

Projet d'imagerie médicale

Recalage difféomorphique de densités

Youcef Akrouit - Antoine Commaret - Amyn Kassara
Master MVA

4 Décembre 2019

1 Introduction

Le recalage est une technique de traitement d'images permettant de faire correspondre celles-ci via des transformations géométriques. Plusieurs approches ont été développées par le passé. Nous présentons ici la méthode [1], qui est particulièrement populaire dans la communauté d'imagerie médicale.

L'idée consiste à voir les images comme des densités sur des variétés et les déformations comme des actions du groupe de difféomorphismes [2]. On bénéficie alors des résultats de la théorie de la géométrie différentielle comme le montre [3]. Ce modèle permet de voir le problème de recalage sous l'angle du transport optimal.

2 Cadre et premiers résultats

2.1 Préliminaires

L'objectif ici est de poser le bon cadre afin d'introduire en toute rigueur le problème de recalage difféomorphique de densités.

Définition 1. Soit M une variété lisse orientée et Riemannienne de dimension n avec une forme de volume dx .

- $\text{Dens}(M) := \{\rho \in \mathcal{C}^\infty(M) : \forall x \in M, \rho(x) > 0\}$ est l'ensemble des densités lisses sur M .
- La masse de $\Omega \subset M$ par rapport à $\rho \in \text{Dens}(M)$ est donnée par $\text{Mass}_\rho(\Omega) := \int_\Omega \rho dx$.
- $\text{Diff}(M) := \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(M, M) : \varphi \text{ est bijective d'inverse } \mathcal{C}^\infty\}$ est l'ensemble des difféomorphismes sur M . Il a une structure naturelle de groupe pour la composition.

Proposition 2. $\text{Diff}(M)$ agit naturellement sur $\text{Dens}(M)$ via le tiré en arrière et le poussé en avant.

- *Le tiré en arrière :* $(\varphi, \rho) \in \text{Diff}(M) \times \text{Dens}(M) \mapsto \varphi^* \rho = |D\varphi| \rho \circ \varphi$ est une action à droite, i.e. $(\varphi \circ \eta)^* \rho = \eta^*(\varphi^* \rho)$.
- *Le poussé en avant :* $(\varphi, \rho) \in \text{Diff}(M) \times \text{Dens}(M) \mapsto \varphi_* \rho = (\varphi^{-1})^* \rho$ est une action à gauche.

Remarque 3. Ces actions conservent la masse. En effet, $\forall \Omega \in M, \text{Mass}_{\varphi_* \rho}(\varphi(\Omega)) = \text{Mass}_\rho(\Omega)$.

Définition 4. Pour $\rho \in \text{Dens}(M)$, $\text{Diff}_\rho(M) := \{\varphi \in \text{Diff}(M) : \varphi_* \rho = \rho\}$ est le sous-groupe d'isotropie de ρ .

Le recalage de densités consiste à générer de nouvelles densités à partir de $\rho_0 \in \text{Dens}(M)$, en appliquant des difféomorphismes. On se limite ici aux poussés en avant. Dans ce cas, on ne peut obtenir que des éléments de la $\text{Diff}(M)$ -orbite de ρ_0 . Le lemme suivant montre qu'il s'agit des densités donnant des masses totales égales à celle de ρ_0 .

Lemme 5 (Moser). Soit M une variété compacte sans bords. Soient $\rho_0, \rho_1 \in \text{Dens}(M)$. On a :

$$\exists \varphi \in \text{Diff}(M) : \varphi_* \rho_0 = \rho_1 \iff \text{Mass}_{\rho_1}(M) = \text{Mass}_{\rho_0}(M)$$

φ est unique à composition près, à droite par un élément de $\text{Diff}_{\rho_0}(M)$ ou à gauche par un élément de $\text{Diff}_{\rho_1}(M)$.

Ce résultat permet d'identifier l'ensemble des $\text{Diff}(M)$ -orbites dans $\text{Dens}(M)$ à \mathbb{R}_+ .

Remarque 6. Dans le recalage d'images, l'action sur une image est la composition par un difféomorphisme. La structure des $\text{Diff}(M)$ -orbites est plus complexe. Par exemple, le problème de projection d'une orbite sur une autre est mal-posé. A contrario, le recalage de densités de même masse est un problème bien-posé et possède une interprétation géométrique permettant de développer des algorithmes efficaces.

On peut généraliser les actions vues précédemment de la manière suivante.

Définition 7. Pour $\alpha > 0$, $\text{Diff}(M)$ agit à gauche sur $\text{Dens}(M)$ via une α -action : $(\varphi, \rho) \mapsto \varphi_{\alpha*}\rho = |D\varphi^{-1}|^\alpha \rho \circ \varphi^{-1}$

Remarque 8. Cette classe d'actions est plus riche. En effet, nous voulons étudier des images de scanner CT. Celles-ci se comportent comme des α -densités, avec $\alpha < 1$.

Définition 9. La p -masse de $\Omega \subset M$ par rapport à $\rho \in \text{Dens}^\alpha(M)$ est donnée par $p - \text{Mass}_\rho(\Omega) := \int_\Omega \rho^p dx$.

Il est possible de généraliser sans difficulté le lemme de Moser pour les α -actions.

Lemme 10. Soit M une variété compacte sans bords. Soient $\rho_0, \rho_1 \in \text{Dens}(M)$. On a :

$$\exists \varphi \in \text{Diff}(M) : \varphi_{\alpha*}\rho_0 = \rho_1 \iff \frac{1}{\alpha} - \text{Mass}_{\rho_1}(M) = \frac{1}{\alpha} - \text{Mass}_{\rho_0}(M)$$

2.2 Écriture du problème

Le recalage de densités consiste à trouver un difféomorphisme φ optimal pour transporter une α -densité source ρ_0 vers une α -densité cible ρ_1 . Le lemme de Moser montre qu'il y a un espace de dimension infinie de solutions au problème. Comment en choisir alors une seule ? Pour cela, on introduit une fonction $\mathcal{R} : \text{Diff}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ qui correspond à un terme de régularisation.

Définition 11. Soit ρ_0, ρ_1 deux α -densités de même $\frac{1}{\alpha}$ -masse. Le problème régularisé de recalage exact est le suivant.

$$\underset{\varphi \in \text{Diff}(M)}{\text{argmin}} \mathcal{R}(\varphi) \quad \text{sous la contrainte} \quad \varphi_{\alpha*}\rho_0 = \rho_1$$

Ce problème d'optimisation a des solutions différentes en fonction du choix de \mathcal{R} . En pratique, on construit des termes de régularisation qui garantissent existence, unicité de la solution et un calcul rapide de l'optimum. Par ailleurs, celui-ci doit correspondre à une déformation "qui a du sens" dans le cadre étudié.

On introduit à présent la relaxation du problème précédent, qui ne nécessite plus des α -densités de même $\frac{1}{\alpha}$ -masse.

Définition 12. Soit ρ_0, ρ_1 deux α -densités. Le problème de recalage inexact de densités est le suivant.

$$\underset{\varphi}{\text{argmin}} \mathcal{E}(\varphi) = \lambda d(\varphi_{\alpha*}\rho_0, \rho_1) + \mathcal{R}(\varphi)$$

avec $\lambda > 0$ un paramètre d'échelle et $d(\cdot, \cdot)$ une distance sur l'espace des densités (mesure de similarité).

2.3 Cadre LDDMM

Le cadre LDDMM consiste à mesurer la régularité d'un difféomorphisme grâce à la fonction suivante $\mathcal{R}(\varphi) = \text{dist}(\text{id}, \varphi)$ avec $\text{dist}(\cdot, \cdot)$ la distance géodésique induite par une métrique invariante à droite sur $\text{Diff}(M)$.

Nous allons maintenant construire un exemple de métrique sur $\text{Diff}(M)$. Supposons M muni d'une métrique Riemannienne lisse g avec une densité volume μ . On introduit un opérateur d'inertie $A : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ avec $\mathcal{X}(M)$ l'ensemble des champs de vecteurs lisses (i.e. l'algèbre de Lie sur $\text{Diff}(M)$). Pour simplifier, $A = (1 - \Delta_g)^k$ pour k un entier (Δ_g est le Hodge-Laplacien de g).

A induit un produit scalaire sur $\mathcal{X}(M)$ défini par $G_{\text{id}}(X, Y) := \int_M g(AX, Y) \mu$. En translatant, on l'étend à une métrique invariante à droite sur $\text{Diff}(M)$.

$$G_\varphi(h, k) := G_{\text{id}}(h \circ \varphi^{-1}, k \circ \varphi^{-1}) \quad (\star)$$

Définition 13. Soit ρ_0, ρ_1 deux α -densités. Le problème de recalage exact dans le cadre LDDMM est le suivant.

$$\underset{\varphi}{\text{argmin}} \text{dist}(\text{id}, \varphi) \quad \text{sous la contrainte} \quad \varphi_{\alpha*}\rho_0 = \rho_1$$

avec $\text{dist}(\cdot, \cdot)$ la distance géodésique associée à la métrique (\star) .

Intuitivement, nous voulons obtenir la transformation la plus proche de l'identité, transporte la densité source vers la cible. Le théorème suivant nous donne une manière pour obtenir la solution. Pour simplifier, on prend $\alpha = 1$.

Théorème 14. Soit $\rho(t)$ une géodésique minimisante connectant ρ_0 à ρ_1 , 2 densités de même masse. La solution du problème LDDMM est donnée par $\varphi(1)$, avec φ un relèvement horizontal de la géodésique $\rho(t)$, pour la projection $\pi : \text{Diff}(M) \rightarrow \text{Diff}(M)/\text{Diff}_{\rho_0}(M) \subset \text{Dens}(M)$.

Le résultat précédent nous donne une interprétation géométrique pour la solution du problème de recalage. En pratique, nous ne pouvons l'utiliser que dans les cas où il y a une solution explicite pour le problème de la valeur aux bords de la géodésique, comme dans le transport optimal d'information, détaillé plus bas.

3 Résolution dans le cadre du LDDMM

Désormais, nous allons utiliser le cadre LDDMM afin de résoudre le problème de recalage exact de densités. Nous allons montrer qu'avec une métrique adaptée, on peut se ramener un problème de transport optimal d'information, qu'on pourra résoudre grâce à un algorithme présenté dans l'article [4]. Enfin, nous allons préciser les limites théoriques et pratiques de cette modélisation.

3.1 Choix d'une métrique sur l'espace des densités

Afin de construire une métrique invariante à droite sur le groupe des difféomorphismes, comme le suggère le LDDMM, nous allons d'abord choisir une métrique Riemannienne sur la variété $\text{Dens}(M)$ puis là relier à une métrique sur $\text{Diff}(M)$. Pour cela, on introduit la métrique de *Fisher-Rao* puis on présentera les propriétés qui justifient son utilisation.

Définition 15. (*Métrique d'information de Fisher*) La métrique de *Fisher-Rao* est une métrique Riemannienne sur $\text{Dens}(M)$ définie par :

$$G_\rho(\alpha, \beta) = \frac{1}{4} \int_M \frac{\alpha}{\rho} \frac{\beta}{\rho} \rho$$

avec $\rho \in \text{Dens}(M)$ et $\alpha, \beta \in T_\rho \text{Dens}(M)$.

Ce choix est principalement motivé par l'existence d'expressions littérales des géodésiques de $\text{Dens}(M)$. Une autre propriété importante de cette métrique est son invariance sous l'action du groupe de difféomorphismes, ce qui a réel intérêt pratique pour notre modèle. Cette métrique est même la seule vérifiant cette invariance. Ces propriétés font de la métrique de Rao-Fisher, la métrique Riemannienne canonique sur $\text{Dens}(M)$.

3.2 Construction d'une métrique sur le groupe de Difféomorphismes

Dans cette section, nous allons construire une métrique Riemannienne sur $\text{Diff}(M)$. Cette métrique doit être invariante à droite. Cette invariance à droite permet de restreindre l'étude aux distances de difféomorphismes à l'identité. Il suffit donc de définir cette métrique sur l'algèbre de Lie de $\text{Diff}(M)$: $\chi(M)$ l'ensemble des champs de vecteurs différentiables.

Nous définissons donc dans un premier temps la métrique d'Information, puis nous citons quelques unes de ses propriétés qui la rendent intéressante pour notre problème :

Définition 16. (*Métrique d'Information*) La métrique d'Information est la métrique Riemannienne invariante à droite sur $\text{Diff}(M)$ définie en l'identité par :

$$\forall u, v \in \chi(M), \quad G_{\text{id}}(u, v) = - \int_M \langle \Delta u, v \rangle dx + \sum_{i=1}^k \int_M \langle u, \xi_i \rangle dx \int_M \langle v, \xi_i \rangle dx$$

où Δ est l'opérateur de Laplace-de Rahm et ξ_1, \dots, ξ_k est une base des champs harmoniques sur M .

Cette métrique appartient à une famille de métriques introduite dans [5] qui possède plusieurs propriétés intéressantes dans le cadre de ce problème, et qui est venue remplir un besoin important : concevoir une métrique invariante à droite sur $\text{Diff}(M)$, et qui "descend" sur $\text{Dens}(M)$. On explique brièvement cette notion, qu'on estime centrale dans le choix de cette métrique :

Définition 17. (*Submersion Riemannienne*)

On appelle **Submersion Riemannienne** de (M, g) vers (N, h) toute submersion lisse $p : M \rightarrow N$ telle que pour tout $x \in M$ la différentielle $d_x p$ est une isométrie de H_x vers $T_{p(x)} N$, où $H_x \subset T_x M$ est le sous-espace horizontal défini par : $H_x := \{(d_x p)^{-1}(0)\}^\perp$.

Plus intuitivement, une submersion Riemannienne de M vers N permet de relier les géodésiques horizontales (géodésiques dont les vecteurs tangents en x sont dans H_x) de M aux géodésiques de N tout en préservant leur longueur. On dira alors qu'une métrique sur $\text{Diff}(M)$ **descend** sur $\text{Dens}(M)$ s'il existe une **submersion Riemannienne** de $\text{Diff}(M)$ sur $\text{Dens}(M)$.

La métrique d'Information a été construite dans le but de satisfaire cette propriété. Cette métrique permet aussi de préserver l'horizontalité au sein d'une même géodésique : une géodésique initialement horizontale reste horizontale. Elle présente aussi l'intérêt d'avoir des géodésiques simples à calculer.

Nous verrons dans la section suivante que le choix de ces deux métriques, motivé par les diverses propriétés citées, permet de garantir la convergence de l'algorithme résolvant le problème de recalage difféomorphique exact.

3.3 Résolution

Définition 18. (*Transport optimal d'information*)

Soient $\rho_0, \rho_1 \in \text{Dens}(M)$ et une métrique Riemannienne sur M avec une forme de volume ρ_0 , un problème de transport optimal d'information s'écrit :

$$\min_{\phi} \epsilon(\phi) = d_I(\text{id}, \phi) = d_F(\rho_0, \phi_* \rho_0) \quad \text{sous la contrainte} \quad \phi_* \rho_0 = \rho_1$$

On note l'importance du fait que les métriques de $\text{Diff}(M)$ et $\text{Dens}(M)$ "communiquent", ce qui permet d'obtenir une expression littérale de $d_I(\text{id}, \phi)$.

On note aussi qu'on ajoute une condition supplémentaire par rapport à la formulation précédente : en notant g la métrique Riemannienne choisie sur M , on suppose que $\text{vol}_g = \rho_0$. Cette condition s'appelle la **condition de compatibilité**.

En pratique, afin de s'assurer que la condition de compatibilité soit respectée, on construit une métrique g sur M adaptée pour une densité source ρ_0 donnée. Deux méthodes possibles sont expliquées dans [4]

Théorème 19. *Existence et unicité de solution*

Le problème de transport optimal d'information admet une unique solution ϕ . Cette solution est donnée explicitement par $\phi(1)$, où $\phi(t)$ la solution au problème :

$$\begin{aligned} \Delta f(t) &= \frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} \circ \phi(t) \\ v(t) &= \nabla(f(t)) \\ \frac{d}{dt} \phi(t)^{-1} &= v(t) \circ \phi(t)^{-1} \\ \phi(0) &= \text{id} \end{aligned}$$

avec $\rho(t)$ est la géodésique reliant ρ_0 à ρ_1 .

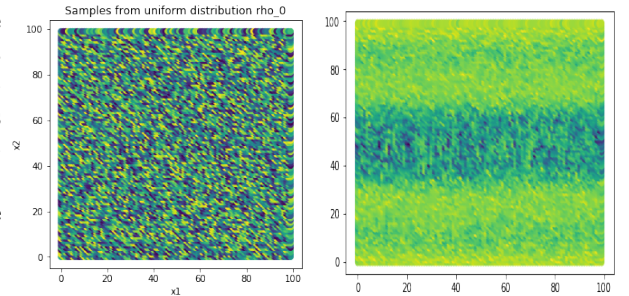
Ainsi, sous l'hypothèse de compatibilité de la métrique de M , résoudre le problème de transport optimal d'information revient à résoudre des équations de Poisson. L'algorithme proposé par l'article permet de trouver une géodésique horizontale ($\phi(t)$) de difféomorphismes, où $\phi(1)$ est la solution au problème de transport optimal d'information. L'algorithme est en libre accès à l'adresse suivante : <https://github.com/kmodin/ddmatch>.

3.4 Applications et limites du modèle

Nous appliquons ici l'algorithme de transport optimal d'information à un problème d'échantillonnage d'une densité de probabilités non uniforme, afin de montrer l'efficacité de ce modèle dans certains cas particuliers. Ensuite, nous allons illustrer les limites de cet algorithme avec un exemple simple.

3.4.1 Échantillonnage d'une densité de probabilités non uniforme

L'objectif est de générer des échantillons d'une densité de probabilité arbitraire, en déformant des échantillons d'une densité de probabilité uniforme, qu'on peut obtenir avec des générateurs de nombres aléatoires. Dans \mathbb{R}^2 , on cherche donc un difféomorphisme qui transforme des échantillons d'une densité uniforme (x_i, y_i) vers des échantillons de la densité cible ρ_1 . Pour notre exemple, illustré dans le notebook, la densité cible est $\rho_1 = (1 - 0.8 \cos x \sin 2y) dx dy$



3.4.2 Limites du modèle

Illustrons à l'aide d'un exemple très simple, la raison pour laquelle l'approche par le transport optimal d'information n'est pas adaptée pour le recalage d'image. Nous cherchons à transformer une bande verticale (image source) vers une bande horizontale (image cible). L'algorithme ne permettant que des densités strictement positive, nous ajoutons une constante aux deux images. Nous obtenons alors le résultat illustré par la figure 3.

Ainsi, le recalage obtenu n'est pas satisfaisant, à la place de transporter les pixels de la bande horizontale vers les pixels de la bande verticale, l'algorithme produit des pixels noirs en compressant les pixels existants. Ce modèle n'est donc pas concluant lorsque les densité source et cible sont nulles sur des régions entières de l'image, ce qui est le cas sur la plupart des images médicales (MRI bias field).

Enfin, cette méthode ne donne pas la déformation inverse, qui permet de passer de ρ_1 vers ρ_0 . D'autres modèles, notamment les SVF (stationary velocity field) [6] ont l'avantage de l'explicitier.

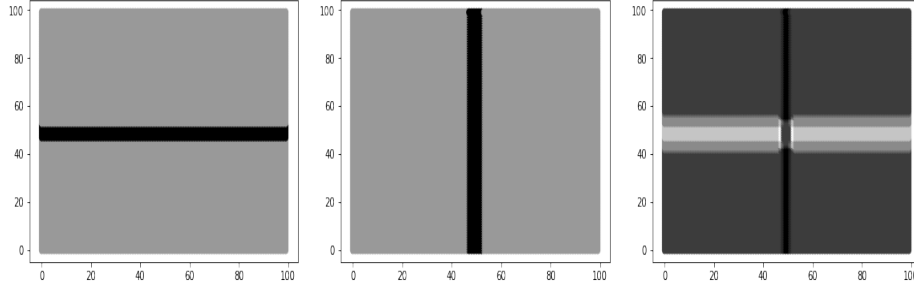


FIGURE 1 – À gauche, l'image source, au centre l'image cible, et à droite l'action du difféomorphisme sur la densité source

4 Approche par flot de gradient

4.1 Une nouvelle régularisation du problème de contrôle optimal

Cherchons à contourner ces problèmes. Plus globalement, on cherche à rendre les idées précédentes plus flexibles. On peut par exemple généraliser aux cas où la mesure volume sur la variété Ω est infinie, par exemple. Quelque part, on cherche à se débarrasser du rôle central de la densité constante, car s'y ramener implique de nombreux calculs et des formules assez complexes - comme si on en avait pas déjà assez ! On considère dès lors uniquement des densités dans $\text{Dens}(M)$. On définit l'extension naturelle de la distance de Fisher-Rao comme étant

$$d_F^2(I_0 dx, I_1 dx) = \int_{\Omega} (\sqrt{I_0} - \sqrt{I_1})^2 dx$$

C'est la seule métrique sur les densités de probabilité qui est invariante sous l'action des difféomorphismes, c'est à dire que $\forall \varphi \in \text{Diff}(M)$, on a

$$d_F^2(I_0 dx, I_1 dx) = d_F^2(\varphi_*(I_0 dx), \varphi_*(I_1 dx))$$

En cherchant à généraliser l'algorithme défini précédemment, on pose une nouvelle fonctionnelle à minimiser, toujours interprétée comme une énergie :

$$E(\varphi) = \underbrace{d_F^2(\varphi_*(f dx), (f \circ \varphi^{-1}) dx)}_{E_1(\varphi)} + \underbrace{d_F^2(\varphi_*(I_0 dx), I_1 dx)}_{E_2(\varphi)}$$

Le premier terme est un terme de *régularisation*. On peut choisir la fonction f à notre convenance, une flexibilité supplémentaire qui s'avèrera pertinente. Le second terme mesure l'écart à réduire selon φ entre les deux distributions. La fonction f est un paramètre plus malléable qu'un simple rapport de priorité, comme on le trouve au début.

4.2 Minimiser la fonctionnelle énergie

Tout d'abord, intéressons nous à la forme des solutions du problème qui consiste à minimiser $E(\varphi)$. Si l'ensemble des solutions est non vide, alors la solution n'est pas unique car pour φ solution, $\psi \circ \varphi$ l'est aussi pour tout $\psi \in \text{Diff}_1(\Omega) \cap \text{Diff}_{I_0}$, en ayant posé, pour toute densité $I dx$

$$\text{Diff}_I(\Omega) = \{\psi \in \text{Diff}(\Omega) \text{ tel que } |D\psi|(I \circ \psi) = I\}$$

l'ensemble des difféomorphismes laissant I stable par tiré en arrière. Ce n'est pas un *problème bien posé*. Nous n'avons pas besoin d'un tel résultat pour mettre en place un algorithme d'approximation, cependant il pourrait converger vers un minimum local de la fonctionnelle.

Il faut maintenant trouver comment profiter de la notion d'énergie. La métrique- H^1 sur les difféomorphismes est définie par

$$G_{\varphi}^I(U, V) = \int_{\Omega} \langle -\Delta u, v \rangle dx$$

où les u, v sont pris à partir de U, V de sorte à ce que la métrique soit invariante à droite, conformément à la définition 16. Pour chercher le φ optimal, on va simplement utiliser une descente de gradient, c'est-à-dire approximer une solution à l'équation différentielle :

$$\dot{\varphi} = -\nabla^{G^I} E(\varphi)$$

Pour cela, on a besoin de calculer le G^I gradient de notre fonctionnelle :

Lemme 20. *Le G^I gradient de notre fonctionnelle s'écrit*

$$\nabla^{G^I} E = -\Delta^{-1}(-\text{grad}(f \circ \varphi^{-1}(1 - \sqrt{|D\varphi^{-1}|})) - \sqrt{|D\varphi^{-1}|} I_0 \circ \varphi^{-1} \text{grad}(\sqrt{I_1}) + \text{grad}(\sqrt{|D\varphi^{-1}|} I_0 \circ \varphi^{-1} I_1))$$

L'opérateur Δ^{-1} a lieu d'être par existence et unicité des solutions au problème de Dirichlet.

4.3 Algorithme

Algorithme 1 : Recalage de densité

```

1 choisir un  $\epsilon > 0$ 
2  $\varphi^{-1} \leftarrow \text{id}$ 
3  $|D\varphi^{-1}| \leftarrow 1$ 
4 tant que moins de  $k$  itérations faire
5    $\varphi_* I_0 \leftarrow I_0 \circ \varphi^{-1} |D\varphi^{-1}|$ 
6    $u \leftarrow -\nabla(f \circ \varphi^{-1}(1 - \sqrt{|D\varphi^{-1}|})) - \sqrt{|D\varphi^{-1}|} I_0 \circ \varphi^{-1} \nabla(\sqrt{I_1}) + \nabla(\sqrt{|D\varphi^{-1}|} I_0 \circ \varphi^{-1} I_1)$ 
7    $v \leftarrow -\Delta^{-1}(u)$ 
8    $\varphi^{-1}(y) \leftarrow \varphi^{-1}(y + \epsilon v(y))$ 
9    $|D\varphi^{-1}| \leftarrow |D\varphi^{-1}| (\text{id} + \epsilon v) e^{\epsilon \text{div}(v)}$ 

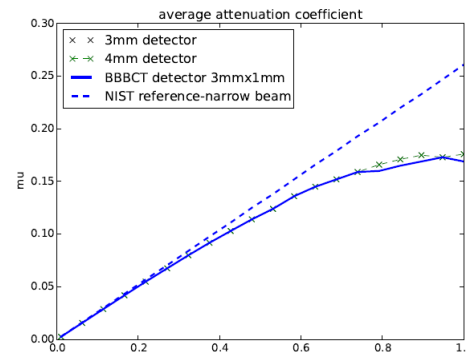
```

Il s'agit de la mise en place du Schéma d'Euler. La dernière ligne est différente de celle trouvée dans l'article, car leur formule est mauvaise. Le code utilise d'ailleurs la nouvelle formule.

4.4 Utilisation : recalage de densité thoracique

4.4.1 Prendre en compte les problèmes de mesure

Il s'agit d'utiliser l'algorithme pour évaluer des anomalies respiratoires lors d'un cycle inspiration/expiration. On obtient les données via "Computed Tomography". Elles sont en quatre dimensions (3 spatiales, et le temps d'un cycle). La mesure n'est toutefois pas parfaite, ce qui à prendre en compte dans notre algorithme. Plus précisément, cela consiste à mesurer l'*atténuation linéaire* $\mu(x) = mp(x)$ où m est le coefficient d'atténuation de masse qui dépend de l'énergie des rayons X. L'atténuation est proportionnelle à la densité réelle. Toutefois, les mesures ne sont pas exactes car les rayons X envoyés sont en pratique trop larges ; c'est cet effet qu'il nous faut compenser. On mesure l'écart théorie/pratique sur des données qu'on connaît.



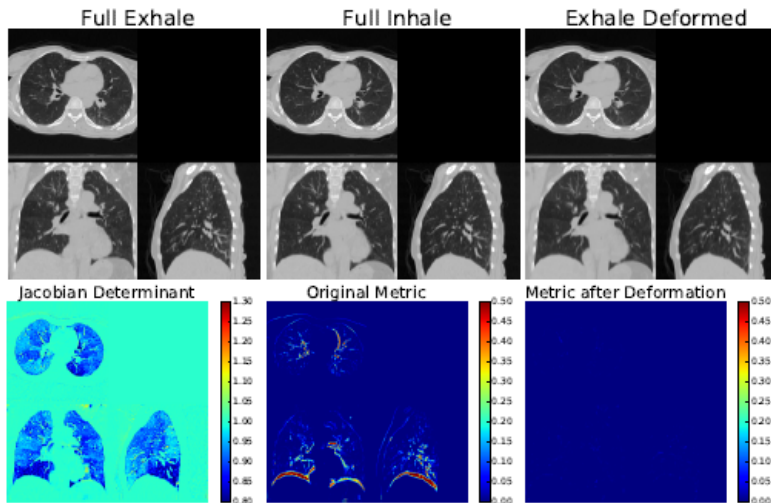
D'autre part, pour un patient, on s'attend à une relation d'inverse proportionnalité entre le volume et la densité moyenne dans une zone fermée Ω_t qui varie avec le temps - ici, avec le cycle de respiration - qui s'écrit $V_t = \frac{C}{D_t}$. Pour autant, ce n'est pas ce qui est mesuré : la correspondance entre $\ln(V_t)$ et $\ln(D_t)$ n'est pas affine de pente -1 , mais plutôt $-\alpha$. Comme c'est ce rapport qui caractérise la conservation de la masse, il apparaît que le comportement dans les poumons suit une action d' α -densité. L' α en question dépend du patient, et sur un panel de test il convient de prendre un α moyen qui sera le plus satisfaisant pour des données futures. Comme on a une correspondance directe entre les 1-densités et les α -densités, on peut se contenter sans perte de généralité de l'algorithme présenté.

4.4.2 Choix d'un paramètre de poids

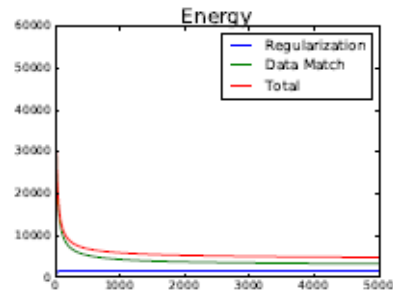
C'est le moment de choisir la fonction paramètre f efficacement ! On veut que la densité modélise la physiologie du thorax. Les régions où $f(x)$ est grand voient une pénalisation plus forte des déformations qui ne préservent pas le volume, contrairement aux régions où $f(x)$ est petit. On sait de plus que les poumons sont assez compressibles quand l'air entre et sort, alors que les tissus organiques les entourant sont incompressibles. On simule une indicatrice de haute densité via la sigmoïde $x \mapsto \frac{1}{1+e^{-I_o(x)}}$.

4.4.3 Résultats et conclusion

Bien qu'on ait pas de résultats théoriques sur la convergence de l'algorithme, la convergence est vérifiée et la correspondance plutôt bonne :



L'algorithme est efficace : en cherchant à faire correspondre l'après expiration (à gauche) à l'après inspiration (au milieu), on obtient l'image de droite qui est proche du résultat attendu - en témoigne la métrique après déformation entre les deux images. L'algorithme semble converger rapidement sur cet exemple (jeu de voxels $256 \times 256 \times 94$)



Finalement, le but est atteint : on a trouvé un moyen de créer des difféomorphismes bien réguliers pour faire correspondre des données assez semblables. Pour comprendre l'algorithme jusqu'au bout, il faudrait :

- Avoir une idée de la vitesse de convergence suivant la taille des données et la différence entre les images à faire correspondre. Il a fallu pour l'exemple précédent 9 minutes de calcul sur un bon processeur de 2017.
- Savoir à partir de quelle ressemblance entre les données initiales et les données d'arrivée on peut obtenir une convergence pratique, c'est-à-dire vers de "beaux" difféomorphismes (ayant une bonne constante de Lipschitz, par exemple).
- Maîtriser la structure de l'ensemble des solutions pour s'assurer qu'on a convergence vers un minimum global.

4.4.4 Critiques

La lecture de l'article est assez complexe. La partie 6 sur l'approche par flot de gradient contient un faux calcul (fort heureusement corrigés dans le code) et est remplie de coquilles qui rendent parfois la compréhension difficile. Quelques détails non triviaux sont omis, mais sont sûrement supposés compris par des lecteurs aguerris.

Références

- [1] Bauer M, Joshi S, Modin K. Diffeomorphic density registration. In : Riemannian Geometric Statistics in Medical Image Analysis. Elsevier ; 2020. p. 577–603.
- [2] Grenander U, Miller MI. Computational anatomy : An emerging discipline. Quarterly of applied mathematics. 1998 ;56(4) :617–694.
- [3] Jean Gallier JQ. 17. In : Differential Geometry and Lie Groups : A Computational Perspective. University of Pennsylvania ; 2019. p. 527–528.
- [4] Bauer M, Joshi S, Modin K. Diffeomorphic Density Matching by Optimal Information Transport. SIAM Journal on Imaging Sciences. 2015 Jan ;8(3) :1718–1751. Available from : <http://dx.doi.org/10.1137/151006238>.
- [5] Modin K. Generalized Hunter–Saxton Equations, Optimal Information Transport, and Factorization of Diffeomorphisms. The Journal of Geometric Analysis. 2014 Feb ;25(2) :1306–1334. Available from : <http://dx.doi.org/10.1007/s12220-014-9469-2>.
- [6] Vercauteren T, Pennec X, Perchant A, Ayache N. Symmetric Log-Domain Diffeomorphic Registration : A Demons-Based Approach. In : Proceedings of the 11th International Conference on Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention - Part I. MICCAI '08. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag ; 2008. p. 754–761. Available from : http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-85988-8_90.