleftrightarrow a<b$ oder $a=b$
2. $a>b :\Longleftrightarrow b<a$
3. $a \geq b :\Longleftrightarrow b \leq a$
4. $a<b \leq c :\Longleftrightarrow a<b$ und $b \leq c$
5. Die Zahl a heißt **positiv**, wenn $a>0$ gilt. $\mathbb{R}^+ = \left\{x \in \mathbb{R} \,|\, x>0\right\}$ ist die Menge der positiven Zahlen.
6. a heißt **negativ**, wenn $a<0$ gilt.
7. Ist $a \geq 0$, so nennen wir a **nichtnegativ**. $\mathbb{R}_0^+ = \left\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\right\}$ ist die Menge der nichtnegativen Zahlen.
8. Bei der Monotonie bezüglich der Multiplikation ist zu beachten, dass wir Ungleichungen nur mit einem positiven Faktor $c>0$ multiplizieren dürfen.

In der obigen Definition sind die minimalen Regeln festgeschrieben, die wir für die Einführung von Ungleichungen benötigen. Aus diesen drei Gesetzten lassen sich alle weiteren Rechenregeln für Ungleichungen herleiten.

Satz 1.9 (Rechenregeln für Ungleichungen)
Es gelten folgende Rechenregeln für Ungleichungen:

1. $a>0 \Longleftrightarrow -a<0$
2. $a^2 \geq 0$
3. $a<b$ *und* $c<0 \Longrightarrow ac>bc$
4. $0<a<b \Longleftrightarrow 0<\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{a}$
5. *Sind $a, b \geq 0$, so gilt: $a<b \Longleftrightarrow a^2<b^2$.*

Definition 1.10 (Intervalle)
Die folgenden Mengen reeller Zahlen heißen Intervalle.

$$\begin{aligned}
(a,b) &= \{x\in\mathbb{R} : a<x<b\} & (a,\infty) &= \{x\in\mathbb{R} : a<x\}\\
[a,b) &= \{x\in\mathbb{R} : a\le x<b\} & (-\infty,b) &= \{x\in\mathbb{R} : x<b\}\\
(a,b] &= \{x\in\mathbb{R} : a<x\le b\} & [a,\infty) &= \{x\in\mathbb{R} : a\le x\}\\
[a,b] &= \{x\in\mathbb{R} : a\le x\le b\} & (-\infty,b] &= \{x\in\mathbb{R} : x\le b\}
\end{aligned}$$

Intervalle der Form (a,b) heißen „offenen Intervalle“ und Intervalle der Form $[a,b]$ heißen „abgeschlossene Intervalle“.

Bemerkungen:

1. Für ein offenes Intervall gibt es die gleichwertige Bezeichnung $]a,b[$.
2. Intervalle der Form $[a,b) = [a,b[$ heißen „rechts halboffene Intervalle“.
3. Intervalle der Form $(a,b] =]a,b]$ heißen „links halboffene Intervalle“.
4. Die Menge der reellen Zahlen können wir auch als Intervall $\mathbb{R} = (-\infty,\infty)$ schreiben.

Beispiel: Für welche $x\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ gilt $\dfrac{x-1}{x+1} < \dfrac{3}{2}$?

Zur Beantwortung dieser erweitern wir die Ungleichung mit dem Nenner der linken Seite. Hierzu müssen wir eine Fallunterscheidung durchführen:

1. $x+1>0$ bzw. $x>-1$. In diesem Fall erhalten wir
$$\frac{x-1}{x+1} < \frac{3}{2} \iff 2(x-1) < 3(x-1) \iff -5<x$$

2. $x+1<0$ bzw. $x<-1$. In diesem Fall ist
$$\frac{x-1}{x+1} < \frac{3}{2} \iff 2(x-1) > 3(x-1) \iff -5>x$$

Fassen wir die beiden Fälle zusammen, so erhalten wir:

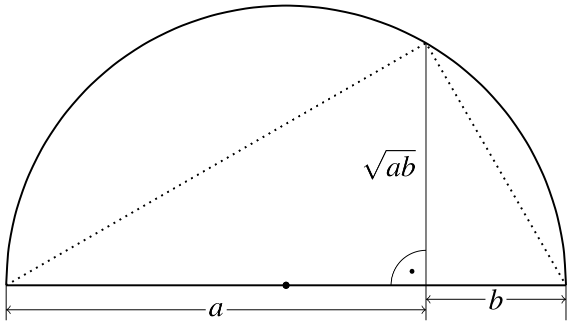
$$\frac{x-1}{x+1} < \frac{3}{2} \iff x\in(-\infty,-5)\cup(-1,\infty)$$

Satz 1.11 (Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischen Mittel)
Es seinen $a,b\in\mathbb{R}$ positiv. Dann gilt

$$\sqrt{ab} \le \frac{1}{2}(a+b) \quad \textit{und} \quad \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(a+b) \iff a=b.$$

Die Zahl $\sqrt{ab}$ heißt geometrisches Mittel *und $\frac{1}{2}(a+b)$ heißt* arithmetisches Mittel *von a und b.*

Bemerkung: Teilen wir den Durchmesser eines Halbkreises in zwei Strecken der Länge a und b auf, so gilt: Das arithmetische Mittel von a und b ist der Kreisradius und das geometrische Mittel von a und b ist die Höhe über dem Teilungspunkt des Kreisdurchmessers. Mit dieser geometrischen Betrachtung ist der Satz vollkommen klar.



Beweis: Für $a, b > 0$ gilt:
$(a-b)^2 \geq 0$ und $(a-b)^2 = 0 \Longleftrightarrow a = b$. Ausmultiplizieren ergibt $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Longrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \Longrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab$. Da alle beteiligten Größen positiv sind, können wir die letzte Regel aus Satz 1.9 (von rechts nach links) anwenden und erhalten $a + b \geq 2\sqrt{ab}$. Wie schon zu Beginn des Beweises festgestellt, gilt „=“ bei allen Ungleichungen genau dann, wenn $(a-b) = 0$ ist. ■

Satz 1.12 (Bernoullische Ungleichung)
Für alle $x \geq -1$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Beweis: Den Beweis führen wir als Induktionsbeweis nach n:

Induktionsanfang ($n = 0$): Es ist $(1+x)^0 = 1$ und $1 + 0x = 1$.

Induktionsschluss: Wir müssen zeigen: Gilt für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $(1+x)^n \geq 1 + nx$, so folgt daraus auch die Ungleichung $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$.

Wir multiplizieren beide Seiten der angenommenen Ungleichung $(1+x)^n \geq 1 + nx$ mit der Zahl $(1+x) \geq 0$ und erhalten damit

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \underbrace{(1+x)}_{\geq 0} \geq (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geq 1 + (n+1)x.$$

Damit haben wir den Induktionsschluss abgeschossen. Daraus folgt, dass die behauptete Ungleichung für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. ■

Bemerkung: Der Gültigkeitsbereich der Bernoullischen Ungleichung (in unserem Satz $x \geq -1$) hängt von der verwendeten Beweismethode ab:

1. Für $x \geq 0$ kann die Bernoullische Ungleichung direkt aus der Binomischen Formel hergeleitet werden:
$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = 1 + nx + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^k}_{\geq 0} \geq 1 + nx.$$

2. Für $x \geq -1$ kann die Bernoullische Ungleichung mittels vollständiger Induktion nachgewiesen werden.

3. Die Bernoullische Ungleichung gilt sogar für alle $x \geq -2$. Der Nachweis hierfür kann nicht mit dem oben aufgeführten Induktionsbeweis geführt werden, da der Faktor $(1+x)$ in diesem Fall auch negativ sein kann.

Folgerungen: Hier sind einige nützliche Folgerungen aus der Bernoullischen Ungleichung zusammengestellt:

1. Es sei M eine beliebige positive Zahl. Dann gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $2^n \geq M$: Wir schreiben zunächst $2 = (1+1)$ und wenden die Bernoullische Ungleichung an. Damit erhalten wir $2^n = (1+1)^n \geq 1 + n \cdot 1 = n+1$. Zu jeder Zahl $M > 0$ existiert eine natürliche Zahl n mit $n+1 \geq M$, und daraus folgt die Behauptung.

2. Es sei a eine beliebige positive Zahl. Dann gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{2^n} \leq a$. Die behauptete Ungleichung ist gleichwertig mit $\frac{1}{a} \leq 2^n$. Setzen wir also $M = \frac{1}{a}$ in unserer ersten Folgerung ein, so haben wir diese Ungleichung ebenfalls bewiesen.

3. Ist $q > 1$, so werden die Potenzen q^n beliebig groß. Um dies zu zeigen, setzen wir $a = q - 1 > 0$ und erhalten mit der Bernoullischen Ungleichung $q^n = (1+a)^n \geq 1 + na > na$. Für eine positive Zahl a werden die Zahlen na beliebig groß und damit ist die Behauptung bewiesen. Die Tatsache, dass na beliebig groß wird, folgt aus dem archimedischen Axiom das besagt, dass die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ in der Menge $\mathbb{R}$ nicht beschränkt sind.

Alle Grenzprozesse mit denen sich die Analysis beschäftigt hängen ganz wesentlich davon ab, dass wir den Abstand von Zahlen messen können. Die Grundlage der Abstandsmessung in der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist der Absolutbetrag einer Zahl:

Definition 1.13 (Absolutbetrag)
Es sei $x \in \mathbb{R}$. Dann heißt die Größe

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{sonst} \end{cases}$$

der (Absolut-)Betrag *von x.*

Bemerkung: Der Betrag von x ist stets nichtnegativ, $|x| \geq 0$.

Satz 1.14 (Rechnen mit Beträgen)
Für den Absolutbetrag gelten die folgenen Regeln:

1. $|a| \geq 0$ *und* $|a| = 0 \Longleftrightarrow a = 0$
2. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
3. $|a+b| \leq |a| + |b|$
4. $|a-b| \geq \big||a| - |b|\big|$
5. $|a| \leq b \Longleftrightarrow -b \leq a \leq b$
6. $|x - x_0| < r \Longleftrightarrow x_0 - r < x < x_0 + r$

Bemerkungen:

1. $|x|$ misst den Abstand des Punktes x vom Nullpunkt. Die erste Regel besagt, dass Abstände stest ≥ 0 sind. Sehr wichtig ist auch der Zusatz, nachdem ein Abstand von zwei Punkten genau dann Null ist, wenn die beiden Punkte übereinstimmen. Anders ausgedrückt: Der Abstand von zwei verschiedenen Punkten ist positiv.

2. $|x-x_0|$ ist der Abstand von x zu dem (als festen angenommenen) Punkt x_0.
3. Die Menge aller x-Werte, welche die Ungleichung $|x-x_0| < r$ erfüllen, ist das Intervall (x_0-r, x_0+r). Dies sind alle Punkte, die von dem festen Punkt x_0 einen Abstand von weniger als r haben.
4. Für alle reellen Zahlen x gilt die Gleichung $\sqrt{x^2} = |x|$.
5. Die Ungleichung $|a+b| \le |a|+|b|$ heißt die *Dreiecksungleichung*.

Beispiel: Wir suche alle $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, für die $\left|\dfrac{3-2x}{1+x}\right| \le 4$ gilt. Es gibt zwei Methoden, diese Betragsungleichung zu lösen:

1. Da der Nenner stets positiv ist, können wir die Ungleichung mit $|x+1|$ erweitern und erhalten die gleichwertige Ungleichung $|3-2x| \le 4|x+1|$. Diese Ungleichung können wir durch eine Fallunterscheidung lösen. Mittels der Fallunterscheidung können wir die beiden Beträge weglassen und je nach Lage der x-Werte hierbei den Ausdruck mit -1 multiplizieren oder nicht. Wir erhalten insgesamt die drei Fälle $x < -1$, $-1 < x \le \frac{3}{2}$ und $x > \frac{3}{2}$.
2. Wir können den Betrag sofort auflösen und erhalten die gleichwertige Doppelungleichung
$$\left|\frac{3-2x}{1+x}\right| \le 4 \Longleftrightarrow -4 \le \frac{3-2x}{1+x} \le 4.$$
Jetzt können wir diese beiden Ungleichungen mit dem Nenner $1+x$ erweitern, wozu wie in obigem Beispiel nur noch die Fallunterscheidung $1+x > 0$ oder $1+x < 0$ erforderlich ist.

1.6 Das griechische Alphabet

Um die verschiedenartigen mathematischen Objekte besser zu unterscheiden, werden diese mit Buchstaben aus verschiedenen Alphabeten bezeichnet. Aus diesem Grund werden sehr häufig griechische Buchstaben verwendet. Daher ist die Kenntnis des griechischen Alphabetes wichtig:

A	α	Alpha	I	ι	Jota	P	ρ	Rho
B	β	Beta	K	κ	Kappa	Σ	σ	Sigma
Γ	γ	Gamma	Λ	λ	Lambda	T	τ	Tau
Δ	δ	Delta	M	μ	My	Υ	υ	Ypsilon
E	ε	Epsilon	N	ν	Ny	Φ	φ	Phi
Z	ζ	Zeta	Ξ	ξ	Xi	X	χ	Chi
H	η	Eta	O	o	Omikron	Ψ	ψ	Psi
Θ	θ	Theta	Π	π	Pi	Ω	ω	Omega

2 Folgen und Reihen

2.1 Konvergente Folgen

Definition 2.1 (Folge)
Eine Folge *ist eine Vorschrift, die jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Zahl $a_n \in \mathbb{R}$ zuordnet.*
$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto a(n) = a_n$.

Bemerkungen:

1. Anschaulich können wir uns eine Folge als eine nummerierte Liste aus unendlich vielen reellen Zahlen vorstellen. Genau genommen ist eine Folge eine Funktion, deren Definitionsbereich $\mathbb{N}$ ist.
2. Wir verwenden für Folgen die Schreibweisen $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ oder $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder (a_n).
3. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, eine Folge zu bilden:
   (a) durch explizite Angabe der Abbildungsvorschrift,
   (b) rekursiv, also durch Angabe des ersten Folgeglieds a_1 und einer Vorschrift, wie aus a_n (oder $a_1, \ldots a_n$) das Folgeglied a_{n+1} berechnet werden kann.
   (c) durch Angabe einer Methode zur Bestimmung der Folgeglieder.

Beispiele:

1. Die ersten vier Folgeglieder von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n}$ sind $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}$.
2. Die ersten vier Folgeglieder von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = 3$ sind 3, 3, 3, 3.
3. Die ersten vier Folgeglieder von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = A \cdot q^{n-1}$ für eine Zahl $A \neq 0$ und ein $q \in \mathbb{R}$ sind $A, A \cdot q, A \cdot q^2, A \cdot q^3$.
   Bemerkung: Diese Folge heißt *geometrische Folge* und kann durch $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$ charakterisiert werden.
4. Die ersten acht Folgeglieder der durch $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$ rekursiv definierten Folge sind 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21. Diese Folge heißt *Fibonacci-Folge.* In einer Übungsaufgabe werden wir einen expliziten Ausdruck für a_n herleiten.
5. die ersten vier Folgeglieder der durch $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{2}{a_n}\right)$ für $n \in \mathbb{N}$ rekursiv definierten Folge sind $2, \dfrac{3}{2}, \dfrac{17}{12}, \dfrac{577}{408}$.

Wir wollen in diesem Abschnitt das Verhalten der Folgen untersuchen. Zunächst definieren wir einfache Eigenschaften von Folgen. Danach untersuchen wir das Verhalten der Folgeglieder a_n wenn der Index $n \to \infty$ geht.

Definition 2.2 (Eigenschaften von Folgen)
Eine Folge (a_n) *heißt*

1. monoton wachsend, *falls* $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \geq a_n$
2. streng monoton wachsend, *falls* $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} > a_n$
3. monoton fallend, *falls* $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \leq a_n$
4. streng monoton fallend, *falls* $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} < a_n$
5. von oben beschränkt, *falls* $\exists M \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq M$.
6. von unten beschränkt, *falls* $\exists m \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq m$.
7. beschränkt, *wenn sie von oben und von unten beschränkt ist,* *d.h.* $\exists K \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq K$.
8. alternierend, *wenn je zwei aufeinanderfolgende Folgeglieder verschiedenes Vorzeichen haben, also* $a_n \cdot a_{n+1} < 0, n \in \mathbb{N}$.

Bemerkungen:

1. Für unsere weitern Untersuchungen spielt der Unterschied zwischen der Monotonie und der strengen Monotonie keine Rolle.
2. Eine monoton wachsende Folge ist immer von unten beschränkt.
   Begründung: Aufgrund der Monotonie ist $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_{n-1} \leq a_n$. Daher ist das erste Folgenglied a_1 eine untere Schranke.
3. Eine monoton fallende Folge ist immer von oben beschränkt.
   Begründung: Aufgrund der Monotonie gilt $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_{n-1} \geq a_n$. Daher ist das erste Folgenglied a_1 eine obere Schranke.
4. Eine alternierende Folge ist nicht monoton. Ist $a_{n-1} > 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$ so folgt $a_n < 0$ und $a_{n+1} > 0$. Es ist also $a_n < a_{n-1}$ und $a_{n+1} > a_n$.

Beispiele: Wir untersuchen die hier angegebenen Folgen auf die gerade definierten Eigenschaften:

1. $a_n = \frac{1}{n}$
   - Monotonie: Es ist $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n$, die Folge ist streng monoton fallend.
   - Beschränktheit: Aufgrund der Monotonie ist $a_n < a_1 = 1$. Weiter gilt $a_n > 0$, also haben wir $0 < a_n \leq 1$. Die Folge ist beschränkt.
   - Da die Folge monoton ist, kann sie nicht alternierend sein.
2. $a_n = 3$
   - Monotonie: Es ist $a_{n+1} = a_n$, also gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ sowohl $a_{n+1} \leq a_n$ als auch $a_{n+1} \geq a_n$. Die Folge ist gleichzeitig monoton wachsend und monoton fallen.
   - Nach den obigen Bemerkungen folgt aus der Monotonie sofort die Beschränktheit $3 \leq a_n \leq 3$.

- Da die Folge monoton ist, kann sie nicht alternierend sein.

3. $a_n = (-1)^n$

   - Wegen $a_n \cdot a_{n+1} = -1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Folge alternieren.
   - Da die Folge alternierend ist, kann sie nicht monoton sein.
   - Die Folge nimmt nur die Werte ± 1 an, also ist $-2 < a_n < 7$. Die Folge ist beschränkt.

4. $a_n = q^n$, also $a_{n+1} = q \cdot a_n$. Hier müssen wir eine Fallunterscheidung bezüglich q vornehmen.

   - Für $q \geq 1$ ist die Folge monoton wachsend, für $q > 1$ sogar streng monoton. Für $q = 0$ ist die Folge konstant, also ebenfalls monoton wachsend.
   - Für $0 \leq q \leq 1$ ist die Folge monoton fallend, für $0 < q < 1$ sogar streng monoton.
   - Die Folge ist genau dann von oben beschränkt, wenn $-1 \leq q \leq 1$ ist.
   - Die Folge ist genau dann von unten beschränkt, wenn $q \geq -1$ ist.
   - Die Folge ist genau dann alternierend, wenn $q < 0$ ist.

Nun wollen wir den Begriff der konvergenten Folge einführen und den Grenzwert einer Folge definieren. Beobachten wir das Verhalten der Folge $a_n = \frac{1}{n}$ oder der rekursiv definierten Folge $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{2}{a_n}\right)$, so stellen wir folgendes fest:

Die Werte der Folge nähern sich für große n offensichtlich einem „festen“ Wert, ohne diesen Wert jedoch jemals zu erreichen. Die Folgeglieder von $a_n = \frac{1}{n}$ beispielsweise nähern sich der Zahl Null beliebig an, sind jedoch alle positiv und damit von Null verschieden.

Anschaulich können wir feststellen, dass die Zahlen $\frac{1}{n}$ für immer größer werdendes n „gegen Null gehen.“ Wir müssen also die Verhaltensweisen „gegen Null gehen“ aber dennoch „nie Null werden“ in einer mathematisch exakten Definition zusammenführen. Hierzu wenden wir den folgenden Kunstgriff an:

Wir führen einen Toleranzstreifen um die Null ein, der beliebig klein sein darf. Für die Folgeglieder $a_n = \frac{1}{n}$ stellen wir fest, dass nur endlich viele Folgeglieder außerhalb dieses Toleranzstreifens liegen, egal wie klein wir den Toleranzstreifen gewählt haben. Wenn nur endlich viele Folgeglieder außerhalb des Toleranzstreifens liegen bedeutet dies, dass ab einem Index N, der natürlich von der Breite des Tolerzstreifens abhängen wird, alle nachfolgenden Folgeglieder a_n, $n \geq N$ innerhalb bes Toleranzstreifens liegen.

Genau dieses halten wir in der folgenden Definition fest. Die beliebige Breite des Toleransstreifens wird üblicherweise mit einer beliebigen Zahl $\varepsilon > 0$ beschrieben. Der Toleranzstreifen enthält alle Zahlen um den Grenzwert, deren Abstand von dem Grenzwert kleiner als dieses ε ist.

Definition 2.3 (Konvergente Folge)
Die Folge (a_n) heißt konvergent *gegen den* Grenzwert *a, falls gilt:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N(\varepsilon) \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

Schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Andernfalls heißt (a_n) divergent.

Beispiel: Wir wollen versuchen, mit dieser Definition nachzuweisen, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ist. Hierzu wählen wir eine beliebige Zahl $\varepsilon > 0$. Nun müssen wir ein $N = N(\varepsilon)$ angeben, für das gilt: Sobald $n \geq N$ ist, folgt schon $|a_n - 0| < \varepsilon$.

Verwenden wir zunächst alles, was wir wissen: Zunächst ist $|a_n - 0| = |a_n| = \frac{1}{n}$. Sobald $n \geq N$ ist, folgt daraus $|a_n - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} = \frac{1}{N(\varepsilon)}$.

Unser Ziel ist der Nachweis von $|a_n - 0| < \varepsilon$. Wenn wir also erreichen, dass $\frac{1}{N(\varepsilon)} < \varepsilon$ ist, so gilt aufgrund unserer vorigen Überlegung auch $|a_n - 0| < \varepsilon$.

$\frac{1}{N(\varepsilon)} < \varepsilon$ können wir erreichen, indem wir eine beliebige natürliche Zahl $N(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$ wählen. Dies ist nach dem archimedischen Axiom immer möglich, welches wir im Beispiel 3 auf Seite 14 verwendet hatten.

Dies können wir nun zusammenfassen und erhalten: Es sein $a_n = \frac{1}{n}$ und $a = 0$. Für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ wählen wir eine natürliche Zahl $N = N(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ die Ungleichung $|a_n - a| < \varepsilon$. Daher ist $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Dieses Beispiel zeigt, dass der Nachweis der Konvergenz einer Folge allein mit Hilfe der Definition sehr mühsam ist. In manchen Fällen können wir die Definition sogar überhaupt nicht anwenden: Betrachten wir die durch $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$ rekursiv definierte Folge, so sind wir nicht in der Lage, einen expliziten Ausdruck für das Folgeglied a_n anzugeben. Für diese Folge werden wir später ein Kriterium formulieren, das uns den Nachweis der Konvergenz und die Berechnung des Grenzwertes auch in diesem Fall ermöglicht.

Bezeichnung: Eine Folge $\big(a_n\big)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ nennen wir eine *Nullfolge* (abgekürzt NF).

Zunächst notieren wir einen Satz, der anschaulich klar ist:

Satz 2.4 (Rechenregeln für konvergente Folgen)
Es seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b \qquad \lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab \qquad a_n < b_n \Longrightarrow a \leq b$$

Ist $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $b \neq 0$, so gilt weiterhin

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$$

Bemerkungen:

1. Anschaulich sind die Regeln klar. $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+b$ können wir anschaulich so formulieren: wenn wir eine Zahl a_n die ungefähr a ist und eine Zahl b_n die ungefähr b ist addieren, so ist die Summe ungefähr $a+b$.

2. Da eine konstante Folge $a_n=c$ gegen den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n=c$ konvergiert, können wir die ersten beiden Regeln erweitern zu: Eine Linearkombination von konvergenten Folgen konvergiert gegen die (selbe) Linearkombination der Grenzwerte.

3. Das Beispiel $a_n=\frac{1}{n}>0$ mit dem Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ zeigt, dass bei der Regeln $a_n<b_n \Longrightarrow a\le b$ auf der rechten Seite die Gleichheit auftreten kann.

Folgerung: (Sandwich-Theorem oder Squeeze-Theorem):
Falls $a_n\le c_n\le b_n, n\in\mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n=a$ gilt, so ist die Folge (c_n) ebenfalls konvergent und es ist $\lim_{n\to\infty} c_n=a$.
Liegen die Folgeglieder von c_n zwischen den Folgegliedern von a_n und b_n und haben die Folgen a_n und b_n den selben Grenzwert, so ist die Folge $\big(c_n\big)$ ebenfalls konvergent (gegen den gemeinsamen Grenzwert a). Dies folgt sofort aus der Regel $a_n<b_n \Longrightarrow a\le b$.

Beipiel: Mit Hilfe der Rechenregeln und dem Beispiel $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ können wir Grenzwerte von rationalen Funktionen in n bestimmen, sofern der Grad des Nennerpolynoms größer oder gleich dem Grad des Zählerpolynoms ist.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+2n^2-n+1}{2n^3+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+2\cdot\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{n}\right)^3}{2+\left(\frac{1}{n}\right)^3}=\frac{3}{2}.$$

Nun notieren wir einen Satz, mit dessen Hilfe wir rekursiv definierte Folgen auf Konvergenz untersuchen können.

Satz 2.5 (Hinreichendes Konvergenzkriterium)
Eine monotone und beschränkte Folge ist konvergent.

Bemerkungen:

1. Dieser Satz benötigt keine explizite Darstellung der Folgeglieder a_n und keine Kenntnis des Grenzwertes a. Wir müssen die Folge nur auf Monotonie und Beschränktheit überprüfen.

2. Dieser Satz ist gleichbedeutend mit der Vollständigkeit der reellen Zahlen. Das bedeutet, wenn wir einen geordneten Körper haben, in dem dieser Satz (und das archimedische Prinzip) gilt, so muss dieser Körper vollständig sein und kann keine Lücken enthalten.

Beispiel: Wir betrachten die durch $a_1=2,\ a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{2}{a_n}\right)$ rekursiv definierte Folge. Wir weisen nach, dass diese Folge monoton fallend und von unten beschränkt ist. Damit sind die Voraussetzungen dieses Satzes erfüllt und wir haben die Konvergenz dieser Folge nachgewiesen. Sobald wir wissen, dass diese Folge einen Grenzwert hat, können wir den Grenzwert leicht berechnen.

1. Als erstes zeigen wir, dass die Folge $\left(a_n\right)$ beschränkt ist. Zunächst stellen wir fest, dass $a_n > 0$ ist. Dies folgt durch einen einfachen Induktionsbeweis: Nach Definition ist $a_1 = 2 > 0$. Gilt für ein $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $a_n > 0$, so ist auch $\frac{2}{a_n} > 0$ und a_{n+1} ist als arithmetisches Mittel zweier positiver Zahlen ebenfalls positiv.

   Damit sind alle bei der Rekursionsvorschrift vorkommenden Größen positiv und wir können die Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischen Mittel anwenden. Damit erhalten wir

   $$a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}}\right) \geq \sqrt{a_{n-1} \cdot \frac{2}{a_{n-1}}} = \sqrt{2},\ n \geq 2.$$

   Zusammen mit $a_1 = 2 \geq \sqrt{2}$ haben wir damit gezeigt, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $a_n \geq \sqrt{2}$ gilt. Daraus folgt, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ auch die Ungleichung $\frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ gilt.

2. Mit Hilfe der eben gezeigten Ungleichung können wir die Monotonie der Folge $\left(a_n\right)$ zeigen. Setzen wir $\frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ in die Rekursionsgleichung ein, so erhalten wir unter Verwendung von $\sqrt{2} \leq a_n$ die Ungleichung

   $$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \leq \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(a_n + \sqrt{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(a_n + a_n\right) = a_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

   Daraus folgt, dass $\left(a_n\right)$ monoton fallend ist. Aus der Monotonie folgt weiter $a_n \leq a_1 = 2, n \in \mathbb{N}$ und wir erhalten $\sqrt{2} \leq a_n \leq 2$. Mit einer etwas genaueren Analyse der Rekursionsgleichung können wir sogar $\sqrt{2} < a_n < 2$ zeigen.

3. Nun wissen wir, dass $\left(a_n\right)$ monoton fallend und beschränkt ist. aus Satz 2.5 folgt, dass $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existiert. Aus der obigen Ungleichung folgt weiter $0 < \sqrt{2} \leq a \leq 2$. Daraus folgt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$ ist und damit ist $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right)$.

   Aus $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ folgt sofort, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$ gilt. Wir können also auf beiden Seiten der Rekursionsgleichung $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{2}{a_n}\right)$ den Grenzübergang $n \to \infty$ durchführen und erhalten damit für den Grenzwert a die Gleichung $a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right)$. Damit gilt $a^2 = 2$ und zusammen mit der Ungleichung $\sqrt{2} \leq a \leq 2$ erhalten wir den Grenzwert $a = \sqrt{2}$.

Bemerkung: Das eben behandelte Beispiel können wir wie folgt verallgemeinern: Es sei $A > 0$ und die Folge $\left(a_n\right)$ sei rekursiv definiert durch $a_1 = \dfrac{A+1}{2}$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{A}{a_n}\right)$. Dann konvergiert diese Folge und es ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{A}$. Die Konvergenz erfolgt recht schnell, bei jedem Iterationsschritt verdoppelt sich die Anzahl der korrekten Dezimalstellen von $\sqrt{A}$. Anstelle des Startwertes $a_1 = A$ können wir auch den Startwert $a_1 = \frac{A+1}{2}$

verwenden. Der Startwert $\frac{A+1}{2}$ erspart einen Iterationsschritt. Dieses Näherungsverfahren zur Berechnung von $\sqrt{A}$ heißt *Heron-Verfahren.*

Beispiel: In diesem etwas kniffligen Beispiel sehen wir eine schöne Anwendung des Sandwich-Theorem: Es sein $a_n = \sqrt[n]{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Damit wir einen ersten Eindruck von a_n bekommen, wollen wir einige Folgeglieder ausrechnen. Es ist $a_1 = 1$, $a_2 = \sqrt{2} \approx 1.4142$, $a_3 = \sqrt[3]{3} \approx 1.4422$, $a_4 = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$. Weiter ist $a_{10} \approx 1.2589$, $a_{100} \approx 1.0471$, $a_{1000} \approx 1.0069$ und $a_{10000} \approx 1.0009$. Die Folgeglieder nähern sich der Zahl 1 immer weiter an. Da $a_n = \sqrt[n]{n} > 1$ gilt, vermuten wir daher $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Zum Bestimmung dieses Grenzwertes können wir wegen $a_n = \sqrt[n]{n} > 1$ diese Folge in der Form $a_n = 1 + b_n$ mit einer Folge $b_n > 0$ schreiben. Dabei gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1 \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Nun schreiben wir zunächst mit Hilfe der Binomischen Formel

$$n = \left(\sqrt[n]{n}\right)^n = a_n^n = (1+b_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_n^k = 1 + nb_n + \frac{n(n-1)}{2} b_n^2 + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} b_n^k.$$

Damit wir das Sandwich-Theorem anwenden können, müssen wir b_n nach oben abschätzen. Hierzu können wir eine beliebige Anzahl von Summanden auf der rechten Seite weglassen. Da alle Summanden $\binom{n}{k} b_n^k$ positiv sind, verkleinert sich hierbei die ganze Summe.

Im ersten Versuch lassen wir alle Summanden der Binomischen Formel für $k \geq 2$ weg und erhalten:

$$n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_n^k > 1 + nb_n \Longrightarrow 0 < b_n < \frac{n-1}{n}.$$

Diese Ungleichung ist für die Anwendung des Sandwich-Theorem nicht geeignet, da die oberen Schranken $\frac{n-1}{n}$ für $n \to \infty$ nicht gegen Null gehen.

Nun lassen wir alle Summanden der Binomischen Formel für $k \geq 3$ und den Summanden für $k = 1$ weg und erhalten:

$$n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_n^k > 1 + \frac{n(n-1)}{2} b_n^2 \Longrightarrow 0 < b_n^2 < \frac{2}{n} \Longrightarrow 0 < b_n < \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

Aus $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2}{n}} = 0$ folgt nun mit den Sandwich-Theorem, dass $\left(b_n\right)$ eine Nullfolge ist. Damit haben wir gezeigt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ gilt.

Beispiel: Die folgenden Grenzwerte gehören zur „Grundausstattung“ konvergenten Folgen und werden zum Teil ohne Herleitung zitiert. Einige der Folgen hängen von den Parametern q bzw. α ab. Diese Folgen konvergieren genau dann, wenn die Parameter die hier angegebenen Werte haben.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 1 & q = 1 \\ 0 & |q| < 1 \end{cases}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q^n}{n!} = 0, q \in \mathbb{R}$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} 0 & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \end{cases}$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{n!} = 0$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = 1, q > 0$

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n =: \mathrm{e} = 2.718\ldots$ (Eulersche Zahl)

Bemerkung: Zum letzten Beispiel sind zwei Anmerkungen angebracht. Es sei $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Zunächst müssen wir nachweisen, dass diese Folge konvergiert. Mit Hilfe der Bernoulischen Ungleichung lässt sich zeigen, dass a_n monoton wachsend ist. Daraus folgt insbesondere $a_n \geq a_1 = 2$. Damit wir den Satz 2.5 anwenden können, ist noch die Beschränktheit von a_n zu zeigen. Hierzu können wir folgenden „Trick“ anwenden: Wir betrachten eine zweite Folge $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Es ist klar, dass $a_n < b_n$ ist. Weiter können wir zeigen, dass die Folge b_n monoton fallend ist, und daraus folgt schließlich $a_n < b_n \leq b_1 = 4$. Damit gilt für die Folge $\left(a_n\right)$ die Ungleichung $2 \leq a_n \leq 4$. Da diese Folge monoton wachsend ist, muss sie einen Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ haben. Die Eulersche Zahl e, neben den Zahlen 0, 1 und π eine der wichtigsten Zahlen der Mathematik, definieren wir als diesen Grenzwert.

Diese Folge zeigt weiter, dass wir zur Abschätzung von Grenzwerten immer das „komplette“ Folgeglied anschauen müssen. Eine genauso verlockende wie falsche Betrachtung ist die folgenden: Die Basis $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ von a_n geht für große n gegen 1, also geht auch a_n gegen 1. Wegen $a_n \geq 2$ ist diese Betrachtung natürlich falsch. Jeder einzelne der Faktoren $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ von a_n nähert sich der Zahl 1 an, aber gleichzeitig wird die Anzahl der Faktoren (die alle etwas größer als 1 sind) unendlich groß.

2.2 Die Landauschen Symbole

Die Landauschen Symbole sind ein Werkzeug, um die Wachstumsgeschwindigkeit von Folgen a_n und b_n zu vergleichen, für die $a_n \to \infty$ und $b_n \to \infty$ für $n \to \infty$ gilt. Eine wichtige Anwendung der Landauschen Symbole ist die Laufzeitanalyse von Algorithmen. Hier bezeichnen wir die Laufzeit eines Algorithmus (z.B. Anzahl elementarer Rechenoperationen) mit a_n, wobei n die Größe der Eingabe bedeutet, die in irgendeiner für den Algorithmus passenden Maßeinheit angegeben wird.

Ein Beispiel ist die Multplikation von zwei $n \times n$-Matrizen. Für einen Eintrag in der Produktmatrix muss eine Zeile elementweise mit einer Spalte multipliziert werden (n Multiplikationen) und die Produkte müssen dann zusammengezählt werden ($n-1$ Additionen). Die Produktmatrix enthält insgesamt n^2 Einträge, es sind daher insgesamt n^3 Multiplikationen und $n^2(n-1)$ Additionen für die Berechnung der Produktmatrix erforderlich. Insgesamt sind dies $2n^3 - n^2$ elementare Operationen. Wenn wir uns nur nach der Größenordnung diese Laufzeit für sehr große n interessieren, so ist n^3 um so viel größer als n^2, dass wir den Summanden n^2 ohne weiteres weglassen können. Weiter spielt der Faktor 2 auch keine große Rolle, wenn wir nur nach der Wachtumsgeschwindigkeit fragen. Daher verhält sich $2n^3 - n^2$ bei dieser Betrachtung ähnlich wie der einfachere Ausdruck n^3. Es gibt effizientere Algorithmen für die Matrizenmultiplikation. Der sogenannten „Strassen-Algorithmus“ benötigt $A \cdot n^{2.807}$ elementare Operationen. Da die Konstante A groß ist, lohnt sich dieser Algorithmus nur für sehr große Matrizen. Der Algorithmus mit der der-zeit besten Komplexität benötigt nur $M \cdot n^{2.37827}$ elementare Operationen, ist allerdings für den praktischen Einsatz nicht geeignet.

Wir wollen nun die Grundlagen für diese Komplexitätsbeschreibung mathematisch genau formulieren:

Definition 2.6
Es seien zwei Folgen $\big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\big(b_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben.

1. *Die Folge $\big(a_n\big)$ ist* groß-O *von $\big(b_n\big)$, in Zeichen $a_n = O(b_n)$, falls die Folge der Quotienten $\frac{a_n}{b_n}$ beschränkt ist.*

2. *Die Folge $\big(a_n\big)$ ist* klein-O *von $\big(b_n\big)$, in Zeichen $a_n = o(b_n)$, falls die Folge der Quotienten $\frac{a_n}{b_n}$ eine Nullfolge ist.*

Beispiele:

1. $25n^2+33n+45 = O(n^2)$ und $25n^2+33n+45 = o(n^4)$
2. $n^5+5000n^3+10000n+1000000 = O(n^5)$ und $n^5+5000n^3+10000n+1000000 = o(n^6)$
3. $\frac{n(n-1)}{2} = O(n^2)$ und $\frac{n(n-1)}{2} = O(n^3)$ und $\frac{n(n-1)}{2} = o(n^3)$.
4. Ist $a_n = O(n^k)$, so folgt $a_n = o(n^j)$ für alle $j > k$.

Bemerkungen:

1. Da jede Nullfolge beschränkt ist, gilt $a_n = o(b_n) \Longrightarrow a_n = O(b_n)$. Damit wir eine möglichst gute Abschätzung mit der O-Notation erhalten, wollen wir erreichen, $a_n = O(b_n)$, aber $a_n \neq o(b_n)$.

2. Mit den Landauschen Symbolen lässt sich das Wachstumsverhalten von Folgen sehr einfach beschreiben. Es gelten die Regeln „Konstante Faktoren sind unwichtig und können durch 1 ersetzt werden“ und „Terme niedrigerer Ordnung sind unwichtig.“

   Es ist allerdings zu beachten, dass diese Aussagen für „große“ Werte von n gelten. So ist beispielsweise $10^{100}n$ von der Komplexität $O(n)$. Ist bei einem Algorithmus dieser Komplexität die Größe der Eingabe n in praktischen auftretenden Fällen klein (z.B. $n \leq 10^{10}$), so spielt die Konstante 10^{100} sehr wohl eine nicht zu vernachlässigende Rolle. In der praktischen Anwendung kann ein Algorithmus der Komplexität $O(n)$ also langsamer sein als ein Algorithmus der Komplexität $O(n^2)$.

Zur Beschreibung des Wachstumsverhalten von Folgen sind folgende Bezeichnungen üblich. Die Tabelle ist nach aufsteigender Wachstumsgeschwindigkeit sortiert.

Komplexität	Beschreibung	anschauliche Erklärung
$a_n = O(1)$	a_n ist beschränkt	die Laufzeit ist kleiner als ein konstanter Wert
$a_n = O(\log n)$	a_n wächst logarithmisch	a_n wächst ungefähr um einen konstanten Betrag, wenn sich n verdoppelt
$a_n = O(\sqrt{n})$	a_n wächst wie die Wurzelfunktion	a_n verdoppelt sich ungefähr, wenn sich n vervierfacht
$a_n = O(n)$	a_n wächst linear	a_n verdoppelt sich ungefähr, wenn sich n verdoppelt
$a_n = O(n \log n)$	a_n hat superlineares Wachstum	
$a_n = O(n^2)$	a_n wächst quadratisch	a_n wächst ungefähr auf das Vierfache, wenn sich n verdoppelt
$a_n = O(n^k)$, $k \geq 1$ fest	a_n wächst polynomial	a_n wächst ungefähr auf das 2^n-fache, wenn sich n verdoppelt
$a_n = O(2^n)$	a_n wächst exponentiell	a_n wächst ungefähr auf das Doppelte, wenn sich n um 1 erhöht
$a_n = O(n!)$	a_n wächst faktoriell	a_n wächst ungefähr auf das $n+1$-fache, wenn sich n um 1 erhöht

Bemerkungen:

1. Ein Algorithmus wird als *effizient* betrachtet, wenn seine Komplexität im worst-case Fall höchstens polynomial ist. Algorithmen mit exponentieller worst-case Komplexität sind *ineffizient*. Hierbei müssen wir allerdings beachten, dass bei manchen Algorithmen der worst-case Fall in der Praxis nie eintritt. Für die praktische Anwendung von Algorithmen ist deren average-case Verhalten interessanter als das worst-case Verhalten. Leider sind Aussagen über das average-case Verhalten von Algorithmen wesentlich schwiereiger zu erhalten als Aussagen über das worst-case Verhalten.

2. Das Effizienzverhalten können wir mit folgenden Zahlen anschaulich machen: Wir untersuchen, welche relative Steigerung der Problemgröße bei vorgegebener fester Laufzeit möglich ist, wenn sich die Prozessorleistung um den Faktor 100 erhöht. Bei Algorithmen mit Laufzeit $O(n)$ ist diese Steigerung 100 Prozent, bei Algorithmen mit Laufzeit $O(n^2)$ ist die Steigerung 10 Prozent, während bei Algorithmen mit der Laufzeit $O(2^n)$ die Steigerung nur $1,03$ Prozent beträgt.

3. Als die Komplexität eines Problems definieren wir die Komplexität des *besten* Algorithmus, der das Problem löst. So ist die Komplexität des Problems, eine Menge von n Zahlen aufsteigend zu sortieren, gleich $O(n \log_2 n)$ (Heapsort). Der naive Ansatz des Vergleichens von je zwei Elementen führt lediglich zu einer Komplexität von $O(n^2)$.

2.3 Konvergente Reihen

Eine Reihe ist eine „Vorschrift“ oder „Anleitung“, alle Glieder einer Zahlenfolge (a_n) zu addieren. Da es sich hierbei um unendlich viele Summanden handelt, müssen wir eine genaue Reihenfolge festlegen, in der wir die Folgeglieder addieren. Die Nummerierung mit dem Laufindex n einer Folge definiert eine Reihenfolge der Folgeglieder a_n. Es ist naheliegend, dass wir die Zahlen a_n in genau dieser Reihenfolge zusammenzählen. Damit erhalten wir

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \quad S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \quad \ldots$$

Definition 2.7
Es sei die Zahlenfolge (a_k) gegeben. Die Folge $\big(S_n\big)$, definiert durch $S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ heißt unendliche Reihe *mit Gliedern a_k. Die Schreibweise ist $\sum a_k$ oder $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. Die S_n heißen die* Partialsummen *der Reihe. Ist die Folge (S_n) konvergent, so heißt $S := \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ der* Wert der Reihe.

Bemerkungen:

1. Wir betrachten auch Reihen der Form $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ oder $\sum\limits_{k=k_0}^{\infty} a_k$.
2. Im Folgenden werden wir einige Konvergenzkriterien für Reihen zusammenstellen. Diese Konvergenzkriterien sind logisch alle von der Bauart:
„Die Summanden a_k einer Reihe $\sum a_k$ besitzen eine gewisse Eigenschaft und daraus folgt die Konvergenz bzw. Divergenz der Reihe $\sum a_k$.“ Die hier genannte „gewisse Eigenschaft“ kann sich auf die Summanden a_k direkt beziehen, sie kann sich aber auch auf mathematische Objekte beziehen, die mit Hilfe der Summanden gebildet werden.

Beispiel: Im Satz 1.3 haben wir für $q \neq 1$ die Formel $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} = \dfrac{1}{1-q} - \dfrac{q^{n+1}}{1-q}$ bewiesen. Mit den Summanden $a_k = q^k$ können wir also in diesem Fall die Partialsummen explizit bestimmen und erhalten

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q}$$

Die Reihe $\sum q^k$ konvergiert nach Definition genau dann, wenn die Folge $\big(S_n\big)$ der Partialsummen konvergiert. Nach dem ersten Beispiel auf Seite 22 ist dies genau dann der Fall, wenn $|q| < 1$ ist. In diesem Fall ist $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$ und daraus folgt:
$\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ konvergiert genau dann, wenn $|q| < 1$ ist, und der Wert der Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = \dfrac{1}{1-q}$.
Diese Reihe ist ein sehr wichtiges Beispiel. Die Reihe heißt *geometrische Reihe.*

Im Satz 2.4 hatten wir Rechenregeln für konvergente Folgen notiert. Aufgrund der Definition von Reihen als Folge der Partialsummen können wir daraus folgende Regel für konvergente Reihen übernehmen:

Satz 2.8
Es seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *und* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *zwei konvergente Reihen. Dann ist für beliebige* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *auch die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k)$ *konvergent und es gilt:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \mu \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$

Bemerkung: Wir können auch eine Aussage über das Produkt $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right)$ von konvergenten Reihen machen. Diese wird in Satz 2.15 formuliert. Für die Gültigkeit der dort angegebenen Formel ist die Konvergenz der beiden beteiligen Reihen nicht ausreichend. Wir benötigen einen stärkeren Konvergenzbegriff, den wir in Definition 2.10 einführen.

Satz 2.9 (Notwendiges Konvergenzkriterium für Reihen)
Ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *konvergent, so ist die Folge der Summanden eine Nullfolge, also* $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Bemerkungen:

1. Dieser Satz ist anschaulich klar. Wenn wir unendlich viele Zahlen addieren möchten und dabei ein endliches Ergebnis erhalten wollen, so dürfen wir für große n nur noch „unendlich wenig“ dazuzählen. Daher müssen die Summanden im Grenzwert $n \to \infty$ Null werden.

2. Dieser Satz lautet in Kurzschreibweise $\sum a_k$ konvergent $\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Haben wir eine Aussage der Form $A \Longrightarrow B$, so ist diese Aussage logisch gleichwertig mit der Aussage $\neg B \Longrightarrow \neg A$.

   Damit liefert uns das notwendige Konvergezkriterium ein „Divergenzkriterium“: Ist der Grenzwert $\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0$, oder existiert dieser Grenzwert nicht, so divergiert die Reihe $\sum a_k$.

3. Das folgende Beispiel zeigt, dass die Umkehrung dieses Satzes falsch ist: Es gibt Folgen mit $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$, für welche die Reihe $\sum a_k$ divergiert.

Beispiel: Wir betrachten die Summanden $a_k = \frac{1}{k}$ und untersuchen die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ auf Konvergenz. Zunächst stellen wir fest, dass $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$ gilt.

Um ein Gefühl für die Konvergenz der Reihe zu erhalten, könnten wir auf die Idee kommen, die ersten „paar“ Partialsummen mit dem Computer auszurechnen. Dies muss aus folgenden Gründen scheitern: Zum einen rundet der Rechner aufgrund der Zahldarstellung mit endlichen vielen Bits die Summanden a_k für große k zu 0. Ab diesem Punkt ändern sich die Partialsummen nicht mehr, und die Reihe ist „rechnerkonvergent". Wir werden weiter unten nachweisen, dass diese Reihe divergiert. Die Divergenz ist allerdings so langsam, dass selbst ein extrem schneller Rechner keine wirklich große Partialsumme erreicht. Nehmen wir an wir hätten einen Rechner, der jede Sekunde 10^{12} Summanden der Reihe mit unendlicher Genauigkeit addieren kann. Dieser Rechner würde etwa $8.5 \cdot 10^{24}$ Jahre benötigen, bis er die Partialsumme mit dem Wert 100 erreichen würde. Die Anzahl der Additionen, die bis zum Erreichen eines vorgegebenen Wertes der Partialsumme benötigt sind, steigt exponentiell mit dem Wert der Partialsumme.

Nun weisen wir die Divergenz der Reihe nach. Hierzu betrachten wir nur einige spezielle Partialsummen: Wir betrachten nur Partialsummen, bei denen der letzte Summand der Kehrwert einer Zweierpotenz ist.

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad S_4 = \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}} > \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2},$$

$$S_8 = \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}} > \frac{5}{2}$$

$$\text{und analog } S_{16} > \frac{6}{2}, \quad S_{32} > \frac{7}{2}, \quad S_{64} > \frac{8}{2}, \ldots \text{ und allgemein } S_{2^n} > \frac{n+2}{2}.$$

Damit ist klar, dass die Partialsummen S_n beliebig groß werden. Daraus folgt, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert. Diese Reihe heißt *harmonische Reihe.*

Definition 2.10 (Absolute Konvergenz)
Eine Reihe $\sum a_k$ heißt absolut konvergent, *wenn die Reihe über die Beträge der Summanden $\sum |a_k|$ konvergiert.*

Bemerkungen:

1. Ist eine Reihe absolut konvergent, so ist die Reihe selber ebenfalls konvergent.
2. Ist eine Reihe konvergent aber nicht absolut konvergent, so heißt die Reihe *bedingt konvergent.*
3. Die absolute Konvergenz ist aus folgendem Grund ein wichtiges Konzept: Bei Summen mit endlich vielen Summanden können wir die Reihenfolge der Summanden beliebig vertauschen (Kommutativgesetz). Dies ist bei unendlich vielen Summanden, also bei unendlichen Reihen, im Allgemeinen nicht möglich.

   Ist eine Reihe aber absolut konvergent, so dürfen wir die Summanden beliebig vertauschen ohne den Wert der Reihe zu ändern.

Ist eine Reihe „nur" bedingt konvergent, so können wir durch geeignete Vertauschung der Reihenfolge der Summanden jede vorgegebene Zahl als Wert dieser „umgeordneten" Reihe erhalten. Dieses Verhalten ist nicht erwünscht und daher ist es von Vorteil, wenn wir absolut konvergente Reihen vorliegen haben.

Im nächsten Satz behandeln wir ein Konvergenzkriterium für alternierende Reihen, bei denen je zwei aufeinanderfolgende Summanden verschiedene Vorzeichen haben.

Satz 2.11 (Leibniz-Kriterium)
Ist (a_k) eine monoton fallende Nullfolge, so konvergiert die alternierende Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$. Für die Partialsummen S_n gilt:

$$S_1 \leq S_3 \leq S_5 \leq S_{2n-1} \leq S \leq S_{2n} \leq S_6 \leq S_4 \leq S_2 \text{ und } |S - S_n| \leq a_{n+1}.$$

Bemerkungen:

1. Der Satz ist recht anschaulich: Bei einer alternierenden Reihe werden die Summanden abwechselnd addiert und subtrahiert. Wenn wir in einem Schritt eine Zahl addieren, so subtrahieren wir im darauffolgenden Schritt eine Zahl, die aufgrund der Monotonie kleiner ist, als die gerade addierte Zahl. Wenn wir in einem Schritt eine Zahl subtrahieren, so addieren wir im darauffolgenden Schritt eine Zahl, die aufgrund der Monotonie kleiner ist, als die gerade subtrahierte Zahl. Daraus folgt sofort die Ungleichungskette. Da die Folge (a_k) eine Nullfolge ist, werden diese „Sprünge" immer kleiner. Dabei überspringen wir in jedem Schritt den Wert S der Reihe.

2. Es spielt für die Konvergenz natürlich keine Rolle, ob der erste Summand positiv oder negativ ist. Wir können also nicht nur Reihen der Form $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$, sondern auch Reihen der Form $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} a_k = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1} a_k$ mit dem Leibnizkriterium untersuchen.

Beispiel: Wir betrachten die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \ldots$. Hier ist $a_k = \frac{1}{k}$. Die Folge (a_k) ist nach der Regel Nr. 4. aus Satz 1.9 monoton fallend. Außerdem ist (a_k) eine Nullfolge. Aus dem Leibniz-Kriterium folgt daher die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Diese Reihe heißt *alternierende harmonische Reihe.* Mit Hilfe der Differentialrechnung werden wir später zeigen, dass $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2$ gilt.

Die beiden folgenden Kriterien fassen wir als „Vergleichskriterium" zusammen. Hier haben wir zwei Reihen vorliegen. Eine unbekannte Reihe $\sum a_k$, deren Konvergenz wir untersuchen wollen, und eine bekannte Reihe $\sum b_k$, deren Konvergenzverhalten wir kennen. Diese Kriterien sind im Prinzip für viele Reihen einsetzbar. Im konkreten Fall ist es häufig schwierig, eine geeignete bekannte Vergleichsreihe $\sum b_k$ zu finden. Es kommen im wesentlichen drei Vergleichsreihen zum Einsatz:

1. Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$, die genau dann konvergiert, wenn $|q| < 1$ ist. Mit Hilfe dieser Vergleichsreihe werden wir das Quotientenkriterium und das Wurzelkriterium herleiten.
2. Die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ als Beispiel für eine divergente Reihe.
3. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, deren Konvergenz wir noch nachweisen müssen.

Satz 2.12 (Vergleichskriterium)
Es sei $k_0 \in \mathbb{N}$.

1. *Gilt für alle $k \geq k_0$ die Ungleichung $|a_k| \leq b_k$ und ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent, so sind auch die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ und $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent.* (Majorantenkriterium)
2. *Gilt für alle $k \geq k_0$ die Ungleichung $0 < b_k \leq a_k$ und ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ divergent, so ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ebenfalls divergent.* (Minorantenkriterium)

Bemerkungen:

1. Die Vergleichskriterien gelten auch dann, wenn an Stelle der Ungleichungen $|a_k| \leq b_k$ bzw. $0 < b_k \leq a_k$ die Ungleichungen $|a_k| \leq C \cdot b_k$ bzw. $0 < b_k \leq C \cdot a_k$ mit einer beliebigen positiven Konstanten $C > 0$ treten.
2. Da wir häufig Reihen mit positiven Gliedern vorliegen haben, entfallen die Beträge bei den nachzuweisenden Ungleichungen.
3. Bei den Kriterien sind folgende Eigenschaften der Summanden a_k und b_k relevant. Dabei nehmen wir an, dass alle Summanden $a_k > 0$ und $b_k > 0$ positiv sind:
   (a) Majorantenkriterium: Gilt die Ungleichung $a_k \leq C \cdot b_k$ so bedeutet dies, dass die Folge $\big(a_k\big)$ „schneller" gegen Null geht als die Folge b_k. Betrachten wir die Quotienten $\dfrac{a_k}{b_k}$, so müssen diese Quotienten beschränkt sein. Es gilt also folgende alternative Formulierungen für das Majorantenkriterium:

   Es seien $a_k > 0$ und $b_k > 0$ und die Quotienten $\dfrac{a_k}{b_k}$ seien beschränkt. Falls die Reihe $\sum b_k$ konvergiert, so folgt daraus die Konvergenz der Reihe $\sum a_k$.

   Es seien $a_k > 0$ und $b_k > 0$ und $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{a_k}{b_k} < \infty$. Falls die Reihe $\sum b_k$ konvergiert, so folgt daraus die Konvergenz der Reihe $\sum a_k$.

   (b) Minorantenkriterium: Gilt die Ungleichung $b_k \leq C \cdot a_k$ so bedeutet dies, dass die Folge $\big(a_k\big)$ „langsamer" gegen Null geht als die Folge b_k. Betrachten wir die Quotienten $\dfrac{a_k}{b_k}$, so müssen diese Quotienten größer als eine feste positive

Zahl sein. Es gilt also folgende alternative Formulierungen für das Minorantenkriterium:

Es seien $a_k > 0$ und $b_k > 0$ und für ein $C > 0$ gelte, dass für alle $k \geq k_0$ Quotienten $\dfrac{a_k}{b_k} > C$ seien. Falls die Reihe $\sum b_k$ divergiert, so folgt daraus die Divergenz der Reihe $\sum a_k$.

Es seien $a_k > 0$ und $b_k > 0$ und $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{a_k}{b_k} = L > 0$. Falls die Reihe $\sum b_k$ divergiert, so folgt daraus die Divergenz der Reihe $\sum a_k$.

4. Damit können wir die Vergleichskriterien wie folgt zusammenfassen:

   Sind $a_k > 0$ und $b_k > 0$ und gilt $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{a_k}{b_k} = L > 0$, so sind die Reihen $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ entweder beide konvergent oder beide divergent.

   Anschaulich bedeutet $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{a_k}{b_k} = L > 0$, dass die Summandenfolgen (a_k) und (b_k) „gleich schnell" gegen Null gehen.

   Sind $a_k > 0$, $b_k > 0$, gilt $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{a_k}{b_k} = L \geq 0$ und ist die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent, so ist auch die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent.

   Anschaulich bedeutet $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{a_k}{b_k} = L \geq 0$, dass die Summandenfolge (a_k) mindestens so schnell gegen Null geht wie die Summandenfolge (b_k).

Die letzten Konvergenzkriterien die wir hier angeben, sind eine Anwendung der Vergleichskriterien. Dabei verwenden wir als Vergleichsreihe eine geometrische Reihe, also $b_k = q^k$. Die Argumentation können wir uns anschaulich so vorstellen: Ist $a_k \approx q^k$, so ist entweder $\sqrt[k]{a_k} \approx q$ oder $\frac{a_{k+1}}{a_k} \approx q$. Die erste Sichtweise führt uns zum Wurzelkriterium und die zweite Sichtweise zum Quotientenkriterium. Beide Kriterien sind nicht in der allgemeinsten Formulierung angegeben. Die hier verwendete Formulierung ist für unsere Zwecke vollkommen ausreichend.

Aus der Sichtweise $\sqrt[k]{a_k} \approx q$ wird das

Satz 2.13 (Wurzelkriterium)
Es sei $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = w$, dann gilt:

1. *Ist $w < 1$, so sind die Reihen $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ beide konvergent.*
2. *Ist $w > 1$, so divergiert die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$.*
3. *Ist $w = 1$, so ist keine Aussage möglich. In diesem Fall kann sowohl Konvergenz als auch Divergenz vorliegen.*

Aus der Sichtweise $\frac{a_{k+1}}{a_k} \approx q$ erhalten wir das

Satz 2.14 (Quotientenkriterium)
Es sei $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = q$, *dann gilt:*

1. *Ist* $q < 1$, *so sind die Reihen* $\sum\limits_{k=0}^{\infty}|a_k|$ *und* $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k$ *beide konvergent.*
2. *Ist* $q > 1$, *so divergiert die Reihe* $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k$.
3. *Ist* $q = 1$, *so ist keine Aussage möglich. In diesem Fall kann sowohl Konvergenz als auch Divergenz vorliegen.*

Bemerkung: Existieren die beiden Grenzwerte $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} = w$ und $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = q$, so gilt immer $w = q$. Liefert also eines der beiden Kriterien keine Aussage, so ergibt auch das andere Kriterium keine Aussage. In diesem Fall müssen wir versuchen, die Konvergenz mit Hilfe der Vergleichskriterien zu untersuchen.

Beispiele: In den folgenden Beispielen arbeiten wir mit diesen Konvergenzkriterien. Als Leitfaden für die Konvergenzuntersuchung von Reihen können wir so vorgehen:

1. Ist das notwendige Konvergenzkriterium erfüllt? Wenn nein, dann folgt die Divergenz der vorgelegten Reihe. Wenn ja, so müssen wir weitere Kriterien anwenden.
2. Quotientenkriterium: Beim Quotientenkriterium betrachten wir die Folge $q_k = \frac{a_{k+1}}{a_k}$ der Quotienten. Die Untersuchung dieser Folge ist in vielen Fällen nicht sehr kompliziert. Kommen bei den Summanden a_k Fakultäten vor, so können wir bei den Folgegliedern q_k häufig kürzen.

   Ist $\lim\limits_{k\to\infty} q_k = q < 1$, so konvergiert die vorgelegte Reihe. Ist $\lim\limits_{k\to\infty} q_k = q > 1$, so divergiert die Reihe. Ist $\lim\limits_{k\to\infty} q_k = q = 1$, so müssen wir mit den Vergleichskriterien weiterarbeiten.
3. Wurzelkriterium: Das Wurzelkriterium spielt in der Anwendung keine sehr große Rolle, da die Untersuchung der Folge $w_k = \sqrt[k]{|a_k|}$ nur in wenigen Fällen gelingt. In seltenen Fällen ist $a_k = (\quad)^k$. In diesen Fällen kann das Wurzelkriterium zur Untersuchung der Konvergenz herangezogen werden.
4. Leibniz-Kriterium und Vergleichskriterien: Erhalten wir keine Aussage aus dem Quotientenkriterium da der Grenzwert $q = 1$ ist oder die Folge q_k so kompliziert ist, dass eine Analyse dieser Folge nicht gelingt, so untersuchen wir zuerst, ob die Summanden alternierende Vorzeichen haben. In diesem Fall können wir versuchen, das Leibniz-Kriterium anzuwenden. Ist dies nicht möglich, so wenden wir die Vergleichskriterien an.
5. In manchen Beispielen kann es möglich sein, dass wir einen expliziten Ausdruck für die Partialsummen herleiten können. Dies war beispielsweise bei der geometrischen Reihe der Fall.

Beispiele:

1. Ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{(k+1)^k}$ konvergent oder divergent?

   Es ist $a_k = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} \to \frac{1}{\mathrm{e}} \neq 0$ für $k \to \infty$. Aus dem Notwendigen Kriterium folgt die Divergenz dieser Reihe.

2. Es sei $x \in \mathbb{R}$. Ist $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ konvergent oder divergent?

   Aus $a_k = \frac{x^k}{k!}$ folgt $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{|x|}{k+1} \to 0 < 1$ für $k \to \infty$. Aus dem Quotientenkriterium folgt, dass die Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert.

3. Ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot (k+1)}$ konvergent oder divergent?

   In diesem Beispiel können wir die Partialsummen expizit bestimmen: Es gilt $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k \cdot (k+1)}$ und damit erhalten wir

   $$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

   Daraus folgt sofort die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot (k+1)}$ und wir erhalten als Wert dieser Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot (k+1)} = 1$.

4. Ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergent oder divergent?

   Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k \cdot (k+1)}$. Aus dem Majorantenkriterium und dem dritten unserer Beispiele folgt die Konvergenz dieser Reihe.

Bemerkung: Die Konvergenzkriterien sind strukturell schwer zu verstehen. Daher sind hier die strukturellen Ideen noch einmal zusammengestellt: Wir haben eine Folge (a_k) von Summanden vorliegen und wollen die Folge der Partialsummen $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ untersuchen. Dabei interessiert uns nur, ob die Folge (S_n) konvergiert oder divergiert. Dies ist viel einfacher als die Bestimmung des Reihenwertes.

Die Kriterien zur Untersuchung der Konvergenz der Partialsummen können wir in folgende Kategorien einordnen:

1. In wenigen Fällen können wir einen expliziten Ausdruck der Folge (S_n) herleiten und diese Folge direkt untersuchen.

   Beispiele hierfür sind $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ oder $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

2. Wir versuchen bestimmte Eigenschaften der Summanden nachzuweisen, aus denen die Konvergenz oder Divergenz der Partialsummen folgt. In diese Katetorien fallen:
   (a) Notwendiges Konvergenzkriterium
   (b) Leibniz-Kriterium
   (c) Vergleichskriterien. Hier vergleichen wir die Summanden a_k mit den Summanden b_k einer Reihe mit bekanntem Konvergenzverhalten.
   (d) Das Integralkriterium, das wir im Satz 5.13 herleiten. Hier werden die Summanden a_k als Funktionswerte einer Funktion f an den Stellen $x = k$ betrachtet. Aus den Eigenschaften dieser Funktion f können wir auf Konvergenz bzw. Divergenz der Reihe schließen.
3. Wir konstruieren aus den Summanden weitere „Hilfsfolgen“, aus deren Eigenschaften wir die gewünschten Schlüsse ziehen können. Zu dieser Kategorie gehören:
   (a) Das Quotientenkriterium mit der Hilfsfolge $q_k = \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$. Hat q_k eine Grenzwert kleiner als 1, so konvergiert $\big(S_n\big)$, ist dagegen der Grenzwert der q_k größer als 1, so divergieren die Partialsummen.
   (b) Das Wurzelkriterium mit der Hilfsfolge $w_k = \sqrt[k]{|a_k|}$. Hat w_k eine Grenzwert kleiner als 1, so konvergiert $\big(S_n\big)$, ist dagegen der Grenzwert der w_k größer als 1, so divergieren die Partialsummen.

Der folgende Satz enthält eine Aussage über das Produkt $\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k\right)$.

Für die Berechnung dieses Produktes ist es naheliegend, die beiden Klammern

$$(a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots) \cdot (b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots)$$

wie üblich auszumultiplizieren. Dabei erhalten wir eine Summe von allen möglichen Produkten $a_j \cdot b_k$, $j, k \in \mathbb{N}$. Unter den im Satz angegebenen Voraussetzungen ist der Wert der Summe aller dieser Produkte gerade das Produkt der Werte der beiden Reihen. Weiter dürfen wir alle Produkte $a_j \cdot b_k$ zusammenfassen, bei denen Summe der Indizes $j + k$ übereinstimmt. Dies ist in der folgenden Skizze angedeutet. Dies ist immer möglich, wenn die beiden zu multplizierenden Reihen nicht nur konvergent, sondern absolut konvergent sind.

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_0b_0 & & a_0b_1 & & a_0b_2 & & a_0b_3 & & \cdots \\
& \diagup & & \diagup & & \diagup & & & \\
a_1b_0 & & a_1b_1 & & a_1b_2 & & a_1b_3 & & \cdots \\
& \diagup & & \diagup & & & & & \\
a_2b_0 & & a_2b_1 & & a_2b_2 & & a_2b_3 & & \cdots \\
& \diagup & & & & & & & \\
a_3b_0 & & a_3b_1 & & a_3b_2 & & a_3b_3 & & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

Satz 2.15 (Cauchy-Produkt)
Die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *und* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *seien absolut konvergent. Dann ist* $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k$ *mit den Gliedern* $c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$.

Beispiel: Wir berechnen das Cauchy-Produkt der geometrischen Reihe mit sich selbst: Hier ist $a_k = b_k = q^k$ mit einem $|q| < 1$. Nach der Formel für das Cauchy-Produkt ist:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \text{ mit } c_k = \sum_{j=0}^{k} q^j q^{k-j} = \sum_{j=0}^{k} q^k = (k+1)q^k.$$

Mit der Summenformel für die geometrische Reihe erhalten wir das Ergebnis

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)q^k = \frac{1}{(1-q)^2},\ |q| < 1.$$

Beispiel: Hier sind noch einmal einige der wichtigsten Reihen zusammengestellt:

1. Geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$: Für $|q| < 1$ gilt $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$.
   Für alle q mit $|q| \geq 1$ ist die geometrische Reihe divergent.
2. Harmonische Reihe: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$. Diese Reihe ist divergent.
3. Alternierende harmonische Reihe: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$. Diese Reihe ist konvergent.
4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Die Berechnung des Wertes erfordert fortgeschrittene Methoden.
5. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.
6. Aus dem Vergleichskriterium folgt zusammen mit der Divergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ und der Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$:

   Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ divergiert für alle $\alpha \leq 1$ und konvergiert für alle $\alpha \geq 2$. Die Konvergenz dieser Reihen für $1 < \alpha < 2$ können wir mit den Methoden aus diesem Abschnitt nicht untersuchen. Mit Hilfe von Satz 5.13 werden wir dies später nachholen.

2.4 Potenzreihen

In diesem Abschnitt führen wir mit den Potenzreihen eine spezielle Klasse von Reihen ein. Die Potenzreihen sind wichtige Hilfsmittel zur Definition und Untersuchung von Funktionen. Alle Partialsummen einer Potenzreihe sind Polynome. Die Potenzreihen entstehen also durch einen „Grenzübergang“ aus Polynomen mit immer größer werdendem Grad. Hierbei entsteht eine Vielzahl von Funktionen, deren Eigenschaften sich von den Eigenschaften der Polynome stark unterscheiden. Daneben haben wir mit den Potenzreihen ein mathematisches Werkzeug zur Definition von Funktionen, wie z.B. der Exponentialfunktion. Dies werden wir im nächsten Abschnitt durchführen.

Definition 2.16

Die (formale) Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *heißt* Potenzreihe *mit Entwicklungspunkt* x_0.

Bemerkungen:

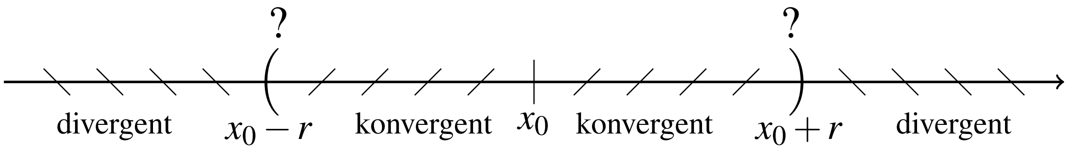
1. Für den ganzzahligen Exponenten $n=0$ setzen wir $0^n = 0^0 = 1$. Hierdurch können wir die Fallunterscheidung $n=0$ und $n \neq 0$ sparen.
2. Die Zahlen a_n der Zahlenfolge $\big(a_n\big)$ heißen die *Koeffizienten* der Potenzreihe.
3. Bezeichnen wir die Menge aller $x \in \mathbb{R}$ für die $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ konvergiert mit $\mathbb{D}$, so wird durch die Potenzreihe auf $\mathbb{D}$ eine Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ definiert. Zur Bestimmung dieser Menge $\mathbb{D}$ müssen wir also die Frage beantworten: Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Potenzreihe. Hierbei stellen wir uns vor, dass wir ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$ wählen, das wir dann als feste Zahl betrachten. Dann sind die Summanden $a_n(x-x_0)^n$ reelle Zahlen und wir haben eine normale Zahlenreihe vorliegen, deren Konvergenz wir untersuchen müssen.
4. Für jede Potenzreihe gilt: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ konvergiert an der Stelle $x = x_0$ und hat dort den Wert a_0. Dies folgt daraus, dass $0^0 = 1$ ist und für alle $n \geq 1$ die Gleichung $0^n = 0$ gilt. An der Stelle $x = x_0$ ist die Potenzreihe also eine Zahlenreihe, bei der nur ein Summand von Null verschieden ist.

Satz 2.17

Für die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *gilt:*

1. *Konvergiert die Potenzreihe an einer Stelle* $x_1 \neq x_0$, *so konvergiert sie für alle* x *mit* $|x-x_0| < |x_1-x_0|$.
2. *Divergiert die Reihe im Punkt* x_2, *so divergiert sie für alle* x *mit* $|x-x_0| > |x_2-x_0|$.

Bemerkung: Dieser Satz folgt sofort aus dem Majoranten- bzw. Minorantenkriterium. Die Ungleichungen in dem Satz zeigen uns, dass die Konvergenz oder Divergenz im Wesentlichen von dem Abstand der Punkte x vom Entwicklungspunkt x_0 abhängt. Wenn wir nun annehmen, dass die Potenzreihe an einer Stelle $x_1 \neq x_0$ konvergiert, so können wir diesen Punkt immer weiter von x_0 wegschieben. Dabei können zwei Verhaltensweisen auftreten: Die Potenzreihe konvergiert an jeder Stelle x_1, egal wie groß der Abstand von x_1 zu x_0 ist. Oder wir kommen irgendwann an eine Stelle x_2, an der die Potenzreihe divergiert. Wir nennen den Abstand vom Entwicklungspunkt, an dem der Übergang von Konvergenz zu Divergenz stattfindet den *Konvergenzradius*. Das Konvergenzverhalten der Potenzreihe können wir anschaulich so darstellen:



In dem Intervall $(x_0 - r, x_0 + r)$ ist die Reihe konvergent, außerhalb dieses Intervalls ist die Reihe divergent. Über die Konvergenz an den beiden Rändern des Intervalls, also den Stellen $x_0 - r$ und $x_0 + r$ können wir keine allgemeine Aussage treffen. Damit ist der folgenden Satz plausibel:

Satz 2.18 (Konvergenzradius einer Potenzreihe)

Für jede Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *existiert ein eindeutig bestimmtes* r *mit* $0 \leq r \leq \infty$ *(der „Konvergenzradius"), für das gilt:*

1. *Ist* $r = 0$*, so konvergiert die Reihe nur für* $x = x_0$.
2. *Ist* $0 < r < \infty$*, so ist die Reihe konvergent für alle* x *mit* $|x - x_0| < r$ *und divergent für alle* x *mit* $|x - x_0| > r$.
3. *Ist* $r = \infty$*, so konvergiert die Reihe für alle* $x \in \mathbb{R}$.

Bemerkung: Zur Bestimmung des *Konvergenzbereiches*, also aller x-Werte für die die Potenzreihe konvergiert, müssen wir folgende Schritte durchführen: Als erstes berechnen wir den Konvergenzradius. Eine Methode für die Berechnung des Konvergenzradius werden wir im nächsten Satz kennenlernen. Dann müssen wir die Konvergenz an den beiden Punkten $x = x_0 \pm r$ direkt untersuchen. Hierzu setzen wir diese Punkte in die Potenzreihe ein und erhalten zwei Zahlenreihen. Die Konvergenz dieser Zahlenreihen können wir mit dem notwendigen Konvergenzkriterium, dem Leibniz-Kriterium oder den Vergleichskriterien untersuchen. Eine Anwendung des Quotienten- oder Wurzelkriteriums liefert an diesen Stellen keine Aussage.

Satz 2.19 (Bestimmung des Konvergenzradius)

Es sei die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *gegeben.*

1. *Existiert* $w = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$*, so ist der Konvergenzradius der Potenzreihe* $r = \frac{1}{w}$.
2. *Existiert* $q = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$*, so ist der Konvergenzradius dieser Potenzreihe* $r = q$.

Hierbei wird „$\frac{1}{0} = \infty$*" und „*$\frac{1}{\infty} = 0$*" gesetzt.*

Beweisidee: Wir wenden das Wurzel- bzw. Quotientenkriterium auf die Potenzreihe an, wobei wir beachten, dass die Summanden der betrachteten Reihe gerade $a_n(x-x_0)^n$ sind. Damit erhalten wir mit den Grenzwerten w und q aus dem Satz zunächst

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|a_n(x-x_0)^n\right|} = |x-x_0| \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |x-x_0| \cdot w$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}\right| = |x-x_0| \cdot \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x-x_0|}{q}$$

Nach dem Wurzel- bzw. Quotientenkriterium konvergiert die Reihe, falls diese Grenzwerte kleiner als 1 sind. Sind die Grenzwerte größer als 1, so divergiert die Reihe. Damit erhalten wir

$$|x-x_0| \cdot w < 1 \text{ oder } \frac{|x-x_0|}{q} < 1 \Longrightarrow \text{ Konvergenz}$$

und

$$|x-x_0| \cdot w > 1 \text{ oder } \frac{|x-x_0|}{q} > 1 \Longrightarrow \text{ Divergenz.}$$

Daraus folgt für den Konvergenzradius $r = \frac{1}{w}$ bzw. $r = q$. ■

Bemerkungen:

1. Beim Quotientenkriterium müssen wir unterscheiden, ob wir damit eine Zahlenreihe oder eine Potenzreihe untersuchen:
   Zahlenreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$: Falls $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, so konvergiert die Reihe.
   Potenzreihe: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ hat den Konvergenzradius $r = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$.
2. Wenn wir die Beweisidee betrachten ist es klar, dass wir zur Konvergenzuntersuchung an den Stellen $x_0 \pm r$ das Wurzel- bzw. Quotientenkriterium nicht nutzen können.
3. Die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ habe einen positiven Konvergenzradius r. Dann definiert diese Reihe in $|x-x_0| < r$ eine Funktion
   $f : (x_0 - r, x_0 + r) \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n.$
   Mit Hilfe von Potenzreihen werden wir eine Reihe elementarer Funktionen definieren.

Beispiele: Die folgenden Beispiele zeigen, dass an den Rändern des Konvergenzintervalls alle möglichen Kombinationen von Konvergenz und Divergenz auftreten können:

1. Wir betrachten die Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$.
   Der Entwicklungspunkt ist $x_0 = 0$ und die Koeffizienten sind $a_n = n$. Der Konvergenzradius ist daher $r = 1$. An den Stellen $x = x_0 \pm r = \pm 1$ erhalten wir die Reihen

$\sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n$, die beide divergieren.

Der Konvergenzbereich der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ ist also $(-1, 1)$.

2. Wir betrachten die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n}$.

   Der Entwicklungspunkt ist $x_0 = 1$ und die Koeffizienten sind $a_n = \frac{1}{n}$. Der Konvergenzradius ist wieder $r = 1$. An der Stelle $x = x_0 + r = 2$ erhalten wir die divergente harmonische Reihe und an der Stell $x = x_0 - r = 0$ erhalten wir die alternierende harmonische Reihe.

   Der Konvergenzbereich der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n}$ ist also $[0, 2)$.

3. Wir betrachten die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2}$.

   Der Entwicklungspunkt ist $x_0 = 1$ und die Koeffizienten sind $a_n = \frac{1}{n^2}$. Der Konvergenzradius ist auch hier $r = 1$. An den Stellen $x = x_0 + r = 2$ und $x = x_0 - r = 0$ erhalten wir die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$. Diese sind beide konvergent und wir eralten:

   Der Konvergenzbereich der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2}$ ist $[0, 2]$.

Bemerkungen:

1. Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergiert genau dann, wenn $|x| < 1$. Im Fall der Konvergenz ist der Wert der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. Damit erhalten wir im Intervall $(-1, 1)$ eine Potenzreihendarstellung der Funktion $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{1-x}$.

   Obwohl der Ausdruck $\frac{1}{1-x}$ für alle $x \neq 1$ definiert ist, ist diese Reihendarstellung nur in der Teilmenge $(-1, 1)$ des maximal möglichen Definitionsbereiches dieser Funktion gültig.

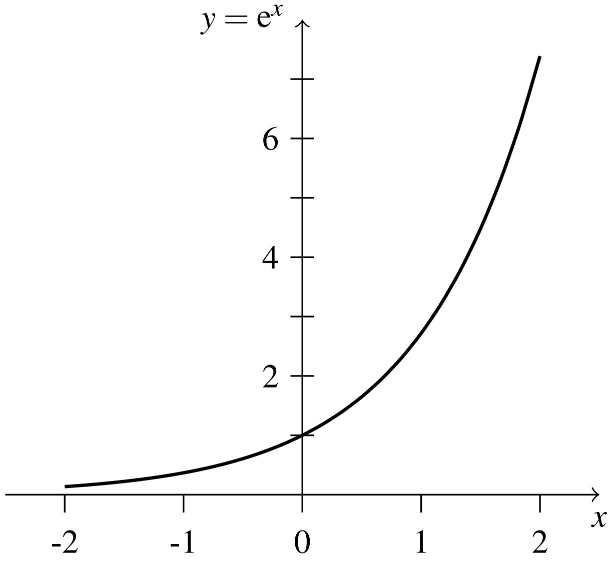
2. Wir können die Potenzreihen auch für komplexe Zahlen a_n, z und $z_0 \in \mathbb{C}$ betrachten. Für die Berechnung des Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ können wir die Formeln aus Satz 2.19 verwenden. In $\mathbb{C}$ ist die Menge $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ ein Kreis mit dem Mittelpunkt z_0 und dem Radius r. Damit ist die Bezeichnung „Konvergenzradius“ plausibel.

3. Eine wichtige Anwendung von Potenzreihen werden wir im folgenden Abschnitt betrachten: Wir definieren Funktionen mit Hilfe spezieller Potenzreihen durch Angabe der Koeffizientenfolge (a_n) und des Entwicklungspunktes x_0. Aus dieser Potenzreihendarstellung können wir die Eigenschaften der so definierten Funktionen herleiten.

2.5 Exponentialfunktion und trigonometrische Funktionen

Die Exponentialfunktion ist eine der wichtigsten elementaren Funktionen in der Mathematik selbst und in vielen Anwendungen. Es gibt drei Möglichkeiten, die Exponentialfunktion mathematisch exakt zu definieren. Die einfachste davon ist die Definition mittels der Potenzreihe.

Definition 2.20 (Exponentialfunktion)
Die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \exp(x) = \mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ *heißt* Exponentialfunktion.



Bemerkung: Die Koeffizienten der Exponentialfunktion sind $a_n = \frac{1}{n!}$. Daher gilt für den Konvergenzradius

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty.$$

Die Potenzreihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ und die Exponentialfunktion ist wohldefiniert.

Satz 2.21 (Eigenschaften der e-Funktion)

1. $\forall x, y \in \mathbb{R} : \mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \, \mathrm{e}^y$
2. $\mathrm{e}^0 = 1,\ \mathrm{e}^1 = \mathrm{e},\ \mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$
3. $x < 0 \Longrightarrow 0 < \mathrm{e}^x < 1,\ x > 0 \Longrightarrow \mathrm{e}^x > 1$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0,\ \lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^x = \infty,\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^n}{\mathrm{e}^x} = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

Bemerkung: Bemerkenswert ist hier die Eigenschaft $\exp(1) = \mathrm{e}$ mit der Eulerschen Zahl e, die wir als den Grenzwert $\mathrm{e} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ definiert haben.

Beweisskizze:

1. Wir beginnen auf der rechten Seite und multiplizieren das Produkt

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\ldots\right)\cdot\left(1+y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{6}+\ldots\right)$$

aus. Dann erhalten wir wie auf Seite 34 das folgende Schema bei dem wir alle Produkte zusammenfassen, bei denen die Summe der Exponenten bei der x-Potenz und bei der y-Potenz übereinstimmen.

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & & x & & \frac{x^2}{2} & & \frac{x^3}{6} & & \cdots \\
 & / & & / & & / & & & \\
y & & xy & & \frac{x^2y}{2} & & \frac{x^3y}{6} & & \cdots \\
 & / & & / & & & & & \\
\frac{y^2}{2} & & \frac{xy^2}{2} & & \frac{x^2y^2}{4} & & \frac{x^3y^2}{12} & & \cdots \\
 & / & & & & & & & \\
\frac{y^3}{6} & & \frac{xy^3}{6} & & \frac{x^2y^3}{12} & & \frac{x^3y^3}{36} & & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

Fassen wir alle Produkte zusammen, deren Summe der Exponenten 1 ist, erhalten wir $x+y$. Ist die Summe der Exponenten 2, so ergibt sich

$$\frac{x^2}{2}+xy+\frac{y^2}{2}=\frac{1}{2}(x^2+2xy+y^2)=\frac{(x+y)^2}{2!}.$$

Ist die Summe der Exponenten 3, so haben wir

$$\frac{x^3}{6}+\frac{x^2y}{2}+\frac{xy^2}{2}+\frac{y^3}{6}=\frac{1}{6}(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)=\frac{(x+y)^3}{3!}.$$

Den allgemeinen Fall erhalten wir aus Satz 2.15 zu

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{y^k}{k!}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}C_k \text{ mit}$$

$$C_k=\sum_{n=0}^{k}\frac{x^n}{n!}\frac{y^{k-n}}{(k-n)!}=\frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{k}\frac{k!}{n!(k-n)!}x^n y^{k-n}=\frac{(x+y)^k}{k!}.$$

2. Setzen wir $x=0$ in die Potenzreihe ein, so erhalten wir $\exp(0)=\mathrm{e}^0=1$. Der Nachweis für $\exp(1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ist etwas kniffliger. Aus der Funktionalgleichung erhalten wir für beliebiges $x\in\mathbb{R}:\ 1=\mathrm{e}^0=\mathrm{e}^{x-x}=\mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{-x}$.

3. Für $x>0$ haben wir $\mathrm{e}^x=1+x+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{x^k}{k!}>1+x>1$.

Für $x<0$ ist $\mathrm{e}^x=\frac{1}{\mathrm{e}^{-x}}$ mit $-x>0$. Aus $\mathrm{e}^{-x}>1$ folgt sofort $0<\mathrm{e}^x<1$.

4. Aus $\mathrm{e}^x > 1+x$ für $x > 0$ folgt $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^x = \infty$.

   Weiter ist $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-x}} \underset{y=-x}{=} \lim\limits_{y\to\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^y} = 0.$ ∎

Bemerkung: Eine weitere Definition der Exponentialfunktion ist mit Hilfe der Funktionalgleichung möglich: Die Exponentialfunktion ist definiert als die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $f(0) = 0$.

Nun definieren wir die trigonometrischen Funktionen Cosinus und Sinus mit Hilfe von Potenzreihen.

Definition 2.22 (Trigonometrische Funktionen)

1. $\cos(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!} \mp \ldots$ *ist der* Cosinus.

2. $\sin(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{5!} \mp \ldots$ *ist der* Sinus.

3. $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)},\ x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$ *ist der* Tangens.

Bemerkungen:

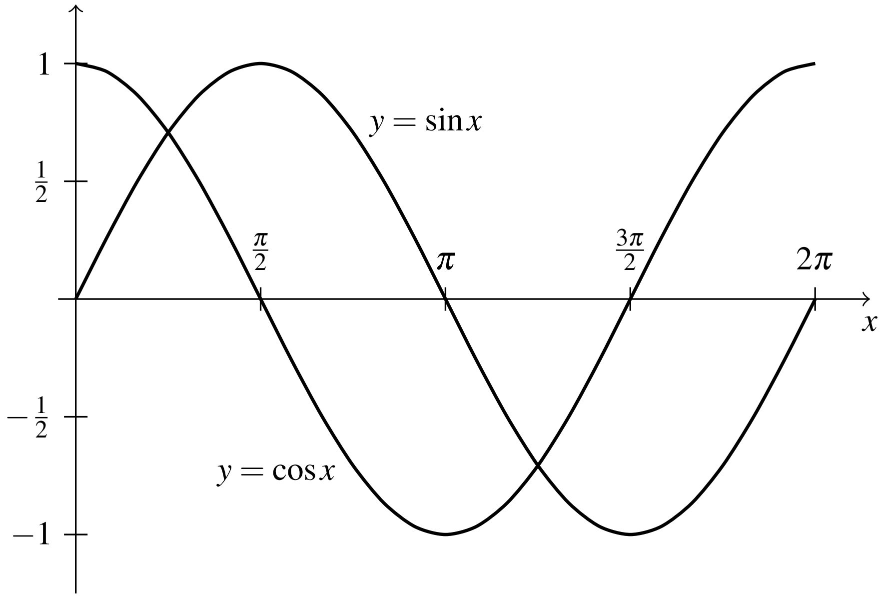
1. Wir haben hier die Zahl π verwendet, ohne diese wichtige mathematische Konstante genau zu definieren.

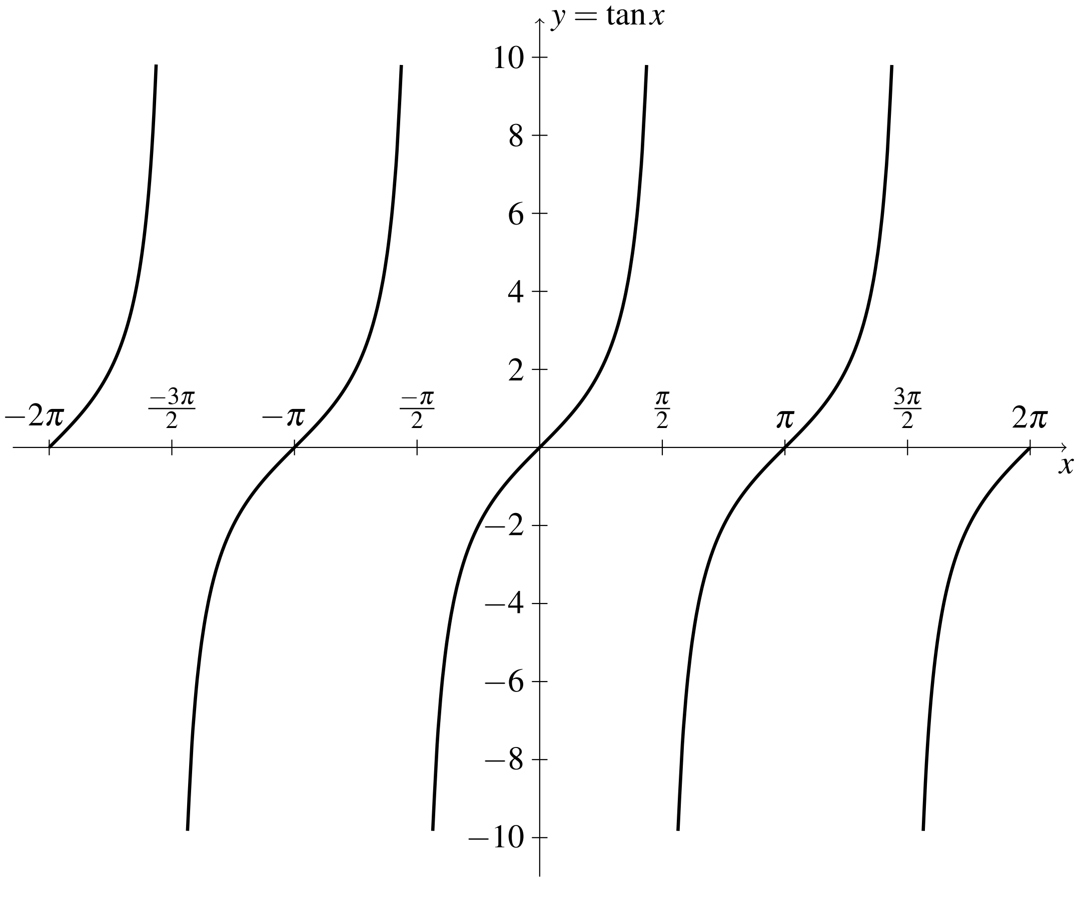
   Mit Methoden der Differentialrechnung können wir Beweisen, das der Cosinus genau eine Nullstelle im Intervall $[0, 2]$ hat. Die Zahl π definieren wir als das Doppelte dieser kleinsten positiven Nullstelle des Cosinus.

2. Weiter haben wir verwendet, dass die Punkte $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ schon alle Nullstellen des Cosinus sind. Diese Nullstellen des Cosinus brauchen wir zur Definition der Tangens-Funktion.

3. Es ist etwas mühsam nachzuweisen, dass die Funktionen Cosinus, Sinus und Tangens die Funktionen sind, die wir aus der Trigonometrie kennen. Wir müssen immer beachten, dass der Winkel x dieser hier definierten Funktionen immer im *Bogenmass* angegeben werden muss.

In den folgenden Bildern zeigen wir die Funktionsgraphen der eben definierten trigonometrischen Funktionen. Die Tangensfunktion hat an ihren Definitionslücken jeweils eine senkrechte Asymptote.





Im nächsten Satz stellen wir einige Eigenschaften der Cosinus- und Sinusfunktion zusammen. Der Nachweis dieser Additionstheoreme ist mit Hilfe der Exponentialfunktion mit rein imaginären Argumenten und der Eulerschen Formel recht einfach. Dies werden wir an einzelnen Beispielen im nächsten Abschnitt zeigen.

Satz 2.23 (Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen)

1. $\cos 0 = 1$ *und* $\sin 0 = 0$
2. $\cos(-x) = \cos x$ *und* $\sin(-x) = -\sin x$
3. $\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$ *und* $\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$
4. $\cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$ *und* $\sin(x-y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$
5. $\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\big(\cos(x+y) + \cos(x-y)\big)$
   $\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\big)$
   $\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\big(\sin(x+y) + \sin(x-y)\big)$
6. $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ *und* $\sin(2x) = 2\sin x \cdot \cos x$
7. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ *und* $-1 \leq \cos x, \sin x \leq 1$
8. *Für alle* $k \in \mathbb{Z}$ *gilt:*

   $\cos(x+2k\pi) = \cos x$ *und* $\sin(x+2k\pi) = \sin x$,

   $\cos\big((2k+1)\frac{\pi}{2}\big) = 0$, $\cos(k\pi) = (-1)^k$ *und* $\sin(k\pi) = 0$, $\sin\big((2k+1)\frac{\pi}{2}\big) = (-1)^k$

2.6 Exponentialfunktion mit imaginären Argumenten

Wie wir schon einmal angemerkt haben, können wir in der Definition formaler Potenzreihen (Definition 2.16) auch komplexe Koeffizienten $a_n \in \mathbb{C}$, einen komplexen Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und komplexe Argumente $z \in \mathbb{C}$ zulassen. Den Konvergenzradius r der Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ können wir wie im reellen mit den in Satz 2.19 angegebenen Formeln berechnen. Die Potenzreihe konvergiert dann für alle z mit $|z-z_0| < r$, also im Inneren des Kreises um z_0 mit Radius r. Damit erhält der Begriff „Konvergenzradius“ eine anschauliche Bedeutung.

Wir wollen hier speziell die Exponentialfunktion $\mathrm{e}^z = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ mit komplexem $z \in \mathbb{C}$ betrachten. Diese Reihe hat den Konvergenzradius $r = \infty$ und ist daher für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergent. Da alle Koeffizienten dieser Potenzreihe reell sind, folgt $\overline{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{\bar{z}}$. Weiter gilt auch für die komplexe Exponentialfunktion die Funktionalgleichung $\mathrm{e}^{w+z} = \mathrm{e}^w \cdot \mathrm{e}^z$, $w, z \in \mathbb{C}$.

Für unsere Zwecke ist es ausreichend, rein imaginäre Argumente $z = ix, x \in \mathbb{R}$ in die Exponentialfunktion einzusetzen. Setzen wir in die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion $z = ix, x \in \mathbb{R}$ ein, so erhalten wir:

$$\mathrm{e}^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n} x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \cos(x) + i\sin(x).$$

Die Gleichung $\mathrm{e}^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ heißt *Eulersche Formel*. Aus ihr folgt:

$$\cos x = \Re\big(\mathrm{e}^{ix}\big) = \frac{1}{2}\big(\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}\big) \quad \text{und} \quad \sin x = \Im\big(\mathrm{e}^{ix}\big) = \frac{1}{2i}\big(\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}\big).$$

Mit der Eulerschen Formel können wir einige Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen leicht mittels der Funktionalgleichung der e-Funktion herleiten:

1. $\cos^2 x + \sin^2 x = \big|\mathrm{e}^{ix}\big|^2 = \mathrm{e}^{ix} \cdot \mathrm{e}^{-ix} = 1.$
2. $\cos(x+y) + i\sin(x+y) = \mathrm{e}^{i(x+y)} = \mathrm{e}^{ix} \cdot \mathrm{e}^{iy} = \big(\cos x + i\sin x\big) \cdot \big(\cos y + i\sin y\big) =$
   $= \big(\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y\big) + i\big(\cos x \cdot \sin y + \cos y \cdot \sin x\big).$

   Durch Vergleich von Real- und Imaginärteilen ergeben sich zwei Additionstheoreme für den Sinus und den Cosinus. Die restlichen Eigenschaften von Cosinus und Sinus können wir leicht von diesen Additionstheoremen herleiten.

Polardarstellung komplexer Zahlen: Eine wichtige Anwendung der Eulerschen Formel ist die Polardarstellung der komplexen Zahlen: Die Zahl $z = x + iy$ wird in der Gaußschen Zahlenebene durch den Punkt (x, y) dargestellt. Diesen Punkt können wir mittels Polarkoordinaten (r, φ) darstellen. Dabei ist r der Abstand des Punktes (x, y) vom Koordinatenursprung und φ der Winkel zwischen der positiven x-Achse und der Verbindungsstrecke vom Ursprung und (x, y). Mit diesen Koordinaten gilt $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$ und wir erhalten für z die Darstellung

$$z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r\big(\cos\varphi + i\sin\varphi\big) = r\mathrm{e}^{i\varphi}.$$

Diese Darstellung heißt die *Polardarstellung* der komplexen Zahl z. Es ist $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ der Betrag von z. Der Winkel φ heißt das *Argument* von z. Das Argument ist bis auf Vielfache von 2π bestimmt. Den eindeutigen Hauptwert des Arguments erhalten wir durch Einschränkung von φ auf das Intervall $(-\pi, \pi]$.

Die Umrechnung zwischen den beiden Darstellungen der komplexen Zahlen geht wie folgt: Ist $z = r\mathrm{e}^{i\varphi}$ in Polardarstellung gegeben, so erhalten wir mit $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$ die kartesische Darstellung $z = x + iy$. Ist $z = x + iy$ in der kartesischen Darstellung gegeben, so ermitteln wir die Polardarstellung $z = r\mathrm{e}^{i\varphi}$ durch $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\tan\varphi = \frac{y}{x}$, also $\varphi = \arctan\frac{y}{x} + k\pi$, wobei wir das k in Abhängigkeit von den Vorzeichen von x und y wählen müssen. Wollen wir den Hauptwert des Arguments von $z = x + iy$ bestimmen, so erhalten wir

$$\varphi = \arg(z) = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x}, & x > 0, y \in \mathbb{R} \\ \arctan\frac{y}{x} + \pi, & x < 0, y \geq 0 \\ \arctan\frac{y}{x} - \pi, & x < 0, y < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0 \\ \text{nicht def.}, & x = y = 0 \end{cases}$$

Die Polardarstellung ermöglicht eine anschauliche Beschreibung des Produktes von komplexen Zahlen: Sind die Zahlen $z_1 = r_1\mathrm{e}^{i\varphi_1}$ und $z_2 = r_2\mathrm{e}^{i\varphi_2}$ gegeben, so hat deren Produkt die Darstellung $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \, \mathrm{e}^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$. Bei einem Produkt zweier komplexer Zahlen werden die Beträge multipliziert und die Argumente addiert. Der Kehrwert von $z = r\,\mathrm{e}^{i\varphi}$, $r > 0$ ist $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\,\mathrm{e}^{-i\varphi}$.

Beispiel: Mit Hilfe der komplexen e-Funktion und der Eulerschen Formel können wir Schwingungen elegant behandel: Eine harmonische Schwingung können wir reell als $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$ schreiben. Dabei ist A die Amplitude der Schwingung, ω die Kreisfrequenz und φ_0 die Phase. Nach der Eulerschen Formel können wir dies als Realteil einer komplexen e-Funktion schreiben

$$x(t) = \Re\Big(A\cos(\omega t + \varphi_0) + iA\sin(\omega t + \varphi_0)\Big) = \Re\Big(A\,\mathrm{e}^{i(\omega t+\varphi_0)}\Big) = \Re\Big(A\,\mathrm{e}^{i\varphi_0}\cdot \mathrm{e}^{i\omega t}\Big).$$

Damit ist $x(t)$ der Realteil der komplexen Schwingung $\hat{x}(t) = A\,\mathrm{e}^{i\varphi_0}\cdot\mathrm{e}^{i\omega t}$ mit der komplexen Amplitude $A\,\mathrm{e}^{i\varphi_0}$. Mit Hilfe dieser Darstellung können wir die Überlagerung von Schwingungen mit der selben Kreisfrequenz sehr gut bestimmen:

Beispiel: Es seien $x_1(t) = 4\cos(2t)$ und $x_2(t) = 3\cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$ gegeben. Die entsprechenden komplexen Schwingungen sind $\hat{x}_1(t) = 4\,\mathrm{e}^{2it}$ und $\hat{x}_2(t) = 3\,\mathrm{e}^{i\pi/3}\,\mathrm{e}^{2it}$. Überlagern wir diese Schwingungen, so erhalten wir $x(t) = x_1(t) + x_2(t) = \Re\big(\hat{x}(t)\big)$ mit

$$\hat{x}(t) = \hat{x}_1(t) + \hat{x}_2(t) = \big(4 + 3\,\mathrm{e}^{i\pi/3}\big)\,\mathrm{e}^{2it} = \hat{A}\,\mathrm{e}^{2it}.$$

Die komplexe Amplitude $\hat{A}$ ist

$$\hat{A} = 4 + 3\,\mathrm{e}^{i\pi/3} = 4 + 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 4 + 3\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{11}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Zur Bestimmung der reellen Darstellung von $x(t)$ wandeln wir die komplexe Amplitude in die Polardarstellung $\hat{A} = A\,\mathrm{e}^{i\varphi_0}$ um. Es ist $A = |\hat{A}| = \sqrt{37} \approx 6{,}08$ und $\tan\varphi_0 = \frac{3\sqrt{3}}{11} \Longrightarrow \varphi_0 = \arctan\left(\frac{3\sqrt{3}}{11}\right) \approx 0{,}44$. Damit ergibt sich $\hat{A} \approx 6{,}08\,\mathrm{e}^{0{,}44i}$ und $\hat{x}(t) \approx 6{,}08\,\mathrm{e}^{i(2t+0{,}44)}$. Durch Bildung des Realteils erhalten wir die Darstellung $x(t) \approx 6{,}08\cos(2t + 0{,}44)$, also

$$4\cos(2t) + 2\cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) \approx 6{,}08\cos(2t + 0{,}44).$$

3 Grenzwerte und Stetigkeit

3.1 Funktionen

In den folgenden Abschnitten werden wir verschiedene Eigenschaften von Funktionen untersuchen. Hier wollen wir kurz die Definition von „Funktion“ und einige einfache Eigenschaften von Funktionen zusammenstellen.

Es seien $D, W \subset \mathbb{R}$ gegeben. Eine Funktion $f : D \to W$ ist eine Vorschrift, bei der jedem $x \in D$ genau ein Funktionswert $y = f(x) \in W$ zugeordnet wird. Die Menge D heißt *Definitionsbereich* und W heißt *Wertebereich.*

Die Menge aller Funktionswerte $f(D) = \big\{y = f(x) \in W \,|\, x \in D\big\}$ heißt die *Bildmenge.* Ist $f(x) = y$, so nennen wir y das *Bild* von x unter der Funktion f und x ein *Urbild* von y unter f. Aufgrund der Definition des Funktionsbegriffes sind Bilder immer eindeutig. Zu einem gegebenen $y \in W$ kann es dagegen viele Urbilder in D geben. So ist zum Beispiel die Menge der Zahlen $\big\{k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\big\}$ die Menge aller Urbilder von $y = 0$ unter der Funktion $f(x) = \sin x$.

Liegen zwei Funktionen $f : D \to B$ und $g : B \to W$ vor, so können wir zuerst f und dann auf die Bildpunkte $f(x)$ die Funktion g anwenden. Damit erhalten wir die Funktion $g \circ f : D \to W$, definiert durch die Abbildungsvorschrift $\big(g \circ f\big)(x) := g\big(f(x)\big), x \in D$. Diese Funktion ist die *Hintereinanderausführung* von g und f („g nach f“).

Bemerkungen:

1. Eine Funktion besteht aus drei Bestandteilen: Dem Definitionsbereich, dem Wertebereich und der Abbildungsvorschrift. Bei der Untersuchung der Eigenschaften von Funktionen benötigen wir alle diese Bestandteile, wie das folgende Beispiel zeigt.

2. Wenn wir von einer Funktion $f(x)$ sprechen und nur die Abbildungsvorschrift angeben, so soll folgende Vereinbarung gelten: Der Definitionsbereich D soll der maximal mögliche Definitionsbereich sein, also die größte Menge, in der die Abbildungsvorschrift Sinn macht. Der Wertebereich W soll das Bild von D unter der Funktion f sein. Wenn wir uns nicht für die Umkehrbarkeit der Funktion f (siehe weiter unten) interessieren, können wir als Wertebereich ebenso $W = \mathbb{R}$ annehmen.

Beispiel: Wir betrachten die drei Funktionen f_1, f_2 und f_3, definiert durch

- $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f_1(x) = x^2$.
- $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+, x \mapsto f_2(x) = x^2$.
- $f_3 : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, x \mapsto f_3(x) = x^2$.

Obwohl alle drei Funktionen die selbe Abbildungsvorschrift haben, sind weitere Eigenschaften doch verschieden: Die Funktion f_1 nimmt keine negativen Funktionswerte an, also ist die Bildmenge eine echte Teilmenge des Wertebereiches. Bei den Funktionen f_2 und f_3 stimmt der Wertebereich mit der Bildmenge überein. Bei der Funktion f_2 gibt es zu jedem positiven y zwei Urbilder, nämlich $x_{1/2} = \pm\sqrt{y}$, während bei der Funktion f_3 jeder

Punkte der Bildmenge genau ein Urbild besitzt. Bei der Funktion f_3 ist es also auf eindeutige Weise möglich, von einem Bild $y \in \mathbb{R}_0^+$ auf das zugehörige Urbild $x = \sqrt{y} \in \mathbb{R}_0^+$ zu schließen.

Ist $f : D \to W$ eine Funktion, bei der jedes $y \in W$ genau ein Urbild $x \in D$ besitzt, so heißt die Funktion f umkehrbar. Die Funktion $f^{-1} : W \to D$ mit $f^{-1}(y) = x \Longleftarrow f(x) = y$ für alle $x \in D$ und alle $y \in W$ heißt die *Umkehrfunktion* von f. Die Umkehrfunktion können wir durch die beiden Gleichungen

$$f^{-1}\big(f(x)\big) = x \text{ für alle } x \in D \quad \text{und} \quad f\big(f^{-1}(y)\big) = y \text{ für alle } y \in W$$

charakterisieren.

Eine einfache Eigenschaft einer Funktion f ist die Monotonie, die wir folgendermaßen definieren können:

Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt die Funktion f

1. *monoton wachsend*, falls für alle $x, y \in D : x < y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$ gilt,
2. *streng monoton wachsend*, falls für alle $x, y \in D : x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$ gilt,
3. *monoton fallend*, falls für alle $x, y \in D : x < y \Longrightarrow f(x) \geq f(y)$ gilt und
4. *streng monoton fallend*, falls für alle $x, y \in D : x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)$ gilt.

Zur anschaulichen Darstellung einer Funktion verwenden wir deren *Funktionsgraphen* $G_f = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in D, y = f(x)\big\}$. Einige Beispiele von Funktionsgraphen haben wir schon im Abschnitt 2.5 gesehen.

3.2 Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen

Wir wollen nun den Grenzwert einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ an einer Stelle x_0 definieren. Dabei muss entweder $x_0 \in D$ gelten oder x_0 muss am „Rand“ von D liegen. Hier benötigen wir „Rand“ nicht in seiner allgemeinsten Bedeutung, sondern betrachten nur die folgenden Fälle:

- D ist ein offenes oder halboffenes Intervall (a, b) oder $(a, b]$. Der Punkt a ist ein Randpunkt von D, der selbst nicht zu D gehört.
- D ist ein unbeschränktes Intervall $[a, \infty)$ oder $(-\infty, b]$. In diesem Fall betrachten wir ∞ bzw. $-\infty$ als „Randpunkte“ dieser Intervalle, selbst wenn dies keine reellen Zahlen sind.
- D ist ein Intervall, aus dem ein Punkt entfernt wurde, $(a, b) \setminus \{x_0\} = (a, x_0) \cup (x_0, b)$.

Eine Funktion f hat an der Stelle x_0 den Grenzwert a, falls die Funktionswerte von f beliebig nahe bei a liegen, sobald die Argumente x nahe genug bei x_0 sind. Es gibt zwei gleichwertige Möglichkeiten, diesen Grenzwert zu definieren: Eine Möglichkeit verwendet Folgen von Argumenten $\big(x_n\big)$, die gegen die Stelle x_0 konvergieren und untersucht die zugehörige Folge $y_n = f(x_n)$ der Funktionswerte. Die andere Möglichkeit besteht darin, das „$f(x)$ liegt nahe beim Grenzwert a, sobald x nahe genug bei x_0 liegt“ direkt als Definition zu verwenden.

Definition 3.1
Die Funktion f hat in x_0 den Grenzwert *a ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$), falls gilt: Für jede Folge (x_n) von Punkten $x_n \in D\backslash\{x_0\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$.*

Bemerkungen:

1. Die Schwierigkeit bei der Anwendung dieser Definition besteht darin, dass *jede* Folge von Punkten $x_n \in D\backslash\{x_0\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ einbezogen werden muss. Es ist nicht möglich, alle hier in Frage kommenden Folgen anzugeben oder sich nur vorzustellen. Bei der Arbeit mit dieser Definition gibt es folgende Möglichkeiten: Entweder können wir für die zu untersuchende Funktion f eine allgemeine Aussage über die Funktionswerte $f(x_n)$ treffen, ohne genaueres über die Folge $\big(x_n\big)$ wissen zu müssen. Dies ist nötig, wenn die Funktion einen Grenzwert hat. Oder wir können eine Folge $\big(x_n\big)$ angeben, für die $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ aber die Folge $y_n = f(x_n)$ keinen Grenzwert hat. Oder wir können zwei verschiedene Folgen $\big(x_n\big)$ und $\big(\tilde{x}_n\big)$ angeben für die $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{x}_n = x_0$ gilt, für die aber die Grenzwerte $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(\tilde{x}_n)$ verschieden sind.

2. Die andere gleichwertige Definition lautet:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D\backslash\{x_0\}\ :\ |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Diese Definition können wir folgendermaßen anschaulich deuten: Wie schon bei der Definition des Grenzwertes von Folgen wird mittels der beliebig vorgebbaren Zahl ε ein Toleranzbereich um den Grenzwert a definiert. Die Funktion f hat in x_0 den Grenzwert a, wenn für alle x-Werte, die genügend nahe bei x_0 sind (gemessen durch eine Abweichung von maximal δ) alle Funktionwerte in dem Toleranzbereich der Breite 2ε um den Grenzwert a liegen. Wenn ε kleiner wird, müssen die x-Werte möglicherweise näher bei x_0 liegen. Daher ist im Allgemeinen zu erwarten, dass die Größe δ von dem vorgegebenen ε abhängt.

Wir können diese zweite Definition etwas abkürzen, wobei die Implikation ($\Longrightarrow$) entfällt und durch eine Beschreibung der x-Werte im zweiten $\forall$-Quantor ersetzt wird:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D\backslash\{x_0\} \text{ mit } |x - x_0| < \delta\ :\ |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Wie schon bei den Grenzwerten von Folgen, werden wir bei konkreten Beispielen nur selten direkt mit dieser Definition arbeiten wollen und können. Da wir die Konvergenz einer Funktion mit Hilfe von Folgen definiert haben, können wir die Rechenregeln für Folgen (siehe Satz 2.4) direkt auf Funktionen übertragen:

Satz 3.2 (Rechenregeln für Grenzwerte)
Die Grenzwerte $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *und* $\lim_{x\to x_0} g(x)$ *mögen existieren. Dann gilt:*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0}\big(f(x)+g(x)\big) &= \lim_{x\to x_0} f(x)+\lim_{x\to x_0} g(x)\\
\lim_{x\to x_0}\big(f(x)\cdot g(x)\big) &= \big(\lim_{x\to x_0} f(x)\big)\cdot\big(\lim_{x\to x_0} g(x)\big)\\
\lim_{x\to x_0}\big(\lambda f(x)\big) &= \lambda \lim_{x\to x_0} f(x),\ \textit{für}\ \lambda\in\mathbb{R}\\
\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) &= \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} \quad \textit{falls}\ g(x)\neq 0\ \textit{und}\ \lim_{x\to x_0} g(x)\neq 0\ \textit{gilt.}
\end{aligned}$$

Beispiele:

1. Es sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definiert durch $f(x)=x$ und $x_0\in\mathbb{R}$ eine beliebige Zahl. Wir wollen den Grenzwert $\lim_{x\to x_0} f(x)$ mit Hilfe der Definition bestimmen. Es sei also (x_n) eine beliebige Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Dann gilt für die Folge der Funktionswerte $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Daher hat die Funktion f an der Stelle x_0 einen Grenzwert und es gilt $\lim_{x\to x_0} f(x)=x_0$.

2. Es sei
$$\operatorname{sgn}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\quad\text{definiert durch}\quad \operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$
die *Signumfunktion.* Der Funktionswert von x ist das Vorzeichen von x. Wir wollen untersuchen, ob der Grenzwert $\lim_{x\to 0}\operatorname{sgn}(x)$ existiert. Hierzu betrachten wir zwei Folgen von Punkten in $\mathbb{R}$ die gegen $x_0=0$ konvergieren, nämlich $x_n=\frac{1}{n}$ und $\tilde{x}_n=\frac{-1}{n}$. Es ist klar, dass $\lim_{n\to\infty} x_n = 0 = \lim_{n\to\infty}\tilde{x}_n$. Für die Folgen der Funktionswerte gilt:
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty} f\left(\tfrac{1}{n}\right)=1 \quad\text{und}\quad \lim_{n\to\infty} f(\tilde{x}_n)=\lim_{n\to\infty} f\left(\tfrac{-1}{n}\right)=-1.$$
Damit haben wir gezeigt, dass der Grenzwert $\lim_{x\to 0}\operatorname{sgn}(x)$ nicht existiert. Wenn wir den Funktionsgraphen dieser Funktion betrachten, ist dies völlig klar.

Bei dem zweiten Beispiel existiert der Grenzwert der Funktion $\operatorname{sgn}(x)$ an der Stelle $x_0=0$ nicht. Es ist aber klar, dass es zwei verschiedene Grenzwerte gibt, wenn wir uns der Stelle $x_0=0$ nur von einer Seite nähern, also entweder nur negative x-Werte oder nur positive x-Werte zulassen. Daher ist es naheliegend, die sogenannten „einseitigen" Grenzwerte zu definieren, bei denen alle x-Werte nur auf einer Seite von x_0 sind:

Definition 3.3

1. *Gilt für jede Folge* $(x_n)\subset D$ *mit* $x_n<x_0$ *und* $x_n\to x_0$, *dass* $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=a$, *so heißt* $a=\lim_{x\to x_0-} f(x)$ *der* linksseitige Grenzwert *von* f *in* x_0.
2. *Gilt für jede Folge* $(x_n)\subset D$ *mit* $x_n>x_0$ *und* $x_n\to x_0$, *dass* $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=b$, *so heißt* $b=\lim_{x\to x_0+} f(x)$ *der* rechtsseitige Grenzwert *von* f *in* x_0.

Bemerkungen:

1. Für die einseitigen Grenzwerte verwenden wir auch die Schreibweisen

$$f(x_0+) := \lim_{x \to x_0+} f(x) \quad \text{und} \quad f(x_0-) := \lim_{x \to x_0-} f(x).$$

2. Es ist anschaulich klar, dass der folgende Zusammenhang gilt

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \iff \lim_{x \to x_0-} f(x) = \lim_{x \to x_0+} f(x) = a.$$

   Der Grenzwert von f an der Stelle x_0 existiert also genau dann, wenn der rechtsseitige und der linksseitige Grenzwert existiert und wenn diese beiden einseitigen Grenzwerte übereinstimmen.

Die folgende Definition erweitert den Grenzwertbegriff auf zwei Arten: Zum einen lassen wir die Stellen $x_0 = \pm\infty$ zu, d.h. wir untersuchen das Verhalten von $f(x)$, wenn die x-Werte beliebig groß oder beliebig klein werden. Zum anderen lassen wir zu, dass die Funktionswerte beliebig groß oder beliebig klein werden, also $f(x) \to \infty$ oder $f(x) \to -\infty$ gilt. Diese „uneigentlichen" Grenzwerte unterscheiden sich vom Verhalten der sgn-Funktion in der Nähe von $x_0 = 0$, wo die Funktion einen „Sprung" macht, oder einem Verhalten, bei dem die Funktion in der Nähe von der Stelle x_0 unendlich oft zwischen verschiedenen Werten hin und her oszilliert. Dieses oszillierende Verhalten zeigt z.B. die Funktion $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ in der Nähe von $x_0 = 0$.

Definition 3.4

1. *Gilt für jede Folge $(x_n) \subset D$ mit $x_n \to \infty$ (oder $x_n \to -\infty$), dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$ ist, so heißt $c = \lim_{x\to\infty} f(x)$ (oder $c = \lim_{x\to-\infty} f(x)$) der Grenzwert von f in ∞ (oder $-\infty$).*
2. *Gilt für jede Folge $(x_n) \subset D$ mit $x_n \to x_0$, dass $f(x_n) \to \infty$ (oder $f(x_n) \to -\infty$), so schreiben wir: $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ (oder $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$). Wir sagen in diesem Fall, dass f in x_0 den* uneigentlichen Grenzwert *∞ oder $-\infty$ hat. Rechts- und linksseitige uneigentliche Grenzwerte können wir analog definieren.*

Nun können wir den zentralen Begriff dieses Abschnittes definieren, nämlich die Stetigkeit einer Funktion.

Definition 3.5

Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt stetig *in $x_0 \in D$, wenn $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ ist. f heißt stetig auf der Menge $A \subset D$, wenn f in jedem Punkt $x_0 \in A$ stetig ist.*

Bemerkungen:

1. Die Gleichung $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ bedeutet, dass zwei Bedingungen erfüllt sein müssen: Der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert und dieser Grenzwert ist gleich dem Funktionswert.

2. Die Stetigkeit ist eine lokale Eigenschaft einer Funktion an einer Stelle x_0. Es gibt eine Funktion, die nur an der Stelle $x_0 = 0$ stetig ist und die an keiner weiteren Stelle $x_0 \neq 0$ einen Grenzwert hat. Es gibt sogar eine (nicht mehr vorstellbare) Funktion mit der Eigenschaft, dass diese Funktion an jeder irrationalen Stelle (also in $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$) stetig ist und in jedem rationalen Punkte (also in $\mathbb{Q}$) unstetig ist.

3. Wir werden uns hier nicht mit solchen zwar interessanten aber für die Anwendung nicht übermäßig relevanten Funktionen beschäftigen. Die meisten Funktionen die wir hier untersuchen sind auf einem Intervall definiert und auf dem ganzen Intervall stetig.

Da die Stetigkeit einer Funktion mit Hilfe deren Grenzwert definiert ist, übertragen sich die Rechenregeln für Grenzwerte auf stetige Funktionen.

Satz 3.6 (Rechenregeln für stetige Funktionen)
Die Funktionen f und g seien stetig in x_0. Dann sind auch $f \pm g$, $f \cdot g$ und $|f|$ stetig in x_0. Ist $g(x_0) \neq 0$, so ist auch $\frac{f}{g}$ stetig in x_0.

Bemerkungen:

1. Bei der letzten Rechenregel erwarten wir im ersten Moment neben der Voraussetzung $g(x_0) \neq 0$ auch die Voraussetzung $g(x) \neq 0$, damit die Quotienten überhaupt definiert sind. Wir werden im Satz 3.8 zeigen, dass diese nicht nötig ist: Wenn $g(x_0) \neq 0$ ist, dann ist in einer Umgebung von x_0 der Quotient $\frac{f}{g}$ wohldefiniert.

2. Die Stetigkeit einer Funktion f auf einem Intervall $[a, b]$ bedeutet anschaulich, dass wir den Funktionsgraphen von f ohne Absetzen zeichnen können. Es gibt allerdings Funktionen die in einem Intervall stetig sind, bei denen der Funktionsgraph an jeder Stelle dieses Intervalls einen „Knick" hat. Das Zeichnen eines solchen Funktionsgraphen könnte schwierig werden.

Der nächste Satz besagt, dass Stetigkeit nicht nur bei elementaren Rechenoperationen, sondern auch bei Hintereinanderausführung von Funktionen erhalten bleibt:

Satz 3.7
Die Funktion $f : D \to B$ sei stetig an der Stelle $x_0 \in D$ und die Funktion $g : B \to W$ sei stetig an der Stelle $y_0 = f(x_0) \in B$. Dann ist die durch Hintereinanderausführung von f und g entstehende Funktion $g \circ f : D \to W$ stetig an der Stelle x_0.

Beispiele:

1. Sind P und Q Polynome, so folgt aus den Rechenregeln und unserem ersten Beispiel: Die Polynome P und Q sind stetig auf $\mathbb{R}$ und die rationale Funktion $R = \frac{P}{Q}$ ist stetig auf $D = \{x \in \mathbb{R} \,|\, Q(x) \neq 0\}$.

2. Eine Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ ist im gesamten Konvergenzbereich stetig. Konvergiert die Potenzreihe an einem Rand des Konvergenzintervalls, so stimmt an dieser Stelle der einseitige Grenzwert (aus dem inneren des Konvergenzintervalls kommend) mit dem Funktionswert überein.

3.3 Wertannahme stetiger Funktionen

In diesem Abschnitt werden wir untersuchen, welche Konsequenzen auf das Wertannahmeverhalten einer Funktion in einem Intervall die Stetigkeit hat.

Ist eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ an der Stelle x_0 stetig, so heißt dies anschaulich, dass sich der Funktionswert von f nur wenig ändert, wenn sich das Argument nur wenig von x_0 unterscheidet. Dies wird im folgenden Satz konkretisiert:

Satz 3.8
Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sei stetig in x_0 und es gelte $f(x_0) > 0$ $(f(x_0) < 0)$. Dann gibt es eine Umgebung $U(x_0)$ von x_0 so, dass für alle $x \in U(x_0) \cap D$ ebenfalls $f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$ gilt.

Beweis: Es sei $f(x_0) > 0$ und $\varepsilon = \frac{1}{2} f(x_0) > 0$. Zu diesem ε gibt es ein $\delta > 0$ so, dass für alle x mit $|x - x_0| < \delta$ die Ungleichung $\left|f(x) - f(x_0)\right| < \varepsilon$ gilt. Für diese x-Werte gilt dann $f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon = \frac{1}{2} f(x_0) > 0$. ■

Bemerkung: Anschaulich ist dieser Satz klar: Ist $f(x_0) > 0$ und f stetig an der Stelle x_0, so gilt: Die Funktionswerte von f liegen beliebig nahe bei $f(x_0)$, sobald die x-Werte nahe genug bei x_0 liegen. Wir können für die Funktionswerte die maximale Abweichung von $f(x_0)$ beliebig vorgeben. Insbesondere können wir die Abweichung so klein machen, dass die Funktionswerte alle positiv sein müssen.

Satz 3.9 (Zwischenwertsatz, ZWS)
Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf dem ganzen Intervall $[a, b]$ und $f(a) \cdot f(b) < 0$. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit $f(\xi) = 0$.

Beweisskizze: Es sei o.B.d.A. $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Wir konstruieren eine Folge von Intervalle $[x_n, y_n]$ mit den Eigenschaften:

1. $f(x_n) < 0$ und $f(y_n) > 0$
2. $y_n - x_n = \frac{b-a}{2^n}$

Dabei gehen wir wie folgt vor: $x_0 = a$, $y_0 = b$. Kennen wir x_{n-1} und y_{n-1}, so betrachten wir den Funktionswert von f an der Stelle $\xi_n = \frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{2}$.

- Ist $f(\xi_n) = 0$, so haben wir $\xi = \xi_n$ gefunden.
- Ist $f(\xi_n) < 0$, so setzen wir $x_n = \xi_n$ und $y_n = y_{n-1}$.
- Ist $f(\xi_n) > 0$, so setzen wir $x_n = x_{n-1}$ und $y_n = \xi_n$.

Wenn das Verfahren nicht mit dem exakten Auffinden der Nullstelle endet, gelten für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichungen $f(x_n) < 0$ und $f(y_n) > 0$. Weiter ist aufgrund der Konstruktion die Folge $\left(x_n\right)$ monoton wachsend und die Folge $\left(y_n\right)$ monoton fallend. Da $x_n, y_n \in [a, b]$ gilt, sind diese beiden Folgen beschränkt. Aus Satz 2.5 folgt die Konvergenz dieser beiden Folgen. Wegen $y_n - x_n = \frac{b-a}{2^n}$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n =: \xi$. Aus der Stetigkeit von f folgt die Ungleichung $f(\xi) \leq 0 \leq f(\xi)$ und damit $f(\xi) = 0$. ■

Bemerkungen:

1. Diese Methode zur Konstruktion einer Nullstelle von f heißt *Bisektionsmethode.* Das Verfahren benötigt neben der Stetigkeit der Funktion f keine weitere Voraussetzung. Es gibt deutlich schnellere Verfahren zum Auffinden von Nullstellen, z.B. das Newtonerfahren. Dieses benötigt noch weitere Eigenschaften der Funktion f und konvergiert nicht in allen Fällen gegen die Nullstelle. Die Bisektionsmethode ist nicht sehr schnell aber sehr robust.

2. Die Voraussetzung $f(a) \cdot f(b) < 0$ bedeutet, dass die Funktionswerte an den beiden Enden des Intervalls $[a, b]$ verschiedene Vorzeichen haben. Einer dieser Funktionswerte soll also positiv sein und der andere negativ. Durch die Formulierung mit dem Produkt der beiden Funktionswerte sparen wir die Fallunterscheidung, welcher der beiden Werte positiv ist.

3. Im Beweis des Satzes wurde die Abkürzung „o.B.d.A." verwendet. Dies bedeutet „ohne Beschränkung der Allgemeinheit". Wir haben im Beweis angenommen, dass $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ ist und den zweiten möglichen Fall $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$ gar nicht behandelt. Diese Annahme ist keine Einschränkung, da wir den zweiten Fall durch Übergang der Funktion f zu der Funktion $-f$ erhalten. Daher ist es ausreichend, in dem Beweis nur einen der beiden Fälle zu behandeln.

4. Der ZWS gilt nur, weil die reellen Zahlen vollständig sind. Anschaulich bedeutet dieser Satz, dass ein Funktionsgraph, den wir am Stück durchzeichnen können die x-Achse nicht überqueren kann ohne dabei die Achse zu treffen. Es darf also keine „Löcher" in der Achse geben, durch die der Funktionsgraph die Achse überqueren kann, ohne sie dabei zu treffen.

Beispiele:

- Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x^3 - x - 1$. Wir stellen fest, dass $f(1) = -1$ und $f(2) = 5$ ist. Damit sind die Voraussetzungen des Zwischenwertsatzes für das Intervall $[a, b] = [1, 2]$ erfüllt. Die folgende Tabelle zeigt die ersten Folgeglieder der beiden Folgen $\big(x_n\big)$ und $\big(y_n\big)$. Da wir bei der Bestimmung von x_{n+1} und y_{n+1} aus den vorliegenden Werten x_n und y_n nur das Vorzeichen von f an der Stelle $\xi_n = \frac{x_n+y_n}{2}$ benötigen, geben wir in der Tabelle nicht den Funktionswerte $f(\xi_n)$ an sondern nur dessen Vorzeichen $\operatorname{sgn}\big(f(\xi_n)\big)$.

n	x_n	y_n	$\xi_n = \frac{1}{2}\big(x_n + y_n\big)$	$\operatorname{sgn}\big(f(\xi_n)\big)$
0	1	2	1.5	$+1$
1	1	1.5	1.25	-1
2	1.25	1.5	1.375	$+1$
3	1.25	1.375	1.3125	-1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Die gesuchte Nullstelle ist auf 12 Stellen gerundet die Zahl $\xi = 1.32471795725$. Der exakte Wert dieser Nullstelle kann in diesem Fall explizit angegeben werden zu

$$\xi = \frac{\sqrt[3]{108+12\sqrt{69}}}{6} + \frac{2}{\sqrt[3]{108+12\sqrt{69}}},$$

dieser Ausdruck hat allerdings nur eine beschränkte Aussagekraft.

- Die Anzahl der Nullstellen des Polynoms $P(x) = x^3 - 10x + 1$ in $\mathbb{R}$ ist drei. Zunächst ist klar, dass ein Polynom vom Grad drei höchstens drei Nullstellen haben kann. Jede Nullstelle x_0 führt zu einem Linearfaktor $x - x_0$ dieses Polynoms und ein Polynom vom Grad drei kann höchstens drei Linearfaktoren als Teiler haben.

  Zum Auffinden der Nullstellen fertigen wir eine Tabelle mit den Funktionswerten von P an:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-23	4	13	10	1	-8	-11	-2	25

  Nach dem ZWS hat das Polynom in jedem der Intervalle $[-4, -3]$, $[0, 1]$ und $[3, 4]$ mindestens eine Nullstelle. Da P maximal drei Nullstellen haben kann, liegt in jedem dieser Intervalle genau eine Nullstelle. Damit haben wir gezeigt, dass P genau drei Nullstellen hat.

Satz 3.10 (Existenz von Minimum und Maximum)
Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$. Dann nimmt f in $[a, b]$ Minimum und Maximum an. Es gibt also Punkte $x_{min} \in [a, b]$ und $x_{max} \in [a, b]$ so, dass für alle $x \in [a, b]$ die Ungleichung $f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max})$ gilt.

Bemerkungen:

1. $x_{\min} \in [a, b]$ ist die Minimalstelle und $x_{\max} \in [a, b]$ ist die Maximalstelle der Funktion f. Die Funktionswerte $f(x_{\min})$ und $f(x_{\max})$ sind der kleinste und der größte Funktionswert, also das Minimum und das Maximum der Werte von f. Wir werden den Ausdruck „Minimum“ bzw. „Maximum“ sowohl für die Minimalstelle bzw. Maximalstelle als auch für den kleinsten bzw. größten Funktionswert verwenden.

2. Wir können den Satz auch so formulieren: Ist die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig, so ist die Bildmenge $f([a, b]) = [c, d]$ von $[a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall $[c, d]$.

3. Dieser Satz ist die Grundlage vieler Extremwertaufgaben, da er die Existenz von Minimum und Maximum einer stetigen Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall sicherstellt. Mit Hilfe der Differentialrechnung können wir eine (im allgemeinen nicht sehr umfangreiche) Liste mit Punkten bestimmen, an denen *möglicherweise* ein Maximum oder Minimum angenommen werden kann. Da durch diesen Satz die Existenz der Extrema sichergestellt ist, *muss* ein Punkt aus dieser Liste die gesuchte Extremalstelle sein.

Auf Seite 48 haben wir die Umkehrfunktion einer Funktion definiert. Nun können wir ein Kriterium für die Existenz der Umkehrfunktion einer auf einem Intervall $[a, b]$ stetigen Funktion angeben:

Satz 3.11
Es sei $f : [a, b] \to [c, d]$ stetig, wobei $f\big([a, b]\big) = [c, d]$ ist. Dann gilt: Die Funktion f besitzt eine Umkehrfunktion genau dann, wenn f streng monoton ist. Die Umkehrfunktion $f^{-1} : [c, d] \to [a, b]$ ist ebenfalls stetig und streng monoton. Die Umkehrfunktion ist definiert durch die Gleichungen $f^{-1}\big(f(x)\big) = x, \forall x \in [a, b]$ und $f\big(f^{-1}(y)\big) = y, \forall y \in [c, d]$.

4 Differentialrechnung

4.1 Vorüberlegung

Zu Beginn wollen wir die historische Entwicklung und Entstehung der Differentialrechnung betrachten:

Im 17. Jahrhundert wurde für viele Fragestellungen die Steigung von Tangenten benötigt. Beispiele hierfür sind:

- Schnittwinkel von Kurven (Descartes)
- Konstruktion von Teleskopen (Galilei) und Uhren (Huygens, 1673)
- Suche von Minima und Maxima (Fermat, 1638)
- Geschwindigkeit und Beschleunigung von Bewegungen (Galilei, 1638 und Newton, 1683)
- Astronomie und Gravitationsgesetze (Kepler, Newton)

Das folgende Beispiel zeigt, dass die Berechnungen „ingenieurmäßig“ vorgenommen wurden:

Wir betrachten die Funktion $y = x^2$. Ändert sich x zu $x + \Delta x$, so ändert sich der Funktionswert zu $y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$. Damit erhalten wir die Änderung zu $\Delta y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$. Gehen wir nun zu unendlich kleinen Größen über, so wird aus Δx die Größe dx und aus Δy wird dy. Da die Größe $(dx)^2$ unendlich viel kleiner ist als $2x\,dx$, können wir diesen Term weglassen und erhalten $dy = 2x\,dx$ oder $\frac{dy}{dx} = 2x$. Diesen Weg ging Leibniz im Jahr 1684.

Newton betrachtete 1671 die Größen x, y und z als zeitlich veränderlich und nutzte für die Geschwindigkeiten mit denen sich diese Größen ändern den Ausdruck $\dot{x}$, $\dot{y}$ und $\dot{z}$. Zu diesen Bezeichnungen gab es eine Auseinandersetzung zwischen Leibniz und Newton. Leibniz kritisierte die Schreibweise von Newton als unpraktisch für höhere Ableitungen. So sei $\frac{d^5y}{dx^5}$ doch eleganter als $\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{x}$. Wir werden beide Schreibweisen verwenden. Bei zeitlich variablen Größen x, y und z benötigen wir nur die beiden ersten Ableitungen, also die Bezeichnungen $\dot{x}$ und $\ddot{y}$. Sobald höhere Ableitungen vorkommen, verwenden wir die Schreibweise von Leibniz oder Lagrange.

Lagrange führte im Jahr 1797 den Begriff „Ableitung“ ein und verwendete die heute übliche Bezeichnung y' bzw. $f'(x)$. Die höheren Ableitungen bezeichen wir mit $\frac{d^5y}{dx^5}$ oder mit $f^{(5)}(x)$, allerdings nicht mit $\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{x}$.

Bevor wir die Ableitung einer Funktion definieren, wollen wir anhand eines Gedankenexperiments einige Vorüberlegungen durchführen: Wir werfen eine Zitrone in die Höhe und messen zu verschiedenen Zeiten die Höhe der Zitrone über dem Fussboden. Wir erhalten zunächst die folgende Tabelle für die Höhe y (in Metern) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Sekunden):

t	0	1	2	3	4	5	6
y	2	23	36	41	38	27	8

Wir wollen die Geschwindigkeit bestimmen, mit der die Zitrone zu einem vorgegebenen Zeitpunkt fliegt.

Bevor wir dies tun, ist eine kurze Bemerkung zum Begriff „Geschwindigkeit“ angebracht. Wir können bei der Ermittlung der Geschwindigkeit die Information über die Flugrichtung mit einbeziehen. Wenn wir dies tun, erhalten wir positive Geschwindigkeiten solange die Zitrone nach oben fliegt und negative Geschwindigkeiten, sobald die Zitrone nach unten fällt. Dabei orientieren wir die y-Achse so, dass die größeren y-Werte weiter oben liegen. Im Englischen wird dieser Geschwindigkeitsbegriff mit *velocity* bezeichnet. Wir können uns auch nur für den Betrag der Geschwindigkeit interessieren, der eben auch Geschwindigkeit genannt wird. Dieser Betrag der Geschwindigkeit besagt einfach, welche Strecke in einer bestimmten Zeit zurückgelegt wird, unabhängig von der Richtung der Bewegung. Im Englischen wird die mit *speed* bezeichet. Wir berechnen die Geschwindigkeit der Zitrone im Sinne von velocity.

Mit den vorliegenden Daten können wir die *Durchschnittsgeschwindigkeit* der Zitrone über längere Zeitintervalle $a \leq t \leq b$ bestimmen. Die Durchschnittsgeschwindigkeit über $[a, b]$ ist definiert durch

$$\frac{\text{während der Zeit zurückgelegte Strecke}}{\text{Dauer des Zeitintervalls}} = \frac{y(b) - y(a)}{b - a}.$$

Beispiele:

1. Die Durchschnittsgeschwindigkeit der Zitrone im Zeitintervall $1 \leq t \leq 5$ ist $1 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Aus dem positiven Wert dieser Durchschnittsgeschwindigkeit können wir schließen, dass die Zitrone in dem Zeitintervall $[1, 5]$ im mittel nach oben fliegt.
2. Die Durchschnittsgeschwindigkeit der Zitrone im Zeitintervall $4 \leq t \leq 5$ ist $-11 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Aus dem negativen Wert dieser Durchschnittsgeschwindigkeit können wir schließen, dass die Zitrone in dem Zeitintervall $[4, 5]$ im mittel nach unten fällt.
3. Die Durchschnittsgeschwindigkeit der Zitrone im Zeitintervall $1 \leq t \leq 3$ ist $9 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Aus dem positiven Wert dieser Durchschnittsgeschwindigkeit können wir schließen, dass die Zitrone in dem Zeitintervall $[1, 3]$ im mittel nach oben fliegt.

Aus der Durchschnittsgeschwindigkeit können wir also einige Informationen über den Flug der Zitrone ableiten. Wenn wir die Tabelle mit den Positionen der Zitrone betrachten sehen wir, dass die als erstes berechnete Durchschnittsgeschwindigkeit nur wenig über den tatsächlichen Bewegungsablauf aussagt.

Um genauere Informationen über den Bewegungsablauf zu erhalten, benötigen wir die *Momentangeschwindigkeit* der Zitrone, z.B. zum Zeitpunkt $t = 1$. Betrachten wir zunächst Zeitintervalle der Länge 1, so stellen wir fest, dass die Durchschnittsgeschwindigkeit im Intervall $[0, 1]$ mit $21 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ höher ist als die Durchschnittsgeschwindigkeit im Intervall $[1, 2]$ mit $13 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Die Momentangeschwindigkeit zur Zeit $t = 1$ liegt irgendwo zwischen diesen Werten.

Um diese Momentangeschwindigkeit noch besser abschätzen zu können, benötigen wir die Positionen y der Zitrone zu Zeitpunkten, die kürzer vor oder nach der Zeit $t = 1$ liegen. Mit Hilfe eines Präzisionsinstruments erhalten wir die folgenden Werte:

t	0.9	1.1	0.99	1.01	0.999	1.001
y	21.26	24.66	22.83	23.17	22.983	23.017

Damit erhalten wir für die immer kleiner werdenden Intervalle folgende Durchschnittsgeschwindigkeiten:

Intervall	[0.9, 1]	[1, 1.1]	[0.99, 1]	[1, 1.01]	[0.999, 1]	[1, 1.001]
Geschw.	17.4	16.6	17.04	16.96	17.004	16.996

Anhand dieser Daten liegt die Vermutung nahe, dass die Momentangeschwindigkeit der Zitrone zur Zeit $t = 1$ den Wert $17\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ haben dürfte. Weiter ist anhand der Tabelle naheliegend, dass wir die Momentangeschwindigkeit zur Zeit $t = t_0$ mit dem Grenzwert

$$\text{Momentangeschwindigkeit zur Zeit } t_0 = \lim_{t \to t_0} \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0} = \lim_{h \to 0} \frac{y(t_0 + h) - y(t_0)}{h}$$

berechnen können. Beim ersten Grenzwert berechnen wir die Durchschnittsgeschwindigkeit im Intervall $[t_0, t]$ bzw. $[t, t_0]$ (je nachdem ob $t > t_0$ oder $t < t_0$ ist). Beim zweiten Grenzwert schreiben wir einfach $t = t_0 + h$. Diesen Grenzwert bezeichnen wir als die *Ableitung* der Funktion $y(t)$ an der Stelle $t = t_0$.

4.2 Differenzierbarkeit

Nun wollen wir die oben getroffenen Überlegungen mathematisch sauber notieren. Oben hatten wir den Ableitungsbegriff über Geschwindigkeiten plausibel gemacht. Es gibt daneben noch die geometrische Deutung, die uns auch den Unterschied zur Stetigkeit zeigt:

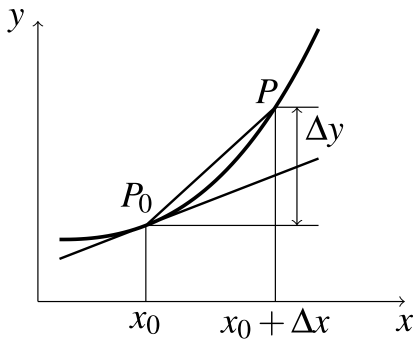
Die Stetigkeit bedeutet, dass der Graph der Funktion f „keine Sprünge“ macht. Ist die Funktion differenzierbar, so hat der Graph von f „keinen Knick.“ Dies ist gleichbedeutend damit, dass wir an den Graphen von f eine Tangente anlegen können.

Definition 4.1
Die Funktion f heißt differenzierbar *in x_0, falls der Grenzwert $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert. Die Zahl $f'(x_0)$ heißt die* Ableitung *von f an der Stelle x_0.*

Bemerkungen:

1. $\frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0)$ heißt der Differentialquotient von f in x_0 und $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ heißt der Differenzenquotient. Wir werden bald das „Differential“ definieren. Der Bruch $\frac{df}{dx}$ ist ein Quotient von zwei Differentialen, was diesen Begriff plausibel macht.
2. Die Gleichung der Tangente an f in x_0 lautet: $T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Geometrische Interpretation: Mit $h = \Delta x = x - x_0$ stellt der Differenzenquotient $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ die Steigung der Sekante (Sehne) zwischen P_0 und P dar. Für $h \to 0$, d.h. $x \to x_0$, wird die Sekante zur Tangente in x_0 und die Steigung der Tangente ist $f'(x_0) = \dfrac{df}{dx}(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$. Für den Winkel α zwischen der Tangente und der x-Achse gilt $\tan \alpha = f'(x_0)$.

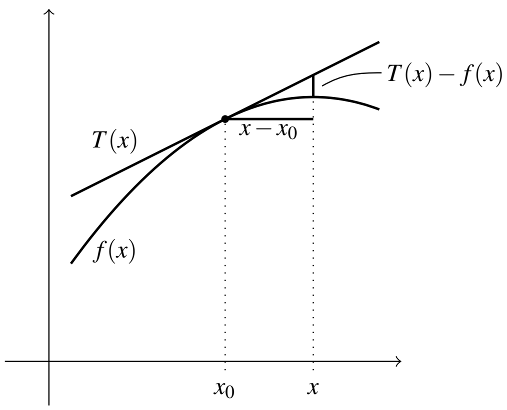


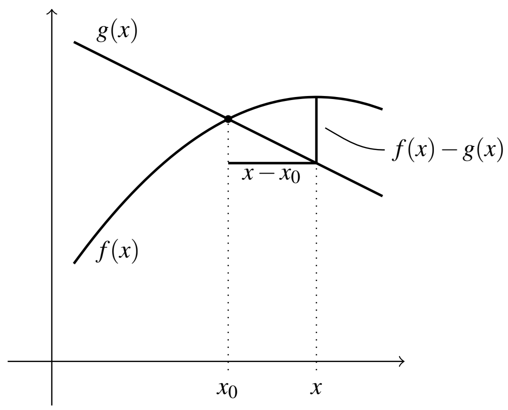
Beispiel: Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x^2$. Für ein beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$ erhalten wir

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = x + x_0 \quad \text{und damit} \quad f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 2x_0.$$

Der Grundgedanke bei der oben angegebenen Definition der Differenzierbarkeit ist der selbe, den wir bei der Berechnung von Momentangeschwindigkeiten entwickelt haben. Wir können die Differenzierbarkeit auch geometrisch definieren. Eine Funktion ist an der Stelle x_0 differenzierbar, wenn wir an den Funktionsgraphen im Punkt $\big(x_0, f(x_0)\big)$ eine Tangente anlegen können.

Wir betrachten den Funktionsgraphen von $f(x)$ und zwei Geraden durch den Punkt $\big(x_0, f(x_0)\big)$ des Funktionsgraphen von f: Die gesuchte Tangente $T(x)$ und eine weitere Gerade $g(x)$ durch diesen Punkt, die den Funktionsgraph mit einem von Null verschiedenen Winkel schneidet. Diese Situation ist in folgenden Bildern dargestellt.





Die Geraden $T(x)$ und $g(x)$ gehen beide durch den Punkt $\big(x_0, f(x_0)\big)$, daher können wir beide in der Form $f(x_0) + a(x - x_0)$ mit verschiedenen Geradensteigungen a schreiben. Nun müssen wir untersuchen, wie wir die Tangente mit der Steigung $a = f'(x_0)$ von anderen Geraden mit anderen Steigungen unterscheiden können.

Da alle Geraden durch den Punkt $\big(x_0, f(x_0)\big)$ gehen, geht der Abstand $T(x) - f(x)$ für die Tangente und $g(x) - f(x)$ für eine beliebige Gerade immer gegen Null, wenn sich der Punkt x der Stelle x_0 annähert. Der Abstand allein ist also nicht ausreichend zur Unterscheidung von T gegenüber g.

Betrachten wir die beiden Bilder, so stellen wir fest, dass beim linken Bild der Abstand $T(x) - f(x)$ viel kleiner ist als der Abstand $x - x_0$. Beim rechten Bild dagegen ist der Abstand $f(x) - g(x)$ ungefähr genauso groß wie der Abstand $x - x_0$. Dies macht es plausibel, dass die Verhältnisse $\frac{|T(x)-f(x)|}{x-x_0}$ und $\frac{|g(x)-f(x)|}{x-x_0}$ der Abstände in y- und in x-Richtung zur Identifikation der Tangente $T(x)$ verwendet werden können.

Damit erhalten wir eine alternative Definition der Differenzierbarkeit:

Satz 4.2
Die Funktion f ist genau dann differenzierbar an der Stelle x_0, wenn es eine Zahl a und eine Funktion $r(x)$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

1. $f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$
2. $\lim\limits_{x \to x_0} r(x) = 0$

Die Zahl a ist die Ableitung von f in x_0, $a = f'(x_0)$.

Bemerkung: Die Zahl a und die Funktion $r(x)$ hängen im Allgemeinen von der Stelle x_0 ab. Bei unserer obigen Überlegung ist $r(x)$ das Verhältnis der Abstände in y- und in x-Richtung von der Geraden und dem Funktionsgraph. Damit es eine Tangente geben kann, muss dieses Verhältnis im Grenzübergang $x \to x_0$ zu Null werden.

Beweisidee: Formen wir den Ausdruck $f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$ um, so erhalten wir: (mit $a = f'(x_0)$)

$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + r(x)(x - x_0) \Longleftrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + r(x).$$

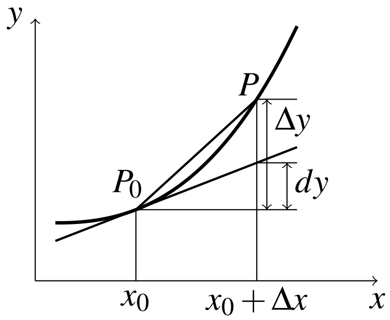
Wenn f nach Definition 4.1 differenzierbar ist, so konvergieren die Differenzenquotienten gegen die Ableitung von f an der Stelle x_0 und die Funktion r muss gegen Null gehen. Geht dagegen die Funktion r gegen Null, so folgt sofort, dass die Differenzenquotienten gegen die Zahl $f'(x_0)$ konvergieren und damit ist die Funktion f nach Definition 4.1 an der Stelle x_0 differenzierbar. ■

Beispiel: Wir bestimmen die Gleichung der Tangente an den Graphen von $f(x) = x^2$ an der Stelle $x_0 = 3$. Die Ableitung dieser Funktion haben wir auf Seite 60 schon ermittelt. Damit erhalten wir: $f(x_0) = f(3) = 9$ und $f'(x_0) = f'(3) = 6$. Setzen wir diese Werte in die Tangentengleichung ein, so erhalten wir

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) = 9 + 6(x - 3) = 6x - 9.$$

Ist f differenzierbar, so können wir den Funktionsgraphen lokal linearisieren bzw. durch seine Tangente ersetzen. Die Änderung der Funktionswerte können wir mit dem im Folgenden definierten „Differential“ approximieren. Hierbei betrachten wir nicht die Änderung der Funktionswerte sondern die Änderung der Werte der Tangente. Dies ist in dem folgenden Bild dargestellt:

Differential: Lokal lässt sich die Änderung der Funktionswerte durch den Zuwachs auf der Tangente approximieren. Für kleines $\Delta x = dx$ gilt $\Delta y = f(x_0 + dx) - f(x_0) \approx f'(x_0)\,dx$. Der Ausdruck $df = f'\,dx$ heißt *Differential* von f. Eine Änderung des Argumentes von f um die infinitesimale Größe dx bewirkt eine Änderung des Funktionswertes um die Größe $df = f'dx$. Die Ableitung beschreibt also die lokale Änderungsrate von f.



Bevor wir Rechenregeln für differenzierbare Funktionen herleiten wollen wir zeigen, dass die Differenzierbarkeit einer Funktion tatsächlich mehr als die Stetigkeit bedeutet.

Satz 4.3 (Stetigkeit differenzierbarer Funktionen)
Die Funktion f sei differenzierbar in x_0. Dann ist f in x_0 stetig.

Beweis: Es ist $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \big(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x)(x - x_0)\big) = f(x_0)$. ■

In der Definition 4.1 hatten wir die Ableitung einer Funktion definiert. Zur praktischen Berechnung von Ableitungen ist diese Definition allerdings nicht geeignet. Daher wollen wir jetzt einige „Ableitungsregeln“ überlegen. Diese Regeln ermöglichen die Bestimmung der Ableitung von Funktionen, die sich aus einfachen Funktionen durch Addition, Multiplikation, Division oder Hintereinanderausführung zusammensetzen. Hierzu benötigen wir nur die Ableitungen dieser einfachen Bausteine.

Satz 4.4
Die Funktionen f und g seien differenzierbar in x_0 und es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

1. *Die Linearkombination $\alpha f + \beta g$ ist differenzierbar in x_0 und*

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0).$$

2. *Das Produkt fg ist differenzierbar in x_0 und es gilt die* Produktregel.

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

3. *Ist $g(x_0) \neq 0$, so ist der Quotient $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar und es gilt die* Quotientenregel.

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{g(x_0)f'(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Beweis:

1. Die erste Regel ist klar, da der Differenzenquotient einer Linearkombination von Funktionen und die Linearkombination der Differenzenquotienten dieser Funktionen übereinstimmen.

2. Es ist

$$\frac{(fg)(x)-(fg)(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} =$$

$$\underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\to f'(x_0)} \underbrace{g(x)}_{\to g(x_0)} + f(x_0) \underbrace{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}_{\to g'(x_0)}$$

$$\to f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0) \quad (\text{für } x \to x_0).$$

3. Der Nachweis der Quotientenregel verläuft analog:

$$\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x)-\left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{x-x_0} = \frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0} =$$

$$\frac{1}{g(x)g(x_0)}\left(g(x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right)$$

$$\to \frac{g(x_0)f'(x_0)-g'(x_0)f(x_0)}{\left(g(x_0)\right)^2} \quad \text{für } x \to x_0.$$

■

Beispiele:

1. Im ersten Beispiel betrachten wir die Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$. Wir könnten die Ableitung von f_n mit Hilfe der Differenzenquotienten berechnen, indem wir die Folgerung aus der geometrischen Summenformel auf Seite 8 anwenden. Wir wollen diese Ableitung hier mit Hilfe vollständiger Induktion und der Produktregel berechnen.
   Behauptung: $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: Die Funktion $f_n(x) = x^n$ hat die Ableitung $f_n'(x) = n \cdot x^{n-1}$.
   Induktionsanfang: $f_1(x) = x$ hat die Ableitung $f_1'(x) = 1$.
   Induktionsschritt: Aus $f_n'(x) = n \cdot x^{n-1}$ folgt mit der Produktregel:

$$f_{n+1}'(x) = \left(x \cdot x^n\right)' = (x)' \cdot x^n + x \cdot \left(x^n\right)' = 1 \cdot x^n + x \cdot n \cdot x^{n-1} = (n+1) \cdot x^n.$$

   Damit ist die Behauptung für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

2. Es sei $g : \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$. Die Ableitung von g können wir mit der Quotientenregel berechnen und erhalten:

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right) = \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}.$$

Satz 4.5 (Kettenregel)
Es sei f differenzierbar in x_0 und g differenzierbar in $y_0 = f(x_0)$. Dann ist $g \circ f$ differenzierbar in x_0 und es gilt $(g \circ f)'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big) \cdot f'(x_0)$.

Bemerkung: Mit Differentialen lautet die Kettenregel $\dfrac{dg}{dx} = \dfrac{dg}{df} \cdot \dfrac{df}{dx}$.

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned}
g(y) &= g(y_0)+g'(y_0)(y-y_0)+r_g(y)(y-y_0)\\
\Longrightarrow g\big(f(x)\big) &= g\big(f(x_0)\big)+g'\big(f(x_0)\big)(f(x)-f(x_0))+r_g(f(x))(f(x)-f(x_0))\\
\Longrightarrow g\big(f(x)\big) &= g\big(f(x_0)\big)+g'\big(f(x_0)\big)\big(f'(x_0)(x-x_0)+r_f(x)(x-x_0)\big)\\
&\qquad +r_g\big(f(x)\big)\big(f'(x_0)(x-x_0)+r_f(x)(x-x_0)\big)\\
\Longrightarrow g\big(f(x)\big) &= g\big(f(x_0)\big)+\underbrace{g'\big(f(x_0)\big)f'(x_0)}_{(g\circ f)'(x_0)}(x-x_0)\\
&\qquad +\underbrace{\Big(g'\big(f(x_0)\big)r_f(x)+r_g\big(f(x)\big)\big(f'(x_0)+r_f(x)\big)\Big)}_{r_{g\circ f}(x)}(x-x_0).
\end{aligned}$$

■

Beispiel: Es sei $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definiert durch $h(x)=\big(x^2-1\big)^{15}$. Hier könnten wir die Potenz zunächst mit Hilfe der Binomischen Formel ausschreiben und dann das resultierende Polynom ableiten. Dies ist jedoch sehr umständlich. Besser ist hier die Anwendung der Kettenregel: $h(x)=\big(x^2-1\big)^{15}=(g\circ f)(x)$ mit $f(x)=x^2-1$ und $g(y)=y^{15}$. Damit erhalten wir aus der Kettenregel: $h'(x)=g'\big(f(x)\big)\cdot f'(x)=30x\big(x^1-1\big)^{14}$.

Bemerkung: Haben wir Funktionen x oder y vorliegen die von der Zeit t abhängen, also $x=x(t), y=y(t)$, so bezeichnen wir die Ableitung nach t mit $\frac{dx}{dt}=\dot{x}$, $\frac{dy}{dt}=\dot{y}$. Da wir die Variable oft nicht explizit angeben, müssen wir bei der Berechnung der Ableitung beachten, nach welcher Variable wir ableiten.

Beispiel: $\dfrac{d}{dx}\big(x^2\big)=2x$ aber $\dfrac{d}{dt}\big(x^2\big)=2x\cdot\dot{x}$ nach der Kettenregel.

Die nächsten Sätze legen die Grundlage für Extremwertaufgaben oder die Untersuchung des Monotonieverhaltens von Funktionen.

Satz 4.6
Die Funktion f sei differenzierbar in (a,b) und es gebe ein $x_0\in(a,b)$ so, dass für alle x im Intervall (a,b) die Ungleichung $f(x)\le f(x_0)$ $(f(x)\ge f(x_0))$ gilt. Dann ist $f'(x_0)=0$.

Beweis: Wir können den Beweis auf zwei Arten führen bei denen wir die beiden verschiedenen Definitionen der Differenzierbarkeit anwenden:

1. Wir können O.b.d.A in (a,b) die Ungleichung $f(x)\le f(x_0)$ annehmen. Wegen der Differenzierbarkeit von f existiert der Grenzwert $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Aus der Ungleichnung $f(x)\le f(x_0)$ erhalten wir

$$x<x_0\Longrightarrow\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0\quad\text{und}\quad x>x_0\Longrightarrow\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0.$$

   Daher gilt $\lim\limits_{x\to x_0-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$ und $\lim\limits_{x\to x_0+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$. Da der Grenzwert $f'(x_0)$ existiert, muss $f'(x_0)=0$ sein.
   Der Beweis für den Fall $f(x)\ge f(x_0)$ verläuft genauso.

2. Ist f an der Stelle x_0 differenzierbar, so können wir f schreiben als

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\big(f'(x_0) + r(x)\big)}_{:=h(x)} \cdot (x - x_0) \quad \text{mit} \quad \lim_{x \to x_0} r(x) = 0.$$

   Ist nun $f'(x_0) \neq 0$, so gibt es wegen $\lim\limits_{x \to x_0} r(x) = 0$ eine kleine Umgebung von x_0, in der die stetige Funktion h nur positive oder nur negative Wert annimmt. Dort nimmt die Funktion $h(x) \cdot (x - x_0)$ dann sowohl positive als auch negative Werte an. Es gibt also in einer kleinen Umgebung von x_0 Funktionswerte von f die größer sind als $f(x_0)$ und Werte von f die kleiner sind als $f(x_0)$. Also kann f an der Stelle x_0 kein Maximum oder Minimum haben.

■

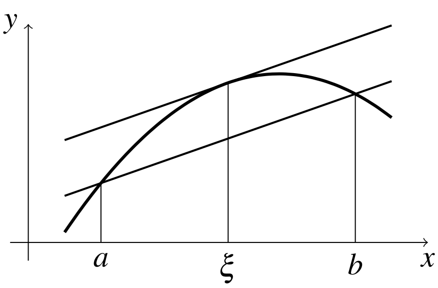
Bemerkung: Die Aussage des Satzes können wir so formulieren: Hat die Funktion f an der Stelle x_0 ein Maximum oder ein Minimum, so ist dort $f'(x_0) = 0$. Leider ist die Schlussrichtung dieser Aussage für die Bestimmung von Extremwerten verkehrt: Wir müssen die Extremalstelle x_0 schon kennen um dann auf $f'(x_0) = 0$ zu schließen. Bei der Suche nach Extremalstellen haben wir diese Information aber noch nicht. Wir werden im Abschnitt 4.5 sehen, wie wir mit Hilfe dieses Satzes die gesuchten Extremalstellen ermitteln können.

Satz 4.7 (Satz von Rolle)
Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei stetig in $[a, b]$, differenzierbar in (a, b) und es gelte $f(a) = f(b)$. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Beweis: $f \equiv \text{const} \Longrightarrow f' \equiv 0$. Ist $f \not\equiv \text{const}$, so existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) \neq f(a)$. Daher nimmt f sein Minimum bzw. Maximum in $\xi \in (a, b)$ an und nach Satz 4.6 gilt $f'(\xi) = 0$. ■

Satz 4.8 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)
Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig in $[a, b]$ und differenzierbar in (a, b). Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Beweis: Es sei $F(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$. Dann gilt $F(a) = f(a)$ und $F(b) = f(a) = F(a)$. Nach dem Satz von Rolle existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $F'(\xi) = 0 \Longrightarrow f'(\xi) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Longrightarrow$ $f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. ■



Bemerkungen:

1. Dieser Satz besagt, dass es eine Tangente an dem Funktionsgraphen an einer Stelle zwischen a und b gibt, die parallel zu der Sekante durch die beiden Punkte $\big(a, f(a)\big)$ und $\big(b, f(b)\big)$ ist.

2. Häufig wird der Mittelwertsatz in der Form $f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b-a)$ verwendet. Wenn wir den Wertebereich der Ableitung kennen, so können wir damit die Änderung der Funktionswerte im Intervall $[a, b]$ abschätzen.

Folgerungen: Viele Eigenschaften von Funktionen, die wir im Rahmen einer Kurvendiskussion untersuchen, folgen aus dem Mittelwertsatz. Ist eine Funktion f stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar int (a, b), so gilt:

1. Ist $f' \equiv 0$ auf (a, b), so ist f konstant.
2. Ist $f' > 0$ ($f' < 0$) auf (a, b), so ist f streng monoton wachsend (fallend).

Beispiel: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ zeigt, dass aus der Monotonie einer Funktion noch nicht die Ungleichung $f' > 0$ folgt. f ist in ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend, aber $f'(x) = 3x^2$ hat an der Stelle $x_0 = 0$ einen Nullstelle.

Im Satz 3.11 hatten wir festgestellt, dass eine stetige Funktion genau dann eine Umkehrfunktion besitzt, wenn sie streng monoton ist. Nun haben wir ein hinreichendes Kriterium für die strenge Monotonie mit Hilfe des Mittelwertsatzes erhalten. Daraus folgt: Ist eine Funktion differenzierbar und ist deren Ableitung strikt positiv (oder strikt negativ), so hat diese Funktion eine Umkehrfuktion. Dies ergänzen wir nun durch ein Kriterium, mit dem wir diese Umkehrfunktion auf Differenzierbarkeit untersuchen können. Der folgende Satz ist eine Erweiterung von Satz 3.11

Satz 4.9 (Existenz und Ableitung der Umkehrfunktion)
Es sei $f : [a, b] \to [c, d]$ stetig, wobei $f\big([a, b]\big) = [c, d]$ ist. Dann gilt: Die Funktion f besitzt eine Umkehrfunktion genau dann, wenn f streng monoton ist. Die Umkehrfunktion $f^{-1} : [c, d] \to [a, b]$ ist ebenfalls stetig und streng monoton. Die Umkehrfunktion ist definiert durch die Gleichungen $f^{-1}\big(f(x)\big) = x, \forall x \in [a, b]$ bzw. $f\big(f^{-1}(y)\big) = y, \forall y \in [c, d]$.

Ist f differenzierbar in x_0, so gilt: Die Umkehrfunktion f^{-1} ist differenzierbar an der Stelle $y_0 = f(x_0)$ genau dann, wenn $f'(x_0) \neq 0$. In diesem Fall ist

$$\left(f^{-1}\right)'\left(f(x_0)\right) = \frac{1}{f'(x_0)}, \quad \left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y_0)\big)}, \quad \left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Beweisskizze: Der Graph der Umkehrfunktion f^{-1} entsteht aus dem Funktionsgraphen von f durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden $y = x$. Damit ist es anschaulich klar, dass der Graph der Umkehrfunktion keine Knicke haben kann, sobald der Graph von f keine Knicke hat. Hat der Graph der Funktion an einer Stelle x_0 eine waagrechte Tangente, ist also $f'(x_0) = 0$, so hat der Graph der Umkehrfunktion an der Stelle $y_0 = f(x_0)$ eine senkrechte Tangente. Dies ist in unserer Definition der Ableitung nicht enthalten, da hier die Ableitung von f^{-1} den Wert ∞ haben müsste.

Die Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion erhalten wir aus der Kettenregel: Leiten wir die beide Seiten der Gleichung $x = f^{-1}\big(f(x)\big)$ nach x ab, so erhalten wir:

$$1 = \frac{d}{dx}\Big(f^{-1}\big(f(x)\big)\Big) = \left(f^{-1}\right)'\left(f(x)\right) \cdot f'(x).$$

■

Beispiel: Wir betrachten für ein $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $p : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, x \mapsto p(x) = x^n$. Die Ableitung dieser Funktion ist $p'(x) = nx^{n-1} > 0$ für alle $x > 0$. Daher ist diese Funktion streng monoton wachsend. Die Funktion hat also eine Umkehrfunktion $p^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $p^{-1}(y) = \sqrt[n]{y} = x \Longleftrightarrow x^n = y$.

Da die Ableitung $p'(x)$ für $x > 0$ positiv ist, ist diese Umkehrfunktion für alle $y > 0$ differenzierbar. Mit der Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion erhalten wir

$$\frac{d}{dy}\left(\sqrt[n]{y}\right) = \frac{d}{dy}\left(p^{-1}(y)\right) = \frac{1}{p'\left(p^{-1}(y)\right)} = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{y}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{y^{n-1}}}$$

Als Spezialfälle erhalten wir:

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{und} \quad \frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x}\right) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Schreiben wir die Wurzeln mit Hilfe von Potenzen, wo wir daraus:

$$f(x) = x^{1/n} \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{n}x^{-(n-1/n)} = \frac{1}{n}x^{1/n-1}.$$

Dies können wir auf alle x-Potenzen mit positivem rationalem Exponenten erweitern: Es sei $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ definiert durch $f(x) = x^{m/n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$. Die Ableitung von f erhalten wir aus der Kettenregel zu

$$\frac{d}{dx}\left(x^{m/n}\right) = \frac{d}{dx}\left(\left(x^{1/n}\right)^m\right) = m \cdot \left(x^{1/n}\right)^{m-1} \cdot \frac{1}{n}x^{1/n-1} = \frac{m}{n}x^{(m/n-1)}$$

Haben wir einen negativen Exponenten, so erhalten wir die Ableitung von $x^{-r} = \frac{1}{x^r}$ mit Hilfe der Quotientenregel. Insgesamt erhalten wir:

Ist $r \in \mathbb{Q}$ und $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ definiert durch $f(x) = x^r$, so ist die Ableitung von f gleich $f'(x) = r \cdot x^{r-1}$.

Der Rest dieses Abschnitts ist eine optionale Ergänzung und wird in der Lehrveranstaltung möglicherweise nicht behandelt.

Die Bestimmung von Grenzwerten der Form $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ kann schwierig werden, wenn Zähler und Nenner beim Grenzübergang $x \to x_0$ beide gegen 0 oder beide gegen ∞ gehen. Wir sprechen in diesen Fällen von „unbestimmten Ausdrücken“ der Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$. Falls $f'(x_0)$ und $g'(x_0)$ existieren und $g'(x_0) \neq 0$ ist, können wir diese Grenzwerte leicht bestimmen. Nehmen wir beispielsweise $f(x_0) = g(x_0) = 0$ an, so gilt

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}} \to \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \quad \text{für} \quad x \to x_0.$$

Der allgemeine Fall ist in folgendem Satz beschrieben.

Satz 4.10 (Regeln von l´Hospital)
f und g seien differenzierbar in x_0 und $g'(x) \neq 0$. Weiter gelte

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \quad \textit{oder} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty.$$

Falls dann der Grenzwert $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ *existiert, so ist auch* $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Bemerkung: Diesen Satz können wir auch auf andere unbestimmte Ausdrücke anwenden:

1. Ausdrücke der Form $0 \cdot \infty$ oder $0 \cdot (-\infty)$. Hier formen wir das Produkt $f \cdot g$ in einen Quotienten $\frac{f}{1/g}$ oder $\frac{g}{1/f}$ um und versuchen, hierauf die Regeln von l´Hospital anzuwenden.
2. Ausdrücke der Form $\infty - \infty$. Hier verwenden wir $f - g = f\left(1 - \frac{g}{f}\right) = g\left(\frac{f}{g} - 1\right)$. Falls dann $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ ist, erhalten wir einen Ausdruck der Form $\pm 0 \cdot \infty$.
3. Bei unbestimmten Ausdrücken der Form 1^∞, 0^0 oder ∞^0 verwenden wir die Umformung $f^g = \mathrm{e}^{g \ln f}$. Dies führt wieder auf den Fall $\pm 0 \cdot \infty$. Potenzen der Form f^g werden wir im nächsten Abschnitt genau definieren.
4. Für Grenzwerte der Form $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ gilt dieser Satz genauso.

Bemerkung: Für den ganzzahligen Exponenten $n = 0$ haben wir die Potenz $x^0 = 1$ festgelegt. Dies ist bei stetigen Exponenten nicht möglich: Wir können eine beliebige positive Zahl $a > 0$ wählen. Dann gibt es Funktionen f und g mit $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$ und $\lim\limits_{x \to 0} \big(f(x)\big)^{g(x)} = a$.

4.3 Eigenschaften elementarer Funktionen

Im letzten Abschnitt haben wir Eigenschaften differenzierbarer Funktionen untersucht und Ableitungsregeln überlegt. Allerdings konnten wir diese bisher nur auf wenige Funktionen anwenden, nämlich Polynome, rationale Funktionen und Wurzelfunktionen. In diesem Abschnitt untersuchen wir Funktionen, die mit Hilfe einer Potenzreihe definiert sind. Im Abschnitt 2.5 hatten wir die Exponentialfunktion und die trigonometrischen Funktionen definiert. In diesem Abschnitt werden wir diese Funktionen weiter untersuchen und einige weitere elementare Funktionen definieren.

Als erstes stellen wir fest, dass wir die Ableitung einer Potenzreihe genauso einfach bestimmen können wie die Ableitung von Polynomen. Wir erhalten die Ableitung einer Potenzreihe dadurch, dass wir jeden Summanden separat ableiten:

Satz 4.11 (Ableitung einer Potenzreihe)

Die Potenzreihe $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ ist in ihrem Konvergenzintervall $|x - x_0| < r$ differenzierbar und es gilt $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$.

Bemerkung: Über die Konvergenz der gliedweise differenzierten Reihe an den Rändern des Konvergenzintervalls können wir keine allgemeine Aussage treffen. Auch wenn die

Potenzreihe selbst an einem oder beiden Randpunkten konvergiert, kann die abgeleitete Reihe dort divergieren.

Satz 4.12 (Ableitung der e-Funktion)

1. $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$
2. *Die e-Funktion ist auf ganz* $\mathbb{R}$ *streng monoton wachsend.*

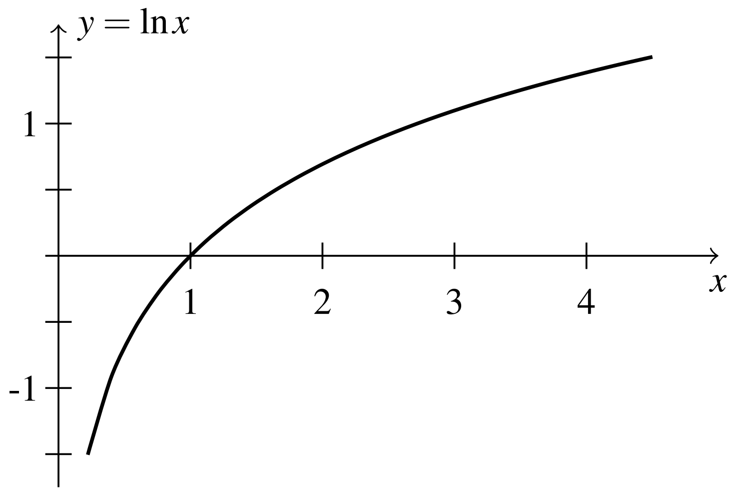
Beweis: Wir dürfen die Potenzreihe der e-Funktion gliedweise differenzieren und erhalten

$$(\mathrm{e}^x)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kx^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x .$$

Die Monotonie folgt sofort aus der Tatsache, dass $\mathrm{e}^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. ■

Da die e-Funktion streng monoton wachsend ist und deren Ableitung überall von Null verschieden ist, besitzt sie nach Satz 4.9 eine auf ganz $\mathbb{R}^+$ differenzierbare Umkehrfunktion:

Definition 4.13 (Natürlicher Logarithmus)
Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln(x)$ *heißt* natürlicher Logarithmus.



Im Satz 2.21 hatten wir die wichtigsten Eigenschaften der Exponentialfunktion zusammengestellt. Da der Logarithmus die Umkehrfunktion der e-Funktion ist können wir aus den Eigenschaften der e-Funktion sofort die Eigenschaften des ln herleiten.

Satz 4.14 (Eigenschaften des Logarithmus)

1. $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$, $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
2. $\ln(1) = 0$, $\ln(\mathrm{e}) = 1$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$
4. $\big(\ln(x)\big)' = \frac{1}{x}$

Beweis: Der ln ist durch folgenden Zusammenhang definiert: Es ist $y=\ln(x) \Longleftrightarrow x=\mathrm{e}^y$.

1. Gilt $y_1=\ln(x_1)$ und $y_2=\ln(x_2)$, so folgt $\ln(x_1)+\ln(x_2)=\ln\left(\mathrm{e}^{y_1}\right)+\ln\left(\mathrm{e}^{y_2}\right)=y_1+y_2$ und $\ln(x_1x_2)=\ln\left(\mathrm{e}^{y_1}\,\mathrm{e}^{y_2}\right)=\ln\left(\mathrm{e}^{y_1+y_2}\right)=y_1+y_2$. Damit ist die wichtige Funktionalgleichung des ln bewiesen.

   Weiter gilt $\ln\left(\frac{1}{x}\right)=\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}^y}\right)=\ln(\mathrm{e}^{-y})=-y=-\ln(x)$.
2. Dies folgt sofort aus $\mathrm{e}^0=1$ und $\mathrm{e}^1=\mathrm{e}$.
3. Die Grenzwerte ergeben sich aus den Grenzwerten der e-Funktion:
   $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0,\ \lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^x=\infty,\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{\mathrm{e}^x}=0\ \forall n\in\mathbb{N}$
4. Aus der Definitionsgleichung $x=\mathrm{e}^{(\ln x)}$ folgt durch Differentiation
   $$1=\frac{d}{dx}\left(\mathrm{e}^{(\ln x)}\right)=\mathrm{e}^{(\ln x)}\cdot\left(\ln x\right)'=x\cdot\left(\ln x\right)'.$$
   Daraus erhalten wir sofort die behauptete Ableitung der ln-Funktion.

■

Bemerkung: Wegen der Funktionalgleichung wird der natürliche Logarithmus (oder ein Logarithmus zu einer anderen Basis) zur Beschreibung von physikalischen und technischen Größen verwendet, deren Wertebereich viele Größenordnungen (Zehnerpotenzen) umfasst. Beispiele hierfür sind der Schalldruckpegel (Hilfseinheit dB), pH-Wert oder die Helligkeit von Sternen. Weiter können wir mit dem Logarithmus die Anzahl der Ziffern von Zahlen abschätzen oder die Informationsmenge einer Nachricht messen.

Die Funktionalgleichung ist auch die Grundlage für die Konstuktion von Rechenschiebern. Anstelle der zwei Zahlen x und y betrachten wir die Logarithmen $\ln x$ und $\ln y$, die auf den Skalen des Rechenschiebers aufgetragen sind. Zur Berechnung des Produktes addiert der Rechenschieber die Logarithmen $\ln x+\ln y$ und bestimmt damit den Logarithmus dieses Produktes. An der Skala können wir dann den Wert dieses Produktes sofort ablesen.

Beispiel: Wir betrachten die Funktion $f(x)=\ln(1+x)$. Nach der Summenformel für die geometrische Reihe hat die Ableitung dieser Funktion für $|x|<1$ die Potenzreihendarstellung
$$f'(x)=\frac{d}{dx}\big(\ln(1+x)\big)=\frac{1}{1+x}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kx^k.$$
Betrachten wir die in $(-1,\,1)$ konvergente Potenzreihe $g(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}x^k$, so hat diese die Ableitung $g'(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}x^{k-1}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^kx^k$. Für die Funktion $h(x)=f(x)-g(x)$ erhalten wir damit $h'(x)=0$. Wie wir auf Seite 66 gesehen haben, folgt aus dem Mittelwertsatz, dass die Funktion $h(x)$ im Intervall $(-1,\,1)$ konstant ist. Um diese Konstante zu berechnen, müssen wir den Funktionswert von $h(x)$ an irgendeiner Stelle x ausrechnen. Wir können den Wert einer Potenzreihe an deren Entwicklungspunkt x_0 einfach bestimmen. Setzen wir also $x=0$ ein, so erhalten wir $g(x)=0$. Weiter ist $f(0)=\ln(1)=0$.

Daher ist die Funktion $h(x) = 0$ und wir erhalten:

$$\text{Für alle } x \in (-1,\, 1] \text{ gilt } \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k.$$

An der Stelle $x = 1$ erhalten wir die alternierende harmonische Reihe, deren Konvergenz wir schon nachgewiesen haben. Setzen wir $x = 1$ in diese Entwicklung ein, so erhalten wir mit $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2)$ den Wert der alternierenden harmonischen Reihe.

Mit Hilfe des Logarithmus können wir nun die allgemeine Exponentialfunktion und Potenzen definieren:

Definition 4.15 (Exponentialfunktion zur Basis $a > 0$)
Für ein beliebiges $a > 0$ definieren wir die Expoentialfunktion zur Basis a als:

$$a^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \; x \mapsto a^x := \exp(x \cdot \ln a) = \mathrm{e}^{x \cdot \ln a}.$$

Die Eigenschaften dieser Exponentialfunktion folgen sofort aus den Eigenschaften der e-Funktion

Satz 4.16
Es sei $a > 0$. Die Exponentialfunktion a^x hat folgende Eigenschaften:

1. $a^0 = 1,\, a^1 = a$
2. $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ *und* $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$.
3. $\left(a^x\right)' = \ln a \cdot a^x$.
4. a^x *ist für $a > 1$ streng monoton wachsend und für $0 < a < 1$ streng monoton fallend.*

Beweis: nachrechnen. ∎

Aufgrund der strengen Monotonie der allgemeinen Exponentialfunktion besitzt diese eine Umkehrfunktion.

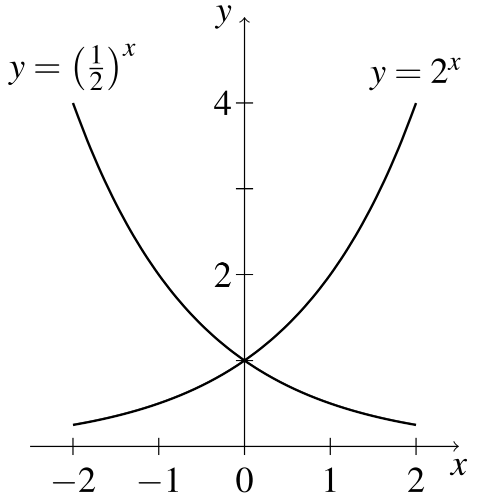
Satz 4.17 (Logarithmus zur Basis a_0, $a \neq 1$)
Für $a > 0, a \neq 1$ heißt die Umkehrfunktion von a^x der Logarithmus zur Basis a, $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \log_a(x)$. Der Logarithmus zur Basis a hat folgende Eigenschaften:

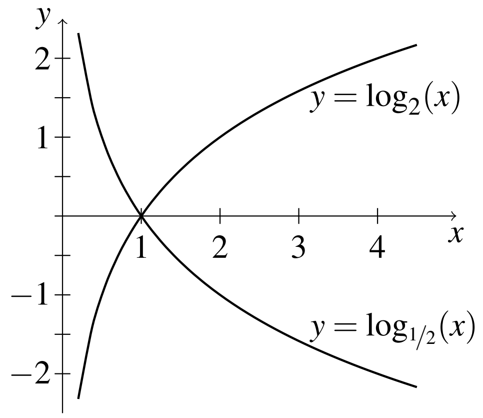
1. $\log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$
2. $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
3. $\left(\log_a(x)\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

Beweis: Es ist $y = \log_a(x) \iff x = a^y = \mathrm{e}^{y \cdot \ln a}$. Wenden wir auf beiden Seiten dieser Gleichung den ln an, so erhalten wir $\ln x = \ln\left(\mathrm{e}^{y \cdot \ln a}\right) = y \ln a$. Der Rest folgt sofort aus den Eigenschaften des natürlichen Logarithmus. ∎

Bemerkung: In den Anwendungen spielen vor allem der Logarithmus zur Basis 2 und der Logarithmus zur Basis 10 eine große Rolle.

In den folgenden Bildern sind zwei allgemeine Potenzfunktionen und die allgemeine Logarithmusfunktionen dargestellt.





Definition 4.18 (Allgemeine Potenz)
Für ein beliebiges $a \in \mathbb{R}$ definieren wir die allgemeine Potenz durch

$$(\,\cdot\,)^a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto x^a := \mathrm{e}^{a \cdot \ln x}.$$

Satz 4.19
Die Ableitung der allgemeinen Potenz ist $\left(x^a\right)' = ax^{a-1}$.

Beweis: $\left(x^a\right)' = \left(\mathrm{e}^{a \cdot \ln x}\right)' = \frac{a}{x}\,\mathrm{e}^{a \cdot \ln x} = \frac{a}{x} x^a = ax^{a-1}$. ∎

Bemerkung: Aus der Definition der allgemeinen Potenz erhalten wir folgende weitere Eigenschaft der ln-Funktion: Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $\ln\left(x^a\right) = a \cdot \ln x$.

Nun wollen wir die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen Cosinus, Sinus und Tangens bestimmen:

Satz 4.20 (Ableitungen der trigonometrischen Funktionen)
Es gilt

1. $\cos'(x) = -\sin(x)$ *und* $\sin'(x) = \cos(x)$.
2. $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.
3. $\tan'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$.

Beweisskizze:

1. Die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen können wir auf zwei Arten berechnen: Durch Ableiten der Potenzreihendarstellung und durch Ableiten der Eulerschen Formel.

(a) Durch Ableiten der Potenzreihenentwicklungen erhalten wir

$$\cos'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)(-1)^n}{(2n)!} x^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} x^{2n-1} = -\sin(x)$$

$$\sin'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = \cos(x)$$

(b) Ableiten der Eulerschen Formel ergibt

$$\begin{aligned}\cos'(x) + i\sin'(x) = \big(\cos(x) + i\sin(x)\big)' = \big(\mathrm{e}^{ix}\big)' = i\,\mathrm{e}^{ix} = \\ = i\big(\cos(x) + i\sin(x)\big) = -\sin(x) + i\cos(x).\end{aligned}$$

Durch Vergleich von Real- und Imaginärteil erhalten wir die Behauptung.

2. Die Ableitung der Funktion $f(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x)$ ist

$$f'(x) = 2\sin(x)\cos(x) + 2\cos(x)(-\sin(x)) \equiv 0.$$

Daher ist die Funktion f konstant. Aus dem Wert $f(0) = 1$ erhalten wir $f(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

3. Mit der Quotientenregel erhalten wir

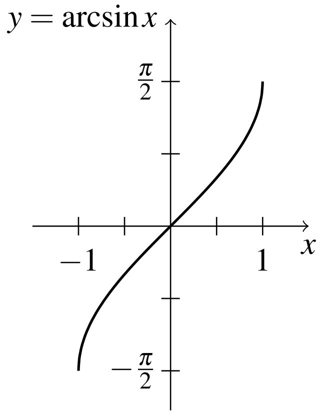
$$\begin{aligned}\tan'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = \\ = \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).\end{aligned}$$

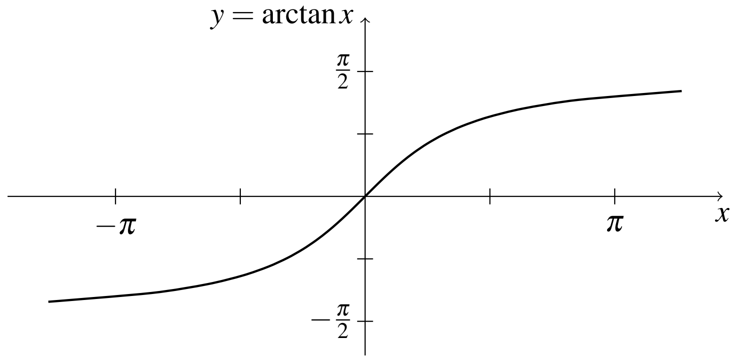
Mit diesem Satz können wir die Umkehrfunktionen zu den trigonometrischen Funktionen festlegen. Da für $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ die Ungleichung $\cos x > 0$ gilt, hat die Sinusfunktion im Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ eine Umkehrfunktion. Die Ableitung der Tangensfunktion ist ebenfalls überall positiv. Damit hat der Tangens zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Definitionslücken ebenfalls eine Umkehrfunktion.

Definition 4.21

1. *Die Umkehrfunktion der Funktion* $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ *heißt der* Arcussinus $\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
2. *Die Umkehrfunktion der Funktion* $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ *heißt der* Arcustangens $\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

In den folgenden Bildern sind die Graphen vom Arcussinus und Arcustangens dargestellt.





Satz 4.22

1. *Es gilt* $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
2. $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$
3. *Es ist* $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

Beweisskizze: Die Ableitungen erhalten wir mit der Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion. wegen $\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ist $\cos\big(\arcsin(x)\big) > 0$. Damit ist

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos\big(\arcsin(x)\big)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\big(\arcsin(x)\big)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

und

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'\big(\arctan(x)\big)} = \frac{1}{1+\tan^2\big(\arctan(x)\big)} = \frac{1}{1+x^2}$$

Beispiel: Aus der Ableitung der Arcustangensfunktion können wir eine Potenzreihenentwicklung für den Arcustangens herleiten. Aus der Summenformel für die geometrische Reihe erhalten wir für $|x| < 1$

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$$

Nun betrachten wir die Potenzreihe $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$. Diese Potenzreihe ist für alle $x \in (-1, 1)$ konvergent und hat dort die Ableitung $f'(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} = \arctan'(x)$. Die Ableitung der Diffenz dieser Funktionen $f(x) - \arctan(x)$ ist überall Null. Aus dem Mittelwertsatz folgt damit, dass die Funktion $f(x) - \arctan(x)$ konstant sein muss. Um diese Konstante zu bestimmen, setzen wir $x = 0$ ein und erhalten $f(0) - \arctan(0) = 0$. Damit folgt:

$$\text{Für } x \in (-1, 1) \text{ gilt } \arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}.$$

Mit Hilfe der Eulerschen Formel hatten wir im Abschnitt 2.6 die Formeln

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) \quad \text{und} \quad \sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$

hergeleitet. Wenn wir auf den rechten Seiten dieser beiden Formeln die imaginäre Einheit jeweils weglassen, ergeben sich neue Funktionen, die sogenannten „Hyperbelfunktionen.“

Definition 4.23
Die folgenden Funktionen sind die sogenannten Hyperbelfunktionen.

1. *Die Funktion* $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$ *heißt* Cosinus Hyperbolikus *oder* Hyperbelcosinus.
2. *Die Funktion* $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sinh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$ *heißt* Sinus Hyperbolikus *oder* Hyperbelsinus.

Bemerkungen:

1. Die Ableitungen der Hyperbelfunktionen sind: $\cosh'(x) = \sinh(x)$ und $\sinh'(x) = \cosh(x)$
2. Es gilt $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.
3. Aus der Potenzreihendarstellung der e-Funktion erhalten wir sofort die Potenzreihendarstellungen der Hyperbelfunktionen

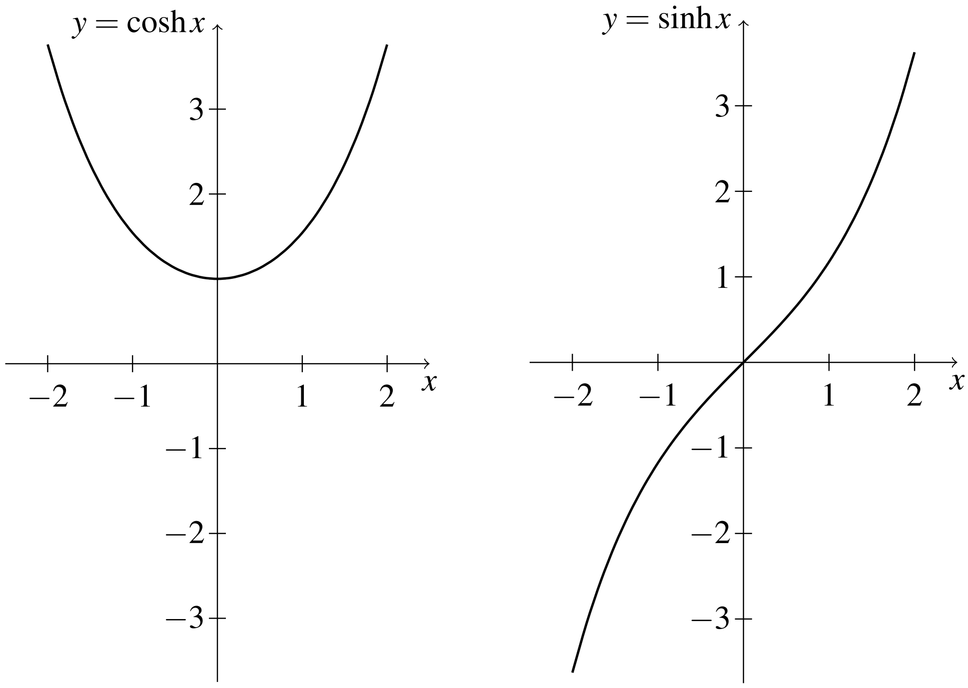
$$\cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \text{und} \quad \sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

4. Hängt eine Kette oder ein Seil unter der alleinigen Wirkung der Schwerkraft zwischen zwei Punkten, so ist der sich bildende Höhenverlauf des Seils gerade ein Ausschnitt des Funktionsgraphen der cosh-Funktion (z.B. Überlandleitungen).

In der folgenden Tabelle fassen wir alle behandelten elementaren Funktionen zusammen und geben deren Ableitungen an. Im Anschluss daran folgen Bilder mit den Funktionsgraphen der Hyperbelfunktionen.

Tabelle mit Ableitungen von elementaren Funktionen

f	f'	f	f'	f	f'
x^r	$rx^{r-1},\ r \in \mathbb{R}$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}},\ n \in \mathbb{N}$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
e^x	e^x	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\cosh x$	$\sinh x$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	a^x	$\ln a \cdot a^x,\ a > 0$	$\sinh x$	$\cosh x$



4.4 Höhere Ableitungen und Taylor-Entwicklung

Bei der Definition der Differenzierbarkeit mittels der Tangente (Satz 4.2) stand die lineare Approximation des Funktionsgraphen im Vordergrund. Hier wollen wir versuchen, die Funktion lokal durch Polynome höheren Grades zu approximieren. Dabei erhalten wir unter anderem auch Informationen über das Krümmungsverhalten des Funktionsgraphen.

Hierzu benötigen wir neben der bisher betrachteten Ableitung die höheren Ableitungen einer Funktion, die wir rekursiv definieren:

Definition 4.24
Die Funktion f heißt n-mal differenzierbar, falls $f', f'' = \big(f'\big)', \ldots, f^{(n)} = \big(f^{(n-1)}\big)'$ existieren.

Bemerkung: Die Funktion $f^{(n)}$ heißt die *n-te Ableitung* von f. Für diese n-te Ableitung verwenden wir auch die Schreibweise $f^{(n)} = \dfrac{d^n f}{dx^n}$.

Für die höheren Ableitungen gibt es keine speziellen Ableitungsregeln, da hier die Funktion f und deren Ableitungen ganz „normal“ abgeleitet werden müssen. Wenn wir die Produktregel öfter hintereinander anwenden, können wir einige der auftretenden Summanden zusammenfassen. Dadurch erhalten wir:

Satz 4.25 (Leibniz-Produktregel)
Die Funktionen f und g seien n-mal differenzierbar. Dann ist das Produkt $f \cdot g$ auch n-mal differenzierbar und es gilt $(f \cdot g)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$

Beweisskizze: Der Beweis erfolgt mittels vollständiger Induktion. Wir wollen hier nur den Induktionsschritt betrachten. Dabei verwenden wir die Eigenschaft der Binomialkoeffizienten aus Satz 1.6 und die Gleichung $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0}$ sowie $\binom{n}{n} = 1 = \binom{n+1}{n+1}$.

$$
\begin{aligned}
(f \cdot g)^{n+1} = ((f \cdot g)^n)' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (f^{(k)} g^{(n-k)})' = \\
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} = \\
\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n-k+1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} = \\
\binom{n+1}{0} f g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \binom{n+1}{n+1} f^{(n+1)} g = \\
\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}
\end{aligned}
$$

Bemerkungen:

1. Diese Formel benötigen wir vor allem für $n = 2$ oder für $n = 3$. Diese Spezialfälle lauten:
$$(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''$$
und
$$(fg)''' = f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''$$

2. Ist die Potenzreihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ konvergent in $|x - x_0| < r$, so können wir die Ableitung durch gliedweise Differentiation bestimmen. Die abgeleitete Potenzreihe $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k \cdot (x - x_0)^{k-1}$ ist ebenfalls in $|x - x_0| < r$ konvergent. Wir können die Potenzreihendarstellung von $f(x)$ im Konvergenzintervall $|x - x_0| < r$ sogar n mal gliedweise differenzieren und erhalten die n-te Ableitung zu:
$$
\begin{aligned}
f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1) \cdot \ldots \cdot (k-n+1) \cdot a_k \cdot (x - x_0)^{k-n} = \\
\sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} \cdot a_k \cdot (x - x_0)^{k-n}.
\end{aligned}
$$
Setzten wir in diese Darstellung den Entwicklungspunkt x_0 ein, so erhalten wir $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. Die Koeffizienten einer Potenzreihe können wir also mit Hilfe der Ableitungen der durch die Potenzreihe dargestellten Funktion am Entwicklungspunkt ausdrücken.

Nun wollen wir uns der Frage zuwenden, wie wir den Graphen einer Funktion f durch Polynome höheren Grades appoximieren können. Wir nehmen zunächst an, dass die Funktion f eine Potenzreihendarstellung $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ besitzt, wobei x_0 die Stelle ist, in deren Umgebung wir die Funktion approximieren wollen. Nach der Definition einer konvergenten Reihe als Grenzwert der Folge ihrer Partialsummen (siehe Abschnitt 2.3) ist es naheliegend, die Partialsummen der Potenzreihe als approximierende Polynome zu verwenden. Dies wollen wir mit der oben hergeleiteten Formel für die Koeffizienten tun:

***n* = 1:** Für $n = 1$ erhalten wir

$$S_1(x) = a_0 + a_1(x-x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x-x_0),$$

also die Tangente an den Graphen von f an der Stelle x_0.

***n* = 2:** Für $n = 2$ ergibt sich

$$S_2(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 = \\ f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0) \cdot (x-x_0)^2.$$

***n* = 3:** Die Partialsumme S_3 ist

$$S_3(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 = \\ f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0) \cdot (x-x_0)^2 + \frac{1}{6} f'''(x_0) \cdot (x-x_0)^3.$$

***n* bel.:** Für ein beliebiges n erhalten wir die Partialsumme

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Damit können wir eine Funktion f mit einer Potenzreihenentwicklung mit Polynomen von beliebigem Grad approximieren. Nun nehmen wir an, dass eine Funktion f gegeben ist, von der wir nicht wissen, ob sie eine Potenzreihenentwicklung hat oder nicht. Wir nehmen an, dass die Funktion f mindestens n-mal differenzierbar ist.

Aufgrund der obigen Überlegung ist es naheliegend, dass wir zur Approximation von f die selben Polynomen verwenden, die wir für Potenzreihen erhalten haben. Diese Polynome heißen die Taylorpolynome der Funktion f

Definition 4.26
Ist die Funktion f n-mal differenzierbar, so heißt $T_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ das n-te Taylorpolynom *von f um x_0.*

Der folgende Satz besagt, dass das Taylorpolynome unter alle Polynomen vom Grad n die Funktion f am besten approximiert. Der folgende Satz von Taylor ist hier nicht in der allgemeinsten Form angegeben.

Wir setzen voraus, dass die Funktion f mehr als die nötigen Miminalvoraussetzungen erfüllt. In diesem Fall können wir die Güte der Approximation durch einen Ausdruck für das Restglied abschätzen, d.h. die Abweichung des approximierenden Polynoms von der Funktion.

Satz 4.27 (Taylor)
Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbar und $x_0 \in (a,b)$. Dann existiert für alle $x \in (a,b)$ ein ξ zwischen x und x_0 mit $f(x) = T_n(x) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{\text{Lagrangesches Restglied}}$

Bemerkung: Für $n = 1$ ist dies die lineare Approximation von f durch die Tangente $T_1(f,x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$. Der Fehler, der durch Approximation der Funktion durch die Tangente entsteht, ist $f(x) - T_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2$ mit einem ξ zwischen x und x_0. Durch Abschätzen der zweiten Ableitung können wir Schranken für den Fehler angeben: Ist $\left|f''(\xi)\right| \leq M$ für alle ξ zwischen x und x_0, so ist $\left|f(x) - T_1(x)\right| \leq \frac{M}{2}(x-x_0)^2$.

Für $n = 2$ erhalten wir die quadratische Approximation von f durch

$$T_2(f,x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2.$$

Der Fehler der Approximation ist $f(x) - T_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{6}(x-x_0)^3$ mit einem ξ zwischen x und x_0.

Beispiel: Gesucht ist eine quadratische Näherung von $\sqrt{26}$ mit Fehlerabschätzung. Hier ist es naheliegend, dass wir die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ und $x_0 = 25$ wählen. Nach dem Satz von Taylor ist

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)\cdot(x-x_0)^2 + \frac{1}{6}f'''(\xi)\cdot(x-x_0)^3$$

mit einem ξ zwischen $x_0 = 25$ und $x = 26$. Zur einfacheren Berechnung der Ableitungen schreiben wir $f(x) = x^{1/2}$ und erhalten:

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ f''(x) = \frac{-1}{4}x^{-3/2} = \frac{-1}{4\left(\sqrt{x}\right)^3} \quad \text{und} \quad f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-5/2}\frac{3}{8\left(\sqrt{x}\right)^5}$$

Damit erhalten wir $f'(x_0) = f'(25) = \frac{1}{10}$ und $F''(x_0) = f''(25) = \frac{-1}{500}$. Mit $x - x_0 = 1$ ergibt sich die quadratische Näherung zu

$$\sqrt{26} \approx 5 + \frac{1}{10} + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-1}{500}\right) = 5 + \frac{1}{10} - \frac{1}{1000} = 5.099$$

Für die Fehlerabschätzung müssen wir den Ausdruck $\frac{1}{6}f'''(\xi)\cdot(x-x_0)$ für $\xi \in [25,26]$ geeignet abschätzen. Es ist

$$\frac{1}{6}f'''(\xi)\cdot(x-x_0) = \frac{1}{16\left(\sqrt{\xi}\right)^5} \leq \frac{1}{16\left(\sqrt{25}\right)^5} = \frac{1}{50000} = 0.00002.$$

Für die Abschätzung nach unten können wir einfach $0 \le \frac{1}{6} f'''(\xi) \cdot (x - x_0)$ ansetzen. Damit erhalten wir die Abschätzung $5.099 \le \sqrt{26} \le 5.09902$. Wollen wir die Abschätzung nach unten etwas genauer vornehmen, so können wir

$$\frac{1}{6} f'''(\xi) \cdot (x - x_0) = \frac{1}{16(\sqrt{\xi})^5} \ge \frac{1}{16(\sqrt{36})^5} = \frac{1}{124416}.$$

Dies ergibt die Schranken

$$\frac{79299773}{15552000} \le \sqrt{26} \le \frac{254951}{50000} \quad \text{bzw.} \quad 5.09900803 \le \sqrt{26} \le 5.09902.$$

Hierbei haben wir die untere Schranke als abgerundete Dezimalzahl mit 8 Stellen angegeben. Der auf sieben Stellen genaue Wert ist $\sqrt{26} = 5.0990195\ldots$.

Wir haben gesehen, wir wir die Funktionen mit Polynomen vom Grad n approximieren können. Voraussetzung hierfür ist nur, dass die Funktion genügend oft differenzierbar ist. Bei einer Funktion f die beliebig oft differenzierbar ist, können wir den Grad dieser Polynome beliebig vergößern und erhalten damit

Definition 4.28 (Taylorreihe)

Ist f beliebig oft differenzierbar, so heißt die Potenzreihe $T(f,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ *die* Taylorreihe *von f.*

Bemerkung:

1. Es sind keine allgemeinen Aussagen über die Konvergenz der Taylorreihe möglich. Es gibt beliebig oft differenzierbare Funktionen, deren Taylorreihe nur an der Stelle $x = x_0$ konvergieren.
2. Im Falle der Konvergenz der Taylorreihe ist nicht notwendigerweise $T(f,x) = f(x)$. Es gibt eine Funktion, derer Taylorreihe die Nullfunktion ist, obwohl die Funktion selbst nur eine Nullstelle hat.
3. Funktionen, die durch ihre Taylorreihe dargestellt werden (d.h. deren Taylorreihe konvergiert und für die $T(f,x) = f(x)$ gilt) heißen analytisch. Viele der Funktionen, mit denen wir „normalerweise“ zu tun haben, sind analytisch.

Beispiele:

1. Auf Seite 70 haben wir die Darstellung $\ln(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k$, $|x-1| < 1$ hergeleitet.
2. $\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$, $|x| < 1$ ist die Entwicklung des arctan (siehe S. 74).
3. Den Ausdruck $(1+x)^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ haben wir die Binomische Formel kennengelernt. Dies wollen wir jetzt auf beliebige reelle Exponenten $\alpha \in \mathbb{R}$ erweitern. Hierzu definieren wir zunächst für $\alpha \in \mathbb{R}$ die allgemeinen Binomialkoeffizienten als
$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!}.$$

Für $\alpha = n \in \mathbb{N}$ erhalten wir wieder die bekannten Binomialkoeffizienten.

Mit diesen allgemeinen Binamialkoeffizienten erhalten wir für $|x| < 1$:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \ldots \quad \text{(Binomische Reihe).}$$

Für den Nachweis dieser Gleichung stellen wir zunächst, dass

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{\binom{\alpha}{k}}{\binom{\alpha}{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{k+1}{\alpha - k} \right| = 1$$

ist, und daher die Binomische Reihe den Konvergenzradius $r = 1$ hat. Betrachten wir die Ableitungen der Funktionen $f(x) = (1+x)^\alpha$ und $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$, so finden wir

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$$

und

$$(1+x)\cdot g'(x) = (1+x)\cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \binom{\alpha}{k} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \binom{\alpha}{k+1} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} k \binom{\alpha}{k} x^k =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left((k+1)\binom{\alpha}{k+1} + k\binom{\alpha}{k} \right) x^k =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot \ldots \cdot (\alpha-k)}{k!} + \frac{k\alpha(\alpha-1)\cdot \ldots \cdot(\alpha-k+1)}{k!} \right) x^k =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot \ldots \cdot (\alpha-k+1)}{k!} \cdot \big((\alpha-k)+k\big) x^k =$$

$$\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = \alpha g(x).$$

Damit ist die Ableitung des Quotiengen $\frac{g(x)}{(1+x)^\alpha}$ gleich

$$\left(\frac{g(x)}{(1+x)^\alpha} \right)' = \frac{(1+x)^\alpha g'(x) - \alpha(1+x)^{\alpha-1} g(x)}{(1+x)^{2\alpha}} =$$

$$\frac{(1+x)^\alpha g'(x) - (1+x)^{\alpha-1}(1+x) g'(x)}{(1+x)^{2\alpha}} = \frac{(1+x)^\alpha g'(x) - (1+x)^\alpha g'(x)}{(1+x)^{2\alpha}} = 0.$$

Daher ist dieser Quotient im Intervall $(-1,1)$ konstant. Setzen wir $x = 0$ ein, so erhalten wir $g(0) = 1$ und $(1+x)^\alpha\big|_{x=0} = 1$. Daraus folgt: Für $x \in (-1,1)$ ist $\frac{g(x)}{(1+x)^\alpha} = 1$ und damit haben wir die Entwicklung der Potenzen $(1+x)^\alpha$ mittels der Binomischen Reihe nachgewiesen.

Ist $|\alpha x| \ll 1$, so erhalten wir damit die lineare Approximation $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$. Spezialfälle sind $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$ und $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{1}{2}x$ für $x \approx 0$.

4.5 Anwendungen der Differentialrechnung

Von den vielen Anwendungen der Differentialrechnung seien hier nur einige erwähnt:

1. Die Ableitung als lokale Änderungsrate wird zur Beschreibung vieler technischer und wirtschaftlicher Zusammenhänge benötigt, z.B.
   (a) Die Geschwindigkeit als Änderungsrate des Ortes.
   (b) Die Beschleunigung als Änderungsrate der Geschwindigkeit.
   (c) Fallen bei einer Produktion von x Einheiten eines Produktes Produktionskosten $C(x)$ an, so sind die sogenannten „Grenzkosten" gleich $C'(x) \approx \Delta C = C(x+1) - C(x)$.
   (d) Für das zu versteuernde Einkommen E müssen Steuern in der Höhe $S(E)$ gezahlt werden. Der „Grenzsteuersatz" ist die Ableitung $S'(E)$. Der Grenzsteuersatz gibt an, um wieviel die zu zahlenden Steuern steigen, wenn das zu versteuernde Einkommen von E um eine infinitesimale Größe dE anwächst.
2. Die zeitliche Änderung gekoppelter Größen können wir mit Hilfe impliziter Differentiation berechnen.
3. Bestimmung von Minima und Maxima.

Wir wollen hier die letzte Anwendung genauer untersuchen, also die Bestimmung von lokalen und globalen Extremwerten.

Zunächst wiederholen wir die wichtigsten Eigenschaften von Funktionen, die wir zur Extremwertsuche benötigen.

Satz 4.29
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei stetig und in (a,b) differenzierbar. Dann gilt:

1. *$f'(x) \geq 0$ für $x \in (a,b) \Longrightarrow f$ ist monoton wachsend.*
2. *$f'(x) > 0$ für $x \in (a,b) \Longrightarrow f$ ist streng monoton wachsend.*
3. *$f'(x) \leq 0$ für $x \in (a,b) \Longrightarrow f$ ist monoton fallend.*
4. *$f'(x) < 0$ für $x \in (a,b) \Longrightarrow f$ ist streng monoton fallend.*

Definition 4.30 (Relative Extremwerte)
Es sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ gegeben.

1. *f besitzt in $x_0 \in (a,b)$ ein* relatives (lokales) Maximum, *falls es eine Umgebung $U_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ gibt mit $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in U_\varepsilon(x_0)$.*
2. *f besitzt in $x_0 \in (a,b)$ ein* relatives (lokales) Minimum, *falls es eine Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$ gibt mit $f(x) \geq f(x_0)$ für alle $x \in U_\varepsilon(x_0)$.*

Falls $f(x) < f(x_0)$ für alle $x \in U_\varepsilon(x_0)$, $x \neq x_0$ gilt, so ist dies ein strenges (isoliertes) *Maximum. Falls $f(x) > f(x_0)$ für alle $x \in U_\varepsilon(x_0)$, $x \neq x_0$ gilt, so ist dies ein* strenges (isoliertes) *Minimum. Ein Minimum oder Maximum heißt auch* Extremum.

Eine notwendige Bedingung für das Vorliegen eines relativen Extremums haben wir schon kennengelernt:

Satz 4.31
$f:\ (a,b) \to \mathbb{R}$ habe in $x_0 \in (a,b)$ ein relatives Extremum und sei in x_0 differenzierbar. Dann gilt $f'(x_0) = 0$.

Bemerkung: Ein Punkt x_0 in dem f differenzierbar ist und $f'(x_0) = 0$ gilt, heißt *stationärer Punkt.*

Aus dem Satz von Taylor erhalten wir eine hinreichende Bedingung für lokale Extrema.

Satz 4.32
Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$ und es gebe ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f^{(k)}(x_0) = 0$ für $1 \leq k \leq n-1$ und $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Dann gilt:

1. *Ist n gerade und $f^{(n)}(x_0) < 0$, so hat f in x_0 ein lokales Maximum.*
2. *Ist n gerade und $f^{(n)}(x_0) > 0$, so hat f in x_0 ein lokales Minimum.*
3. *Ist n ungerade, so hat f in x_0 kein lokales Extremum.*

Definition 4.33 (Globale Extrema)
Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in D$ ein globales (absolutes) Maximum, *falls für alle $x \in D$ die Ungleichung $f(x_0) \geq f(x)$ gilt. f hat in x_0 ein* globales (absolutes) Minimum, *falls für alle $x \in D$ die Ungleichung $f(x_0) \leq f(x)$ gilt.*

Bemerkung: Der Satz 4.32 liefert uns nur eine lokale Aussage. Bei der Suche nach globalen Extremwerten ist dieser Satz nicht zu gebrauchen. Wir werden nun ein Verfahren zur Bestimmung globaler Minima und Maxima entwickeln. Bei diesem Verfahren benötigen wir nur die erste Ableitung der Funktion f. Zur Anwendung von Satz 4.32 sind auch höhere Ableitungen zu bestimmen.

Im Satz 3.10 haben wir erfahren, dass eine Funktion f, die auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig ist, ein globales Maximum und ein globales Minimum in $[a, b]$ besitzen muss. Diese globalen Extremwerte sind natürlich gleichzeitig auch lokale Extremwerte. Liegt das Maximum oder das Minimum also im Inneren (a, b) des betrachteten Intervalls an einer Stelle, an der die Funktion differenzierbar ist, so muss nach Satz 4.31 dort eine Nullstelle der Ableitung f' vorliegen. Damit kennen wir alle möglichen Punkte, an denen diese Extrema angenommen werden können:

1. Innere Punkte aus (a, b). Ist ein Punkt $x_0 \in (a, b)$ eine globale Extremalstelle, so muss dort auch ein lokales Extremum vorliegen. Für differenzierbare Funktionen gilt daher: Innere Punkte $x_0 \in (a, b)$ können nur dann globale Extremalstellen sein, wenn $f'(x_0) = 0$. Daneben kommen innere Punkte in Frage, an denen die Funktion f nicht differenzierbar ist.
2. Die Randpunkte $x_0 = a$ und $x_0 = b$.

Zur Bestimmung der globalen Extrema ermitteln wir zunächst alle stationären Punkte und erhalten damit alle möglichen Extremalstellen zu

$$\left\{x_0 \in (a,b) \,:\, f'(x_0) = 0\right\} \cup \left\{a,b\right\} \cup \left\{\tilde{x} \in (a,b) \,:\, f'(\tilde{x}) \text{ existiert nicht}\right\}.$$

Nun berechnen wir die Funktionswerte an allen diesen Stellen. Der größte hierbei auftretende Funktionswert ist das globale Maximum und der kleinste vorkommende Funktionswert ist das globale Minimum. In viele Fällen ist die Funktion im Inneren des Definitionsintervalls differenzierbar und die dritte der oben genannten Mengen ist leer.

Ist f auf einem unbeschränkten Intervall oder auf einem offenen Intervall definiert, so müssen wir die Funktionswerte in den stationären Punkten mit den Grenzwerten von f bei Annäherung an die Randpunkte des Intervalls bzw. an $\pm\infty$ vergleichen.

Beispiel: Wir suchen einen Zylinder mit vorgegebenem Volumen V und minimaler Oberfläche O. Wir können den Zylinder mit der Höhe h der Mantelfläche und dem Radius r der Grundfläche charakterisieren. Das Volumen ist dann $V = r^2\pi h$ und die Oberfläche ist $O = 2(r^2\pi) + (2r\pi h)$. Diese Oberfläche setzt sich aus den zwei Kreisflächen von Deckel und Boden und der Mantelfläche zusammen. Wenn wir diese Mantelfläche ausrollen, so erhalten wir ein Rechteck. Eine Seite dieses Rechtecks ist die Höhe des Zylinders und die andere Seite ist der Umfang von Deckel bzw. Boden.

Da der Zylinder ein vorgegebenes Volumen hat, können wir aus der Gleichung $V = r^2\pi h$ die Höhe mit Hilfe des Radius der Grundfläche ausdrücken und erhalten $h = \frac{V}{r^2\pi}$. Diesen Ausdruck setzen wir in die Gleichung für die Oberfläche ein und erhalten eine Funktion, die nur von r abhängt:

$$O = 2(r^2\pi) + (2r\pi h) \Longrightarrow O(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r},\, r > 0.$$

Wir suchen also das Minimum der Funktion $O(r)$ im Bereich $r > 0$ bzw. im Intervall $r \in (0,\infty)$. Zunächst stellen wir fest, dass $\lim\limits_{r\to 0} O(r) = \infty$ und $\lim\limits_{r\to\infty} O(r) = \infty$ gilt. Damit ist klar, dass das gesuchte Minimum an einem stationären Punkt der Funktion $O(r)$ angenommen wird. Wir erhalten

$$O'(r_0) = 4\pi r_0 - \frac{2V}{r_0^2} = 0 \Longleftrightarrow r_0^3 = \frac{V}{2\pi} \Longleftrightarrow r_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Damit wir uns den resultierenden Zylinder vorstellen können, bestimmen wir die zugehörige Höhe:

$$h_0 = \frac{V}{\pi r_0^2} = \sqrt[3]{\frac{V^3 4\pi^2}{\pi^3 V^2}} = \sqrt[3]{\frac{8V}{2\pi}} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2r_0.$$

Dies bedeutet, dass die Höhe des Zylinders mit dem Durchmesser von Deckel bzw. Boden übereinstimmt, der Zylinder ist also genauso hoch wie breit.

5 Integralrechnung

5.1 Vorüberlegungen

Bevor wir die Ableitung definiert haben, hatten wir im Abschnitt 4.1 die Berechnung von Durchschnitts- und Momentangeschwindigkeit betrachtet. Hier führen wir ein ähnliches Gedankenexperiment durch:

Wir fahren in einem Auto und erfassen zu bestimmten Zeiten die Geschwindigkeit durch Ablesen des Tachometers. Aus diesen Daten wollen wir die zurückgelegte Strecke berechnen. Fahren wir mit einer konstanten Geschwindigkeit, so können wir die Strecke aus der Formel

$$\text{Strecke} = \text{Geschwindigkeit} \times \text{Zeit}$$

ermitteln. Dies ist allerdings bei einer variablen Geschwindigkeit nicht möglich.

Wir nehmen an, dass das Auto immer schneller wird, und dass wir alle zwei Sekunden die Geschwindigkeit des Autos gemessen haben. Dabei haben wir die folgenden Werte der Geschwindigkeit v (in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$) ermittelt:

t	0	2	4	6	8	10
v	10	15	19	22	24	25

Aus diesen Daten können wir die zurückgelegte Strecke nicht exakt bestimmen. Wir können diese Strecke jedoch abschätzen. Da wir wissen, dass wir immer schneller gefahren sind, können wir zunächst eine untere Schranke für die Strecke berechnen: Im Zeitintervall $[0,2]$ sind wir schneller als $10\frac{\text{m}}{\text{s}}$ gefahren und haben daher mindestens 20 m zurückgelegt ($2\text{s} \times 10\frac{\text{m}}{\text{s}}$). Im Zeitintervall $[2,4]$ haben wir mindestens $30\text{m} = 2\text{s} \times 15\frac{\text{m}}{\text{s}}$ zurückgelegt. Führen wir diese Überlegung für alle fünf Zeitintervalle durch, so wissen wir, dass wir in diesen 10 Sekunden mindestens

$$2\text{s} \times 10\tfrac{\text{m}}{\text{s}} + 2\text{s} \times 15\tfrac{\text{m}}{\text{s}} + 2\text{s} \times 19\tfrac{\text{m}}{\text{s}} + 2\text{s} \times 22\tfrac{\text{m}}{\text{s}} + 2\text{s} \times 24\tfrac{\text{m}}{\text{s}} = 180\text{m}$$

zurückgelegt haben.

Mit einer analogen Rechnung erhalten wir eine obere Schranke für die zurückgelegte Strecke. Wir wissen für jedes Zeitintervall der Länge 2s, dass wir langsamer als die Geschwindigkeit am Ende dieses Zeitintervalls gefahren sind. Damit sind wir in diesen 10 Sekunden höchstens

$$2\text{s} \times 15\tfrac{\text{m}}{\text{s}} + 2\text{s} \times 19\tfrac{\text{m}}{\text{s}} + 2\text{s} \times 22\tfrac{\text{m}}{\text{s}} + 2\text{s} \times 24\tfrac{\text{m}}{\text{s}} + 2\text{s} \times 25\tfrac{\text{m}}{\text{s}} = 210\text{m}$$

gefahren. Die zurückgelegte Strecke ist also mindestens 180m und höchstens 210m.

Wenn wir die zurückgelegte Strecke genauer bestimmen wollen, benötigen wir mehr Informationen. Hierzu bestimmen wir die Geschwindigkeit nicht mehr alle zwei Sekunden, sondern nach jeweils einer Sekunde. Wir erhalten die folgenden Werte:

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
v	10	13	15	17	19	20,5	22	23	24	24,5	25

Genauso wie oben bestimmen wir wieder eine untere und eine obere Schranke für die zurückgelegte Strecke. Wir erhalten:

$$\text{untere Schranke} = 1\mathrm{s} \times 10\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 1\mathrm{s} \times 13\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 1\mathrm{s} \times 15\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 1\mathrm{s} \times 17\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + \\ 1\mathrm{s} \times 19\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 1\mathrm{s} \times 20{,}5\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 1\mathrm{s} \times 22\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 1\mathrm{s} \times 23\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 1\mathrm{s} \times 24\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 1\mathrm{s} \times 24{,}5\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 188\mathrm{m}$$

sowie

$$\text{obere Schranke} = 1\mathrm{s} \times 13\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 1\mathrm{s} \times 15\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 1\mathrm{s} \times 17\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 1\mathrm{s} \times 19\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + \\ 1\mathrm{s} \times 20{,}5\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 1\mathrm{s} \times 22\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 1\mathrm{s} \times 23\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 1\mathrm{s} \times 24\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 1\mathrm{s} \times 24{,}5\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 1\mathrm{s} \times 25\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 203\mathrm{m}$$

Die zurückgelegte Strecke ist also mindestens 188m und höchstens 203m lang.

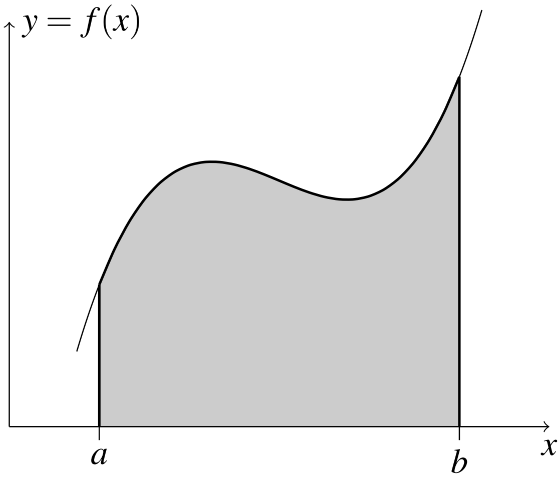
Die Strecken erhalten wir jeweils dadurch, dass wir Produkte von Zeitdauern mit Geschwindigkeiten addieren. Eine noch genauere Berechnung der zurückgelegten Strecke ist möglich, wenn wir die Geschwindigkeiten zu noch mehr Zeitpunkten kennen. Damit erhalten wir Summen von immer mehr Produkten der Form

$$\text{Zeitdauer} \times \text{Geschwindigkeit},$$

wobei die „Zeitdauer“ immer kürzer wird.

Bei dieser Berechnung der zurückgelegten Strecke kehren wir das Vorgehen zur Geschwindigkeitsbestimmung aus Abschnitt 4.1 um. Wenn wir bei dieser Überlegung auch negative Geschwindigkeiten zulassen, haben wir zusätzlich eine Information über die Richtung der Bewegung, wie bei der Betrachtung der Zitrone in Abschnitt 4.1. In diesem Fall erhalten wir nicht die zurückgelegte Strecke, sondern die Position, an der sich das bewegte Objekt nach einer gewissen Zeit befindet.

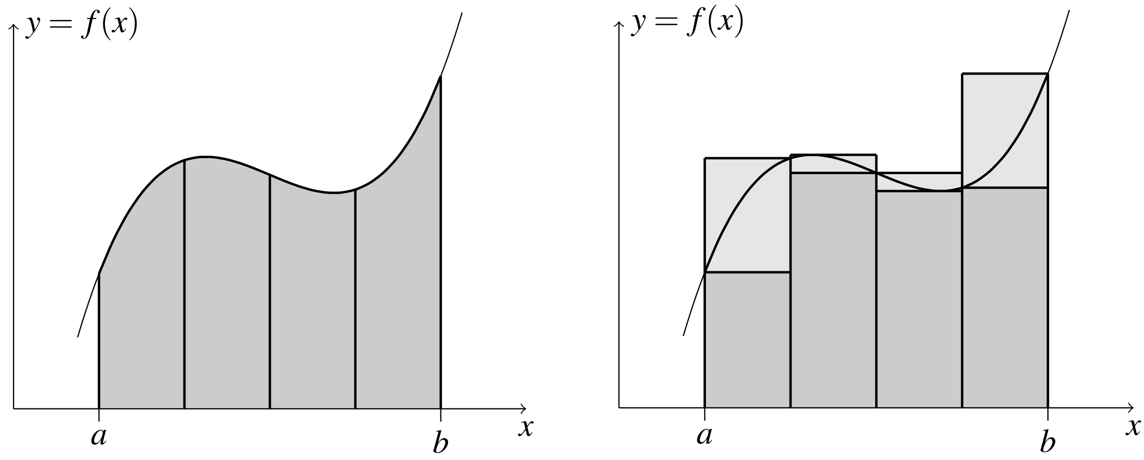
Bei unserem zweiten Gedankenexperiment überlegen wir, wie wir den Inhalt einer krummlinig berandeten Fläche berechnen können. Wir nehmen an, wir haben eine stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ vorliegen und wir wollen die Fläche zwischen der x-Achse und dem Funktionsgraphen über dem Intervall $[a,b]$ berechnen, wie in dem Bild skizziert.



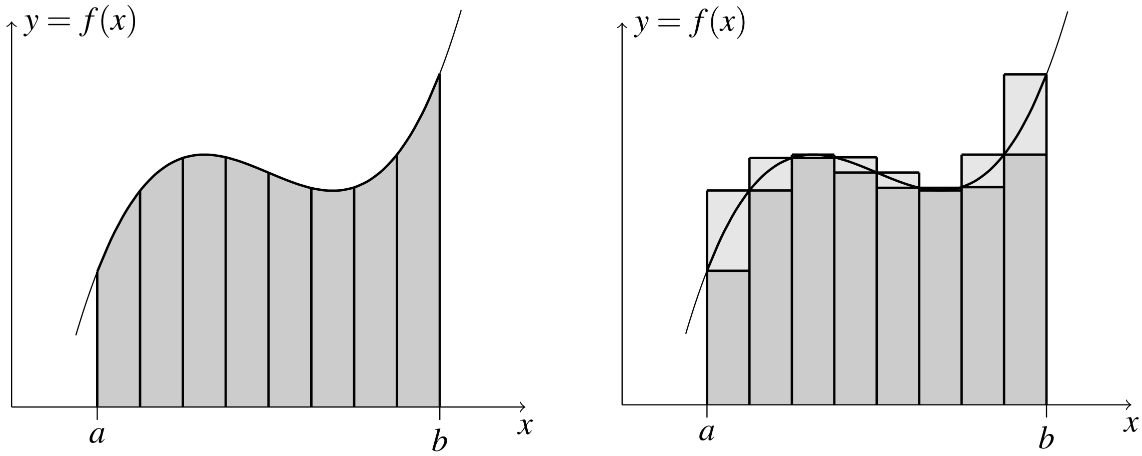
Wir bestimmen ähnlich wie in unserem ersten Beispiel eine obere und eine untere Schranke für die gesuchte Fläche. Hierzu zerschneiden wir die Fläche zunächst in Streifen und schätzen die Fläche der einzelnen Streifen ab. Je dünner die Streifen sind, umso besser wird unsere Abschätzung sein. Um eine untere und obere Schranke für die Flächen dieser Streifen zu erhalten, bestimmen wir für jeden Streifen zwei Rechtecke: ein „einbeschriebenes“ Rechteck, dessen Fläche kleiner als die Fläche des Streifens ist und ein

„umbeschriebenes“ Rechteck, dessen Fläche größer als die Fläche des Streifens ist. Dabei wählen wir für jeden Streifen das größtmögliche einbeschriebene und das kleinstmögliche umbeschriebene Rechteck.

In den folgenden Bilder haben wir die Fläche zunächst in vier Streifen geschnitten und die jeweiligen Rechtecke bestimmt:



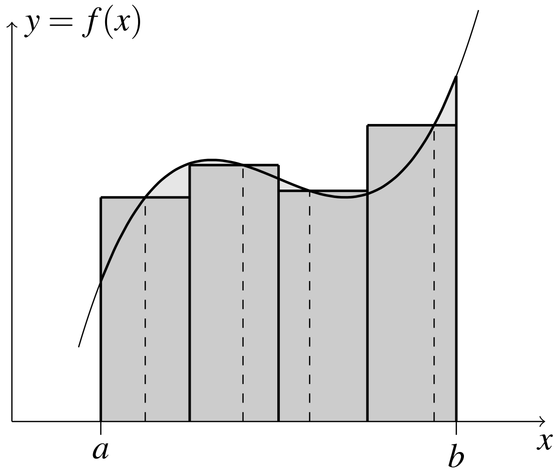
Zur Verbesserung der Abschätzung schneiden wir die Fläche nun in acht Streifen und bestimmen wieder die entsprechenden Rechtecke. Dabei ergeben sich folgende Bilder:



Die Differenz zwischen der oberen und der unteren Schranke für die zu berechnende Fläche ist die Summe der hellgrauen Flächen. Es ist deutlich zu erkennen, dass diese Differenz bei der feineren Unterteilung der Fläche kleiner geworden ist.

Es ist zu erwarten, dass wir immer näher beieinanderliegende obere und untere Schranken für die Fläche erhalten, wenn wir die Fläche in immer mehr immer dünnerer Streifen zerschneiden. Die genaue Fläche erhalten wir wieder durch einen Grenzübergang, bei dem die Anzahl der Streifen unendlich groß wird, während die Dicke der Streifen unendlich klein wird. Wir erhalten jeweils Summen von „unendlich vielen unendlich schmalen“ Teilflächen mit „unendlich kleinem Flächeninhalt“.

Anstelle einer oberen und unteren Schranke für die Fläche können wir durch folgendes Vorgehen eine Abschätzung für die Fläche bestimmen: Wir wählen für die Höhe der Rechtecke, mit deren Fläche wir die Fläche der Streifen abschätzen wollen, einfach einen beliebigen Funktionswert aus diesem Streifen. In nebenstehendem Bild ist dies für die in vier Streifen zerteilte Fläche zu sehen. Die Höhe der Rechtecke ist der Funktionswert an den Stellen, die durch gestrichelte Linien gekennzeichnet sind.



Zum Abschluss dieser Vorüberlegungen wollen wir begründen, warum die Fläche eines Rechtecks das Produkt der beiden Seitenlängen ist. Bezeichnen wir die Fläche eines Rechtecks mit Seitenlängen a und b mit $F(a,b)$, so muss diese Funktion folgende Eigenschaften haben um ein vernünftiges Flächenmaß darzustellen:

1. Legen wir zwei Rechtecke mit Seitenlängen a_1 und b sowie a_2 und b zusammen, so erhalten wir ein Rechteck mit den Seiten $a_1 + a_2$ und b. Die Fläche dieses neuen Rechtecks ist die Summe der Fläche der beiden einzelnen Rechtecke. Es gilt also $F(a_1 + a_2, b) = F(a_1, b) + F(a_2, b)$. Analog muss auch $F(a, b_1 + b_2) = F(a, b_1) + F(a, b_2)$ gelten.

2. Skalieren wir eine Seite des Rechtecks mit dem Faktor α, so erhalten wir ein Rechteck mit den Seiten $\alpha \cdot a$ und b. Die Fläche dieses Rechtecks muss das α-fache der ursprünglichen Fläche sein. Es gilt also $F(\alpha \cdot a, b) = \alpha \cdot F(a,b)$. Analog muss $F(a, \beta \cdot b) = \beta \cdot F(a,b)$ gelten.

3. Fassen wir diese beiden Eigenschaften der Flächenfunktion zusammen, so folgt: $F(a,b)$ muss in beiden Variablen linear sein.

4. Eine weitere Eigenschaft einer vernünftigen Flächenmessung ist folgende: Wenn wir die Länge der Rechtecksseiten nur wenig verändern, darf sich auch die Fläche der Rechtecke nur wenig verändern. Dies bedeutet, dass die Funktion F stetig sein muss.

5. Die einzigen stetigen und linearen Funktion in den Variablen a und b sind $F(a,b) = \mu \cdot a \cdot b$ mit einer Konstanten μ. Den Wert von μ legen wir durch eine Normierung fest: Wir setzten fest, dass die Fläche eines Quadrats mit der Seitenlänge 1 (also $a = 1, b = 1$) den Wert $F(1,1) = 1$ haben soll. Damit folgt $\mu = 1$ und es ist $F(a,b) = a \cdot b$.

Damit erhalten wir für die Näherungswerte unserer Flächen Ausdrücke der Form

$$\sum_{\text{alle Streifen}} \text{Höhe des Rechtecks} \times \text{Breite des Streifens.}$$

5.2 Bestimmtes und unbestimmtes Integral

Das bestimmte Integral ist das Konzept, das die in der Vorüberlegung betrachteten Probleme löst. Das bestimmte Integral ist eine Zahl.

Das unbestimmte Integral ist in gewissem Sinne das „Gegenteil der Ableitung". Das unbestimmte Integral ist eine Menge von Funktionen mit einer gewissen Eigenschaft.

Bezeichnungen: Hier formulieren wir die Ideen des letzten Abschnittes als mathematische Konzepte. Zu jedem der verwendeten Begriffe stellen wir den Zusammenhang mit der anschaulich dargestellten Flächenberechnung in unserer Vorüberlegung her.

1. Wir betrachten eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Die Beschränktheit von f garantiert uns, dass die auf Seite 5.1 gebildeten einbeschriebenen und umbeschriebenen Rechtecke alle existieren und eine endliche Fläche haben.

2. Die Menge $\mathscr{Z}_n := \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\}$ heißt *Zerlegung* oder *Partition* von $[a, b]$. $\Delta x_j := x_j - x_{j-1}$, $1 \le j \le n$ ist die Breite der Teilintervalle und $\left|\mathscr{Z}_n\right| := \max\limits_{1 \le j \le n} \Delta x_j$ heißt *Feinheit der Zerlegung*.
   Bei der Flächenberechnung markieren die Punkte der Zerlegung die Stellen, an denen wir die Fläche in Streifen schneiden. Die Feinheit der Zerlegung ist die Breite des breitesten Streifens und Δx_j ist die Breite des j-ten Streifens.

3. Im Intervall $[x_{j-1}, x_j]$ wählen wir einen beliebigen Zwischenpunkt $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ und bestimmen den Summanden $f(\xi_j) \cdot \Delta x_j$. Dieser Summand ist gleich der Fläche eines unserer Rechtecke, die wir in dem Bild auf Seite 88 betrachtet haben.

4. Aus diesen Summanden bilden wir die „Riemannsche Summe"

$$S\big(f, \mathscr{Z}_n, \underline{\xi}\big) = S_n = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j) \cdot \Delta x_j,$$

   wobei der Vektor $\underline{\xi} = \big(\xi_1, \ldots, \xi_n\big)$ alle gewählten Zwischenpunkte enthält. Bei der Schreibweise „S_n" müssen wir beachten, dass diese Riemannsche Summe nicht nur von n, sondern auch von der gewählten Partition $\mathscr{Z}_n$ und den gewählten Zwischenpunkten $\underline{\xi}$ abhängt.

5. Nun führen wir den Grenzübergang $n \to \infty$ durch: Wir wählen eine Folge von Zerlegungen $\mathscr{Z}_n$ mit der Eigenschaft $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\mathscr{Z}_n\right| = 0$. Anschaulich bedeutet dies, dass wir beim Zerschneiden der Fläche in Streifen darauf achten müssen, dass auch die Breite des breitesten Streifens bei diesem Grenzprozess beliebig klein wird. Die Folgen S_n der Riemannschen Summen können bei diesem Grenzprozess folgendes Verhalten zeigen:

   - Die Riemannschen Folgen konvergieren alle gegen den selben Wert, und zwar unabhängig von der konkret gewählten Folge $\mathscr{Z}_n$ der Zerlegungen und unabhängig von der Wahl der Zwischenpunkte $\underline{\xi}$. Dieses Verhalten erwarten wir bei der in der Vorüberlegung betrachteten Flächeberechnung.

- Der Grenzwert der Riemannschen Summen hängt von der Folge der Zerlegungen oder der Wahl der Zwischenpunkte ab. Dieser Fall ist in der Praxis nicht relevant, mathematisch jedoch sehr interessant.

Definition 5.1
Falls der Grenzwert $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ *existiert und unabhängig von der Folge* $\mathscr{Z}_n$ *der Partitionen und den gewählten Zwischenpunten* $\underline{\xi}$ *ist, so hießt dieser Grenzwert das* bestimmte Integral *von* f *über* $[a,b]$, $S = \int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b f\,dx = \int\limits_a^b f(t)\,dt$.

Bezeichnungen: Die Funktion f heißt der *Integrand,* die Variable (z.B. x oder t) heißt die *Integrationsvariable,* a heißt die *untere Integrationsgrenze* und b die *obere Integrationsgrenze.* Die Integrationsvariable hat die Funktion einer lokalen Variable und darf beliebig genannt werden. Wenn das Integral von f über $[a,b]$ existiert, so heißt die Funktion f *riemann-integrierbar* bzw. *integrierbar* über $[a,b]$. Die Menge aller über $[a,b]$ integrierbarer Funktionen bezeichnen wir mit $\mathscr{R}\big([a,b]\big)$.

Bemerkung: Es ist im Moment nicht klar, welche Voraussetzungen die Funktion f erfüllen muss, damit $f \in \mathscr{R}\big([a,b]\big)$ gilt. Hier geben wir (ohne Herleitung) einen Satz an, in dem zwei wichtige Klassen von integrierbaren Funktionen beschrieben werden.

Satz 5.2

1. *Ist* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *stetig, so ist* f *über* $[a,b]$ *integrierbar.*
2. *Ist* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *monoton, so ist* f *über* $[a,b]$ *integrierbar.*

Bemerkung: An Teil 2 dieses Satzes sehen wir, dass auch unstetige Funktionen integrierbar sein können.

Beispiel: Es sei $0 < a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x$. Wir wollen mit Hilfe der Definition das Integral $\int\limits_a^b x\,dx$ bestimmen. Da die Funktion f stetig ist, existiert dieses Integral. Wir wählen eine *äquidistante Zerlegung* von $[a,b]$ in n Teilintervalle. Dies bedeutet, dass alle Teilintervalle die selbe Breite $\Delta x_j = \frac{b-a}{n}$ haben sollen. Die Zerlegung ist dann $\mathscr{Z}_n = \big\{x_j = a + j\cdot\frac{b-a}{n} : 0 \le j \le n\big\}$. Als Zwischenpunkte ξ_j wählen wir jeweils den rechten Randpunkt des Intervalls $[x_{j-i}, x_j]$, also $\xi_j = x_j = a + j\cdot\frac{b-a}{n}, 1 \le j \le n$. Damit erhalten wir die Riemannsche Summe

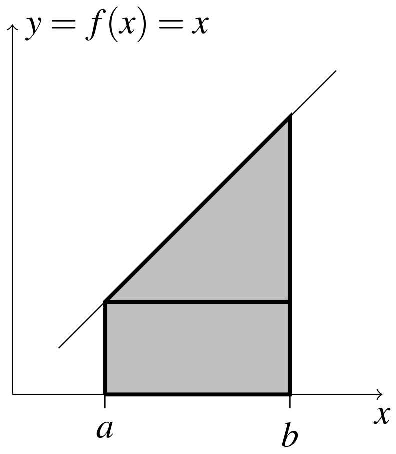
$$S_n = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\cdot\Delta x_j = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(a + j\cdot\frac{b-a}{n}\right)}_{=f(\xi_j)} \cdot \underbrace{\frac{b-a}{n}}_{\Delta x_j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a\cdot(b-a)}{n} + \sum_{j=1}^{n} j\cdot\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 =$$

$$a\cdot(b-a) + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = a\cdot(b-a) + \frac{1}{2}(b-a)^2\cdot\frac{n+1}{n}.$$

Hier können wir den Grenzübergang $n \to \infty$ einfach durchführen und erhalten

$$\int_a^b x\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(a\cdot(b-a)+\frac{1}{2}(b-a)^2\cdot\frac{n+1}{n}\right) = a\cdot(b-a)+\frac{1}{2}(b-a)^2.$$

Wie das folgende Bild zeigt, stimmt das Ergebnis mit dem anschaulich erwarteten Wert überein. Die Fläche setzt sich zusammen aus der Fläche eines Rechtecks mit den Seitenlängen a und $b-a$ sowie einem rechtwinkligen, gleichschenkligem Dreieck dessen Katheten die Länge $b-a$ haben. Wenn wir den obigen Ausdruck vereinfachen, erhalten wir $\int\limits_a^b x\,dx = \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2$.



Bemerkungen:

1. Das Beispiel zeigt, dass wir zur Berechnung der Integrale bessere und einfachere Methoden benötigen. Diese werden wir demnächst bereitstellen.
2. Fermat hat im Jahr 1638 durch geschickte (trickreiche) Wahl der Punkte x_j und ξ_j die Integrale $\int\limits_a^b x^k\,dx$ für natürliche Zahlen $k \geq 1$ berechnet.

Satz 5.3 (Eigenschaften des bestimmten Integrals)

1. $\int\limits_b^a f\,dx = -\int\limits_a^b f\,dx, \quad \int\limits_a^a f\,dx = 0$
2. $\int\limits_a^b f\,dx = \int\limits_a^c f\,dx + \int\limits_c^b f\,dx$
3. $\int\limits_a^b \lambda f\,dx = \lambda\int\limits_a^b f\,dx$
4. $\int\limits_a^b (f+g)\,dx = \int\limits_a^b f\,dx + \int\limits_a^b g\,dx$
5. $\left|\int\limits_a^b f\,dx\right| \leq \int\limits_a^b |f|\,dx$
6. $f \leq g$ auf $[a,b] \Longrightarrow \int\limits_a^b f\,dx \leq \int\limits_a^b g\,dx$

Beweisskizze: Diese Eigenschaften sind für die Riemannschen Summen klar. Bei dem Grenzübergang, der von den Riemannschen Summen zu den Integralen führt, bleiben die Eigenschaften erhalten. Die unter Punkt 1 angegebene Formel ist eine Vereinbarung mit deren Hilfe wir Integrale berechnen können, bei denen die „obere Grenze“ kleiner ist als die „untere Grenze“. ■

Bemerkung: In Satz 5.2 hatten wir festgestellt, dass stetige bzw. monotone Funktionen integrierbar sind. Aus Punkt 2 folgt, dass diese Eigenschaften nicht im ganzen Intervall

$[a, b]$ erfüllt sein müssen. Wenn wir das Intervall $[a, b]$ in endlich viele Teilintervalle zerlegen können, in denen eine Funktion f diese Eigenschaften hat, dann ist f über $[a, b]$ integrierbar.

Im Folgenden werden wir bei der Formulierung der Voraussetzungen für die Intergrierbarkeit in unseren Sätze häufig die Stetigkeit verlangen. Nach dieser Bemerkung genügt Stetigkeit in dem Definitionsintervall mit endlich vielen Ausnahmen.

5.3 Hauptsatz und Mittelwertsatz

Bisher müssen wir zur Berechnung eines Integrals Grenzwerte von Riemannsche Summen bilden. Wie wir gesehen haben, ist dies schon bei einfachen Beispielen sehr schwierig. In diesem Abschnitt kommt die Differenzialrechnung mit ins Spiel und es wird ein wichtiger Zusammenhang zwischen der Integration und der Differentiation hergeleitet. Die in diesem Abschnitt behandelten Sätze ermöglichen es, auch kompliziertere Integrale mit vertretbarem Aufwand zu berechnen. Allerdings gibt es einen wesentlichen Unterschied zwischen der Differentiation und der Integration: Die Ableitung elementarer Funktionen lässt sich immer explizit mit Hilfe elementarer Funktionen darstellen. Eine explizite und exakte Berechnung von Integralen elemenater Funktionen ist nur in wenigen Fällen möglich. Viele in der Praxis vorkommende Integrale müssen aus diesem Grund numerisch berechnet werden.

Satz 5.4 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, 1. Teil)
Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall $[a, b]$ stetig differenzierbar. Dann ist

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

Beweisskizze: Wir betrachten eine Zerlegung $\mathscr{Z}$ von $[a, b]$. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es in jedem Intervall $[x_{j-1}, x_j]$ eine Zahl ξ_j mit

$$f(x_j) - f(x_{j-1}) = f'(\xi_j)(x_j - x_{j-1}).$$

Mit diesen Zwischenpunkten $\underline{\xi} = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ erhalten wir

$$f(b) - f(a) = \sum_{j=1}^{n} \big(f(x_j) - f(x_{j-1})\big) = \sum_{j=1}^{n} f'(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) = S\big(f', \mathscr{Z}, \underline{\xi}\big),$$

also eine Riemannsche Summen für $\int_a^b f'(x)\,dx$. Durch Verfeinerung der Zerlegungen erhalten wir im Grenzübergang die behauptete Gleichung. ■

Beispiele:

1. Zunächst greifen wir noch einmal das Beispiel von Seite 90 auf und wollen das Integral $\int\limits_a^b x\,dx$ berechnen. Es gilt $x = f'(x)$ für die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2$. Damit erhalten wir mit dem HDI, Teil 1: $\int\limits_a^b x\,dx = \int\limits_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a) = \dfrac{1}{2}b^2 - \dfrac{1}{2}a^2$.

2. Wir wollen das Integral $\int\limits_a^b \mathrm{e}^x\,dx$ berechnen. Wir erhalten $\mathrm{e}^x = f'(x)$ für die Funktion $f(x) = \mathrm{e}^x$ und damit ergibt sich $\int\limits_a^b \mathrm{e}^x\,dx = \mathrm{e}^b - \mathrm{e}^a$.

3. Auch das Integral $\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{dx}{1+x^2}$ können wir mit diesem Satz bestimmen. Aus der Tabelle auf Seite 75 entnehmen wir Es ist $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ für die Funktion $f(x) = \arctan x$ und damit erhalten wir $\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{dx}{1+x^2} = \arctan(1) - \arctan(-1) = \dfrac{\pi}{2}$.

Bemerkung: An diesen Beispielen sehen wir, dass der HDI (Teil 1) ein mächtiges Werkzeug zur Berechnung von Integralen ist. Den Weg von einem Integranden f' zu der Funktion f, mit der wir den Wert des Integrals berechnen können, werden wir in den folgenden Abschnitten genauer darstellen.

Satz 5.5 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Die Funktion f sei stetig auf $[a,b]$. Dann existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(\xi) \quad \text{bzw.} \quad \int\limits_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a).$$

Beweisskizze: Es sei $m := \min\limits_{x\in[a,b]} f(x) = f(\underline{x})$ und $M := \max\limits_{x\in[a,b]} f(x) = f(\overline{x})$. Dann gilt: $m \le f(x) \le M \Longrightarrow \int\limits_a^b m\,dx \le \int\limits_a^b f(x)\,dx \le \int\limits_a^b M\,dx \Longrightarrow m(b-a) \le \int\limits_a^b f\,dx \le M(b-a)$. Daher gilt $f(\underline{x}) \le \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f\,dx \le f(\overline{x})$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert ein ξ zwischen $\underline{x}$ und $\overline{x}$ mit $f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f\,dx$. ∎

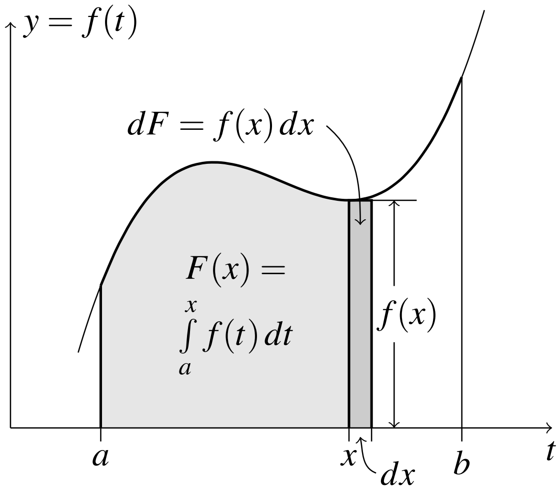
Bemerkung: Die Größe $\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx$ heißt das *Integralmittel* von f über $[a, b]$. Das Integralmittel ist der Mittelwert der Funktionswerte von f im Intervall $[a, b]$.

Satz 5.6 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, 2. Teil)
Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$. Dann ist die Funktion F differenzierbar in (a, b) und es gilt $F'(x) = f(x)$.

Beweis: Es gilt $F(x) - F(x_0) = \int\limits_a^x f\,dt - \int\limits_a^{x_0} f\,dt = \left(\int\limits_a^{x_0} f\,dt + \int\limits_{x_0}^x f\,dt\right) - \int\limits_a^{x_0} f\,dt = \int\limits_{x_0}^x f\,dt$. Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung existiert ein ξ_x zwischen x und x_0 mit $\int\limits_{x_0}^x f\,dt = f(\xi_x)(x - x_0)$. Daraus folgt $\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(\xi_x)$. Im Grenzübergang $x \to x_0$ folgt $\xi_x \to x_0$ und aus der Stetigkeit von f folgt die Behauptung des Satzes. ■

Bemerkung: Wie wir schon angemerkt haben gibt es unstetige Funktionen f, die integrierbar sind. Für unstetige Funktionen f gilt die Aussage des Satzes nicht. So haben wir auf Seite 50 die Signum-Funktion betrachtet. Mit $f(t) = \operatorname{sgn}(t)$ erhalten wir im Intervalle $[-1, 1]$ die Funktion $F(x) = \int\limits_{-1}^x \operatorname{sgn}(t)\,dt = |x| - 1$, die an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar ist. Dieses Beispiel zeigt weiter, dass die Integration „glättet“: Die Funktion $f(t) = \operatorname{sgn}(t)$ ist an der Stelle $t = 0$ unstetig, das Integral $F(x) = \int\limits_{-1}^x \operatorname{sgn}(t)\,dt = |x| - 1$ ist im ganzen Intervall $[-1, 1]$ stetig, aber an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.

Die Skizze zeigt die anschauliche Bedeutung dieses Satzes: Wir betrachten eine Fläche unter dem Graphen von f mit Variabler rechten Grenze x. Verschieben wir die rechte Grenze um dx, so ändert sich die Fläche um das Differential $dF = F'(x)\,dx$. Diese Fläche ist ein Rechteck mit den Seitenlängen dx und $f(x)$ und der Fläche $dF = f(x)\,dx$. Daher muss $F'(x) = f(x)$ gelten.



Dieser zweite Teil des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung gibt Anlass zu der folgenden Definition:

Definition 5.7
Die Funktion F heißt eine Stammfunktion *von f, falls $F' = f$ ist.*

Bemerkungen:

1. Der 2. Teil des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung besagt, dass jede auf $[a, b]$ stetige Funktion f eine Stammfunktion besitzt, nämlich $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$. Es gibt jedoch stetige Funktionen, deren Stammfunktion nicht „elementar" darstellbar ist. Unter einer elementaren Darstellung verstehen wir eine endliche Kombination (Summe, Produkt, Quotient, Hintereinanderausführung, Umkehrfunktion) elementarer Funktionen (Potenzen, Exponentialfunktion, Logarithums, Trigonometrische Funktionen). So gibt es beispielsweise keine elementare Darstellung für $\int\limits_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,dt$ oder $\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$. Für diese Funktionen gibt es Potenzreihendarstellungen.
2. Sind F_1 und F_2 zwei Stammfunktionen der Funktion f, so gibt es eine Konstante c mit $F_1(x) = F_2(x) + c$ für $x \in [a, b]$.
3. Ist F eine Stammfunktion von f, so ist $\int\limits_a^b f\,dt = F(b) - F(a)$. Hierfür verwenden wir die Schreibweise
$$\int\limits_a^b f(t)\,dt = F\Big|_a^b := F(b) - F(a).$$
4. Ist die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und sind die Funktionen $\varphi,\ \psi : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so folgt aus dem 2. Teil des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung und der Kettenregel:
$$F(x) = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt \Longrightarrow F'(x) = f\big(\psi(x)\big) \cdot \psi'(x) - f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x).$$

Wir sehen, dass zu einer gegebenen Funktion f die Menge aller Stammfunktionen eine wichtige Rolle spielt. Daher definieren wir:

Definition 5.8
Es sei eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gegeben. Dann heißt die Menge $\displaystyle\int f\,dx = \big\{F \,|\, F' = f\big\}$ das unbestimmte Integral *von f.*

Bemerkungen:

1. Wir haben zwei Integralbegriffe definiert, das bestimmte Integral und das unbestimmte Integral. Es ist zu beachten, dass dies ganz verschiedene mathematische Objekte sind: Das bestimmte Integral $\int\limits_a^b f(t)\,dt$ ist eine Zahl und das umbestimmte Integral $\int f\,dx = \big\{F \,|\, F' = f\big\}$ ist eine Menge von Funktionen.
2. Kennen wir zu einer stetigen Funktion f eine spezielle Stammfunktion F_0, so ist das unbestimmte Integral die Menge $\int f\,dx = \big\{F_0 + c \,|\, c \in \mathbb{R}\big\}$. Als Abkürzung verwenden wir hierfür die Schreibweise $\int f\,dx = F_0 + c$.

3. Da die Bestimmung einer Stammfunktion die zur Berechnung der Ableitung inverse Operation ist, erhalten wir aus der Tabelle mit Ableitungen auf Seite 75 eine Tabelle mit Stammfunktionen. Wir müssen hierzu nur die Spalten vertauschen.

Tabelle mit Stammfunktionen von elementaren Funktionen

f	$\int f\,dx$	f	$\int f\,dx$	f	$\int f\,dx$
x^α	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+c,\ \alpha\neq-1$	$\sin(x)$	$-\cos(x)+c$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)+c$
e^x	e^x+c	$\cos(x)$	$\sin(x)+c$	$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan(x)+c$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)+c$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)+c$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)+c$
		$\cosh(x)$	$\sinh(x)+c$		

5.4 Technik der Integration

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung sind Differentiation und Integration in gewissem Sinne zwei zueinander inverse Operationen. Daher erhalten wir aus jeder Differentiationsregel durch Integration eine Integrationsregel. Eine Integration der Quotientenregel ergibt keine praktikable Integrationsregel. Durch die „Integration“ der Produktregel erhalten wir die partielle Integration und durch die „Integration“ der Kettenregel erhalten wir die Substitutionsregel. Wie diese „Integration“ der Differentiationsregeln genau abläuft, betrachten wir in den Beweisen bzw. Beweisskizzen.

Satz 5.9 (Partielle Integration)
Es seien f und g stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

und

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

Beweis: $(fg)' = f'g + fg' \Longrightarrow fg' = (fg)' - f'g$. Integration dieser Gleichung liefert die Behauptung des Satzes. ■

Bemerkungen:

1. Bei der Anwendung der partiellen Integration benötigen wir nur eine spezielle Stammfunktion g von g'. Daher können wir bei der Integration $g = \int g'\,dx$ die Integrationskonstante weglassen.

2. Es ist bei einem gegebenen Beispiel möglicherweise nicht klar, wie die zu integrierende Funktion als Produkt der Form „$f(x)g'(x)$“ geschrieben werden soll. Ein Leitfaden hierfür ist der folgende: Wähle f so, dass f' möglichst einfach ist und wähle g' so, dass $g = \int g'\,dx$ nicht übermäßig kompliziert ist.

3. Wenn bei dem zu bestimmenden Integral überhaupt kein Produkt vorliegt, können wir eventuell den „Einsertrick“ verwenden und den Integranden in der Form $f(x) = 1 \cdot f(x)$ schreiben. Danach können wir versuchen, die partielle Integration mit $g'(x) = 1$ anzuwenden.

Beispiele:

1. Als erstes ermitteln wir eine Stammfunktion von $x\mathrm{e}^x$. Mit der Wahl $f(x) = x$ und $g'(x) = \mathrm{e}^x$ erhalten wir

$$\int x\mathrm{e}^x\,dx = \int f(x)g'(x)\,dx = x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,dx = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

2. Zur Bestimmung einer Stammfunktion von $\ln x$ verwenden wir den „Einsertrick“ und setzen $f(x) = \ln x$ und $g'(x) = 1$. Damit ist

$$\int \ln x\,dx = \int 1 \cdot \ln x\,dx = x \cdot \ln x - \int 1\,dx = x\ln x - x + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

3. Für die Berechnung von $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx$ wählen wir $f(x) = \ln x$ und $g'(x) = \frac{1}{x}$ und erhalten

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int \ln x \cdot \frac{1}{x}\,dx = \left(\ln x\right)^2 - \int \frac{1}{x} \cdot \ln x\,dx = \left(\ln x\right)^2 - \int \frac{\ln x}{x}\,dx.$$

Um das Integral $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$ auf der rechten Seite loszuwerden liegt es nahe, dieses auf beiden Seiten der Gleichung zu addieren. Allerdings müssen wir dabei beachten, dass es sich bei der Gleichung um die Gleichheit von zwei Mengen von Funktionen handelt. Dies wollen wir hier genau betrachten:

Ist $F_0(x)$ eine spezielle Stammfunktion von $\frac{\ln x}{x}$, so ist

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \left\{F_0(x) + c \,|\, c \in \mathbb{R}\right\}$$

Die durch partielle Integration ermittelte Gleichung bedeutet damit

$$\left\{F_0(x) + c \,|\, c \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\left(\ln x\right)^2 - F_0(x) + d \,|\, d \in \mathbb{R}\right\}$$

Nun können wir zu jedem Element dieser beiden Mengen jeweils die Funktion $F_0(x)$ addieren und erhalten dadurch

$$\left\{2F_0(x) + c \,|\, c \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\left(\ln x\right)^2 + d \,|\, d \in \mathbb{R}\right\}.$$

Teilen wir nun die Funktionen dieser beiden Mengen jeweils durch 2, so wird daraus

$$\left\{F_0(x) + \tfrac{c}{2} \,|\, c \in \mathbb{R}\right\} = \left\{F_0(x) + \tilde{c} \,|\, \tilde{c} \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\tfrac{1}{2}\left(\ln x\right)^2 + \tfrac{d}{2} \,|\, d \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\tfrac{1}{2}\left(\ln x\right)^2 + \tilde{d} \,|\, \tilde{d} \in \mathbb{R}\right\}.$$

In der Schreibweise mit uneigentlichen Integralen sieht das so aus:

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \big(\ln x\big)^2 - \int \frac{\ln x}{x}\,dx \implies 2\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \big(\ln x\big)^2 + d,\, d \in \mathbb{R} \implies$$
$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\big(\ln x\big)^2 + \frac{d}{2} = \frac{1}{2}\big(\ln x\big)^2 + \tilde{d},\, \tilde{d} \in \mathbb{R}.$$

4. Nun wollen wir eine Stammfunktion von der Funktion $\frac{h'}{h}$ für eine stetig differenzierbare Funktion h mittels partieller Integration bestimmen. Hierzu wählen wir $f(x) = \frac{1}{h(x)}$ und $g'(x) = h'(x)$ und erhalten

$$\int \frac{h'(x)}{h(x)}\,dx = \frac{1}{h(x)} \cdot h(x) - \int \frac{-h'(x)}{h^2(x)} \cdot h(x)\,dx = 1 + \int \frac{h'(x)}{h(x)}\,dx.$$

Diese Gleichung sieht auf den ersten Blick recht paradox aus. Da es sich hierbei um Mengen von Funktionen handelt, bedeutet die Gleichung folgendes: Die Menge aller Stammfunktionen von $\frac{h'}{h}$ ändert sich nicht, wenn man zu jeder Funktion dieser Menge die Konstante 1 addiert.

Beispiel: Als Vorbereitung zur Substitutionsregel betrachten wir das folgende Beispiel: Wir wollen das unbestimmte Integral $\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$ ermitteln. Wenn wir die Funktion unter der Wurzel als $u = u(x) = 1 + x^2$ bezeichnen, so hat diese Funktion das Differential $du = u'(x)\,dx = 2x\,dx$. Wir können bei dem Integral $\int \sqrt{1+x^2} \cdot 2x\,dx$ rein formal den Ausdruck $2x\,dx$ durch du und den Ausdruck $1 + x^2$ durch u ersetzen und erhalten damit $\int \sqrt{u}\,du = \int u^{1/2}\,du = \frac{2}{3}u^{3/2} + c$. Bei diesem Ergebnis können wir nun wiederum u durch $1 + x^2$ ersetzen und erhalten

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx = \int \sqrt{u}\,du = \frac{2}{3}u^{3/2} + c = \frac{2}{3}\sqrt{(1+x^2)^3} + c.$$

Durch Differentiation können wir uns davon überzeugen, dass das Ergebnis richtig ist:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2} + c\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}(1+x^2)^{1/2} \cdot 2x = 2x\sqrt{1+x^2}.$$

Satz 5.10 (Substitutionsregel)
Es sei g stetig differenzierbar auf $[a,b]$ und dort gelte $g'(x) \neq 0$ (d.h. g ist auf $[a,b]$ umkehrbar). Dann ist

$$\int_a^b f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt.$$

Beweisskizze: Ist F eine Stammfunktion von f, so folgt aus der Kettenregel:

$$f\big(g(x)\big)g'(x) = F'\big(g(x)\big)g'(x) = \frac{d}{dx}F\big(g(x)\big).$$

Mit dem HDI erhalten wir damit

$$\int_a^b f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = \int_a^b \frac{d}{dx}F\big(g(x)\big)\,dx = F\big(g(x)\big)\Big|_a^b =$$

$$F\big(g(b)\big) - F\big(g(a)\big) = F(t)\Big|_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} F'(t)\,dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt.$$

■

Bemerkungen:

1. Für praktische Berechnungen ist es sicherer, folgenden formalen Weg zu gehen: Wir setzen $t = g(x)$. Dann ist $\frac{dt}{dx} = g'(x) \Longrightarrow dt = g'(x)dx$. Wollen wir umgekehrt $x = \varphi(t)$ setzen, so erhalten wir $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ und $dx = \varphi'(t)\,dt$.
2. Bei der Anwendung der Substitutionsregel müssen wir beachten, dass in jedem vorkommenden Integral nur eine Integrationsvariable auftreten darf. Dies kann die „ursprüngliche“ Integrationsvariable x oder die „neue“ Integrationsvariable t sein.
3. Zur Berechnung eines bestimmten Integrals mit Hilfe der Substitution gibt es zwei Varianten: Wir können zunächst eine Stammfunktion der zu integrierenden Funktion bestimmen. Wie in dem einführenden Beispiel ist nach der Integration die neue Integrationsvariable wieder durch die ursprüngliche Integrationsvariable zu ersetzen. Alternativ können wir wie im Satz angegeben die Integrationsgrenzen mit „umrechnen“ und können damit den Wert des bestimmten Integrals ohne Rücksubstitution ermitteln.
4. Wir können die Substitutionsregel „von links nach rechts“, aber auch „von rechts nach links“ anwenden. Wie wir bei den folgenden Beispielen sehen, ist die Anwendung „von links nach rechts“ einfacher.

Beispiele:

1. Wir wollen noch einmal das Integral $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int \ln x \cdot \frac{1}{x}\,dx$ betrachten. Wir führen die neue Variable $t = t(x) = \ln x$ ein. Es ist $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$ und wir erhalten $dt = \frac{1}{x}\,dx$. Durch Substitution erhalten wir $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int t\,dt = \frac{1}{2}t^2 + c = \frac{1}{2}\big(\ln x\big)^2 + c$.

   Wenn wir den Zusammenhang $dt = \frac{1}{x}\,dx$ nicht „sehen“ können wir auch folgendermaßen vorgehen: Die Substitution $t = \ln x$ können wir nach x auflösen und erhalten $x = x(t) = \mathrm{e}^t$. Die Ableitung dieser Funktion ist $\frac{dx}{dt} = \mathrm{e}^t$ und wir erhalten $dx = \mathrm{e}^t\,dt$. Damit können wir alle im Integral vorkommenden Ausdrücke in der Variable x mit unserer neuen Variable t ausdrücken: $\ln x = t$, $x = \mathrm{e}^t$, $dx = \mathrm{e}^t\,dt$. Führen wir die Substitution durch, so erhalten wir $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int \frac{t}{\mathrm{e}^t}\,\mathrm{e}^t\,dt = \int t\,dt$. Die beiden verschiedenen formalen Wege führen also zu dem selben Ziel.

2. Wir berechnen das Integral $\int\limits_0^8 \frac{\cos\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}\,dx$. Mit der Substitution $t=\sqrt{x+1}$ erhalten wir $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \Longrightarrow \frac{dx}{\sqrt{x+1}}=2dt$. Weiter ist $x=0 \Longleftrightarrow t=1$ und $x=8 \Longleftrightarrow t=3$. Damit ergibt sich

$$\int\limits_0^8 \frac{\cos\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}\,dx = \int\limits_1^3 2\cos t\,dt = 2\sin t\Big|_1^3 = 2(\sin 3-\sin 1).$$

Alternativ können wir die Substitution $t=\sqrt{x+1}$ auch nach x auflösen und erhalten $t=\sqrt{x+1} \Longrightarrow x=t^2-1$. Mit $\frac{dx}{dt}=2t$ ergibt sich $dx=2t\,dt$ und wir erhalten schließlich

$$\int\limits_0^8 \frac{\cos\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}\,dx = \int\limits_1^3 \frac{\cos t}{t}\,2t dt = \int\limits_1^3 2\cos t\,dt.$$

3. Bei der Berechnung des Integrals $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ wenden wir die Substitutionsregel „von rechts nach links“ an. Es ist $y=\sqrt{1-x^2}$, $0\le x\le 1 \Longleftrightarrow x^2+y^2=1$, $0\le x\le 1$. Der Funktionsgraph von $y=\sqrt{1-x^2}$, $0\le x\le 1$ ist der im ersten Quadranten liegende Teil des Einheitskreises. Daher ist die Verwendung von trigonometrischen Funktionen bei der Berechnung dieses Integrals naheliegend. Wir wählen die Substitution $x=\sin t$ und erhalten $\frac{dx}{dt}=\cos t \Longrightarrow dx=\cos t\,dt$. Weiter ist $x=0 \Longleftrightarrow t=0$ und $x=1 \Longleftrightarrow t=\frac{\pi}{2}$. Der Integrand wird mit dieser Substitution zu $\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|$. Für $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ gilt $\cos t\ge 0$ und damit folgt $\sqrt{1-x^2}=|\cos t|=\cos t$. Nun können wir die Substitution durchführen und erhalten

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} \cos t\cdot\cos t\,dt = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt.$$

Mit dem Additionstheorem $\cos^2 t=\frac{1}{2}(1+\cos 2t)$ (dies folgt aus Satz 2.23, Teil 5) wird daraus

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\,dt = \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

Damit haben wir gezeigt, dass die Fläche des Einheitskreises π ist.

Beispiele: In den folgenden Beispielen sind einige öfter verwendete Standardsubstitutionen zusammengestellt. Ist der Integrand in der Form $f\big(g(x),h(x)\big)$ angegeben bedeutet dies das Folgende: Der Integrand entsteht aus einer Funktion f, die von zwei Variablen u und v abhängt, indem wir $u=g(x)$ und $v=h(x)$ setzen:

1. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\ln|f|+c$. Hier setzten wir $t=f(x)$ und erhalten $f'(x)\,dx=dt$.

2. $\displaystyle\int f\left(\tfrac{1}{x}\right)\,dx = -\int \frac{f(t)}{t^2}\,dt$. Hier ist $t = \frac{1}{x}$.

3. $\displaystyle\int f\left(\sqrt[n]{ax+b}, x\right)\,dx = \frac{n}{a}\int f\left(t, \tfrac{1}{a}(t^n - b)\right) t^{n-1}\,dt$

   Hier setzen wir $t = \sqrt[n]{ax+b} \Longleftrightarrow x = \frac{1}{a}(t^n - b)$ und wir erhalten $dx = \frac{n}{a}t^{n-1}\,dt$.

4. $\displaystyle\int f\big(\sin(x), \cos(x)\big)\,dx = \int f\left(\tfrac{2t}{1+t^2}, \tfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)\tfrac{2}{1+t^2}\,dt$

   Dies erreichen wir durch die eher unerwartete Substitution $t = \tan\frac{x}{2}$. Es folgt

$$\frac{dt}{dx} = \left(1 + \tan^2\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} = \frac{1+t^2}{2} \Longrightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt.$$

   Weiter ist

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cos^2\frac{x}{2} = 2\frac{\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

   und

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2}\left(1 - \tan^2\frac{x}{2}\right) = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

   Dabei haben wir die Gleichung $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ verwendet. Bei dieser Standardsubstitution ist anzumerken, dass wir versuchen sollten, diese zu vermeiden, d.h. bei Integralen mit trigonometrischen Funktionen ist die Anwendung von Additionstheoremen vorzuziehen. Nur wenn diese nicht weiterhelfen, können wir diese Substitution einsetzen.

Beispiel: Wir wollen die letzte Substitution im Integral $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x(1+\sin x)}$ durchführen. Hier ist $f(u,v) = \frac{1}{v(1+u)}$ mit $u = \sin x$ und $v = \cos x$. Bei diesem Integral kommen wir mit den Additionstheoremen nicht zum Ziel und müssen die „$\tan\frac{x}{2}$"-Substitution anwenden. Wir ersetzten dx durch $\frac{2dt}{1+t^2}$, $\cos x$ durch $\frac{1-t^2}{1+t^2}$ und $\sin x$ durch $\frac{2t}{1+t^2}$. Damit erhalten wir:

$$\int \frac{dx}{\cos x(1+\sin x)} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}\,dt}{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\left(1 + \frac{2t}{1+t^2}\right)} =$$

$$\int \frac{2(1+t^2)}{(1-t^2)(1+t^2+2t)}\,dt = \int \frac{2(1+t^2)}{(1-t)(1+t)^3}\,dt$$

Dies ist eine rationale Funktion in der Variable t. Für die Integration von rationalen Funktionen gibt es ein Standardverfahren, das im Prinzip immer funktioniert. Diese Methode wollen wir nun herleiten.

Integration rationaler Funktionen: Es sei eine rationale Funktion $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ mit Polynomen P und Q gegeben. Jede solche rationale Funktion kann im Prinzip explizit integriert werden. Die Bestimmung von $\int R(x)\,dx$ können wir in mehreren Schritten durchführen.

1. **Polynomdivision:** Durch eine Polynomdivision mit Rest wird R in die Form
$$R(x) = P_1(x) + \frac{\tilde{P}(x)}{Q(x)}, \quad \mathrm{grad}(\tilde{P}) < \mathrm{grad}(Q)$$
gebracht.

   Beispiel: $\dfrac{3x^4 - 2x^3 + x^2 + 1}{2x^2 + 1} = \dfrac{3}{2}x^2 - x - \dfrac{1}{4} + \dfrac{x + \frac{5}{4}}{2x^2 + 1}$

   Im Folgenden betrachten wir ausschließlich rationale Funktionen $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, bei denen der Grad des Zählerpolynoms echt kleiner ist als der Grad des Nennerpolynoms.

2. **Faktorisierung**: Der Nenner $Q(x)$ wird über $\mathbb{R}$ vollständig faktorisiert. Es lässt sich zeigen, dass sich jedes Polynom vollständig in Linearfaktoren und quadratische Faktoren ohne reelle Nullstelle zerlegen lässt, d.h.
$$\begin{aligned} Q(x) &= A\,(x - x_1)^{\nu_1}(x - x_2)^{\nu_2} \cdot \ldots \cdot (x - x_m)^{\nu_m} \\ &\quad (x^2 + r_1 x + s_1)^{\mu_1}(x^2 + r_2 x + s_2)^{\mu_2} \cdot \ldots \cdot (x^2 + r_l x + s_l)^{\mu_l} \end{aligned}$$
mit $\mathrm{grad}(Q) = \sum\limits_{i=1}^{m} \nu_i + \sum\limits_{j=1}^{l} 2\mu_j$ und $x^2 + r_j x + s_j \neq 0, x \in \mathbb{R}, 1 \leq j \leq l$.

3. **Partialbruchzerlegung:** Der Bruch $\frac{P}{Q}$ mit $\mathrm{grad}(\tilde{P}) < \mathrm{grad}(Q)$ lässt sich als Summe einfacher Ausdrücke der Form $\dfrac{A}{(x - x_0)^k}$ und $\dfrac{Bx + C}{(x^2 + rx + s)^k}$ darstellen. Dabei sind die Nenner jeweils die Faktoren des Polynoms $Q(x)$. Die Struktur dieser Zerlegung hängt nur von der faktorisierten Darstellung des Nennerpolynoms $Q(x)$ ab. Die Werte der Konstanten A, B und C im Zähler hängen vom Polynom $P(x)$ ab.

   Zunächst betrachten wir die Struktur dieser Zerlegung. Dabei erhalten wir für jeden der Faktoren in der Zerlegung von $Q(x)$ eine Summe von Ausdrücken der gerade genannten Form. Im Einzelnen sind dies:

   Jeder Faktor $(x - x_i)^{\nu_i}$ des Nenners liefert den Beitrag
$$\frac{A_{i,1}}{x - x_i} + \frac{A_{i,2}}{(x - x_i)^2} + \ldots + \frac{A_{i,\nu_i}}{(x - x_i)^{\nu_i}}$$
   Jeder Faktor $(x^2 + r_j x + s_j)^{\mu_j}$ des Nenners liefert den Beitrag
$$\frac{B_{j,1}x + C_{j,1}}{x^2 + r_j x + s_j} + \frac{B_{j,2}x + C_{j,2}}{(x^2 + r_j x + s_j)^2} + \ldots + \frac{B_{j,\mu_j}x + C_{j,\mu_j}}{(x^2 + r_j x + s_j)^{\mu_j}}$$
   Insgesamt erhalten wir die Zerlegung
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{\nu_i} \frac{A_{i,k}}{(x - x_i)^k} \right) + \sum_{j=1}^{l} \left(\sum_{k=1}^{\mu_j} \frac{B_{j,k}x + C_{j,k}}{(x^2 + r_j x + s_j)^k} \right)$$
   Um die Partialbruchzerlegung fertigzustellen, müssen wir „nur noch“ die Konstanten $A_{i,k}$, $B_{j,k}$ und $C_{j,k}$ bestimmen. Hierzu gibt es mehrere Methoden, die wir an einfachen Beispielen konkretisieren wollen.

(a) Koeffizientenvergleich: Wir bringen die rechte Seite der Partialbruchzerlegung auf den Hauptnenner (also $Q(x)$) und können dann bei den beiden Zählerpolynomen die Koeffizienten aller x-Potenzen vergleichen. Es gibt einen Satz, nach dem das resultierende lineare Gleichungssystem immer eindeutig lösbar ist.

Beispiel: Wir betrachten die Funktion $R(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2(x^2+x+1)}$. Es ist

$$
\begin{aligned}
R(x) = \frac{x^2+1}{x^2(x^2+x+1)} &= \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} = \\
&\frac{A_1x(x^2+x+1)+A_2(x^2+x+1)+x^2(Bx+C)}{x^2(x^2+x+1)} = \\
\frac{1}{x^2(x^2+x+1)} &\Big((A_1+B)x^3+(A_1+A_2+C)x^2+(A_1+A_2)x+A_2\Big)
\end{aligned}
$$

Koeffizientenvergleich ergibt das Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
A_1+B &= 0 \\
A_1+A_2+C &= 1 \\
A_1+A_2 &= 0 \\
A_2 &= 1
\end{aligned}
$$

mit der Lösung $A_1 = -1, A_2 = 1, B = 1$ und $C = 1$. Für die Funktion R erhalten wir die Darstellung:

$$R(x) = \frac{x^2+1}{x^2(x^2+x+1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{x+1}{x^2+x+1}$$

(b) Einsetzen spezieller x-Werte: Wir können einige der linearen Gleichungen dadurch erhalten, dass wir in die Zerlegung spezielle x-Werte einsetzen.

Beispiel:

$$R(x) = \frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}.$$

Setzen wir in dies Zerlegung die Werte $x = -1$ und $x = 2$ ein, so erhalten wir

$$
\begin{aligned}
x=-1:\quad 0 &= -A-\tfrac{B}{2} &\implies 2A+B &= 0 \\
x=2:\quad \tfrac{3}{2} &= \tfrac{A}{2}+B &\implies A+2B &= 3
\end{aligned}
$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems ist $A = -1$ und $B = 2$ und wir erhalten $R(x) = \dfrac{x+1}{x(x-1)} = \dfrac{-1}{x} + \dfrac{2}{x-1}$.

(c) Grenzwert- und Zuhaltemethode: Diese Methode ist sehr elegant und ermöglicht es, einige der Koeffizienten „durch hinschauen“ zu bestimmen. Wir betrachten das Beispiel

$$R(x) = \frac{x^2+1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}.$$

Multiplizieren wir beide Seiten dieser Zerlegung mit x, so erhalten wir:

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^2} = A + B\frac{x}{x-1} + C\frac{x}{(x-1)^2}.$$

Setzen wir nun die Nullstelle des Linearfaktors x ein, also $x = 0$, so erhalten wir sofort $A = 1$. Führen wir nun den Grenzübergang $x \to \infty$ durch, so erhalten wir $1 = A + B$. Mit dem schon ermittelten Wert $A = 1$ ergibt dies $B = 0$. Multiplizieren wir die ursprünliche Zerlegung mit $(x-1)^2$, also der höchsten Potenz des zweiten Linearfaktors, so ergibt sich

$$\frac{x^2+1}{x} = A\frac{(x-1)^2}{x} + B(x-1) + C.$$

Setzen wir hier die Nullstelle dieses Linearfaktors ein, also $x = 1$, so wir aus dieser Gleichung sofort $C = 2$. Damit haben wir die Zerlegung

$$R(x) = \frac{x^2+1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{2}{(x-1)^2}$$

gefunden.

Durch die Zuhaltemethode finden wir die Konstante, die zur höchsten Potenz eines Linearfaktors gehört: Diese Konstante erhalten wir, indem wir in der Funktion $R(x)$ diesen Linearfaktor zuhalten und dann bei dem verbleibenden Rest die Nullstelle dieses Linearfaktors einsetzen.

Für die allgemeine Partialbruchzerlegung ist eine geschickte Kombination dieser Methoden der beste Weg. Zu jedem Linearfaktor erhalten wir eine Konstante mit der Zuhaltemethode. Durch die Grenzwertmethode und das einsetzen einzelner x-Werte ergeben sich weitere Gleichungen für die Koeffizienten.

Bemerkung Im CAS Maple gibt es den Befehl `convert(R(x),parfrac,x)` zur Umwandlung einer rationalen Funktion R in einen Partialbruch. Es gibt auch Fälle, in denen die Funktion `genfunc[rgf_pfrac](R(x),x, .. )` benötigt wird. Diese Funktion führt eine Partialbruchzerlegung über $\mathbb{C}$ durch.

Bei `convert(R(x),parfrac,x)` ist zu beachten, dass Maple nur Koeffizienten aus bestimmten Zahlmengen zulässt. Wenn wir die Funktion $\frac{1}{x^4+1}$ zerlegen wollen, liefert der Befehl `convert(1/(x^4+1),parfrac,x)` nicht das gewünschte Ergebnis. Dies liegt daran, dass das Polynom x^4+1 nur ganzzahlige Koeffizienten hat und Maple versucht, Faktoren dieses Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten zu finden. Wenn wir mittels `solve(x^4+1=0,x);` die Nullstellen dieses Polynoms suchen, stellen wir fest, dass hier $\sqrt{2}$ vorkommt. Mit dem Befehl `convert(1/(x^4+1), parfrac, x, sqrt(2))` erhalten wir dann auch die gesuchte Partialbruchzerlegung.

4. **Integration:** Nachdem wir jede rationale Funktion als Summe einfacher Bestandteile dargestellt haben, müssen wir jetzt noch die Integrale

$$\int \frac{A}{(x-x_0)^\nu}\,dx \quad \text{und} \quad \int \frac{Bx+C}{(x^2+rx+s)^\mu}\,dx$$

berechnen. Es gilt:

$$\int \frac{A}{(x-x_0)^\nu}\,dx = \begin{cases} \dfrac{-A}{\nu-1}\,\dfrac{1}{(x-x_0)^{\nu-1}} & \nu \neq 1, \\ A\ln|x-x_0| & \nu = 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+rx+s)^\mu}\,dx = \frac{B}{2}\int \frac{2x+r}{(x^2+rx+s)^\mu}\,dx + \left(C - \frac{Br}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+rx+s)^\mu}$$

$$\int \frac{2x+r}{(x^2+rx+s)^\mu}\,dx = \begin{cases} \dfrac{-1}{\mu-1}\,\dfrac{1}{(x^2+rx+s)^{\mu-1}} & \mu \neq 1, \\ \ln(x^2+rx+s) & \mu = 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+rx+s)^\mu} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2(2\mu-3)}{(4s-r^2)(\mu-1)}\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+rx+s)^{\mu-1}} + \dfrac{1}{(4s-r^2)(\mu-1)}\,\dfrac{2x+r}{(x^2+rx+s)^{\mu-1}} & \mu \neq 1 \\ \dfrac{2}{\sqrt{4s-r^2}}\arctan\dfrac{2x+r}{\sqrt{4s-r^2}} & \mu = 1 \end{cases}$$

Beispiel: Wir wollen an einem Beispiel zeigen, welche Methoden zu der letzten Formel führen. Hierzu betrachten wir $I = \int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$. Zunächst formen wir den Nenner mit Hilfe quadratischer Ergänzung um:

$$x^2+x+1 = \left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{3}{4} = \tfrac{3}{4}\left[\left(\tfrac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\tfrac{1}{2}\right)\right)^2 + 1\right] = \tfrac{3}{4}\left(1 + \left(\tfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2\right).$$

Nachdem wir den Nenner so umgeformt haben, führen wir die Substitution $t = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ durch. Es ist $\frac{dt}{dx} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ und dies ergibt $dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\,dt$. Damit erhalten wir:

$$I = \int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \frac{16}{9}\int \frac{dx}{\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1\right]^2} = \frac{16}{9}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{dt}{(1+t^2)^2}$$

$$= \frac{8\sqrt{3}}{9}\int \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^2}\,dt = \frac{8\sqrt{3}}{9}\int \frac{1}{1+t^2}\,dt - \frac{8\sqrt{3}}{9}\int \underbrace{\frac{1}{2}t}_{u}\,\underbrace{\frac{2t}{(1+t^2)^2}}_{v'}\,dt =$$

$$= \frac{8\sqrt{3}}{9}\int \frac{1}{1+t^2}\,dt - \frac{8\sqrt{3}}{9}\left(\frac{1}{2}t\cdot\frac{-1}{1+t^2} - \frac{1}{2}\int \frac{-1}{1+t^2}\,dt\right) =$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{9}\int \frac{1}{1+t^2}\,dt + \frac{4\sqrt{3}}{9}\left(\frac{t}{1+t^2}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{9}\arctan t + \frac{4\sqrt{3}}{9}\left(\frac{t}{1+t^2}\right) + c =$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{9}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{4\sqrt{3}}{9}\left(\frac{\frac{2x+1}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}\right) + c =$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{9}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + c.$$

Damit sehen wir, welche Methoden zum Einsatz kommen: Zur Herleitung der Rekursion von $\int \frac{dx}{(x^2+rx+s)^\mu}$ auf einen Ausdruck mit $\int \frac{dx}{(x^2+rx+s)^{\mu-1}}$ benötigen wir quadratische Ergänzung, Substitution und partielle Integration.

5.5 Uneigentliche Integrale

Bei der Definition des bestimmten Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$ mussten zwei Bedingungen erfüllt sein: Das Intervall $[a,b]$ ist ein beschränktes Intervall endlicher Länge und die auf $[a,b]$ definierte Funktionen f muss beschränkt sein. Dies ist nötig um sicherzustellen, dass bei den Riemannschen Summen alle Summanden endlich sind, und dass diese Summen aus endlich vielen Summanden bestehen. Mittels geeigneter Grenzprozesse können wir diese Einschränkungen aufheben. Dabei greifen wir auf die bestimmten Integrale zurück.

Wir beginnen mit Integralen über unbeschränkte Intervalle, also Intervalle der Form $[a,\infty)$, $(-\infty,b]$ oder $(-\infty,\infty)$.

Definition 5.11

Die Grenzwerte $\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_a^R f(x)\,dx$, $\quad \int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{r\to-\infty}\int_r^b f(x)\,dx$

und $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{r\to-\infty}\lim_{R\to\infty}\int_r^R f(x)\,dx$ *heißen* uneigentliche Integrale *der Funktion f über das Intervall* $[a,\infty)$, $(-\infty,b]$ *bzw.* $(-\infty,\infty)$.

Bemerkungen:

1. Bei dieser Definition wird vorausgesetzt, dass die Integrale $\int_a^R f(x)\,dx$, $\int_r^b f(x)\,dx$ und $\int_r^R f(x)\,dx$ für alle $r, R \in \mathbb{R}$ existieren.

2. Bei der Definition von $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ müssen die Grenzübergänge an der oberen und der unteren Grenze unabhängig voneinander durchgeführt werden.

3. Eine alternative Definition von $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ lautet:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,dx,\ a \in \mathbb{R}$$

Damit wird dieses unbestimmte Integral auf die beiden anderen Arten unbestimmter Integrale zurückgeführt.

Beispiele:

1. Wir berechnen $\int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\,dx$.

$$\int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{0}^{R} \mathrm{e}^{-x}\,dx = \lim_{R\to\infty} \left(-\mathrm{e}^{-x} \Big|_0^R \right) = \lim_{R\to\infty} \left(1 - \mathrm{e}^{-R}\right) = 1$$

2. Wir ermitteln $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ mittels der alternativen Definition. Es ist

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{0}^{R} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \arctan x \Big|_0^R = \lim_{R\to\infty} \left(\arctan R\right) = \frac{\pi}{2}$$

und

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{r\to-\infty} \int\limits_{r}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{r\to-\infty} \arctan x \Big|_r^0 = \lim_{r\to-\infty} \left(-\arctan r\right) = \frac{\pi}{2}$$

Setzen wir dies zusammen, so erhalten wir

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi$$

3. Wir untersuchen das Integral $\int\limits_{0}^{\infty} \cos x\,dx$ auf Konvergenz. Es ergibt sich

$\int\limits_{0}^{R} \cos x\,dx = \sin x \Big|_0^R = \sin R$, und da der Grenzwert $\lim\limits_{R\to\infty} \sin R$ nicht existiert, divergiert das uneigentliche Integral $\int\limits_{0}^{\infty} \cos x\,dx$

4. Wir bestimmen alle Zahlen $\alpha \in \mathbb{R}$, für die das Integral $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ existiert. Wie wir in der Tabelle auf Seite 96 sehen, müssen wir die Fallunterscheidung $\alpha = 1$ und $\alpha \neq 1$ durchführen.

Für $\alpha = 1$ erhalten wir:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{1}{x}\,dx = \lim_{R\to\infty} \ln x \Big|_1^R = \lim_{R\to\infty} \ln R$$

und dieser Grenzwert existiert nicht.

Für $\alpha \neq 1$ erhalten wir

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{x^{\alpha-1}} \Big|_1^R = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{R^{\alpha-1}} - 1 \right)$$

Dieser Grenzwert existiert genau dann, wenn $\alpha - 1 > 0$ bzw. $\alpha > 1$ ist. In diesem Fall erhalten wir $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha - 1}$.

Nun definieren wir uneigentliche Integrale über beschränkte Intervalle:

Definition 5.12

Es sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ gegeben. Dann heißen die Grenzwerte $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\delta\to 0+} \int\limits_a^{b-\delta} f(x)\,dx$, $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$ *und* $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \lim\limits_{\delta\to 0+} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\delta} f(x)\,dx$ *uneigentliche Integrale von f über (a,b).*

Bemerkungen:

1. Bei dieser Definition ist nicht vorausgesetzt, dass die Funktion f im Intervall (a,b) unbeschränkt ist, also $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \pm\infty$ oder $\lim\limits_{x\to b-} f(x) = \pm\infty$ gilt.
2. Ist f auf $[a,b]$ beschränkt, so stimmt das uneigentliche Integral von f über (a,b) mit dem bestimmten Integral von f über $[a,b]$ überein. Aus diesem Grund beschränken wir uns bei der Betrachtung von „uneigenlichen" Integralen über (a,b) auf die Fälle, in denen die Funktion f in diesem Intervall unbeschränkt ist.
3. Bei dem „beidseitigen uneigentlichen" Integral müssen die beiden Grenzübergänge $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \lim\limits_{\delta\to 0+} \int_{a+\varepsilon}^{b-\delta} f(x)\,dx$ an der oberen und der unteren Grenze unabhängig voneinander durchgeführt werden.

Beispiel: Wir bestimmen alle Werte von $\lambda \in \mathbb{R}$, für die das Integral $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^\lambda}\,dx$ existiert.

Dieses Integral ist an der unteren Grenze uneigentlich. Wie oben führen wir die Fallunterscheidung $\lambda = 1$ und $\lambda \neq 1$ durch.

Für $\lambda = 1$ erhalten wir.

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \ln x \Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0+} -\ln\varepsilon$$

und dieser Grenzwert existiert nicht.

Für $\lambda \neq 1$ ergibt sich

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\lambda}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\lambda}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{1-\lambda}\cdot\frac{1}{x^{\lambda-1}}\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{1-\lambda}\left(1-\frac{1}{\varepsilon^{\lambda-1}}\right).$$

Der Grenzwert $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{\varepsilon^{\lambda-1}} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \varepsilon^{1-\lambda}$ existiert genau dann, wenn $1-\lambda > 0$ bzw. $\lambda < 1$ ist. In diesem Fall ist $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^\lambda}\,dx = \frac{1}{1-\lambda}$.

Bemerkung: Es gibt auch uneigentliche Integrale $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ mit $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \pm\infty$. Diese können wir mittels

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx,\ c > a$$

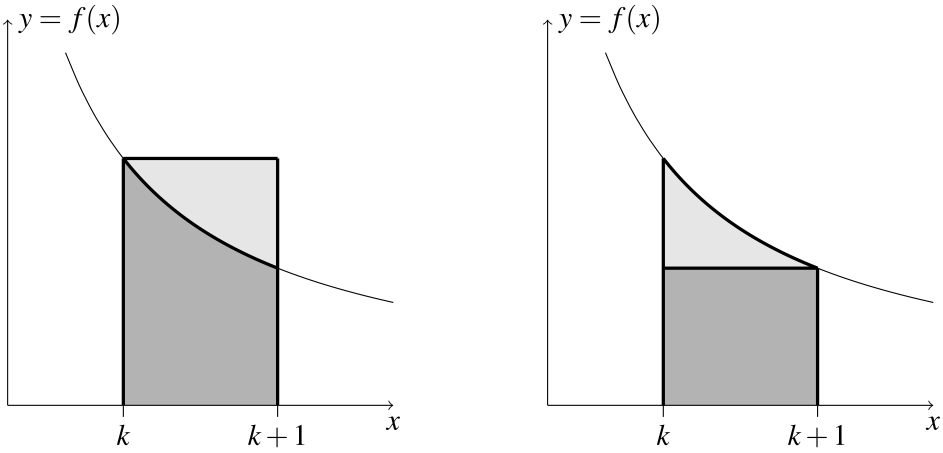
auf die bekannten Fälle zurückführen.

Beispiel: Das Integral $\int\limits_0^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ existiert für kein $\alpha \in \mathbb{R}$. In den obigen Beispielen haben wir gesehen, dass $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ genau dann existiert, wenn $\alpha < 1$ ist, und dass $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ genau dann existiert, wenn $\alpha > 1$ ist. Es gibt also keinen Wert von α, für den beide Integrale gleichzeitig konvergieren.

Mit Hilfe uneigentlicher Integrale haben wir ein mächtiges Werkzeug, mit dem wir auch unendliche Reihen auf Konvergenz untersuchen können. Es gilt:

Satz 5.13 (Integralkriterium für Reihen)
Es sei $f : [n_0, \infty) \to \mathbb{R}^+$ stetig und monoton fallend. Dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=n_0}^\infty f(k)$ genau dann, wenn das Integral $\int\limits_{n_0}^\infty f(x)\,dx$ existiert.

Beweisskizze: Das Bild zeigt uns die Idee des Beweises: Wir vergleichen die Fläche unter dem Funktionsgraphen zwischen k und $k+1$ (also $\int\limits_k^{k+1} f(x)\,dx$) mit dem umbeschriebenen bzw. einbeschriebenen Rechteck über dem Intervall $[k, k+1]$, wobei $k \geq n_0$ sei.



Aufgrund der Monotonie von f hat das größere Rechteck die Fläche $1 \cdot f(k)$ und das kleinere Rechteck die Fläche $1 \cdot f(k+1)$. Damit ergibt sich die Ungleichung

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq f(k).$$

Nun addieren wir alle diese Ungleichungen für $k = n_0, \ldots, \infty$, so erhalten wir

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} f(k) \leq \int_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} f(k).$$

Daher sind die Summe und das Integral entweder beide konvergent oder divergent. ■

Bemerkung: Die Werte $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} f(k)$ und $\int\limits_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx$ stimmen im allgemeinen *nicht* überein.

Beispiele:

1. Wir untersuchen, für welche Werte von α die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergiert.

   Für $\alpha = 1$ erhalten wir die divergente harmonische Reihe. Aus dem Minorantenkriterium folgt, dass die Reihe für alle $\alpha \leq 1$ divergiert.

   Für $\alpha = 2$ konnten wir mit dem Majorantenkriterium zeigen, dass die Reihe konvergiert. Damit folgt aus dem Majorantenkriterium, dass die Reihe für alle $\alpha \geq 2$ konvergiert.

   Für $1 < \alpha < 2$ können wir die Konvergenz mit den in Kapitel 2 bereitgestellten Kriterien nicht untersuchen. Da die Funktionen $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ für $\alpha > 0$ streng monoton fallend ist, können wir das Integralkriterium anwenden. Dies besagt, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ genau dann konvergiert, wenn das Integral $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ existiert. Weiter oben haben wir gezeigt, dass dieses Integral genau dann existiert, wenn $\alpha > 1$ ist.

   Damit erhalten wir: Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergiert genau dann, wenn $\alpha > 1$ ist.

2. Wir wollen zeigen, dass die Reihe $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ divergiert. Für die Anwendung des Integralkriteriums betrachten wir die Funktion $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ für $x \geq 2$. Die Ableitung dieser Funktion ist $f'(x) = \frac{-(1+\ln x)}{(x \ln x)^2} < 0$. Daher ist die Funktion f streng monoton fallend. Zur Untersuchung des Integrals $\int_2^{\infty} f(x)\, dx$ verwenden wir die Substitution $t = \ln x$. Damit ist $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$ bzw. $\frac{dx}{x} = dt$ und wir erhalten

$$\int_2^R \frac{dx}{x \ln x} = \int_{\ln 2}^{\ln R} \frac{1}{t}\, dt = \ln(\ln R) - \ln(\ln 2).$$

Der Grenzwert $\lim_{R\to\infty} \ln(\ln R)$ existiert nicht, und damit ist die Divergenz der Reihe gezeigt.

Bemerkung: Das letzte Beispiel ist eine divergente Reihe, deren Summanden kleiner sind als die der harmonischen Reihe. Hier stellt sich die Frage, ob es eine Reihe gibt, die am „langsamsten" divergiert oder konvergiert. Diese Frage ist zu verneinen: Zu jeder konvergenten Reihe gibt es eine Reihe mit etwas größeren Summanden, die ebenfalls konvergiert. Und zu jeder divergenten Reihe gibt es eine Reihe mit kleineren Summanden, die immer noch divergiert. Eine scharfe Grenze zwischen Konvergenz und Divergenz gibt es also nicht.

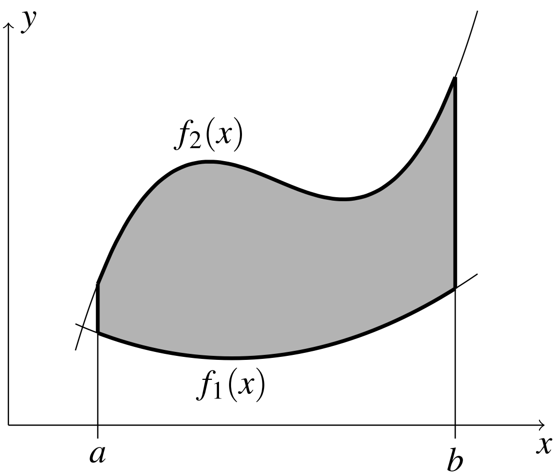
5.6 Anwendung der Integralrechnung

Hier wollen wir einige Anwendungen der Integralrechnung kurz darstellen werden.

Flächenberechnung:

Sind $f_1, f_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen mit $f_1(x) \leq f_2(x)$ für $x \in [a, b]$, so ist der Inhalt der Fläche zwischen den Graphen von f_1 und f_2 über dem Intervall $[a, b]$ gegeben durch

$$F = \int_a^b \big(f_2(x) - f_1(x)\big)\, dx.$$



Beispiel: Wir berechnen die Fläche zwischen den Graphen von $f_1(x) = -\sqrt{1-x^2}$ und $f_2(x) = \sqrt{1-x^2}$ über dem Intervall $[-1, 1]$. Der Bereich, dessen Fläche wir bestimmen ist der Kreis mit dem Radius 1 und dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung („Einheitskreis") Wir wenden die Substitution $x = \sin t$ an, und erhalten $\frac{dx}{dt} = \cos t$ sowie $\sqrt{1-x^2} =$

$\sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t|$. Weiter ist $x = -1 \iff t = -\frac{\pi}{2}$ und $x = 1 \iff t = \frac{\pi}{2}$. Damit erhalten wir

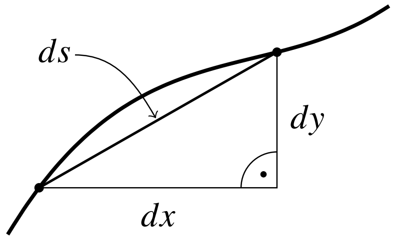
$$F = \int_{-1}^{1} \big(f_2(x) - f_1(x)\big)\, dx = \int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2}\, dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2|\cos t| \cdot \cos t\, dt$$

Für $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ist $\cos t \geq 0$ und $|\cos t| = \cos t$. Die Fläche ist daher

$$F = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos^2 t\, dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+\cos 2t)\, dt = t + \frac{1}{2}\sin 2t \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi.$$

Bogenlänge:

Für die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ wollen wir die Länge von $\big\{(x, f(x))\,|\, x \in [a, b]\big\}$ bestimmen. Für die Länge eines infinitesimalen Bogenelementes ds folgt aus dem Satz von Pythagoras $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$. Mit dem Differential $dy = f'\, dx$ ergibt sich daraus



$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\, dx.$$

Integrieren wir diesen Ausdruck über die gesamte Kurve, so erhalten wir die Bogenlänge

$$S = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\, dx.$$

Beispiel: Wir berechnen die Bogenlänge des Graphen der Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Der Funktionsgraph ist die obere Hälfte des Einheitskreises. Es ist

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{und damit} \quad 1 + \big(f'(x)\big)^2 = 1 + \frac{x^2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Die Bogenlänge erhalten wir zu

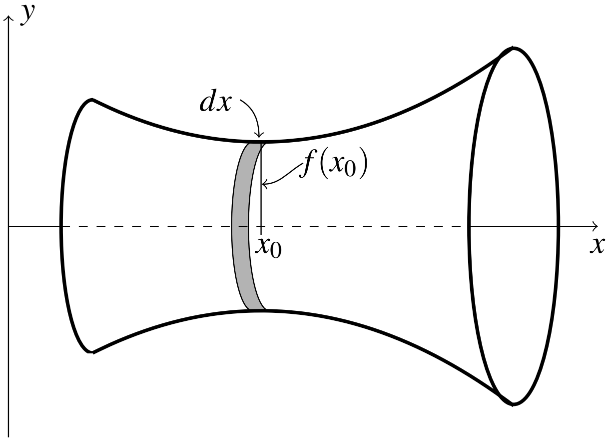
$$S = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin x \Big|_{-1}^{1} = \pi.$$

Da der Funktionsgraph dieser Funktion die obere Hälfte des Einheitskreises darstellt, erhalten wir den Umfang des Einheitskreises zu 2π.

Volumen von Rotationskörpern (1):

Lassen wir die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ um die x-Achse rotieren, so entsteht ein Rotationskörper, dessen Volumen wir bestimmen wollen. Wir zerschneiden diesen Körper in dünne Scheiben, deren Mittelpunkte auf der x-Achse liegen. Die Scheibe mit dem Mittelpunkt x_0 hat den Radius $f(x_0)$ und die Dicke dx und damit das Volumen

$$dV = \pi\big(f(x_0)\big)^2\,dx.$$



Integrieren wir über diese Volumenelemente, so erhalten wir das Gesamtvolumen

$$V = \int_a^b dV = \pi \int_a^b \big(f(x)\big)^2\,dx.$$

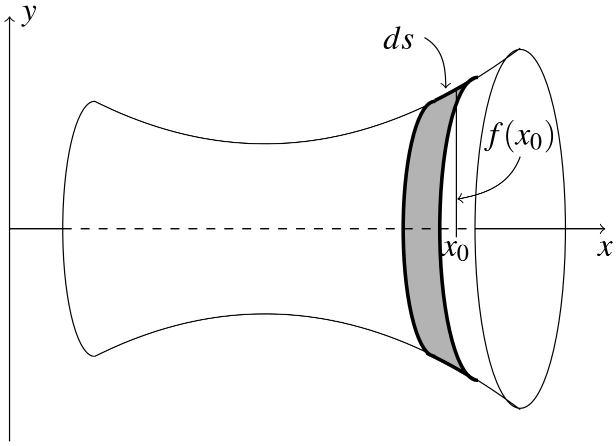
Beispiel: Wir berechnen den Rotationskörper, der durch Rotation der Funktion $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $-1 \le x \le 1$ entsteht. Dieser Körper ist die „Einheitskugel“. Das Volumen dieser Kugel ist

$$V = \pi \int_{-1}^{1} \big(f(x)\big)^2\,dx = \pi \int_{-1}^{1} (1-x^2)\,dx = \pi\Big(x - \frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{1}\Big) = \frac{4}{3}\pi.$$

Mantelfläche von Rotationskörper:

Zur Bestimmung der Oberfläche dieses Rotationskörper zerschneiden wir die Fläche in dünne Streifen. Der Streifen über der Stelle x_0 hat den Radius $f(x_0)$ und die Breite $ds = \sqrt{1+\big(f'(x_0)\big)^2}\,dx$. Die Fläche des Streifens ist daher

$$dF = 2\pi f(x_0)\sqrt{1+\big(f'(x_0)\big)^2}\,dx.$$



Integrieren wir über diese Flächenelemente, so erhalten wir die gesamte Mantelfläche zu

$$F = \int_a^b dF = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}\,dx.$$

Beispiel: Wir bestimmen die Oberfläche der Einheitskugel. Hierzu betrachten wir wieder die Funktion $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $-1 \le x \le 1$. Oben haben wir gesehen, dass $\sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2} =$

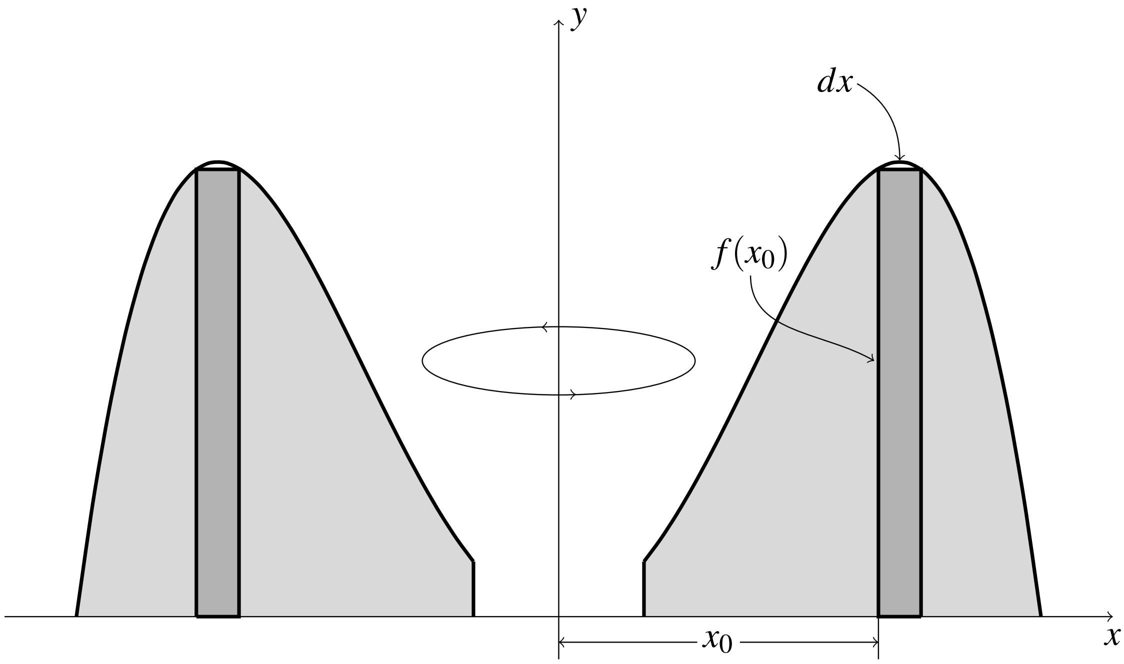
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ist. Damit erhalten wir $f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2} = 1$ und die Kugeloberlfäche zu

$$F = 2\pi \int_{-1}^{1} f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx = 2\pi \int_{-1}^{1} dx = 4\pi.$$

Volumen von Rotationskörpern (2): Nun betrachten wir eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ mit $0 \leq a$. Lassen wir die Fläche unter dem Funktionsgraphen von f über dem Intervall $[a, b]$ um die y-Achse rotieren, so entsteht ebenfalls ein Rotationskörper. Zur Berechnung dessen Volumen gehen wir folgendermaßen vor. Wir betrachten eine dünne Scheibe zwischen x_0 und $x_0 + dx$. Die Höhe dieser Scheibe ist $f(x_0)$. Lassen wir diese Scheibe um die y-Achse rotieren, so erhalten wir einen zylinderförmigen Ring mit dem Radius x_0. Das Volumen eines solchen Ringes ist $dV = 2\pi x_0 f(x_0)\,dx$.

Integrieren wir über diese Volumenelemente, so erhalten wir das Gesamtvolumen des Körpers zu

$$V = \int_a^b dV = 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx.$$



Beispiel: Wir betrachten die Kreis $(x-b)^2 + y^2 = a^2$ mit $0 < a < b$. Wenn wir diesen Kreis mit Mittelpunkt $(b, 0)$ und Radius a um die y-Achse rotieren lassen, erhalten wir einen *Torus* (Donut oder Bagel). Wir berechnen das Volumen der oberen Hälfte, indem wir die Funktion $f(x) = \sqrt{a^2 - (x-b)^2}$, $b - a \leq x \leq b + a$ um die y-Achse rotieren. Das Volumen des Torus ist dann das doppelte des Volumens des Rotationskörpers der Funktion f, also

$$V = 2 \cdot 2\pi \int_{b-a}^{b+a} x f(x)\,dx = 4\pi \int_{b-a}^{b+a} x\sqrt{a^2 - (x-b)^2}\,dx$$

Wir führen die Substitution $t = x - b$ durch und erhalten

$$V = 4\pi \int_{-a}^{a} (t+b)\sqrt{a^2+t^2}\,dt = 4\pi \underbrace{\int_{-a}^{a} t\sqrt{a^2+t^2}\,dt}_{=0,\ \text{Integrand ungerade}} + 4\pi \int_{-a}^{a} b\sqrt{a^2+t^2}\,dt =$$

$$4\pi ab \int_{-a}^{a} \sqrt{1-\left(\frac{t}{a}\right)^2}\,dt = 4\pi a^2 b \underbrace{\int_{-1}^{1} \sqrt{1-\tau^2}\,d\tau}_{=\frac{\pi}{2},\ \text{Fläche Halbkreis}} = 2\pi^2 a^2 b.$$

Zum Schluss haben wir die Substitution $\tau = \frac{t}{a} \Longrightarrow dt = a\,d\tau$ durchgeführt.

Mittelpunkt ebener Bereiche: Wir wollen den geometrische Mittelpunkt $(\bar{x}, \bar{y})$ eines ebenen Bereiches $\Omega = \big\{(x, y)\,|\,a \le x \le b,\ f_1(x) \le y \le f_2(x)\big\}$ bestimmen. Ω hat die Fläche $F = \int_a^b \big(f_2(x) - f_1(x)\big)\,dx$. Die Koordinaten des Schwerpunktes sind

$$\bar{x} = \frac{1}{F}\int_a^b x\big(f_2(x) - f_1(x)\big)\,dx \qquad \text{und} \qquad \bar{y} = \frac{1}{2F}\int_a^b \big(f_2(x)\big)^2 - \big(f_1(x)\big)^2\,dx.$$

Die x-Koordinate $\bar{x}$ des Bereiches ist der Mittelwert über die x-Koordinaten aller Punkte von Ω und die y-Koordinate $\bar{y}$ ist der Mittelwert über die y-Koordinaten aller Punkte in Ω. Der Unterschied in den Formeln für $\bar{x}$ und $\bar{y}$ kommt daher, dass bei der Definition des Bereiches Ω die beiden Koordinaten x und y nicht gleichberechtigt verwendet werden, sondern der Bereich von y in Abhängigkeit von x angegeben ist.

Beispiel: Wir berechnen den Mittelpunkt des Bereiches, der von den Kurven $y = x^2$ und $x = y^2$ berandet wird. Lösen wir $x = y^2$ nach y auf, erhalten wir $y = \sqrt{x}$. Damit können wir den Bereich als $\Omega = \big\{(x, y)\,|\,0 \le x \le 1, x^2 \le y \le \sqrt{x}\big\}$ schreiben. Die Fläche von Ω ist

$$F = \int_{-1}^{1} \big(x^{1/2} - x^2\big)\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Weiter ist

$$\int_0^1 x\big(f_2(x) - f_1(x)\big)\,dx = \int_0^1 \big(x^{3/2} - x^3\big)\,dx = \frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{1}{4}x^4\Big|_0^1 = \frac{3}{20}$$

und

$$\int_0^1 \big(f_2(x)\big)^2 - \big(f_1(x)\big)^2\,dx = \int_0^2 \big(x - x^4\big)\,dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5\Big|_0^1 = \frac{3}{10}.$$

Die Koordinaten des Schwerpunktes erhalten wir damit zu

$$\bar{x} = \frac{1}{F}\int_0^1 x\big(f_2(x) - f_1(x)\big)\,dx = \frac{9}{20} \quad \text{und} \quad \bar{y} = \frac{1}{2F}\int_0^1 \big(f_2(x)\big)^2 - \big(f_1(x)\big)^2\,dx = \frac{9}{20}.$$

Literatur

[1] **R. A. Adams:** *Calculus, A complete Course,* Addison-Wesley Verlag

[2] **P. Hartmann:** *Mathematik für Informatiker,* Vieweg Verlag. (als E-Medium über die Hochschulbibliothek verfügbar)

[3] **J. Stewart:** *Calculus, 7e,* Brooks/Cole Publishing Company

[4] **J. Stewart:** *Essential Calculus, 2e,* Brooks/Cole Publishing Company

[5] **G. B. Thomas, R. L. Finney:** *Calculus and Analytic Geometry,* Addison-Wesley Verlag

[6] **G. B. Thomas, M. D. Weir, J. Hass:** *Basisbuch Analysis,* Pearson Studium

[7] **G. B. Thomas, M. D. Weir, J. Hass:** *Analysis 1,* Pearson Studium. (als E-Medium für drei gleichzeitige Nutzer über die Hochschulbibliothek verfügbar)

[8] **D. G. Zill:** *Precalculus with calculus previews,* Jones & Bartlett Learning, 2017. (als E-Medium über die Universität Regensburg verfügbar)

Formelsammlungen

[9] **F. Barth, P. Mühlbauer, F. Nikol, K. Wörle:** *Mathematische Formeln und Definitionen,* Bayerischer Schulbuchverlag

[10] **G. Merzinger, G. Mühlbach, D. Wille, T. Wirth:** *Formeln und Hilfen zur höheren Mathematik,* Binomi Verlag

[11] **L. Papula:** *Mathematische Formelsammlung für Ingenieure und Naturwissenschaftler,* Vieweg+Teubner Verlag

Index