Projet d'imagerie médicale
Recalage difféormorphique de densités

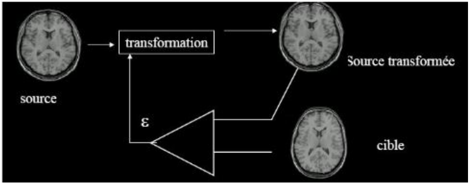
Youcef Akrout - Antoine Commaret - Amyn Kassara

Master MVA

4 décembre 2019

Introduction

- Recalage d'images : "mise en correspondance" via des transformations géométriques.
- Applications en imagerie médicale :
  - Recalage inter-patients
  - Recalage intra-patients



Plan

1. Formalisme et écriture du problème
2. Transport optimal d'information
3. Approche par flot de gradient
4. Conclusion et perspectives

Préliminaires

M est une variété Riemannienne de dimension n.

Densité, difféomorphisme

- $\mathrm{Dens}(M) := \{\rho \in \mathcal{C}^\infty(M) : \forall x \in M,\ \rho(x) > 0\}$
- $\mathrm{Diff}(M) := \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(M, M) : \varphi$ est bijective d'inverse $\mathcal{C}^\infty\}$

Action de groupe

$\mathrm{Diff}(M)$ agit naturellement sur $\mathrm{Dens}(M)$ via le poussé en avant.

$$(\varphi, \rho) \in \mathrm{Diff}(M) \times \mathrm{Dens}(M) \mapsto \varphi_* \rho = |D\varphi^{-1}|\ \rho \circ \varphi^{-1}$$

Écriture du problème - LDDMM

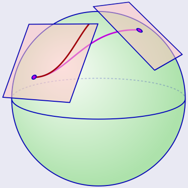
Problèmes de recalage de densité

Soit $\rho_0, \rho_1 \in \mathrm{Dens}(M)$.

- Problème exact : $\underset{\varphi \in \mathrm{Diff}(M)}{\operatorname{argmin}} \ \mathcal{R}(\varphi)$ sous la contrainte $\varphi_* \rho_0 = \rho_1$

Cadre LDDMM

- $\mathcal{R}(\varphi) = \mathrm{dist}(\mathrm{id}, \varphi)$ avec $\mathrm{dist}(\cdot, \cdot)$ une distance géodésique induite sur $\mathrm{Diff}(M)$.
- $G_{\mathrm{id}} : (X, Y) \in \mathcal{X}(M) \mapsto \displaystyle\int_M g(AX, Y)\mu$
- Pour $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$, $G_\varphi(h, k) := G_{\mathrm{id}}(h \circ \varphi^{-1}, k \circ \varphi^{-1})$



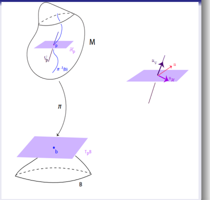
Choix des métriques

Métrique sur Dens(M)

- Métrique de Rao-Fisher : $G_\rho(\alpha, \beta) = \frac{1}{4} \int_M \frac{\alpha}{\rho} \frac{\beta}{\rho} \rho$
- Intérêts : Invariance sous l'action de Diff(M), géodésiques explicites.

Métrique sur Diff(M)

- On choisit la métrique d'information.
- Intérêt : Invariante à droite, "descend" sur la métrique de Fisher-Rao.
- Les deux métriques communiquent $\rightarrow$ distances explicites : $d_I(id, \phi) = d_F(\rho_0, \phi_* \rho_0)$



Résolution du problème exact - LDDMM

Existence et unicité de la solution

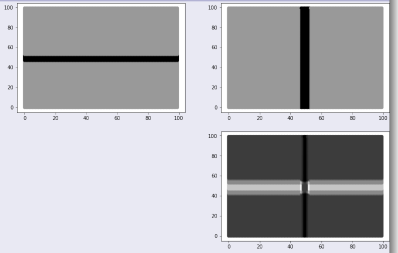
Il existe une unique solution, définie par $\phi(1)$, où $\phi(t)$ vérifie :

$$\Delta f(t) = \frac{\dot{\rho(t)}}{\rho(t)} \circ \phi(t), \quad v(t) = \nabla(f(t)), \quad \frac{d}{dt}\phi(t)^{-1} = v(t) \circ \phi(t)^{-1}$$

avec $\phi(0) = id$ et $\rho(t)$ la géodésique reliant ρ_0 à ρ_1.

Application

- Échantillonnage d'une densité de probabilités non uniforme
- Modèle pas adapté aux images médicales : compresse les pixels au lieu de les transporter.
- Limite théorique : pas de transformation inverse.



Approche par flot de Gradient

- Comment généraliser l'approche ?
- Comment rendre les paramètres plus flexibles ?

Approche par flot de gradient

Nouvelle métrique invariante

On définit une nouvelle métrique sur les difféomorphismes :

$$d_F^2(I_0 \mathrm{d}x, I_1 \mathrm{d}x) = \int_\Omega (\sqrt{I_0} - \sqrt{I_1})^2 \mathrm{d}x$$

Une nouvelle métrique de densité invariante

Dans l'espace des densités, la métrique-H^1 est définie par

$$G_\varphi^I(U, V) = \int_\Omega \langle -\Delta u, v \rangle \mathrm{d}x$$

où les u, v sont pris à partir de U, V de sorte à ce que la métrique soit invariante à droite.

- Intérêt : formule explicite pour le gradient fonctionnel

Nouvelle approche énergétique

Nouvelle énergie, nouveau problème de de minimisation

$$E(\varphi) = \underbrace{d_F^2(\varphi_*(f\mathrm{d}x), (f \circ \varphi^{-1})\mathrm{d}x)}_{E_1(\varphi),\ \text{régularisation}} + \underbrace{d_F^2(\varphi_*(I_0\mathrm{d}x), I_1\mathrm{d}x)}_{E_2(\varphi),\ \text{correspondance à l'objectif}}$$

Flot de Gradient

Approcher par un schéma d'Euler la solution de :

$$\dot{\varphi} = -\nabla^{G^I} E(\varphi)$$

Calcul du gradient fonctionnel

Le G^I gradient de notre fonctionnelle s'écrit :

$$\nabla^{G^I} E = -\Delta^{-1}(-\nabla(f \circ \varphi^{-1}(1 - \sqrt{|D\varphi^{-1}|}))$$

$$- \sqrt{|D\varphi^{-1}|\, I_0 \circ \varphi^{-1}} \nabla(\sqrt{I_1}) + \nabla(\sqrt{|D\varphi^{-1}|\, I_0 \circ \varphi^{-1} I_1})$$

Algorithme

Il s'agit d'appliquer toutes les idées précédentes :

Algorithme 1 : Recalage de densité

choisir un $\epsilon > 0$

$\varphi^{-1} \leftarrow \mathrm{id}$

$\left|D\varphi^{-1}\right| \leftarrow 1$

tant que *moins de k itérations* **faire**

- $\varphi_* I_0 \leftarrow I_0 \circ \varphi^{-1} \left|D\varphi^{-1}\right|$
- $u \leftarrow -\nabla(f \circ \varphi^{-1}(1 - \sqrt{|D\varphi^{-1}|})) - \sqrt{|D\varphi^{-1}| \, I_0 \circ \varphi^{-1}} \nabla(\sqrt{I_1}) + \nabla(\sqrt{|D\varphi^{-1}| \, I_0 \circ \varphi^{-1} I_1})$
- $v \leftarrow -\Delta^{-1}(u)$
- $\varphi^{-1}(y) \leftarrow \varphi^{-1}(y + \epsilon v(y))$
- $\left|D\varphi^{-1}\right| \leftarrow (\left|D\varphi^{-1}\right| \circ (\mathrm{id} + \epsilon v)) e^{\epsilon \mathrm{div}(v)}$

Choix dans les applications

Fignoler ?

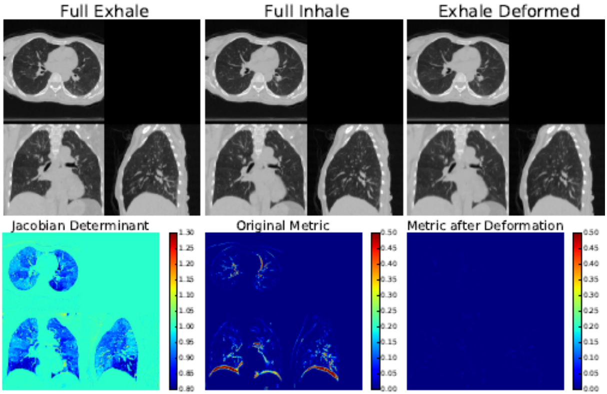
- Comment choisir efficacement f ?
- Notre modélisation est-elle pertinente ?

Choix dans les applications

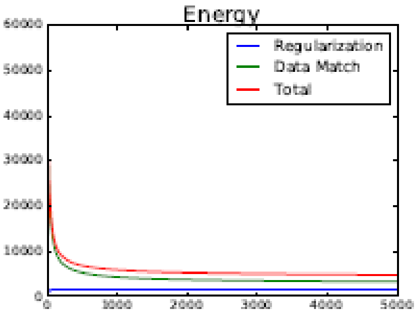
Fignoler.

- f doit rendre compte des déformations possibles
- On mesure que la conservation de la masse induit une α-action : rentre dans le cadre de notre algorithme

Résultats


Full Exhale
Full Inhale
Exhale Deformed
Jacobian Determinant
Original Metric
Metric after Deformation

Conclusions et perspectives



Perspectives

- Quand est-ce que l'algorithme est utilisable ?
- Quelle connaissance sur le difféomorphisme obtenu ?
- Comment converge-t-il ? Peut-on estimer sa complexité ?

Toutes les bonnes choses ont une fin

Merci pour votre écoute :-)