Ostbayerische Technische Hochschule Regensburg
Studiengang Informatik
Dr. G. Tapken

SoSe 2017

3. Übungsblatt zur Mathematik 2

Lösung zu Aufgabe Ü 3.1

a)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{(2^n-6)^2}{2\cdot 4^n+1} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(2^n\right)^2-12\cdot 2^n+36}{2\cdot 4^n+1}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(2^{2n}-12\cdot 2^n+36}{2\cdot 2^{2n}+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{12}{2^n}+\frac{36}{2^{2n}}}{2+\frac{1}{2^{2n}}}\\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1-\frac{12}{2^n}+\frac{36}{2^{2n}}}{\lim\limits_{n\to\infty} 2+\frac{1}{2^{2n}}} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

b)

$$\underbrace{0}_{=:c_n} \le \underbrace{\frac{\left(\cos(n)\right)^2}{\sqrt{n}}}_{=b_n} \le \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}_{:=d_n}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} c_n &= \lim_{n\to\infty} 0 = 0\\
\lim_{n\to\infty} d_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0
\end{aligned}$$

Damit gilt nach dem Sandwich-Theorem

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\cos(n)\right)^2}{\sqrt{n}} = 0$$

c)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n^2-\sqrt{n^4+3n^2+2} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^2-\sqrt{n^4+3n^2+2}\right)\cdot\left(n^2+\sqrt{n^4+3n^2+2}\right)}{n^2+\sqrt{n^4+3n^2+2}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n^4-\left(n^4+3n^2+2\right)}{n^2+\sqrt{n^4+3n^2+2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{-3n^2-2}{n^2+\sqrt{n^4+3n^2+2}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{-3-\frac{2}{n}}{1+\sqrt{1+\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n^4}}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-3-\frac{2}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sqrt{1+\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n^4}}\right)} = \frac{-3}{2}
\end{aligned}$$

d)

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} c_n &= \lim_{n\to\infty} n\cdot\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{42}\right) = \lim_{n\to\infty} n\cdot\left(1-\sum_{k=0}^{42}\binom{42}{k}\left(-\frac{1}{n}\right)\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} n\cdot\left(1-\left(1-\binom{42}{1}\cdot\frac{1}{n}+\sum_{k=2}^{42}\binom{42}{k}\left(-\frac{1}{n}\right)^k\right)\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\binom{42}{1}\cdot\frac{1}{n}-\sum_{k=2}^{42}\binom{42}{k}\left(-\frac{1}{n}\right)^k\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\binom{42}{1}+\sum_{k=2}^{42}\binom{42}{k}\left(-\frac{1}{n}\right)^k\cdot(-n)\\
&= \binom{42}{1}+\sum_{k=2}^{42}\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(\binom{42}{k}\left(-\frac{1}{n}\right)^{k-1}\right)}_{=0} = 42
\end{aligned}
$$

e) Für alle $n \in \mathbb{N}$ so dass

$$
e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^n \geq (2)^n
$$

damit ist unsere Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ also mindestens so groß wie eine divergente und immer positive geometrische Folge und ist damit selber divergent.

f)

$$
\underbrace{\sqrt[n]{\sqrt[n]{1}}}_{a_n} \leq \underbrace{\sqrt[n]{\sqrt[n]{n!}}}_{=e_n} \leq \underbrace{\sqrt[n]{\sqrt[n]{n^n}}}_{c_n}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sqrt[n]{1}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1\\
\lim_{n\to\infty} c_n &= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sqrt[n]{n^n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1
\end{aligned}
$$

Damit gilt nach dem Sandwich-Theorem

$$
\lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sqrt[n]{n!}} = 1
$$

Lösung zu Aufgabe Ü 3.2

a) Wir beweisen die Aussage durch vollständige Induktion.

(IA) $n=1$ $a_1 > \sqrt{x_0}$ gemäß Definition der Folge

(IS) z.z. $\underbrace{a_n > \sqrt{x_0}}_{=(\mathrm{IV})} \quad \Longrightarrow \quad a_{n+1} > \sqrt{x_0}$

Variante 1

$$\begin{array}{rrcl} & a_{n+1} & \overset{!}{>} & \sqrt{x_0} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2}\cdot\left(a_n + \frac{x_0}{a_n}\right) & > & \sqrt{x_0} \\ \Leftrightarrow & a_n + \frac{x_0}{a_n} & > & 2\sqrt{x_0} \\ \Leftrightarrow & a_n^2 + x_0 & > & 2\sqrt{x_0}\cdot a_n \\ \Leftrightarrow & a_n^2 - 2\sqrt{x_0}\cdot a_n + x_0 & > 0 & \\ \Leftrightarrow & \left(\underbrace{a_n - \sqrt{x_0}}_{>0}\right)^2 & > 0 & \end{array}$$

Variante 2:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x_0}{a_n}\right) \overset{*}{>} \sqrt{a_n\cdot\frac{x_0}{a_n}} = \sqrt{x_0}$$

$*$ Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel (echte Ungleichung, da $a_n \neq \frac{x_0}{a_n}$)

Variante 3:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x_0}{a_n}\right) = \frac{1}{2a_n}\cdot({a_n}^2 + x_0) \\ &= \frac{1}{2a_n}\cdot({a_n}^2 - 2a_n\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0}^2 + 2a_n\sqrt{x_0}) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2a_n}}_{\overset{\text{nach (IV)}}{>}0} \underbrace{(a_n - \sqrt{x_0})^2}_{\text{nach (IV)}>0} + \sqrt{x_0} > \sqrt{x_0}. \end{aligned}$$

b) **Variante 1: Induktion**

Induktionsanfang=(IA) $n=1$

$$\begin{array}{rrcl} & a_2 & < & a_1 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2}\cdot\left(a_1 + \frac{x_0}{a_1}\right) & < & a_1 \\ \Leftrightarrow & a_1 + \frac{x_0}{a_1} & < & 2a_1 \\ \Leftrightarrow & \frac{x_0}{a_1} & < & a_1 \\ \Leftrightarrow & x_0 & < & {a_1}^2 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{x_0} & < & a_1 \quad \checkmark \end{array}$$

Induktionsschritt=(IS)

$$\begin{array}{rrcl} & a_{n+2} & \overset{!}{<} & a_{n+1} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2}\cdot\left(a_{n+1} + \frac{x_0}{a_{n+1}}\right) & < & \frac{1}{2}\cdot\left(a_n + \frac{x_0}{a_n}\right) \\ \Leftrightarrow & \left(a_{n+1} + \frac{x_0}{a_{n+1}}\right) & < & \left(a_n + \frac{x_0}{a_n}\right) \\ \Leftrightarrow & a_{n+1}^2\cdot a_n + x_0\cdot a_n & < & a_n^2\cdot a_{n+1} + x_0\cdot a_{n+1} \\ \Leftrightarrow & a_{n+1}^2\cdot a_n - x_0\cdot a_{n+1} & < & a_n^2\cdot a_{n+1} - x_0\cdot a_n \\ \Leftrightarrow & a_{n+1}\cdot\underbrace{(a_n\cdot a_{n+1} - x_0)}_{>0} & < & a_n\cdot\underbrace{(a_n\cdot a_{n+1} - x_0)}_{>0} \\ \Leftrightarrow & a_{n+1} & < & a_n \end{array}$$

Variante 2: Abschätzung

Nach a) ist die Folge durch $\sqrt{x_0} > 0$ nach unten beschränkt und für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x_0}{a_n}\right) - a_n = \frac{x_0 - a_n^2}{2a_n} = \frac{\overbrace{(\sqrt{x_0} - a_n)}^{<0\,(\text{nach a})} \cdot \overbrace{(\sqrt{x_0} + a_n)}^{>0\,(\text{nach a})}}{2 \cdot a_n} < 0.$$

Somit ist die Folge (sogar streng) monoton fallend.

c) Die Folge konvergiert nach dem „hinreichenden Konvergenzkriterium“ für Folgen (Satz 2.6 ii)) gegen einen Grenzwert a.
Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}$ muss gelten

$$\begin{aligned} & & a &= \frac{1}{2}\left(a + \frac{x_0}{a}\right) \\ &\Longleftrightarrow & 2a &= a + \frac{x_0}{a} \\ &\Longleftrightarrow & a &= \frac{x_0}{a} \\ &\Longleftrightarrow & a^2 &= x_0 \\ &\overset{a>0}{\Longleftrightarrow} & a &= \sqrt{x_0} \end{aligned}$$

Also ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{x_0}$.