# Toda_Unstable 3-primary Homotopy Groups of Spheres

## 1 Introduction

本論文の目的は、奇素数 $p$ 、特に $p = 3$ に対して、stable group $\pi_k^S = \lim \pi_{n+k}(S^n)$ に関するいくつかの結果から、

$\pi_i(S^n)$ の $p$-成分 ${}_p\pi_i(S^n)$ を求めることである。Serre [28], [29] により、$\pi_i(S^n)$ は、

$$\pi_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}, \pi_{4m-1}(S^{2m}) \simeq \mathbb{Z} \oplus (finite),$$

を除いて有限群である。また、次の Serre decomposition が知られている。

$${}_p\pi_{i+1}(S^{2m}) \simeq {}_p\pi_i(S^{2m-1}) \oplus {}_p\pi_{i+1}(S^{4m-1}).$$

よって、奇数 $n = 2m + 1$ に対して、${}_p\pi_i(S^n)$ を求めれば十分である。この計算は、大抵の場合、$k$-stem の列

$$(1.1)_k \quad {}_p\pi_{3+k}(S^3) \xrightarrow{E^2} {}_p\pi_{5+k}(S^5) \xrightarrow{E^2} {}_p\pi_{7+k}(S^7) \xrightarrow{E^2} \cdots \xrightarrow{E^\infty} {}_p\pi_k^S$$

を使って、下の stem の情報と、stable group ${}_p\pi_k^S$ の情報から、double suspension を考えることで行われる。

$\pi_i(S^{2m+1})$ を求めるための主な道具は、次の double $EHP$-sequence である。

$$(1.2)_m \quad \cdots \xrightarrow{H} \pi_i(Q_2^{2m-1}) \xrightarrow{P} \pi_i(S^{2m-1}) \xrightarrow{E^2} \pi_{i+2}(S^{2m+1}) \xrightarrow{H} \pi_{i-1}(Q_2^{2m-1}) \to \cdots .$$

ここで、$Q_2^{2m-1}$ は、double suspension map $i^2 : S^{2m-1} \to \Omega^2 S^{2m+1}$ のホモトピーファイバーであり、$H$ と $P$ はそれぞれ、Hopf invariant と Whitehead product の double version である。

$$Q_2^{2m-1} = \Omega(\Omega^2 S^{2m+1}, S^{2m-1}).$$

ここでは、便宜上、$\pi_i(Q_2^{2m-1})$ の元を不変量 (invariant) と呼ぶことにする。$Q_2^{2m-1}$ のホモトピー群は、次の $IJ\Delta$-sequence（この列は $p$ で局所化すると完全になる）を使って計算されることがある。

$$(1.3)_m \quad \cdots \xrightarrow{J} \pi_{i+4}(S^{2pm+1}) \xrightarrow{\Delta} \pi_{i+2}(S^{2pm-1}) \xrightarrow{I} \pi_i(Q_2^{2m-1}) \xrightarrow{J} \pi_{i+3}(S^{2pm+1}) \xrightarrow{\Delta} \pi_{i+1}(S^{2pm-1}) \to \cdots$$

ここで、$\Delta \circ E^2$ と $E^2 \circ \Delta$ は $p$ 倍する写像であり、

$$J \circ H = H_p : \pi_{i+3}(S^{2m+1}) \to \pi_{i+3}(S^{2pm+1})$$

は James-Hopf invariant である。

Toda [38] の iterated suspension についてのいくつかの lemma は、Selic [26], neisendorfer [19] の Moore-type representations, exponential theorems と、Gray [7], Harper [10], Oka [21] の結果を使うことによって、次元の制限を取り除くことができる。

奇数 $n$ に対する ${}_p\pi_{n+k}(S^n)$ の表を、symbolic な方法で記述することができる。

例えば、$p = 3$ に対する 10-stem と 11-stem の表は、次のように表される。

| $n =$ | 3 | | 5 | | 7 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k = 10$ | ● | $\longrightarrow$ | ○ | $\longrightarrow$ | ● | $=$ | $< \beta_1 >$ |
| $k = 11$ | ● | $\longrightarrow$ | ○ | $=$ | ○ | $=$ | $< \alpha'_3 >$ |

ここで、● と ○ はそれぞれ、$\mathbb{Z}_3$ と $\mathbb{Z}_9$ を表わしている。

$=$ は、double suspension $E^2$ の同型を、$\to$ は、同型でなく、自明でない $E^2$ を表わしている。

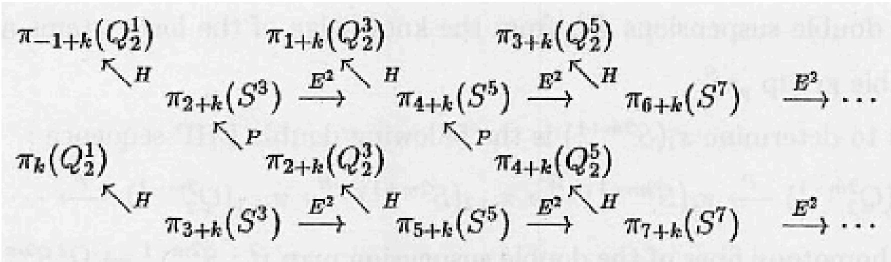
最後の項の ● $=< \beta_1 >$ は、${}_3\pi_{7+10}(S^7)$ が stable range であり、$\beta_1$ で生成される stable group ${}_3\pi_{10}^S$ に同型でであることを意味している。

○ $=< \alpha'_3 >$ も同様である。もし ${}_3\pi_{n+k}(S^n)$ が巡回群の多くの数の直和であるならば、table の中で群は対応するシンボル ●, ○ または ▹ $\simeq \mathbb{Z}_{27}$ を縦に重ねて表わされる。

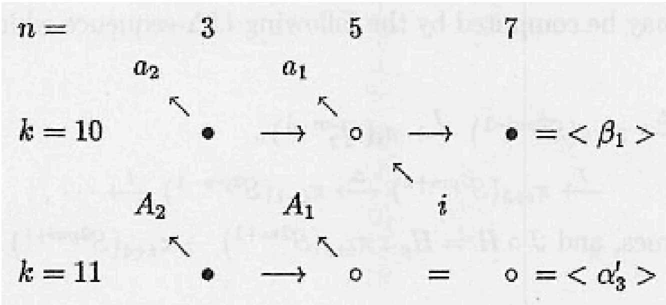
計算は次のような完全列のコレクション $(1.2)_m$ を使うことにより与えられ、これは **computation diagram** と呼ばれる。


[28] J.-P.Serre, Homologie singuliere des espaces fibres, Ann of Math. 54 (1951),425-505.
[29] J.-P.Serre, Groupes d'homotopie et classes de groups abelian, Ann of Math. 58 (1953),258-294.

[38] H.Toda, On Iterated Suspensions I,II,III, J.Math.Kyoto U. 5 (1966), 87-142, 209-250, 8(1968), 101-130.
[26] P.Selic, Odd primary torsion in $\pi_*(S^3)$, Topology 17 (1978), 407-412.
[19] J.Neisendorfer, 3-primary exponents, Proc. Camb. Phil. Soc.90 (1981), 63-83.
[7] B.W.Gray, Unstable families related to the image of $J$, Proc. Camb. Phil. Soc, 96 (1984), 95-113.
[10] J.R.Harper, A Proof of Gray's conjecture, Contemp. Math.96 (1989), 181-188.
[21] S.Oka, On the Homotopy Groups of Sphere Bundles over Spheres, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser.A-I 33 (1969), 161-195.



computation diagram はまたシンボル化される。上記の $k = 10, 11$ の場合は、次のように計算される。



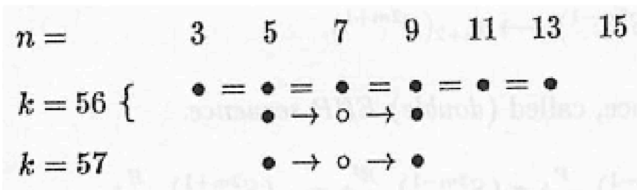
ここで、ローマ字は適宜、定義された不変量を示しており、準同型 $P,\ H$ は自明なときは省略し、それが自明でないときは矢印だけを残している。stable α-series

$$\{\alpha_r \in {}_p\pi^S_{rq-1}\,;\, r \geq 1\},\ q = 2(p-1),$$

の unstble バージョンは典型的な例である。これは、各 $r$ に対して、$(rq-1)$-stem と $(rq-2)$-stem の中の元のコレクションであり、${}_p\pi_i(Q_2^{2m-1})$ の直和成分の生成元と対応しており、Gray[7] で示されたように、1つの例外 ${}_p\pi_{2p^2-3}(S^{2p-1}) \simeq \mathbb{Z}_{p^2}$ を除いて、EHP-sequence の中で閉じている。そのコレクションは $IJ\Delta$-sequence と適合するように選ぶことができる。これは、${}_p\pi_i(S^{2m+1})$ の計算の中で、わずかな余りの不変量を残すことにより、これらのコレクションを除外することができることを意味している。このコレクションは **unstable alpha families** と呼ばれる。

unstable alpha families の他に、計算の前に除外できるいくつかのコレクションがある。元 $\xi \in {}_p\pi_i(S^{2m+1})$ は、$E^2\xi = 0$ かつ $\xi \notin Im\,E^2$ のとき **simple** であるという。$m \neq -1, 0\ (mod\ p)$ のとき、この $\xi$ は $IJ\Delta$-sequence とは独立である。そこで、$P(x) = \xi$ を満たす不変量 $H(\xi)$ と $x \in \pi_i(Q_2^{2m-1})$ とともに $\xi$ を取り除くことができる。これらの3つの元のことを **simple removable collection** と呼ぶ。対 $\{\xi,\ \Delta\xi \neq 0\}$ を含むもう一つの種類の removable collection があり、**short range removable collection** と呼ばれる。

3-primary k-stem groups ${}_3\pi_{2m-1+k}(S^{2m+1})$ の結果は、上の様に symbolizerd tables で与えられ、2つの部分に分けられる。一つは $k \leq 55$ に対する古い table であり、もう一つは $56 \leq k < 80$ に対する新しい table である。最初の table は、K.Maruyama の $k \leq 45$ に対する報告 [38],[39] と、M.Mimura の $45 < k \leq 55$ に対する 1998年の結果を再掲したものである。最初の難点は、関係式 $\beta_1^3\beta_2 = 0$ の非安定版を含む 56-stem にある。この関係式は $S^{15}$ の中で成立している。また、57-stem では、関係式 $\beta_1^3\varepsilon' = 0$ を含み、これは $S^9$ の中で成立している。



2番目の難点は、60-stem と 76-stem に集中しており、さらに **deeply unsteble range** の中にある。これらの場合には、多くの stable でない不変量があり、これらをコントロールするためのいくつかの効果的な理論を持っている。deep range の 76-stem と 77-stem において、我々の表にはいくつかの曖昧な点がある。

[7] B.W.Gray, Unstable families related to the image of $J$, Proc. Camb. Phil. Soc, 96 (1984), 95-113.

$m \neq -1, 0\ (mod\ 3)\ \leftrightarrow\ m = 1\ (mod\ 3)$

[38] H.Toda, On Iterated Suspensions I,II,III, J.Math.Kyoto U. 5 (1966), 87-142, 209-250, 8(1968), 101-130.
[39] H.Toda, An important relation in homotopy groups of spheres, Proc. Japan Acad. 43 (1967), 839-942.

## 2 Double Suspension and Lemmas

### 2.1 EHP sequence

$Q_1^n = \Omega(\Omega S^{n+1}, S^n)$ を canonical inclusion (suspension map) $i: S^n \to \Omega S^{n+1}$ のホモトピーファイバーとする。

このとき、次の完全列を得る。(single EHP sequence)

(2.1.1) $\cdots \xrightarrow{E} \pi_{i+2}(S^{n+1}) \xrightarrow{H'} \pi_i(Q_1^n) \xrightarrow{P'} \pi_i(S^n) \xrightarrow{E} \pi_{i+1}(S^{n+1}) \xrightarrow{H'} \cdots$

恒等写像のクラス $\iota_n \in \pi_n(S^n)$ の Whitehead product $w_n = [\iota_n, \iota_n] \in \pi_{2n-1}(S^n)$ は $P'$ の像であり、$n$ が偶数のとき、$H'(w_n) = 2\iota_{2n-1}$. これは、奇素数 $p$ に対して、次の Serre's decomposition [29] を誘導する。

(2.1.2) $E + w_{2m*}: \pi_i(S^{2m-1}) \oplus \pi_{i+1}(S^{4m-1}) \simeq_p \pi_{i+1}(S^{2m})$.

ここで $\simeq_p$ は mod $p$ 同型を意味する。すなわち kernel と cokernel が有限で $p$-torsion を持たない。よって $E$ と $w_{2m*}$ は、mod $p$ 単射である。$Q_2^{2m-1} = \Omega(\Omega^2 S^{2m+1}, S^{2m-1})$ を canonical inclusion (double suspension map) $i: S^{2m-1} \to \Omega^2 S^{2m+1}$ のホモトピーファイバーとする。このとき、次の完全列を得る。(double EHP sequence)

(2.1.3) $\cdots \xrightarrow{E^2} \pi_{i+3}(S^{2m+1}) \xrightarrow{H} \pi_i(Q_2^{2m-1}) \xrightarrow{P} \pi_i(S^{2m-1}) \xrightarrow{E^2} \pi_{i+2}(S^{2m+1}) \xrightarrow{H} \cdots$

$H$ と $P$ はそれぞれ、Hopf invariant $H'$ と Whitehead product $P'$ の double version であり、$\pi_i(Q_2^{2m-1})$ のことを、**invariants** の群という。次の $H$ と $P$ の naturality が成り立つ。

(2.1.4) $H(\alpha) \circ \xi = H(\alpha \circ E^3 \xi)$ for $\alpha \in \pi_{i+3}(S^{2m+1}), \xi \in \pi_j(S^i)$

(2.1.5) $P(\alpha) \circ \xi = P(\alpha \circ \xi)$ for $\alpha \in \pi_i(Q_2^{2m-1}), \xi \in \pi_j(S^i)$.

よく知られているように、$\Omega S^{2m+1}$ のホモロジー環は、次の多項式環である。$H_*(\Omega S^{2m+1}) = \mathbb{Z}[u],\ u \in H_{2m}$.

可縮な全空間 $E$ の fibration $\Omega^2 S^{2m+1} \to E \to \Omega S^{2m+1}$ に関する spectral sequence を考えることで次を得る。

(2.1.6) $H_i(\Omega^2 S^{2m+1}, S^{2m-1}) \simeq_p 0$ for $i < 2pm - 2$,

$H_i(\Omega^2 S^{2m+1}, S^{2m-1}) \simeq_p \mathbb{Z}_p$ for $i = 2mp - 2$.

homotopyに対しても同じ結果であり、Serre[29] による球面のホモトピー群の mod $p$ stability(持続性)を得る。

**Th 2.1 (Serre [29])** double suspension $E^2: \pi_i(S^{2m-1}) \to \pi_{i+2}(S^{2m+1})$ は、$i < 2pm - 3$ のとき、$p$成分の同型あり、$i = 2mp - 3$ のとき、($p$成分の？) 全射である。

$\pi_k^S = \lim_n \pi_{n+k}(S^n)$ を stable $k$-stem group とし、次の群を stable range にあるという。

(2.1.7) $\pi_{2m-1+k}(S^{2m-1}) \simeq_p \pi_k^S$ for $k < 2(p-1)m - 2$.

$S_\infty^n = S^n \cup e^{2n} \cup \cdots \cup e^{kn} \cup \cdots$ を $n$-sphere の James' reduced product [12] とすると、自然な H-map $i: S_\infty^n \to \Omega S^{n+1}$ により、$S_\infty^n$ と $\Omega S^{n+1}$ はホモトピー同値であり、今後これを同一視する。$S_k^n = S^n \cup e^{2n} \cup \cdots \cup e^{kn}$ を $S_\infty^n$ の $kn$-skeleton とし、$h_p: \Omega S^{2m+1} = S_\infty^{2m} \to S_\infty^{2pm} = \Omega S^{2pm+1}$ を、shrinking map $S_p^{2m} \to S_p^{2m}/S_{p-1}^{2m} = S^{2pm}$ の James's extension [12] とする。

[34] の中で、$h_p$ のホモトピーファイバーは、$S_{p-1}^{2m}$ に mod $p$ 同値であり、写像 $T_p: \Omega S_{p-1}^{2m} \to \Omega S^{2pm-1}$ が存在して、そのホモトピーファイバーが、$S^{2m-1}$ に mod $p$ 同値となることを示した。

よって、$p$ で局所化することにより、次の fibration を得る。

(2.1.8) $S_{p-1}^{2m} \to \Omega S^{2m+1} \xrightarrow{h_p} \Omega S^{2pm+1}$, $S^{2m-1} \to \Omega S_{p-1}^{2m} \xrightarrow{T_p} \Omega S^{2pm-1}$.

これらを組み合わせて、次の mod $p$ fibration を得る。

(2.1.9) $\Omega^2 S^{2pm-1} \xrightarrow{i} Q_2^{2m-1} \xrightarrow{j} \Omega^3 S^{2pm+1} \xrightarrow{\partial_p} \Omega S^{2pm-1}$.

**Th 2.2** (2.1.9) の mod $p$ fibration は、次の $IJ\Delta$-sequence を誘導し、これは、mod $p$ で完全である。

$\cdots \xrightarrow{\Delta} \pi_{i+2}(S^{2pm-1}) \xrightarrow{I} \pi_i(Q_2^{2m-1}) \xrightarrow{J} \pi_{i+3}(S^{2pm+1}) \xrightarrow{\Delta} \pi_{i+1}(S^{2pm-1}) \xrightarrow{I} \cdots$

[29] J.-P.Serre, Groupes d'homotopie et classes de groups abelian, Ann of Math. 58 (1953),258-294.

[戸田三村ホモトピー論] p72

[29] J.-P.Serre, Groupes d'homotopie et classes de groups abelian, Ann of Math. 58 (1953),258-294.

[12] I.M.James, Reduced product space, Ann. of Math. 62 (1955), 170-197.

[34] H.Toda, On double suspension $E^2$, Inst.Polytech. Osaka City Univ. Ser.A Math. A7 (1956), 922-924.

$Q_2^{2m-1} \to S^{2m-1} \to \Omega^2 S^{2m+1}$

$\Omega^3 S^{2m+1} \xrightarrow{\Omega^2 h_p} \Omega^3 S^{2pm+1} \to \Omega S_{p-1}^{2m} \to \Omega^2 S^{2m+1} \xrightarrow{\Omega h_p} \Omega^2 S^{2pm+1}$,

$S^{2m-1} \to \Omega S_{p-1}^{2m} \xrightarrow{T_p} \Omega S^{2pm-1}$.

写像 $h_p$ は、James-Hopf invariant $H_p$ を誘導し、次を満たす。

(2.1.10) $H_p = J \circ H : \pi_{i+3}(S^{2m+1}) \to \pi_i(Q_2^{2m-1}) \to \pi_{i+3}(S^{2pm+1})$.

写像 $T_p$ は、Gray [8] によって再構成され、(2.1.9) の写像 $\partial_p : \Omega^3 S^{2pm+1} \to \Omega S^{2pm-1}$ は、degree $p$ の写像 $f_p : S^{2pm-1} \to S^{2pm-1}$ に対して、$\partial_p \circ i^2 \simeq \Omega f_p : \Omega S^{2pm-1} \to \Omega^3 S^{2pm+1} \to \Omega S^{2pm-1}$ を満たす。

さらに、Harper [10] は、次を示した。

$i^2 \circ \partial_p \simeq \Omega(S^2 f_p) : \Omega^3 S^{2pm+1} \to \Omega S^{2pm-1} \to \Omega^3 S^{2pm+1}$.

**Lemma 2.1** 次の2つの合成は、どちらも $p$ 倍する写像である。

$\Delta \circ E^2 : {}_p\pi_i(S^{2pm-1}) \to {}_p\pi_{i+2}(S^{2pm+1}) \to {}_p\pi_i(S^{2pm-1})$,

$E^2 \circ \Delta : {}_p\pi_{i+2}(S^{2pm+1}) \to {}_p\pi_i(S^{2pm-1}) \to {}_p\pi_{i+2}(S^{2pm+1})$.

次の naturality が成り立つ。

(2.1.11) $I(\alpha \circ E^2\xi) = I(\alpha) \circ \xi$ for $\alpha \in \pi_{i+2}(S^{2pm-1})$, $\xi \in \pi_j(S^i)$

$J(\alpha \circ \xi) = J(\alpha) \circ E^3\xi$ for $\alpha \in \pi_i(Q_2^{2m-1})$, $\xi \in \pi_j(S^i)$

$\Delta(\alpha \circ E^3\xi) = \Delta(\alpha) \circ E\xi$ for $\alpha \in \pi_{i+3}(S^{2pm+1})$, $\xi \in \pi_j(S^i)$

$H_p(\alpha \circ E\xi) = H_p(\alpha) \circ E\xi$ for $\alpha \in \pi_{i+1}(S^{2m+1})$, $\xi \in \pi_j(S^i)$

次の exponent theorem は、$p = 3$ に対しては、Cohen-Moore-Neisendorfer [3], Neisendorfer [19] によって、$m = 1$ に対しては、Selic [26] によって示された。

**Th 2.3** $p^m({}_p\pi_i(S^{2m+1})) = 0$.

この定理は、$\Omega^2 S^{2m+1}$ 上の適当な H-structure に対して、積 $\mu$ の $p$-th power $\mu^p : \Omega^2 S^{2m+1} \to \Omega^2 S^{2m+1}$ が、写像 $r_m : \Omega^2 S^{2m+1} \to S^{2m-1}$ に変形されるという事実を元にしている。すなわち、

(2.1.12) $\mu^p \simeq i^2 \circ r_m : (\Omega^2 S^{2m+1}, S^{2m-1}) \to (\Omega^2 S^{2m+1}, S^{2m-1})$.

したがって、

**Lem 2.2** ${}_p\pi_i(Q_2^{2m-1})$ は、elementary である。すなわち $p({}_p\pi_i(Q_2^{2m-1})) = 0$.

Th 2.1 により、$i < 2p^2 m - 3$ に対して、$E^2 : {}_p\pi_i(S^{2pm-1}) \to {}_p\pi_{i+2}(S^{2pm+1})$ は全単射である。

$IJ\Delta$-sequence の完全性から次を得る。

**Prop 2.1** $i < 2p^2 m - 3$ に対して、次の split 完全列を得る。

$0 \to \pi^S_{i-2pm+3} \otimes \mathbb{Z}_p \to {}_p\pi_i(Q_2^{2m-1}) \to Tor(\pi^S_{i-2pm+2}, \mathbb{Z}_p) \to 0$.

この場合のことを、**meta-stable range** という。

## 2.2 Homotopy groups of $S^3$

$m = 1$ の場合の (2.1.8) の mod $p$ fibration を考える。

(2.2.1) $S^2_{p-1} \to S^2_\infty \xrightarrow{h_p} S^{2p}_\infty$.

$f_\infty : S^2_\infty \to \mathbb{C}P^\infty = S^2 \cup e^4 \cup e^6 \cup \cdots$ を、$S^2$ 上の恒等写像の拡張とする。$\mathbb{C}P^\infty$ は、$(\mathbb{Z}, 2)$ 型の Eilenberg-MacLane 空間であるので、$f_\infty$ のホモトピーファイバー $\widetilde{S}^2_\infty$ は、$S^2_\infty$ 上の 2-connective fibration である。$\widetilde{S}^2_\infty \to S^2_\infty \to \mathbb{C}P^\infty = K(\mathbb{Z}, 2)$. $S^3$ の 3-connective fiber $\widetilde{S}^3$ に対して、$\widetilde{S}^2_\infty = \Omega\widetilde{S}^3$. $f_\infty$ の $S^2_k$ への制限 $f_k$ は、2-connective fibration である。

$\widetilde{S}^2_k \xrightarrow{p_k} S^2_k \xrightarrow{f_k} \mathbb{C}P^\infty$.

$S^2_\infty = \Omega S^{2p+1}$ は 2-connected であるので、(2.2.1) の fibration は、次の mod $p$ fibration にリフトされる。

(2.2.2) $\widetilde{S}^2_{p-1} \xrightarrow{i} \widetilde{S}^2_\infty \xrightarrow{h_p} S^{2p}_\infty$.


[8] B.W.Gray, On Toda's fibrations, Proc. Camb. Phil. Soc. 97 (1985), 289-298.

[10] J.R.Harper, A Proof of Gray's conjecture, Contemp. Math. 96 (1989), 181-188.

[3] F.Cohen, J.C.Moore and J.Neisendorfer, The double suspension and exponents of the homotopy groups of spheres, Ann. of Math. 110 (1979),549-565.
[19] J.Neisendorfer, 3-primary exponents, Proc. Camb. Phil. Soc.90 (1981), 63-83.
[26] P.Selic, Odd primary torsion in $\pi_*(S^3)$, Topology 17 (1978), 407-412.


**Th 2.1 (Serre [29])** double suspension $E^2 : \pi_i(S^{2m-1}) \to \pi_{i+2}(S^{2m+1})$は、$i < 2pm - 3$ のとき、$p$成分の同型あり、$i = 2mp - 3$ のとき、($p$成分の？) 全射である。

(2.1.8) $S^{2m}_{p-1} \to \Omega S^{2m+1} \xrightarrow{h_p} \Omega S^{2pm+1}$, $S^{2m-1} \to \Omega S^{2m}_{p-1} \xrightarrow{T_p} \Omega S^{2pm-1}$.

(2.2.1) $S^2_{p-1} \to S^2_\infty \xrightarrow{h_p} S^{2p}_\infty$.

$H^*(S^2_\infty)$ は divided polynomial algebra であり、$H^*(\mathbb{C}P^\infty)$ は polynomial algebra であるので、コホモロジー類において、関係式 $f_\infty^*(e^{2k}) = k!\ e^{2k}$ が成り立つ。特に、$2(p-1)$-skeleton の写像 $f_{p-1}: S^2_{p-1} \to \mathbb{C}P^{p-1} = S^{2p-1}/S^1$ は、$p$-同値になる。$f_{p-1}$ は、$S^1$-bundle map $\tilde{f}_{p-1}: \tilde{S}^2_{p-1} \to S^{2p-1}$ を誘導し、これもまた $p$-同値である。よって、次の $p$-同値を得る。

(2.2.3) $\tilde{g}: S^{2p-1} \to \tilde{S}^2_{p-1}$ s.t. $\deg(\tilde{f}_{p-1} \circ \tilde{g}) \equiv 1\ (mod\, p)$.

fibration (2.2.2) から、次の mod $p$ fibration を得る。

(2.2.4) $S^{2p-1} \xrightarrow{\tilde{g}} \Omega\tilde{S}^3 \xrightarrow{\tilde{h}_p} \Omega S^{2p+1}$.

**Prop 2.2** (2.2.4) の mod $p$ fibration は、次の mod $p$ 完全列を誘導する。

$$\cdots \xrightarrow{\Delta} \pi_i(S^{2p-1}) \xrightarrow{\tilde{G}} \pi_{i+1}(\tilde{S}^3) \xrightarrow{\tilde{H}_p} \pi_{i+1}(S^{2p+1}) \xrightarrow{\Delta} \pi_{i-1}(S^{2p-1}) \xrightarrow{\tilde{G}} \cdots$$

この完全列は、$m = 1$ のときには、Th 2.2 の $IJ\Delta$-sequence に同値である。実際、$Q^1_2$ は $\Omega^3\tilde{S}^3$ にホモトピー同値であるが、合成の関係式 (relations with the composition) は、(2.1.11) よりもう少しよいものである。

(2.2.5) $\tilde{G}(\alpha \circ \xi) = \tilde{G}(\alpha) \circ E\xi$ for $\alpha \in \pi_i(S^{2p-1}), \xi \in \pi_j(S^i)$

$\tilde{H}_p(\alpha \circ E\xi) = \tilde{H}_p(\alpha) \circ E\xi$ for $\alpha \in \pi_{i+1}(\tilde{S}^3), \xi \in \pi_j(S^i)$

$\Delta(\alpha \circ E^2\xi) = \Delta(\alpha) \circ \xi$ for $\alpha \in \pi_{i+1}(S^{2p+1}), \xi \in \pi_j(S^{i-1})$

写像 $\tilde{g}: S^{2p-1} \to \Omega\tilde{S}^3$ のホモトピーファイバーの包含写像を、$\partial_p: \Omega^2 S^{2p+1} \to S^{2p-1}$ とする。Selic [27] の中で、$\partial_p$ は (2.1.12) の写像 $r_p$ にホモトピックであることが示された。このとき、Prop 2.2 の $\Delta$ に対して、Lem 2.1 が成り立っている。

(2.2.6) $\Delta(E^2\xi) = p\,\xi$, $E^2(\Delta\eta) = p\,\eta$.

合成 $g = \rho_{p-1} \circ \tilde{g}: S^{2p-1} \to \tilde{S}^2_{p-1} \to S^2_{p-1}$ の mapping cone を、$K' = S^2_{p-1} \cup_g e^{2p}$ とする。

$\mathbb{C}P^p = \mathbb{C}P^{p-1} \cup e^{2p}$ は、$S^1$-bundle map $S^{2p-1} \to \mathbb{C}P^{p-1}$ の mapping cone なので、写像 $f_{p-1}: S^2_{p-1} \to \mathbb{C}P^{p-1}$ は、$\bar{f}: K' = S^2_{p-1} \cup_g e^{2p} \to \mathbb{C}P^p = \mathbb{C}P^{p-1} \cup e^{2p}$ に拡張され、top cell は $deg \equiv 1\ (mod\, p)$ で写される。$x \in H^2(X; \mathbb{Z}_p)$ に対して、$x^p = \mathcal{P}^1(x)$ なので、$X = \mathbb{C}P^p$ の bottom cell と top cell の向きをそれぞれ $e^2$ と $e^{2p}$ とすると、

(2.2.7) $\mathcal{P}^1(e^2) = (e^2)^p = e^{2p}$

が成り立つ。$\bar{f}$ に対する $\mathcal{P}^1$ の自然性から、$X = K' = S^2_{p-1} \cup_g e^{2p}$ に対しても、上の等式が成立する。

(2.2.8) $G: S^{2p} \to S^3$

を、$i \circ g: S^{2p-1} \to S^2_{p-1} \to \Omega S^3$ の adjoint とし、$K = S^3 \cup_G e^{2p+1}$ を $G$ の mapping cone とする。このとき、bottom cell $e^3$ と top cell $e^{2p+1}$ 上の degree 1 の写像 $SK' \to K$ を得る。$\mathcal{P}^1$ の自然性から、次が成り立つ。

(2.2.9) $\mathcal{P}^1(e^3) = e^{2p+1}$ in $H^*(K; \mathbb{Z}_p)$, $K = S^3 \cup_G e^{2p+1}$.

$G$ の homotopy class $[G]$ は $\pi_{2p}(S^3) \simeq \pi_{2p}(\tilde{S}^3) \simeq_p \mathbb{Z}_p$ に属している。Th 2.2 は、ある整数 $a \equiv 1(mod\, p)$ に対して、$a[G]$ の位数が $p$ であることを示す。ここで、(2.2.3) の写像 $\tilde{g}$ を、その $a$ 倍と置き換えると、homotopy class $[G]$ と $[i \circ g]$ は位数 $p$ で、(2.2.3) と (2.2.9) を満たしている。この class を次のように書く。

(2.2.10) $\alpha_1(3) = [G] \in \pi_{2p}(S^3) \simeq_p \mathbb{Z}_p$.

class $[i \circ g] \in \pi_{2p-1}(S^2_p) \simeq \pi_{2p-1}(S^2_\infty)$ の位数は $p$ なので、写像 $i \circ g: S^{2p-1} \to S^2_p$ は、次の写像に拡張される。

$\bar{g}: (Y^{2p}, S^{2p-1}) \to (S^2_p, S^2_{p-1})$.

(2.2.2) $\tilde{S}^2_{p-1} \xrightarrow{i} \tilde{S}^2_\infty \xrightarrow{h_p} S^{2p}_\infty$.

**Th 2.2** (2.1.9) の mod $p$ fibration は、次の $IJ\Delta$-sequence を誘導し、これは、mod $p$ で完全である。

$$\cdots \xrightarrow{\Delta} \pi_{i+2}(S^{2pm-1}) \xrightarrow{I} \pi_i(Q^{2m-1}_2) \xrightarrow{J} \pi_{i+3}(S^{2pm+1}) \xrightarrow{\Delta} \pi_{i+1}(S^{2pm-1}) \xrightarrow{I} \cdots$$

(2.1.11) $I(\alpha \circ E^2\xi) = I(\alpha) \circ \xi$ for $\alpha \in \pi_{i+2}(S^{2pm-1}), \xi \in \pi_j(S^i)$

$J(\alpha \circ \xi) = J(\alpha) \circ E^3\xi$ for $\alpha \in \pi_i(Q^{2m-1}_2), \xi \in \pi_j(S^i)$

$\Delta(\alpha \circ E^3\xi) = \Delta(\alpha) \circ E\xi$ for $\alpha \in \pi_{i+3}(S^{2pm+1}), \xi \in \pi_j(S^i)$

$H_p(\alpha \circ E\xi) = H_p(\alpha) \circ E\xi$ for $\alpha \in \pi_{i+1}(S^{2m+1}), \xi \in \pi_j(S^i)$

[27] P.Selic, A Decomposition of $\pi_*(S^{2p+1}; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, Topology 17 (1978), 407-412.

(2.1.12) $\mu^p \simeq i^2 \circ r_m: (\Omega^2 S^{2m+1}, S^{2m-1}) \to (\Omega^2 S^{2m+1}, S^{2m-1})$

**Lem 2.1** 次の2つの合成は、どちらも $p$ 倍する写像である。

$\Delta \circ E^2:\ {}_p\pi_i(S^{2pm-1}) \to {}_p\pi_{i+2}(S^{2pm+1}) \to {}_p\pi_i(S^{2pm-1})$,

$E^2 \circ \Delta:\ {}_p\pi_{i+2}(S^{2pm+1}) \to {}_p\pi_i(S^{2pm-1}) \to {}_p\pi_{i+2}(S^{2pm+1})$.

(2.2.3) $\tilde{g}: S^{2p-1} \to \tilde{S}^2_{p-1}$ s.t. $\deg(\tilde{f}_{p-1} \circ \tilde{g}) \equiv 1\ (mod\, p)$.

(2.2.9) $\mathcal{P}^1(e^3) = e^{2p+1}$ in $H^*(K; \mathbb{Z}_p)$, $K = S^3 \cup_G e^{2p+1}$.

**Lem 2.3** top cell 上の $\bar{g}$ の degree は $mod\,p$ で $-1$ である。

Proof. 次の図式を考える。

$$\begin{tikzcd}
\pi_{2p-1}(S^{2p-1}) \arrow[r, "\tilde{g}_*"] \arrow[d, "="] & \pi_{2p-1}(\widetilde{S^2_{p-1}}) \arrow[r, "\widetilde{f_{p-1}}_*"] \arrow[d, "\rho_{p-1*}"', "\cong"] & \pi_{2p-1}(S^{2p-1}) \arrow[d, "\cong"] \\
\pi_{2p-1}(S^{2p-1}) \arrow[r, "g_*"] & \pi_{2p-1}(S^2_{p-1}) \arrow[r, "f_{p-1*}"] & \pi_{2p-1}(\mathbf{CP}_{p-1}) \\
\pi_{2p}(Y^{2p}, S^{2p-1}) \arrow[r, "\bar{g}_*", "\times x"'] \arrow[u, "\partial", "\times p"'] & \pi_{2p}(S^2_p, S^2_{p-1}) \arrow[r, "f_{p*}", "\times p!"'] \arrow[u, "\partial"] & \pi_{2p}(\mathbf{CP}_p, \mathbf{CP}_{p-1}) \arrow[u, "\partial", "\cong"']
\end{tikzcd}$$

$a$ を $\tilde{f}_{p-1*} \circ \tilde{g}_*$ の degree とすると、(2.2.3) により $a \equiv 1\,(mod\,p)$ である。$x$ を $\bar{g}_*$ の degree とする。上の図式の可換性から $p \times a = x \times p!$ である。よって、$x = a/(p-1)! \equiv -1\,(mod\,p)$ である。■

Prop 2.2 の mod $p$ 完全列の中で、$i+1 \neq 3$ に対して、$\pi_{i+1}(\tilde{S}^3)$ を $\pi_{i+1}(S^3)$ で置き換えることができる。このとき、準同型 $\tilde{G}$, $\tilde{H}_p$ はそれぞれ、次の写像によって与えられる $G, H_p$ に置き換えられる。$S^{2p-1} \to^{g} S^2_\infty \to^{h_p} S^{2p}_\infty$.

shrinking map $\pi: Y^{2p} \to S^{2p} = Y^{2p}/S^{2p-1}$ は次の全射を誘導する。$\pi_{2p}(S^{2p}) \to [Y^{2p}, S^{2p}] \simeq \mathbb{Z}_p$.

このとき、$\pi^*(a\,\iota_{2p}) = [\pi] = \pi^*(\iota_{2p})$ であるための必要十分条件は、$a \equiv 1\,(mod\,p)$ である。Lem 2.3 は、

$\bar{g} \simeq -\pi: Y^{2p} \to S^{2p}$ を示し、次のホモトピー可換図式を得る。

(2.2.11)
$$\begin{tikzcd}
S^{2p-1} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "="] & Y^{2p} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\bar{g}"'] & S^{2p} \arrow[d, "-i"'] \\
S^{2p-1} \arrow[r, "g"] & S^2_\infty \arrow[r, "h_p"] & S^{2p}_\infty .
\end{tikzcd}$$

**Th 2.4** 次の列は $i+1 \neq 3$ のとき、$mod\,p$ で完全である。

$\cdots \to^{H_p} \pi_{i+2}(S^{2p+1}) \to^{\Delta} \pi_i(S^{2p-1}) \to^{G} \pi_{i+1}(S^3) \to^{H_p} \pi_{i+1}(S^{2p+1}) \to^{\Delta} \cdots$

ここで、$G$ は $G(\xi) = \alpha_1(3) \circ E(\xi)$ for $\xi \in_p \pi_i(S^{2p-1})$ で与えられ、Hopf invariant $H_p$ は、次を満たす。

$H_p\{\alpha_1(3), p\iota_{2p}, E(\xi)\}_1 = -E^2(\xi)$ for $\xi \in \pi_i(S^{2p-1})$ with $p \cdot \xi = 0$.

Proof. $g$ の adjoint は $\alpha_1(3)$ を表わし、最初の関係が成り立つ。$\xi$ の coextension $\tilde{\xi}$ に対して、$\bar{g}_*(\tilde{\xi})$ の adjoint は $\{\alpha_1(3), p\iota, E(\xi)\}_1$ に属し、$\pi_*(\tilde{\xi})$ の adjoint は $E^2(\xi)$ である。よって、(2.2.11) の可換性から 最後の関係が成り立つ。■

次の lemma は、Th 2.4 の中で、準同型 $\Delta$ を調べるために適用される。

**Lem 2.4** $\xi \in_p \pi_i(S^{2p-1})$ に対して、$E^2(\xi) = 0$ ならば、$\xi$ は $\Delta$ の像である。

Proof. $E(G(\xi)) = E(\alpha_1(3)) \circ E^2(\xi) = 0$ なので、(2.1.2) から $G(\xi) = 0$ かある。Th 2.4 の列の完全性により Lemma が成り立つ。■

## 2.3 Representation of invariants

[38] (On Iterated Suspensions I,II,III) の中で、$\pi_i(Q_2^{2m-1})$ の invariants について、以下の表現を使った。

invariant $x \in_p \pi_i(Q_2^{2m-1})$ に対して、$x = I(\xi')$ となる元 $\xi' \in \pi_{i+2}(S^{2pm-1})$ が存在して、stable class $\xi = E^\infty(\xi')$ が $p$ で割り切れないとき、(2.3.1) $x = Q^m(\xi)$ と書くことにする。また、$y \in_p \pi_i(Q_2^{2m-1})$ に対して、stable class $\eta = E^\infty(J(y))$ が非自明のとき、(2.3.2) $y = \bar{Q}^m(\eta)$ と書くことにする。

$Q^m(\xi)$ と $\bar{Q}^m(\eta)$ はどちらも **stable type** と呼ばれる。これらの invariants は stable classes $\xi$ または $\eta$ によってでは一意に定まらないことに注意する。$Q^m(\xi)$ は $\xi'$ の選び方による。$\bar{Q}^m(\eta)$ は indeterminacy が $\ker(E^\infty \circ J)$ である。

[38] H.Toda. On Iterated Suspensions I,II,III, J. Math. Kyoto Univ. 5 (1966), 87-142,209-250, 8(1968),101-130.

他方、Moore [17] により与えられた invariants の表現を用いる。

(2.1.6) から次の図式を up to non-zero mod $p$ coefficients of $i^2$, $i^3$ でホモトピー可換にする写像

(2.3.3) $g_m : Y^{2pm-2} \to Q_2^{2m-1}$ を選ぶことができる。

(2.3.4)
$$\begin{tikzcd} S^{2pm-3} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i^2"] & Y^{2pm-2} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "g_m"] & S^{2pm-2} \arrow[d, "i^3"] \\ \Omega^2 S^{2pm-1} \arrow[r] & Q_2^{2m-1} \arrow[r] & \Omega^3 S^{2pm+1} \end{tikzcd}$$

対応するホモトピー群の図式を考えることで次を得る。

**Lem 2.5** $E^2 : {}_p\pi_i(S^{2pm-3}) \to {}_p\pi_{i+2}(S^{2pm-1})$ と $E^4 : {}_p\pi_{i-1}(S^{2pm-3}) \to {}_p\pi_{i+3}(S^{2pm+3})$ が全射ならば、

$g_{m*} : {}_p\pi_i(Y^{2pm-2}) \to {}_p\pi_i(Q_2^{2m-1})$ も全射である。

$\gamma \in \pi_i(Y^{2pm-2})$ の像 $g_{m*}(\gamma) \in \pi_i(Q_2^{2m-1})$ のことを、$\gamma$ による **Moore represented** または、単に **M-represented** と呼ぶ。$\overline{g} : Y^{2p} \to \Omega S^3$ の adjoint を次で表す。

(2.3.5) $G_1 : Y^{2p+1} = S^{2p} \cup_p e^{2p+1} \to S^3$.

この写像 $G_1$ は (2.3.3) の $g_1 : Y^{2p-2} \to Q_2^1$ の代わりに使われる。

$\gamma \in \pi_{i+1}(Y^{2p+1})$ の像 $G_{1*}(\gamma) \in \pi_{i+1}(S^3)$ のことを $\gamma$ による **purely M-represented** と呼ぶ。

## 2.4 Primary computations

簡単のため、$p$-component の記号を次のように省略する。

(2.4.1) $\pi_i(S^{2m+1}) = {}_p\pi_i(S^{2m+1})$, $\pi_i(\widetilde{S^3}) = {}_p\pi_i(\widetilde{S^3})$, $\pi_i(Q_2^{2m-1}) = {}_p\pi_i(Q_2^{2m-1})$.

EHP-sequence (2.1.3) の完全性を利用する。

unstable groups の計算は、次の computing diagram と呼ばれる図式を使うことにより、$k$-stem groups $\pi_{2m+1+k}(S^{2m+1})$ を $k$ に関して帰納的に行う。

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \pi_{2+k}(S^3) \arrow[rr, "E^2"] & & \pi_{4+k}(S^5) \arrow[rr, "E^2"] & & \pi_{6+k}(S^7) \arrow[rr, "E^2"] & & \pi_{8+k}(S^9) \arrow[rr, "E^2"] & & \cdots \\ \pi_{3+k}(Q_1^2) & & \pi_{2+k}(Q_2^3) \arrow[ul, "P"'] & & \pi_{4+k}(Q_2^5) \arrow[ul, "P"'] & & \pi_{6+k}(Q_2^7) \arrow[ul, "P"'] & & {} \arrow[ul, "P"'] & \\ & \pi_{3+k}(S^3) \arrow[ul, "H", "\cong"'] \arrow[rr, "E^2"] & & \pi_{5+k}(S^5) \arrow[ul, "H"] \arrow[rr, "E^2"] & & \pi_{7+k}(S^7) \arrow[ul, "H"] \arrow[rr, "E^2"] & & \pi_{9+k}(S^9) \arrow[ul, "H"] \arrow[rr, "E^2"] & & \cdots \\ & & \pi_{3+k}(Q_2^3) \arrow[ul, "P"'] & & \pi_{5+k}(Q_2^5) \arrow[ul, "P"'] & & \pi_{7+k}(Q_2^7) \arrow[ul, "P"'] & & {} \arrow[ul, "P"'] & \end{tikzcd}$$

これから、$k < pq - 2$, $q = 2(p - 1)$ に対して、$k$-stem unstable groups $\pi_{n+k}(S^n)$ の計算を行う。

最初に stable group の結果を引用する。

(2.4.2) $\pi^S_{rq-1} = \{\alpha_r\} \simeq \mathbb{Z}_p$ for $1 \le r \le p - 1$

$\pi^S_k = 0$ otherwise for $0 < k < pq - 2$.

ここで、元 $\alpha_1$ は $\alpha_1(3) \in \pi_{2p}(S^3)$ の stable class であり、$r > 1$ に対して、$\alpha_r$ は帰納的に次で定義される。

(2.4.3) $\alpha_r \equiv \{\alpha_1, p\iota, \alpha_{r-1}\}$ mod $\alpha_1 \circ \pi^S_{(r-1)q}$.

この範囲の invariant は全て stable type であり、Prop 2.1 により計算される。computation diagram において、自明な群 $\pi_i(Q_2^{2m-1}) = 0$ を消去し、invariants の非自明な群をその生成元に置き換える。

$k = q - 1 = 2p - 3$ のときに、diagram は次のようになる。

$$\begin{tikzcd} Q^1(\iota) & & & & & \\ & \pi_{q+2}(S^3) \arrow[ul, "H"'] \arrow[r, "E^2"] & \pi_{q+4}(S^5) \arrow[r, "E^2"] & \pi_{q+6}(S^7) \arrow[r, "E^2"] & \cdots, \end{tikzcd}$$


[17] J.C.Moore, The double suspension and p-primary components of the homotopy groups of spheres, Boll. Soc. Mat. Mexicana, 1 (1956), 28-37.


(2.1.3) $\cdots \xrightarrow{E^2} \pi_{i+3}(S^{2m+1}) \xrightarrow{H} \pi_i(Q_2^{2m-1}) \xrightarrow{P} \pi_i(S^{2m-1}) \xrightarrow{E^2} \pi_{i+2}(S^{2m+1}) \xrightarrow{H} \cdots$

**Prop 2.1** $i < 2p^2 m - 3$ に対して、次の split 完全列を得る。

$0 \to \pi^S_{i-2pm+3} \otimes \mathbb{Z}_p \to {}_p\pi_i(Q_2^{2m-1}) \to Tor(\pi^S_{i-2pm+2}, \mathbb{Z}_p) \to 0$.

ここで $m \geq 1$ に対して、$H(\pi_{2m+q}(S^{2m+1})) = 0$ かつ $P(\pi_{2m+q}(Q_2^{2m+1})) = 0$ なので、$E^2$ は同型である。

$\alpha_1(n) \in \pi_{q+n-1}(S^n)$ を次で定義する。

$$\alpha_1(n) = E^{n-3}\alpha_1(3) \ \text{ for } n > 3\,.$$

このとき、$m \geq 1$ に対して、$\pi_{q+2m}(S^{2m+1})$ は $\alpha_1(2m+1)$ で生成される。

次に、$k = 2q-2,\ k = 2q-1$ に対して、unstable groups が現れ、図式は次のようになる。

$$\begin{tikzcd}
Q^1(\alpha_1) & & & & \\
& \pi_{2q+1}(S^3) \arrow[ul, "H"'] \arrow[r, "E^2"] & \pi_{2q+3}(S^5) \arrow[r, "E^2"] & \pi_{2q+5}(S^7) \arrow[r, "E^2"] & \cdots, \\
\overline{Q}^1(\alpha_1) & Q^2(\iota) \arrow[u, "P"'] & & & \\
& \pi_{2q+2}(S^3) \arrow[ul, "H"'] \arrow[r, "E^2"] & \pi_{2q+4}(S^5) \arrow[ul, "H"'] \arrow[r, "E^2"] & \pi_{2q+6}(S^7) \arrow[r, "E^2"] & \cdots.
\end{tikzcd}$$

Th 2.4 により、$\alpha_2(3) = \{\alpha_1(3), p\iota_{2p}, E\alpha_1(2p-1)\} \in \pi_{2q+2}(S^3)$ は、$\overline{Q}^1(\alpha_1)$ に対応している。また、$\alpha_2(3)$ の stable class は $\alpha_2$ である。従って、下の行の$E^2$ は同型であり、$H(\pi_{2q+4}(S^5)) = 0$ である。よって、$P \neq 0$ かつ $\pi_{2q+3}(S^5) = 0$ であり、$\pi^S_{2q-2} = 0$ であることが分かる。$p > 3$ ならば、新しい stable generator $\beta_1 \in {}_p\pi^S_{pq-2}$ が現れるまで、この議論を続けることができる。

$n \geq 3,\ 1 \leq r < p$ に対して、$\alpha_r(n) \in \pi_{n+rq-1}(S^n)$ を帰納的に次で定義する。

$$\alpha_r(3) = \{\alpha_1(3), p\iota_{2p}, \alpha_{r-1}(2p)\} \ \text{ and } \ \alpha_r(n) = E^{n-3}\alpha_r(3)\,.$$

このとき、次を得る。

**Th 2.5** $k < pq-2$ に対する非自明な unstable $k$-stem group は下記の通りである。

${}_p\pi_{2m+rq}(S^{2m+1}) \simeq \mathbb{Z}_p\{\alpha_r(2m+1)\}$ for $1 \leq r \leq p-1$ and $1 \leq m$,

${}_p\pi_{2pm-1}(S^{2m+1}) \simeq \mathbb{Z}_p\{P(Q^{m+1}(\iota))\}$ for $1 < m < p$,

${}_p\pi_{2m+rq-1}(S^{2m+1}) \simeq \mathbb{Z}_p\{P(\overline{Q}^{m+1}(\alpha_{r-m-1}))\}$ for $1 < r < p$ and $1 \leq m < r-1$,

次に、Moore 空間 $Y^{n+1} = S^n \cup_p e^{n+1}$ の低次元ホモトピーを考える。

(2.4.4) $S^n \xrightarrow{f_p} S^n \xrightarrow{i} Y^{n+1} \xrightarrow{\pi} S^{n+1} \xrightarrow{f_p} S^{n+1} \xrightarrow{i} Y^{n+2} \xrightarrow{\pi} \cdots$

をコファイバー列とする。写像 $G\colon S^{2p} \to S^3$ は、位数 $p$ の生成元 $\alpha_1(3) \in \pi_{2p}(S^3)$ を表わすので、次のような $G$ の $Y^{2p+1}$ への拡張が存在する。

(2.4.5) $\overline{G}\colon Y^{2p+1} \to S^3$ s.t. $G = \overline{G} \circ i$.

合成 $f_p \circ \overline{G}\colon Y^{2p+1} \to S^3 \to S^3$ を考える。$S^3$ は H-space であり、$Y^{2p+1}$ は co-H-space である。

このとき、$f_p \circ \overline{G}$ は $\overline{G}$ の $p$ 倍にホモトピックであり、$Y^{2p+1}$ の恒等写像の $p$ 倍も同じであるため、ホモトピックゼロとなる。そこで、次のような $\overline{G}$ の coextension $A$ を得る。

$$A\colon Y^{2p+2} \to Y^4 \ \text{ s.t. } \ \pi \circ A = E\overline{G}\colon Y^{2p+2} \to S^4 \ \text{ and } \ \pi \circ A \circ i = EG\,.$$

$n \geq 4, q = 2(p-1)$ に対して、$A$ の suspension とそれらの類を次のように書く。

(2.4.6) $A(n)\colon Y^{n+q} \to Y^n$ and $\alpha(n) \in [Y^{n+q}, Y^n]$.

これらのことを、それぞれ、Adams map, Adams class と呼ぶ。

$\alpha(n) = \alpha^1(n)$ の $r$-fold composition を次のように帰納的に定義する。

$$\alpha^r(n) = \alpha(n) \circ \alpha^{r-1}(n+q) \in [Y^{n+rq}, Y^n] \ \text{ for } n \geq 4,\ r > 1\,.$$

$\alpha$-series の $r$-th member $\alpha_r(n)$ は、次のように定義される。

$$\alpha_r(n) = \pi \circ \alpha^r(n) \circ i \in \pi_{n+rq-1}(S^n) \ \text{ for } n \geq 4 \text{ and } r \geq 1,$$

**Th 2.4** 次の列は $i+1 \neq 3$ のとき、$\mathrm{mod}\ p$ で完全である。

$$\cdots \xrightarrow{H_p} \pi_{i+2}(S^{2p+1}) \xrightarrow{\Delta} \pi_i(S^{2p-1}) \xrightarrow{G} \pi_{i+1}(S^3) \xrightarrow{H_p} \pi_{i+1}(S^{2p+1}) \xrightarrow{\Delta} \cdots$$

ここで、$G$ は$G(\xi) = \alpha_1(3) \circ E(\xi)$ for $\xi \in {}_p\pi_i(S^{2p-1})$で与えられ、Hopf invariant $H_p$ は、次を満たす。

$$H_p\{\alpha_1(3), p\iota_{2p}, E(\xi)\}_1 = -E^2(\xi) \ \text{ for } \ \xi \in \pi_i(S^{2p-1}) \ \text{ with } \ p \cdot \xi = 0\,.$$

ここで、$i, \pi$ は、それぞれ、$i: S^{n+rq-1} \to Y^{n+rq}$, $\pi: Y^n \to S^n$ の類を同じ記号で表わしたものである。
また、次の式による $\alpha_r(3)$, $r > 1$ の定義を加えなければならない。

$$\alpha_r(3) = \overline{G}_*(\alpha^{r-1} \circ i).$$

$\alpha^{r-1}(n+q) \circ i$ は、$\alpha_{r-1}(n+q-1)$ の coextension $S^{n+rq-1} \to Y^{n+q}$ を表わすので、$n \geq 3$ に対して、

(2.4.7) $\alpha_r(n) \equiv \{\alpha_1(n), p\iota_{n+q-1}, \alpha_{r-1}(n+q-1)\}$ mod $\alpha_1(n) \circ \pi_{n+rq-1}(S^{n+q-1})$.
これは、(2.4.3) の定義と適合し、次を得る。
(2.4.8) $\alpha_r = E^\infty \alpha_r(n) \in \pi^S_{rq-1}$ for $n \geq 3$.
$[\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Y}]_k = \lim_n [Y^{n+k}, Y^n]$ を Moore spectrum $\boldsymbol{Y} = \{Y^{n+1}\}$ の stable self homotopy group とする。これは、次の2つの完全列により計算される。

$$\pi^S_k \xrightarrow{f_{p*}} \pi^S_k \xrightarrow{i_*} \pi_k(\boldsymbol{Y}) \xrightarrow{\pi_*} \pi^S_{k-1} \xrightarrow{f_{p*}} \pi^S_{k-1},$$
$$\pi^S_{k-1}(\boldsymbol{Y}) \xrightarrow{f_p^*} \pi^S_{k-1}(\boldsymbol{Y}) \xrightarrow{\pi^*} [\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Y}]_k \xrightarrow{i^*} \pi^S_k(\boldsymbol{Y}) \xrightarrow{f_p^*} \pi^S_k(\boldsymbol{Y}).$$

ここで、sphere spectrum $\boldsymbol{S} = \{S^n\}$ に対して、$\pi^S_k = [\boldsymbol{S}, \boldsymbol{S}]_k$, $\pi^S_k(\boldsymbol{Y}) = [\boldsymbol{S}, \boldsymbol{Y}]_k$ である。
$f_{p*}, f_p^*$ は $p$ 倍なので、次の split 完全列を得る。
(2.4.9) $0 \to \pi^S_k \otimes \mathbb{Z}_p \xrightarrow{i_*} \pi_k(\boldsymbol{Y}) \xrightarrow{\pi_*} Tor(\pi^S_{k-1}, \mathbb{Z}_p) \to 0$, $0 \to \pi^S_{k-1}(\boldsymbol{Y}) \xrightarrow{\pi^*} [\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Y}]_k \xrightarrow{i^*} \pi^S_k(\boldsymbol{Y}) \to 0$.
identity class $1_{\boldsymbol{Y}} \in [\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Y}]_0$ の位数は $p$ なので、$\pi^S_k(\boldsymbol{Y})$, $[\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Y}]_k$ は $\mathbb{Z}_p$-module である。
$0 < r < p$ に対して、$\pi^S_{rq-1} = \{\alpha_r\}$, $\alpha_r = \pi\alpha^r i$ であり、よって、(2.4.9) から
$\pi^S_{rq-1}(\boldsymbol{Y}) = \{\delta\alpha^r i\}$, $\pi^S_{rq}(\boldsymbol{Y}) = \{\alpha^r i\}$
である。ここで、$\delta = i \circ \pi \in [\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Y}]_{-1}$ である。
**Prop 2.3** $[\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Y}]_0 = \{1_{\boldsymbol{Y}}\} \simeq \mathbb{Z}_p$, $[\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Y}]_{-1} = \{\delta\} \simeq \mathbb{Z}_p$.
$0 < r < p$ に対して、
$[\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Y}]_{rq} = \{\alpha^r\} \simeq \mathbb{Z}_p$,
$[\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Y}]_{rq-1} = \{\delta\alpha^r, \alpha^r\delta\} \simeq \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$,
$[\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Y}]_{rq-2} = \{\delta\alpha^r\delta\} \simeq \mathbb{Z}_p$.
他の $k < pq - 3$ に対して、$[\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Y}]_k$ は自明である。
$Y^n$ は $(n-2)$-連結なので、
(2.4.10) $E^\infty: [Y^{n+k}, Y^n] \simeq [\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Y}]_k$ for $n > k+3$.
ここで次のような記法を使うことにする。
stable class $\xi \in [\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Y}]_k$ が $E^\infty$ の像であるならば、$\xi(n) \in [Y^{n+k}, Y^n]$ は、$E^\infty(\xi(n)) = \xi$ を満たす元を示しているものとする。
同様に、$\xi \in \pi^S_k$ に対して、$\xi(n) \in \pi_{n+k}(S^n)$ は、$E^\infty(\xi(n)) = \xi$ を満たすものとする。
この記法 $\xi(n)$ は必ずしも一意的ではないが、それらが存在するときは、$E(\xi(n)) = \xi(n+1)$ を満たす $\{\xi(n)\}$ を選ぶことができる。ときどき、$\xi(n)$ の代わりに、単に $\xi$ を使うことにする。
$\xi$ in $S^n$ or $\xi$ in $Y^n$.

## 3 Iterated Suspension and Lemmas

### 3.1 Homology of iterated suspension fibre

$2k$-fold iterated suspension $E^{2k}:\pi_i(S^{2m-1})\to\pi_{i+2k}(S^{2m-1+2k})$ は、canonical inclusion $i^{2k}:S^{2m-1}\to\Omega^{2k}S^{2m-1+2k}$ により誘導された準同型に同値である。$i^{2k}$ の homotopy fiber は、次の path space として与えられる。

$Q^{2m-1}_{2k} = \Omega(\Omega^{2k}S^{2m-1+2k}, S^{2m-1})$ .

fibration $Q^{2m-1}_{2k}\to S^{2m-1}\to\Omega^{2k}S^{2m-1+2k}$ は次の完全列を誘導する。

(3.1.1) $\cdots\xrightarrow{E^{2k}}\pi^{2m-1+2k}_{i+2k+1}\xrightarrow{H^{(2k)}}\pi_i(Q^{2m-1}_{2k})\xrightarrow{P^{(2k)}}\pi^{2m-1}_i\xrightarrow{2k}\pi^{2m-1+2k}_{i+2k}\xrightarrow{H^{(2k)}}\cdots,$

ここで単に $\pi^m_j=\pi_j(S^n)$ と書いている。3対 $(\Omega^{2k+2h}S^{2m-1+2k+2h}, \Omega^{2k}S^{2m-1+2k}, S^{2m-1})$ から、次の fibration を得る。

(3.1.2) $Q^{2m-1}_{2k}\xrightarrow{i}Q^{2m-1}_{2k+2h}\xrightarrow{j}\Omega^{2k}Q^{2m-1+2k}_{2h}$ .

よって次の列は完全である。

(3.1.3) $\cdots\xrightarrow{\partial}\pi_i(Q^{2m-1}_{2k})\xrightarrow{i_*}\pi_i(Q^{2m-1}_{2k+2h})\xrightarrow{j_*}\pi_{i+2k}(Q^{2m-1+2k}_{2h})\xrightarrow{\partial}\pi_{i-1}(Q^{2m-1}_{2k})\xrightarrow{i_*}\cdots$ .

[4] でよく知られているように、mod $p$ homology ring $H_*(\Omega^rS^{n+r})$ は $\mathbb{Z}_p$ 上の free commutative algebra であり、$\Omega^rS^{n+r}$ から infinite loop space $Q(S^n) = \lim_s \Omega^sS^{n+s}$ への包含写像は、環準同型の単射を誘導する。[20] で構成された Dyer-Lashof operation $Q^j: H_i(\Omega^rS^{n+r})\to H_{i+jq}(\Omega^rS^{n+r})$, $q = 2(p-1)$ は、homology suspension と compatible であり、degree $2j$ の $x$ に対して $Q^j(x)=x^p$ である。

[4] E.Dyer and R.lashof, Homology of iterated loop spaces, Ann. of Math. 84 (1962), 35-88.

[20] G.Nishida, Cohomology operations in iterated loop space, Proc.Japan Acad. 44(1967), 839-842.

$H_*(S^{2m+1})=\wedge(u)$ から始めて、$H_*(\Omega S^{2m+1})=\mathbb{Z}_p[u]$ であり、各基本類 $u$ と homology Bockstein $\Delta$ に対して、

$H_*(\Omega^2S^{2m+1})=\wedge(u, Q^mu, Q^{pm}u,\cdots)\otimes\mathbb{Z}_p[\Delta Q^mu, \Delta Q^{pm}Q^mu,\cdots]$ ,

$H_*(\Omega^3S^{2m+1})=\mathbb{Z}_p[u, Q^mu, \Delta Q^{pm-1}\Delta Q^mu, Q^{pm}Q^mu, \Delta Q^{p(pm-1)}Q^{pm-1}\Delta Q^mu\ \cdots]\otimes\wedge(\Delta Q^mu, Q^{pm-1}\Delta Q^mu,$

$\Delta Q^{pm}Q^mu, Q^{p(pm-1)}Q^{pm-1}\Delta Q^mu\ \cdots)$ .

さらに、$k < pm$ に対して次を得る。

$H_*(\Omega^{2k+1}S^{2m+2k-1})=\mathbb{Z}_p[u, Q^mu, Q^{m+1}u,\cdots, Q^{m+k-1}u, \Delta Q^{pm-1}\Delta Q^mu,\cdots]\otimes\wedge(\Delta Q^mu, \Delta Q^{m+1}u,\cdots,$

$\Delta Q^{m+k-1}u, Q^{pm-1}\Delta Q^mu,\cdots)$ .

$2k$-fold iterated suspension $i^{2k}:S^{2m-1}\to\Omega^{2k}S^{2m+2k-1}$ の homotopy fiber $Q^{2m-1}_{2k}=\Omega(\Omega^{2k}S^{2m+2k-1}, S^{2m-1})$ の mod $p$ homology は、fibration $\Omega^{2k}S^{2m+2k-1}\xrightarrow{i}Q^{2m-1}_{2k}\to S^{2m-1}$ に対する Wang 完全列により計算される。

このとき、$i$ は $H_*$ の全射を誘導し、その kernel は $(u)$ である。このように、$H_*(Q^{2m+2k-1}_{2k})$ は誘導された環構造を持ち、次の結果が成り立つ。

(3.1.4) $H_*(Q^{2m-1}_2)=\mathbb{Z}_p[u, \Delta v_1, v_2, \Delta w,\cdots]\otimes(\Delta u, v_1, \Delta v_2,\cdots)$

for $u\in H_{2pm-2}$, $v_1\in H_{2p^2m-2p-1}$, $v_2\in H_{2p^2m-2}$, $w\in H_{2p^3m-2p^2-1}$ .

(3.1.5) $H_*(Q^{2m-1}_{2k})\ \mathbb{Z}_p[u_0, u_1,\cdots, u_{k-1}, \Delta v,\cdots]\otimes(\Delta u_0, \Delta u, u_1,\cdots, \Delta v_{k-1},\cdots)$

for $u_i\in H_{2pm-2+iq}$, $(0\le i\le k-1)$ and $v\in H_{2p^2m-2p-1}$ .

$\mathcal{P}^i_*: H_n(X)\to H_{n-iq}(X)$ を mod $p$ dual Steenrod operation とする。このとき、[20] により $Q^j$ と $\mathcal{P}^i_*$ における Nishida の関係がある。特に次が成り立つ。

[20] G.Nishida, Cohomology operations in iterated loop space, Proc.Japan Acad. 44(1967), 839-842.

(3.1.6) $\mathcal{P}^1_*Q^{s+1}=sQ^s,\ \mathcal{P}^1_*\Delta Q^{s+1}=(s+1)\Delta Q^s+Q^s\Delta\ \ (s>0)$

(3.1.7) $\mathcal{P}^p_*Q^{s+p}=-\binom{s(p-1)}{p}Q^s+Q^{s+1}\mathcal{P}^1_*$

(3.1.8) $\mathcal{P}^p_*\Delta Q^{s+p}=-\binom{s(p-1)-1}{p}\Delta Q^s+\Delta Q^{s+1}\mathcal{P}^1_*+\binom{s(p-1)-1}{p-1}Q^s\Delta$

(3.1.6)を適用することにより次を得る。

$\mathcal{P}^1_*(\Delta Q^{pm}Q^m u) = (pm\Delta Q^{pm-1} + Q^{pm-1}\Delta)Q^m u = Q^{pm-1}\Delta Q^m u,$

$\mathcal{P}^1_*(Q^{m+i}u) = (m + i - 1)Q^{m+i-1}u,$

$\mathcal{P}^1_*(\Delta Q^{m+i}u) = ((m + i)\Delta Q^{m+i-1} + Q^{m+i-1}\Delta)u = (m + i)\Delta Q^{m+i-1}u.$

$\mathcal{P}^1_*$ の自然性により、対応する元

$u_i = i_*(Q^{m+i}u) \in H_{2mp-2+iq}(Q^{2m-1}_{2k};\mathbb{Z}_p)\ (0 \le i < k),\ v = i_*(Q^{pm}Q^m u) \in H_{2p^2m-2}(Q^{2m-1}_2;\mathbb{Z}_p)$

に対して、同じ関係が成り立つ。よって、次の定理を得る。

**Th 3.1** (1) $degree < 2p^3m - 2p^2 - 4$, $u_0 \in H_{2pm-2}$, $v \in H_{2p^2m-2}$ に対して、

$H_*(Q^{2m-1}_2;\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p[u_0, \Delta\mathcal{P}^1_*\Delta v, v] \otimes \wedge(\Delta u_0, \mathcal{P}^1_*\Delta v, \Delta v).$

(2) $degree < 2p^2m - 2p - 3$, $u_i \in H_{2pm-2+iq}$ $(0 \le i \le k - 1)$ に対して、

$H_*(Q^{2m-1}_{2k};\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p[u_0, u_1, \cdots, u_{k-1}] \otimes \wedge(\Delta u_0, \Delta u_1, \cdots, \Delta u_{k-1}).$

ここで、$0 \le i \le k - 1$ に対して次の関係が成り立つ。

$\mathcal{P}^1_* u_i = (m + i - 1)u_{i-1}, \mathcal{P}^1_*\Delta u_i = (m + i)\Delta u_{i-1}.$

## 3.2 Simple unstable elements

$EHP$-sequence に付随する exact couple において、最初の微分は、$d_1 = H \circ P: \pi_{i+3}(Q^{2m+1}_2) \to \pi_i(Q^{2m-1}_2)$ である。

$x \in \pi_{i+3}(Q^{2m+1}_2)$ の $d_1$-image $d_1(x)$ が非自明で、$\xi = P(x) \in \pi_{i+3}(S^{2m+1})$ と仮定する。このとき、次を得る。

(3.2.1) $E^2(\xi) = 0$ and $\xi \notin Im\, E^2$.

このような元 ξ は **simple unstable element** と呼ばれる。$m \not\equiv 0, 1\ (mod\ p)$ の場合、collection $\{x, \xi = P(x),\ H(\xi) \ne 0\}$ は $EHP$-sequence, $IJ\Delta$-sequence のどちらに対しても独立で、unstable groups の計算の中で消すことができるという意味で、**removable** であるという。上の differential $d_1$ は、$i: Q^{2m-1}_2 \to Q^{2m-1}_4$ の homotopy fiber の inclusion $d: \Omega^3 Q^{2m+1}_2 \to Q^{2m-1}_2$ によって誘導される。(2.3.3) の写像 $g_m: Y^{2pm-2} \to Q^{2m-1}_2$ について考える。これから誘導される mod $p$ homology の写像 $g_{m*}$ が top cell の orientation を Th 3.1 のクラス $u_0$ に写すように $g_m$ を選ぶ。同様に、$g_{m+1}: Y^{2p(m+1)-2} \to Q^{2m+1}_2$ を考え、$\Omega^3_0 g_{m+1}: Y^{2p(m+1)-5} = Y^{2pm+q-3} \to \Omega^3 Q^{2m+1}_2\quad (q = 2(p - 1))$ を、$g_{m+1}$ の adjoint とする。$g_{m*}$ は$degree < 4pm - 5$ のとき、mod $p$ 同値であるので、$m > 1$ に対して、写像 $h_m: Y^{2pm+q-3} \to Y^{2pm-2}$ が存在して、次の図式がホモトピー可換になる。

(3.2.2)
$$
\begin{array}{ccc}
Y^{2pm+q-3} & \xrightarrow{h_m} & Y^{2pm-2} \\
\downarrow{\scriptstyle \Omega^3_0 g_{m+1}} & & \downarrow{\scriptstyle g_m} \\
\Omega^3 Q^{2m+1}_2 & \xrightarrow{d} & Q^{2m-1}_2
\end{array}
$$

$K(m, 2) = Y^{2pm-2} \cup_{h_m} CY^{2pm+q-3}$ を、写像 $h_m$ の mapping cone とする。このとき、$g_m$ は、$\bar{g}_m: K(m, 2) \to Q^{2m-1}_4$ に拡張され、次のホモトピー可換図式を得る。

(3.2.3)
$$
\begin{array}{ccccc}
Y^{2pm-2} & \xrightarrow{i'} & K(m,2) & \xrightarrow{\pi'} & Y^{2pm+q-2} \\
\downarrow{\scriptstyle g_m} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{g}_m} & & \downarrow{\scriptstyle \Omega^2_0 g_{m+1}} \\
Q^{2m-1}_2 & \xrightarrow{i} & Q^{2m-1}_4 & \xrightarrow{j} & \Omega^2 Q^{2m+1}_2
\end{array}
$$

ここで、π' は $K(m, 2)$ の部分複体 $Y^{2pm-2}$ をつぶす写像である。これらの写像 $g_m, g_{m+1}, \bar{g}_m$ は、up to homotoy で一意的である。$\bar{g}_m$ はまた、$degree < 4pm - 5$ で、mod $p$ 同値である。

unstable alpha families の他に、計算の前に除外できるいくつかのコレクションがある。元 $\xi \in {}_p\pi_i(S^{2m+1})$ は、$E^2\xi = 0$ かつ $\xi \notin Im\, E^2$ のとき **simple** であるという。$m \ne -1, 0\ (mod\ p)$ のとき、この ξ は $IJ\Delta$-sequence とは独立である。そこで、$P(x) = \xi$を満たす不変量 $H(\xi)$ と $x \in \pi_i(Q^{2m-1}_2)$ とともに ξ を取り除くことができる。これらの3つの元のことを **simple removable collection** と呼ぶ。

$m \ne -1, 0\ (mod\ 3) \ \leftrightarrow\ m = 1\ (mod\ 3)$?

$m \not\equiv 0, 1\ (mod\ 3) \ \leftrightarrow\ m = 2\ (mod\ 3)$?

**Th 2.2** (2.1.9) の mod $p$ fibration は、次の $IJ\Delta$-sequence を誘導し、これは、mod $p$ で完全である。

$\cdots \xrightarrow{\Delta} \pi_{i+2}(S^{2pm-1}) \xrightarrow{I} \pi_i(Q^{2m-1}_2) \xrightarrow{J} \pi_{i+3}(S^{2pm+1}) \xrightarrow{\Delta} \pi_{i+1}(S^{2pm-1}) \xrightarrow{I} \cdots$

(2.3.3) $g_m: Y^{2pm-2} \to Q^{2m-1}_2$

**Th 3.1** (1) $degree < 2p^3m - 2p^2 - 4$, $u_0 \in H_{2pm-2}$, $v \in H_{2p^2m-2}$ に対して、

$H_*(Q^{2m-1}_2;\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p[u_0, \Delta\mathcal{P}^1_*\Delta v, v] \otimes \wedge(\Delta u_0, \mathcal{P}^1_*\Delta v, \Delta v).$

(2) $degree < 2p^2m - 2p - 3$, $u_i \in H_{2pm-2+iq}$ $(0 \le i \le k - 1)$ に対して、

$H_*(Q^{2m-1}_{2k};\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p[u_0, u_1, \cdots, u_{k-1}] \otimes \wedge(\Delta u_0, \Delta u_1, \cdots, \Delta u_{k-1}).$

ここで、$0 \le i \le k - 1$ に対して次の関係が成り立つ。

$\mathcal{P}^1_* u_i = (m + i - 1)u_{i-1}, \mathcal{P}^1_*\Delta u_i = (m + i)\Delta u_{i-1}.$

$m > 1$ のとき、類 $\eta_m = [h_m] \in [Y^{2pm+q-3}, Y^{2pm-2}] \simeq [Y^{q-1}, Y^0]^S$ は一意に定まる。このとき、次の定理を得る。

**Th 3.2** $m > 1$ に対して、写像 $h_m : Y^{2pm+q-3} \to Y^{2pm-2}$ は、次の元を表わす。

$\eta_m = ((m+1)\delta\alpha - m \cdot \alpha\delta)(2pm-2) \in [Y^{2pm+q-3}, Y^{2pm-2}]$.

これは、Th 3.1(2) で与えられた $Q_4^{2m-1}$ のホモロジー構造から得られる。詳細は [37] の Prop 4.5 を見よ。$\eta_m$ の desuspensions を次のように書く。

(3.2.4) $\eta_m^{(t)} = ((m+1)\delta\alpha - m \cdot \alpha\delta)(2pm-2-t)$, $\eta'_m = \eta_m^{(1)}$.

$m = 1$ の場合、$Q_1^2 \simeq \Omega\widetilde{S}^3$ なので、$Q_2^1$ を $S^3$ の 3-連結 fiber $\widetilde{S}^3$ に置き換える。$Q_4^1$ をまた $\Omega^2 S^5$ の 3-連結 fiber $\Omega^2\widetilde{S}^5$ に置き換える。このとき、$\Omega(\Omega^2\widetilde{S}^5, \widetilde{S}^3)$ は $Q_2^3 = \Omega(\Omega^2 S^5, S^3)$ にホモトピー同値であり、次の fibration を得る。

$Q_2^3 \xrightarrow{\widetilde{d}} \widetilde{S}^3 \xrightarrow{\widetilde{i}} \Omega^2\widetilde{S}^5$. $\widetilde{S}^5$ の mod $p$ コホモロジー構造は、次の fibration $\widetilde{S}^5 \to S^5 \to K(Z,5)$ から確かめられ、

$H^*(K(Z,5);\mathbb{Z}_3) = \wedge(u, \mathcal{P}^1u, \mathcal{P}^2u, \mathcal{P}^3\mathcal{P}^1u, \cdots) \otimes \mathbb{Z}_3[\Delta\mathcal{P}^1u, \Delta\mathcal{P}^2u, \Delta\mathcal{P}^3\mathcal{P}^1u, \cdots]$, ここで、$u \in H^5$ は fundamental class, $\Delta$ は cohomology Bockstein である。Adem relation により、$\mathcal{P}^1(\mathcal{P}^1u) = 2\mathcal{P}^2u$, $\mathcal{P}^1(\Delta\mathcal{P}^1u) = \Delta\mathcal{P}^2u$.

$w_5 \in H^{2p+2}(\widetilde{S}^5;\mathbb{Z}_p)$ を $\mathcal{P}^1u \in H^{2p+3}$ の cohomology suspension とすると、Serre spectral sequence により、

$H^*(\widetilde{S}^5;\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_3[w_5, \mathcal{P}^1w_5, \mathcal{P}^pw_5, \cdots] \otimes \wedge(\Delta w_5, \Delta\mathcal{P}^1w_5, \Delta\mathcal{P}^pw_5, \cdots)$ for $* < p(2p+2)$, $\Delta\mathcal{P}^1w_5 = 2\mathcal{P}^1\Delta w_5$

であり、さらに、$w_3 \in H^*(\Omega^2\widetilde{S}^5;\mathbb{Z}_p)$ に対して、

(3.2.5) $H^*(\Omega^2\widetilde{S}^5;\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p[w_3, \mathcal{P}^1w_3] \otimes \wedge(\Delta w_3, \Delta\mathcal{P}^1w_3)$ for $* < 2p^2$, $\Delta\mathcal{P}^1w_3 = 2\mathcal{P}^1\Delta w_3$.

同様に、$H^*(\Omega\widetilde{S}^3;Z_p) = \mathbb{Z}_p[w_3] \otimes \wedge(\Delta w_3)$ for $* < 2p^2$.

$\widetilde{G}_1 : Y^{2p+1} \to \widetilde{S}^3$ を、$G_1 : Y^{2p+1} \to S^3$ のリフトとすると、$\widetilde{G}_1$ は $dimension < 4p+1$ に対して mod $p$ 同値である。

$\widetilde{d} : Q_2^3 \to \widetilde{S}^3$ を $g_2$ と $\widetilde{G}_1$ で近似すると、次の図式がホモトピー可換となるような写像 $\widetilde{h}_1 : Y^{2p+q} \to Y^{2p+1}$ を得る。

(3.2.6)
$$\begin{tikzcd}
Y^{2p+q} \arrow[r, "\widetilde{h}_1"] \arrow[d, "g_2"] & Y^{2p+1} \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "\widetilde{G}_1"] & \widetilde{K} \arrow[d, "\widetilde{G}_2"] \\
Q_2^3 \arrow[r, "\widetilde{d}"] & \widetilde{S^3} \arrow[r, "i"] & \Omega^2\widetilde{S^5}
\end{tikzcd}$$

ここで、$\widetilde{K} = Y^{2p+1} \cup CY^{2p+q}$ は、$\widetilde{h}_1$ の mapping cone で、$\widetilde{G}_2$ は $dimension < 4p+1$ で mod $p$ 同値である。

Th3.2 と同様に、$\widetilde{h}_1$ のクラス $\widetilde{\eta}_1$ に対して、次の定理が成り立つ。

**Th 3.3** 写像 $\widetilde{h}_1 : Y^{4p-2} \to Y^{2p+1}$ は次の元を表す。$\widetilde{\eta}_1 = (2\delta\alpha - \alpha\delta)(2p+1) \in [Y^{4p-2}, Y^{2p+1}]$.

simple unstable element に対して、Th3.2 と3.3 を適用すると次を得る。

**Prop 3.1** (1) $m > 1$ とする。ある元 $\gamma \in \pi_i(Y^{2p(m+1)-5})$ に対して、$x \in \pi_{i+3}(Q_2^{2m+1})$ が $E^3\gamma$ による M-represented であるならば、$d_1(x) = HP(x) \in \pi_i(Q_2^{2m-1})$ は、$h_{m*}(\gamma) = \eta_m \circ \gamma \in \pi_i(Y^{2pm-2})$ による M-represented である。

(2) $m = 1$ とする。$x \in \pi_i(Q_2^3)$ が $\gamma \in \pi_i(Y^{4p-2})$ による M-represented であるならば、$P(x) \in \pi_i(S^3)$ は、$\widetilde{h}_{1*}(\gamma) = \widetilde{\eta}_1 \circ \gamma \in \pi_i(Y^{2p+1})$ による purely M-represented である。

stable element $\xi \in \pi_k^S$ に対して、$E^\infty(\xi(n)) = \xi$ を満たす元を、$\xi(n) \in \pi_{n+k}(S^n)$ と書く。stable element $\xi \in \pi_k^S$ の $unstableness\ u(\xi)$ を次で定義する。

(3.2.7) $u(\xi) = \min\{n \mid \exists\xi(n) : E^\infty(\xi(n)) = \xi\}$.

**Th 3.1** (1) $degree < 2p^3m - 2p^2 - 4$, $u_0 \in H_{2pm-2}$, $v \in H_{2p^2m-2}$ に対して、

$H_*(Q_2^{2m-1};\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p[u_0, \Delta\mathcal{P}_*^1\Delta v, v] \otimes \wedge(\Delta u_0, \mathcal{P}_*^1\Delta v, \Delta v)$.

(2) $degree < 2p^2m - 2p - 3$, $u_i \in H_{2pm-2+iq}$ $(0 \le i \le k-1)$ に対して、

$H_*(Q_{2k}^{2m-1};\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p[u_0, u_1, \cdots, u_{k-1}] \otimes \wedge(\Delta u_0, \Delta u_1, \cdots, \Delta u_{k-1})$.

ここで、$0 \le i \le k-1$ に対して次の関係が成り立つ。

$\mathcal{P}_*^1 u_i = (m+i-1)u_{i-1}$, $\mathcal{P}_*^1\Delta u_i = (m+i)\Delta u_{i-1}$.

[37] H.Toda. On homotopy groups of $S^3$-bundles over spheres, J.Math.Kyoto Univ. 2 (1963), 193-207.

**Lem 2.5** $E^2 : {}_p\pi_i(S^{2pm-3}) \to {}_p\pi_{i+2}(S^{2pm-1})$ と $E^4 : {}_p\pi_{i-1}(S^{2pm-3}) \to {}_p\pi_{i+3}(S^{2pm+3})$ が全射ならば、$g_{m*} : {}_p\pi_i(Y^{2pm-2}) \to {}_p\pi_i(Q_2^{2m-1})$ も全射である。

$\gamma \in \pi_i(Y^{2pm-2})$ の像 $g_{m*}(\gamma) \in \pi_i(Q_2^{2m-1})$ のことを、$\gamma$ による **M-represented** と呼ぶ。

$\overline{g} : Y^{2p} \to \Omega S^3$ の adjoint を次で表す。

(2.3.5) $G_1 = ad(\overline{g}) : Y^{2p+1} = S^{2p} \cup_p e^{2p+1} \to S^3$.

この写像 $G_1$ は (2.3.3) の $g_1 : Y^{2p-2} \to Q_2^1$ の代わりに使われる。

$\gamma \in \pi_{i+1}(Y^{2p+1})$ の像 $G_{1*}(\gamma) \in \pi_{i+1}(S^3)$ のことを $\gamma$ による **purely M-represented** と呼ぶ。

$x = g_{m+1*}(E^3\gamma) \Rightarrow HP(x) = g_{m*}(\eta_m \circ \gamma)$.

$x = g_{2*}(\gamma) \Rightarrow P(x) = G_{1*}(\widetilde{\eta}_1 \circ \gamma)$.

section 3.2 の記法 $Q^m(\xi)$, $\overline{Q}^m(\xi)$ を使うと、つぎの Lemma を得る。

**Lem 3.1** $\xi \in \pi_k^S$ に対して、$u(\xi) < 2p(m+1) - 5$ ならば、$d_1(Q^{m+1}(\xi)) = HP(Q^{m+1}(\xi)) = (m+1)Q^m(\alpha_1\xi)$.
$m = 1$ のときは、$u(\xi) \le 4p - 3$ である $\xi$ に対してこの式が成り立つ。

**Lem 3.2** $\xi \in \pi_k^S$ に対して、$u(\xi) < 2p(m+1) - 5$, $p\xi = 0$ ならば、$d_1(\overline{Q}^{m+1}(\xi)) = HP(\overline{Q}^{m+1}(\xi)) = m \cdot \overline{Q}^m(\alpha_1\xi)$.
ここで、$u(\xi) \le 4p - 3$ の $\xi$ に対して、$m = 1$ のときに成り立つ。

**Lem 3.3** $\xi \in \pi_k^S$ に対して、$u(\xi) < 2p(m+1) - 5$, $p\xi = 0$, $\alpha_1\xi = 0$ ならば、$\eta \in (m+1)\{\alpha_1, p, \xi\} - m\{p, \alpha_1, \xi\}$ に対して、$d_1(\overline{Q}^{m+1}(\xi)) = HP(\overline{Q}^{m+1}(\xi)) = Q^m(\eta)$.
ここで、$u(\xi) \le 4p - 3$ の $\xi$ に対して、$m = 1$ のときに成り立つ。

## 3.3 Lemmas for $p$ times and $\Delta$

mapping cone $K(m,2) = Y^{2pm-2} \cup_{h_m} CY^{2pm+q-3}$ の cofibration

(3.3.1) $Y^{2pm-2} \xrightarrow{i'} K(m,2) \xrightarrow{\pi'} Y^{2pm+q-2}$

を考える。$1_K : K(m,2) \to K(m,2)$ を $K(m,2)$ の恒等写像とする。

**Th 3.4** 恒等写像 $1_K$ の $p$ 倍 $p \cdot 1_K : K(m,2) \to K(m,2)$ は次の合成にホモトピックである。

$i' \circ \alpha(2pm-2) \circ \pi' : K(m,2) \to Y^{2pm+q-2} \to Y^{2pm-2} \to K(m,2)$.

この定理は本質的には Gray[7] で証明された。$[Y^n, Y^n] \simeq \mathbb{Z}_p$ なので、$Y^n$ の恒等写像の $p$ 倍はゼロホモトピックである。これはある $f: Y^{2pm+q-2} \to Y^{2pm-2}$ に対して、homotopy $p \cdot 1_K \simeq i' \circ f \circ \pi'$ を与え、2つの写像の mapping cone はホモトピー同値である。$p \cdot 1_K$ の mapping cone は smash product $Y^2 \wedge K(m,2)$ である。$i' \circ f \circ \pi'$ の mapping cone は $f$ の mapping cone を部分複体として含んでいる。Cartan formula により $Y^2 \wedge K(m,2)$ のなかで、$\mathcal{P}^1$ 作用素を考えると、$f$ の mapping cone の中での $\mathcal{P}^1$ が得られ、定理が証明される。

$h_m': Y^{2pm+q-4} \to Y^{2pm-3}$, $K'(m,2) = Y^{2pm-3} \cup_{h_m'} CY^{2pm+q-4}$ を $h_m$ と $K(m,2)$ の desuspensions とし、suspension $E: \pi_{i-1}(K'(m,2)) \to \pi_i(K(m,2))$ を考える。$x \in Im\, E$ ならば、$p \cdot x = (p \cdot 1_K)_*(x)$ である。よって、Th 3.4 の系として次を得る。

**Prop 3.2** $\gamma \in \pi_i(K(m,2))$ が suspension image とすると、次が成り立つ。$p(\gamma) = i'_*(\alpha(2pm-2) \circ \pi'_*(\gamma))$.

これを次の可換図式

(3.3.2)
$$\begin{tikzcd}
\pi_{i+3}(S^{2m+1}) \arrow[r, "E^2"] \arrow[d, "H"] & \pi_{i+5}(S^{2m+3}) \arrow[r, "="] \arrow[d, "H^{(4)}"] & \pi_{i+5}(S^{2m+3}) \arrow[d, "H"] \\
\pi_i(Q_2^{2m-1}) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "P"] & \pi_i(Q_4^{2m-1}) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "P^{(4)}"] & \pi_{i+2}(Q_2^{2m+1}) \arrow[d, "P"] \\
\pi_i(S^{2m-1}) \arrow[r, "="] & \pi_i(S^{2m-1}) \arrow[r, "E^2"] & \pi_{i+2}(S^{2m+1})
\end{tikzcd}$$

に適用すると、[38] の Th 5.3, 5.4 の一般化である次の2つの lemma を得る。

**Lem 3.4** $x \in \pi_{i+2}(Q_2^{2m+1})$ が $E^4(\gamma)$ による M-represented であり、$h'_{m*}(\gamma) = 0$ ならば、元 $\xi \in \pi_i(S^{2m-1})$ が存在し、$\alpha(2pm-2) \circ E^2\gamma$ による M-represented $y \in \pi_i(Q_2^{2m-1})$ に対して、$p \cdot \xi = P(y)$, $E^2\xi = P(x)$.

Proof. (3.2.3) の記法により、$x = \Omega_0{}^2 g_{m+1*}(E^2\gamma)$ である。仮定により、$x$ の coextension $\overline{\gamma} \in \pi_i(K(m,2))$ が存在して、$\pi'_*(\overline{\gamma}) = E^2\gamma$ であり、$\overline{\gamma}$ は suspension の像である。Prop 3.2 から次を得る。

$p(\overline{\gamma}) = i'_*(\alpha(2pm-2) \circ E^2\gamma)$.

(3.2.3) の写像に対して、$\overline{x} = \overline{g}_{m*}(\overline{\gamma})$, $y = g_{m*}(\alpha(2pm-2) \circ E^2\gamma)$ とする。(3.2.3) の可換性から次を得る。

(3.3.3) $p(\overline{x}) = i_*(y)$, $j_*(\overline{x}) = x$.

よって、(3.3.2) の可換性から lemma を得る。■

$HP(x) = ax$

$HP(X) = AX$

[7] B.W.Gray, Unstable families related to the image of $J$, Proc. Camb. Phil. Soc, 96 (1984), 95-113.

[38] H.Toda. On Iterated Suspensions I,II,III, J. Math. Kyoto Univ. 5 (1966), 87-142,209-250, 8(1968),101-130.

$x = g_{m+1*}(E^4\gamma)$, $h'_{m*}(\gamma) = 0$, $y = g_{m*}(\alpha(2pm-2) \circ E^2\gamma) \Rightarrow p \cdot \xi = P(y)$, $E^2\xi = P(x)$.
$P(x)$ は $E^2$ の像、よって $HP(x) = 0$.
$P(y)$ は $p$ で割れる。

**Lem 3.5** $\xi \in \pi_{i+5}(S^{2m+3})$ の Hopf invariant $H(\xi)$ が $E^4(\gamma)$ による M-represented であり、$h'_{m*}(\gamma) = 0$ ならば、元 $\eta \in \pi_{i+3}(S^{2m+1})$ が存在し、$p \cdot \xi = E^2\eta$ であり、$H(\eta)$ は $\alpha(2pm - 2) \circ E^2\gamma$ による M-represented である。

Proof. $x = H(\xi) \in \pi_{i+2}(Q_2^{2m+1})$ とすると、$y = g_{m*}(\alpha(2pm - 2) \circ E^2\gamma), \bar{x} \in \pi_i(Q_4^{2m-1})$ に対して、(3.3.3) が成り立つ。$j_*(\bar{x} - H^{(4)}(\xi)) = j_*(\bar{x}) - H(\xi) = x - x = 0$. なので、$\bar{x} = H^{(4)}(\xi) + i_*(z)$ を満たす $z \in \pi_i(Q_2^{2m-1})$ が存在する。Lem 2.2 により、$pz = 0$ である。よって、$i_*(y) = p(\bar{x}) = H^{(4)}(p\xi), P(y) = P^{(4)}(i_*(y)) = P^{(4)}H^{(4)}(p\xi) = 0$ である。

EHP-sequence の完全性により、$H(\eta') = y$ を満たす $\eta' \in \pi_{i+3}(S^{2m+1})$ が存在する。よって、ある $\eta_0 \in \pi_{i+1}(S^{2m-1})$ に対して、$H^{(4)}(p\xi - E^2\eta') = i_*(y) - i_*H(\eta') = i_*(y) - i_*(y) = 0$, $p\xi - E^2\eta' = E^4\eta_0$ が成り立つ。$\eta = \eta' + E^2\eta_0$ とすると、lemma が得られる。■

次に、準同型 $\Delta: {}_p\pi_{i+2}(S^{2pm+1}) \to {}_p\pi_i(S^{2pm-1})$ について考える。この準同型は、(2.1.9) のファイバー列 $\Omega^4S^{2pm+1} \xrightarrow{\partial_p} \Omega^2S^{2pm-1} \to Q_2^{2m-1} \to \Omega^3S^{2pm+1} \xrightarrow{\partial_p} \Omega S^{2pm-1}$ の中の $\partial_p$ によって誘導される。Lem 2.1 により、最初の $\partial_p$ の $S^{2pm-3}$ への制限は degree $p$ の写像である。よって、path space をとることにより、写像 $\bar{\partial}_p: Q_4^{2pm+1} \to Q_2^{2pm-1}$ が得られ、次の図式を可換にする準同型 $\bar{\Delta}: \pi_{i-1}(Q_4^{2pm-3}) \to \pi_{i-1}(Q_2^{2pm-3})$ を誘導する。

(3.3.4)
$$\begin{tikzcd}
\pi_i(S^{2pm-3}) \arrow[r, "E^4"] \arrow[d, "\cdot p"] & \pi_{i+4}(S^{2pm+1}) \arrow[r, "H^{(4)}"] \arrow[d, "\Delta"] & \pi_{i-1}(Q_4^{2pm-3}) \arrow[r, "P^{(4)}"] \arrow[d, "\bar{\Delta}"] & \pi_i(S^{2pm-3}) \arrow[d, "\cdot p"] \\
\pi_i(S^{2pm-3}) \arrow[r, "E^2"] & \pi_{i+2}(S^{2pm+1}) \arrow[r, "H"] & \pi_{i-1}(Q_2^{2pm-3}) \arrow[r, "P"] & \pi_i(S^{2pm-3})
\end{tikzcd}$$

$\bar{g}_{pm-1}: K(pm - 1, 2) \to Q_4^{2pm-3}$ と $g_{pm-1}: Y^{2p(pm-1)-2} \to Q_2^{2pm-3}$ は、up to degree $4p(pm - 1) - 5$ で、mod $p$ 同値なので、次の図式をホモトピー可換にする写像 $D'$ が存在する。

(3.3.5)
$$\begin{tikzcd}
K(pm-1,2) \arrow[r, "D'"] \arrow[d, "\bar{g}_{pm-1}"] & Y^{2p(pm-1)-2} \arrow[d, "g_{pm-1}"] \\
Q_4^{2pm-3} \arrow[r, "\bar{\partial}_p"] & Q_2^{2pm-3}
\end{tikzcd}$$

$D'$ の部分複体 $Y^{2p(pm-1)-2}$ への制限は degree $p$ の写像なので、それは null homotopic である。そこで、$D'$ として次の様にとることができる。$D' = D \circ \pi': K(pm - 1, 2) \to Y^{2p(pm-1)-2+q} \to Y^{2p(pm-1)-2}$.

**Prop 3.3** 上の写像 $D: Y^{2p(pm-1)-2+q} \to Y^{2p(pm-1)-2}$ は、up to non-zero coefficient で次の元を表す。
$\alpha(2p(pm - 1) - 2)$.

この Lemma は [38] の Lemma 9.2 である。Th 3.1(1) を使ってこれを証明できる。

**Lem 3.6** $\xi \in \pi_{i+4}(S^{2pm+1})$ の Hopf invariant $H(\xi) \in \pi_{i+1}(Q_2^{2pm-1})$ が、$\gamma \in \pi_{i-1}(Y^{2p(pm-1)-4})$ に対して、$E^2\gamma$ による M-represented であり、$h_{pm-1*}(\gamma) = 0$ を満たすならば、up to non-zero coefficient で $H(\Delta(\xi))$ は、$\alpha(2p(pm - 1) - 2) \circ \gamma$ による M-represented である。

上の lemma の特別な場合だが、次の場合は頻繁に現れる。

**Lem 3.7** $\xi \in \pi_{i+4}(S^{2pm+1}), \gamma \in \pi_s^S, \delta \in \pi_t^S$ に対して、up to non-zero coefficients で次の関係が成り立つ。

(1) $H(\xi) = Q^{pm}(\gamma)$ は、$H(\Delta(\xi)) = \bar{Q}^{pm-1}(\alpha\gamma) = HP(\bar{Q}^{pm}(\xi))$ を誘導する。

(2) $H(\xi) = Q^{pm}(\gamma), \Delta(\xi) = P(\bar{Q}^{pm}(\gamma))$ は、$H(\xi \circ \delta(i + 4)) = Q^{pm}(\gamma\delta), \Delta(\xi \circ \delta(i)) = P(\bar{Q}^{pm}(\gamma\delta))$ を誘導する。

Proof. $S^{2pm} \subset Y^{2pm+1}$ の injection image を考えることにより、Lem 3.6 から (1) が成り立つ。
$H, \Delta, P$ の自然性から (2) が成り立つ。■

## 3.4 Short range unstable elements

2番目の微分 $d_2: Ker\, d_1 \to Coker\, d_1$ を考える。より正確には、次の条件を満たす元 $\xi \in \pi_i(S^{2m+1})$ を考える。

(3.3.2)
$$\begin{tikzcd}
\pi_{i+3}(S^{2m+1}) \arrow[r, "E^2"] \arrow[d, "H"] & \pi_{i+5}(S^{2m+3}) \arrow[r, "="] \arrow[d, "H^{(4)}"] & \pi_{i+5}(S^{2m+3}) \arrow[d, "H"] \\
\pi_i(Q_2^{2m-1}) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "P"] & \pi_i(Q_4^{2m-1}) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "P^{(4)}"] & \pi_{i+2}(Q_2^{2m+1}) \arrow[d, "P"] \\
\pi_i(S^{2m-1}) \arrow[r, "="] & \pi_i(S^{2m-1}) \arrow[r, "E^2"] & \pi_{i+2}(S^{2m+1})
\end{tikzcd}$$

(3.3.3) $p(\bar{x}) = i_*(y),\ j_*(\bar{x}) = x$.

**Lem 2.2** ${}_p\pi_i(Q_2^{2m-1})$ は、elementary である。すなわち $p({}_p\pi_i(Q_2^{2m-1})) = 0$.

(2.1.9) $\Omega^2S^{2pm-1} \xrightarrow{i} Q_2^{2m-1} \xrightarrow{j} \Omega^3S^{2pm+1} \xrightarrow{\partial_p} \Omega S^{2pm-1}$.

**Lem 2.1** 次の2つの合成は、どちらも $p$ 倍する写像である。
$\Delta \circ E^2: {}_p\pi_i(S^{2pm-1}) \to {}_p\pi_{i+2}(S^{2pm+1}) \to {}_p\pi_i(S^{2pm-1})$,
$E^2 \circ \Delta: {}_p\pi_{i+2}(S^{2pm+1}) \to {}_p\pi_i(S^{2pm-1}) \to {}_p\pi_{i+2}(S^{2pm+1})$.

$g_m: Y^{2pm-2} \to Q_2^{2m-1}$

[38] H.Toda. On Iterated Suspensions I,II,III, J. Math. Kyoto Univ. 5 (1966), 87-142,209-250, 8(1968),101-130.

**Th 3.1** (1) $degree < 2p^3m - 2p^2 - 4$, $u_0 \in H_{2pm-2}, v \in H_{2p^2m-2}$ に対して、
$H_*(Q_2^{2m-1}; \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p[u_0, \Delta\mathcal{P}_*^1\Delta v, v] \otimes \wedge (\Delta u_0, \mathcal{P}_*^1\Delta v, \Delta v)$.
(2) $degree < 2p^2m - 2p - 3$, $u_i \in H_{2pm-2+iq}$ $(0 \le i \le k - 1)$ に対して、
$H_*(Q_{2k}^{2m-1}; \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p[u_0, u_1, \cdots, u_{k-1}] \otimes \wedge (\Delta u_0, \Delta u_1, \cdots, \Delta u_{k-1})$.
ここで、$0 \le i \le k - 1$ に対して次の関係が成り立つ。
$\mathcal{P}_*^1 u_i = (m + i - 1)u_{i-1}, \mathcal{P}_*^1 \Delta u_i = (m + i)\Delta u_{i-1}$.

$H(\xi) = c \Rightarrow H\Delta(\xi) = AC = HP(X)$
$H(\xi) = c, \Delta\xi = P(C) \Rightarrow H(\xi\delta) = cd, \Delta(\xi\delta) = P(CD)$

**Lem 3.6** $\xi \in \pi_{i+4}(S^{2pm+1})$ の Hopf invariant $H(\xi) \in \pi_{i+1}(Q_2^{2pm-1})$ が、$\gamma \in \pi_{i-1}(Y^{2p(pm-1)-4})$ に対して、$E^2\gamma$ による M-represented であり、$h_{pm-1*}(\gamma) = 0$ を満たすならば、up to non-zero coefficient で $H(\Delta(\xi))$ は、$\alpha(2p(pm - 1) - 2) \circ \gamma$ による M-represented である。

(3.4.1) $E^2(\xi) \neq 0,\ E^4(\xi) = 0, \xi \notin Im\, E^2$.
これは、次に同値である。
(3.4.2) $H(\xi) \neq 0, E^2(\xi) = P(x) \neq 0$ for some $x \in \pi_{i+2}(Q_2^{2m+3})$.

このような元 $\{\xi, E^2\xi\}$ は、**two stage unstable elements** または、**secondary unstable elements** と呼ばれる。
次の図式は可換である。

(3.4.3)
$$\begin{tikzcd}
\pi_i(S^{2m+1}) \arrow[r, "E^2"] \arrow[d, "H"] & \pi_{i+2}(S^{2m+3}) \arrow[d, "H^{(4)}"] & \pi_{i+2}(Q_2^{2m+3}) \arrow[l, "P"'] \arrow[d, "="] \\
\pi_{i-3}(Q_2^{2m-1}) \arrow[r, "i_*"] & \pi_{i-3}(Q_4^{2m-1}) & \pi_{i+2}(Q_2^{2m+3}) \arrow[l, "\partial"']
\end{tikzcd}$$

次に、(3.1.5) の結果を考えることにより、次のホモトピー可換図式を得る。

(3.4.4)
$$\begin{tikzcd}
Y^{2pm-2} \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "g_m"] & K(m,2) \arrow[d, "\bar{g}_m"] & Y^{2pm+4p-5} \arrow[l, "\tilde{h}_{m+1}"'] \arrow[d, "\Omega_0^3 g_{m+2}"] \\
Q_2^{2m-1} \arrow[r, "i"] & Q_4^{2m-1} & \Omega^3 Q_2^{2m+3} \arrow[l, "d"']
\end{tikzcd}$$

ここで、$\tilde{h}_{m+1}$ は $h_{m+1}{}^{(2)}: Y^{2pm+4p-6} \to Y^{2pm+2p-4}$ の coextension である。

**Prop 3.4** $\gamma \in \pi_{i-4}(Y^{2m+4p-8})$, $\eta^{(3)}_{m+1_*}(\gamma) = 0$ に対して、$x \in \pi_{i+2}(Q_2^{2m+3})$ は M-represented by $E^6\gamma$ と仮定すると、$i_*\{\eta_m, \eta^{(2)}_{m+1}, E^3\gamma\}_1 = \partial(x)$.

複体 $K(m,2) = Y^{2pm-2} \cup e^{2pm+2p-5} \cup e^{2pm+2p-4}$ は $(m+1)\alpha_1(2pm-3)$ の mapping cone $C^{2pm+2p-5}_{(m+1)\alpha} = S^{2pm-3} \cup e^{2pm+2p-5}$ を部分複体として含んでいる。さらに $\tilde{h}_{m+1}$ の $S^{2pm+4p-6}$ への制限は、$(m+2)\alpha_1(2pm+2p-6)$ の coextension $\tilde{h}: S^{2pm+4p-6} \to C^{2pm+2p-5}_{(m+1)\alpha}$ に homotopic である。よって、Prop 3.4 の系として次を得る。

**Lem 3.8** $m \not\equiv -1, -2\ (mod\ p)$ で、$\gamma \in \pi_{i-4}(S^{2m+4p-9})$ に対して invariant $x \in \pi_{i+2}(Q_2^{2m+3})$ は $E^6(i_*\gamma)$ による M-represented であり、$\alpha_1(2m+4p-9) \circ \gamma = 0$ であるならば、$\xi \in \pi_i(S^{2m+1})$ が存在して、up to non-zero coefficient で、$H(\xi) \in I\{\alpha_1(2pm-1), \alpha_1(2pm+2p-4), E^3\gamma\}$, $E^2(\xi) = P(x)$.

同様に、$K(m,2)/C^{2pm+2p-5}_{(m+1)\alpha}$ を考えることにより次を得る。

**Lem 3.9** $m \not\equiv 0, -1\ (mod\ p)$ で、$\gamma \in \pi_{i-3}(Y^{2m+4p-8})$ に対して invariant $x \in \pi_{i+2}(Q_2^{2m+3})$ は $E^6\gamma$ による M-represented であり、$\eta^{(3)}_{m+1} \circ \gamma = 0$ であるならば、$\xi \in \pi_{i+1}(S^{2m+1})$ が存在して、up to non-zero coefficient で $H_p(\xi) = JH(\xi) \in \{\alpha_1(2pm+1), \alpha_1(2pm+2p-2), E^3\pi_*\gamma\}$.

$\beta_1$ を $\pi^S_{pq-2} \simeq \mathbb{Z}_p$ の生成元とする。$\beta_1$ は $p$ 個の $\alpha_1$ の long bracket $\beta_1 = \{\alpha_1, \alpha_1, \cdots, \alpha_1\}$ により与えられる。
そして、それは Adem relation の secondary operation $\mathcal{P}^{p-1}\mathcal{P}^1 = 0$ によって検出される。$n \geq 2p-1$ に対して unstable case $\beta_1(n) \in \pi_{n+pq-2}(S^n)$, $E^\infty\beta_1(n) = \beta_1$ が定義され、$n \geq 2p+1$ に対して stable であり、$\beta_1(2p-1)$ の位数は $p^2$ である。
[38] から unstable elements の little longer series についての次の2つの lemma (Th 10.3, 10.8) を引用する。

**Lem 3.10** $l \geq 1, m = pl$ とする。このとき、$\pi_{2pm+pq-2}(S^{2m+1})$ の元 $v(2m+1)$ が存在し、up to non-zero coefficient で、$H(v(2m+1)) = I(Q_m(\beta_1))$, $E^{2(p-2)}v(2m+1) = P(I(\alpha_1(2mp+pq-1))$.
ここで、$v(2m+2p-1) = E^{2p-2}v(2m+1)$ である。

(3.1.5) $H_*(Q^{2m-1}_{2k})\ \mathbb{Z}_p[u_0, u_1, \cdots, u_{k-1}, \Delta v, \cdots] \otimes (\Delta u_0, \Delta u, u_1, \cdots, \Delta v_{k-1}, \cdots)$
for $u_i \in H_{2pm-2+iq}$, $(0 \leq i \leq k-1)$ and $v \in H_{2p^2m-2p-1}$.

**Prop 3.4** $\gamma \in \pi_{i-4}(Y^{2m+4p-8})$, $\eta^{(3)}_{m+1_*}(\gamma) = 0$ に対して、$x \in \pi_{i+2}(Q_2^{2m+3})$ は M-represented by $E^6\gamma$ と仮定すると、$i_*\{\eta_m, \eta^{(2)}_{m+1}, E^3\gamma\}_1 = \partial(x)$.

[38] H.Toda. On Iterated Suspensions I,II,III, J. Math. Kyoto Univ. 5 (1966), 87-142,209-250, 8(1968),101-130.

大きな $n$ に対して $\beta_1$ の extension と coextension をそれぞれ $\overline{\beta} \in [Y^{n+pq-1}, S^n], \widetilde{\beta} \in \pi_{n+pq-1}(Y^{n+1})$ とする。$\overline{\beta}$ と $\widetilde{\beta}$ の mapping cone をそれぞれ $C_{\overline{\beta}} = S^n \cup e^{n+pq-1} \cup e^{n+pq}$, $C_{\widetilde{\beta}} = S^n \cup e^{n+1} \cup e^{n+pq}$, とする。このとき、$\beta_1$ は次の性質で特徴づけられる。

(3.4.5) $C_{\overline{\beta}}$ と $C_{\widetilde{\beta}}$ 上で $\mathcal{P}^p \neq 0$.

$\pi^S_{(2p+1)q-2} \simeq \mathbb{Z}_p$ の他の生成元があり、これは Adem relation $\mathcal{P}^p\mathcal{P}^{p+1} = \mathcal{P}^{2p+1} + \mathcal{P}^{2p}\mathcal{P}^1$, に関する secondary operation により検出される。

**Lem 3.11** 整数 $n \not\equiv p - 2\ (mod\ p)$, $n > 1$ に対して、$m = pn$ と仮定する。このとき、元 $v_1(2m + 1) \in \pi_{2pm+(2p+1)q-2}(S^{2m+1})$ が存在し、up to non-zero coefficient で、

$H(v_1(2m + 1)) = \overline{Q}^m(\beta_2)$, $v_1(2m + 2p + 3) = P(Q^{m+p+1}(\beta_1))$.

ここで、$v(2m + 2p + 3) = E^{2p+2}v(2m + 1)$ である。

## 3.5 Lemmas for $\alpha_1$ times

$m \geq 1$ に対して、特性類 $\alpha_1(2m + 1)$ を持つ sphere-bundle over sphere $S^{2m+1} \xrightarrow{i} B_m(\alpha) \xrightarrow{p} S^{2m+2p-1}$ を考える。この sphere-bundle に関するホモトピー完全列

$$\cdots \xrightarrow{i_*} \pi_{i+1}(B_m(\alpha)) \xrightarrow{p_*} \pi_{i+1}(S^{2m+2p-1}) \xrightarrow{\partial_\alpha} \pi_i(S^{2m+1}) \xrightarrow{i_*} \pi_i(B_m(\alpha)) \xrightarrow{p_*} \cdots,$$

の境界準同型 $\partial_\alpha$ を考え、次を得る。

**Prop 3.5** $\gamma \in \pi_{i-1}(S^{2m-1+q})$ に対して、$\partial_\alpha(E^2\gamma) = \alpha_1(2m + 1) \circ E\gamma$.

Oka [21] は、写像

(3.5.1) $f: S^2(B_m(\alpha)) \to B_{m+1}(\alpha)$   for $m \geq 1$

を構成し、これは $i < 4m + 2p$ に対して $H_i(\ )$ の同型を誘導する。$QB_m(\alpha)$ を $f$ の adjoint の homotopy fiber とすると、次の fibration を得る。

(3.5.2) $QB_m(\alpha) \to B_m(\alpha) \xrightarrow{i} \Omega^2 B_{m+1}(\alpha)$,

また、$B_m(\alpha)$ に対して、次の EHP-sequence を得る。

(3.5.3) $\cdots \xrightarrow{E^2} \pi_{i+3}(B_{m+1}(\alpha)) \xrightarrow{H} \pi_i(QB_m(\alpha)) \xrightarrow{P} \pi_i(B_m(\alpha)) \xrightarrow{E^2} \pi_{i+2}(B_{m+1}(\alpha)) \xrightarrow{H} \cdots$ .

さらに、次の可換で完全な図式を得る。

(3.5.4)

$$\begin{tikzcd}
\pi_{i+2}(B_m(\alpha)) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, "E^2"] & \pi_{i+2}(S^{2m+2p-1}) \arrow[r, "\partial_\alpha"] \arrow[d, "E^2"] & \pi_{i+1}(S^{2m+1}) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "E^2"] & \pi_{i+1}(B_m(\alpha)) \arrow[d, "E^2"] \\
\pi_{i+4}(B_{m+1}(\alpha)) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, "H"] & \pi_{i+4}(S^{2m+2p+1}) \arrow[r, "\partial_\alpha"] \arrow[d, "H"] & \pi_{i+3}(S^{2m+3}) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "H"] & \pi_{i+3}(B_{m+1}(\alpha)) \arrow[d, "H"] \\
\pi_{i+1}(QB_m(\alpha)) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, "P"] & \pi_{i+1}(Q_2^{2m+2p-1}) \arrow[r, "\partial_\alpha"] \arrow[d, "P"] & \pi_i(Q_2^{2m+1}) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "P"] & \pi_i(QB_m(\alpha)) \arrow[d, "P"] \\
\pi_{i+1}(B_m(\alpha)) \arrow[r, "p_*"] & \pi_{i+1}(S^{2m+2p-1}) \arrow[r, "\partial_\alpha"] & \pi_i(S^{2m+1}) \arrow[r, "i_*"] & \pi_i(B_m(\alpha))
\end{tikzcd}$$

次の合成を考える。

$$J \circ \partial_\alpha \circ I: \pi_{i+3}(S^{2p(m+p)-1}) \to \pi_{i+1}(Q_2^{2m+2p-1}) \to \pi_i(Q_2^{2m+1}) \to \pi_{i+3}(S^{2p(m+1)+1}).$$

次の Theorem は Oka [21] による。

**Th 3.5** 任意の $\gamma \in \pi_i(S^{2pm+p-1})$ に対して、up to non-zero coefficients で、次の関係が成り立つ。

$J\partial_\alpha I(E^3\gamma) = \beta_1(2p(m + 1) + 1) \circ E^3\gamma$.

[21] S.Oka, On the Homotopy Groups of Sphere Bundles over Spheres, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser.A-I 33 (1969), 161-195.

[21] S.Oka, On the Homotopy Groups of Sphere Bundles over Spheres, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser.A-I 33 (1969), 161-195.

境界準同型 $\partial_\alpha : \pi_{i+1}(Q_2^{2m+2p-1}) \to \pi_i(Q_2^{2m+1})$ は、写像 $d_\alpha : \Omega Q_2^{2m+2p-1} \to Q_2^{2m+1}$ により誘導される。Moore space で写像を近似することにより、$m \geq 1$ に対して、次の可換図式を得る。

(3.5.5)
$$\begin{tikzcd} Y^{2p(m+p)-3} \arrow[r, "\beta_{(1)}"] \arrow[d, "\Omega_0 g_{m+p}"] & Y^{2p(m+1)-2} \arrow[d, "g_{m+1}"] \\ \Omega Q_2^{2m+2p-1} \arrow[r, "d_\alpha"] & Q_2^{2m+1} \end{tikzcd}$$

ここで、$\beta_{(1)}$ は 次を満たす。

(3.5.6) $\pi\beta_{(1)} i = \beta_1(2p(m+1)-2)$.

これを (3.5.4) に適用することで次の lemma を得る。

**Lem 3.12** 元 $\xi \in \pi_{i+4}(S^{2m+2p+1})$ の Hopf invariant $H(\xi)$ が $\gamma \in \pi_i(Y^{2p(m+p)-3})$ に対して、$E\gamma$ による M-represented であると仮定する。$m \geq 1$ ならば、Hopf invariant $H(\partial_\alpha(\xi))$ は $\beta_{(1)} \circ \gamma$ による M-represented である。

invariant が stable type ならば、この lemma は次のように適用される。

(3.5.7) $H(\xi) = Q^{m+p}(\gamma)$ は、$H(\partial_\alpha(\xi)) = \overline{Q}^{m+1}(\beta_1\gamma)$ を誘導する。

**Lem 3.13** $x \in \pi_{i+1}(Q_2^{2m+2p-1})$ が $E\gamma$ による M-represented であり、$y \in \pi_i(Q_2^{2m+1})$ は $\beta_{(1)}\gamma$ による represented であるとする。$m \geq 1$ ならば、$P(y) = \partial_\alpha P(x)$ である。

**Lem 2.5** $E^2 : {}_p\pi_i(S^{2pm-3}) \to {}_p\pi_{i+2}(S^{2pm-1})$ と $E^4 : {}_p\pi_{i-1}(S^{2pm-3}) \to {}_p\pi_{i+3}(S^{2pm+3})$ が全射ならば、$g_{m*} : {}_p\pi_i(Y^{2pm-2}) \to {}_p\pi_i(Q_2^{2m-1})$ も全射である。

$\gamma \in \pi_i(Y^{2pm-2})$ の像 $g_{m*}(\gamma) \in \pi_i(Q_2^{2m-1})$ のことを、$\gamma$ による **M-represented** と呼ぶ。

$\overline{g} : Y^{2p} \to \Omega S^3$ の adjoint を次で表す。

(2.3.5) $G_1 = ad(\overline{g}) : Y^{2p+1} = S^{2p} \cup_p e^{2p+1} \to S^3$.

この写像 $G_1$ は (2.3.3) の $g_1 : Y^{2p-2} \to Q_2^1$ の代わりに使われる。

$\gamma \in \pi_{i+1}(Y^{2p+1})$ の像 $G_{1*}(\gamma) \in \pi_{i+1}(S^3)$ のことを $\gamma$ による **purely M-represented** と呼ぶ。

$H(\xi) \in \pi_{i+1}(Q_2^{2m+2p-1})$, $H(\xi) = g_{m+p*}(E\gamma)$

$\Rightarrow H(\partial_\alpha(\xi)) \in \pi_{i+3}(Q_2^{2m+3})$, ?

## 4 Unstable Alpha families

### 4.1 Alpha type invariants

まず、Moore space の stable self homotopy $\mathbb{Z}_p$ 上の algebra $[\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Y}]_* = \Sigma_k[\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Y}]_k$ における Yamamoto [45] の関係式を思い出す。

(4.1.1) $2\alpha\delta\alpha = \alpha^2\delta + \delta\alpha^2$.

この関係式と $\delta\delta = 0$ から次を得る。

(4.1.2) $\alpha^s\delta\alpha^t = t\cdot\alpha^{s+t-1}\delta\alpha + (1-t)\alpha^{s+t}\delta = s\cdot\alpha\delta\alpha^{s+t-1} + (1-s)\delta\alpha^{s+t}$,

$\alpha^s\delta\alpha^t\delta = \delta\alpha^t\delta\alpha^s = t\cdot\alpha^{s+t-1}\delta\alpha\delta$.

次に、Adams [1] の $e$-invariant $e:\pi^S_{rq-1}\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ を思い出す。特に、

**Th 4.1** 整数 $a\not\equiv 0\ (mod\ p)$ に対して、$r = ap^{\nu}$ とする。

(1) $e(\alpha_r) \equiv -1/p\ (mod\ p)$.

(2) $e(\pi^S_{rq-1}) \subset \mathbb{Z}(1/p^{\nu+1})/\mathbb{Z}$.

(3) $e\{p,\alpha_{r-1},\alpha_1\} = b/p^{\nu+1}$ for some $b\not\equiv 0\ (mod\ p)$.

上の theorem の (1) と (2) から、$r\not\equiv 0\ (mod\ p)$ ならば、$\alpha_r = \pi\alpha^r i = i^*\pi_*(\alpha^r)$ は $p$ で割れず、(2.4.10) により $\delta\alpha^r\delta \neq 0$ である。(4.1.2) により、$\delta\alpha^r\delta = r\cdot\alpha^{r-1}\delta\alpha\delta$ である。よって、$r\not\equiv 0\ (mod\ p)$ に対して、$\alpha^{r-1}\delta\alpha\delta \neq 0$ であり、

(4.1.3) $\alpha^s\delta\alpha\delta \neq 0$ for all $s > 0$.

その結果、Yamamoto [45] は次を得た。

**Prop 4.1** $\alpha,\delta$ によって生成される $[Y,Y]_*$ の部分群は、次の additive base を持つ。

$\{1_Y,\delta,\alpha^k,\alpha^k\delta,\alpha^{k-1}\delta\alpha,\ \alpha^{k-1}\delta\alpha\delta\,;k = 1,2,\cdots\}$.

(4.1.3) の結果は次を導く。

**Prop 4.2** modulo $p\cdot\pi^S_{rq-1}$ で一意的な元 $\tilde{\alpha}_r\in\pi^S_{rq-1}$ が存在し、以下を満たす。

$i\tilde{\alpha}_r = (\alpha^{r-1}i)\alpha_1,\ \tilde{\alpha}_r\pi = \alpha_1(\pi\alpha^{r-1}),\ i\tilde{\alpha}_r\pi = \alpha^{r-1}\delta\alpha\delta = \delta\alpha\delta\alpha^{r-1} \neq 0,\ \tilde{\alpha}_r\in\{p,\alpha_{r-1},\alpha_1\} = \{\alpha_1,\alpha_{r-1},p\}$.

Proof. $\alpha_1$ は $J$-image であり、よって $\alpha_1\alpha_{r-1} = \alpha_{r-1}\alpha_1$ は $J$-image であるので、$\alpha_{r-1}\alpha_1 = 0$ であることが分かる。よって $\pi(\alpha^{r-1}\delta\alpha i) = \alpha_{r-1}\alpha_1 = 0$ である。(2.4.9) の列の完全性により、$i\tilde{\alpha}_r = \alpha^{r-1}\delta\alpha i = (\alpha^{r-1}i)\alpha_1$ を満たす $\tilde{\alpha}_r$ が存在する。よって、$i\tilde{\alpha}_r\pi = \alpha^{r-1}\delta\alpha\delta = \delta\alpha\delta\alpha^{r-1} \neq 0$ である。$\alpha^{r-1}i$ は $\alpha_{r-1}$ の coextension であるので、$i\tilde{\alpha}_r = (\alpha^{r-1}i)\alpha_1$ は $i\{p,\alpha_{r-1},\alpha_1\}$ に属している。$\ker i_* = p\pi^S_{rq-1}$ であるので、$\tilde{\alpha}_r$ は $\{p,\alpha_{r-1},\alpha_1\}$ に属している。双対的に考えると、他方も得られる。■

Th 4.1 の (2), (3) は、$\tilde{\alpha}_r$ の位数は $p^{\nu+1}$ の倍数であることを示している。

次に unstable version を考える。$n\geq 4$ に対して、(2.4.7) の中で $\alpha(n)\in[Y^{n+q},Y^n]$, $q = 2(p-1)$ が定義され、$n\geq 3$ に対して $\delta(n)\in[Y^{n-1},Y^n]$ である。これらは $E\alpha(n) = \alpha(n+1)$ でつながり、$E^{\infty}\alpha(n) = \alpha$, $E\delta(n) = \delta(n+1)$, $E^{\infty}\delta(n) = \delta$ である。積の unstable version もまた自然に定義される。例えば、$\delta\alpha(n) = \delta(n+q)\circ\alpha(n)$, $\alpha\delta(n) = \alpha(n-1)\circ\delta(n)$ など。

**Lem 4.1** 次元 $n\geq 6$ に対して、関係 (4.1.1) が成り立つ。すなわち、$2\alpha\delta\alpha(n) = (\alpha^2\delta + \delta\alpha^2)(n)$.

このように、次元 $n\geq 6$ の unstable case に対して、関係 (4.1.2) が成り立つ。

証明は、[38] Prop 4.2 の中で見られる。

$r\geq 0$ に対して、invariant $A_r(2m-1)\in\pi_{2pm+rq-3}(Q_2^{2m-1})$ を、次による $M$-represented であると定義する。

(4.1.4) $\alpha^r i(2pm-2): S^{2pm+rq-3}\to Y_p^{2pm+rq-2}\to Y_p^{2pm-2}\ (\xrightarrow{g_m} Q_2^{2m-1})$.


[45] N.Yamamoto, Algebra of stable homotopy of Moore space, J. Math. Osaka City Univ. 14 (1963), 45-67.

[1] J.F.Adams, On the groups $J(X)$ -IV, Topology 5 (1966),21-71.


(2.4.10) $E^{\infty}:[Y^{n+k},Y^n]\simeq[\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Y}]_k$ for $n > k+3$.

(2.4.9) $0\to\ \pi^S_k\otimes\mathbb{Z}_p\xrightarrow{i_*}\pi_k(\boldsymbol{Y})\xrightarrow{\pi_*}Tor(\pi^S_{k-1},\mathbb{Z}_p)\to 0$,

$0\to\ \pi^S_{k-1}(\boldsymbol{Y})\xrightarrow{\pi^*}[\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Y}]_k\xrightarrow{i^*}\pi^S_k(\boldsymbol{Y})\to 0$.

(2.4.7) $\alpha_r(n)\equiv\{\alpha_1(n),p\iota_{n+q-1},\alpha_{r-1}(n+q-1)\}$ mod $\alpha_1(n)\circ\pi_{n+rq-1}(S^{n+q-1})$.


[38] H.Toda. On Iterated Suspensions I,II,III, J. Math. Kyoto Univ. 5 (1966), 87-142,209-250, 8(1968),101-130.

$r = 0$ のとき、identity class $\iota_{2pm-1} \in \pi_{2pm-1}(S^{2pm-1})$ に対して、$A_0(2m-1) = I(\iota_{2pm-1}) \neq 0$. この元を次のように書く。

(4.1.5) $w = I(\iota_{2pm-1}) = A_0(2m-1) \in \pi_{2pm-3}(Q_2^{2m-1})$.

$r > 0$ のとき、$J(A_r(2m-1)) = E^3(\pi\alpha^r i)(2pm+1)$, すなわち、

(4.1.6) $J(A_r(2m-1)) = \alpha_r(2pm+1) \neq 0$ in $\pi_{2pm+rq}(S^{2pm+1})$.

**Prop 4.3** $r \ge 0$ に対して、invariants $A_r(2m-1)$ は非自明である。

また、もう一つの invariant $a_r(2m-1) \in \pi_{2pm+rq-4}(Q_2^{2m-1})$ for $r > 0$ を、次で表される $M$-represented であると定義する。

(4.1.7) $\alpha^{r-1} i\alpha_1(2pm-2) : S^{2pm+rq-4} \to S^{2pm+(r-1)q-3} \to Y_p^{2pm-2} \ (\xrightarrow{g_m} Q_2^{2m-1})$.

## 4.2 Simple unstable alpha families

Prop 3.1 により、$A_{r-1}(2m+1)$ の $d_1$-image は、$Y^{2pm-2}$ 上で、

$$\eta_m \circ (\alpha^{r-1} i) = ((m+1)\delta\alpha - m\alpha\delta)(\alpha^{r-1} i) = (m+1)\delta\alpha^r - m\alpha\delta\alpha^{r-1} i$$

なので、$M$-represented である。

$\delta\alpha^r i = (r\alpha^{r-1}\delta\alpha + (1-r)\alpha^r\delta) i = r\alpha^{r-1}\delta\alpha i$ かつ $\alpha\delta\alpha^{r-1} i = (r-1)\alpha^{r-1}\delta\alpha i$ であるので、$Y^{2pm-2}$ 上で、

$$\eta_m \circ (\alpha^{r-1} i\alpha_1) = (m+r)\alpha^{r-1}\delta\alpha i = (m+r)\alpha^{r-1}\alpha_1.$$

よって、次を得る。

**Prop 4.4** $d_1(A_{r-1}(2m+1)) = HP(A_{r-1}(2m+1)) = (m+r)a_r(2m-1)$.

invariant $A_{r-m-1}(2m+1)$ の $P$-image を次のように書く。

(4.2.1) $\alpha_r^*(2m+1) = P(A_{r-m-1}(2m+1)) \in \pi_{2m+rq-1}(S^{2m+1})$ for $1 \le m < r$.

meta-stable range では、$J(a_r(2m-1)) = i\tilde{\alpha}_r(2pm-1)$ は $p$ で割れないので、$a_r(2m-1) \neq 0$. よって、

$m + r \not\equiv 0 \ (mod\ p)$ のとき、$\alpha_r^*(2m+1)$ は simple unstable element である。

$a_r(2m-1)$ の非自明性を調べるために、次の準備をする。

**Lem 4.2** 元 $\xi \in \pi_i(S^{2m-1})$ と $\eta \in \pi_j(S^i)$ が次を満たすと仮定する。$p\xi = 0$, $p\eta = 0$, $E^2(\xi \circ \eta) = 0$.

このとき、$\{p\iota_{2m+1}, E^2\xi, E^2\eta\}$ と $\{E^2\xi, E^2\eta, p\iota_{j+2}\}$ は $E^2$-images である。

Proof. $C_\eta = S^i \cup e^{j+1}$ を $\eta$ の mapping cone とし、$\bar\xi : E^2C_\eta \to S^{2m+1}$ を $E^2\xi : S^{i+2} \to S^{2m+1}$ の extension とする。

$\mu^p \simeq i^2 \circ r_m : \Omega^2 S^{2m+1} \to \Omega^2 S^{2m+1}$ を (2.1.12) の deformation とする。$\bar\xi$ の adjoint $\Omega_0^2\bar\xi$ に対して、次を得る。

$$\mu^p \circ \Omega_0^2\bar\xi \simeq i^2 \circ r_m \circ \Omega_0^2\bar\xi : C_\eta \to \Omega^2 S^{2m+1} \to \Omega^2 S^{2m+1}.$$

$g = r_m \circ \Omega_0^2\xi : C_\eta \to S^{2m-1}$ とすると $i^2 \circ g$ の adjoint は $E^2 g$ である。

$\mu^p \circ \Omega_0^2\bar\xi$ は $E^2C_\eta \xrightarrow{\bar\xi} S^{2m+1} \subset E^2\Omega^2 S^{2m+1} \xrightarrow{E^2\mu^p} E^2\Omega^2 S^{2m+1} \xrightarrow{e} S^{2m+1}$ の adjoint である。

ここで、$e$ は evaluation、$f_p = e \circ E^2\mu^p \circ i^2 : S^{2m+1} \to S^{2m+1}$ は degree $p$ の写像である。$E^2 g \simeq f_p \circ \bar\xi$ であり、

$f_p \circ \bar\xi : E^2C_\eta \to S^{2m+1} \to S^{2m+1}$ は、$\pi^* : \pi_{j+3}(S^{2m+1}) \to [Y^{j+3}, S^{2m+1}]$ に対して、$-\pi^*\{p\iota_{2m+1}, E^2\xi, E^2\eta\}$ を表わす。

よって、$E^2[g] \in -\{p\iota_{2m+1}, E^2\xi, E^2\eta\}_2$ である。bracket の indeterminacy は、$p \cdot \pi_{j+3}(S^{2m+1}) + E^3\pi_{i+1}(S^j)$ である。Lem 2.2 により $p(\pi_{j+3}(S^{2m+1})) \subset E^2(\pi_{j+1}(S^{2m-1}))$ なので、上の bracket は $E^2$-image である。

2番目の bracket $\{E^2\xi, E^2\eta, p\iota_{j+2}\}$ は、合成 $\bar\xi \circ \widetilde{p\iota} : S^{j+3} \to E^2C_\eta \to S^{2m+1}$ で表される。ここで、$\widetilde{p\iota}$ は $p\iota_{j+2}$ の coextension である。$H(\{E^2\xi, E^2\eta, p\iota_{j+2}\})$ は $p$-times であり、Th 2.3 により zero である。■

**Prop 3.1** (1) $m > 1$ とする。ある元 $\gamma \in \pi_i(Y^{2p(m+1)-5})$ に対して、$x \in \pi_{i+3}(Q_2^{2m+1})$ が $E^3\gamma$ による M-represented であるならば、$d_1(x) = HP(x) \in \pi_i(Q_2^{2m-1})$ は、$h_{m*}(\gamma) = \eta_m \circ \gamma \in \pi_i(Y^{2pm-2})$による M-represented である。

(2) $m = 1$ とする。$x \in \pi_i(Q_2^3)$ が $\gamma \in \pi_i(Y^{4p-2})$ による M-represented であるならば、$P(x) \in \pi_i(S^3)$ は、$\tilde{h}_{1*}(\gamma) = \tilde{h}_1 \circ \gamma \in \pi_i(Y^{2p+1})$による purely M-represented である。

(2.1.12) $\mu^p \simeq i^2 \circ r_m : (\Omega^2 S^{2m+1}, S^{2m-1}) \to (\Omega^2 S^{2m+1}, S^{2m-1})$

**Lem 2.2** ${}_p\pi_i(Q_2^{2m-1})$ は、elementary である。すなわち $p({}_p\pi_i(Q_2^{2m-1})) = 0$.

**Th 2.3** $p^m({}_p\pi_i(S^{2m+1})) = 0$.

**Prop 4.5** $r > 0$ に対して、invariants $a_r(2m-1)$ は非自明である。

Proof. $J(a_r(2m-1)) = E^3((\pi\alpha^{r-1} i\alpha_1)(2pm-2)) = \alpha_{r-1}\alpha_1(2pm+1)$.

$\alpha_{r-1}\alpha_1(2pm+1) \neq 0$ ならば $a_r(2m-1) \neq 0$ である。

そこで、$\alpha_{r-1}\alpha_1(2pm+1) = 0$ と仮定する。(2.1.9) の準同型 $J$ は $j: Q_2^{2m-1} \to \Omega^3 S^{2pm+1}$ によって誘導され、$j \circ g_m$ は $i^3 \circ \pi: Y^{2pm-2} \to S^{2pm-2} \to \Omega^3 S^{2pm+1}$ と homotopic であるので、$J(a_r(2m-1)) = 0$ である。

すると、(2.1.9) の準同型 $I$ のもとで、$a_r(2m-1)$ は $\{p, \alpha_{r-1}, \alpha_1\}(2pm+1)$ に属するある元 $\tilde{\alpha}$ の像となる。Lem 4.2 により、$\tilde{\alpha}$ は $E^\infty(\tilde{\alpha}_r(2pm-1)) = \tilde{\alpha}_r$ を満たす $\tilde{\alpha}_r(2pm-1)$ の $E^2$-image である。

$a_r(2m-1) = I(\tilde{\alpha}) = 0$ ならば、ある $\xi$ に対して $E^2\tilde{\alpha} = E^2\Delta(\xi) = p\xi$ である。しかしこれは $\tilde{\alpha}_r$ の non-divisibility に矛盾する。よって $a_r(2m-1) \neq 0$ である。■

Th 2.5 の結果は、次のように拡張される。

**Th 4.2** $r \not\equiv 0 \ (mod\ p)$ と仮定する。

(1) $m \geq 1$ に対して、$\alpha_r(2m+1)$ が生成する $\pi_{2m+rq}(S^{2m+1})$ の直和成分は $\mathbb{Z}_p$ に同型である。

$E^2\alpha_r(2m+1) = \alpha_r(2m+3)$ かつ $H_p(\alpha_r(3)) = \alpha_{r-1}(2p+1)$ if $r > 1$.

(2) $1 \leq m < r$ に対して、$\alpha_r^*(2m+1)$ が生成する $\pi_{2m+rq-1}(S^{2m+1})$ の直和成分は $\mathbb{Z}_p$ に同型である。

$H(\alpha_r^*(2m+1)) = r \cdot a_{r-m}(2m-1)$.

Proof. (1) は、$r \not\equiv 0$ のときの $\alpha_r$ が $p$ で割り切れないことから成り立つ。(2) は Prop 4.4, 4.5 から成り立つ。■

上の結果に対する computing diagram は次のように表される。

$$
\begin{array}{ccccccccc}
n= & 3 & 5 & 7 & \cdots & 2r-5 & 2r-3 & 2r-1 & stable \\
 & a_{r-1} & a_{r-2} & a_{r-3} & & a_3 & a_2 & a_1 & \\
 & \nwarrow H & \nwarrow H & \nwarrow H & & \nwarrow H & \nwarrow H & \nwarrow H & \\
k=rq-2 & \alpha_r^*(3) & \alpha_r^*(5) & \alpha_r^*(7) & \cdots & \alpha_r^*(2r-5) & \alpha_r^*(2r-3) & \alpha_r^*(2r-1) & \\
 & \nwarrow P & \nwarrow P & & & \nwarrow P & \nwarrow P & \nwarrow P & \\
 & A_{r-1} & A_{r-2} & A_{r-3} & & A_2 & A_1 & A_0 & \\
 & \nwarrow H & & & & & & & \\
k=rq-1 & \alpha_r(3) = & \alpha_r(5) = & \alpha_r(7) = & \cdots = & \alpha_r(2r-5) = & \alpha_r(2r-3) = & \alpha_r(2r-1) & \xrightarrow{E^\infty} \alpha_r
\end{array}
$$

## 4.3 Unstable alpha families

ここで、$r \equiv 0\ mod\ p$ の場合に、$(rq-1)$-stem と $(rq-2)$-stem の群を考える。この場合に、Prop 4.5 は、

(4.3.1) $HP(A_{r-m-1}(2m+1)) = H(\alpha_r^*(2m+1)) = 0$.

Lem 3.5, 3.6 により、次を得る。

**Lem 4.3** $r \equiv 0 \ (mod\ p)$ かつ $m \geq 1$ とする。

(1) 元 $\alpha_r^{*\prime}(2m-1) \in \pi_{2m-3+rq}(S^{2m-1})$ が存在して次を満たす。

$E^2\alpha_r^{*\prime}(2m-1) = \alpha_r^*(2m+1)$, $p \cdot \alpha_r^{*\prime}(2m-1) = \alpha_r^*(2m-1)$.

(2) $\pi_{2m+2+rq}(S^{2m+3})$ の元 $\xi$ に対して $H(\xi) = A_{r-m-1}(2m+1)$ ならば、$\pi_{2m+rq}(S^{2m+1})$ の元 $\xi'$ が存在して、次を満たす。$H(\xi') = A_{r-m}(2m-1)$ かつ $E^2\xi' = p\xi$.

$a \not\equiv 0 \ (mod\ p)$ に対して $r = ap^{\nu(r)}$ とする。このとき、$\alpha_r$ は $p^{\nu(r)}$ で割り切れる。$1 \leq s \leq \nu(r)$ に対して、$p^s\alpha_r^{(s)} = \alpha_r$ を満たす元を $\alpha_r^{(s)}$ と書く。Gray [6] は、$\alpha_r^{(s)}$ に収束する unstable element $\alpha_r^{(s)}(2m+2s+1)$ を与えた。$\pi_{2m-3+rq}(S^{2m-1})$ の元 $\alpha_r^{*(s)}(2m-1)$ を考え、もしそれが存在するならば、次を満たす。

(4.3.2) $E^{2s}\alpha_r^{*(s)}(2m-1) = \alpha_r^*(2m+2s-1)$ and $p^s\alpha_r^{*(s)}(2m-1) = \alpha_r^*(2m-1)$.

(2.1.9) $\Omega^2 S^{2pm-1} \xrightarrow{i} Q_2^{2m-1} \xrightarrow{j} \Omega^3 S^{2pm+1} \xrightarrow{\partial_p} \Omega S^{2pm-1}$.

**Lem 4.2** 元 $\xi \in \pi_i(S^{2m-1})$ と $\eta \in \pi_j(S^i)$ が次を満たすと仮定する。

$p\xi = 0$, $p\eta = 0$, $E^2(\xi \circ \eta) = 0$.

このとき、$\{p\iota_{2m+1}, E^2\xi, E^2\eta\}$ と $\{E^2\xi, E^2\eta, p\iota_{j+2}\}$ は $E^2$-images である。

**Th 2.5** $k < pq-2$ に対する非自明な unstable $k$-stem group は下記の通りである。

${}_p\pi_{2m+rq}(S^{2m+1}) \simeq \mathbb{Z}_p\{\alpha_r(2m+1)\}$ for $1 \leq r \leq p-1$ and $1 \leq m$,

${}_p\pi_{2pm-1}(S^{2m+1}) \simeq \mathbb{Z}_p\{P(Q^{m+1}(\iota))\}$ for $1 < m < p$,

${}_p\pi_{2m+rq-1}(S^{2m+1}) \simeq \mathbb{Z}_p\{\overline{Q}^{m+1}(\alpha_{r-m-1})\}$ for $1 < r < p$ and $1 \leq m < r-1$,

**Prop 4.5** $r > 0$ に対して、invariants $a_r(2m-1)$ は非自明である。

**Prop 4.4** $d_1(A_{r-1}(2m+1)) = HP(A_{r-1}(2m+1)) = (m+r)a_r(2m-1)$.

invariant $A_{r-m-1}(2m+1)$ の $P$-image を次のように書く。

(4.2.1) $\alpha_r^*(2m+1) = P(A_{r-m-1}(2m+1)) \in \pi_{2m+rq-1}(S^{2m+1})$ for $1 \leq m < r$.

**Lem 3.5** $\xi \in \pi_{i+5}(S^{2m+3})$ の Hopf invariant $H(\xi)$ が $E^4(\gamma)$ による M-represented であり、$h'_{m*}(\gamma) = 0$ ならば、元 $\eta \in \pi_{i+3}(S^{2m+1})$ が存在し、$p \cdot \xi = E^2\eta$ であり、$H(\eta)$ は $\alpha(2pm-2) \circ E^2\gamma$ による M-represented である。

**Lem 3.6** $\xi \in \pi_{i+4}(S^{2pm+1})$ の Hopf invariant $H(\xi) \in \pi_{i+1}(Q_2^{2pm-1})$ が、$\gamma \in \pi_{i-1}(Y^{2p(pm-1)-4})$ に対して、$E^2\gamma$ による M-represented であり、$h_{pm-1*}(\gamma) = 0$を満たすならば、up to non-zero coefficient で $H(\Delta(\xi))$ は、$\alpha(2p(pm-1)-2) \circ \gamma$による M-represented である。

$E^2\alpha_r^{*\prime}(2m-1) = \alpha_r^*(2m+1)$, (まま)

$E^2\alpha_r^{*\prime}(2m-1) = \alpha_r^{*\prime}(2m+1)$ では？

[6] B.W.Gray, On the sphere of origin of infinite families in the homotopy groups of spheres, Topology 8, (1969), 219-232.

ここで、Gray [7] の結果を以下に引用する。

**Lem 4.4** $a \not\equiv 0\ (mod\ p)$ , $\nu = \nu(r)$ に対して $r = ap^{\nu}$ とする。このとき、元 $\alpha_r^{*(\nu)}(2r - 2\nu - 1) \in \pi_{2pr-2\nu-3}(S^{2r-2\nu-1})$ が存在して、次を満たす。$E^{2\nu}\alpha_r^{*(\nu)}(2r - 2\nu - 1) = \omega = PI(\iota_{2pr-1}) \in \pi_{2pr-3}(S^{2r-1})$.

さらに、$Im\,J \cap \pi^S_{\nu+1}$ の生成元 $\alpha^J_{\nu+1}$ に対して、$H(\alpha_r^{*(\nu)}(2r - 2\nu - 1)) = Q^{2r-2\nu-1}(\alpha^J_{\nu+1})$ である。

議論の便宜のために、以下を提案する。

**Assertion A** Lem 4.4 の中で、$\alpha^J_{\nu+1}$ の代わりに up to non-zero coefficient で $\tilde{\alpha}_{\nu+1}$ を取ることができる。

$r < p(p-1)$ のとき、${}_p\pi^S_{rq-1}$ は1つの生成元を持つことがわかる。したがって、Assertion A は成り立つ。

$r = p(p-1)$ の場合、${}_p\pi^S_{rq-1}$ は他の生成元 $\alpha_1\beta_1^{p-1}$ を持つ。$Q^{2r-2\nu-1}(\alpha_1\beta_1^{p-1}) = HP(Q^{2r-2\nu})$ なので、Lem 4.4 の中の $\alpha^J_{\nu+1}$ を $\tilde{\alpha}_{\nu+1}$ で置き換えることができる。${}_p\pi^S_{rq-1}$ の alpha type でない次の生成元は、$\alpha_1\beta_1^{p-2}\beta_2$ である。よって、$r < p^2 + 1$ に対して Assertion A は成り立ち、以下同様である。

次の定理は、[7] における Gray の元と、$EHP$-sequence の中の invariants との関係を示している。

Recall (4.2.1) $\alpha_r^{*}(2m + 1) = P(A_{r-m-1}(2m + 1))$

**Th 4.3** $a \not\equiv 0\ (mod\ p)$ , $\nu = \nu(r) > 0$ に対して、$r = ap^{\nu}$ とする。$s \le \nu$ , $s < m \le r - s$ に対して、元 $\alpha_r^{*(s)}(2m + 1) \in \pi_{2m-1+rq}(S^{2m+1})$ が、$s \le \nu$ , $s < m$ に対して、元 $a_r^{(s)}(2m + 1) \in \pi_{2m+rq}(S^{2m+1})$ が存在して、up to non-zero coefficients で次の性質を満たす。

(0) $\alpha_r^{*(0)}(2m + 1) = \alpha_r^{*}(2m + 1)$ , $\alpha_r^{(0)}(2m + 1) = \alpha_r(2m + 1)$ .

(1) $1 \le s \le \nu$ , $s < m \le r - s$ に対して、$p \cdot \alpha_r^{*(s)}(2m + 1) = \alpha_r^{*(s-1)}(2m + 1)$ , $E^2\alpha_r^{*(s)}(2m + 1) = \alpha_r^{*(s-1)}(2m + 3)$ .

(2) $1 \le s \le \nu$ , $s < m$ に対して、$p \cdot \alpha_r^{(s)}(2m + 1) = \alpha_r^{(s-1)}(2m + 1)$ , $E^2\alpha_r^{(s)}(2m + 1) = \alpha_r^{(s)}(2m + 3)$ .

(3) $1 \le m \le \nu + 1$ に対して、$H(\alpha_r^{(m)}(2m + 1)) = A_{r-m}(2m - 1)$ ,
$\nu + 1 \le m < r$ に対して、$P(A_{r-m-1}(2m + 1)) = E^{2\nu}\alpha_r^{*(s)}(2m + 1)$ .

(4) $\alpha_r^{*(s)}(2m + 1)$ と $a_r^{(s)}(2m + 1)$ の位数はどちらも $p^{s+1}$ である。

(5) $r$ に対して Assertion A であるならば、特に $r \le p^{p^2}$ のとき、$s = Min(\nu, m + 1)$ , $1 \le m < r - \nu$ に対して、$H(\alpha_r^{*(s)}(2m + 1)) = a_{r-m}(2m - 1)$ .

Proof. Lem4.3(2) の元 $\xi \in \pi_{2m+2+rq}(S^{2m+3})$ が存在するならば、次々に $\xi, \xi', \cdots, \xi^{(m-1)}$ を得ることができ、最後の元 $\xi^{(m-1)} \in \pi_{2+rq}(S^3)$ は、$E^{2m-2}\xi^{(m-1)} = p^{m-1}\xi$ と $H(\xi^{(m-1)}) = A_{r-1}(1) = H(\alpha_r(3))$ を満たす。

このように、$\xi^{(m-1)}$ は位数 $p$ であり、$\xi$ の位数は $p^{m+1}$ である。Th4.1 から $m \le \nu$ が成り立つ。これは、もし $m > \nu$ ならば、そのような元 $\xi$ が存在せず、次が成り立つことを示している。

(4.3.3) $\alpha_r^{*}(2m + 1) = P(A_{r-m-1}(2m + 1)) \ne 0$ for $m > \nu$.

次に、上記の結果は、$m$ がより大きな値である場合、$\alpha_r^{*(s)}(2m + 1)$ は存在すれば order $p^{s+1}$ であることを意味する。

$m = \nu$ に対して (4.3.3) が成り立つならば、Th2.3 に矛盾する order $p^{\nu+1}$ の元 $\alpha_r^{*(\nu)}(2\nu + 1)$ が存在する。

これは、$\alpha_r^{(\nu)}(2\nu + 3)$ が存在し $H(\alpha_r^{(\nu)}(2\nu + 3)) = A_{r-\nu-1}(2\nu + 1)$ が成り立つことを意味する。よって、$1 \le m \le \nu + 1$ に対して、$\alpha_r^{(m-1)}(2m + 1))$ が存在する。この結果、(1)〜(4) が成立する。Lem4.4 から (5) が成り立つ。■

$\alpha_r^{(s)}$ または $E^{2j}\alpha_r^{*(s)}$ によって生成される ${}_p\pi_i(S^{2m+1})$ の部分群を $A_i^{2m+1}$ と書く。

[7] B.W.Gray, Unstable families related to the image of $J$, Proc. Camb. Phil. Soc, 96 (1984), 95-113.

invariant $A_{r-m-1}(2m + 1)$ の $P$-image を次のように書く。

(4.2.1) $\alpha_r^{*}(2m + 1) = P(A_{r-m-1}(2m + 1)) \in \pi_{2m+rq-1}(S^{2m+1})$ for $1 \le m < r$.

**Lem 4.3** $r \equiv 0\ (mod\ p)$ かつ $m \ge 1$ とする。

(1) 元 $\alpha_r^{*}{}'(2m - 1) \in \pi_{2m-3+rq}(S^{2m-1})$ が存在して次を満たす。

$E^2\alpha_r^{*}{}'(2m - 1) = \alpha_r^{*}(2m + 1)$ , $p \cdot \alpha_r^{*}{}'(2m - 1) = \alpha_r^{*}(2m - 1)$ .

(2) $\pi_{2m+2+rq}(S^{2m+3})$ の元 $\xi$ に対して $H(\xi) = A_{r-m-1}(2m + 1)$ ならば、$\pi_{2m+rq}(S^{2m+1})$ の元 $\xi'$ が存在して、次を満たす。

$H(\xi') = A_{r-m}(2m - 1)$ かつ $E^2\xi' = p\xi$.

**Th 4.1** $e : \pi^S_{rq-1} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ . 整数 $a \not\equiv 0\ (mod\ p)$ に対して、$r = ap^{\nu}$ とする。

(1) $e(\alpha_r) \equiv -1/p\ (mod\ p)$ .

(2) $e(\pi^S_{rq-1}) \subset \mathbb{Z}(1/p^{\nu+1})/\mathbb{Z}$ .

(3) $e\{p, \alpha_{r-1}, \alpha_1\} = b/p^{\nu+1}$ for some $b \not\equiv 0\ (mod\ p)$ .

**Lem 4.4** $a \not\equiv 0\ (mod\ p)$ , $\nu = \nu(r)$ に対して $r = ap^{\nu}$ とする。このとき、元 $\alpha_r^{*(\nu)}(2r - 2\nu - 1) \in \pi_{2pr-2\nu-3}(S^{2r-2\nu-1})$ が存在して、次を満たす。

$E^{2\nu}\alpha_r^{*(\nu)}(2r - 2\nu - 1) = \omega = PI(\iota_{2pr-1}) \in \pi_{2pr-3}(S^{2r-1})$ .

さらに、$Im\,J \cap \pi^S_{\nu+1}$ の生成元 $\alpha^J_{\nu+1}$ に対して、$H(\alpha_r^{*(\nu)}(2r - 2\nu - 1)) = Q^{2r-2\nu-1}(\alpha^J_{\nu+1})$ である。

**Th 2.3** $p^m({}_p\pi_i(S^{2m+1})) = 0$ .

(4.3.4) $A^{2m+1}_{2m+rq} = \{\alpha^{(s)}_r(2m + 1)\}$ for $s = Min(\nu, m)$

$A^{2m+1}_{2m+rq-1} = \{\alpha^{*(s)}_r(2m + 1)\}$ for $s = Min(\nu, r - m, m)$ and $m < r - \nu$

$A^{2m+1}_i = 0$ otherwise .

また、$A_{r-m}(2m - 1)$ または $a_{r-m}(2m - 1) \in Im\,P$ によって生成される $\pi_i(Q^{2m-1}_2)$ の部分群を $AQ^{2m-1}_i$ と書く。

(4.3.5) $AQ^{2m-1}_{rq-1} = \{A_{r-m}(2m - 1)\}$ for $1 \leq m \leq r$

$AQ^{2m-1}_{rq-2} = \{a_{r-m}(2m - 1)\}$ for $1 \leq m < r - \nu$

$AQ^{2m-1}_i = 0$ otherwise .

$A^{2m+1}_i$ と $AQ^{2m-1}_i$ からなる computing diagram の subsystem を **unstable alpha families** の system と呼ぶ。

**Prop 4.6** $k < p^{p^2+1}q - 2$ に対して、up to a $k$-stem groups で、$EHP$-sequence の中の準同型 $E^2, H, P$ は、unstable alpha families 上で閉じている。

$\nu(r) = 1$ の場合の unstable alpha families の computing diagram は次のようになる。

$$
\begin{array}{lcccccccc}
n = & 3 & 5 & 7 & \cdots & 2r-5 & 2r-3 & 2r-1 & stable \\
 & a_{r-1} & a_{r-2} & a_{r-3} & & a_3 & a_2 & (a_1) & \\
 & \nwarrow_H & \nwarrow_H & \nwarrow_H & & \nwarrow_H & \nwarrow_H & & \\
k=rq-2 & \alpha^*_r(3) \hookrightarrow & \alpha^{*\prime}_r(5) \rightarrow & \alpha^{*\prime}_r(7) \rightarrow & \cdots \rightarrow & \alpha^{*\prime}_r(2r-5) \rightarrow & \alpha^{*\prime}_r(2r-3) \rightarrow & \alpha^*_r(2r-1) & \\
 & & \nwarrow_P & & & \nwarrow_P & \nwarrow_P & \nwarrow_P & \\
 & A_{r-1} & A_{r-2} & A_{r-3} & & A_2 & A_1 & A_0 & \\
 & \nwarrow_H & \nwarrow_H & & & & & & \\
k=rq-1 & \alpha_r(3) \hookrightarrow & \alpha'_r(5) = & \alpha'_r(7) = & \cdots = & \alpha'_r(2r-5) = & \alpha'_r(2r-3) = & \alpha'_r(2r-1) & \xrightarrow{E^\infty} \alpha'_r
\end{array}
$$

この場合に、invariant $a_1 = a_1(2r - 3)$ は unstable alpha family の外にある。$\nu(r) = 2$ ならば、$a_1$ , $a_2$ は family の外にある。

## 4.4 Removability and Residue

$EHP$-sequence に関して、unstable alpha families が閉じていることを見てきた。しかしながら、これらの system 上で、$EHP$-sequence は完全である必要はない。

**Prop 4.7** unstable alpha families 上の $EHP$-sequence の完全性は、次の2点において壊れている。

(1) $r - \nu(r) < m < r$ に対して、invariants $a_r(2m + 1)$ は unstable alpha families の $H$-images ではない。我々はこれを除外しなければならない。

(2) $s \equiv 0\ (mod\ p)$ , $s < \nu(r)$ に対して、unstable elements $\alpha^*_r(2r - 2s - 1)$ は、$\Delta$ の kernel であり、alpha type でない invariant を生成する。

unstable alpha families を除いて、mod $A$ の computing diagram を作成する。その場合、上記の2種類の要素を residue elements として加えなければならない。

他方、$IJ\Delta$-sequenece に関する unstable alpha families の互換性、特に準同型 $\Delta: \pi_{i+2}(S^{2pm+1}) \rightarrow \pi_i(S^{2pm-1})$ をチェックする必要がある。

Th4.2 の $r \not\equiv 0\ (mod\ p)$ の場合を考える。$E^2: A^{2pm-1}_{2pm+rq-2} \rightarrow A^{2pm+1}_{2pm+rq} \simeq \mathbb{Z}_p$ は同型であり、$\Delta \circ E^2 = p$ なので、$\Delta(A^{2pm+1}_{2pm+rq}) = 0$ を得る。よって、$IJ\Delta$-sequence は2つの invariant $A_r(2m - 1)$ と $a_r(2m - 1)$ を与える。

$(rq - 2)$-stem group の生成元 $\alpha^*_r(2pm - 1)$ と $\alpha^*_r(2pm + 1)$ は、$H(\alpha^*_r(2pm - 1)) = a^*_{r-m}(2pm - 3)$ と、$H(\alpha^*_r(2pm + 1)) = a^*_{r-m-1}(2pm - 1)$ を満たす。$\alpha^*_k$ の定義により、$\alpha^*_{r-m} = \alpha \circ a^*_{r-m-1}$ を得る。よって、Lem3.7 から、$\Delta(\alpha^*_r(2pm + 1)) \equiv \alpha^*_r(2pm - 1)\ mod\ ker\ H = Im\ E^2$ が成り立つ。これは、$\Delta$ が $(kq - 2)$-stem group の生成元を消すことを示している。

$r \equiv 0\ (mod\ p)$ の場合、結果は似たようなものであるが、大きい order の生成元を使う方がより簡単である。

例外的に $E^2: A^{2pm-1}_{2pm+\epsilon+rq-2} \rightarrow A^{2pm+1}_{2pm+\epsilon+rq}$ $(\epsilon = 0, -1)$ は単射であるが、$Coker\ E^2 \simeq \mathbb{Z}_p$ となる場合がある。この場合、対応する $\Delta$ はどちらも全射であり、それぞれに対して1つの invariant を与える。

**Th 4.2** $r \not\equiv 0\ (mod\ p)$ と仮定する。

(1) $m \geq 1$ に対して、$\alpha_r(2m + 1)$ が生成する $\pi_{2m+rq}(S^{2m+1})$ の直和成分は $\mathbb{Z}_p$ に同型である。

$E^2\alpha_r(2m + 1) = \alpha_r(2m + 3)$ かつ $H_p(\alpha_r(3)) = \alpha_{r-1}(2p + 1)$ if $r > 1$ .

(2) $1 \leq m < r$ に対して、$\alpha^*_r(2m + 1)$ が生成する $\pi_{2m+rq-1}(S^{2m+1})$ の直和成分は $\mathbb{Z}_p$ に同型である。

$H(\alpha^*_r(2m + 1)) = r \cdot a_{r-m}(2m - 1)$ .

**Lem 3.7** $\xi \in \pi_{i+4}(S^{2pm+1})$ , $\gamma \in \pi^S_s$ , $\delta \in \pi^S_t$ に対して、up to non-zero coefficients で次の関係が成り立つ。

(1) $H(\xi) = Q^{pm}(\gamma)$ は、$H(\Delta(\xi)) = \overline{Q}^{pm-1}(\alpha\gamma) = HP(\overline{Q}^{pm}(\xi))$ を誘導する。

(2) $H(\xi) = Q^{pm}(\gamma)$ , $\Delta(\xi) = P(\overline{Q}^{pm}(\gamma))$ は、$H(\xi \circ \delta(i + 4)) = Q^{pm}(\gamma\delta)$ , $\Delta(\xi \circ \delta(i)) = P(\overline{Q}^{pm}(\gamma\delta))$ を誘導する。

## 5 Old Table of 3-primary Groups

### 5.1 3-primary Groups, stable to unstable

$k \le 45$ に対する $k$-次ホモトピー群の 3-成分の結果は、Toda[37],[38] の中で与えられて、$k \le 55$ に対する報告は、1998年に Maruyama と Mimura によって与えられた。我々は下記の Oka[22] による、alpha type generators $\alpha_r$, $\alpha'_{3s}$, $\alpha''_{9t}$ を除いた $k < 62$ に対する 3-primary stable homotopy groups ${}_3\pi_k^S$ の結果から見積もりを始めることにする。生成元の記法について、[22] で与えられたものを用いる。

(5.1.1) 関係式は符号を無視するものとする。

(1) ${}_3\pi_{10}^S = \{\beta_1\}$, $\beta_1 = \{\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1\}$.

(2) ${}_3\pi_{13}^S = \{\alpha_1\beta_1\}$.

(3) ${}_3\pi_{20}^S = \{\beta_1^2\}$.

(4) ${}_3\pi_{23}^S = \{\alpha_1\beta_1^2\}$.

(5) ${}_3\pi_{26}^S = \{\beta_2\}$.

(6) ${}_3\pi_{29}^S = \{\alpha_1\beta_2\}$.

(7) ${}_3\pi_{30}^S = \{\beta_1^3\}$, $\beta_1^3 = \{\alpha_1, 3, \beta_2\}$.

(8) ${}_3\pi_{36}^S = \{\beta_1\beta_2\}$.

(9) ${}_3\pi_{37}^S = \{\varepsilon'\}$, $\varepsilon' = \{\alpha_1, \alpha_1, \beta_1^3\}$.

(10) ${}_3\pi_{38}^S = \{\varepsilon_1\}$, $\varepsilon_1 = \{\alpha_1, 3, \beta_1^3, \alpha_1\}$.

(11) ${}_3\pi_{39}^S = \{\alpha_1\beta_1\beta_2\}$.

(12) ${}_3\pi_{40}^S = \{\beta_1^4\}$, $\alpha_1\varepsilon' = \beta_1^4$.

(13) ${}_3\pi_{42}^S = \{\varepsilon_2\}$, $\varepsilon_2 = \{\alpha_1, 3, \varepsilon_1\} = 2\{3, \alpha_1, \varepsilon_1\}$.

(14) ${}_3\pi_{45}^S = \{\varphi\}$, $\varphi = \{\alpha_1, \alpha_1, \varepsilon_1\}$, $p\varphi = \alpha_1\varepsilon_2$.

(15) ${}_3\pi_{46}^S = \{\beta_1^2\beta_2\}$.

(16) ${}_3\pi_{47}^S = \{\beta_1\varepsilon'\}$.

(17) ${}_3\pi_{49}^S = \{\alpha_1\beta_1^2\beta_2\}$.

(18) ${}_3\pi_{50}^S = \{\beta_1^5\}$.

(19) ${}_3\pi_{52}^S = \{\beta_2^2\}$, $\beta_2^2 = \{\alpha_1, \alpha_1, \varphi\}$.

(20) ${}_3\pi_{55}^S = \{\alpha_1\beta_2^2\}$.

ここからは、3-primary unstable groups $mod\ A$ の計算に限定し、簡単のため、次の記号を使う。

$$\pi_i^n = {}_3\pi_i(S^n)/A_i^n,\ Q_i^n = {}_3\pi_i(Q_2^n)/AQ_i^n,\ \pi_k^S = {}_3\pi_k^S/A_k^S.$$

double suspension $E^2$ の次の列について、$k$ と $n$ の帰納法によって行われる。

(5.1.2) $\pi_{3+k}^3 \xrightarrow{E^2} \pi_{5+k}^5 \xrightarrow{E^2} \cdots \xrightarrow{E^2} \pi_{2m-1+k}^{2m-1} \xrightarrow{E^2} \pi_{2m+1+k}^{2m+1} \xrightarrow{E^2} \cdots \xrightarrow{S^\infty} \pi_k^S$,

ここで、stable group $\pi_k^S$ と unstable groups $\pi_{2m+1+j}^{2m+1}$ for $j < k$ は既に決定されているものと仮定する。

各 double suspension $E^2$ は、$p = 3$ の $EHP$-sequence (2.1.1) を使うことにより確かめられる。

(5.1.3) $\cdots \xrightarrow{H} Q_{2m-1+k}^{2m-1} \xrightarrow{P} \pi_{2m-1+k}^{2m-1} \xrightarrow{E^2} \pi_{2m+1+k}^{2m+1} \xrightarrow{H} Q_{2m-2+k}^{2m-1} \xrightarrow{P} \cdots$ .

$k$-stem groups の計算は、次の図式を使って行われる。Computing Diagram mod $A$


[37] H.Toda. On homotopy groups of $S^3$-bundles over spheres, J. Math. Kyoto Univ. 2 (1963), 193-207.
[38] H.Toda. On Iterated Suspensions I,II,III, J. Math. Kyoto Univ. 5 (1966), 87-142,209-250, 8(1968),101-130.
[22] S.Oka, The stable homotopy groups of spheres, I, II, III, Hiroshima Math. J. 1(1971), 305-337, 2(1972), 99-161, 5(1975), 407-438.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & \pi^3_{2+k} & \xrightarrow{E^2} & \pi^5_{4+k} & \xrightarrow{E^2} & \pi^7_{6+k} & \xrightarrow{E^2} & \cdots & \xrightarrow{E^2} & \pi^{2m-1}_{2m-2+k} & \xrightarrow{E^2} & \pi^{2m+1}_{2m+k} & \xrightarrow{E^2} \cdots \\
 & & \nwarrow P & & \nwarrow P & & & & & & \nwarrow P & & \\
Q^1_k & & Q^3_{2+k} & & Q^5_{4+k} & & \cdots & & \cdots & & Q^{2m-1}_{2m-2+k} & & \cdots \\
 & \nwarrow H & & \nwarrow H & & \nwarrow H & & & & & & \nwarrow H & \\
 & \pi^3_{3+k} & \xrightarrow{E^2} & \pi^5_{5+k} & \xrightarrow{E^2} & \pi^7_{7+k} & \xrightarrow{E^2} & \cdots & \xrightarrow{E^2} & \pi^{2m-1}_{2m-1+k} & \xrightarrow{E^2} & \pi^{2m+1}_{2m+1+k} & \xrightarrow{E^2} \cdots \\
 & & \nwarrow P & & \nwarrow P & & & & & & \nwarrow P & & \\
Q^1_{1+k} & & Q^3_{3+k} & & Q^5_{5+k} & & \cdots & & \cdots & & Q^{2m-1}_{2m-1+k} & & \cdots \\
 & \nwarrow H & & \nwarrow H & & \nwarrow H & & & & & & \nwarrow H & \\
 & \pi^3_{4+k} & \xrightarrow{E^2} & \pi^5_{6+k} & \xrightarrow{E^2} & \pi^7_{8+k} & \xrightarrow{E^2} & \cdots & \xrightarrow{E^2} & \pi^{2m-1}_{2m+k} & \xrightarrow{E^2} & \pi^{2m+1}_{2m+2+k} & \xrightarrow{E^2} \cdots
\end{array}
$$

ここで、群 $Q^{2m-1}_{2m-1+k}$ は Th 2.2 の $IJ\Delta$-sequence によって、あらかじめ決定されていなければならない。$k < 107$ に対して、section 4.5 により、$Q^{2m-1}_{2m-1+k}$ は次の extra elements を含んでいる。

(5.1.4) $w = IP(\iota) \in Q^{2m-1}_{18m-5}$, $a_1 \in Q^{6m-3}_{18m-8}$, $a_2 \in Q^{18m-5}_{54m-8}$.

(5.1.4) により生成される部分群による商を $\overline{Q}^{2m-1}_{2m-1+k}$ とする。このとき、invariants mod $A$ は、次の完全列により得られる。

(5.1.5) $\cdots \xrightarrow{J} \pi^{6m+1}_{2m+1+k} \xrightarrow{\Delta} \pi^{6m-1}_{2m-1+k} \xrightarrow{I} \overline{Q}^{2m-1}_{2m-1+k} \xrightarrow{J} \pi^{6m+1}_{2m+k} \xrightarrow{\Delta} \pi^{6m-1}_{2m-2+k} \xrightarrow{I} \cdots$ .

$m = 1$ のとき、$k \neq 0$ に対して $H: \pi^3_{3+k} \to Q^1_k$ は全射である。よって、$\pi^3_{3+k}$ は Th 2.4 から得られる次の列により直接計算される。

(5.1.6) $\cdots \xrightarrow{H_p} \pi^7_{4+k} \xrightarrow{\Delta} \pi^5_{2+k} \xrightarrow{G} \pi^3_{3+k} \xrightarrow{H_p} \pi^7_{3+k} \xrightarrow{\Delta} \pi^5_{1+k} \xrightarrow{G} \cdots$ .

(5.1.6) は $k = 11$ の場合を除いて完全であることに注意する。computing diagram において $Q^{2m-1}_i$ の生成元の多くは (2.3.1) ((2.4.1)[ママ]) または (2.3.2) ((2.4.2)[ママ]) の中で得られた stable type invariants $Q^m(\xi) \in Q^{2m-1}_{6m-1+k}$ or $\overline{Q}^m(\xi) \in Q^{2m-1}_{6m+k}$ for $\xi \in \pi^S_k$ として与えられる。我々はこのような生成元を、対応するアルファベットで表わすことにする。次の (5.1.7) は、(5.1.1) の stable generator に対応する stable type invariants のリストである。

(5.1.7) Invariants $Q^m(\xi)$ and $\overline{Q}^m(\xi)$ for $\xi \in \pi^S_k$, $k \leq 55$.

| $k$ | 0 | 3 | 7 | 10 | 13 | 20 | 23 | 26 | 29 | 30 | 36 | 37 | 38 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\xi$ | $\iota$ | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $\beta_1$ | $\alpha_1\beta_1$ | $\beta_1^2$ | $\alpha_1\beta_1^2$ | $\beta_2$ | $\alpha_1\beta_2$ | $\beta_1^3$ | $\beta_1\beta_2$ | $\epsilon'$ | $\epsilon_1$ |
| $Q^m(\xi)$ | $i$ | $a$ | $a_2$ | $b$ | $ab$ | $b^2$ | $ab^2$ | $b_2$ | $ab_2$ | $b^3$ | $bb_2$ | $e'$ | $e_1$ |
| $\overline{Q}^m(\xi)$ | | | | $B$ | $AB$ | $B^2$ | $AB^2$ | $B_2$ | $AB_2$ | $B^3$ | $BB_2$ | $E'$ | $E_1$ |

| $k$ | 39 | 40 | 42 | 45 | 45 | 46 | 47 | 49 | 50 | 52 | 55 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\xi$ | $\alpha_1\beta_1\beta_2$ | $\beta_1^4$ | $\epsilon_2$ | $\varphi$ | $\alpha_1\epsilon_2$ | $\beta_1^2\beta_2$ | $\beta_1\epsilon'$ | $\alpha_1\beta_1^2\beta_2$ | $\beta_1^5$ | $\beta_2^2$ | $\alpha_1\beta_2^2$ |
| $Q^m(\xi)$ | $abb_2$ | $b^4$ | $e_2$ | $ph$ | $\times$ | $b^2b_2$ | $be'$ | $ab^2b_2$ | $b^5$ | $b_2^2$ | $ab_2^2$ |
| $\overline{Q}^m(\xi)$ | $AAB_2$ | $B^4$ | $E_2$ | $\times$ | $AE_2$ | $B^2B_2$ | $BE'$ | $AB^2B_2$ | $B^5$ | $B_2^2$ | $AB_2^2$ |

Lem 3.1, 3.2, 3.3 を使うことにより、これらの stable type invariants の最初の微分 $d_1 = H \circ P: \pi_{i+3}(Q_2^{2m+1}) \to \pi_{i+3}(S^{2m+1}) \to \pi_i(Q_2^{2m-1})$ が確かめられる。以下で見るように、その結果は、$m$ (mod 3) の値によって定まる。

**Prop 5.1** 各 invariant $x \in Q^{2m+1}_{6m+3+k}$ の像 $d_1(x) = HP(x) \in Q^{2m-1}_{6m+k}$ は、符号を除いて、下記で与えられる。

| $k$ | 10 | 11 | 20 | 21 | 26 | 27 | 36 | 37 | 37 | 38 | 39 | 43 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $b$ | $B$ | $b^2$ | $B^2$ | $b_2$ | $B_2$ | $bb_2$ | $BB_2$ | $e'$ | $E'$ | $E_1$ | $E_2$ |
| $m \equiv 0$ | $ab$ | 0 | $ab^2$ | 0 | $ab_2$ | $b^3$ | $abb_2$ | 0 | $b^4$ | 0 | $e_2$ | 0 |
| $m \equiv 1$ | $ab$ | $AB$ | $ab^2$ | $AB^2$ | $ab_2$ | $AB_2$ | $abb_2$ | $ABB_2$ | $b^4$ | $B^4$ | 0 | $AE_2$ |
| $m \equiv 2$ | 0 | $AB$ | 0 | $AB^2$ | 0 | $AB_2$ | 0 | $ABB_2$ | 0 | $B^4$ | $e_2$ | $AE_2$ |

| $k$ | 46 | 47 | 47 | 48 | 52 | 53 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $b^2b_2$ | $B^2B_2$ | $be'$ | $BE'$ | $b_2^2$ | $B_2^2$ |
| $m \equiv 0$ | $ab^2b_2$ | 0 | $b^5$ | 0 | $ab_2^2$ | 0 |
| $m \equiv 1$ | $ab^2b_2$ | $AB^2B_2$ | $b^5$ | $B^5$ | $ab_2^2$ | $AB_2^2$ |
| $m \equiv 2$ | 0 | $AB^2B_2$ | 0 | $B^5$ | 0 | $AB_2^2$ |

**Th 2.2** (2.1.9) の mod $p$ fibration は、次の $IJ\Delta$-sequence を誘導し、これは、mod $p$ で完全である。

$\cdots \xrightarrow{\Delta} \pi_{i+2}(S^{2pm-1}) \xrightarrow{I} \pi_i(Q_2^{2m-1}) \xrightarrow{J} \pi_{i+3}(S^{2pm+1}) \xrightarrow{\Delta} \pi_{i+1}(S^{2pm-1}) \xrightarrow{I} \cdots$

**Th 2.4** 次の列は $i + 1 \neq 3$ のとき、mod $p$ で完全である。

$\cdots \xrightarrow{H_p} \pi_{i+2}(S^{2p+1}) \xrightarrow{\Delta} \pi_i(S^{2p-1}) \xrightarrow{G} \pi_{i+1}(S^3) \xrightarrow{H_p} \pi_{i+1}(S^{2p+1}) \xrightarrow{\Delta} \cdots$

ここで、$G$ は $G(\xi) = \alpha_1(3) \circ E(\xi)$ for $\xi \in {}_p\pi_i(S^{2p-1})$ で与えられ、Hopf invariant $H_p$ は、次を満たす。

$H_p\{\alpha_1(3), p\iota_{2p}, E(\xi)\}_1 = -E^2(\xi)$ for $\xi \in \pi_i(S^{2p-1})$ with $p \cdot \xi = 0$.

invariant $x \in {}_p\pi_i(Q_2^{2m-1})$ に対して、$x = I(\xi')$ となる元 $\xi' \in \pi_{i+2}(S^{2pm-1})$ が存在して、stable class $\xi = E^\infty(\xi')$ が $p$ で割り切れないとき、(2.3.1) $x = Q^m(\xi)$ と書くことにする。また、$y \in {}_p\pi_i(Q_2^{2m-1})$ に対して、stable class $\eta = E^\infty(J(y))$ が非自明のとき、(2.3.2) $y = \overline{Q}^m(\eta)$ と書くことにする。$Q^m(\xi)$ と $\overline{Q}^m(\eta)$ はどちらも **stable type** と呼ばれる。これらの invariants は stable classes $\xi$ または $\eta$ によってでは一意に定まらないことに注意する。$Q^m(\xi)$ は $\xi'$ の選び方による。$\overline{Q}^m(\eta)$ は indeterminacy が $\ker(E^\infty \circ J)$ である。

**Lem 3.1** $\xi \in \pi^S_k$ に対して、$u(\xi) < 2p(m+1) - 5$ ならば、$d_1(Q^{m+1}(\xi)) = PH(Q^{m+1}(\xi)) = (m+1)Q^m(\alpha_1\xi)$.

$m = 1$ のときは、$u(\xi) \leq 4p - 3$ である $\xi$ に対してこの式が成り立つ。

**Lem 3.2** $\xi \in \pi^S_k$ に対して、$u(\xi) < 2p(m+1) - 5$, $p\xi = 0$ ならば、$d_1(\overline{Q}^{m+1}(\xi)) = PH(\overline{Q}^{m+1}(\xi)) = m \cdot Q^m(\alpha_1\xi)$.

ここで、$u(\xi) \leq 4p - 3$ の $\xi$ に対して、$m = 1$ のときに成り立つ。

**Lem 3.3** $\xi \in \pi^S_k$ に対して、$u(\xi) < 2p(m+1) - 5$, $p\xi = 0$, $\alpha_1\xi = 0$ ならば、$\eta \in (m+1)\{\alpha_1, p, \xi\} - m\{p, \alpha_1, \xi\}$ に対して、$d_1(\overline{Q}^{m+1}(\xi)) = PH(\overline{Q}^{m+1}(\xi)) = Q^m(\eta)$.

ここで、$u(\xi) \leq 4p - 3$ の $\xi$ に対して、$m = 1$ のときに成り立つ。

残りの invariants に対して、$d_1(x) = 0$ である。

(5.1.8) $x = ab, ab^2, ab_2, b^3, e_1, abb_2, b^4, e_2, ab_2^{\ 2}, b^5, ab_2^{\ 2}$,

(5.1.9) $x = AB, AB^2, AB_2, B^3, ABB_2, B^4, AB^2B_2, B^5, AB_2^{\ 2}$.

Proof. $\alpha_1\xi$ が 3 で割れないならば、Lem 3.1 により $x = Q^{m+1}(\xi)$ に対して、$d_1(x) = (m+1)Q^m(\alpha_1\xi) \neq 0$ である。これは invariants $x = b, b^2, bb_2, e', b^2b_2, be', b_2^2$ に適用される。ここで、$\alpha_1\varepsilon' = \beta_1^{\ 4}$ であることに注意する。

同様に、Lem 3.2 から $X = B, B^2, B_2, BB_2, E', BE', B_2^2$ に対して、$m \equiv 1, 2 \ (mod\ 3)$ ならば $d_1(X) = \pm AX$ である。

しかし $m \equiv 0\ (mod\ 3)$ の場合、$d_1(X)$ は 0 である必要はなく、ある $\eta$ に対して $Q^m(\eta)$ の形かもしれない。$\pi_{14}^S = 0$ なので $d_1(B) = 0$ である。よって、自然性により、$X = B^2, BB_2, BE'$ に対して $d_1(X) = 0$ である。また $m \equiv 0\ (mod\ 3)$ の場合、$\pi_{41}^S = 0$ なので $d_1(E') = 0$ であり、$\pi_{56}^S = 0$ なので $d_1(B_2^2) = 0$ である。Lem 3.3 と (5.1.1) (7) の関係式から $d_1(B_2) = b^3$ が成り立つ。(5.1.1) (13) の関係式と Lem 3.3 から

$$\eta = (m+1)\{\alpha_1, 3, \varepsilon_1\} - m\{3, \alpha_1, \varepsilon_1\} = ((m+1) - 2m)\varepsilon_2 = (1-m)\varepsilon_2$$

に対して $d_1(E_1) = Q^m(\eta)$ が成り立つ。よって $E_1$ に対する結果を得る。

$m \equiv 0\ (mod\ 3)$ のとき、同様に、$\eta = \{\alpha_1, 3, \varepsilon_2\}$ に対して $d_1(E_2) = Q^m(\eta)$ である。$\eta \neq 0$ と仮定すると、(5.1.1) (15) により $\eta = \pm\beta_1^2\beta_2$ である。(5.1.1) (13) により

$$\alpha_1\eta = \{\alpha_1, \alpha_1, 3\}\varepsilon_2 = -\alpha_2\varepsilon_2 = \alpha_2\{3, \alpha_1, \varepsilon_1\} = \alpha_3\varepsilon_1 = 3\alpha'\varepsilon_1 = 0$$

であり、これは $\alpha_1\eta = \pm\alpha_1\beta_1^2\beta_2 \neq 0$ に矛盾する。よって $d_1(E_2) = Q^m(\eta) = 0$ である。

(5.1.8), (5.1.9) の元 $x$ に対して $d_1 = 0$ であることは容易に証明できる。■

次に short range unstable elements $\{H(\xi) = x \neq 0,\ E^2\xi = P(y) \neq 0\}$ を考える。
stable elements $\gamma$, $\delta$ が次を満たすと仮定する。

(5.1.10) $\delta \in \{\alpha_1, \alpha_1, \gamma\}$.

Lem 3.8, 3.9 から次の Prop を得る。

**Prop 5.2** $m\equiv 0\ (mod\ 3)$ とする。(5.1.10) の元 に対して、$x = Q^{m+2}(\gamma)$, $y = Q^m(\delta)$ とする。このとき、元 $\xi \in \pi_i(S^{2m+1})$ が存在して次を満たす。$H(\xi) = y$, $E^2\xi = P(x)$.

**Prop 5.3** $m\equiv 1\ (mod\ 3)$ とする。(5.1.10) の元 に対して、$X = \overline{Q}^{m+2}(\gamma)$, $Y = \overline{Q}^m(\delta)$ とする。Lem 3.9 の中での関係 $d_1(X) = HP(X) = 0$ が得られる、例えば stable range の中での計算であると仮定する。このとき、元 $\xi \in \pi_i(S^{2m+1})$ が存在して次を満たす。$H(\xi) = Y$, $E^2\xi = P(X)$.

(5.1.10) の元 $\gamma, \delta$ と、その関係する invariants のリストは下記の通りである。

(5.1.11)

| $\gamma$ | $\alpha_1$ | $\alpha_1\beta_1$ | $\alpha_1\beta_1^2$ | $\alpha_1\beta_2$ | $\beta_1^3$ | $\epsilon_1$ | $\alpha_1\beta_1\beta_2$ | $\beta^4$ | $\varphi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\delta$ | $\beta_1$ | $\beta_1^2$ | $\beta_1^3$ | $\beta_1\beta_2$ | $\epsilon'$ | $\varphi$ | $\beta_1^2\beta_2$ | $\beta_1\epsilon'$ | $\beta_2^2$ |
| $x$ | $a$ | $ab$ | $ab^2$ | $ab_2$ | $b^3$ | $e_1$ | $abb_2$ | $b^4$ | $ph$ |
| $y$ | $b$ | $b^2$ | $b^3$ | $bb_2$ | $e'$ | $ph$ | $b_2^2$ | $be'$ | $b_2^2$ |
| $X$ | | $AB$ | $AB^2$ | $AB_2$ | $B^3$ | | $ABB_2$ | $B^4$ | |
| $Y$ | | $B^2$ | $B^3$ | $BB_2$ | $E'$ | | $B^2B_2$ | $BE'$ | |

## 5.2 Computation diagram mod A of lower stems

群 $\pi_{n+k}^n$ を完全に計算するために、computing diagrams mod $A$ を使い、symbols $E^2$, $H$, $P$ を省略し、$Q_{n+k}^n$ を、その生成元に置き換える。また、$\pi_{n+k}^n$ を次に示す直和成分の symbols の collection に置き換える。

(5.2.1) $\bullet \simeq \mathbb{Z}_3$, $\bigcirc \simeq \mathbb{Z}_9$, $\triangleright \simeq \mathbb{Z}_{27}$.

$E^2$ に対する symbol = は、同型を表す。

**Lem 3.1** $\xi \in \pi_k^S$ に対して、$u(\xi) < 2p(m+1) - 5$ ならば、$d_1(Q^{m+1}(\xi)) = PH(Q^{m+1}(\xi)) = (m+1)Q^m(\alpha_1\xi)$.
$m = 1$ のときは、$u(\xi) \leq 4p - 3$ である $\xi$ に対してこの式が成り立つ。

**Lem 3.2** $\xi \in \pi_k^S$ に対して、$u(\xi) < 2p(m+1) - 5$, $p\xi = 0$ ならば、$d_1(\overline{Q}^{m+1}(\xi)) = PH(\overline{Q}^{m+1}(\xi)) = m \cdot Q^m(\alpha_1\xi)$.
ここで、$u(\xi) \leq 4p - 3$ の $\xi$ に対して、$m = 1$ のときに成り立つ。

**Lem 3.3** $\xi \in \pi_k^S$ に対して、$u(\xi) < 2p(m+1) - 5$, $p\xi = 0$, $\alpha_1\xi = 0$ ならば、$\eta \in (m+1)\{\alpha_1, p, \xi\} - m\{p, \alpha_1, \xi\}$ に対して、$d_1(\overline{Q}^{m+1}(\xi)) = PH(\overline{Q}^{m+1}(\xi)) = Q^m(\eta)$.
ここで、$u(\xi) \leq 4p - 3$ の $\xi$ に対して、$m = 1$ のときに成り立つ。

(5.1.1) (7) $\ {}_3\pi_{30}^S = \{\beta_1^3\}$, $\quad \beta_1^3 = \{\alpha_1,\ 3,\ \beta_2\}$.

(5.1.1) (13) $\ {}_3\pi_{42}^S = \{\varepsilon_2\}$, $\quad \varepsilon_2 = \{\alpha_1,\ 3,\ \varepsilon_1\} = 2\{3,\ \alpha_1,\ \varepsilon_1\}$.

(5.1.1) (15) $\ {}_3\pi_{46}^S = \{\beta_1^2\beta_2\}$.

残りの invariants に対して、$d_1(x) = 0$ である。

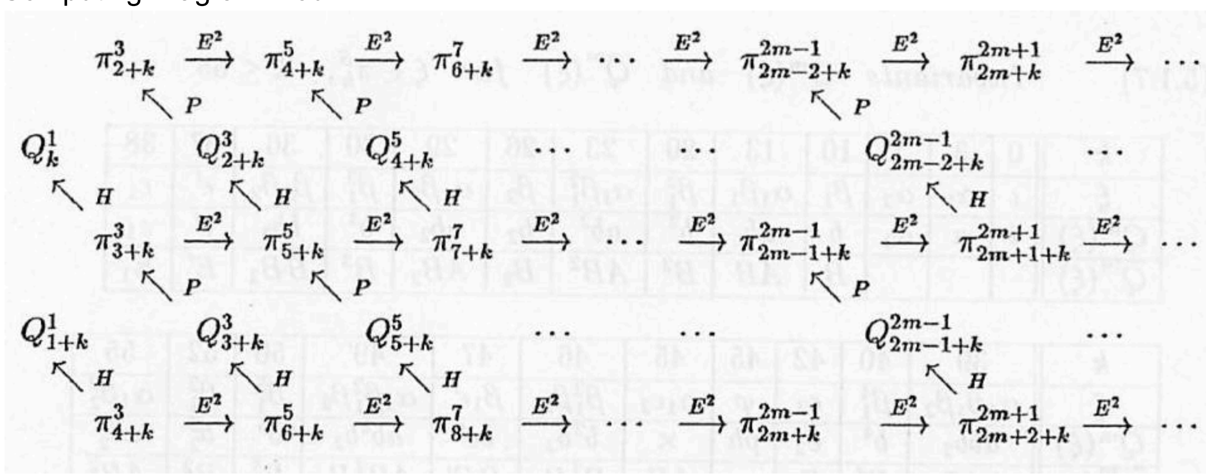
(5.1.8) $x = ab, ab^2, ab_2, b^3, e_1, abb_2, b^4, e_2, ab_2^{\ 2}, b^5, ab_2^{\ 2}$,

(5.1.9) $x = AB, AB^2, AB_2, B^3, ABB_2, B^4, AB^2B_2, B^5, AB_2^{\ 2}$.

**Lem 3.8** $m \not\equiv -1, -2\ (mod\ p)$ で、$\gamma \in \pi_{i-4}(S^{2m+4p-9})$ に対して invariant $x \in \pi_{i+2}(Q_2^{2m+3})$ は $E^6(i_*\gamma)$ による M-represented であり、$\alpha_1(2m+4p-9) \circ \gamma = 0$ であるならば、$\xi \in \pi_i(S^{2m+1})$ が存在して、up to non-zero coefficient で $H(\xi) \in I\{\alpha_1(2pm-1), \alpha_1(2pm+2p-4), E^3\gamma\}$, $E^2(\xi) = P(x)$.

**Lem 3.9** $m \not\equiv 0, -1\ (mod\ p)$ で、$\gamma \in \pi_{i-3}(Y^{2m+4p-8})$ に対して invariant $x \in \pi_{i+2}(Q_2^{2m+3})$ は $E^6\gamma$ による M-represented であり、$\eta_{m+1}^{(3)} \circ \gamma = 0$ であるならば、$\xi \in \pi_{i+1}(S^{2m+1})$ が存在して、up to non-zero coefficient で $H_p(\xi) = JH(\xi) \in \{\alpha_1(2pm+1), \alpha_1(2pm+2p-2), E^3\pi_*\gamma\}$.

Computing Diagram mod $A$



(5.2.2) $\bullet = \bullet$, $\bigcirc = \bigcirc$, $\triangleright = \triangleright$.

$E^2$ に対する symbol $\to$ は、同型でなく、非自明であるものを表す。

(5.2.3) $\bullet \to \bigcirc$, $\bigcirc \to \triangleright$, $\bigcirc \to \bullet$, $\triangleright \to \bigcirc$, $\bigcirc \to \bigcirc$, $\triangleright \to \triangleright$.

ここで、最初の2つは単射、次の2つは全射、最後の2つは $p$ 倍を表している。

まず、10-stem groups ${}_3\pi_{n+10}(S^n)$ について述べる。${}_3\pi_{13}(S^3) \xrightarrow{E^2} {}_3\pi_{15}(S^5) \xrightarrow{E^2} {}_3\pi_{17}(S^7)$ .

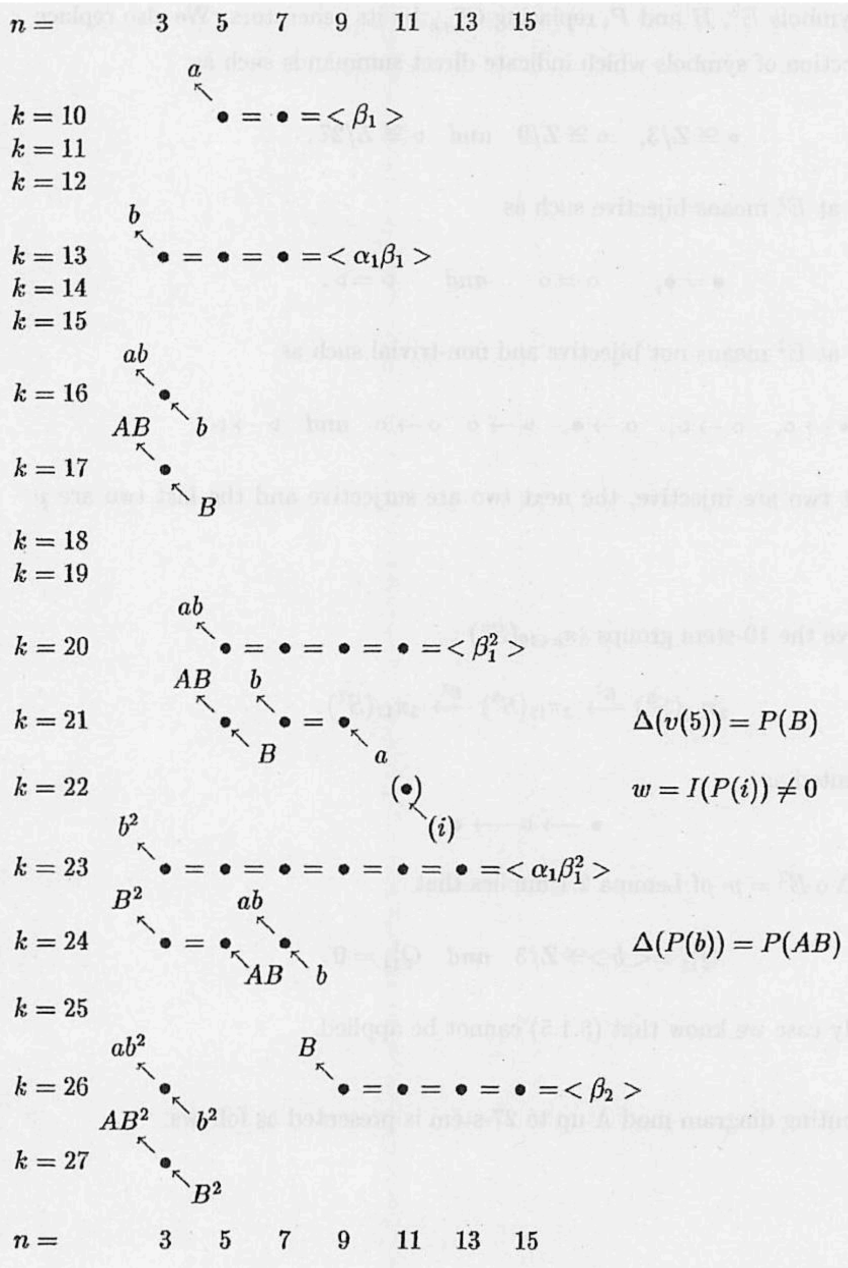
これは次のように表される。$\bullet \to \bigcirc \to \bullet$ .

Lem 2.1 の等式 $\Delta \circ E^2 = p$ により次が成り立つ。$Q^1_{13} = \{b\} \simeq \mathbb{Z}/3$ , $Q^1_{14} = 0$ .

これは (5.1.5) が適用されない唯一の場合であることが分かっている。

27-stem までの computing diagram mod $A$ は以下のように表される。

**Th 5.1** $k \leq 27$ と奇数 $n$ に対して、$k$-stem groups mod $A$ $\pi^n_{n+k}$ は、以下の通りである。




$m \geq 2$ に対して、$Q^{2m-1}_i$ の全ての invariant は metastable range にあり、上の図式で示されているように、Th 2.2 または Prop 2.1 により生成元が得られる。

$\Delta$ の結果から、(5.1.6) により、$Q^1_i \simeq \pi^3_{3+i}$ の生成元が確かめられる。

$k = 13, 20, 23$ に対して、$E^2 : \pi^5_{5+k} \to \pi^7_{7+k}$ が $\bullet$ の同型であるので、$\Delta \circ E = p$ から、$\Delta = 0 : \pi^7_{7+k} \to \pi^5_{5+k}$ である。よって、図式で示されるように、$\pi^3_{3+k} \simeq Q^1_k$ と $\pi^3_{4+k} \simeq Q^1_{1+k}$ の生成元は、Th 2.4 により得られる。

**Lem 2.1** 次の2つの合成は、どちらも $p$ 倍する写像である。

$\Delta \circ E^2 :\ {}_p\pi_i(S^{2pm-1}) \to {}_p\pi_{i+2}(S^{2pm+1}) \to {}_p\pi_i(S^{2pm-1})$ ,

$E^2 \circ \Delta :\ {}_p\pi_{i+2}(S^{2pm+1}) \to {}_p\pi_i(S^{2pm-1}) \to {}_p\pi_{i+2}(S^{2pm+1})$ .

(5.1.5) $\cdots \xrightarrow{J} \pi^{6m+1}_{2m+1+k} \xrightarrow{\Delta} \pi^{6m-1}_{2m-1+k} \xrightarrow{I} \overline{Q}^{2m-1}_{2m-1+k} \xrightarrow{J} \pi^{6m+1}_{2m+k} \xrightarrow{\Delta} \pi^{6m-1}_{2m-2+k} \xrightarrow{I} \cdots$ .

**Th 2.2** (2.1.9) の mod $p$ fibration は、次の $IJ\Delta$-sequence を誘導し、これは、mod $p$ で完全である。

$\cdots \xrightarrow{\Delta} \pi_{i+2}(S^{2pm-1}) \xrightarrow{I} \pi_i(Q^{2m-1}_2) \xrightarrow{J} \pi_{i+3}(S^{2pm+1}) \xrightarrow{\Delta} \pi_{i+1}(S^{2pm-1}) \xrightarrow{I} \cdots$

**Prop 2.1** $i < 2p^2m - 3$ に対して、次の split 完全列を得る。

$0 \to \pi^S_{i-2pm+3} \otimes \mathbb{Z}_p \to {}_p\pi_i(Q^{2m-1}_2) \to Tor(\pi^S_{i-2pm+2}, \mathbb{Z}_p) \to 0$ .

(5.1.6) $\cdots \xrightarrow{H_p} \pi^7_{4+k} \xrightarrow{\Delta} \pi^5_{2+k} \xrightarrow{G} \pi^3_{3+k} \xrightarrow{H_p} \pi^7_{3+k} \xrightarrow{\Delta} \pi^5_{1+k} \xrightarrow{G} \cdots$ .

**Th 2.4** 次の列は $i + 1 \neq 3$ のとき、$mod\ p$ で完全である。

$\cdots \xrightarrow{H_p} \pi_{i+2}(S^{2p+1}) \xrightarrow{\Delta} \pi_i(S^{2p-1}) \xrightarrow{G} \pi_{i+1}(S^3) \xrightarrow{H_p} \pi_{i+1}(S^{2p+1}) \xrightarrow{\Delta} \cdots$

ここで、$G$ は $G(\xi) = \alpha_1(3) \circ E(\xi)$ for $\xi \in {}_p\pi_i(S^{2p-1})$ で与えられ、Hopf invariant $H_p$ は、次を満たす。

$H_p\{\alpha_1(3), p\iota_{2p}, E(\xi)\}_1 = -E^2(\xi)$ for $\xi \in \pi_i(S^{2p-1})$ with $p \cdot \xi = 0$ .

$k = 21, 24$ に対して、$E^2 = 0: \pi^5_{5+k} \to \pi^7_{7+k}$ である。よって、Th 4.3 から、$\Delta: \pi^7_{7+k} \to \pi^5_{5+k}$ は全射であるので同型である。よって、$\pi^3_{3+k}$ にはこれ以上、生成元は無い。

EHP-sequence の完全性により、$k = 16$ の場合の唯一の可能性は、$HP(b) = ab$ である。$\beta_1$ を合成することにより、自然生から、$k = 26$ に対して $HP(b^2) = ab^2$ である。$k = 17, 27$ の場合も同様。

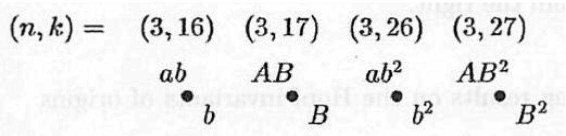
stable の生成元 $\alpha_1\beta_1$, $\beta_1^{\ 2}$, $\alpha_1\beta_1^{\ 2}$, $\beta_2$ に対して、EHP-sequence の完全性から、$k = 13, 20, 23, 26$ の場合の唯一の可能性を見る。$k = 21, 24$ の場合はまた、$\pi^S_k = 0$ からただ一つに定まる。

上の計算の中で、EHP-sequence の完全性と invariants の情報のみを必要とした。しかしながら、続きの計算にはいくつかあいまいな点があり、完全列を決定するためには、section 3 のいくつかの Lemma が必要である。

そこで、computing diagram を、simple unstable elements の部分, short range unstable elements の部分, stable class に収束する long unstable series を含む残りの部分の、3つの部分に分ける。

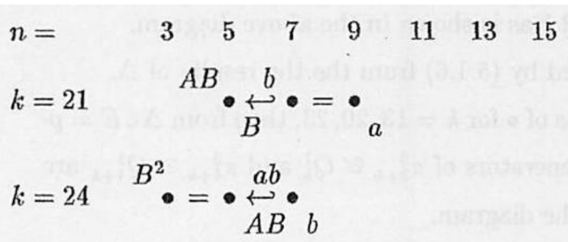
例えば、Th 5.1 の computation diagram は、次の3つの部分 (1), (2), (3) に分けられる。

(1) Removable simple unstable elements.

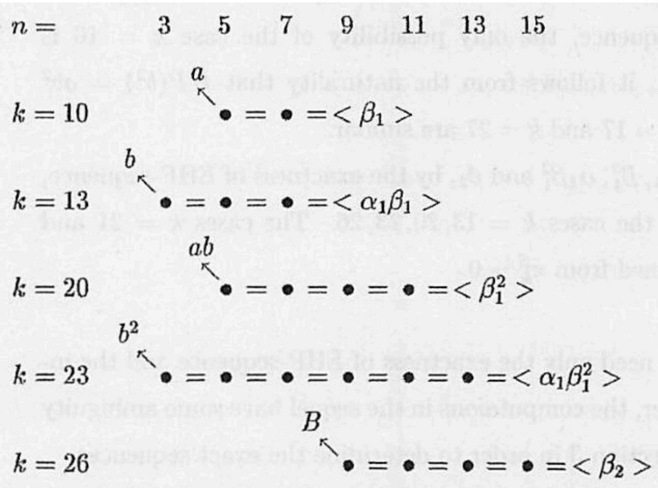



ここで、symbol ↖ は省略される。Prop 5.1, $m \equiv 1\ (mod\ 3)$ の中で並べられている対 $\{x, d_1(x)\}$ に対して、各 collection は $\{x, P(x) \in \pi^n_{n+k}, HP(x) \neq 0\}$ からなる。

(2) Removable short range unstable elements.




(3) Remaining parts.




(2) において symbol ↖ はまた、簡単のために消されている。

$n = 2m - 1$ と $n = 2m + 1$ の間の $k$-stem groups における symbol ● ← ● は、準同型

$$\Delta : \pi^{2m+1}_{2m+1+k} \to \pi^{2m-1}_{2m-1+k}, \quad m \equiv 0\ (mod\ p),$$

で、2つの ● に対応する位数 $p$ の巡回群をキャンセルすることを示している。

$k = 21$ のとき、Lem 3.7 から $\Delta \neq 0$ が成り立つ。自然性により、$\alpha_1$ を右から合成することから $k = 24$ のときに $\Delta \neq 0$ であることを得る。

この図式から、stable class の origin の Hopf invariant についての次の結果を得る。

(5.2.4) $H(\beta_1(5)) = I(\alpha_1(9))$, $H_p(\beta_2(9)) = J(H(\beta_2(9)) = \beta_1(25)$.

**Th 4.3** $a \not\equiv 0\ (mod\ p)$, $\nu = \nu(r) > r$ に対して、$r = ap^\nu$ とする。$s \le \nu$, $s < m \le r - s$ に対して、元 $\alpha_r^{*(s)}(2m + 1) \in \pi_{2m-1+rq}(S^{2m+1})$ が、$s \le \nu$, $s < m$ に対して、元 $\alpha_r^{(s)}(2m + 1) \in \pi_{2m+rq}(S^{2m+1})$ が存在して、up to non-zero coefficients で次の性質を満たす。

(0) $\alpha_r^{*(0)}(2m + 1) = \alpha_r(2m + 1)$, $\alpha_r^{*(0)}(2m + 1) = \alpha_r(2m + 1)$.

(1) $1 \le s \le \nu$, $s < m \le r - s$ に対して、$p \cdot \alpha_r^{*(s)}(2m + 1) = \alpha_r^{*(s-1)}(2m + 1)$, $E^2\alpha_r^{*(s)}(2m + 1) = \alpha_r^{*(s-1)}(2m + 3)$.

(2) $1 \le s \le \nu$, $s < m$ に対して、$p \cdot \alpha_r^{(s)}(2m + 1) = \alpha_r^{(s-1)}(2m + 1)$, $E^2\alpha_r^{(s)}(2m + 1) = \alpha_r^{(s)}(2m + 3)$.

(3) $1 \le m \le \nu + 1$ に対して、$H(\alpha_r^{(m)}(2m + 1)) = A_{r-m}(2m - 1)$,
$\nu + 1 \le m < r$ に対して、$P(A_{r-m-1}(2m + 1)) = E^{2\nu}\alpha_r^{*(s)}(2m + 1)$.

(4) $\alpha_r^{*(s)}(2m + 1)$ と $\alpha_r^{(s)}(2m + 1)$ の位数はどちらも $p^{s+1}$ である。

(5) $r$ に対して Assertion A である、特に $r \le p^{p^2}$ であるならば、$s = Min(\nu, m + 1)$, $1 \le m < r - \nu$ に対して、$H(\alpha_r^{*(s)}(2m + 1) = a_{r-m}(2m - 1)$.

**Prop 5.1** 各 invariant $x \in Q^{2m+1}_{6m+3+k}$ の像 $d_1(x) = HP(x) \in Q^{2m-1}_{6m+k}$ は、符号を除いて、下記で与えられる。

| $k$ | 10 | 11 | 20 | 21 | 26 | 27 | 36 | 37 | 37 | 38 | 39 | 43 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $b$ | $B$ | $b^2$ | $B^2$ | $b_2$ | $B_2$ | $bb_2$ | $BB_2$ | $e'$ | $E'$ | $E_1$ | $E_2$ |
| $m \equiv 0$ | $ab$ | 0 | $ab^2$ | 0 | $ab_2$ | $b^3$ | $abb_2$ | 0 | $b^4$ | 0 | $e_2$ | 0 |
| $m \equiv 1$ | $ab$ | $AB$ | $ab^2$ | $AB^2$ | $ab_2$ | $AB_2$ | $abb_2$ | $ABB_2$ | $b^4$ | $B^4$ | 0 | $AE_2$ |
| $m \equiv 2$ | 0 | $AB$ | 0 | $AB^2$ | 0 | $AB_2$ | 0 | $ABB_2$ | 0 | $B^4$ | $e_2$ | $AE_2$ |

| $k$ | 46 | 47 | 47 | 48 | 52 | 53 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $b^2b_2$ | $B^2B_2$ | $be'$ | $BE'$ | $b_2^2$ | $B_2^2$ |
| $m \equiv 0$ | $ab^2b_2$ | 0 | $b^5$ | 0 | $ab_2^2$ | 0 |
| $m \equiv 1$ | $ab^2b_2$ | $AB^2B_2$ | $b^5$ | $B^5$ | $ab_2^2$ | $AB_2^2$ |
| $m \equiv 2$ | 0 | $AB^2B_2$ | 0 | $B^5$ | 0 | $AB_2^2$ |

残りの invariants に対して、$d_1(x) = 0$ である。

(5.1.8) $x = ab, ab^2, ab_2, b^3, e_1, abb_2, b^4, e_2, ab_2^{\ 2}, b^5, ab_2^{\ 2}$,

(5.1.9) $x = AB, AB^2, AB_2, B^3, ABB_2, B^4, AB^2B_2, B^5, AB_2^{\ 2}$.

**Lem 3.7** $\xi \in \pi_{i+4}(S^{2pm+1})$, $\gamma \in \pi^S_s$, $\delta \in \pi^S_t$ に対して、up to non-zero coefficients で次の関係が成り立つ。

(1) $H(\xi) = Q^{pm}(\gamma)$ は、$H(\Delta(\xi)) = \overline{Q}^{pm-1}(\alpha\gamma) = HP(\overline{Q}^{pm}(\xi))$ を誘導する。

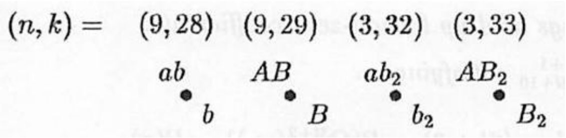
(2) $H(\xi) = Q^{pm}(\gamma)$, $\Delta(\xi) = P(\overline{Q}^{pm}(\gamma))$ は、$H(\xi \circ \delta(i + 4)) = Q^{pm}(\gamma\delta)$, $\Delta(\xi \circ \delta(i)) = P(\overline{Q}^{pm}(\gamma\delta))$ を誘導する。

## 5.3 3-primary $k$-stem Groups for $28 \le k \le 35$

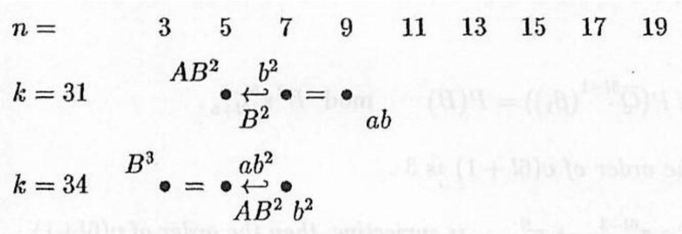
$28 \le k \le 35$ に対する computing diagram mod $A$ を考える。このとき、$w = IP(i) \in Q^3_{3+28}$ 以外の invariant は stable type である。

**Th 5.2** $28 \le k \le 35$, $n: odd$ に対する mod $A$ $k$-stem groups $\pi^n_{n+k}$ は、以下の3つの部分の直和として得られる。

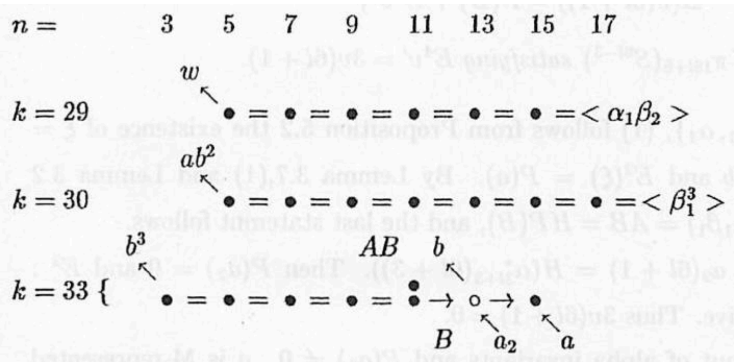
(1) Removable simple unstable elements.




(2) Removable short range unstable elements.




(3) Remaining part.




$\pi^{13}_{13+33} \simeq \mathbb{Z}_9$ の生成元を $v$ とすると、up to non-zero coefficient で、

$$H(v) = b,\ 3v = \alpha_1\beta_1^3(13),\ \Delta v = \alpha_1\beta_1^3(11) \pm P(B).$$

Proof. (1) の最初の2つは Prop 5.1 から成り立つ。$\xi = \alpha_1(3) \circ \alpha_1\beta_2(6)$ とすると、$H\xi = ab_2$ である。$\alpha_1(5) \circ \alpha_1(8) = 0$ であるから、$E^2\xi = 0$, $P(b_2) = \xi$ である。Th 2.4 により、$S^3$ において、$\xi \in \{\alpha_1, 3, \alpha_1\beta_2\}$ に対して、$H(-\xi) = AB_2$ である。$S^5$ において、$\xi \in \alpha_2\beta_2 \equiv -\alpha_1\{\alpha_1, 3, \beta_2\} \equiv -\alpha_1\beta_1^3 \equiv 0$ である。よって、$P(B_2) \equiv \xi$ mod $\alpha_1\beta_1^3$ である。$k = 21, 24$ の (2) に、右から $\beta_1$ を合成することにより (2) が証明される。

(3) の $k = 29, 30$ の結果はただ一つの解である。$k = 33$ の場合について、次の一般的な結果を示す必要がある。

**Lem 5.1** $l \ge 1$ とする。このとき up to non-zero ceofficients で次が成り立つ。

(1) $v(6l + 1) \in \pi^{6l+1}_{18l+10}$ が存在して、次を満たす。

$H(v(6l + 1)) = Q^{3l}(\beta_1) = b$, and $v(6l + 3) = P(Q^{3l+2}(\alpha_1)) = P(a)$.

ここで、$v(6l + 3) = E^2v(6l + 1)$. このように、$v(6l + 3)$ の位数は 3 であり、$E^2v(6l + 3) = 0$ である。

さらに、$\Delta(v(6l + 1)) \equiv P(\overline{Q}^{3l-1}(\beta_1)) = P(B)\ \ mod\ E^2\pi^{6l-3}_{18l+6}$.

(2) $l \not\equiv 2\ (mod\ 3)$ のとき、$v(6l + 1)$ の位数は3である。

(3) $l \equiv 2\ (mod\ 3)$ 、$E^\infty: \pi^{6l-3}_{18l+7} \to \pi^S_{12l+10}$ が全射ならば、$v(6l + 1)$ の位数は9であり、

$\Delta(v(6l + 1)) = P(B) + E^2v'$,

ここで、$v' \in \pi_{18l+6}(S^{6l-3})$ は $E^4v' = 3v(6l + 1)$ である。

**Prop 5.1** 各 invariant $x \in Q^{2m+1}_{6m+3+k}$ の像 $d_1(x) = HP(x) \in Q^{2m-1}_{6m+k}$ は、符号を除いて、下記で与えられる。

| $k$ | 10 | 11 | 20 | 21 | 26 | 27 | 36 | 37 | 37 | 38 | 39 | 43 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $b$ | $B$ | $b^2$ | $B^2$ | $b_2$ | $B_2$ | $bb_2$ | $BB_2$ | $e'$ | $E'$ | $E_1$ | $E_2$ |
| $m \equiv 0$ | $ab$ | 0 | $ab^2$ | 0 | $ab_2$ | $b^3$ | $abb_2$ | 0 | $b^4$ | 0 | $e_2$ | 0 |
| $m \equiv 1$ | $ab$ | $AB$ | $ab^2$ | $AB^2$ | $ab_2$ | $AB_2$ | $abb_2$ | $ABB_2$ | $b^4$ | $B^4$ | 0 | $AE_2$ |
| $m \equiv 2$ | 0 | $AB$ | 0 | $AB^2$ | 0 | $AB_2$ | 0 | $ABB_2$ | 0 | $B^4$ | $e_2$ | $AE_2$ |

| $k$ | 46 | 47 | 47 | 48 | 52 | 53 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $b^2b_2$ | $B^2B_2$ | $be'$ | $BE'$ | $b_2^2$ | $B_2^2$ |
| $m \equiv 0$ | $ab^2b_2$ | 0 | $b^5$ | 0 | $ab_2^2$ | 0 |
| $m \equiv 1$ | $ab^2b_2$ | $AB^2B_2$ | $b^5$ | $B^5$ | $ab_2^2$ | $AB_2^2$ |
| $m \equiv 2$ | 0 | $AB^2B_2$ | 0 | $B^5$ | 0 | $AB_2^2$ |

残りの invariants に対して、$d_1(x) = 0$ である。

(5.1.8) $x = ab, ab^2, ab_2, b^3, e_1, abb_2, b^4, e_2, ab_2^{\ 2}, b^5, ab_2^{\ 2}$,

(5.1.9) $x = AB, AB^2, AB_2, B^3, ABB_2, B^4, AB^2B_2, B^5, AB_2^{\ 2}$.

**Th 2.4** 次の列は $i + 1 \ne 3$ のとき、mod $p$ で完全である。

$$\cdots \xrightarrow{H_p} \pi_{i+2}(S^{2p+1}) \xrightarrow{\Delta} \pi_i(S^{2p-1}) \xrightarrow{G} \pi_{i+1}(S^3) \xrightarrow{H_p} \pi_{i+1}(S^{2p+1}) \xrightarrow{\Delta} \cdots$$

ここで、$G$ は $G(\xi) = \alpha_1(3) \circ E(\xi)$ for $\xi \in {}_p\pi_i(S^{2p-1})$ で与えられ、Hopf invariant $H_p$ は、次を満たす。

$H_p\{\alpha_1(3), p\iota_{2p}, E(\xi)\}_1 = -E^2(\xi)$ for $\xi \in \pi_i(S^{2p-1})$ with $p \cdot \xi = 0$.

Proof. $\beta_1 = \{\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1\}$ なので、Prop 5.2 により $H(\xi) = b,\ E^2\xi = P(a)$ を満たす $\xi = v(6l+1)$ が存在することから (1) が成り立つ。Lem 3.7 (1) と Lem 3.2 により $H\Delta(v(6l+1)) = \overline{Q}^{3l+1}(\alpha_1\beta_1) = AB = HP(B)$ であり、最後の結果が成り立つ。

(2) の場合、$a_2 = a_2(6l+1) = H(\alpha^*_{3l+3}(6l+3))$ である。よって、$P(a_2) = 0$ であり、$E^2 : \pi^{6l+1}_{18l+10} \to \pi^{6l+3}_{18l+12}$ は単射である。よって $3v(6l+1) = 0$ である。

(3) の場合、$a_2$ は alpha invariant ではなく $P(a_2) \neq 0$ である。$a$ は $\alpha i$ による M-represented であり、$a_2$ は $\alpha^2 i$ による M-represented である。よって Lem 3.4 により $P(a_2) = 3v(6l+1)$ である。ゆえに $v(6l+1)$ の位数は 9 である。

$\Delta(v(6l+1)) = P(B) + E^2 v'$ とする。Lem 2.1 により、$3v(6l+1) = E^2\Delta v(6l+1) = E^2 P(B) + E^4 v' = E^4 v'$ である。
■

## 5.4 3-primary $k$-stem Groups for $36 \leq k \leq 45$

33-stem groups の中で、unstable elements の long series があった。

(5.4.1) $\alpha_1\beta_1^3(3) \overset{E^2}{\mapsto} \alpha_1\beta_1^3(5) \overset{E^2}{\mapsto} \alpha_1\beta_1^3(7) \overset{E^2}{\mapsto} \alpha_1\beta_1^3(9) \overset{E^2}{\mapsto} \alpha_1\beta_1^3(11) \overset{E^2}{\mapsto} \alpha_1\beta_1^3(13) \overset{E^2}{\mapsto} 0$

ここで、$\pi^{13}_{43}$ の stable limit が $\beta_1^3$ となる生成元 $\beta_1^3(13)$ に対して $\alpha_1\beta_1^3(3) = \alpha_1(3) \circ \beta_1^3(13)$ である。

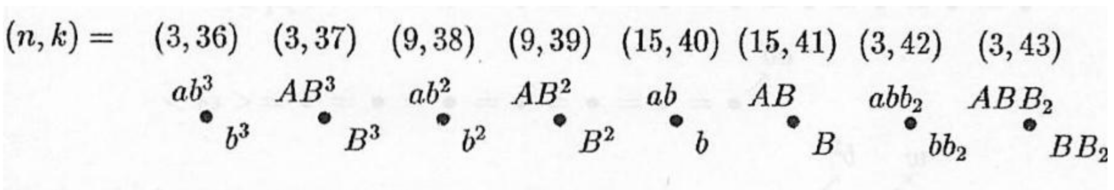
よって、$m = 1, 2$ に対して、次の not stable type invariants を得る。

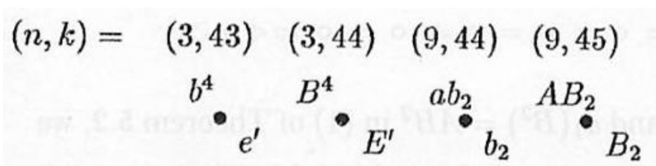
$$ab^3 = I(\alpha_1\beta_1^3(6m-1)),\ AB^3 \text{ with } J(AB^3)\alpha_1\beta_1^3(6m+1).$$

$36 \leq k \leq 45$ に対して、not stable type の invariants は $w \in Q^5_{5+42}$ と、上の $ab^3, AB^3$ である。

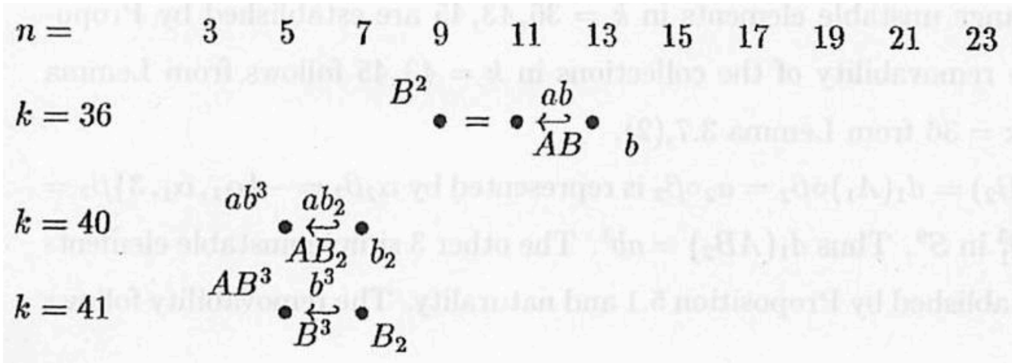
**Th 5.3** $36 \leq k \leq 45,\ n: odd$ に対する mod $A$ $k$-stem groups $\pi^n_{n+k}$ は、以下の3つの部分の直和として得られる。

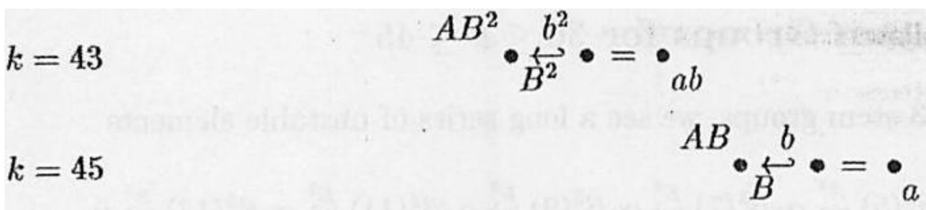
(1) Removable simple unstable elements.




(2) Removable short range unstable elements.




**Prop 5.2** $m \equiv 0\ (mod\ 3)$ とする。(5.1.10) の元 に対して、$x = Q^{m+2}(\gamma),\ y = Q^m(\delta)$ とする。このとき、元 $\xi \in \pi_i(S^{2m+1})$ が存在して次を満たす。$H(\xi) = y,\ E^2\xi = P(x)$.

**Lem 3.7** $\xi \in \pi_{i+4}(S^{2pm+1})$, $\gamma \in \pi^S_s$, $\delta \in \pi^S_t$ に対して、up to non-zero coefficients で次の関係が成り立つ。

(1) $H(\xi) = Q^{pm}(\gamma)$ は、$H(\Delta(\xi)) = \overline{Q}^{pm-1}(\alpha\gamma) = HP(\overline{Q}^{pm}(\xi))$ を誘導する。

(2) $H(\xi) = Q^{pm}(\gamma)$, $\Delta(\xi) = P(\overline{Q}^{pm}(\gamma))$ は、$H(\xi \circ \delta(i+4)) = Q^{pm}(\gamma\delta)$, $\Delta(\xi \circ \delta(i)) = P(\overline{Q}^{pm}(\gamma\delta))$ を誘導する。

**Lem 3.2** $\xi \in \pi^S_k$ に対して、$u(\xi) < 2p(m+1) - 5$, $p\xi = 0$ ならば、$d_1(\overline{Q}^{m+1}(\xi)) = HP(\overline{Q}^{m+1}(\xi)) = m \cdot \overline{Q}^m(\alpha_1\xi)$.

ここで、$u(\xi) \leq 4p - 3$ の $\xi$ に対して、$m = 1$ のときに成り立つ。

**Lem 3.4** $x \in \pi_{i+2}(Q_2^{2m+1})$ が $E^4(\gamma)$ による M-represented であり、$h'_{m*}(\gamma) = 0$ ならば、元 $\xi \in \pi_i(S^{2m-1})$ が存在し、$\alpha(2pm-2) \circ E^2\gamma$ による M-represented $y \in \pi_i(Q_2^{2m-1})$ に対して、$p \cdot \xi = P(y)$, $E^2\xi = P(x)$.

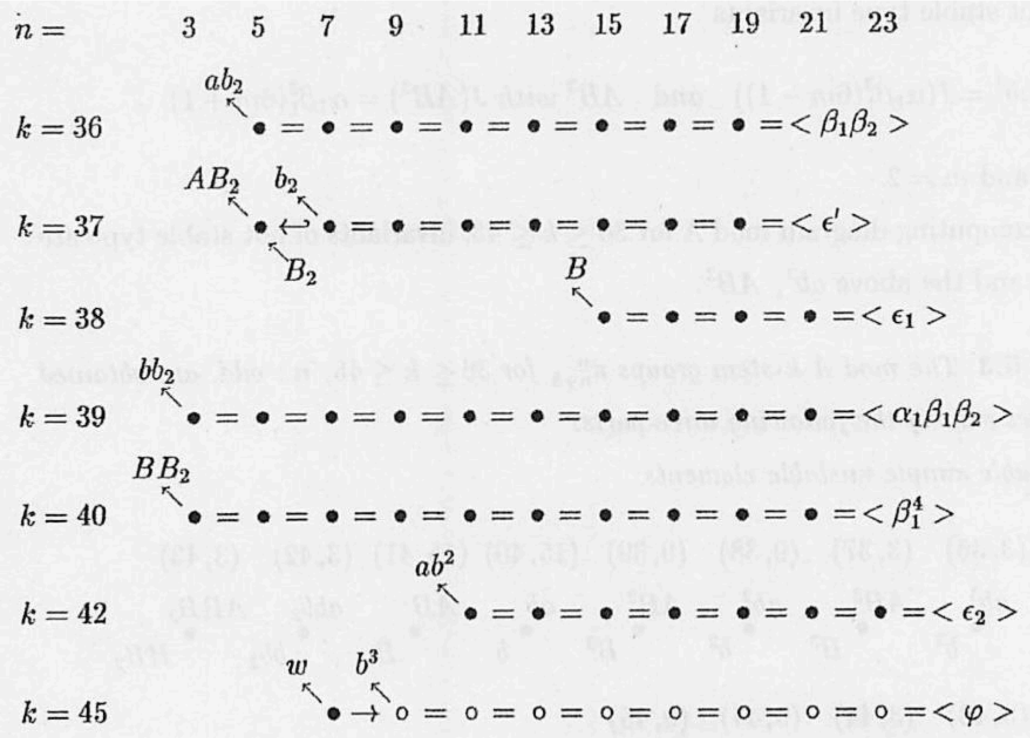
**Lemma 2.1** 次の2つの合成は、どちらも $p$ 倍する写像である。

$\Delta \circ E^2 :\ {}_p\pi_i(S^{2pm-1}) \to {}_p\pi_{i+2}(S^{2pm+1}) \to {}_p\pi_i(S^{2pm-1})$,

$E^2 \circ \Delta :\ {}_p\pi_{i+2}(S^{2pm+1}) \to {}_p\pi_i(S^{2pm-1}) \to {}_p\pi_{i+2}(S^{2pm+1})$.

(5.1.5) $\cdots \xrightarrow{J} \pi^{6m+1}_{2m+1+k} \xrightarrow{\Delta} \pi^{6m-1}_{2m-1+k} \xrightarrow{I} \overline{Q}^{2m-1}_{2m-1+k} \xrightarrow{J} \pi^{6m+1}_{2m+k} \xrightarrow{\Delta} \pi^{6m-1}_{2m-2+k} \xrightarrow{I} \cdots$ .

(3) Remaining part.




Proof. (1) Th 5.2 (1) の関係式 $d_1(b^2) = ab^2$, $d_1(B^2) = AB^2$ から、$\beta_1$ を右から合成することにより、$d_1(b^3) = ab^3$, $d_1(B^3) = AB^3$ を得る。残りの $d_1$ についての関係式は Prop 5.1 から成り立つ。

(2) $k = 36, 43, 45$ における short range unstable elements は Prop 5.2, 5.3 によって構成される。

$k = 43, 45$ における collections の removability は Lem 3.7 (1) から成り立ち、$k = 36$ におけるものは Lem 3.7 (2) から成り立つ。

$k = 40$ において、$d_1(AB_2) = d_1(A_1) \circ \beta_2 = \alpha_2 \circ \beta_2$ は、$S^9$ の中で $\alpha_2\beta_2 = -\{\alpha_1, \alpha_1, 3\}\beta_2 = \alpha_1\{\alpha_1, 3, \beta_2\} = \alpha_1\beta_1^3$ によって表わされる。よって $d_1(AB_2) = ab^3$ である。$k = 40, 41$ における位数 3 の simple unstable elements は、Prop 5.1 と naturality によって構成される。removability は Lem 2.4 から成り立つ。

(3) $d_1(B_2) = AB_2$ は Prop 5.1 から成り立つ。よって (3) の結果は EHP-sequence の完全性により一意的に定まる。

$k = 37$ における removability は Lem 2.4 から成り立つ。■

Th 5.3 (3) から次を得る。

(5.4.2) $u(\varepsilon') = 7,\ u(\varepsilon_1) = 15,\ u(\varepsilon_2) = 11,\ u(\varphi) = 9,$

(5.4.3) $u(\beta_1\beta_2) = 5,\ u(\alpha_1\beta_1\beta_2) = 3,\ u(\beta_1^4) = 3,\ u(3\varphi) = u(\alpha_1\varepsilon_2) = 7$.

ここで、Oka の $\partial_\alpha$ の応用について述べる。

Th 5.1 において、$k = 21$ の中の short range unstable elements に $\partial_\alpha$ を適用すると、24-stem groups の元を得る。

$$P(a) = E^2v,\ H(v) = b \Rightarrow P(AB) = E^2(\partial_\alpha(v)),\ H(\partial_\alpha(v)) = B^2.$$

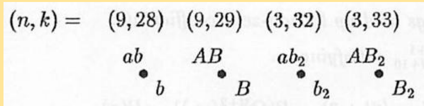
$k = 31, 33$ に対して、$k$-stem gropus から $(k + 3)$-stem groups までの間で類似の状況が見られる。しかしながら、$m = 0$ の場合が除外されているため、$\pi^7_{7+k}$ の元に対して Lem 3.12, 3.13 を適用することができない。$m = 0$ の場合、(3.5.5) の中の $\beta_{(1)}$ は存在しないが、Th 3.5 はなお成立する。そこで次を用意する。

**Lem 5.2** $\xi \in \pi_{i+4}(S^{2p+1})$ Hopf invariant $H(\xi)$ は $\gamma \in \pi_{i+1}(Y^{2p^2-2})$ による M-represented であると仮定する。このとき up to non-zero coefficient で次が成り立つ。

$JH(\partial_\alpha(\xi)) = H_p(\partial\alpha(\xi)) = \overline{\beta}_1 \circ E^2\gamma$,

ここで、$\overline{\beta}_1 : Y^{2p^2} \to S^{2p+1}$ は $\beta_1(2p + 1)$ の extension である。

Th 5.2 (1)




**Prop 5.1** 各 invariant $x \in Q^{2m+1}_{6m+3+k}$ の像 $d_1(x) = HP(x) \in Q^{2m-1}_{6m+k}$ は、符号を除いて、下記で与えられる。

| $k$ | 10 | 11 | 20 | 21 | 26 | 27 | 36 | 37 | 37 | 38 | 39 | 43 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $b$ | $B$ | $b^2$ | $B^2$ | $b_2$ | $B_2$ | $bb_2$ | $BB_2$ | $e'$ | $E'$ | $E_1$ | $E_2$ |
| $m \equiv 0$ | $ab$ | 0 | $ab^2$ | 0 | $ab_2$ | $b^3$ | $abb_2$ | 0 | $b^4$ | 0 | $e_2$ | 0 |
| $m \equiv 1$ | $ab$ | $AB$ | $ab^2$ | $AB^2$ | $ab_2$ | $AB_2$ | $abb_2$ | $ABB_2$ | $b^4$ | $B^4$ | 0 | $AE_2$ |
| $m \equiv 2$ | 0 | $AB$ | 0 | $AB^2$ | 0 | $AB_2$ | 0 | $ABB_2$ | 0 | $B^4$ | $e_2$ | $AE_2$ |

| $k$ | 46 | 47 | 47 | 48 | 52 | 53 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $b^2b_2$ | $B^2B_2$ | $be'$ | $BE'$ | $b_2^2$ | $B_2^2$ |
| $m \equiv 0$ | $ab^2b_2$ | 0 | $b^5$ | 0 | $ab_2^2$ | 0 |
| $m \equiv 1$ | $ab^2b_2$ | $AB^2B_2$ | $b^5$ | $B^5$ | $ab_2^2$ | $AB_2^2$ |
| $m \equiv 2$ | 0 | $AB^2B_2$ | 0 | $B^5$ | 0 | $AB_2^2$ |

**Prop 5.2** $m{\equiv}0\ (mod\ 3)$ とする。(5.1.10) の元 に対して、$x = Q^{m+2}(\gamma),\ y = Q^m(\delta)$ とする。このとき、元 $\xi \in \pi_i(S^{2m+1})$ が存在して次を満たす。$H(\xi) = y,\ E^2\xi = P(x)$.

**Prop 5.3** $m{\equiv}1\ (mod\ 3)$ とする。(5.1.10) の元 に対して、$X = \overline{Q}^{m+2}(\gamma),\ Y = \overline{Q}^m(\delta)$ とする。Lem 3.9 の中での関係 $d_1(X) = HP(X) = 0$ が得られる、例えば stable range の中での計算であると仮定する。このとき、元 $\xi \in \pi_i(S^{2m+1})$ が存在して次を満たす。$H(\xi) = Y,\ E^2\xi = P(X)$.

**Lem 3.7** $\xi \in \pi_{i+4}(S^{2pm+1})$, $\gamma \in \pi^S_s$, $\delta \in \pi^S_t$ に対して、up to non-zero coefficients で次の関係が成り立つ。

(1) $H(\xi) = Q^{pm}(\gamma)$ は、$H(\Delta(\xi)) = \overline{Q}^{pm-1}(\alpha\gamma) = HP(\overline{Q}^{pm}(\xi))$ を誘導する。

(2) $H(\xi) = Q^{pm}(\gamma)$, $\Delta(\xi) = P(\overline{Q}^{pm}(\gamma))$ は、$H(\xi \circ \delta(i + 4)) = Q^{pm}(\gamma\delta)$, $\Delta(\xi \circ \delta(i)) = P(\overline{Q}^{pm}(\gamma\delta))$ を誘導する。

**Lem 2.4** $\xi \in {}_p\pi_i(S^{2p-1})$ に対して、$E^2(\xi) = 0$ ならば、$\xi$ は $\Delta$ の像である。

$m \geq 1$ に対して、特性類 $\alpha_1(2m + 1)$ を持つ sphere-bundle over sphere $S^{2m+1} \xrightarrow{i} B_m(\alpha) \xrightarrow{p} S^{2m+2p-1}$ を考える。この sphere-bundle に関するホモトピー完全列

$\cdots \to \pi_{i+1}(B_m(\alpha)) \xrightarrow{p_*} \pi_{i+1}(S^{2m+2p-1}) \xrightarrow{\partial_\alpha} \pi_i(S^{2m+1}) \xrightarrow{i_*} \pi_i(B_m(\alpha)) \xrightarrow{p_*} \cdots$, の境界準同型 $\partial_\alpha$ を考え、次を得る。

**Prop 3.5** $\gamma \in \pi_{i-1}(S^{2m-1+q})$ に対して、$\partial_\alpha(E^2\gamma) = \alpha_1(2m + 1) \circ E\gamma$.

**Th 3.5** 任意の $\gamma \in \pi_i(S^{2pm+p-1})$ に対して、up to non-zero coefficients で、次の関係が成り立つ。

$J\partial_\alpha I(E^3\gamma) = \beta_1(2p(m + 1) + 1) \circ E^3\gamma$.

境界準同型 $\partial_\alpha : \pi_{i+1}(Q_2^{2m+2p-1}) \to \pi_i(Q_2^{2m+1})$ は、写像 $d_\alpha : \Omega Q_2^{2m+2p-1} \to Q_2^{2m+1}$ により誘導される。Moore space で写像を近似することにより、$m \geq 1$ に対して、次の可換図式を得る。

(3.5.5)
$$\begin{tikzcd}
Y^{2p(m+p)-3} \arrow[r, "\beta_{(1)}"] \arrow[d, "\Omega_0 g_{m+p}"] & Y^{2p(m+1)-2} \arrow[d, "g_{m+1}"] \\
\Omega Q_2^{2m+2p-1} \arrow[r, "d_\alpha"] & Q_2^{2m+1}
\end{tikzcd}$$

ここで、$\beta_{(1)}$ は 次を満たす。(3.5.6) $\pi\beta_{(1)}i = \beta_1(2p(m + 1) - 2)$.

**Lem 3.12** 元 $\xi \in \pi_{i+4}(S^{2m+2p+1})$ の Hopf invariant $H(\xi)$ が $\gamma \in \pi_i(Y^{2p(m+p)-3})$ に対して、$E\gamma$ による M-represented であると仮定する。$m \geq 1$ ならば、Hopf invariant $H(\partial_\alpha(\xi))$ は $\beta_{(1)} \circ \gamma$ による M-represented である。

(3.5.7) $H(\xi) = Q^{m+p}(\gamma)$ は、$H(\partial_\alpha(\xi)) = \overline{Q}^{m+1}(\beta_1\gamma)$ を誘導する。

**Lem 3.13** $x \in \pi_{i+1}(Q_2^{2m+2p-1})$ が $E\gamma$ による M-represented であり、$y \in \pi_i(Q_2^{2m+1})$ は $\beta_{(1)}\gamma$ による represented であるとする。$m \geq 1$ ならば、$P(y) = \partial_\alpha P(x)$ である。

**Th 3.5** 任意の $\gamma \in \pi_i(S^{2pm+p-1})$ に対して、up to non-zero coefficients で、次の関係が成り立つ。

$J\partial_\alpha I(E^3\gamma) = \beta_1(2p(m + 1) + 1) \circ E^3\gamma$.

Proof. $\partial_\alpha$ は $d_\alpha : \Omega S^{2p+1} \to S^3$ により誘導され、$H_p$ は $h_p : \Omega S^3 \to \Omega S^{2p+1}$ により誘導される。このとき、$H_p \partial_\alpha$ は $h_p \circ \Omega d_\alpha : \Omega^2 S^{2p+1} \to \Omega S^{2p+1}$ により誘導され、$S^{2p-1}$ への制限は homotopic to zero である。よって $h_p \circ \Omega d_\alpha$ は次の写像を誘導する。

$h' : Q_2^{2p-1} = \Omega(\Omega^2 S^{2p+1}, S^{2p-1}) \to \Omega^2 S^{2p+1}$.

$\bar{\beta}_1 : Y^{2p^2} \to S^{2p+1}$ を $H' \circ g_{2p-1} : Y^{2p^2-2} \to Q_2^{2p-1} \to \Omega^2 S^{2p+1}$ の adjoint とすると、Th 3.5 は $\bar{\beta}_1 | S^{2p^2-1} = \beta_1(2p+1)$ であることを示す。よって lemma が成り立つ。■

例えば、$\varepsilon'(7) \in \pi^7_{7+37}$, $H(\varepsilon'(7)) = b_2$ に Lem 5.2 を適用し、$\beta_1^4(3) = \partial_\alpha(\varepsilon'(7))$, $\beta_1^4(5) = E^2(\beta_1^4(3))$ と置く。よって、次を得る。

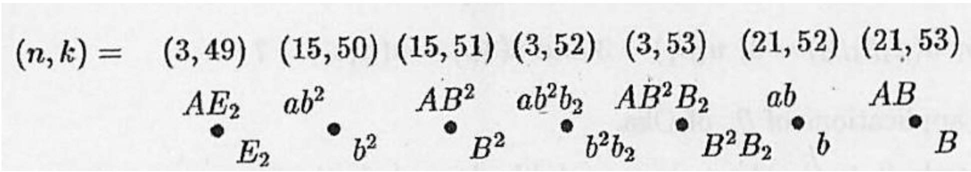
(5.4.4) $\beta_1^4(5) = \alpha_1(5) \circ \varepsilon'(8) = \beta_1(5) \circ \beta_1^3(15) \pm P(AB_2)$.

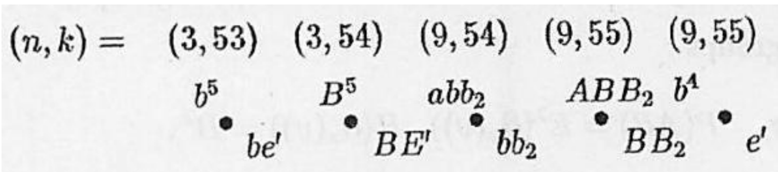
## 5.5 3-primary $k$-stem Groups for $46 \le k \le 55$

$46 \le k \le 55$ に対して、computing diagram の中の invariants は、全て stable type である。

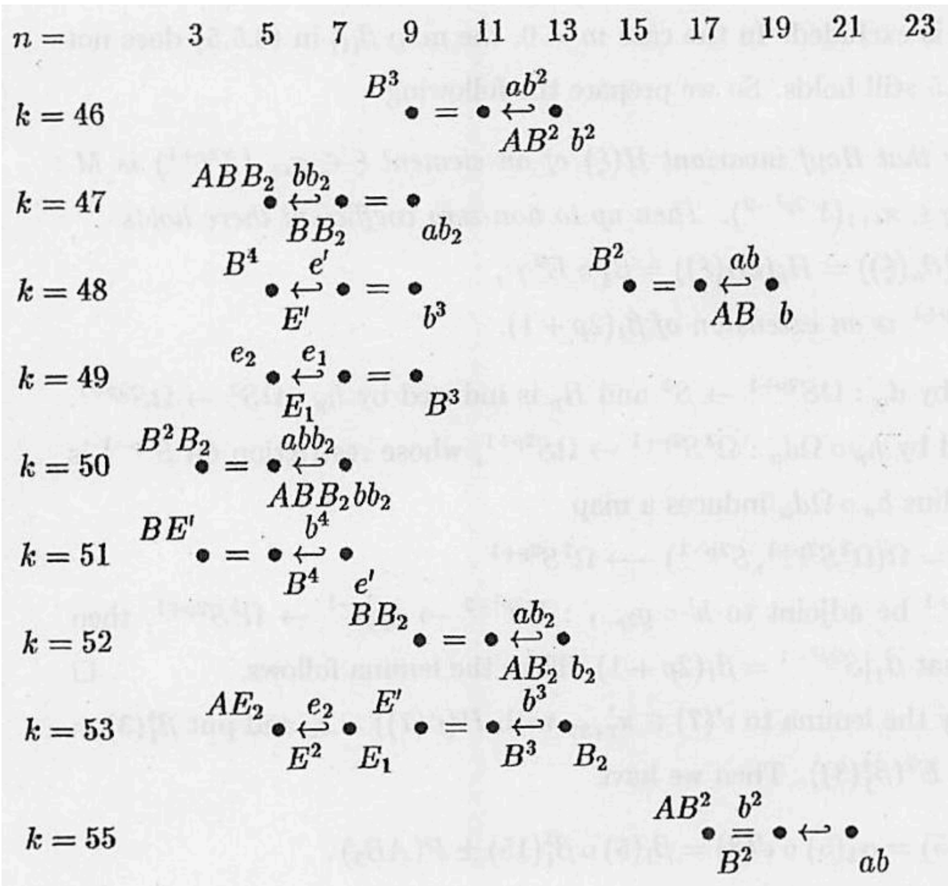
**Th 5.4** $46 \le k \le 55$, $n: odd$ に対する mod $A$ $k$-stem groups $\pi^n_{n+k}$ は、以下の3つの部分の直和として得られる。

(1) Removable simple unstable elements.




(2) Removable short range unstable elements.




**Th 3.5** 任意の $\gamma \in \pi_i(S^{2pm+p-1})$ に対して、up to non-zero coefficients で、次の関係が成り立つ。

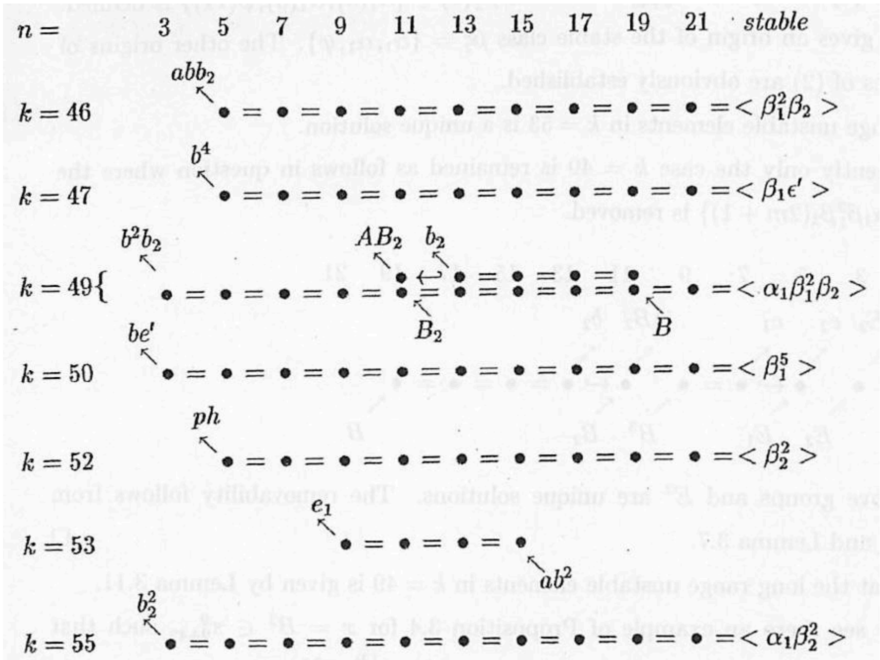
$J\partial_\alpha I(E^3\gamma) = \beta_1(2p(m+1)+1) \circ E^3\gamma$.

**Lem 5.2** $\xi \in \pi_{i+4}(S^{2p+1})$ Hopf invariant $H(\xi)$ は $\gamma \in \pi_{i+1}(Y^{2p^2-2})$ による M-represented であると仮定する。このとき up to non-zero coefficient で次が成り立つ。

$JH(\partial_\alpha(\xi)) = H_p(\partial\alpha(\xi)) = \bar{\beta}_1 \circ E^2\gamma$.

ここで、$\bar{\beta}_1 : Y^{2p^2} \to S^{2p+1}$ は $\beta_1(2p+1)$ の extension である。

(3) Remaining part.




Proof. (1) $u(E_2) = 11$ で $E_2$ は M-represented ではないので、最初の関係式は Prop 5.1 または Lem 3.2 によっては成立しない。これ以外の simple unstable elements は Prop 5.1 により成立する。

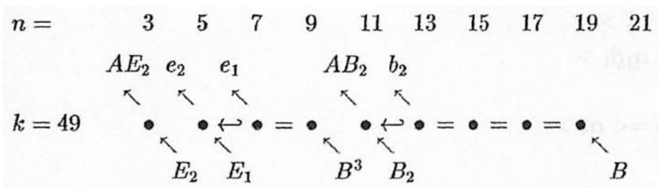
(2) $k = 49, 50, 51$ の場合以外に、short range unstable elements と、それらの removability は Prop 5.2, 5.3, Lem 2.4 により成立する。

$\beta_2$ を右から合成することにより、Th 5.1 の $k = 24$ の場合から $k = 50$ の場合が導かれる。

$k = 51$ の場合を考える。η を $k = 48$ の中の $H(\eta) = e'$, $E^2 = P(B^3)$ を満たす元とする。Lem 5.2 により $\xi = \partial_\alpha(\eta)$ は $H(\xi) = BE'$, $E^2\xi = \alpha_1(5)\circ E\eta$ を満たす。よって、$E^5\xi = \alpha_1(8)\circ E^4\eta = \alpha_1(8)\circ E^2P(B^3) = 0$ であり、(2.1.2) により $E^4\xi = 0$ である。$E^2\xi = 0$ ならば $\xi = \pm P(ph)$ である。しかし、$HP(ph)$ は $i_*\alpha_1\varphi(7) = i_*E^2(\alpha_1(5)\varphi(8)) \in i_*E^2\pi^5_{5+48} = 0$ による purely M-represented である。よって、$E^2\xi \neq 0,\ E^4\xi = 0,\ E^2\xi = \pm P(B^4)$ である。Th 5.3 (2) の $k = 41$ のものから removability が導かれる。$k = 49$ の場合が残されている。

(3) $\xi = \alpha_1(7)\circ\varphi(10) \in \pi^7_{7+48}$ とする。$\xi = E(\alpha_1(6)\circ\varphi(9))$ なので、(2.1.2) と (2) の $k = 48$ から $\xi \in E^2\pi^5_{5+48} = 0$ である。よって、$\beta_2^2(5) \in \{\alpha_1(5), \alpha_1(8), \varphi(11)\}$ が定義される。このとき $\beta_2^2(5)$ は stable class $\beta_2^2 = \{\alpha_1, \alpha_1, \varphi\}$ の origin を与える。(2) の stable class の他の origin は明らかに得られる。

したがって、列 $\{\alpha_1\beta_1^2\beta_2(2m+1)\}$ を除外した場合に、問題として残るのは $k = 49$ の場合のみである。




上の群と $E^2$ は唯一の解である。Lem 2.4 と Lem 3.7 から removability が得られる。■

$k = 49$ の中の long range unstable elements は Lem 3.11 により与えられることに注意する。

また、$\partial(B^3) = i_*(e_1)$ を満たす $x = B^3 \in \pi^9_{9+49}$ の場合が、Prop 3.4 の具体例として現れている。Prop 3.4 によれば、$e_1 \in \{\eta_3, \eta_4^{(2)}, B^3\}$ である。stable range で $\eta_m = \eta_{m+3}$ なので、$m \equiv 0\ (mod\ 3)$ に対して $e_1 \in \{\eta_m, \eta_{m+1}, B^3\}$ が成り立つ。よって次を得る。

**Lem 5.3** $m \equiv 0\ (mod\ 3)$ ならば、次を満たす元 $v \in \pi^{2m+1}_{6m+38}$ が存在する。

$H(v) = e_1, E^2v = P(B^3)$.

**Prop 5.1** 各 invariant $x \in Q^{2m+1}_{6m+3+k}$ の像 $d_1(x) = HP(x) \in Q^{2m-1}_{6m+k}$ は、符号を除いて、下記で与えられる。

| $k$ | 10 | 11 | 20 | 21 | 26 | 27 | 36 | 37 | 37 | 38 | 39 | 43 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $b$ | $B$ | $b^2$ | $B^2$ | $b_2$ | $B_2$ | $bb_2$ | $BB_2$ | $e'$ | $E'$ | $E_1$ | $E_2$ |
| $m\equiv 0$ | $ab$ | 0 | $ab^2$ | 0 | $ab_2$ | $b^3$ | $abb_2$ | 0 | $b^4$ | 0 | $e_2$ | 0 |
| $m\equiv 1$ | $ab$ | $AB$ | $ab^2$ | $AB^2$ | $ab_2$ | $AB_2$ | $abb_2$ | $ABB_2$ | $b^4$ | $B^4$ | 0 | $AE_2$ |
| $m\equiv 2$ | 0 | $AB$ | 0 | $AB^2$ | 0 | $AB_2$ | 0 | $ABB_2$ | 0 | $B^4$ | $e_2$ | $AE_2$ |

| $k$ | 46 | 47 | 47 | 48 | 52 | 53 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $b^2b_2$ | $B^2B_2$ | $be'$ | $BE'$ | $b_2^2$ | $B_2^2$ |
| $m\equiv 0$ | $ab^2b_2$ | 0 | $b^5$ | 0 | $ab_2^2$ | 0 |
| $m\equiv 1$ | $ab^2b_2$ | $AB^2B_2$ | $b^5$ | $B^5$ | $ab_2^2$ | $AB_2^2$ |
| $m\equiv 2$ | 0 | $AB^2B_2$ | 0 | $B^5$ | 0 | $AB_2^2$ |

**Lem 3.2** $\xi \in \pi^S_k$ に対して、$u(\xi) < 2p(m+1) - 5$, $p\xi = 0$ ならば、$d_1(\overline{Q}^{m+1}(\xi)) = HP(\overline{Q}^{m+1}(\xi)) = m\cdot\overline{Q}^m(\alpha_1\xi)$.

ここで、$u(\xi) \le 4p - 3$ の ξ に対して、$m = 1$ のときに成り立つ。

(5.1.10) $\delta \in \{\alpha_1, \alpha_1, \gamma\}$.

**Prop 5.2** $m\equiv 0\ (mod\ 3)$ とする。(5.1.10) の元 に対して、$x = Q^{m+2}(\gamma)$, $y = Q^m(\delta)$ とする。このとき、元 $\xi \in \pi_i(S^{2m+1})$ が存在して次を満たす。$H(\xi) = y$, $E^2\xi = P(x)$.

**Prop 5.3** $m\equiv 1\ (mod\ 3)$ とする。(5.1.10) の元 に対して、$X = \overline{Q}^{m+2}(\gamma)$, $Y = \overline{Q}^m(\delta)$ とする。Lem 3.9 の中での関係 $d_1(X) = HP(X) = 0$ が得られる、例えば stable range の中での計算であると仮定する。このとき、元 $\xi \in \pi_i(S^{2m+1})$ が存在して次を満たす。$H(\xi) = Y$, $E^2\xi = P(X)$.

(5.1.10) の元 γ, δ と、その関係する invariants のリストは下記の通りである。

(5.1.11)

| $\gamma$ | $\alpha_1$ | $\alpha_1\beta_1$ | $\alpha_1\beta_1^2$ | $\alpha_1\beta_2$ | $\beta_1^3$ | $\epsilon_1$ | $\alpha_1\beta_1\beta_2$ | $\beta^4$ | $\varphi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\delta$ | $\beta_1$ | $\beta_1^2$ | $\beta_1^3$ | $\beta_1\beta_2$ | $\epsilon'$ | $\varphi$ | $\beta_1^2\beta_2$ | $\beta_1\epsilon'$ | $\beta_2^2$ |
| $x$ | $a$ | $ab$ | $ab^2$ | $ab_2$ | $b^3$ | $e_1$ | $abb_2$ | $b^4$ | $ph$ |
| $y$ | $b$ | $b^2$ | $b^3$ | $bb_2$ | $e'$ | $ph$ | $b_2^2$ | $be'$ | $b_2^2$ |
| $X$ | | $AB$ | $AB^2$ | $AB_2$ | $B^3$ | | $ABB_2$ | $B^4$ | |
| $Y$ | | $B^2$ | $B^3$ | $BB_2$ | $E'$ | | $B^2B_2$ | $BE'$ | |

**Lem 5.2** $\xi \in \pi_{i+4}(S^{2p+1})$ Hopf invariant $H(\xi)$ は $\gamma \in \pi_{i+1}(Y^{2p^2-2})$ による M-represented であると仮定する。このとき up to non-zero coefficient で次が成り立つ。

$JH(\partial_\alpha(\xi)) = H_p(\partial\alpha(\xi)) = \overline{\beta}_1\circ E^2\gamma$, ここで、$\overline{\beta}_1 : Y^{2p^2} \to S^{2p+1}$ は $\beta_1(2p+1)$ の extension である。

**Lem 2.4** $\xi \in {}_p\pi_i(S^{2p-1})$ に対して、$E^2(\xi) = 0$ ならば、ξ は Δ の像である。

**Lem 3.7** $\xi \in \pi_{i+4}(S^{2pm+1})$, $\gamma \in \pi^S_s$, $\delta \in \pi^S_t$ に対して、up to non-zero coefficients で次の関係が成り立つ。

(1) $H(\xi) = Q^{pm}(\gamma)$ は、$H(\Delta(\xi)) = \overline{Q}^{pm-1}(\alpha\gamma) = HP(\overline{Q}^{pm}(\xi))$ を誘導する。

(2) $H(\xi) = Q^{pm}(\gamma)$, $\Delta(\xi) = P(\overline{Q}^{pm}(\gamma))$ は、$H(\xi\circ\delta(i+4)) = Q^{pm}(\gamma\delta)$, $\Delta(\xi\circ\delta(i)) = P(\overline{Q}^{pm}(\gamma\delta))$ を誘導する。

**Lem 3.11** 整数 $n \not\equiv p - 2\ (mod\ p)$, $n > 1$ に対して、$m = pn$ と仮定する。このとき、元 $v_1(2m+1) \in \pi_{2pm+(2p+1)q-2}(S^{2m+1})$ が存在し、up to non-zero coefficient で、$H(v_1(2m+1)) = \overline{Q}^m(\beta_2)$, $v_1(2m+2p+3) = P(Q^{m+p+1}(\beta_1))$. ここで、$v(2m+2p+3) = E^{2p+2}v(2m+1)$ である。

**Prop 3.4** $\gamma \in \pi_{i-4}(Y^{2m+4p-8})$, $\eta^{(3)}_{m+1*}(\gamma) = 0$ に対して、$x \in \pi_{i+2}(Q_2^{2m+3})$ は M-represented by $E^6\gamma$ と仮定すると、$i_*\{\eta_m, \eta^{(2)}_{m+1}, E^3\gamma\}_1 = \partial(x)$.

$k = 49, 53$ の中の long range unstable elements を以下のように書く。

(5.5.1) $v_1(13) \in \pi^{13}_{13+49}$, $H(v_1(13)) = b_2$, $P(B) = E^6 v_1(13) = v_1(19)$,

(5.5.2) $v_2(9) \in \pi^{9}_{9+53}$, $H(v_2(9)) = e_1$, $P(ab^2) = E^6 v_2(9) = v_2(15)$.

Th 2.2 により、これらの元は、下記の not stable type invariants を誘導する。

(5.5.3) $u_1 = u_1(5) = I(v_1(17)) \in Q^5_{5+59}$, $U_1 = U_1(5) \in Q^5_{5+60}$, $J(U_1) = v_1(19)$,

(5.5.4) $u_2 = u_2(3) = I(v_2(11)) \in Q^3_{3+59}$, $U_2 = U_2(3) \in Q^3_{3+60}$, $J(U_2) = v_2(13)$.

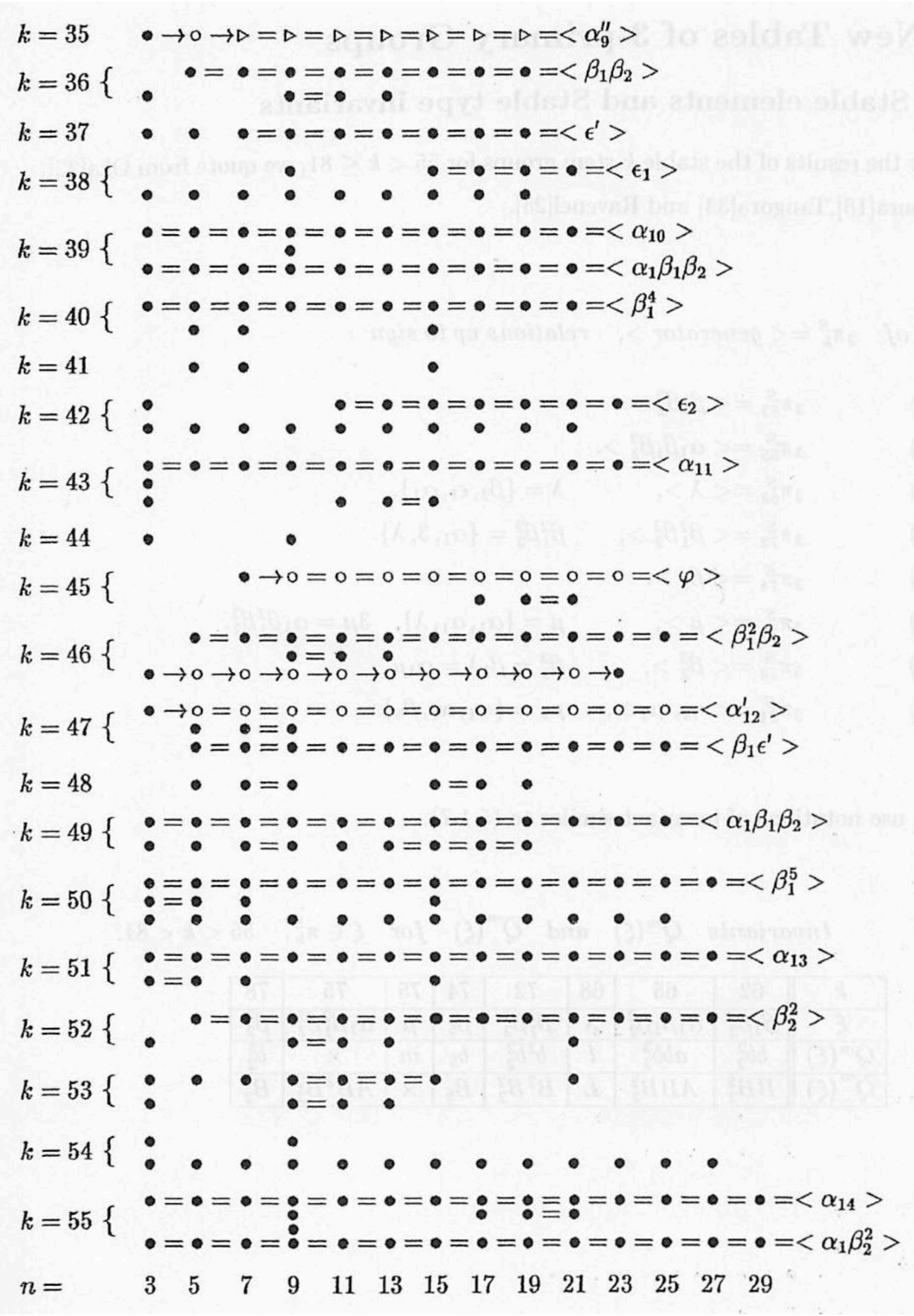
## 5.6 Table of 3-primary $k$-stem Groups for $k \le 55$

結果をまとめると、奇数 $n$ と $k \le 55$ に対して、下記のとおり ${}_3\pi_{n+k}(S^n)$ の table を得る。

| $n =$ | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 | 21 | 23 | 25 | 27 | 29 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k = 3$ | • = | $\langle \alpha_1 \rangle$ | | | | | | | | | | | | |
| $k = 6$ | • | | | | | | | | | | | | | |
| $k = 7$ | • = | • = | $\langle \alpha_2 \rangle$ | | | | | | | | | | | |
| $k = 10$ | • → | ∘ → | • = | $\langle \beta_1 \rangle$ | | | | | | | | | | |
| $k = 11$ | • → | ∘ = | ∘ = | $\langle \alpha'_3 \rangle$ | | | | | | | | | | |
| $k = 13$ | • = | • = | • = | $\langle \alpha_1\beta_1 \rangle$ | | | | | | | | | | |
| $k = 14$ | • | • | • | | | | | | | | | | | |
| $k = 15$ | • = | • = | • = | • = | $\langle \alpha_4 \rangle$ | | | | | | | | | |
| $k = 16$ | • | | | | | | | | | | | | | |
| $k = 17$ | • | | | | | | | | | | | | | |
| $k = 18$ | • | • | • | • | | | | | | | | | | |
| $k = 19$ | • = | • = | • = | • = | • = | $\langle \alpha_5 \rangle$ | | | | | | | | |
| $k = 20$ | | • = | • = | • = | • = | $\langle \beta_1^2 \rangle$ | | | | | | | | |
| $k = 21$ | | • | • = | • | | | | | | | | | | |
| $k = 22$ | • → | ∘ → | ∘ → | ∘ → | • | | | | | | | | | |
| $k = 23$ { | • → | ∘ = | ∘ = | ∘ = | ∘ = | ∘ = | $\langle \alpha'_6 \rangle$ | | | | | | | |
| | • = | • = | • = | • = | • = | • = | $\langle \alpha_1\beta_1^2 \rangle$ | | | | | | | |
| $k = 24$ | • = | • | • | | | | | | | | | | | |
| $k = 26$ { | • | | | • = | • = | • = | • = | $\langle \beta_2 \rangle$ | | | | | | |
| | • | • | • | • | • | • | | | | | | | | |
| $k = 27$ { | • = | • = | • = | • = | • = | • = | • = | $\langle \alpha_7 \rangle$ | | | | | | |
| | • | | | | | | | | | | | | | |
| $k = 28$ | | | | • | | | | | | | | | | |
| $k = 29$ { | | • = | • = | • = | • = | • = | • = | $\langle \alpha_1\beta_2 \rangle$ | | | | | | |
| | | | | • | | | | | | | | | | |
| $k = 30$ { | | • = | • = | • = | • = | • = | • = | $\langle \beta_1^3 \rangle$ | | | | | | |
| | • | • | • | • | • | • | • | | | | | | | |
| $k = 31$ { | • = | • = | • = | • = | • = | • = | • = | • = | $\langle \alpha_8 \rangle$ | | | | | |
| | | • | • = | • | | | | | | | | | | |
| $k = 32$ | • | | | | | | | | | | | | | |
| $k = 33$ { | • | | | | • | | | | | | | | | |
| | • = | • = | • = | • = | • → | ∘ → | • | | | | | | | |
| $k = 34$ { | • = | • | • | | | | | | | | | | | |
| | • → | ∘ → | ▷ → | ▷ → | ▷ → | ▷ → | ∘ → | • | | | | | | |

**Th 2.2** (2.1.9) の mod $p$ fibration は、次の $IJ\Delta$-sequence を誘導し、これは、mod $p$ で完全である。

$\cdots \xrightarrow{\Delta} \pi_{i+2}(S^{2pm-1}) \xrightarrow{I} \pi_i(Q_2^{2m-1}) \xrightarrow{J} \pi_{i+3}(S^{2pm+1}) \xrightarrow{\Delta} \pi_{i+1}(S^{2pm-1}) \xrightarrow{I} \cdots$



k = 35
< α″_9 >
k = 36
< β_1β_2 >
k = 37
< ε′ >
k = 38
< ε_1 >
k = 39
< α_10 >
< α_1β_1β_2 >
k = 40
< β_1^4 >
k = 41
k = 42
< ε_2 >
k = 43
< α_11 >
k = 44
k = 45
< φ >
k = 46
< β_1^2β_2 >
k = 47
< α′_12 >
< β_1ε′ >
k = 48
k = 49
< α_1β_1β_2 >
k = 50
< β_1^5 >
k = 51
< α_13 >
k = 52
< β_2^2 >
k = 53
k = 54
k = 55
< α_14 >
< α_1β_2^2 >
n =
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29

# 6 New Tables of 3-primary Groups

## 6.1 Stable elements and Stable type invariants

$55 < k \le 81$ に対する stable $k$-stem groups の結果について、Oka[22], Nakamura[18], Tangora[33], Ravenel[25] から引用する。

(6.1.1) ${}_3\pi^S_k = \{generator\}$ のリストは下記の通り、関係式は up to sign .

(1) ${}_3\pi^S_{62} = \{\beta_1\beta_2^2\}$.

(2) ${}_3\pi^S_{65} = \{\alpha_1\beta_1\beta_2^2\}$.

(3) ${}_3\pi^S_{68} = \{\lambda\}, \lambda = \{\beta_2, \varepsilon_1, \alpha_1\}$.

(4) ${}_3\pi^S_{72} = \{\beta_1^2\beta_2^2\}$, $\beta_1^2\beta_2^2 = \{\alpha_1, 3, \lambda\}$.

(5) ${}_3\pi^S_{74} = \{\beta_5\}$.

(6) ${}_3\pi^S_{75} = \{\mu\}$, $\mu = \{\alpha_1, \alpha_1, \lambda\}$, $3\mu = \alpha\beta_1^2\beta_2^2$.

(7) ${}_3\pi^S_{78} = \{\beta_2^3\}$, $\beta_2^3 = \beta_1\lambda = \alpha_1\mu$.

(8) ${}_3\pi^S_{81} = \{\gamma_2, \mu_2\}$, $\mu_2 = \{\alpha_1, \alpha_1, \beta_5\}$.

(5.1.7) と同様の invariants の記法を使う。

(6.1.2)

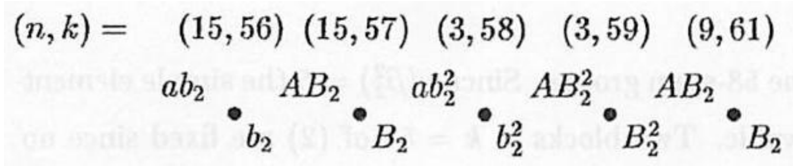
| $k$ | 62 | 65 | 68 | 72 | 74 | 75 | 75 | 78 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\xi$ | $\beta_1\beta_2^2$ | $\alpha_1\beta_1\beta_2^2$ | $\lambda$ | $\beta_1^2\beta_2^2$ | $\beta_5$ | $\mu$ | $\alpha_1\beta_1^2\beta_2^2$ | $\beta_2^3$ |
| $Q^m(\xi)$ | $bb_2^2$ | $abb_2^2$ | $l$ | $b^2b_2^2$ | $b_5$ | $m$ | $\times$ | $b_2^3$ |
| $\overline{Q}^m(\xi)$ | $BB_2^2$ | $ABB_2^2$ | $L$ | $B^2B_2^2$ | $B_5$ | $\times$ | $AB^2B_2^2$ | $B_2^3$ |

## 6.2 3-primary $k$-stem Groups for $56 \le k \le 61$

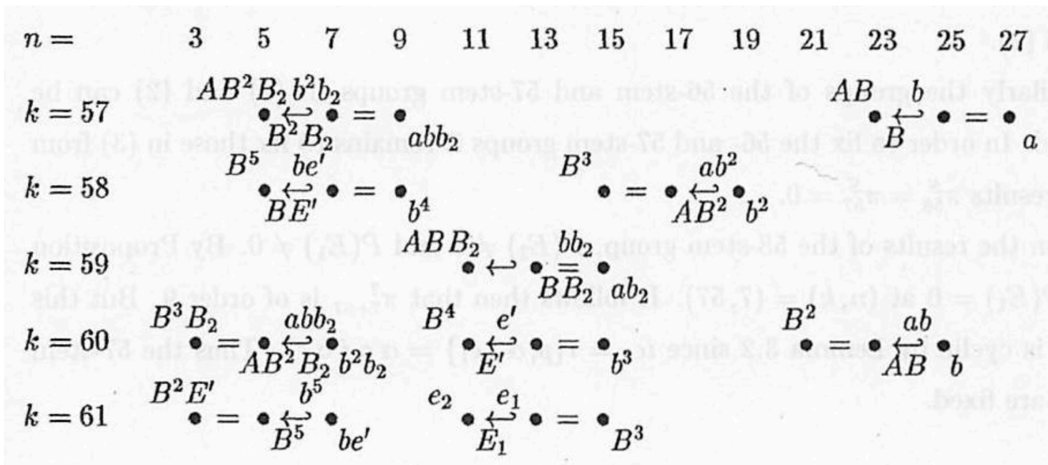
まず、$55 \le k \le 61$ における $Q^n_{n+k}$ 内のすべての invariants、ならびに $k < 59$ における $Q^1_k \simeq {}_3\pi_{3+k}(S^3)$ の場合は、いずれも既に得られた結果によって定まっていることに注意する。

**Th 6.1** $56 \le k \le 61$, $n$: $odd$ に対する mod $A$ $k$-stem groups $\pi^n_{n+k}$ は、以下の3つの部分の直和として得られる。

(1) Removable simple unstable elements.




(2) Removable short range unstable elements.



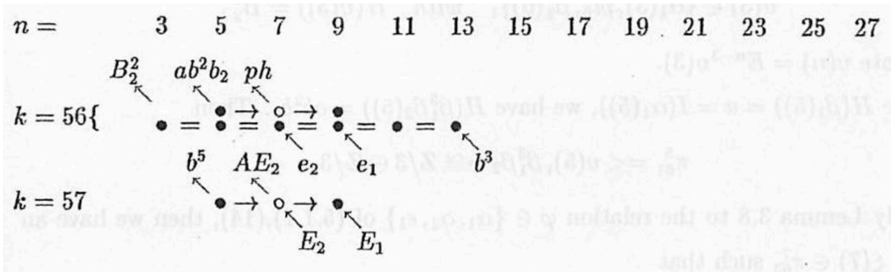

[22] S.Oka, The stable homotopy groups of spheres, I, II, III, Hiroshima Math. J. 1(1971), 305-337, 2(1972), 99-161, 5(1975), 407-438.
[18] O.Nakamura, On the cohomology of the mod p Steenrod algebra, Bull. Sci. Engrg. Div, Univ. Ryukyus(Math.Nat.Sci.) 18(1975), 9-58.
[33] M.C.Tangora, Some homotopy groups mod 3, Conference on homotopy theory Evanston Ill. (1974), 227-245, Notas Mat. Simpos., 1 Soc. Mat. Mexicana, Mexico 1975.
[25] D.C.Ravenel, Complex Bordism and stable Homotpy Groups of Spheres, Pure and Appl. Math. 121 (1986).

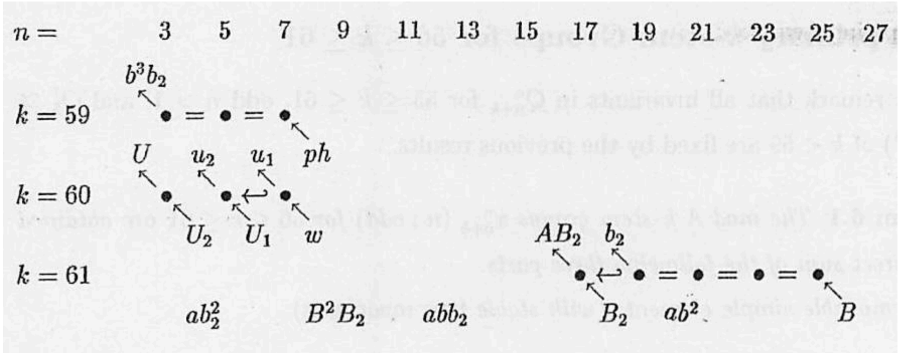
(5.1.7) Invariants $Q^m(\xi)$ and $\overline{Q}^m(\xi)$ for $\xi \in \pi^S_k$, $k \le 55$.

| $k$ | 0 | 3 | 7 | 10 | 13 | 20 | 23 | 26 | 29 | 30 | 36 | 37 | 38 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\xi$ | $\iota$ | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $\beta_1$ | $\alpha_1\beta_1$ | $\beta_1^2$ | $\alpha_1\beta_1^2$ | $\beta_2$ | $\alpha_1\beta_2$ | $\beta_1^3$ | $\beta_1\beta_2$ | $\epsilon'$ | $\epsilon_1$ |
| $Q^m(\xi)$ | $i$ | $a$ | $a_2$ | $b$ | $ab$ | $b^2$ | $ab^2$ | $b_2$ | $ab_2$ | $b^3$ | $bb_2$ | $e'$ | $e_1$ |
| $\overline{Q}^m(\xi)$ | | | | $B$ | $AB$ | $B^2$ | $AB^2$ | $B_2$ | $AB_2$ | $B^3$ | $BB_2$ | $E'$ | $E_1$ |

| $k$ | 39 | 40 | 42 | 45 | 45 | 46 | 47 | 49 | 50 | 52 | 55 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\xi$ | $\alpha_1\beta_1\beta_2$ | $\beta_1^4$ | $\epsilon_2$ | $\varphi$ | $\alpha_1\epsilon_2$ | $\beta_1^2\beta_2$ | $\beta_1\epsilon'$ | $\alpha_1\beta_1^2\beta_2$ | $\beta_1^5$ | $\beta_2^2$ | $\alpha_1\beta_2^2$ |
| $Q^m(\xi)$ | $abb_2$ | $b^4$ | $e_2$ | $ph$ | $\times$ | $b^2b_2$ | $be'$ | $ab^2b_2$ | $b^5$ | $b_2^2$ | $ab_2^2$ |
| $\overline{Q}^m(\xi)$ | $AAB_2$ | $B^4$ | $E_2$ | $\times$ | $AE_2$ | $B^2B_2$ | $BE'$ | $AB^2B_2$ | $B^5$ | $B_2^2$ | $AB_2^2$ |

(3) Remaining part.





Proof. 58-stem groups を求めることから始める。$u(\beta_2^2) = 5$ なので、(1) の中の $(n,k) = (3,58)$ の simple element は removable である。$k = 58$ における 2 つのブロックは、これらのブロックのどんな元も消す可能性のある invariant が他に存在しないため、決定されている。stable group $\pi_{58}^S$ は自明である。よって 58-stem groups は (1) と (2) の対応する群の直和である。
同様に、(1) と (2) の中の 56-stem と 57-stem の群は消される。56-stem と 57-stem の群を決定するために、stable の結果 $\pi_{56}^S = \pi_{57}^S = 0$ から (3) の群を決定することが残っている。
58-stem groups の結果から、$P(E_2) \neq 0, P(E_1) \neq 0$ である。Prop 5.1 により $(n,k) = (7,57)$ において $HP(E_1) = 0$ である。したがって、$\pi_{7+57}^7$ の位数は 9 であることが分かる。しかし、$i\varepsilon_2 = i\{p, \alpha_1, \varepsilon_1\} = \alpha \circ i \circ \varepsilon_1$ であることから、Lem 3.2 により、この群は巡回群である。
Lem 2.4 により、群 $\pi_{59}^3$ は次の元により生成される。$v(3) \in \{\alpha_1(3), p\iota_6, \beta_2^2(6)\}_1$, $H(v(3)) = B_2^2$.
$v(n) = E^{n-3}v(3)$ と書く。$H(\beta_1(5)) = a = I(\alpha_1(5))$ なので、$H(\beta_1^3\beta_2(5)) = ab^2b_2$ を得る。よって、
$\pi_{61}^5 = \{v(5), \beta_1^3\beta_2\} \simeq \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$ . (5.1.1) (14) の関係式 $\varphi \in \{\alpha_1, \alpha_1, \varepsilon_1\}$ を Lem 3.8 に適用することで、次を満たす元 $\xi(7) \in \pi_{63}^7$ を得る。$H(\xi(7)) = ph = I(\varphi(17))$, $P(e_1) = E^2\xi(7) = \xi(9)$ . また、$\alpha i \varepsilon_1 = i_*\{3, \alpha_1, \varepsilon_1\} = \pm i_*\varepsilon_2$ に Lem 3.4 を適用することで次を得る。$3\xi(7) = \pm P(e_2)$ . よって $\xi(7)$ の位数は 9 であり、これは $E^4 \colon \pi_{63}^7 \to \pi_{67}^{11}$ の kernel を生成する。$E^6 \colon \pi_{61}^5 \to \pi_{67}^{11}$ の kernel は $E^2$ によって $3\xi(7)$ に写る位数 3 の元によって生成される。
(3) の $k = 56$ における結果は次の lemma から成立する。
**Lem 6.1** $v(13) = \beta_1^3\beta_2(13)$ up to sign .
Proof. 52-stem groups の中で、$\beta_2^2(9) \neq \beta_2(9) \circ \beta_2(35)$ であるが、$\beta_2^2(13) = \beta_2(13) \circ \beta_2(39)$ であることが分かる。
よって、up to sign で $v(10) \in \{\alpha_1(10), p, \beta_2^2(13)\} \supset \{\alpha_1(10), p, \beta_2(13)\} \circ \beta_2(40) \ni \beta_1^3(10)\beta_2(40) = \beta_1^3\beta_2(10)$ .
これらの差 $v(10) - \beta_1^3\beta_2(10)$ は $\alpha_1(10) \circ \pi_{66}^{13}$ に属している。$\pi_{70}^{17} = 0$ なので、$E(v(13) - \beta_1^3\beta_2(13))$
$\in \alpha_1(14) \circ \pi_{70}^{17} = 0$ であり、(2.1.2) により lemma が証明される。■
up to sign で次が成り立つことに注意する。
(6.2.1) $P(e_2) = v(7) \pm \beta_1^3\beta_2(7)$ .

**Prop 5.1** 各 invariant $x \in Q_{6m+3+k}^{2m+1}$ の像 $d_1(x) = HP(x) \in Q_{6m+k}^{2m-1}$ は、符号を除いて、下記で与えられる。

| $k$ | 10 | 11 | 20 | 21 | 26 | 27 | 36 | 37 | 37 | 38 | 39 | 43 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $b$ | $B$ | $b^2$ | $B^2$ | $b_2$ | $B_2$ | $bb_2$ | $BB_2$ | $e'$ | $E'$ | $E_1$ | $E_2$ |
| $m \equiv 0$ | $ab$ | 0 | $ab^2$ | 0 | $ab_2$ | $b^3$ | $abb_2$ | 0 | $b^4$ | 0 | $e_2$ | 0 |
| $m \equiv 1$ | $ab$ | $AB$ | $ab^2$ | $AB^2$ | $ab_2$ | $AB_2$ | $abb_2$ | $ABB_2$ | $b^4$ | $B^4$ | 0 | $AE_2$ |
| $m \equiv 2$ | 0 | $AB$ | 0 | $AB^2$ | 0 | $AB_2$ | 0 | $ABB_2$ | 0 | $B^4$ | $e_2$ | $AE_2$ |

| $k$ | 46 | 47 | 47 | 48 | 52 | 53 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $b^2b_2$ | $B^2B_2$ | $be'$ | $BE'$ | $b_2^2$ | $B_2^2$ |
| $m \equiv 0$ | $ab^2b_2$ | 0 | $b^5$ | 0 | $ab_2^2$ | 0 |
| $m \equiv 1$ | $ab^2b_2$ | $AB^2B_2$ | $b^5$ | $B^5$ | $ab_2^2$ | $AB_2^2$ |
| $m \equiv 2$ | 0 | $AB^2B_2$ | 0 | $B^5$ | 0 | $AB_2^2$ |

**Lem 3.2** $\xi \in \pi_k^S$ に対して、$u(\xi) < 2p(m+1) - 5$ , $p\xi = 0$ ならば、$d_1(\overline{Q}^{m+1}(\xi)) = PH(\overline{Q}^{m+1}(\xi)) = m \cdot Q^m(\alpha_1\xi)$ .
ここで、$u(\xi) \leq 4p - 3$ の $\xi$ に対して、$m = 1$ のときに成り立つ。
**Lem 2.4** $\xi \in {}_p\pi_i(S^{2p-1})$ に対して、$E^2(\xi) = 0$ ならば、$\xi$ は $\Delta$ の像である。

(5.1.1) (14) ${}_3\pi_{45}^S = \{\varphi\}$, $\varphi = \{\alpha_1, \alpha_1, \varepsilon_1\}$, $p\varphi = \alpha_1\varepsilon_2$.
**Lem 3.8** $m \not\equiv -1, -2 \pmod p$ で、$\gamma \in \pi_{i-4}(S^{2m+4p-9})$ に対して invariant $x \in \pi_{i+2}(Q_2^{2m+3})$ は $E^6(i_*\gamma)$ による M-represented であり、$\alpha_1(2m+4p-9) \circ \gamma = 0$ であるならば、$\xi \in \pi_i(S^{2m+1})$ が存在して、up to non-zero coefficient で、$H(\xi) \in I\{\alpha_1(2pm-1), \alpha_1(2pm+2p-4), E^3\gamma\}$, $E^2(\xi) = P(x)$ .
**Lem 3.4** $x \in \pi_{i+2}(Q_2^{2m+1})$ が $E^4(\gamma)$ による M-represented であり、$h'_{m*}(\gamma) = 0$ ならば、元 $\xi \in \pi_i(S^{2m-1})$ が存在し、$\alpha(2pm-2) \circ E^2\gamma$ による M-represented $y \in \pi_i(Q_2^{2m-1})$ に対して、$p \cdot \xi = P(y)$ , $E^2\xi = P(x)$ .

次に (3) の $k = 59, 60, 61$ の場合を考える。

$\Delta: \pi^7_{63} \to \pi^5_{61}$, $\Delta: \pi^7_{64} \to \pi^5_{62}$ から新しい invariants が得られる。$E^2 \circ \Delta = \times\, p$ であるので、最初の $\Delta$ の image は $\{v(5) \pm \beta_1^3\beta_2(5)\}$ であり、2番目の $\Delta$ は全射である。$H(\beta_1^2\varepsilon(5)) = I(\alpha_1\beta_1\varepsilon'(9)) = I(\beta_1^5)$ なので、最初の $\Delta$ の kernel は $\{v(7), \beta_1^3\beta_2\}$ であり、2番目の kernel は $\{\beta_1^2\varepsilon'(7)\}$ である。よって、次の not stable type invariants を得る。

$b^3b_2 \in Q^1_{59}$, $B^3B_2$, $U \in Q^1_{60}$, $B^2E' \in Q^1_{61}$,

ここで、$b^3b_2 = I'\beta_1^3\beta_2(5)$, $J(B^3B_2) = \beta_1^3\beta_2(7)$, $J(U) = v(7)$, $J(B^2E') = \beta_1^2\varepsilon'(7)$ である。

(2) の $k = 60, 61$ における最初の short range unstable elements は、Th 5.4 (2) の $k = 50, 51$ における元にそれぞれ右から $\beta_1$ を合成することによって得られる。(2) の $k = 60, 61$ の2番目の short range unstable elements は、それぞれ Lem 3.8 と Lem 5.2 によって得られる。

よって (3) の $k = 59, 60, 61$ については、EHP-sequence により成立し、これによって定理の証明が完成する。■

上の証明の中で次の関係式が得られた。

**Prop 6.1** up to sign で、下記の関係式が成り立つ。

(1) $H(v(3)) = B_2^2$, $H(\beta_1^3\beta_2(5)) = ab^2b_2$, $H(\xi(7)) = ph$,

$3\xi(7) = P(e_2) = v(7) \pm \beta_1^3\beta_2(7)$, $\xi(9) = P(e_1)$, $P(b^3) = v(13) = \pm\beta_1^3\beta_2(13)$.

(2) $H(\xi'(7)) = AE_2$ を満たす $\xi'(7) \in \pi^7_{64}$ が存在し、

$H(\beta_1^2\varepsilon'(5)) = b^5$, $3\xi'(7) = \beta_1^2\varepsilon'(7) = P(E_2)$, $\xi'(9) = P(E_1)$.

$H(\xi(7)) = ph$ に Lem 3.5 を適用すると、Prop 6.1 (1) は $H(\beta_1^3(5)) = ab^2b_2$ が $\alpha i(10) \circ \varphi(13) \in \{3\iota_9, \alpha_1(9), \varphi(12)\}$ による M-represented であることを示す。

同様に、$H(\xi'(7)) = AE_2$ は $H(\beta_1^2\varepsilon'(5)) = b^5$ は $\alpha(10) \circ \widetilde{\alpha_1\varepsilon_2}$ による M-represented である。ここで、$\widetilde{\alpha_1\varepsilon_2} \in \pi_{69}(Y^{14})$ は $\alpha_1\varepsilon_2(13) = 3\varphi(13)$ の coextension である。

これらは、以下の通り stable class による represented である。

**Prop 6.2** up to sign で下記の関係式が成り立つ。

(1) $\alpha_1\beta_1^2\beta_2 = \{3, \alpha_1, \varphi\}$.

(2) $i_*\beta_1^5 = \{\alpha i, 3, \alpha_1\varepsilon_2\}$ i.e. $\beta_1^5 \in \{3, \alpha_1, 3, \alpha_1\varepsilon_2\}$.

### 6.3 3-primary $k$-stem Groups for $62 \le k \le 70$

$62 \le k \le 71$ に対して、$Q^n_{n+k}$ の中の invariants は、$(n, k) = (3, 62), (3, 63)$ における simple elements に関連する4つの invariants を除いて stable type である。

**Th 6.2** $62 \le k \le 70$, $n$: $odd$ に対する mod $A$ $k$-stem groups $\pi^n_{n+k}$ は、以下の3つの部分の直和として得られる。

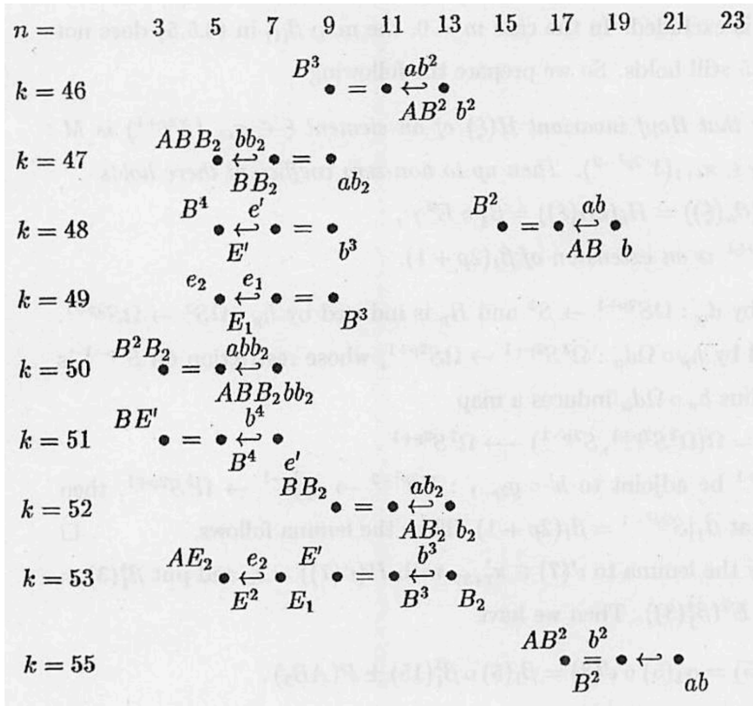
(1) Removable simple unstable elements.

| $(n,k) =$ | $(3,62)$ | $(21,62)$ | $(3,63)$ | $(21,63)$ | $(9,64)$ | $(27,64)$ | $(9,65)$ | $(9,65)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $ab^3b_2$ | $ab^2$ | $AB^3B_2$ | $AB^2$ | $ab^2b_2$ | $ab$ | $b^5$ | $AB^2B_2$ |
| | $b^3b_2$ | $b^2$ | $B^3B_2$ | $B^2$ | $b^2b_2$ | $b$ | $be'$ | $B^2B_2$ |

| $(n,k) =$ | $(27,65)$ | $(9,66)$ | $(15,66)$ | $(15,67)$ | $(15,67)$ | $(3,68)$ | $(15,68)$ | $(21,68)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $AB$ | $B^5$ | $abb_2$ | $ABB_2$ | $b^4$ | $abb_2^2$ | $B^4$ | $ab_2$ |
| | $B$ | $BE'$ | $bb_2$ | $BB_2$ | $e'$ | $bb_2^2$ | $E'$ | $b_2$ |

| $(n,k) =$ | $(3,69)$ | $(21,69)$ | $(9,70)$ |
|---|---|---|---|
| | $ABB_2^2$ | $AB_2$ | $ab_2^2$ |
| | $BB_2^2$ | $B_2$ | $b_2^2$ |

Th 5.4 (2)




**Lem 3.8** $m \not\equiv -1, -2\ (mod\ p)$ で、$\gamma \in \pi_{i-4}(S^{2m+4p-9})$ に対して invariant $x \in \pi_{i+2}(Q_2^{2m+3})$ は $E^6(i_*\gamma)$ による M-represented であり、$\alpha_1(2m+4p-9) \circ \gamma = 0$ であるならば、$\xi \in \pi_i(S^{2m+1})$ が存在して、up to non-zero coefficient で、$H(\xi) \in I\{\alpha_1(2pm-1), \alpha_1(2pm+2p-4), E^3\gamma\}$, $E^2(\xi) = P(x)$.

**Lem 5.2** $\xi \in \pi_{i+4}(S^{2p+1})$ Hopf invariant $H(\xi)$ は $\gamma \in \pi_{i+1}(Y^{2p^2-2})$ による M-represented であると仮定する。このとき up to non-zero coefficient で次が成り立つ。

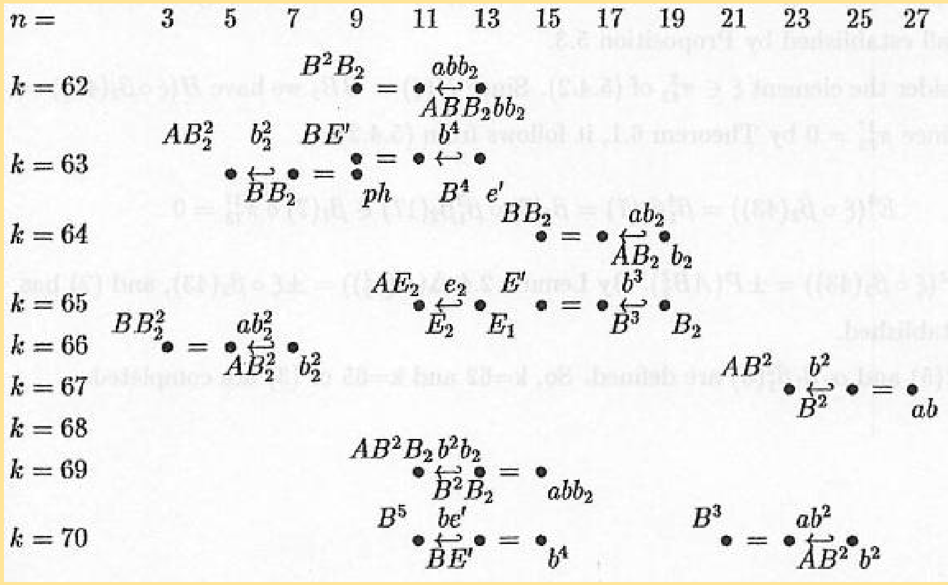
$JH(\partial_\alpha(\xi)) = H_p(\partial\alpha(\xi)) = \bar{\beta}_1 \circ E^2\gamma$, ここで、$\bar{\beta}_1: Y^{2p^2} \to S^{2p+1}$ は $\beta_1(2p+1)$ の extension である。

**Lem 3.5** $\xi \in \pi_{i+5}(S^{2m+3})$ の Hopf invariant $H(\xi)$ が $E^4(\gamma)$ による M-represented であり、$h'_{m*}(\gamma) = 0$ ならば、元 $\eta \in \pi_{i+3}(S^{2m+1})$ が存在し、$p \cdot \xi = E^2\eta$ であり、$H(\eta)$ は $\alpha(2pm-2) \circ E^2\gamma$ による M-represented である。

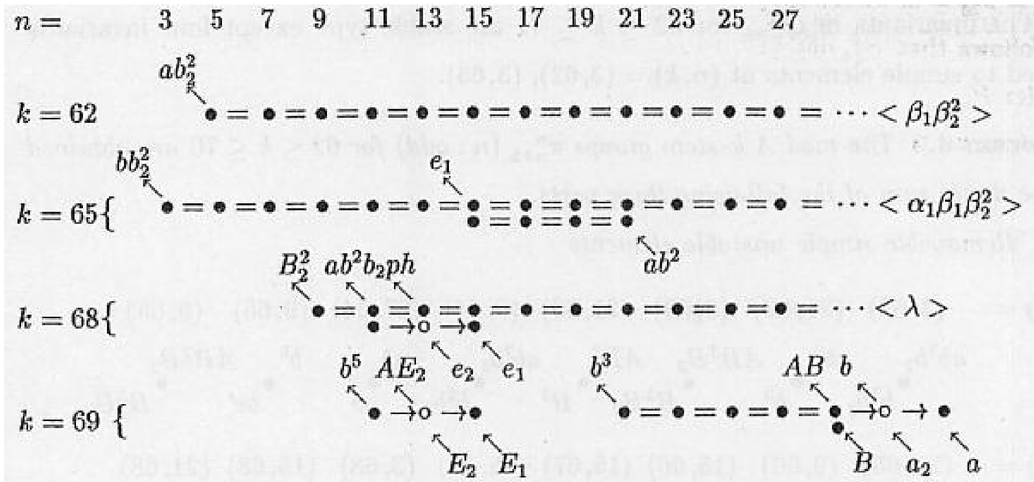
**Th 6.1** (1) Removable simple unstable elements.

| $(n,k) =$ | $(15,56)$ | $(15,57)$ | $(3,58)$ | $(3,59)$ | $(9,61)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $ab_2$ | $AB_2$ | $ab_2^2$ | $AB_2^2$ | $AB_2$ |
| | $b_2$ | $B_2$ | $b_2^2$ | $B_2^2$ | $B_2$ |

(2) Removable short range unstable elements.



(3) Remaining part.



Proof. $\beta_1^4 = \alpha_1\varepsilon'$ であるため、$b^4 = ae'$, $b^5 = abe'$ とみなすことができる。(1) の全てのコレクションは $\{x, P(x), HP(x) = \pm\, ax\}$, $P(x) \in \pi_*(S^{6k+3})$ の形をしている。$(n,k) = (3,62), (3,63)$ の場合のコレクションは、Th 5.4 (1) の $(n,k) = (3,52), (3,53)$ における対応するコレクションから $\beta_1$ を合成することにより得られる。(1) の中の他のコレクションはまた Prop 5.2 により simple で removable である。

(2) の $k = 66$ の中の short range collection を除いて、他の short range collections は全て Prop 5.3 により得られる。

(5.4.2) の元 $\xi \in \pi^3_{43}$ を考える。$H(\xi) = BB_2$ なので、$H(\xi \circ \beta_2(43)) = BB_2^2$ を得る。Th 6.1 により $\pi^{17}_{73} = 0$ なので、(5.4.2) から次が成り立つ。

$E^4(\xi \circ \beta_2(43)) = \beta_1^4\beta_2(7) = \beta_1(7) \circ \beta_1^3\beta_2(17) \in \beta_1(7) \circ \pi^{17}_{73} = 0$.

よって、$E^2(\xi \circ \beta_2(43)) = \pm\, P(AB_2^2)$ である。Lem 2.4 により $\Delta(P(b_2^2)) = \pm\, \xi \circ \beta_2(43)$ であり、(2) が確立された。

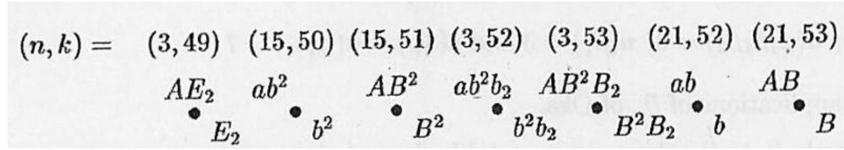
$\beta_1\beta_2^2(5)$ と $\alpha_1\beta_1\beta_2^2(3)$ が定義される。よって、(3) の $k = 62$ と $k = 65$ が完成する。

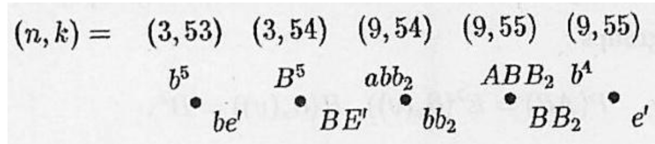
次に $n$: $odd$ に対する unstable groups $\pi^n_{n+67}$ と $\pi^n_{n+70}$ について調べる。stable の結果 $\pi^S_{67} = \pi^S_{70} = 0$ から、これらの unstable groups が (1) と (2) の中のコレクションからなることが分かる。したがって、$B_2^2, ab_2^2, ph$ は $H$-image であり、$E_2, E_1, B, a_2, a$ は $P$ によって単射的に写される。

また、$n = 5,7$ に対して $\pi^n_{n+68} = 0$ であり、$n = 5,7,9$ に対して $\pi^n_{n+69} = 0$ であることが分かる。

$HP(b^5) = ab^5 = 0$ なので $P(b^5) \in E^2\pi^7_{7+68} = 0$ であり、$b^5$ は $H$-image である。

**Th 5.4** (1) Removable simple unstable elements.




(5.1.10) $\delta \in \{\alpha_1, \alpha_1, \gamma\}$.

**Prop 5.2** $m \equiv 0\ (mod\ 3)$ とする。(5.1.10) の元 に対して、$x = Q^{m+2}(\gamma)$, $y = Q^m(\delta)$ とする。このとき、元 $\xi \in \pi_i(S^{2m+1})$ が存在して次を満たす。$H(\xi) = y$, $E^2\xi = P(x)$.

**Prop 5.3** $m \equiv 1\ (mod\ 3)$ とする。(5.1.10) の元 に対して、$X = \overline{Q}^{m+2}(\gamma)$, $Y = \overline{Q}^m(\delta)$ とする。Lem 3.9 の中での関係 $d_1(X) = HP(X) = 0$ が得られる、例えば stable range の中での計算であると仮定する。このとき、元 $\xi \in \pi_i(S^{2m+1})$ が存在して次を満たす。$H(\xi) = Y$, $E^2\xi = P(X)$.

(5.1.10) の元 $\gamma, \delta$ と、その関係する invariants のリストは下記の通りである。

| $\gamma$ | $\alpha_1$ | $\alpha_1\beta_1$ | $\alpha_1\beta_1^2$ | $\alpha_1\beta_2$ | $\beta_1^3$ | $\varepsilon_1$ | $\alpha_1\beta_1\beta_2$ | $\beta^4$ | $\varphi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\delta$ | $\beta_1$ | $\beta_1^2$ | $\beta_1^3$ | $\beta_1\beta_2$ | $\varepsilon'$ | $\varphi$ | $\beta_1^2\beta_2$ | $\beta_1\varepsilon'$ | $\beta_2^2$ |
| $x$ | $a$ | $ab$ | $ab^2$ | $ab_2$ | $b^3$ | $e_1$ | $abb_2$ | $b^4$ | $ph$ |
| $y$ | $b$ | $b^2$ | $b^3$ | $bb_2$ | $e'$ | $ph$ | $b_2^2$ | $be'$ | $b_2^2$ |
| $X$ | | $AB$ | $AB^2$ | $AB_2$ | $B^3$ | | $ABB_2$ | $B^4$ | |
| $Y$ | | $B^2$ | $B^3$ | $BB_2$ | $E'$ | | $B^2B_2$ | $BE'$ | |

(5.1.11)

(5.4.2) $u(\varepsilon') = 7$, $u(\varepsilon_1) = 15$, $u(\varepsilon_2) = 11$, $u(\varphi) = 9$,

**Lem 2.4** $\xi \in {}_p\pi_i(S^{2p-1})$ に対して、$E^2(\xi) = 0$ ならば、$\xi$ は $\Delta$ の像である。

また Lem 3.9 により、ある $\eta$ に対して、

$P(AE_2) = E^2\eta$, $H_p(\eta) = \{\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1\varepsilon_2\}(15) = \beta_1\varepsilon_2(15)$.

stable range において、$\beta_1\varepsilon_2 \in \pi^S_{52} = \{\beta_2^2\}$, $\alpha_1\beta_2^2 \neq 0$, $\alpha_1\beta_1\varepsilon_2 = 3\beta_1\varphi = 0$ である。よって $H_p(\eta) = 0$,

$P(AE_2) \in E^4\pi^7_{7+68} = 0$ である。

(3) の $k = 69$ における最初の extension ● → ◯ → ● は Lem 3.7 により確立される。

$\xi \in \pi^{13}_{13+68}$ が $H(\xi) = ph$ を満たすとする。$HP(e_2) = ae_2 = 3ph = 0$ なので、$E^2\xi \neq 0$ である。Lem 3.7 と

$\varphi \in \{\alpha_1, \alpha_1, \varepsilon_1\}$ により、$P(e_1) = E^2\xi$ を得る。

Lem 3.7 と Prop 6.2 により、$\xi' \in \pi^{11}_{11+68}$ が存在し $3\xi = E^2\xi'$, $H(\xi') = ab^2b_2$ を満たす。よって、$\xi$ の位数は 9 であり、

$E^4\xi = 0$ である。

$\lambda$ は $\{\beta_2, \varepsilon_1, \alpha_1\}$ により与えられる。$\beta_2(11) \circ \varepsilon_1(37) \in \pi^{11}_{11+64} = 0$ なので、$\lambda(11) \in \{\beta_2(11), \varepsilon_1(37), \alpha_1(75)\}$ が存在し

$E^\infty\lambda(11) = \lambda$ である。$E^\infty\xi' = 0$ なので $E^2\lambda(9) = \lambda(11)$ となる $\lambda(9)$ が存在する。$\lambda(9)$ は $H(\lambda(9)) = \pm B_1^2$ を満たさな

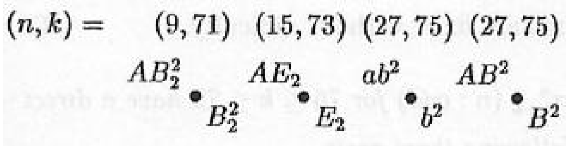
ければならない。よって (3) の $k = 68$ が確立され、$P(b^3) = 0$ を得る。よって (3) の $k = 69$ が Lem 3.7 により確立される。■

## 6.4 3-primary $k$-stem Groups for $71 \leq k \leq 80$

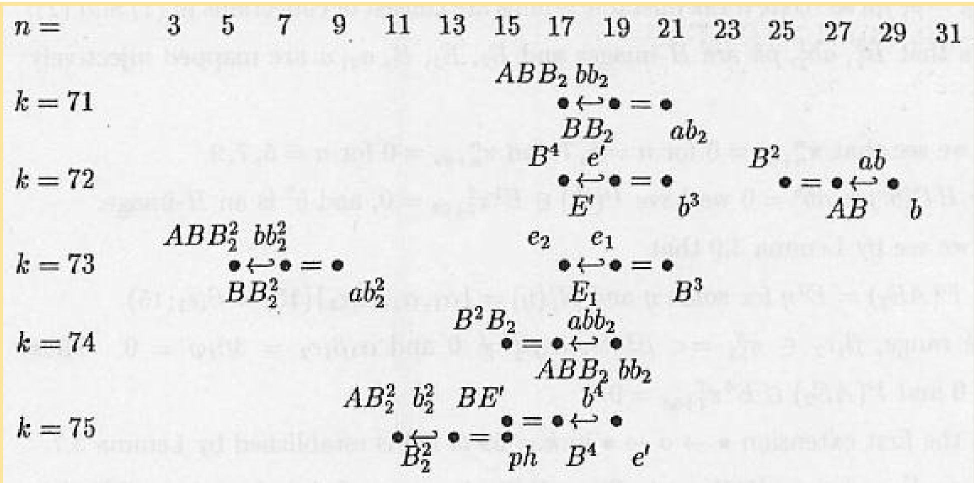
次の定理の中で、全ての invariants は stable type である。

**Th 6.3** $71 \leq k \leq 75$, $n: odd$ に対する mod $A$ $k$-stem groups $\pi^n_{n+k}$ は、以下の3つの部分の直和として得られる。

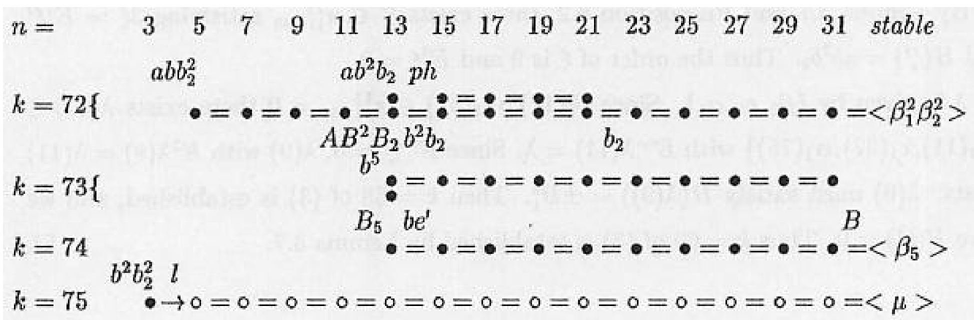
(1) Removable simple unstable elements.




(2) Removable short range unstable elements.




(3) Remaining part.




**Lem 3.9** $m \not\equiv 0, -1 \ (mod\ p)$ で、$\gamma \in \pi_{i-3}(Y^{2m+4p-8})$ に対して invariant $x \in \pi_{i+2}(Q_2^{2m+3})$ は $E^6\gamma$ による

M-represented であり、$\eta^{(3)}_{m+1} \circ \gamma = 0$ であるならば、$\xi \in \pi_{i+1}(S^{2m+1})$ が存在して、up to non-zero coefficient で

$H_p(\xi) = JH(\xi) \in \{\alpha_1(2pm+1), \alpha_1(2pm+2p-2), E^3\pi_*\gamma\}$.

**Lem 3.7** $\xi \in \pi_{i+4}(S^{2pm+1})$, $\gamma \in \pi^S_s$, $\delta \in \pi^S_t$ に対して、up to non-zero coefficients で次の関係が成り立つ。

(1) $H(\xi) = Q^{pm}(\gamma)$ は、$H(\Delta(\xi)) = \overline{Q}^{pm-1}(\alpha\gamma) = HP(\overline{Q}^{pm}(\xi))$ を誘導する。

(2) $H(\xi) = Q^{pm}(\gamma)$, $\Delta(\xi) = P(\overline{Q}^{pm}(\gamma))$ は、$H(\xi \circ \delta(i+4)) = Q^{pm}(\gamma\delta)$, $\Delta(\xi \circ \delta(i)) = P(\overline{Q}^{pm}(\gamma\delta))$ を誘導する。

**Prop 6.2** up to sign で下記の関係式が成り立つ。

(1) $\alpha_1\beta_1^2\beta_2 = \{3, \alpha_1, \varphi\}$.

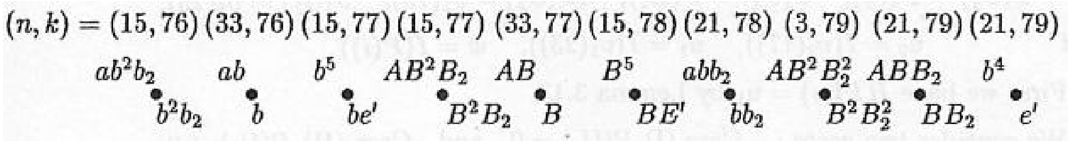
(2) $i_*\beta_1^5 = \{\alpha i, 3, \alpha_1\varepsilon_2\}$ i.e. $\beta_1^5 \in \{3, \alpha_1, 3, \alpha_1\varepsilon_2\}$.

Proof. $k = 70$ の結果から 71-stem groups の $H$-image は $AB_2^2, ABB_2, bb_2$ であることが分かる。よって stable の結果 $\pi_{71}^S = 0$ は、unstable 71-stem groups が (1) と (2) の群の直和であることを導く。

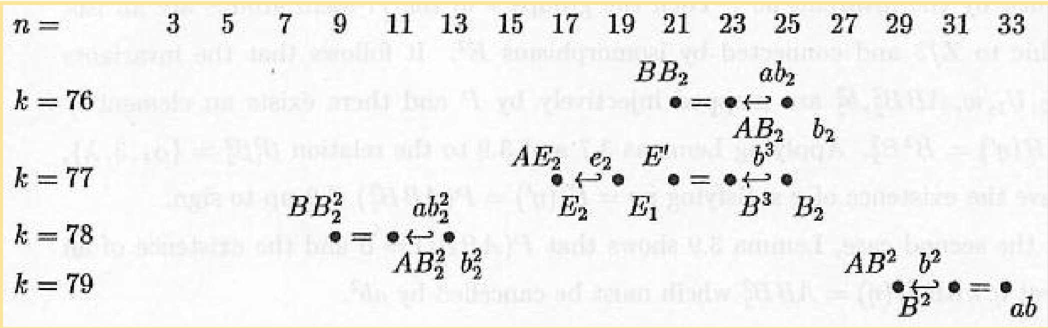
72-stem groups を考える。$H(\beta_1^2\beta_2^2) = abb_2^2$ なので、列 $\{\beta_1^2\beta_2^2(2m+1),\ m > 1\}$ は消去できる。$\pi_{13+71}^{13} = 0$ なので $P(ph) = 0$ である。したがって、$ph$ と打ち消し合う可能性のある唯一の元は $b_2$ である。よって 72-stem groups は決定された。73-stem, 74-stem, 75-stem groups は問題なく決定される。■

**Th 6.4** $76 \leq k \leq 79$, $n$: *odd* に対する mod $A$ $k$-stem groups $\pi_{n+k}^n$ は、以下の3つの部分の直和として得られる。

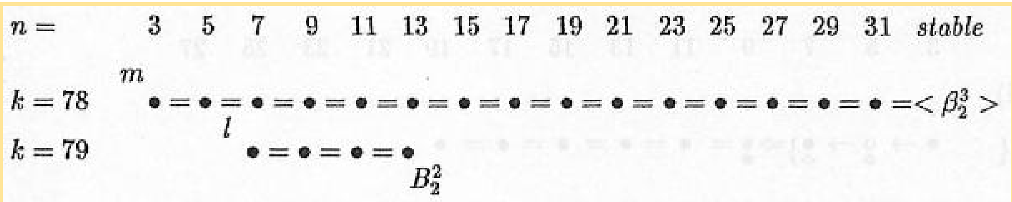
(1) Removable simple unstable elements.




(2) Removable short range unstable elements.

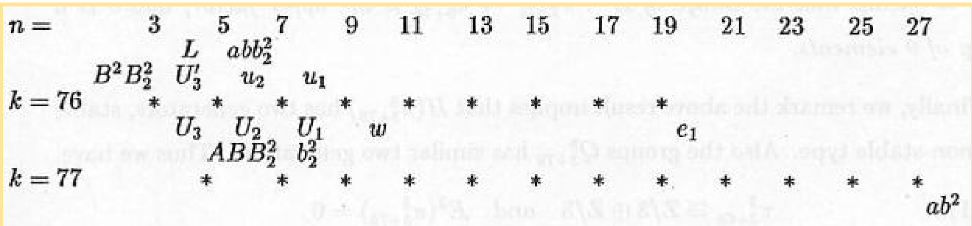



(3) Remaining part.




Proof. $k = 78$ において、$\beta_2^3(5) = \beta_2^2(5) \circ \beta_2(57)$ が存在し $H(\beta_2^3(5)) = 0$ である。よって 78-stem groups が決定され、$P(l) = 0$ である。$\pi_{79}^S = 0$ なので、$l$ は $B_2^2$ によって消されなければならない。他の場合は簡単に得られる。■

ここで、次の群 ∗ と invariants が、まだ確定していないまま残っている。




ここで、not stable type invariants は以下で与えられる。

$J(U_3') = P(e_2)$, $J(U_3) = P(E_2)$, $J(U_2) = v_2(19)$, $J(U_1) = v_1(25)$,

$u_2 = I(v_2(17))$, $u_1 = I(v_1(23))$, $w = I(P(i))$.

まず Lem 3.13 により $HP(w) = u_1$ を得る。

2つの場合 Case (I) $P(U_3) = 0$ と Case (II) $P(U_3) \neq 0$ を考える。

最初の場合、$H\xi = U_3$ を満たす元 $\xi$ が存在し、invariant $ab^2$ によって消去されなければならない。77-stem の中の群 ∗ は全て $\mathbb{Z}_3$ に同型であり、同型写像 $E^2$ によってつながっている。よって invariants $U_3, U_2, U_1, w, ABB_2^2, b_2^2$ は $P$ によって単射的に写され、$H(\eta') = B^2B_2^2$ となる元 $\eta'$ が存在する。

**Lem 3.13** $x \in \pi_{i+1}(Q_2^{2m+2p-1})$ が $E\gamma$ による M-represented であり、$y \in \pi_i(Q_2^{2m+1})$ は $\beta_{(1)}\gamma$ による represented であるとする。$m \geq 1$ ならば、$P(y) = \partial_\alpha P(x)$ である。

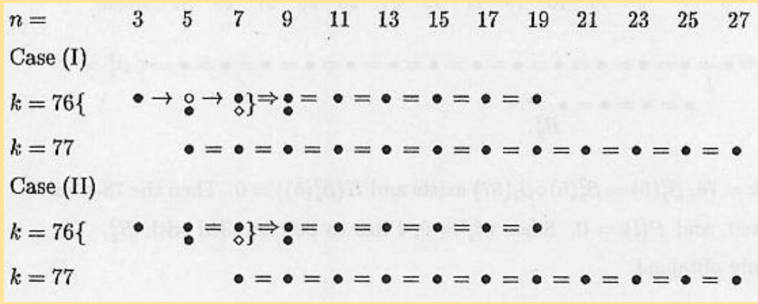
関係式 $\beta_1^2\beta_2^2 = \{\alpha_1, 3, \lambda\}$ に Lem 3.7 と Lem 3.9 を適用すると、η が存在して up to sign で

$p\eta = E^2(\eta') = P(ABB_2^2) \neq 0$ が成り立つことを得る。

2番目の場合、Lem 3.9 は $P(ABB_2^2) = 0$ を示し、$H(\eta) = ABB_2^2$ となる η が存在し、$ab^2$ によって消去される。

EHP-sequence の完全性により、以下の可能性を得る。

**Prop 6.3** 以下のようなバリエーションがある。



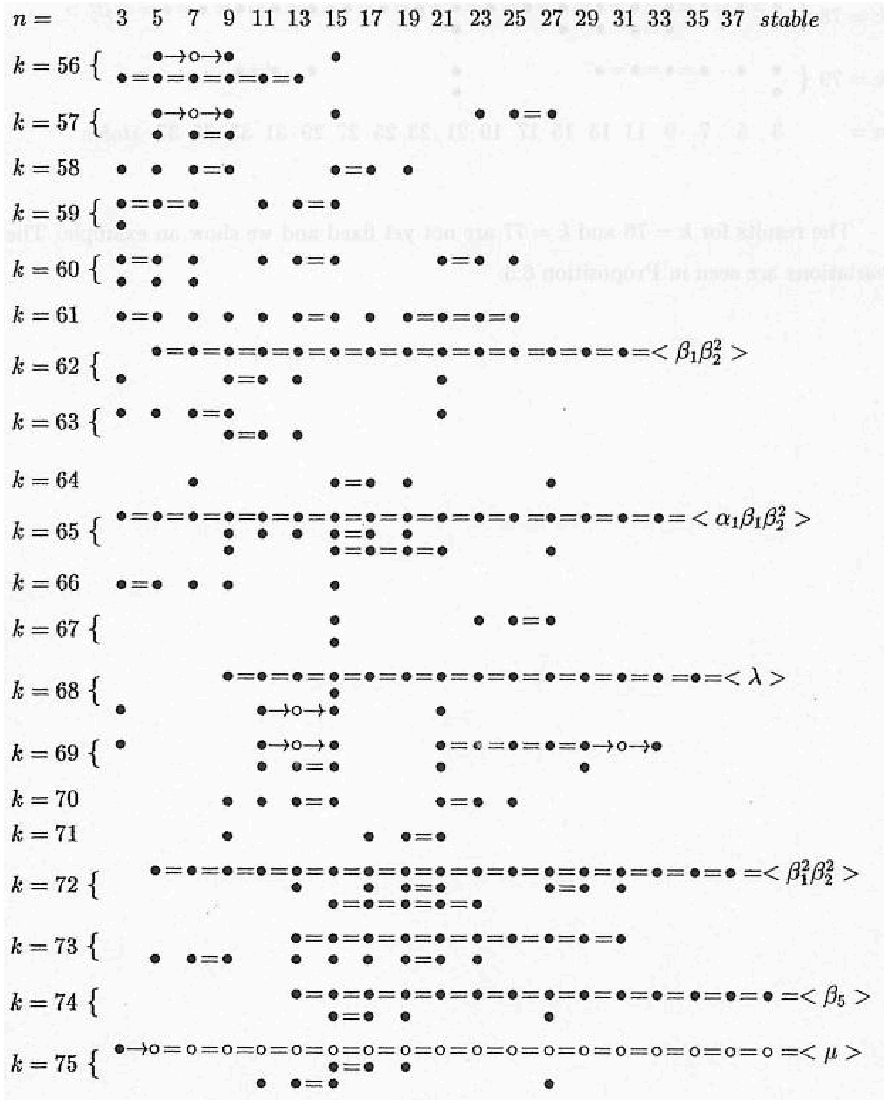
ここで、⇒ は $E^2: \pi^7_{7+76} \to \pi^9_{9+76}$ の image が、上の成分であり、◇ は 9 個の要素を持つ群であることを意味している。

最後に、上の結果は $H(\pi^3_{3+79})$ が stable type と non-stable type の 2つの生成元を持つことを示していることに注意する。また、群 $Q^3_{3+79}$ は同様に2つの生成元を持っている。よって次を得る。

(6.4.1) $\pi^3_{3+69} \simeq \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$, $E^2(\pi^3_{3+79}) = 0$.

## 6.5 Table of 3-primary $k$-stem Groups for $56 \le k \le 80$

以下は 3-primary $k$-stem groups mod $A$ の表である。



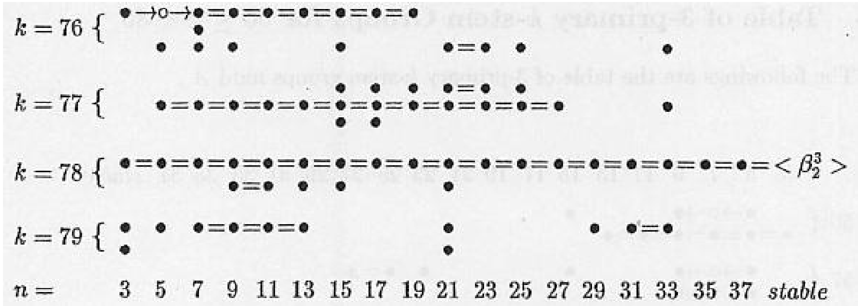
**Lem 3.7** $\xi \in \pi_{i+4}(S^{2pm+1})$, $\gamma \in \pi^S_s$, $\delta \in \pi^S_t$ に対して、up to non-zero coefficients で次の関係が成り立つ。

(1) $H(\xi) = Q^{pm}(\gamma)$ は、$H(\Delta(\xi)) = \overline{Q}^{pm-1}(\alpha\gamma) = HP(\overline{Q}^{pm}(\xi))$ を誘導する。

(2) $H(\xi) = Q^{pm}(\gamma)$, $\Delta(\xi) = P(\overline{Q}^{pm}(\gamma))$ は、$H(\xi \circ \delta(i+4)) = Q^{pm}(\gamma\delta)$, $\Delta(\xi \circ \delta(i)) = P(\overline{Q}^{pm}(\gamma\delta))$ を誘導する。

**Lem 3.9** $m \not\equiv 0, -1 \ (mod\ p)$ で、$\gamma \in \pi_{i-3}(Y^{2m+4p-8})$ に対して invariant $x \in \pi_{i+2}(Q_2^{2m+3})$ は $E^6\gamma$ による M-represented であり、$\eta^{(3)}_{m+1} \circ \gamma = 0$ であるならば、$\xi \in \pi_{i+1}(S^{2m+1})$ が存在して、up to non-zero coefficient で

$H_p(\xi) = JH(\xi) \in \{\alpha_1(2pm+1), \alpha_1(2pm+2p-2), E^3\pi_*\gamma\}$.




$k = 76$ と $k = 77$ に対する結果はまだ決定されておらず、ここでは一例を示している。そのバリエーションは Prop 6.3 にみられる。

References

[1] J.F.Adams, On the groups J(X) -IV, Topology 5 (1966),21-71.
[3] F.Cohen, J.C.Moore and J.Neisendorfer, The double suspension and exponents of the homotopy groups of spheres, Ann. of Math. 110 (1979),549-565.
[4] E.Dyer and R.lashof, Homology of iterated loop spaces, Ann. of Math. 84 (1962), 35-88.
[6] B.W.Gray, On the sphere of origin of infinite families in the homotopy groups of spheres, Topology 8, (1969), 219-232.
[7] B.W.Gray, Unstable families related to the image of J, Proc. Camb. Phil. Soc, 96 (1984), 95-113.
[8] B.W.Gray, On Toda's fibrations, Proc. Camb. Phil. Soc. 97 (1985), 289-298.
[10] J.R.Harper, A Proof of Gray's conjecture, Contemp. Math. 96 (1989), 181-188.
[12] I.M.James, Reduced product space, Ann. of Math. 62 (1955), 170-197.
[17] J.C.Moore, The double suspension and p-primary components of the homotopy groups of spheres, Boll. Soc. Mat. Mexicana, 1 (1956), 28-37.
[18] O.Nakamura, On the cohomology of the mod p Steenrod algebra, Bull. Sci. Engrg. Div, Univ. Ryukyus(Math.Nat.Sci.) 18(1975), 9-58.
[19] J.Neisendorfer, 3-primary exponents, Proc. Camb. Phil. Soc.90 (1981), 63-83.
[20] G.Nishida, Cohomology operations in iterated loop space, Proc.Japan Acad. 44(1967), 839-842.
[21] S.Oka, On the Homotopy Groups of Sphere Bundles over Spheres, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser.A-I 33 (1969), 161-195.
[22] S.Oka, The stable homotopy groups of spheres, I, II, III, Hiroshima Math. J. 1(1971), 305-337, 2(1972), 99-161, 5(1975), 407-438.
[25] D.C.Ravenel, Complex Bordism and stable Homotpy Groups of Spheres, Pure and Appl. Math. 121 (1986).
[26] P.Selic, Odd primary torsion in *(S3), Topology 17 (1978), 407-412.
[27] P.Selic, A Decomposition of $\pi_*(S^{2p+1}; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, Topology 17 (1978), 407-412.
[28] J.-P.Serre, Homologie singuliere des espaces fibres, Ann of Math. 54 (1951),425-505.
[29] J.-P.Serre, Groupes d'homotopie et classes de groups abelian, Ann of Math. 58 (1953),258-294.
[33] M.C.Tangora, Some homotopy groups mod 3, Conference on homotopy theory Evanston III. (1974), 227-245, Notas Mat. Simpos., 1 Soc. Mat. Mexicana, Mexico 1975.
[34] H.Toda, On double suspension E2, Inst.Polytech. Osaka City Univ. Ser.A Math. A7 (1956), 922-924.
[37] H.Toda. On homotopy groups of $S^3$-bundles over spheres, J.Math.Kyoto Univ. 2 (1963), 193-207.
[38] H.Toda. On Iterated Suspensions I,II,III, J. Math. Kyoto Univ. 5 (1966), 87-142,209-250, 8(1968),101-130.
[39] H.Toda, An important relation in homotopy groups of spheres, Proc. Japan Acad. 43 (1967), 839-942.
[45] N.Yamamoto, Algebra of stable homotopy of Moore space, J. Math. Osaka City Univ. 14 (1963), 45-67.