УДК 514.154.4

О нижней оценке функционала энергии для семейства гамильтоново-минимальных лагранжевых торов в $\mathbb{C}P^2$

А. А. Кажымурат

29 апреля 2017 г.

Аннотация. В данной статье изучается функционал энергии на множестве лагранжевых торов в $\mathbb{C}P^2$. Доказано, что значение функционала энергии на одном семействе гамильтоново-минимальных лагранжевых торов в $\mathbb{C}P^2$ строго больше, чем для тора Клиффорда.

Ключевые слова: функционал энергии, лагранжевы торы, оператор Шрёдингера.

1 Введение

Как замечено в [1], с каждым лагранжевым тором в $\mathbb{C}P^2$ естественным образом связан двумерный оператор Шрёдингера. А именно, любой лагранжев тор $\Sigma \subset \mathbb{C}P^2$ с индуцированной метрикой

$$ds^2 = 2e^{v(x,y)}(dx^2 + dy^2) \tag{1}$$

может быть получен как образ композиции отображений

$$r : \mathbb{R}^2 \to S^5 \xrightarrow{\mathcal{H}} \mathbb{C}P^2,$$

где r — горизонтальное поднятие, $\mathcal{H}$ — проекция Хопфа. При этом вектор-функция r удовлетворяет уравнению Шрёдингера

$$Lr = 0, \qquad L = (\partial_x - \frac{i\beta_x}{2})^2 + (\partial_y - \frac{i\beta_y}{2})^2 + V(x,y), \qquad V = 4e^v + \frac{1}{4}(\beta_x^2 + \beta_y^2) + \frac{i}{2}\Delta\beta,$$

где β — лагранжев угол (см. определение ниже).

Существование оператора L позволяет ввести функционал энергии E на множестве лагранжевых торов в $\mathbb{C}P^2$ (см. [2]):

$$E(\Sigma) = \frac{1}{2}\int_\Sigma V\, dx \wedge dy.$$

Как показано в [2], у функционала энергии есть простой геометрический смысл:

$$E(\Sigma) = A(\Sigma) + \frac{1}{8}W(\Sigma), \qquad A(\Sigma) = \int_\Sigma d\sigma, \qquad W(\Sigma) = \int_\Sigma |H|^2\, d\sigma,$$

где $d\sigma = 2e^v dx \wedge dy$ — индуцированный элемент площади, H — вектор средней кривизны.

Для тора Клиффорда Σ_{Cl}, который задается с помощью вектор-функции

$$r(x,y) = \Big(\frac{1}{\sqrt{3}}e^{2\pi i x}, \frac{1}{\sqrt{3}}e^{2\pi i(-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}y}{2})}, \frac{1}{\sqrt{3}}e^{2\pi i(-\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}y}{2})}\Big),$$

энергия равна

$$E(\Sigma_{Cl}) = \frac{4\pi^2}{3\sqrt{3}}.$$

В [2] высказана следующая гипотеза.

Гипотеза 1. *Минимум функционала энергии достигается на торе Клиффорда.*

В [2] гипотеза 1 проверена для двух семейств гамильтоново-минимальных лагранжевых торов: для однородных торов и для торов, найденных в [3].

Однородный тор $\Sigma_{r_1,r_2,r_3} \subset \mathbb{C}P^2$, $r_1^2+r_2^2+r_3^2=1$, $r_i>0$ задается следующей вектор-функцией

$$r(x,y) = \left(r_1 e^{2\pi i x}, r_2 e^{2\pi i(a_1x+b_1y)}, r_3 e^{2\pi i(a_2x+b_2y)}\right),$$

с некоторыми ограничениями на a_i, b_i. Справедливо неравенство

$$E(\Sigma_{r_1,r_2,r_3}) = \frac{\pi^2(1-r_1^2)(1-r_2^2)(1-r_3^2)}{2r_1r_2r_3} \geq \frac{4\pi^2}{3\sqrt{3}},$$

причем равенство достигается только на торе Клиффорда.

Второе семейство торов $\Sigma_{m,n,k} \subset \mathbb{C}P^2, m,n,k \in \mathbb{Z}, m \geq n > 0, k < 0$ имеет вид $\mathcal{H}(\tilde{\Sigma}_{m,n,k})$, где

$$\tilde{\Sigma}_{m,n,k} = \left\{(u_1e^{2\pi imy}, u_2e^{2\pi iny}, u_3e^{2\pi iky})\right\} \subset S^5,$$

чтсла u_1,u_2,u_3 удовлетворяют уравнениям:

$$u_1^2+u_2^2+u_3^2=1, \qquad mu_1^2+nu_2^2+ku_3^2=0.$$

Параметры m,n,k необходимо выбирать так, чтобы инволюция

$$(u_1,u_2,u_3) \longrightarrow (u_1\cos(m\pi), u_2\cos(n\pi), u_3\cos(k\pi))$$

на поверхности $mu_1^2+nu_2^2+ku_3^2=0$ сохраняла ее ориентацию (иначе $\mathcal{H}(\tilde{\Sigma}_{m,n,k})$ будет бутылкой Клейна, см. [3]).

В [2] доказано, что $E(\Sigma_{m,n,k}) > E(\Sigma_{Cl})$.

В случае минимальных лагранжевых торов функция $v(x,y)$ удовлетворяет уравнению Цицейки (см., например, [4]). Гладкие периодические решения этого уравнения являются конечнозонными, т. е. выражаются через тэта-функцию многообразия Якоби спектральной кривой. Из работы [5] следует, что гипотеза верна для минимальных лагранжевых торов, отвечающих спектральным кривым достаточно большого рода.

Цель этой работы — проверить гипотезу 1 для семейства гамильтоново-минимальных лагранжевых торов, построенных в [4] (см. также [6]).

В [4] доказана следующая теорема.

Теорема 1.1. *Отображение* $\psi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}P^2$, *заданное формулой*

$$\psi(x,y) = (F_1(x)e^{i(G_1(x)+\alpha_1y)} : F_2(x)e^{i(G_2(x)+\alpha_2y)} : F_3(x)e^{i(G_3(x)+\alpha_3y)})$$

является конформным гамильтоново-минимальным лагранжевым погружением, где

$$F_i = \sqrt{\frac{2e^v+\alpha_{i+1}\alpha_{i+2}}{(\alpha_i-\alpha_{i+1})(\alpha_{i+1}-\alpha_{i+2})}}, \qquad G_i = \alpha_i\int_0^x \frac{c_2-ae^v}{2\alpha_ie^v-c_1}dz$$

$$2e^v = a_1\left(1-\frac{a_1-a_2}{a_1}\mathrm{sn}^2(x\sqrt{a_1+a_3}, \frac{a_1-a_2}{a_1+a_3})\right). \qquad (2)$$

Функция $\mathrm{sn}(x)$ — эллиптический синус Якоби. Числа $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \mathbb{Z}$, $a_1>a_2>0$ удовлетворяют неравенствам (6), (7). $c_1,c_2,a,a_3 \in \mathbb{R}$ выражаются через α_i, a_1, a_2 по формулам (4), (5), (8).

Если выполняются дополнительные условия рациональности (10), то ψ — двоякопериодическое отображение, и образ плоскости является гамильтоново-минимальным лагранжевым тором $\Sigma_M \subset \mathbb{C}P^2$.

Основной результат этой работы заключается в следующем.

Теорема 1.2. *Если* $\alpha_1-\alpha_3$, $\alpha_2-\alpha_3$ *взаимопросты, то имеет место неравенство:*

$$E(\Sigma_M) > E(\Sigma_{Cl}).$$

2 Доказательство теоремы 1.2

В силу лагранжевости Σ и горизонтальности отображения $r:\mathbb{R}^2\to S^5$, а также в силу того, что индуцированная метрика на Σ имеет вид (1), получаем

$$R=\begin{pmatrix} r \\ \frac{r_x}{|r_x|} \\ \frac{r_y}{|r_y|} \end{pmatrix}\in U(3).$$

Лагранжев угол $\beta(x,y)$ определяется как локальная функция, удовлетворяющая:

$$e^{i\beta}=\det R.$$

Вектор средней кривизны H связан с лагранжевым углом:

$$H=J\nabla\beta, \tag{3}$$

где J — комплексная структура на $\mathbb{C}P^2$. В частности, для минимальных торов $\beta=\mathrm{const}$. Как показано в [7], для гамильтоново-минимальных операторов β является гармонической функцией.

Напомним конструкцию торов Σ_M [4].

Пусть $a_1>a_2>0$ некоторые вещественные числа, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{Z}$. Введем симметрические многочлены

$$b=-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3,\quad c=\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_1,\quad c_1=-\alpha_1\alpha_2\alpha_3. \tag{4}$$

Пусть c_2 — вещественный корень следующего уравнения:

$$(a_1-a_2)^2x^4+2(a_1^3a_2^2+a_1^2a_2^3+(a_1^2a_2+a_1a_2^2)bc_1+(a_1^2+a_2^2)c_1^2+2a_1^2a_2^2c)x^2+ \\ +((a_1+a_2)c_1^2-a_1^2a_2^2+a_1a_2bc_1)^2=0. \tag{5}$$

Существование вещественного корня эквивалентно следующим неравенствам:

$$P=a_1^3a_2^2+a_1^2a_2^3+(a_1^2a_2+a_1a_2^2)bc_1+(a_1^2+a_2^2)c_1^2+2a_1^2a_2^2c\le 0, \tag{6}$$

$$D=P^2-(a_1-a_2)^2((a_1+a_2)c_1^2-a_1^2a_2^2+a_1a_2bc_1)^2\ge 0. \tag{7}$$

Положим

$$a_3=\frac{c_1^2+c_2^2}{a_1a_2},\quad a=\frac{bc_1+a_1a_3+a_2a_3-a_1a_2}{c_2}, \tag{8}$$

$$w\left(\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\phi}{\sqrt{1-\left(\frac{a_1-a_2}{a_1+a_3}\right)^2\sin^2\phi}},\quad T=\frac{2w\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{a_1+a_3}}. \tag{9}$$

Погружение $\psi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}P^2$ из теоремы 1.1 является двояко-периодическим, если существует $\tau\in\mathbb{R}$, такое что:

$$\lambda_1=\frac{G_1(T)-G_3(T)+(\alpha_1-\alpha_3)\tau}{2\pi},\lambda_2=\frac{G_2(T)-G_3(T)+(\alpha_2-\alpha_3)\tau}{2\pi}\in\mathbb{Q}. \tag{10}$$

Если условие (10) выполнено, то $\Sigma_M\subset\mathbb{C}P^2$ погруженный тор с лагранжевым углом

$$\beta=ax+by.$$

В силу (3), норма вектора средней кривизны равна

$$|H|^2 = \frac{1}{2}e^{-v}(a^2+b^2).$$

Для доказательства теоремы 1.2 найдем нижние оценки для $W(\Sigma_M)$ и $A(\Sigma_M)$.

Т.к. по нашему предположению $a_1 > a_2 > 0$, то в силу (8) $a_3 > 0$, и следовательно,

$$w(\frac{\pi}{2}) > \frac{\pi}{2}, \qquad T > \frac{\pi}{a_1+a_3}.$$

Следующие равенства могут быть проверены прямыми вычислениями.

$$W(\Sigma_M) = \int_{\Sigma_M} |H|^2 d\sigma = \int_\Lambda \frac{1}{2}e^{-v}(a^2+b^2)2e^v dx \wedge dy = 2\pi NT(a^2+b^2).$$

Таким образом, выполняется нижняя оценка для $W(\Sigma_M)$:

$$W(\Sigma_M) > 2\pi^2 \frac{a^2}{\sqrt{a_1+a_3}}. \tag{11}$$

Следующая лемма предоставляет оценку $A(\Sigma_M)$.

Лемма 2.1. *Имеет место неравенство:*

$$A(\Sigma_M) > \pi^2 \frac{a_1+a_2}{\sqrt{a_1+a_3}}.$$

Доказательство леммы 2.1 носит технический характер и приведено в приложении.

Неравенства (6)-(7) инвариантны при одновременной замене знаков α_1, α_2, α_3 и при их перестановках. Без потери общности, $\alpha_3 \le 0 \le \alpha_2 \le \alpha_1$.

Неравенство (7) при подстановке P принимает следующий вид:

$$4a_1^2a_2^2 \prod_{i\neq j}(a_1+\alpha_i\alpha_j)(a_2+\alpha_i\alpha_j) \le 0. \tag{12}$$

В случае $\alpha_3 = 0$ или $\alpha_1 = \alpha_2$ у неравенств (6) и (7) нет решений (a_1, a_2) таких, что $0 < a_2 < a_1$. Далее мы предпологаем $\alpha_3 < 0 \le \alpha_2 < \alpha_1$.

Следующая лемма играет ключевую роль в дальнейшем анализе.

Лемма 2.2. *Для* $\alpha_3 < 0 \le \alpha_2 < \alpha_1$, *и* $a_1, a_2 > 0$ *неравенства (6) и (7) выполняются одновременно тогда и только тогда, когда:*

$$-\alpha_2\alpha_3 \leqslant a_1, a_2 \leqslant -\alpha_1\alpha_3.$$

Доказательство леммы 2.2. В случае $\alpha_2 = 0$ неравенство (6) факторизуется, и доказательство очевидно. Без потери общности, $\alpha_2 \neq 0$.

Неравенство $P(a_1, a_2) > 0$ для всех $a_1, a_2 > -\alpha_1\alpha_3$ следует из положительности коэффициентов следующего многочлена:

$$\begin{aligned} P(-\alpha_1\alpha_3+p, -\alpha_1\alpha_3+q) = {} & p^2q^2(p+q) + \alpha_1^2\alpha_3^2(p^3+q^3) - 2\alpha_1\alpha_3 pq(p^2+q^2) + \\ & (\alpha_1(\alpha_2-\alpha_3) - \alpha_3(\alpha_1-\alpha_2))(\alpha_1^2\alpha_3^2(p^2+q^2) + 2p^2q^2) - \\ & \alpha_1\alpha_3\left((\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-3\alpha_3) + 2\alpha_1(\alpha_2-\alpha_3)\right)pq(p+q) + \\ & \alpha_1^2\alpha_3^2(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_3)(4pq - \alpha_1\alpha_3(p+q)), \quad p, q > 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Для того, чтобы доказать неравенство $P(a_1,a_2)>0$ для $a_1>-\alpha_1\alpha_3,\ \ 0<a_2<-\alpha_2\alpha_2$ (и, в силу $P(a_1,a_2)=P(a_2,a_1)$, для $a_2>-\alpha_1\alpha_3,\ \ 0<a_1<-\alpha_2\alpha_2$) введем многочлен: $Q(a_1,a_2)=a_2^3P\left(a_1,\frac{1}{a_2}\right)$. У многочлена $Q\left(-\alpha_1\alpha_3+p,\frac{-1}{\alpha_2\alpha_3}+q\right)$ положительные коэффициенты по p,q. У многочлена: $Q(a_1,a_2)=a_1^3a_2^3P\left(\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2}\right)$ также положительные коэффициенты по p,q. $Q\left(\frac{-1}{\alpha_2\alpha_3}+p,\frac{-1}{\alpha_2\alpha_3}+q\right)$. Следовательно, $P(a_1,a_2)>0$ для $0<a_1,a_2<-\alpha_2\alpha_3$. Это означает, что пространство решений (6), (7) содержится в квадрате $[-\alpha_2\alpha_3,-\alpha_1\alpha_3]^2$.

Покажем обратное утверждение: квадрат $[-\alpha_2\alpha_3,-\alpha_1\alpha_3]^2$ содержится в пространстве решений (6), (7). Для этого заметим, что при $a_1=-\alpha_2\alpha_3,-\alpha_2\alpha_3<a_2<-\alpha_1\alpha_3$ и $a_1=-\alpha_1\alpha_3,-\alpha_2\alpha_3<a_2<-\alpha_1\alpha_3$ $P(a_1,a_2)<0$ (это можно проверить прямыми вычислениями). Т.к. $c_1^2>0$, при $a_1=0,-\alpha_2\alpha_3<a_2<-\alpha_1\alpha_3$ $P(a_1,a_2)>0$. Из (6) ясно, что при $a_1\to-\infty,-\alpha_2\alpha_3<a_2<-\alpha_1\alpha_3$ $P(a_1,a_2)<0$, при $a_1\to+\infty,-\alpha_2\alpha_3<a_2<-\alpha_1\alpha_3$ $P(a_1,a_2)>0$. Пусть внутри квадрата $[-\alpha_2\alpha_3,-\alpha_1\alpha_3]^2$ есть точка (x,y), такая что $P(x,y)>0$. Проведем через нее прямую $a_1=x$. P поменяет на ней знак хотя бы 5 раз. Это невозможно, т.к. P многочлен третьей степени по a_1. Лемма 2.2 доказана.

Из (11) и леммы 2.1 следует неравенство

$$E(\Sigma_M)>\pi^2\frac{a_1+a_2+\frac{a^2}{4}}{\sqrt{a_1+a_3}}.$$

Далее мы отдельно рассматриваем случаи $\alpha_2>0$ и $\alpha_2=0$.

1. $\alpha_2>0$.

   (a) Если $(a_1+a_2)a_3\geq 2(a_1a_2-bc_1)$, то

   $$a^2\geq\frac{1}{4}(a_1+a_2)^2a_3^2.$$

   Так как $a_3=\frac{c_1^2+c_2^2}{a_1a_2}$, выполняется $\frac{a_3^2}{c_2^2}\geq\frac{a_3}{a_1a_2}$. Также $a_1>a_2>1$ и $(a_1+a_2)^2>4a_1a_2$. Следовательно

   $$E_L(\Sigma_M)>\pi^2\frac{a_1+a_2+\frac{(a_1+a_2)^2a_3}{16a_1a_2}}{\sqrt{a_1+a_3}}>\pi^2\frac{a_1+\frac{a_3}{4}}{\sqrt{a_1+a_3}}>\pi^2\sqrt{a_1}\frac{1+\frac{y}{4}}{\sqrt{1+y}}=\pi^2\sqrt{a_1}f(y),$$

   где $y=\frac{a_3}{a_1}>0$. Следовательно

   $$E(\Sigma_M)>0.8\pi^2>E(\Sigma_{Cl}).$$

   (b) $(a_1+a_2)a_3\leq 2(a_1a_2-bc_1)$.

   i. Если $b\geq 0$, то

   $$a_3<\frac{2a_1a_2}{a_1+a_2}<a_1,$$

   следовательно

   $$E_L(\Sigma_M)>\pi^2\frac{a_1+a_2}{\sqrt{a_1+a_3}}>\pi^2\frac{a_1+1}{\sqrt{2a_1}}>1.4\pi^2>E(\Sigma_{Cl}).$$

   ii. Если $b<0$, то $-\alpha_3>\alpha_1+\alpha_2$. В частности, справедливо неравенство

   $$-bc_1<\alpha_3\alpha_1\alpha_2\alpha_3<a_1^2a_2.$$

Обозначим $f = \frac{a_1a_2 - bc_1}{(a_1+a_2)a_3}$. Без потери общности $\frac{1}{2} < f < 2$.

$$E_L(Y) > \pi^2 \frac{a_1+a_2}{\sqrt{a_1 + f\frac{a_1a_2-bc_1}{a_1+a_2}}} > \pi^2 \frac{(a_1+a_2)\sqrt{a_1+a_2}}{\sqrt{a_1^2+(1+f)a_1a_2+fa_1^2a_2}} > \pi^2 \frac{(1+y)\sqrt{1+y}}{\sqrt{1+3y+2y^2}},$$

где $y = \frac{a_2}{a_1}$, $0 < y < 1$. Следовательно

$$E_L(Y) > E(\Sigma_{Cl}).$$

2. $\alpha_2 = 0$. Введем $x = \frac{a_1}{p}, y = \frac{a_2}{p}$. Заменим a_i на x, y:

$$c_2^2 = a_1^2a_2^2 \frac{2p - a_1 - a_2 \pm \sqrt{(2p-a_1-a_2)^2 - (a_1-a_2)^2}}{(a_1-a_2)^2} = p^3x^2y^2 \frac{2-x-y \pm \sqrt{(2-x-y)^2 - (x-y^2)}}{(x-y)^2}.$$

(a) Нижняя ветвь c_2. Выполняются следующие неравенства:

$$p^3 \frac{x^2y^2}{2(2-x-y)} \le c_2^2 \le p^3 \frac{x^2y^2}{2-x-y}$$

(они следуют из $1 - z \le \sqrt{1-z} \le 1 - \frac{z}{2}$ for $0 \le z \le 1$). Тогда:

$$p\frac{xy}{2(2-x-y)} \le a_3 \le p\frac{xy}{2-x-y}$$

и

$$a \ge \sqrt{p}(\frac{x+y}{2(2-x-y)} - 1)\sqrt{2-x-y}.$$

Следовательно

$$A_L(\Sigma_M) \ge \pi^2\sqrt{p}\frac{x+y}{\sqrt{x+\frac{xy}{2-x-y}}},$$

$$W_L(\Sigma_M) \ge 2\pi^2\sqrt{p}(\frac{x+y}{2(2-x-y)} - 1)^2 \frac{2-x-y}{\sqrt{x+\frac{xy}{2-x-y}}}.$$

Таким образом:

$$E(\Sigma_M) \ge \pi^2\sqrt{p}(\frac{x+y}{\sqrt{x+\frac{xy}{2-x-y}}} + \frac{1}{4}(\frac{x+y}{2(2-x-y)} - 1)^2 \frac{2-x-y}{\sqrt{x+\frac{xy}{2-x-y}}}) = \pi^2\sqrt{p}B_1(x,y).$$

Утверждение 2.1. Отображение $B_1 : (0,1)\times(0,1) \to \mathbb{R}$, $B(x,y) = \frac{x+y}{\sqrt{x+\frac{xy}{2-x-y}}} + \frac{1}{4}(\frac{x+y}{2(2-x-y)} - 1)^2 \frac{2-x-y}{\sqrt{x+\frac{xy}{2-x-y}}}$ удовлетворяет $B_1(x,y) > 0.8$.

Это может быть проверено прямыми вычислениями. Этого достаточно для завершения доказательства в даннov случае, т.к.

$$\pi^2\sqrt{p}f(x,y) \ge 0.8\pi^2 \ge \frac{4\pi^2}{3\sqrt{3}}.$$

(b) Верхняя ветвь c_2. Справедливы неравенства

$$p^3f(x,y) = p^3x^2y^2 \frac{2(2-x-y) - \frac{(x-y)^2}{2-x-y}}{(x-y)^2} \le c_2^2 \le p^3x^2y^2 \frac{2(2-x-y) - \frac{(x-y)^2}{2(2-x-y)}}{(x-y)^2} = p^3g(x,y).$$

Следовательно

$$p\frac{f(x,y)}{xy} \le a_3 \le p\frac{g(x,y)}{xy},$$

$$a \ge \sqrt{p}\frac{(x+y)\frac{f(x,y)}{xy} - xy}{\sqrt{g(x,y)}}.$$

Таким образом

$$A_L(Y) \ge \pi^2\sqrt{p}\frac{x+y}{\sqrt{x+\frac{g(x,y)}{xy}}},$$

$$W_L(Y) \ge 2\pi^2\sqrt{p}\frac{(\frac{(x+y)\frac{f(x,y)}{xy}-xy}{\sqrt{g(x,y)}})^2}{\sqrt{x+\frac{g(x,y)}{xy}}},$$

$$E(Y) \ge A_L(Y) + \frac{1}{8}W_L(Y) \ge \pi^2\sqrt{p}\frac{x+y+(\frac{(x+y)\frac{f(x,y)}{xy}-xy}{\sqrt{g(x,y)}})^2}{\sqrt{x+\frac{g(x,y)}{xy}}} = \pi^2\sqrt{p}B_2(x,y).$$

Утверждение 2.2. Отображение $B_2 : (0,1) \times (0,1) \to \mathbb{R}$, удовлетворяет $B_2(x,y) > 0.8$.

Это может быть проверено прямыми вычислениями.

Это завершает доказательство гипотезы о энергии для торов Σ_M.

3 Доказательство леммы 2.1

По определению:

$$A(\Sigma_M) = \int_{\Sigma_M} d\sigma = \int_\Lambda 2e^v dx \wedge dy = 2\pi\int_0^{NT} 2e^v dx.$$

Так как $e^v > 0$, справедлива тривиальная нижняя оценка:

$$\int_0^{NT} 2e^v d(x) > \int_0^T 2e^v dx = \int_0^T a_1(1 - \frac{a_1-a_2}{a_1}\mathrm{sn}^2(x\sqrt{a_1+a_3}, \frac{a_1-a_2}{a_1+a_3}))dx.$$

Напомним, что синус Якоби $\mathrm{sn}(u,k) = \sin\theta$ определяется следующим интегралом:

$$u = \int_0^\theta \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}.$$

Следовательно, выполняются тождества [8]:

$$\frac{d\mathrm{sn}(u,k)}{du}du = \cos\theta\, d\theta,$$

$$\mathrm{cn}(u,k)\mathrm{dn}(u,k)\, du = \cos\theta d\theta,$$

$$du = \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}. \quad (14)$$

Сделаем подстановку $x = \frac{u}{\sqrt{a_1+a_3}}$

$$\int_0^T 2e^v dx = \frac{a_1}{\sqrt{a_1+a_3}}\int_0^{2w(\frac{\pi}{2})}(1 - \frac{a_1-a_2}{a_1}\mathrm{sn}^2(u, \frac{a_1-a_2}{a_1+a_3}))du.$$

Перейдем к координате θ (14):

$$\int_0^T 2e^v dx = \frac{a_1}{\sqrt{a_1+a_3}} \int_0^\pi \frac{1-\frac{a_1-a_2}{a_1}\sin^2\theta}{\sqrt{1-\left(\frac{a_1-a_2}{a_1+a_3}\right)^2\sin^2\theta}} d\theta.$$

Так как $0 < \frac{a_1-a_2}{a_1+a_3} < 1$ верна следующая нижняя оценка

$$\int_0^T 2e^v dx > \frac{a_1}{\sqrt{a_1+a_3}} \int_0^\pi (1-\frac{a_1-a_2}{a_1}\sin^2\theta)d\theta = \frac{\pi(a_1+a_2)}{2\sqrt{a_1+a_3}}.$$

Таким образом

$$A(\Sigma_M) > \pi^2 \frac{a_1+a_2}{\sqrt{a_1+a_3}}.$$

Список литературы

[1] А.Е. Миронов. Иерархия уравнений Веселова–Новикова и интегрируемые деформации минимальных лагранжевых торов в $\mathbb{C}P^2$. Сиб. электрон. матем. изв., 2004, **1**, 38–46, arXiv:math/0607700

[2] H.Ma, A.E.Mironov, D.Zuo, Energy functional for Lagrangian tori in $\mathbb{C}P^2$, arXiv:1701.07211

[3] А.Е. Миронов. О новых примерах гамильтоново-минимальных и минимальных лагранжевых подмногообразий в $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}P^n$. Матем. сб., 2004, **195**:1, 85–96.

[4] А.Е. Миронов, О гамильтоново-минимальных лагранжевых торах в $\mathbb{C}P^2$, Сиб. матем. журн., **44**:6 (2003), 1324–1328.

[5] M. Haskins. The geometric complexity of special Lagrangian T^2-cones. Invent. Math., 2004, 157:1, 11–70.

[6] H. Ma, M. Schmies. Examples of Hamiltonian stationary Lagrangian tori in $\mathbb{C}P^2$. Geom. Dedicata, 2006, **118**, 173 – 183.

[7] Y. Oh. Volume minimization of Lagrangian submanifolds under Hamiltonian deformations, Math. Z. 1993, 212, 175–192.

[8] N. I. Akhiezer. Elements of the theory of elliptic functions. Translations of mathematical monographs, vol. 79, 1990, p. 208.

[9] E. Goldstein, Some estimates related to Oh's conjecture for the Clifford tori in $\mathbb{C}P^n$, arXiv:math/0311460

[10] Cheol-Hyun Cho, Holomorphic disc, spin structures and Floer cohomology of the Clifford torus, arXiv:math/0308224

[11] Howard, Ralph:The kinematic formula in Riemannian homogeneous spaces. Mem. Amer. Math. Soc. 106 (1993), no. 509, vi+69 pp.