

Toda_Unstable 3-primary Homotopy Groups of Spheres

1 Introduction

本論文の目的は、奇素数 p 、特に $p = 3$ に対して、stable group $\pi_k^S = \lim \pi_{n+k}(S^n)$ に関するいくつかの結果から、 $\pi_i(S^n)$ の p -成分 ${}_p\pi_i(S^n)$ を求めることである。Serre [28], [29] により、 $\pi_i(S^n)$ は、

$$\pi_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}, \pi_{4m-1}(S^{2m}) \simeq \mathbb{Z} \oplus (\text{finite}),$$

を除いて有限群である。また、次の Serre decomposition が知られている。

$${}_p\pi_{i+1}(S^{2m}) \simeq {}_p\pi_i(S^{2m-1}) \oplus {}_p\pi_{i+1}(S^{4m-1}).$$

よって、奇数 $n = 2m + 1$ に対して、 ${}_p\pi_i(S^n)$ を求めれば十分である。この計算は、大抵の場合、 k -stem の列

$$(1.1)_k \quad {}_p\pi_{3+k}(S^3) \xrightarrow{E^2} {}_p\pi_{5+k}(S^5) \xrightarrow{E^2} {}_p\pi_{7+k}(S^7) \xrightarrow{E^2} \cdots \xrightarrow{E^\infty} {}_p\pi_k^S$$

を使って、下の stem の情報と、stable group ${}_p\pi_k^S$ の情報から、double suspension を考えることで行われる。

$\pi_i(S^{2m+1})$ を求めるための主な道具は、次の double EHP-sequence である。

$$(1.2)_m \quad \cdots \xrightarrow{H} \pi_i(Q_2^{2m-1}) \xrightarrow{P} \pi_i(S^{2m-1}) \xrightarrow{E^2} \pi_{i+2}(S^{2m+1}) \xrightarrow{H} \pi_{i-1}(Q_2^{2m-1}) \xrightarrow{\cdots} \cdots.$$

ここで、 Q_2^{2m-1} は、double suspension map $i^2 : S^{2m-1} \rightarrow \Omega^2 S^{2m+1}$ のホモトピーファイバーであり、 H と P はそれぞれ、Hopf invariant と Whitehead product の double version である。

$$Q_2^{2m-1} = \Omega(\Omega^2 S^{2m+1}, S^{2m-1}).$$

ここでは、便宜上、 $\pi_i(Q_2^{2m-1})$ の元を不变量 (invariant) と呼ぶことにする。 Q_2^{2m-1} のホモトピー群は、次の $IJ\Delta$ -sequence (この列は p で局所化すると完全になる) を使って計算されることがある。

$$(1.3)_m \quad \cdots \xrightarrow{J} \pi_{i+4}(S^{2pm+1}) \xrightarrow{\Delta} \pi_{i+2}(S^{2pm-1}) \xrightarrow{I} \pi_i(Q_2^{2m-1}) \xrightarrow{J} \pi_{i+3}(S^{2pm+1}) \xrightarrow{\Delta} \pi_{i+1}(S^{2pm-1}) \xrightarrow{\cdots} \cdots$$

ここで、 $\Delta \circ E^2 \circ E^2 \circ \Delta$ は p 倍する写像であり、

$$J \circ H = H_p : \pi_{i+3}(S^{2m+1}) \rightarrow \pi_{i+3}(S^{2pm+1})$$

は James-Hopf invariant である。

Toda [38] の iterated suspension についてのいくつかの lemma は、Selic [26], Neisendorfer [19] の Moore-type representations, exponential theorems と、Gray [7], Harper [10], Oka [21] の結果を使うことによって、次元の制限を取り除くことができる。

奇数 n に対する ${}_p\pi_{n+k}(S^n)$ の表を、symbolic な方法で記述することができる。

例えば、 $p = 3$ に対する 10-stem と 11-stem の表は、次のように表される。

$n =$	3	5	7
$k = 10$	• \rightarrow ○ \rightarrow • = { β_1 }		
$k = 11$	• \rightarrow ○ = ○ = { α'_3 }		

ここで、• と ○ はそれぞれ、 \mathbb{Z}_3 と \mathbb{Z}_9 を表わしている。

= は、double suspension E^2 の同型を、 \rightarrow は、同型でなく、自明でない E^2 を表わしている。

最後の項の • = < β_1 > は、 ${}_3\pi_{7+10}(S^7)$ が stable range であり、 β_1 で生成される stable group ${}_3\pi_{10}^S$ に同型であることを意味している。

○ = < α'_3 > も同様である。もし ${}_3\pi_{n+k}(S^n)$ が巡回群の多くの数の直和であるならば、table の中に群は対応するシンボル •, ○ または ▷ $\simeq \mathbb{Z}_{27}$ を縦に重ねて表わされる。

[28] J.-P.Serre, Homologie singulière des espaces fibres, Ann of Math. 54 (1951), 425-505.

[29] J.-P.Serre, Groupes d'homotopie et classes de groups abelian, Ann of Math. 58 (1953), 258-294.

[38] H.Toda, On Iterated Suspensions I,II,III, J.Math.Kyoto U. 5 (1966), 87-142, 209-250, 8(1968), 101-130.

[26] P.Selic, Odd primary torsion in $\pi_*(S^3)$, Topology 17 (1978), 407-412.

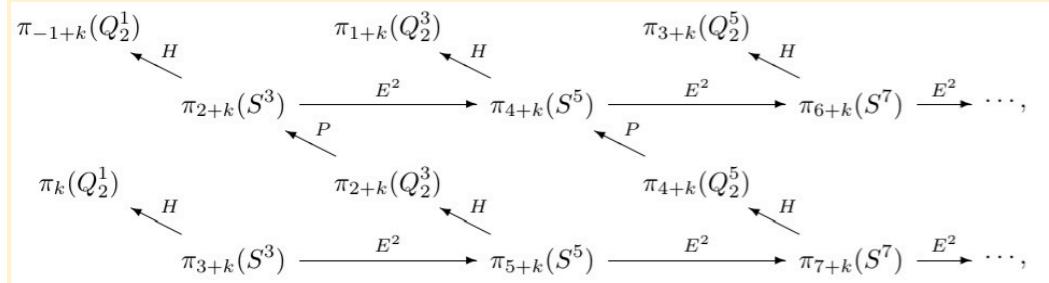
[19] J.Neisendorfer, 3-primary exponents, Proc. Camb. Phil. Soc. 90 (1981), 63-83.

[7] B.W.Gray, Unstable families related to the image of J , Proc. Camb. Phil. Soc. 96 (1984), 95-113.

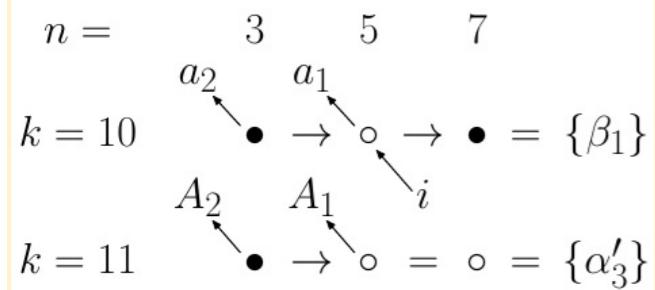
[10] J.R.Harper, A Proof of Gray's conjecture, Contemp. Math. 96 (1989), 181-188.

[21] S.Oka, On the Homotopy Groups of Sphere Bundles over Spheres, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser.A-I 33 (1969), 161-195.

計算は次のような完全列のコレクション (1.2)_m を使うことにより与えられ、これは **computation diagram** と呼ばれる。



computation diagram はまたシンボル化される。上記の $k = 10, 11$ の場合は、次のように計算される。



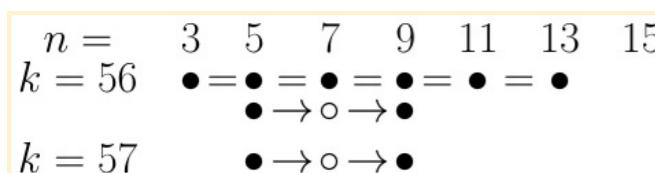
ここで、ローマ字は適宜、定義された不变量を示しており、準同型 P, H は自明なときは省略し、それが自明でないときは矢印だけを残している。stable α -series

$$\{\alpha_r \in \pi_p^S; r \geq 1\}, q = 2(p - 1),$$

の unstable バージョンは典型的な例である。これは、各 r に対して、 $(rq - 1)$ -stem と $(rq - 2)$ -stem の中の元のコレクションであり、 ${}_p\pi_i(Q_2^{2m-1})$ の直和成分の生成元と対応しており、Gray[7] で示されたように、1つの例外 ${}_p\pi_{2p^2-3}(S^{2p-1}) \simeq \mathbb{Z}_{p^2}$ を除いて、EHP-sequence の中で閉じている。そのコレクションは $IJ\Delta$ -sequence と適合するように選ぶことができる。これは、 ${}_p\pi_i(S^{2m+1})$ の計算の中で、わずかな余りの不变量を残すことにより、これらのコレクションを除外することを意味している。このコレクションは **unstable alpha families** と呼ばれる。

unstable alpha families の他に、計算の前に除外できるいくつかのコレクションがある。元 $\xi \in {}_p\pi_i(S^{2m+1})$ は、 $E^2\xi = 0$ かつ $\xi \notin Im E^2$ のとき **simple** であるという。 $m \not\equiv 1, 0 \pmod{p}$ のとき、この ξ は $IJ\Delta$ -sequence とは独立である。そこで、 $P(x) = \xi$ を満たす不变量 $H(\xi)$ と $x \in {}_i(Q_2^{2m-1})$ とともに ξ を取り除くことができる。これらの3つの元のことを **simple removable collection** と呼ぶ。対 $\{\xi, \Delta\xi \neq 0\}$ を含むもう一つの種類の removable collection があり、**short range removable collection** と呼ばれる。

3-primary k-stem groups ${}_3\pi_{2m-1+k}(S^{2m+1})$ の結果は、上の様に symbolized tables で与えられ、2つの部分に分けられる。一つは $k \leq 55$ に対する古い table であり、もう一つは $56 \leq k < 80$ に対する新しい table である。最初の table は、K.Maruyama の $k \leq 45$ に対する報告 [38],[39] と、M.Mimura の $45 < k \leq 55$ に対する 1998年の結果を再掲したものである。最初の難点は、関係式 $\beta_1^3\beta_2 = 0$ の非安定版を含む 56-stem にある。この関係式は S^{15} 中で成立している。また、57-stem では、関係式 $\beta_1^3\epsilon' = 0$ を含み、これは S^9 中で成立している。



2番目の難点は、60-stem と 76-stem に集中しており、さらに **deeply unstable range** の中にある。これらの場合には、多くの stable でない不变量があり、これらをコントロールするためのいくつかの効果的な理論を持っている。deep range の 76-stem と 77-stem において、我々の表にはいくつかの曖昧な点がある。

[7] B.W.Gray, Unstable families related to the image of J , Proc. Camb. Phil. Soc, 96 (1984), 95-113.

$m \not\equiv -1, 0 \pmod{3} \leftrightarrow m \equiv 1 \pmod{3}$

[38] H.Toda, On Iterated Suspensions I,II,III, J.Math.Kyoto U. 5 (1966), 87-142, 209-250, 8(1968), 101-130.

[39] H.Toda, An important relation in homotopy groups of spheres, Proc. Japan Acad. 43 (1967), 839-942.

2 Double Suspension and Lemmas

2.1 EHP sequence

$Q_1^n = \Omega(\Omega S^{n+1}, S^n)$ を canonical inclusion (suspension map) $i : S^n \rightarrow \Omega S^{n+1}$ のホモトピーファイバーとする。

このとき、次の完全列を得る。(single EHP sequence)

$$(2.1.1) \cdots \xrightarrow{E} \pi_{i+2}(S^{n+1}) \xrightarrow{H'} \pi_i(Q_1^n) \xrightarrow{P'} \pi_i(S^n) \xrightarrow{E} \pi_{i+1}(S^{n+1}) \xrightarrow{H'} \cdots$$

恒等写像のクラス $\iota_n \in \pi_n(S^n)$ の Whitehead product $w_n = [\iota_n, \iota_n] \in \pi_{2n-1}(S^n)$ は P' の像であり、 n が偶数のとき、 $H'(w_n) = 2\iota_{2n-1}$ 。これは、奇素数 p に対して、次の Serre's decomposition [29] を誘導する。

$$(2.1.2) E + w_{2m*} : \pi_i(S^{2m-1}) \oplus \pi_{i+1}(S^{4m-1}) \xrightarrow{p} \pi_{i+1}(S^{2m}).$$

ここで \simeq_p は mod p 同型を意味する。すなわち kernel と cokernel が有限で p -torsion を持たない。よって E と w_{2m*} は、mod p 単射である。 $Q_2^{2m-1} = \Omega(\Omega^2 S^{2m+1}, S^{2m-1})$ を canonical inclusion (double suspension map)

$i : S^{2m-1} \rightarrow \Omega^2 S^{2m+1}$ のホモトピーファイバーとする。このとき、次の完全列を得る。(double EHP sequence)

$$(2.1.3) \cdots \xrightarrow{E^2} \pi_{i+3}(S^{2m+1}) \xrightarrow{H} \pi_i(Q_2^{2m-1}) \xrightarrow{P} \pi_i(S^{2m-1}) \xrightarrow{E^2} \pi_{i+2}(S^{2m+1}) \xrightarrow{H} \cdots$$

H と P はそれぞれ、Hopf invariant H' と Whitehead product P' の double version であり、 $\pi_i(Q_2^{2m-1})$ のことを、**invariants** の群という。次の H と P の naturality が成り立つ。

$$(2.1.4) H(\alpha) \circ \xi = H(\alpha \circ E^3 \xi) \text{ for } \alpha \in \pi_{i+3}(S^{2m+1}), \xi \in \pi_j(S^i)$$

$$(2.1.5) P(\alpha) \circ \xi = P(\alpha \circ \xi) \text{ for } \alpha \in \pi_i(Q_2^{2m-1}), \xi \in \pi_j(S^i).$$

よく知られているように、 ΩS^{2m+1} のホモロジー環は、次の多項式環である。 $H_*(\Omega S^{2m+1}) = \mathbb{Z}[u], u \in H_{2m}$.

可縮な全空間 E の fibration $\Omega^2 S^{2m+1} \rightarrow E \rightarrow \Omega S^{2m+1}$ に関する spectral sequence を考えることで次を得る。

$$(2.1.6) H_i(\Omega^2 S^{2m+1}, S^{2m-1}) \simeq_p 0 \text{ for } i < 2pm - 2,$$

$$H_i(\Omega^2 S^{2m+1}, S^{2m-1}) \simeq_p \mathbb{Z}_p \text{ for } i = 2mp - 2.$$

homotopy に対しても同じ結果であり、Serre[29] による球面のホモトピー群の mod p stability (持続性) を得る。

Th 2.1 (Serre [29]) double suspension $E^2 : \pi_i(S^{2m-1}) \rightarrow \pi_{i+2}(S^{2m+1})$ は、

$i < 2pm - 3$ のとき、 p 成分の同型あり、 $i = 2mp - 3$ のとき、(p 成分の?) 全射である。

$\pi_k^S = \lim_n \pi_{n+k}(S^n)$ を stable k -stem group とし、次の群を stable range にあるという。

$$(2.1.7) \pi_{2m-1+k}(S^{2m-1}) \simeq_p \pi_k^S \text{ for } k < 2(p-1)m - 2.$$

$S_\infty^n = S^n \cup e^{2n} \cup \dots \cup e^{kn} \cup \dots$ を n -sphere の James' reduced product [12] とすると、自然な H-map $i : S_\infty^n \rightarrow \Omega S^{n+1}$

により、 S_∞^n と ΩS^{n+1} はホモトピー同値であり、今後これを同一視する。 $S_k^n = S^n \cup e^{2n} \cup \dots \cup e^{kn}$ を S_∞^n の kn

-skeleton とし、 $h_p : \Omega S^{2m+1} = S_\infty^{2m} \rightarrow S_\infty^{2pm} = \Omega S^{2pm+1}$ を、shrinking map $S_p^{2m} \rightarrow S_p^{2m}/S_{p-1}^{2m} = S^{2pm}$ の James's

extension [12] とする。[34] の中で、 h_p のホモトピーファイバーは、 S_{p-1}^{2m} に mod p 同値であり、写像

$T_p : \Omega S_{p-1}^{2m} \rightarrow \Omega S^{2pm-1}$ が存在して、そのホモトピーファイバーが、 S^{2m-1} に mod p 同値となることを示した。

よって、 p で局所化することにより、次の fibration を得る。

$$(2.1.8) S_{p-1}^{2m} \rightarrow \Omega S^{2m+1} \xrightarrow{h_p} \Omega S^{2pm+1}, S^{2m-1} \rightarrow \Omega S_{p-1}^{2m} \xrightarrow{T_p} \Omega S^{2pm-1}.$$

これらを組み合わせて、次の mod p fibration を得る。

$$(2.1.9) \Omega^2 S^{2pm-1} \xrightarrow{i} Q_2^{2m-1} \xrightarrow{j} \Omega^3 S^{2pm+1} \xrightarrow{\partial_p} \Omega S^{2pm-1}.$$

Th 2.2 (2.1.9) の mod p fibration は、次の $I\Delta$ -sequence を誘導し、これは、mod p で完全である。

$$\cdots \xrightarrow{\Delta} \pi_{i+2}(S^{2pm-1}) \xrightarrow{I} \pi_i(Q_2^{2m-1}) \xrightarrow{J} \pi_{i+3}(S^{2pm+1}) \xrightarrow{\Delta} \pi_{i+1}(S^{2pm-1}) \xrightarrow{I} \cdots$$

[29] J.-P.Serre, Groupes d'homotopie et classes de groups abelian, Ann of Math. 58 (1953), 258-294.

[戸田三村ホモトピー論] p72

[29] J.-P.Serre, Groupes d'homotopie et classes de groups abelian, Ann of Math. 58 (1953), 258-294.

[12] I.M.James, Reduced product space, Ann. of Math. 62 (1955), 170-197.

[34] H.Toda, On double suspension E^2 , Inst.Polytech. Osaka City Univ. Ser.A Math. A7 (1956), 922-924.

$$Q_2^{2m-1} \rightarrow S^{2m-1} \rightarrow \Omega^2 S^{2m+1}$$

$$\Omega^3 S^{2m+1} \xrightarrow{\Omega^2 h_p} \Omega^3 S^{2pm+1} \rightarrow \Omega S_{p-1}^{2m} \rightarrow \Omega^2 S^{2m+1} \xrightarrow{\Omega h_p} \Omega^2 S^{2pm+1},$$

$$S^{2m-1} \rightarrow \Omega S_{p-1}^{2m} \xrightarrow{T_p} \Omega S^{2pm-1}.$$

写像 h_p は、James-Hopf invariant H_p を誘導し、次を満たす。

$$(2.1.10) \quad H_p = J \circ H : \pi_{i+3}(S^{2m+1}) \rightarrow \pi_i(Q_2^{2m-1}) \rightarrow \pi_{i+3}(S^{2pm+1}).$$

写像 T_p は、Gray [8] によって再構成され、(2.1.9) の写像 $\partial_p : \Omega^3 S^{2pm+1} \rightarrow \Omega S^{2pm-1}$ は、degree p の写像 $f_p : S^{2pm-1} \rightarrow S^{2pm-1}$ に対して、 $\partial_p \circ i^2 \simeq \Omega f_p : \Omega S^{2pm-1} \rightarrow \Omega^3 S^{2pm+1} \rightarrow \Omega S^{2pm-1}$ を満たす。

さらに、Harper [10] は、次を示した。

$$i^2 \circ \partial_p \simeq \Omega(S^2 f_p) : \Omega^3 S^{2pm+1} \rightarrow \Omega S^{2pm-1} \rightarrow \Omega^3 S^{2pm+1}.$$

Lemma 2.1 次の2つの合成は、どちらも p 倍する写像である。

$$\Delta \circ E^2 : {}_p \pi_i(S^{2pm-1}) \rightarrow {}_p \pi_{i+2}(S^{2pm+1}) \rightarrow {}_p \pi_i(S^{2pm-1}),$$

$$E^2 \circ \Delta : {}_p \pi_{i+2}(S^{2pm+1}) \rightarrow {}_p \pi_i(S^{2pm-1}) \rightarrow {}_p \pi_{i+2}(S^{2pm+1}).$$

次の naturality が成り立つ。

$$(2.1.11) \quad I(\alpha \circ E^2 \xi) = I(\alpha) \circ \xi \text{ for } \alpha \in \pi_{i+2}(S^{2pm-1}), \xi \in \pi_j(S^i)$$

$$J(\alpha \circ \xi) = J(\alpha) \circ E^3 \xi \text{ for } \alpha \in \pi_i(Q_2^{2m-1}), \xi \in \pi_j(S^i)$$

$$\Delta(\alpha \circ E^3 \xi) = \Delta(\alpha) \circ E \xi \text{ for } \alpha \in \pi_{i+3}(S^{2pm+1}), \xi \in \pi_j(S^i)$$

$$H_p(\alpha \circ E \xi) = H_p(\alpha) \circ E \xi \text{ for } \alpha \in \pi_{i+1}(S^{2m+1}), \xi \in \pi_j(S^i)$$

次の exponent theorem は、 $p = 3$ に対しては、Cohen-Moore-Neisendorfer [3], Neisendorfer [19] によって、 $m = 1$ に対しては、Selic [26] によって示された。

$$\text{Th 2.3} \quad p^m({}_p \pi_i(S^{2m+1})) = 0.$$

この定理は、 $\Omega^2 S^{2m+1}$ 上の適当な H-structure に対して、積 μ の p -th power $\mu^p : \Omega^2 S^{2m+1} \rightarrow \Omega^2 S^{2m+1}$ が、写像 $r_m : \Omega^2 S^{2m+1} \rightarrow S^{2m-1}$ に変形されるという事実を元にしている。すなわち、

$$(2.1.12) \quad \mu^p \simeq i^2 \circ r_m : (\Omega^2 S^{2m+1}, S^{2m-1}) \rightarrow (\Omega^2 S^{2m+1}, S^{2m-1}).$$

したがって、

Lem 2.2 ${}_p \pi_i(Q_2^{2m-1})$ は、elementary である。すなわち $p({}_p \pi_i(Q_2^{2m-1})) = 0$.

Th 2.1 により、 $i < 2p^2 m - 3$ に対して、 $E^2 : {}_p \pi_i(S^{2pm-1}) \rightarrow {}_p \pi_{i+2}(S^{2pm+1})$ は全単射である。

IJΔ-sequence の完全性から次を得る。

Prop 2.1 $i < 2p^2 m - 3$ に対して、次の split 完全列を得る。

$$0 \rightarrow \pi_{i-2pm+3}^S \otimes \mathbb{Z}_p \rightarrow {}_p \pi_i(Q_2^{2m-1}) \rightarrow \text{Tor}(\pi_{i-2pm+2}^S, \mathbb{Z}_p) \rightarrow 0.$$

この場合のことを、meta-stable range という。

2.2 Homotopy groups of S^3

$m = 1$ の場合の (2.1.8) の mod p fibration を考える。

$$(2.2.1) \quad S_{p-1}^2 \rightarrow S_\infty^2 \xrightarrow{h_p} S_\infty^{2p}.$$

$f_\infty : S_\infty^2 \rightarrow \mathbb{CP}^\infty = S^2 \cup e^4 \cup e^6 \cup \dots$ を、 S^2 上の恒等写像の拡張とする。 \mathbb{CP}^∞ は、 $(\mathbb{Z}, 2)$ 型の Eilenberg-MacLane 空間であるので、 f_∞ のホモトピーファイバー \tilde{S}_∞^2 は、 S_∞^2 上の 2-connective fibration である。

$\tilde{S}_\infty^2 \rightarrow S_\infty^2 \rightarrow \mathbb{CP}^\infty = K(\mathbb{Z}, 2)$. S^3 の 3-connective fiber \tilde{S}^3 に対して、 $\tilde{S}_\infty^2 = \Omega \tilde{S}^3$. f_∞ の S_k^2 への制限 f_k は、

2-connective fibration である。 $\tilde{S}_k^2 \xrightarrow{\rho_k} S_k^2 \xrightarrow{f_k} \mathbb{CP}^\infty$.

$S_\infty^2 = \Omega S^{2p+1}$ は 2-connected であるので、(2.2.1) の fibration は、次の mod p fibration にリフトされる。

$$(2.2.2) \quad \tilde{S}_{p-1}^2 \xrightarrow{i} \tilde{S}_\infty^2 \xrightarrow{h_p} S_\infty^{2p}.$$

[8] B.W.Gray, On Toda's fibrations, Proc. Camb. Phil. Soc. 97 (1985), 289-298.

[10] J.R.Harper, A Proof of Gray's conjecture, Contemp. Math. 96 (1989), 181-188.

[3] F.Cohen, J.C.Moore and J.Neisendorfer, The double suspension and exponents of the homotopy groups of spheres, Ann. of Math. 110 (1979), 549-565.

[19] J.Neisendorfer, 3-primary exponents, Proc. Camb. Phil. Soc. 90 (1981), 63-83.

[26] P.Selic, Odd primary torsion in $\pi_*(S^3)$, Topology 17 (1978), 407-412.

Th 2.1 (Serre [29]) double suspension $E^2 : {}_p \pi_i(S^{2m-1}) \rightarrow {}_p \pi_{i+2}(S^{2m+1})$ は、 $i < 2pm - 3$ のとき、 p 成分の同型あり、 $i = 2mp - 3$ のとき、(p 成分の?) 全射である。

$$(2.1.8) \quad S_{p-1}^{2m} \rightarrow \Omega S^{2m+1} \xrightarrow{h_p} \Omega S^{2pm+1}, \quad S^{2m-1} \rightarrow \Omega S_{p-1}^{2m} \xrightarrow{T_p} \Omega S^{2pm-1}.$$

$$(2.2.1) \quad S_{p-1}^2 \rightarrow S_\infty^2 \xrightarrow{h_p} S_\infty^{2p}.$$

$H^*(S_\infty^2)$ は divided polynomial algebra であり、 $H^*(\mathbb{C}P^\infty)$ は polynomial algebra であるので、コホモロジー類において、関係式 $f_\infty^*(e^{2k}) = k! e^{2k}$ が成り立つ。特に、 $2(p-1)$ -skeleton の写像 $f_{p-1}: S_{p-1}^2 \rightarrow \mathbb{C}P^{p-1} = S^{2p-1}/S^1$ は、 p -同値になる。 f_{p-1} は、 S^1 -bundle map $\tilde{f}_{p-1}: \tilde{S}_{p-1}^2 \rightarrow S^{2p-1}$ を誘導し、これもまた p -同値である。よって、次の p -同値を得る。

$$(2.2.3) \quad \tilde{g}: S^{2p-1} \rightarrow \tilde{S}_{p-1}^2 \text{ s.t. } \deg(\tilde{f}_{p-1} \circ \tilde{g}) \equiv 1 \pmod{p}.$$

fibration (2.2.2) から、次の mod p fibration を得る。

$$(2.2.4) \quad S^{2p-1} \xrightarrow{\tilde{g}} \Omega \tilde{S}^3 \xrightarrow{\tilde{h}_p} \Omega S^{2p+1}.$$

Prop 2.2 (2.2.4) の mod p fibration は、次の mod p 完全列を誘導する。

$$\dots \xrightarrow{\Delta} \pi_i(S^{2p-1}) \xrightarrow{\tilde{g}} \pi_{i+1}(\tilde{S}^3) \xrightarrow{\tilde{h}_p} \pi_{i+1}(S^{2p+1}) \xrightarrow{\Delta} \pi_{i-1}(S^{2p-1}) \xrightarrow{\tilde{g}} \dots$$

この完全列は、 $m=1$ のときには、Th 2.2 の $IJ\Delta$ -sequence に同値である。実際、 Q_2^1 は $\Omega^3 S^3$ にホモトピー同値であるが、合成の関係式 (relations with the composition) は、(2.1.11) よりもう少しいものである。

$$(2.2.5) \quad \tilde{G}(\alpha \circ \xi) = \tilde{G}(\alpha) \circ E\xi \text{ for } \alpha \in \pi_i(S^{2p-1}), \xi \in \pi_j(S^i)$$

$$\tilde{H}_p(\alpha \circ E\xi) = \tilde{H}_p(\alpha) \circ E\xi \text{ for } \alpha \in \pi_{i+1}(\tilde{S}^3), \xi \in \pi_j(S^i)$$

$$\Delta(\alpha \circ E^2\xi) = \Delta(\alpha) \circ \xi \text{ for } \alpha \in \pi_{i+1}(S^{2p+1}), \xi \in \pi_j(S^{i-1})$$

写像 $\tilde{g}: S^{2p-1} \rightarrow \tilde{S}_{p-1}^2$ のホモトピーファイバーの包含写像を、 $\partial_p: \Omega^2 S^{2p+1} \rightarrow S^{2p-1}$ とする。Selic [27] の中で、 ∂_p は (2.1.12) の写像 r_p にホモトピックであることが示された。このとき、Prop 2.2 の Δ に対して、Lem 2.1 が成り立っている。

$$(2.2.6) \quad \Delta(E^2\xi) = p\xi, E^2(\Delta\xi) = p\xi.$$

合成 $g = \rho_{p-1} \circ \tilde{g}: S^{2p-1} \rightarrow \tilde{S}_{p-1}^2 \rightarrow S_{p-1}^2$ の mapping cone を、 $K' = S_{p-1}^2 \cup_g e^{2p}$ とする。

$\mathbb{C}P^p = \mathbb{C}P^{p-1} \cup e^{2p}$ は、 S^1 -bundle map $S^{2p-1} \rightarrow \mathbb{C}P^{p-1}$ の mapping cone なので、写像 $f_{p-1}: S_{p-1}^2 \rightarrow \mathbb{C}P^{p-1}$ は、

$\bar{f}: K' = S_{p-1}^2 \cup_g e^{2p} \rightarrow \mathbb{C}P^p = \mathbb{C}P^{p-1} \cup e^{2p}$ に拡張され、top cell は $\deg \equiv 1 \pmod{p}$ で写される。 $x \in H^2(X; \mathbb{Z}_p)$ に対して、 $x^p = \mathcal{P}^1(x)$ なので、 $X = \mathbb{C}P^p$ の bottom cell と top cell の向きをそれぞれ e^2 と e^{2p} とすると、

$$(2.2.7) \quad \mathcal{P}^1(e^2) = (e^2)^p = e^{2p}$$

が成り立つ。 \bar{f} に対する \mathcal{P}^1 の自然性から、 $X = K' = S_{p-1}^2 \cup_g e^{2p}$ に対しても、上の等式が成立する。

$$(2.2.8) \quad G: S^{2p} \rightarrow S^3$$

を、 $i \circ g: S^{2p-1} \rightarrow S_{p-1}^2 \rightarrow \Omega S^3$ の adjoint とし、 $K = S^3 \cup_G e^{2p+1}$ を G の mapping cone とする。このとき、bottom cell e^3 と top cell e^{2p+1} 上の degree 1 の写像 $SK' \rightarrow K$ を得る。 \mathcal{P}^1 の自然性から、次が成り立つ。

$$(2.2.9) \quad \mathcal{P}^1(e^3) = e^{2p+1} \text{ in } H^*(K; \mathbb{Z}_p), \quad K = S^3 \cup_G e^{2p+1}.$$

G の homotopy class $[G]$ は $\pi_{2p}(S^3) \simeq \pi_{2p}(\tilde{S}^3) \simeq \mathbb{Z}_p$ に属している。Th 2.2 は、ある整数 $a \equiv 1 \pmod{p}$ に対して、 $a[G]$ の位数が p であることを示す。ここで、(2.2.3) の写像 \tilde{g} を、その a 倍と置き換えると、homotopy class $[G]$ と $[i \circ g]$ は位数 p で、(2.2.3) と (2.2.9) を満たしている。この class を次のように書く。

$$(2.2.10) \quad \alpha_1(3) = [G] \in \pi_{2p}(S^3) \simeq \mathbb{Z}_p.$$

class $[i \circ g] \in \pi_{2p-1}(S_p^2) \simeq \pi_{2p-1}(S_\infty^2)$ の位数は p なので、写像 $i \circ g: S^{2p-1} \rightarrow S_p^2$ は、次の写像に拡張される。

$$\bar{g}: (Y^{2p}, S^{2p-1}) \rightarrow (S_p^2, S_{p-1}^2).$$

$$(2.2.2) \quad S_{p-1}^2 \xrightarrow{\tilde{g}} \tilde{S}_\infty^2 \xrightarrow{\tilde{h}_p} S_\infty^{2p}.$$

Th 2.2 (2.1.9) の mod p fibration は、次の $IJ\Delta$ -sequence を誘導し、これは、mod p で完全である。

$$\dots \xrightarrow{\Delta} \pi_{i+2}(S^{2pm-1}) \xrightarrow{I} \pi_i(Q_2^{2m-1}) \xrightarrow{J} \pi_{i+3}(S^{2pm+1}) \xrightarrow{\Delta} \pi_{i+1}(S^{2pm-1}) \xrightarrow{I} \dots$$

$$\dots \xrightarrow{\Delta} \pi_{i+2}(S^{2p-1}) \xrightarrow{\tilde{g}} \pi_{i+3}(\tilde{S}^3) \xrightarrow{\tilde{h}_p} \pi_{i+3}(S^{2p+1}) \xrightarrow{\Delta} \pi_{i+1}(S^{2p-1}) \xrightarrow{\tilde{g}} \dots$$

$$(2.1.11) \quad I(\alpha \circ E^2\xi) = I(\alpha) \circ \xi \text{ for } \alpha \in \pi_{i+2}(S^{2pm-1}), \xi \in \pi_j(S^i)$$

$$J(\alpha \circ \xi) = J(\alpha) \circ E^3\xi \text{ for } \alpha \in \pi_i(Q_2^{2m-1}), \xi \in \pi_j(S^i)$$

$$\Delta(\alpha \circ E^3\xi) = \Delta(\alpha) \circ E\xi \text{ for } \alpha \in \pi_{i+3}(S^{2pm+1}), \xi \in \pi_j(S^i)$$

$$H_p(\alpha \circ E\xi) = H_p(\alpha) \circ E\xi \text{ for } \alpha \in \pi_{i+1}(S^{2m+1}), \xi \in \pi_j(S^i)$$

[27] P.Selic, A Decomposition of $\pi_*(S^{2p+1}; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, Topology 17 (1978), 407-412.

$$(2.1.12) \quad \mu^p \simeq i^2 \circ r_m: (\Omega^2 S^{2m+1}, S^{2m-1}) \rightarrow (\Omega^2 S^{2m+1}, S^{2m-1})$$

Lem 2.1 次の 2 つの合成は、どちらも p 倍する写像である。

$$\Delta \circ E^2: {}_p\pi_i(S^{2pm-1}) \rightarrow {}_p\pi_{i+2}(S^{2pm+1}) \rightarrow {}_p\pi_i(S^{2pm-1}),$$

$$E^2 \circ \Delta: {}_p\pi_{i+2}(S^{2pm+1}) \rightarrow {}_p\pi_i(S^{2pm-1}) \rightarrow {}_p\pi_{i+2}(S^{2pm+1}).$$

$$\text{Th 2.3} \quad p^m({}_p\pi_i(S^{2m+1})) = 0.$$

$$(2.2.3) \quad \tilde{g}: S^{2p-1} \rightarrow \tilde{S}_{p-1}^2 \text{ s.t. } \deg(f_{p-1} \circ \tilde{g}) \equiv 1 \pmod{p}.$$

$$(2.2.9) \quad \mathcal{P}^1(e^3) = e^{2p+1} \text{ in } H^*(K; \mathbb{Z}_p), \quad K = S^3 \cup_G e^{2p+1}.$$

Lem 2.3 top cell 上の \bar{g} の degree は mod p で -1 である。

Proof. 次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccccc}
 \pi_{2p-1}(S^{2p-1}) & \xrightarrow{\tilde{g}_*} & \pi_{2p-1}(\widetilde{S_{p-1}^2}) & \xrightarrow{\widetilde{f_{p-1}}_*} & \pi_{2p-1}(S^{2p-1}) \\
 \downarrow & & \rho_{p-1*} \downarrow & & \downarrow \cong \\
 \pi_{2p-1}(S^{2p-1}) & \xrightarrow{g_*} & \pi_{2p-1}(S_{p-1}^2) & \xrightarrow{f_{p-1}*} & \pi_{2p-1}(\mathbb{C}P^{p-1}) \\
 \partial \uparrow \times p & & \partial \uparrow & & \partial \uparrow \cong \\
 \pi_{2p}(Y^{2p}, S^{2p-1}) & \xrightarrow[\times x]{\bar{g}_*} & \pi_{2p}(S_p^2, S_{p-1}^2) & \xrightarrow[\times p!]{f_p*} & \pi_{2p}(\mathbb{C}P^p, \mathbb{C}P^{p-1})
 \end{array}$$

a を $\tilde{f}_{p-1*} \circ \tilde{g}_*$ の degree とすると、(2.2.3) により $a \equiv 1 \pmod{p}$ である。 x を \bar{g}_* の degree とする。上の図式の可換性から $p \times a = x \times p!$ である。よって、 $x = a/(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ である。■

Prop 2.2 の mod p 完全列の中で、 $i+1 \neq 3$ に対して、 $\pi_{i+1}(\widetilde{S^3})$ を $\pi_{i+1}(S^3)$ で置き換えることができる。このと

き、準同型 \tilde{G}, \tilde{H}_p はそれぞれ、次の写像によって与えられる G, H_p に置き換えられる。 $S^{2p-1} \xrightarrow{g} S_\infty^2 \xrightarrow{h_p} S_\infty^{2p}$.

shrinking map $\pi: Y^{2p} \rightarrow S^{2p} = Y^{2p}/S^{2p-1}$ は次の全射を誘導する。 $\pi_{2p}(S^{2p}) \rightarrow [Y^{2p}, S^{2p}] \simeq \mathbb{Z}_p$.

このとき、 $\pi^*(a \lrcorner_{2p}) = [\pi] = \pi^*(\lrcorner_{2p})$ であるための必要十分条件は、 $a \equiv 1 \pmod{p}$ である。Lem 2.3 は、
 $\bar{g} \simeq -\pi: Y^{2p} \rightarrow S^{2p}$ を示し、次のホモトピー可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccccc}
 S^{2p-1} & \xrightarrow{i} & Y^{2p} & \xrightarrow{\pi} & S^{2p} \\
 \downarrow & & \bar{g} \downarrow & & \downarrow -i \\
 S^{2p-1} & \xrightarrow{g} & S_\infty^2 & \xrightarrow{h_p} & S_\infty^{2p}.
 \end{array}$$

(2.2.11)

Th 2.4 次の列は $i+1 \neq 3$ のとき、mod p で完全である。

$$\dots \xrightarrow{H_p} \pi_{i+2}(S^{2p+1}) \xrightarrow{\Delta} \pi_i(S^{2p-1}) \xrightarrow{G} \pi_{i+1}(S^3) \xrightarrow{H_p} \pi_{i+1}(S^{2p+1}) \xrightarrow{\Delta} \dots$$

ここで、 G は $G(\xi) = \alpha_1(3) \circ E(\xi)$ for $\xi \in \pi_i(S^{2p-1})$ で与えられ、Hopf invariant H_p は、次を満たす。

$$H_p \{\alpha_1(3), p \lrcorner_{2p}, E(\xi)\}_1 = -E^2(\xi) \text{ for } \xi \in \pi_i(S^{2p-1}) \text{ with } p \cdot \xi = 0.$$

Proof. g の adjoint は $\alpha_1(3)$ を表わし、最初の関係が成り立つ。 ξ の coextension $\tilde{\xi}$ に対して、 $\bar{g}_*(\tilde{\xi})$ の adjoint は $\{\alpha_1(3), p \lrcorner, E(\xi)\}_1$ に属し、 $\pi_*(\tilde{\xi})$ の adjoint は $E^2(\xi)$ である。よって、(2.2.11) の可換性から 最後の関係が成り立つ。■

次の lemma は、Th 2.4 の中で、準同型 Δ を調べるために適用される。

Lem 2.4 $\xi \in \pi_i(S^{2p-1})$ に対して、 $E^2(\xi) = 0$ ならば、 ξ は Δ の像である。

Proof. $E(G(\xi)) = E(\alpha_1(3)) \circ E^2(\xi) = 0$ なので、(2.1.2) から $G(\xi) = 0$ がある。Th 2.4 の列の完全性により

Lemma が成り立つ。■

2.3 Representation of invariants

[38] (On Iterated Suspensions I,II,III) の中で、 $\pi_i(Q_2^{2m-1})$ の invariants について、以下の表現を使った。

invariant $x \in \pi_i(Q_2^{2m-1})$ に対して、 $x = I(\xi)$ となる元 $\xi \in \pi_{i+2}(S^{2pm-1})$ が存在して、stable class $\xi = E^\infty(\xi)$ が p

で割り切れないとき、(2.3.1) $x = Q^m(\xi)$ と書くことにする。また、 $y \in \pi_i(Q_2^{2m-1})$ に対して、stable class

$\eta = E^\infty(J(y))$ が非自明のとき、(2.3.2) $y = \bar{Q}^m(\eta)$ と書くことにする。

写像 $\tilde{g}: S^{2p-1} \rightarrow \Omega \widetilde{S^3}$ のホモトピーファイバーの包含写像を、 $\partial_p: \Omega^2 S^{2p+1} \rightarrow S^{2p-1}$ とする。Selic [27] の中で、 ∂_p は (2.1.12) の写像 r_p にホモトピックであることが示された。このとき、Prop 2.2 の Δ に対して、Lem 2.1 が成り立っている。

$$(2.2.6) \quad \Delta(E^2 \xi) = p \xi, \quad E^2(\Delta \eta) = p \eta.$$

合成 $g = \rho_{p-1} \circ \tilde{g}: S^{2p-1} \rightarrow S_{p-1}^2 \rightarrow \widetilde{S_{p-1}^2}$ の mapping cone を、 $K' = S_{p-1}^2 \cup_g e^{2p}$ とする。

$\mathbb{C}P^p = \mathbb{C}P^{p-1} \cup e^{2p}$ は、 S^1 -bundle map $S^{2p-1} \rightarrow \mathbb{C}P^{p-1}$ の mapping cone なので、写像 $f_{p-1}: S_{p-1}^2 \rightarrow \mathbb{C}P^{p-1}$ は、

$\bar{f}: K' = S_{p-1}^2 \cup_g e^{2p} \rightarrow \mathbb{C}P^p = \mathbb{C}P^{p-1} \cup e^{2p}$ に拡張され、top cell は $\deg \equiv 1 \pmod{p}$ で写される。 $x \in H^2(X; \mathbb{Z}_p)$ に
 対して、 $x^p = P^1(x)$ なので、 $X = \mathbb{C}P^p$ の bottom cell と top cell の向きをそれぞれ e^2 と e^{2p} とすると、

$$(2.2.7) \quad P^1(e^2) = (e^2)^p = e^{2p}$$

が成り立つ。 \bar{f} に対する P^1 の自然性から、 $X = K' = S_{p-1}^2 \cup_g e^{2p}$ に対しても、上の等式が成立する。

$$(2.2.8) \quad G: S^{2p} \rightarrow S^3$$

を、 $i \circ g: S^{2p-1} \rightarrow S_{p-1}^2 \rightarrow \Omega S^3$ の adjoint とし、 $K = S^3 \cup_G e^{2p+1}$ を G の mapping cone とする。このとき、bottom cell e^3 と top cell e^{2p+1} 上の degree 1 の写像 $SK' \rightarrow K$ を得る。 P^1 の自然性から、次が成り立つ。

$$(2.2.9) \quad P^1(e^3) = e^{2p+1} \text{ in } H^*(K; \mathbb{Z}_p), \quad K = S^3 \cup_G e^{2p+1}.$$

[38] H.Toda. On Iterated Suspensions I,II,III, J. Math. Kyoto Univ. 5 (1966), 87-142,209-250, 8(1968),101-130.

$Q^m(\xi)$ と $\bar{Q}^m(\eta)$ はどちらも **stable type** と呼ばれる。これらの invariants は stable classes ξ または η によってでは一意に定まらないことに注意する。 $Q^m(\xi)$ は ξ' の選び方による。 $\bar{Q}^m(\eta)$ は indeterminacy が $\ker(E^\infty \circ J)$ である。

他方、Moore [17] により与えられた invariants の表現を用いる。

(2.1.6) から次の図式を up to non-zero mod p coefficients of i^2, i^3 でホモトピー可換にする写像

(2.3.3) $g_m : Y^{2pm-2} \rightarrow Q_2^{2m-1}$ を選ぶことができる。

$$\begin{array}{ccccc} S^{2pm-3} & \xrightarrow{i} & Y^{2pm-2} & \xrightarrow{\pi} & S^{2pm-2} \\ i^2 \downarrow & & g_m \downarrow & & \downarrow i^3 \\ \Omega^2 S^{2pm-1} & \longrightarrow & Q_2^{2m-1} & \longrightarrow & \Omega^3 S^{2pm+1}. \end{array}$$

(2.3.4) 対応するホモトピー群の図式を考えることで次を得る。

Lem 2.5 $E^2 : \pi_p(S^{2pm-3}) \xrightarrow{p} \pi_{i+2}(S^{2pm-1})$ と $E^4 : \pi_{i-1}(S^{2pm-3}) \xrightarrow{p} \pi_{i+3}(S^{2pm+3})$ が全射ならば、

$g_m : \pi_p(Y^{2pm-2}) \xrightarrow{p} \pi_i(Q_2^{2m-1})$ も全射である。

$\gamma \in \pi_i(Y^{2pm-2})$ の像 $g_m(\gamma) \in \pi_i(Q_2^{2m-1})$ のことを、 γ による **Moore represented** または、単に **M-represented** と呼ぶ。 $\bar{g} : Y^{2p} \rightarrow \Omega S^3$ の adjoint を次で表す。

(2.3.5) $G_1 : Y^{2p+1} = S^{2p} \cup_p e^{2p+1} \rightarrow S^3$.

この写像 G_1 は (2.3.3) の $g_1 : Y^{2p-2} \rightarrow Q_2^1$ の代わりに使われる。

$\gamma \in \pi_{i+1}(Y^{2p+1})$ の像 $G_1(\gamma) \in \pi_{i+1}(S^3)$ のことを γ による **purely M-represented** と呼ぶ。

2.4 Primary computations

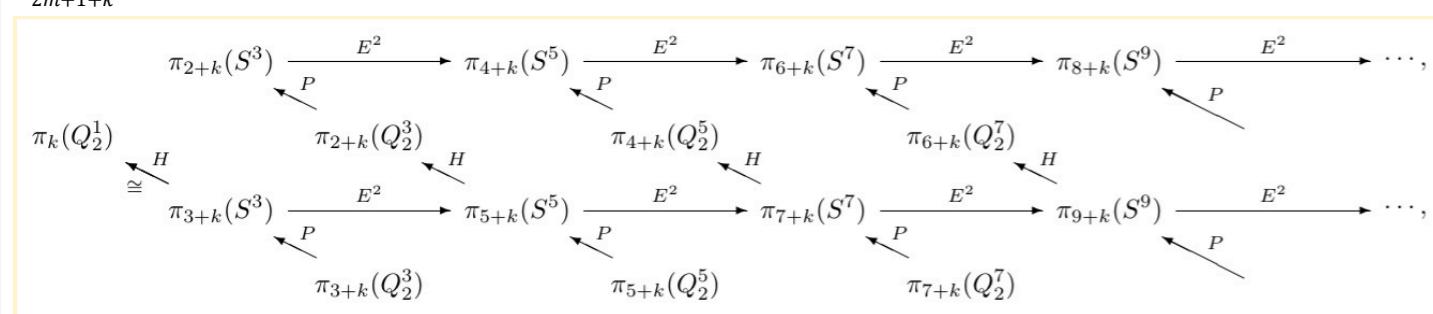
簡単のため、 p -component の記号を次のように省略する。

(2.4.1) $\pi_i(S^{2m+1}) = \pi_i(S^{2m+1})$, $\pi_i(\tilde{S}^3) = \pi_i(\tilde{S}^3)$, $\pi_i(Q_2^{2m-1}) = \pi_i(Q_2^{2m-1})$.

EHP-sequence (2.1.3) の完全性を利用する。

unstable groups の計算は、次の computing diagram と呼ばれる図式を使うことにより、 k -stem groups

$\pi_{2m+1+k}(S^{2m+1})$ を k に関して帰納的に行う。



これから、 $k < pq - 2$, $q = 2(p - 1)$ に対して、 k -stem unstable groups $\pi_{n+k}(S^n)$ の計算を行う。

最初に stable group の結果を引用する。

(2.4.2) $\pi_{rq-1}^S = \{\alpha_r\} \simeq \mathbb{Z}_p$ for $1 \leq r \leq p - 1$

$\pi_k^S = 0$ otherwise for $0 < k < pq - 2$.

ここで、 $\bar{\alpha}_1$ は $\alpha_1(3) \in \pi_{2p}(S^3)$ の stable class であり、 $r > 1$ に対して、 α_r は帰納的に次で定義される。

(2.4.3) $\alpha_r \equiv \{\alpha_1, p_1, \alpha_{r-1}\} \bmod \alpha_1 \circ \pi_{(r-1)q}^S$.

この範囲の invariant は全て stable type であり、Prop 2.1 により計算される。computation diagram において、自明な群 $\pi_i(Q_2^{2m-1}) = 0$ を消去し、invariants の非自明な群をその生成元に置き換える。

$k = q - 1 = 2p - 3$ のときに、diagram は次のようになる。

[17] J.C.Moore, The double suspension and p -primary components of the homotopy groups of spheres, Boll. Soc. Mat. Mexicana, 1 (1956), 28-37.

(2.1.3) $\dots \xrightarrow{E^2} \pi_{i+3}(S^{2m+1}) \xrightarrow{H} \pi_i(Q_2^{2m-1}) \xrightarrow{P} \pi_i(S^{2m-1}) \xrightarrow{E^2} \pi_{i+2}(S^{2m+1}) \xrightarrow{H} \dots$

Prop 2.1 $i < 2p^2m - 3$ に対して、次の split 完全列を得る。

$$0 \rightarrow \pi_{i-2pm+3}^S \otimes \mathbb{Z}_p \rightarrow \pi_i(Q_2^{2m-1}) \rightarrow \text{Tor}(\pi_{i-2pm+2}^S, \mathbb{Z}_p) \rightarrow 0.$$

$$Q^1(\iota) \xleftarrow{H} \pi_{q+2}(S^3) \xrightarrow{E^2} \pi_{q+4}(S^5) \xrightarrow{E^2} \pi_{q+6}(S^7) \xrightarrow{E^2} \cdots$$

ここで $m \geq 1$ に対して、 $H(\pi_{2m+q}(S^{2m+1})) = 0$ かつ $P(\pi_{2m+q}(Q_2^{2m+1})) = 0$ なので、 E^2 は同型である。

$\alpha_1(n) \in \pi_{q+n-1}(S^n)$ を次で定義する。

$$\alpha_1(n) = E^{n-3}\alpha_1(3) \text{ for } n > 3.$$

このとき、 $m \geq 1$ に対して、 $\pi_{q+2m}(S^{2m+1})$ は $\alpha_1(2m+1)$ で生成される。

次に、 $k = 2q - 2, k = 2q - 1$ に対して、unstable groups が現れ、図式は次のようになる。

$$\begin{array}{ccccccc} Q^1(\alpha_1) & & & & & & \\ \downarrow H & & & & & & \\ \pi_{2q+1}(S^3) & \xrightarrow{E^2} & \pi_{2q+3}(S^5) & \xrightarrow{E^2} & \pi_{2q+5}(S^7) & \xrightarrow{E^2} & \cdots \\ \downarrow P & & \downarrow H & & \downarrow H & & \\ \overline{Q}^1(\alpha_1) & & Q^2(\iota) & & & & \\ \downarrow H & & \downarrow H & & & & \\ \pi_{2q+2}(S^3) & \xrightarrow{E^2} & \pi_{2q+4}(S^5) & \xrightarrow{E^2} & \pi_{2q+6}(S^7) & \xrightarrow{E^2} & \cdots \end{array}$$

Th 2.4 により、 $\alpha_2(3) = \{\alpha_1(3), p\iota_{2p}, E\alpha_1(2p-1)\} \in \pi_{2q+2}(S^3)$ は、 $\overline{Q}^1(\alpha_1)$ に対応している。また、 $\alpha_2(3)$ の stable class は α_2 である。従って、下の行の E^2 は同型であり、 $H(\pi_{2q+4}(S^5)) = 0$ である。よって、 $P \neq 0$ かつ $\pi_{2q+3}(S^5) = 0$ であり、 $\pi_{2q-2}^S = 0$ であることが分かる。 $p > 3$ ならば、新しい stable generator $\beta_1 \in {}_p\pi_{pq-2}^S$ が現れるまで、この議論を続けることができる。

$n \geq 3, 1 \leq r < p$ に対して、 $\alpha_r(n) \in \pi_{n+rq-1}(S^n)$ を帰納的に次で定義する。

$$\alpha_r(3) = \{\alpha_1(3), p\iota_{2p}, \alpha_{r-1}(2p)\} \text{ and } \alpha_r(n) = E^{n-3}\alpha_r(3).$$

このとき、次を得る。

Th 2.5 $k < pq - 2$ に対する非自明な unstable k -stem group は下記の通りである。

$${}_p\pi_{2m+rq}(S^{2m+1}) \simeq \mathbb{Z}_p\{\alpha_r(2m+1)\} \text{ for } 1 \leq r \leq p-1 \text{ and } 1 \leq m,$$

$${}_p\pi_{2pm-1}(S^{2m+1}) \simeq \mathbb{Z}_p\{P(Q^{m+1}(\iota))\} \text{ for } 1 < m < p,$$

$${}_p\pi_{2m+rq-1}(S^{2m+1}) \simeq \mathbb{Z}_p\{P(\overline{Q}^{m+1}(\alpha_{r-m-1}))\} \text{ for } 1 < r < p \text{ and } 1 \leq m < r-1,$$

次に、Moore 空間 $Y^{n+1} = S^n \cup_p e^{n+1}$ の低次元ホモトピーを考える。

$$(2.4.4) \quad S^n \xrightarrow{f_p} S^n \xrightarrow{i} Y^{n+1} \xrightarrow{\pi} S^{n+1} \xrightarrow{f_p} S^{n+1} \xrightarrow{i} Y^{n+2} \xrightarrow{\pi} \cdots$$

をコファイバー列とする。写像 $G: S^{2p} \rightarrow S^3$ は、位数 p の生成元 $\alpha_1(3) \in \pi_{2p}(S^3)$ を表わすので、次のような G の Y^{2p+1} への拡張が存在する。

$$(2.4.5) \quad \overline{G}: Y^{2p+1} \rightarrow S^3 \text{ s.t. } G = \overline{G} \circ i.$$

合成 $f_p \circ \overline{G}: Y^{2p+1} \rightarrow S^3 \rightarrow S^3$ を考える。 S^3 は H-space であり、 Y^{2p+1} は co-H-space である。

このとき、 $f_p \circ \overline{G}$ は \overline{G} の p 倍にホモトピックであり、 Y^{2p+1} の恒等写像の p 倍も同じであるため、ホモトピックゼロとなる。そこで、次のような \overline{G} の coextension A を得る。

$$A: Y^{2p+2} \rightarrow Y^4 \text{ s.t. } \pi \circ A = E\overline{G}: Y^{2p+2} \rightarrow S^4 \text{ and } \pi \circ A \circ i = EG.$$

$n \geq 4, q = 2(p-1)$ に対して、 A の suspension とそれらの類を次のように書く。

$$(2.4.6) \quad A(n): Y^{n+q} \rightarrow Y^n \text{ and } \alpha(n) \in [Y^{n+q}, Y^n].$$

これらのことを、それぞれ、Adams map, Adams class と呼ぶ。

$\alpha(n) = \alpha^1(n)$ の r -fold composition を次のように帰納的に定義する。

$$\alpha^r(n) = \alpha(n) \circ \alpha^{r-1}(n+q) \in [Y^{n+rq}, Y^n] \text{ for } n \geq 4, r > 1.$$

Th 2.4 次の列は $i + 1 \neq 3$ のとき、mod p で完全である。

$$\cdots \xrightarrow{H_p} \pi_{i+2}(S^{2p+1}) \xrightarrow{\Delta} \pi_i(S^{2p-1}) \xrightarrow{G} \pi_{i+1}(S^3) \xrightarrow{H_p} \pi_{i+1}(S^{2p+1}) \xrightarrow{\Delta} \cdots$$

ここで、 G は $G(\xi) = \alpha_1(3) \circ E(\xi)$ for $\xi \in {}_p\pi_i(S^{2p-1})$ で与えられ、Hopf invariant H_p は、次を満たす。

$$H_p\{\alpha_1(3), p\iota_{2p}, E(\xi)\}_1 = -E^2(\xi) \text{ for } \xi \in {}_p\pi_i(S^{2p-1}) \text{ with } p \cdot \xi = 0.$$

α -series の r -th member $\alpha_r(n)$ は、次のように定義される。

$$\alpha_r(n) = \pi \circ \alpha^r(n) \circ i \in \pi_{n+rq-1}(S^n) \text{ for } n \geq 4 \text{ and } r \geq 1,$$

ここで、 i, π は、それぞれ、 $i: S^{n+rq-1} \rightarrow Y^{n+rq}$, $\pi: Y^n \rightarrow S^n$ の類を同じ記号で表わしたものである。また、次の式による $\alpha_r(3)$, $r > 1$ の定義を加えなければならない。

$$\alpha_r(3) = \bar{G}_*(\alpha^{r-1} \circ i).$$

$\alpha^{r-1}(n+q) \circ i$ は、 $\alpha_{r-1}(n+q-1)$ の coextension $S^{n+rq-1} \rightarrow Y^{n+q}$ を表わすので、 $n \geq 3$ に対して、

$$(2.4.7) \quad \alpha_r(n) \equiv \{\alpha_1(n), p_{\pi_{n+q-1}} \circ \alpha_{r-1}(n+q-1)\} \pmod{\alpha_1(n) \circ \pi_{n+rq-1}(S^{n+q-1})}.$$

これは、(2.4.3) の定義と適合し、次を得る。

$$(2.4.8) \quad \alpha_r = E^\infty \alpha_r(n) \in \pi_{rq-1}^S \text{ for } n \geq 3.$$

$[Y, Y]_k = \lim_n [Y^{n+k}, Y^n]$ を Moore spectrum $Y = \{Y^{n+1}\}$ の stable self homotopy group とする。これは、次の 2 つの完全列により計算される。

$$\begin{aligned} \pi_k^S &\xrightarrow{f_{p^*}} \pi_k^S \xrightarrow{i_*} \pi_k(Y) \xrightarrow{\pi_{k-1}^S} \pi_{k-1}^S \xrightarrow{f_{p^*}} \pi_{k-1}^S, \\ \pi_{k-1}^S(Y) &\xrightarrow{f_p^*} \pi_{k-1}^S(Y) \xrightarrow{\pi^*} [Y, Y]_k \xrightarrow{i^*} \pi_k^S(Y) \xrightarrow{f_p^*} \pi_k^S(Y). \end{aligned}$$

ここで、sphere spectrum $S = \{S^n\}$ に対して、 $\pi_k^S = [S, S]_k$, $\pi_k^S(Y) = [S, Y]_k$ である。

f_{p^*}, f_p^* は p 倍なので、次の split 完全列を得る。

$$(2.4.9) \quad 0 \rightarrow \pi_k^S \otimes \mathbb{Z}_p \xrightarrow{i_*} \pi_k(Y) \xrightarrow{\pi^*} Tor(\pi_{k-1}^S, \mathbb{Z}_p) \rightarrow 0, \quad 0 \rightarrow \pi_{k-1}^S(Y) \xrightarrow{\pi^*} [Y, Y]_k \xrightarrow{i^*} \pi_k^S(Y) \rightarrow 0.$$

identity class $1_Y \in [Y, Y]_0$ の位数は p なので、 $\pi_k^S(Y)$, $[Y, Y]_k$ は \mathbb{Z}_p -module である。

$0 < r < p$ に対して、 $\pi_{rq-1}^S = \{\alpha_r\}$, $\alpha_r = \pi \alpha^r i$ であり、よって、(2.4.9) から

$$\pi_{rq-1}^S(Y) = \{\delta \alpha^r i\}, \quad \pi_{rq}^S(Y) = \{\alpha^r i\}$$

である。ここで、 $\delta = i \circ \pi \in [Y, Y]_{-1}$ である。

Prop 2.3 $[Y, Y]_0 = \{1_Y\} \simeq \mathbb{Z}_p$, $[Y, Y]_{-1} = \{\delta\} \simeq \mathbb{Z}_p$.

$0 < r < p$ に対して、

$$[Y, Y]_{rq} = \{\alpha^r\} \simeq \mathbb{Z}_p,$$

$$[Y, Y]_{rq-1} = \{\delta \alpha^r, \alpha^r \delta\} \simeq \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p,$$

$$[Y, Y]_{rq-2} = \{\delta \alpha^r \delta\} \simeq \mathbb{Z}_p.$$

他の $k < pq - 3$ に対して、 $[Y, Y]_k$ は自明である。

Y^n は $(n-2)$ -連結なので、

$$(2.4.10) \quad E^\infty: [Y^{n+k}, Y^n] \simeq [Y, Y]_k \text{ for } n > k + 3.$$

ここで次のような記法を使うことにする。

stable class $\xi \in [Y, Y]_k$ が E^∞ の像であるならば、 $\xi(n) \in [Y^{n+k}, Y^n]$ は、 $E^\infty(\xi(n)) = \xi$ を満たす元を示しているものとする。

同様に、 $\xi \in \pi_k^S$ に対して、 $\xi(n) \in \pi_{n+k}(S^n)$ は、 $E^\infty(\xi(n)) = \xi$ を満たすものとする。

この記法 $\xi(n)$ は必ずしも一意的ではないが、それらが存在するときは、 $E(\xi(n)) = \xi(n+1)$ を満たす $\{\xi(n)\}$ を選ぶことができる。ときどき、 $\xi(n)$ の代わりに、単に ξ を使うことにする。

ξ in S^n or ξ in Y^n .

3 Iterated Suspension and Lemmas

3.1 Homology of iterated suspension fibre

2k-fold iterated suspension $E^{2k}: \pi_i(S^{2m-1}) \rightarrow \pi_{i+2k}(S^{2m-1+2k})$ は、 canonical inclusion $i^{2k}: S^{2m-1} \rightarrow \Omega^{2k} S^{2m-1+2k}$ により誘導された準同型に同値である。 i^{2k} の homotopy fiber は、次の path space として与えられる。

$$Q_{2k}^{2m-1} = \Omega(\Omega^{2k} S^{2m-1+2k}, S^{2m-1}).$$

fibration $Q_{2k}^{2m-1} \rightarrow S^{2m-1} \rightarrow \Omega^{2k} S^{2m-1+2k}$ は次の完全列を誘導する。

$$(3.1.1) \cdots \rightarrow \pi_{i+2k+1}^{2m-1+2k} \xrightarrow{E^{2k}} \pi_i(Q_{2k}^{2m-1}) \xrightarrow{P^{(2k)}} \pi_i^{2m-1} \rightarrow \pi_{i+2k}^{2m-1+2k} \xrightarrow{H^{(2k)}} \cdots,$$

ここで単に $\pi_j^m = \pi_j(S^n)$ と書いている。3対 $(\Omega^{2k+2h} S^{2m-1+2k+2h}, \Omega^{2k} S^{2m-1+2k}, S^{2m-1})$ から、次の fibration を得る。

$$(3.1.2) Q_{2k}^{2m-1} \xrightarrow{i} Q_{2k+2h}^{2m-1} \xrightarrow{j} \Omega^{2k} Q_{2h}^{2m-1+2k}.$$

よって次の列は完全である。

$$(3.1.3) \cdots \rightarrow \pi_i(Q_{2k}^{2m-1}) \xrightarrow{\partial} \pi_i(Q_{2k+2h}^{2m-1}) \xrightarrow{i_*} \pi_{i+2k}(Q_{2h}^{2m-1+2k}) \xrightarrow{\partial} \pi_{i-1}(Q_{2k}^{2m-1}) \xrightarrow{i_*} \cdots.$$

[4] でよく知られているように、mod p homology ring $H_*(\Omega^r S^{n+r})$ は \mathbb{Z}_p 上の free commutative algebra であり、

$\Omega^r S^{n+r}$ から infinite loop space $Q(S^n) = \lim_s \Omega^s S^{n+s}$ への包含写像は、環準同型の単射を誘導する。[20] で構成さ

れた Dyer-Lashof operation $Q^j: H_i(\Omega^r S^{n+r}) \rightarrow H_{i+jq}(\Omega^r S^{n+r})$, $q = 2(p-1)$ は、homology suspension と compatible であり、degree $2j$ の x に対して $Q^j(x) = x^p$ である。

$H_*(S^{2m+1}) = \wedge(u)$ から始めて、 $H_*(\Omega S^{2m+1}) = \mathbb{Z}_p[u]$ であり、各基本類 u と homology Bockstein Δ に対して、

$$H_*(\Omega^2 S^{2m+1}) = \wedge(u, Q^m u, Q^{pm} u, \dots) \otimes \mathbb{Z}_p[\Delta Q^m u, \Delta Q^{pm} Q^m u, \dots],$$

$$H_*(\Omega^3 S^{2m+1}) = \mathbb{Z}_p[u, Q^m u, \Delta Q^{pm-1} \Delta Q^m u, Q^{pm} Q^m u, \Delta Q^{p(pm-1)} Q^{pm-1} \Delta Q^m u, \dots] \otimes \wedge(\Delta Q^m u, Q^{pm-1} \Delta Q^m u,$$

$$\Delta Q^{pm} Q^m u, Q^{p(pm-1)} Q^{pm-1} \Delta Q^m u, \dots).$$

さらに、 $k < pm$ に対して次を得る。

$$H_*(\Omega^{2k+1} S^{2m+2k-1}) = \mathbb{Z}_p[u, Q^m u, Q^{m+1} u, \dots, Q^{m+k-1} u, \Delta Q^{pm-1} \Delta Q^m u, \dots] \otimes \wedge(\Delta Q^m u, \Delta Q^{m+1} u, \dots,$$

$$\Delta Q^{m+k-1} u, Q^{pm-1} \Delta Q^m u, \dots).$$

2k-fold iterated suspension $i^{2k}: S^{2m-1} \rightarrow \Omega^{2k} S^{2m+2k-1}$ の homotopy fiber $Q_{2k}^{2m-1} = \Omega(\Omega^{2k} S^{2m+2k-1}, S^{2m-1})$ の mod p homology は、fibration $\Omega^{2k} S^{2m+2k-1} \xrightarrow{i} Q_{2k}^{2m-1} \rightarrow S^{2m-1}$ に対する Wang 完全列により計算される。

このとき、 i は H_* の全射を誘導し、その kernel は (u) である。このように、 $H_*(Q_{2k}^{2m+2k-1})$ は誘導された環構造を持ち、次の結果が成り立つ。

$$(3.1.4) H_*(Q_2^{2m-1}) = \mathbb{Z}_p[u, \Delta v_1, v_2, \Delta w, \dots] \otimes (\Delta u, v_1, \Delta v_2, \dots)$$

for $u \in H_{2pm-2}$, $v_1 \in H_{2p^2 m - 2p - 1}$, $v_2 \in H_{2p^2 m - 2}$, $w \in H_{2p^3 m - 2p^2 - 1}$.

$$(3.1.5) H_*(Q_{2k}^{2m-1}) = \mathbb{Z}_p[u_0, u_1, \dots, u_{k-1}, \Delta v, \dots] \otimes (\Delta u_0, \Delta u, u_1, \dots, \Delta v_{k-1}, \dots)$$

for $u_i \in H_{2pm-2+iq}$ ($0 \leq i \leq k-1$) and $v \in H_{2p^2 m - 2p - 1}$.

$\mathcal{P}_*^i: H_n(X) \rightarrow H_{n-iq}(X)$ を mod p dual Steenrod operation とする。このとき、[20] により Q^j と \mathcal{P}_*^i における Nishida の関係がある。特に次が成り立つ。

$$(3.1.6) \mathcal{P}_*^1 Q^{s+1} = sQ^s, \mathcal{P}_*^1 \Delta Q^{s+1} = (s+1)\Delta Q^s + Q^s \Delta \quad (s > 0)$$

$$(3.1.7) \mathcal{P}_*^p Q^{s+p} = -\binom{s(p-1)}{p} Q^s + Q^{s+1} \mathcal{P}_*^1$$

$$(3.1.8) \mathcal{P}_*^p \Delta Q^{s+p} = -\binom{s(p-1)-1}{p} \Delta Q^s + \Delta Q^{s+1} \mathcal{P}_*^1 + \binom{s(p-1)-1}{p-1} Q^s \Delta$$

[4] E.Dyer and R.Lashof, Homology of iterated loop spaces, Ann. of Math. 84 (1962), 35-88.

[20] G.Nishida, Cohomology operations in iterated loop space, Proc.Japan Acad. 44(1967), 839-842.

[20] G.Nishida, Cohomology operations in iterated loop space, Proc.Japan Acad. 44(1967), 839-842.

(3.1.6)を適用することにより次を得る。

$$\mathcal{P}_*^1(\Delta Q^{pm}Q^m u) = (pm\Delta Q^{pm-1} + Q^{pm-1}\Delta)Q^m u = Q^{pm-1}\Delta Q^m u,$$

$$\mathcal{P}_*^1(Q^{m+i}u) = (m+i-1)Q^{m+i-1}u,$$

$$\mathcal{P}_*^1(\Delta Q^{m+i}u) = ((m+i)\Delta Q^{m+i-1} + Q^{m+i-1}\Delta)u = (m+i)\Delta Q^{m+i-1}u.$$

\mathcal{P}_*^1 の自然性により、対応する元

$$u_i = i_*(Q^{m+i}u) \in H_{2mp-2+iq}(Q_{2k}^{2m-1}; \mathbb{Z}_p) \quad (0 \leq i < k), \quad v = i_*(Q^{pm}Q^m u) \in H_{2p^2m-2}(Q_2^{2m-1}; \mathbb{Z}_p)$$

に対して、同じ関係が成り立つ。よって、次の定理を得る。

Th 3.1 (1) $\text{degree} < 2p^3m - 2p^2 - 4$, $u_0 \in H_{2pm-2}$, $v \in H_{2p^2m-2}$ に対して、

$$H_*(Q_2^{2m-1}; \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p[u_0, \Delta \mathcal{P}_*^1 \Delta v, v] \otimes \wedge (\Delta u_0, \mathcal{P}_*^1 \Delta v, \Delta v).$$

(2) $\text{degree} < 2p^2m - 2p - 3$, $u_i \in H_{2pm-2+iq}$ ($0 \leq i \leq k-1$) に対して、

$$H_*(Q_{2k}^{2m-1}; \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p[u_0, u_1, \dots, u_{k-1}] \otimes \wedge (\Delta u_0, \Delta u_1, \dots, \Delta u_{k-1}).$$

ここで、 $0 \leq i \leq k-1$ に対して次の関係が成り立つ。

$$\mathcal{P}_*^1 u_i = (m+i-1)u_{i-1}, \quad \mathcal{P}_*^1 \Delta u_i = (m+i)\Delta u_{i-1}.$$

3.2 Simple unstable elements

EHP-sequence に付随する exact coupleにおいて、最初の微分は、 $d_1 = H \circ P: \pi_{i+3}(Q_2^{2m+1}) \rightarrow \pi_i(Q_2^{2m-1})$ である。 $x \in \pi_{i+3}(Q_2^{2m+1})$ の d_1 -image $d_1(x)$ が非自明で、 $\xi = P(x) \in \pi_{i+3}(S^{2m+1})$ と仮定する。このとき、次を得る。

(3.2.1) $E^2(\xi) = 0$ and $\xi \notin \text{Im } E^2$.

このような元 ξ は simple unstable element と呼ばれる。 $m \not\equiv 0, 1 \pmod{p}$ の場合、collection

$\{x, \xi = P(x), H(\xi) \neq 0\}$ は EHP-sequence, IJΔ-sequence のどちらに対しても独立で、unstable groups の計算の中で消すことができるという意味で、removable であるという。上の differential d_1 は、 $i: Q_2^{2m-1} \rightarrow Q_4^{2m-1}$ の homotopy fiber の inclusion $d: \Omega^3 Q_2^{2m+1} \rightarrow Q_2^{2m-1}$ によって誘導される。(2.3.3) の写像 $g_m: Y^{2pm-2} \rightarrow Q_2^{2m-1}$ について考える。これから誘導される mod p homology の写像 g_m が top cell の orientation を Th 3.1 のクラス u_0 に写すように g_m を選ぶ。同様に、 $g_{m+1}: Y^{2p(m+1)-2} \rightarrow Q_2^{2m+1}$ を考え、 $\Omega_0^3 g_{m+1}: Y^{2p(m+1)-5} = Y^{2pm+q-3} \rightarrow \Omega^3 Q_2^{2m+1}$ ($q = 2(p-1)$) を、 g_{m+1} の adjoint とする。 g_{m+1} は degree $< 4pm - 5$ のとき、mod p 同値であるので、 $m > 1$ に対して、写像 $h_m: Y^{2pm+q-3} \rightarrow Y^{2pm-2}$ が存在して、次の図式がホモトピー可換になる。

$$(3.2.2) \quad \begin{array}{ccc} Y^{2pm+q-3} & \xrightarrow{h_m} & Y^{2pm-2} \\ \Omega_0^3 g_{m+1} \downarrow & & \downarrow g_m \\ \Omega^3 Q_2^{2m+1} & \xrightarrow{d} & Q_2^{2m-1}. \end{array}$$

$K(m, 2) = Y^{2pm-2} \cup_{h_m} CY^{2pm+q-3}$ を、写像 h_m の mapping cone とする。このとき、 g_m は、 $\bar{g}_m: K(m, 2) \rightarrow Q_4^{2m-1}$ に拡張され、次のホモトピー可換図式を得る。

$$(3.2.3) \quad \begin{array}{ccccc} Y^{2pm-2} & \xrightarrow{i'} & K(m, 2) & \xrightarrow{\pi'} & Y^{2pm+q-2} \\ g_m \downarrow & & \bar{g}_m \downarrow & & \downarrow \Omega_0^2 g_{m+1} \\ Q_2^{2m-1} & \xrightarrow{i} & Q_4^{2m-1} & \xrightarrow{j} & \Omega^2 Q_2^{2m+1}. \end{array}$$

ここで、 π' は $K(m, 2)$ の部分複体 Y^{2pm-2} をつぶす写像である。これらの写像 g_m, g_{m+1}, \bar{g}_m は、up to homotopy で一意的である。 \bar{g}_m はまた、degree $< 4pm - 5$ で、mod p 同値である。

unstable alpha families の他に、計算の前に除外できるいくつかのコレクションがある。元 $\xi \in {}_p \pi_i(S^{2m+1})$ は、 $E^2 \xi = 0$ かつ $\xi \notin \text{Im } E^2$ のとき simple であるという。 $m \not\equiv 1, 0 \pmod{p}$ のとき、この ξ は IJΔ-sequence とは独立である。そこで、 $P(x) = \xi$ を満たす不变量 $H(\xi)$ と $x \in \pi_i(Q_2^{2m-1})$ とともに ξ を取り除くことができる。これらの 3 つの元のことを simple removable collection と呼ぶ。
 $m \not\equiv 1, 0 \pmod{3} \leftrightarrow m = 1 \pmod{3}$?
 $m \not\equiv 0, 1 \pmod{3} \leftrightarrow m = 2 \pmod{3}$?

Th 2.2 (2.1.9) の mod p fibration は、次の IJΔ-sequence を誘導し、これは、mod p で完全である。

$$\dots \xrightarrow{\Delta} \pi_{i+2}(S^{2pm-1}) \xrightarrow{I} \pi_i(Q_2^{2m-1}) \xrightarrow{J} \pi_{i+3}(S^{2pm+1}) \xrightarrow{\Delta} \pi_{i+1}(S^{2pm-1}) \xrightarrow{I} \dots$$

$$(2.3.3) \quad g_m: Y^{2pm-2} \rightarrow Q_2^{2m-1}$$

Th 3.1 (1) $\text{degree} < 2p^3m - 2p^2 - 4$, $u_0 \in H_{2pm-2}$, $v \in H_{2p^2m-2}$ に対して、

$$H_*(Q_2^{2m-1}; \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p[u_0, \Delta \mathcal{P}_*^1 \Delta v, v] \otimes \wedge (\Delta u_0, \mathcal{P}_*^1 \Delta v, \Delta v).$$

(2) $\text{degree} < 2p^2m - 2p - 3$, $u_i \in H_{2pm-2+iq}$ ($0 \leq i \leq k-1$) に対して、

$$H_*(Q_{2k}^{2m-1}; \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p[u_0, u_1, \dots, u_{k-1}] \otimes \wedge (\Delta u_0, \Delta u_1, \dots, \Delta u_{k-1}).$$

ここで、 $0 \leq i \leq k-1$ に対して次の関係が成り立つ。

$$\mathcal{P}_*^1 u_i = (m+i-1)u_{i-1}, \quad \mathcal{P}_*^1 \Delta u_i = (m+i)\Delta u_{i-1}.$$

$m > 1$ のとき、類 $\eta_m = [h_m] \in [Y^{2pm+q-3}, Y^{2pm-2}] \simeq [Y^{q-1}, Y^0]^S$ は一意に定まる。このとき、次の定理を得る。

Th 3.2 $m > 1$ に対して、写像 $h_m: Y^{2pm+q-3} \rightarrow Y^{2pm-2}$ は、次の元を表わす。

$$\eta_m = ((m+1)\delta\alpha - m \cdot \alpha\delta)(2pm-2) \in [Y^{2pm+q-3}, Y^{2pm-2}].$$

これは、Th 3.1(2) で与えられた Q_4^{2m-1} のホモロジー構造から得られる。詳細は [37] の Prop 4.5 を見よ。 η_m の desuspensions を次のように書く。

$$(3.2.4) \quad \eta_m^{(t)} = ((m+1)\delta\alpha - m \cdot \alpha\delta)(2pm-2-t), \quad \eta'_m = \eta_m^{(1)}.$$

$m = 1$ の場合、 $Q_2^1 \simeq \Omega^3 S^3$ なので、 Q_2^1 を S^3 の 3-連結 fiber \tilde{S}^3 に置き換える。 Q_4^1 をまた $\Omega^2 S^5$ の 3-連結 fiber $\tilde{\Omega^2 S^5}$ に置き換える。このとき、 $\Omega(\Omega^2 S^5, S^3)$ は $Q_2^3 = \Omega(\Omega^2 S^5, S^3)$ にホモトピー同値であり、次の fibration を得る。

$$Q_2^3 \xrightarrow{\tilde{d}} \tilde{S}^3 \xrightarrow{\tilde{i}} \tilde{\Omega^2 S^5}. \quad S^5 \text{ の mod } p \text{ コホモロジー構造は、次の fibration } \tilde{S}^5 \rightarrow S^5 \rightarrow K(Z, 5) \text{ から確かめられ、}$$

$$H^*(K(Z, 5); \mathbb{Z}_p) = \wedge(u, \mathcal{P}^1 u, \mathcal{P}^2 u, \mathcal{P}^3 \mathcal{P}^1 u, \dots) \otimes \mathbb{Z}_p[\Delta \mathcal{P}^1 u, \Delta \mathcal{P}^2 u, \Delta \mathcal{P}^3 \mathcal{P}^1 u, \dots], \quad \text{ここで、 } u \in H^5 \text{ は fundamental class, } \Delta$$

は cohomology Bockstein である。Adem relation により、 $\mathcal{P}^1(\mathcal{P}^1 u) = 2\mathcal{P}^2 u, \mathcal{P}^1(\Delta \mathcal{P}^1 u) = \Delta \mathcal{P}^2 u$.

$w_5 \in H^{2p+2}(\tilde{S}^5; \mathbb{Z}_p)$ を $\mathcal{P}^1 u \in H^{2p+3}$ の cohomology suspension とすると、Serre spectral sequence により、

$$H^*(\tilde{S}^5; \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p[w_5, \mathcal{P}^1 w_5, \mathcal{P}^2 w_5, \dots] \otimes \wedge(\Delta w_5, \Delta \mathcal{P}^1 w_5, \Delta \mathcal{P}^2 w_5, \dots) \quad \text{for } * < p(2p+2), \Delta \mathcal{P}^1 w_5 = 2\mathcal{P}^1 \Delta w_5$$

であり、さらに、 $w_3 \in H^*(\tilde{\Omega^2 S^5}; \mathbb{Z}_p)$ に対して、

$$(3.2.5) \quad H^*(\tilde{\Omega^2 S^5}; \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p[w_3, \mathcal{P}^1 w_3] \otimes \wedge(\Delta w_3, \Delta \mathcal{P}^1 w_3) \quad \text{for } * < 2p^2, \Delta \mathcal{P}^1 w_3 = 2\mathcal{P}^1 \Delta w_3.$$

同様に、 $H^*(\tilde{\Omega S^3}; \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p[w_3] \otimes \wedge(\Delta w_3)$ for $* < 2p^2$.

$\tilde{G}_1: Y^{2p+1} \rightarrow \tilde{S}^3$ を、 $G_1: Y^{2p+1} \rightarrow S^3$ のリフトとすると、 \tilde{G}_1 は dimension $< 4p+1$ に対して mod p 同値である。

$\tilde{d}: Q_2^3 \rightarrow \tilde{S}^3$ を g_2 と \tilde{G}_1 で近似すると、次の図式がホモトピー可換となるような写像 $\tilde{h}_1: Y^{2p+q} \rightarrow Y^{2p+1}$ を得る。

$$(3.2.6) \quad \begin{array}{ccccc} Y^{2p+q} & \xrightarrow{\tilde{h}_1} & Y^{2p+1} & \xrightarrow{i'} & \tilde{K} \\ \downarrow g_2 & & \downarrow \tilde{G}_1 & & \downarrow \tilde{G}_2 \\ Q_2^3 & \xrightarrow{\tilde{d}} & \tilde{S}^3 & \xrightarrow{i} & \Omega^2 S^5. \end{array}$$

ここで、 $\tilde{K} = Y^{2p+1} \cup CY^{2p+q}$ は、 \tilde{h}_1 の mapping cone で、 \tilde{G}_2 は dimension $< 4p+1$ で mod p 同値である。

Th3.2 と同様に、 \tilde{h}_1 のクラス $\tilde{\eta}_1$ に対して、次の定理が成り立つ。

Th 3.3 写像 $\tilde{h}_1: Y^{4p-2} \rightarrow Y^{2p+1}$ は次の元を表す。 $\tilde{\eta}_1 = (2\delta\alpha - \alpha\delta)(2p+1) \in [Y^{4p-2}, Y^{2p+1}]$.

simple unstable element に対して、Th3.2 と3.3 を適用すると次を得る。

Prop 3.1 (1) $m > 1$ とする。ある元 $\gamma \in \pi_i(Y^{2p(m+1)-5})$ に対して、 $x \in \pi_{i+3}(Q_2^{2m+1})$ が $E^3 \gamma$ による M-represented

であるならば、 $d_1(x) = HP(x) \in \pi_i(Q_2^{2m-1})$ は、 $h_{m*}(\gamma) = \eta_m$ 。 $\gamma \in \pi_i(Y^{2p-2})$ による M-represented である。

(2) $m = 1$ とする。 $x \in \pi_i(Q_2^3)$ が $\gamma \in \pi_i(Y^{4p-2})$ による M-represented であるならば、 $P(x) \in \pi_i(S^3)$ は、

$\tilde{h}_{1*}(\gamma) = \tilde{\eta}_1$ 。 $\gamma \in \pi_i(Y^{2p+1})$ による purely M-represented である。

stable element $\xi \in \pi_k^S$ に対して、 $E^\infty(\xi(n)) = \xi$ を満たす元を、 $\xi(n) \in \pi_{n+k}(S^n)$ と書く。stable element $\xi \in \pi_k^S$ の unstableness $u(\xi)$ を次で定義する。

$$(3.2.7) \quad u(\xi) = \min \{n \mid \exists \xi(n): E^\infty(\xi(n)) = \xi\}.$$

Th 3.1 (1) degree $< 2p^3 m - 2p^2 - 4$, $u_0 \in H_{2pm-2}, v \in H_{2p^2 m-2}$ に対して、

$$H_*(Q_2^{2m-1}; \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p[u_0, \Delta \mathcal{P}_*^1 \Delta v, v] \otimes \wedge(\Delta u_0, \mathcal{P}_*^1 \Delta v, \Delta v).$$

(2) degree $< 2p^2 m - 2p - 3$, $u_i \in H_{2pm-2+i}$ ($0 \leq i \leq k-1$) に対して、

$$H_*(Q_{2k}^{2m-1}; \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p[u_0, u_1, \dots, u_{k-1}] \otimes \wedge(\Delta u_0, \Delta u_1, \dots, \Delta u_{k-1}).$$

ここで、 $0 \leq i \leq k-1$ に対して次の関係が成り立つ。

$$\mathcal{P}_*^1 u_i = (m+i-1)u_{i-1}, \mathcal{P}_*^1 \Delta u_i = (m+i)\Delta u_{i-1}.$$

[37] H.Toda. On homotopy groups of S^3 -bundles over spheres, J.Math.Kyoto Univ. 2 (1963), 193-207.

$$w_5 \in H^{2p+2}$$

$$w_3 \in H^{2p}$$

Lem 2.5 $E^2: \pi_i(S^{2pm-3}) \rightarrow \pi_{i+2}(S^{2pm-1})$ と $E^4: \pi_{i-1}(S^{2pm-3}) \rightarrow \pi_{i+3}(S^{2pm+3})$ が全射ならば、

$g_{m*}: \pi_i(Y^{2pm-2}) \rightarrow \pi_i(Q_2^{2m-1})$ も全射である。

$\gamma \in \pi_i(Y^{2pm-2})$ の像 $g_{m*}(\gamma) \in \pi_i(Q_2^{2m-1})$ のことを、 γ による **M-represented** と呼ぶ。

$\bar{g}: Y^{2p} \rightarrow \Omega S^3$ の adjoint を次で表す。

$$(2.3.5) \quad G_1 = ad(\bar{g}): Y^{2p+1} = S^{2p} \cup_p e^{2p+1} \rightarrow S^3.$$

この写像 G_1 は (2.3.3) の $g_1: Y^{2p-2} \rightarrow Q_2^1$ の代わりに使われる。

$\gamma \in \pi_{i+1}(Y^{2p+1})$ の像 $G_{1*}(\gamma) \in \pi_{i+1}(S^3)$ のことを γ による **purely M-represented** と呼ぶ。

$$2p + q = 2p + 2(p-1) = 4p - 2$$

$$x = g_{m+1*}(E^3 \gamma) \Rightarrow HP(x) = g_{m*}(\eta_m \circ \gamma).$$

$$x = g_{2*}(\gamma) \Rightarrow P(x) = G_{1*}(\tilde{\eta}_1 \circ \gamma).$$

section 3.2 の記法 $Q^m(\xi), \bar{Q}^m(\xi)$ を使うと、つぎの Lemma を得る。

Lem 3.1 $\xi \in \pi_k^S$ に対して、 $u(\xi) < 2p(m+1) - 5$ ならば、 $d_1(Q^{m+1}(\xi)) = HP(Q^{m+1}(\xi)) = (m+1)Q^m(\alpha_1\xi)$.

$m=1$ のときは、 $u(\xi) \leq 4p-3$ である ξ に対してこの式が成り立つ。

Lem 3.2 $\xi \in \pi_k^S$ に対して、 $u(\xi) < 2p(m+1) - 5, p\xi = 0$ ならば、 $d_1(\bar{Q}^{m+1}(\xi)) = HP(\bar{Q}^{m+1}(\xi)) = m \cdot \bar{Q}^m(\alpha_1\xi)$.

ここで、 $u(\xi) \leq 4p-3$ の ξ に対して、 $m=1$ のときに成り立つ。

Lem 3.3 $\xi \in \pi_k^S$ に対して、 $u(\xi) < 2p(m+1) - 5, p\xi = 0, \alpha_1\xi = 0$ ならば、 $\eta \in (m+1)\{\alpha_1, p, \xi\} - m\{p, \alpha_1, \xi\}$

に対して、 $d_1(\bar{Q}^{m+1}(\xi)) = HP(\bar{Q}^{m+1}(\xi)) = Q^m(\eta)$.

ここで、 $u(\xi) \leq 4p-3$ の ξ に対して、 $m=1$ のときに成り立つ。

3.3 Lemmas for p times and Δ

mapping cone $K(m, 2) = Y^{2pm-2} \cup_{h_m} CY^{2pm+q-3}$ の cofibration

$$(3.3.1) \quad Y^{2pm-2} \xrightarrow{i'} K(m, 2) \xrightarrow{\pi'} Y^{2pm+q-2}$$

を考える。 $1_K : K(m, 2) \rightarrow K(m, 2)$ を $K(m, 2)$ の恒等写像とする。

Th 3.4 恒等写像 1_K の p 倍 $p \cdot 1_K : K(m, 2) \rightarrow K(m, 2)$ は次の合成にホモトピックである。

$$i' \circ \alpha(2pm-2) \circ \pi' : K(m, 2) \rightarrow Y^{2pm+q-2} \rightarrow Y^{2pm-2} \rightarrow K(m, 2).$$

この定理は本質的には Gray[7] で証明された。 $[Y^n, Y^n] \simeq \mathbb{Z}_p$ なので、 Y^n の恒等写像の p 倍はゼロホモトピックで

ある。これはある $f : Y^{2pm+q-2} \rightarrow Y^{2pm-2}$ に対して、homotopy $p \cdot 1_K \simeq i' \circ f \circ \pi'$ を与え、2つの写像の

mapping cone はホモトピー同値である。 $p \cdot 1_K$ の mapping cone は smash product $Y^2 \wedge K(m, 2)$ である。

$i' \circ f \circ \pi'$ の mapping cone は f の mapping cone を部分複体として含んでいる。Cartan formula により

$Y^2 \wedge K(m, 2)$ のなかで、 \mathcal{P}^1 作用素を考えると、 f の mapping cone の中の \mathcal{P}^1 が得られ、定理が証明される。

$h_m : Y^{2pm+q-4} \rightarrow Y^{2pm-3}, K'(m, 2) = Y^{2pm-3} \cup_{h_m} CY^{2pm+q-4}$ を h_m と $K(m, 2)$ の desuspensions とし、suspension

$E : \pi_{i-1}(K'(m, 2)) \rightarrow \pi_i(K(m, 2))$ を考える。 $x \in Im E$ ならば、 $p \cdot x = (p \cdot 1_K)_*(x)$ である。よって、Th 3.4 の系として次を得る。

Prop 3.2 $\gamma \in \pi_i(K(m, 2))$ が suspension image とすると、次が成り立つ。 $p(\gamma) = i'_*(\alpha(2pm-2) \circ \pi'_*(\gamma))$.

これを次の可換図式

$$(3.3.2) \quad \begin{array}{ccccc} \pi_{i+3}(S^{2m+1}) & \xrightarrow{E^2} & \pi_{i+5}(S^{2m+3}) & \xrightarrow{\cong} & \pi_{i+5}(S^{2m+3}) \\ \downarrow H & & \downarrow H^{(4)} & & \downarrow H \\ \pi_i(Q_2^{2m-1}) & \xrightarrow{i_*} & \pi_i(Q_4^{2m-1}) & \xrightarrow{j_*} & \pi_{i+2}(Q_2^{2m+1}) \\ \downarrow P & & \downarrow P^{(4)} & & \downarrow P \\ \pi_i(S^{2m-1}) & \xrightarrow{=} & \pi_i(S^{2m-1}) & \xrightarrow{E^2} & \pi_{i+2}(S^{2m+1}) \end{array}$$

に適用すると、[38] の Th 5.3, 5.4 の一般化である次の2つの lemma を得る。

Lem 3.4 $x \in \pi_{i+2}(Q_2^{2m+1})$ が $E^4(\gamma)$ による M-represented であり、 $h'_{m^*}(\gamma) = 0$ ならば、元 $\xi \in \pi_i(S^{2m-1})$ が存在

し、 $\alpha(2pm-2) \circ E^2\gamma$ による M-represented $y \in \pi_i(Q_2^{2m-1})$ に対して、 $p \cdot \xi = P(y), E^2\xi = P(x)$.

Proof. (3.2.3) の記法により、 $x = \Omega_0^2 g_{m+1*}(E^2\gamma)$ である。仮定により、 x の coextension $\bar{x} \in \pi_i(K(m, 2))$ が存在して、 $\pi'_*(\bar{x}) = E^2\gamma$ であり、 \bar{x} は suspension の像である。Prop 3.2 から次を得る。

$$p(\bar{x}) = i'_*(\alpha(2pm-2) \circ E^2\gamma).$$

(3.2.3) の写像に対して、 $\bar{x} = \bar{g}_{m*}(\bar{\gamma}), y = g_{m*}(\alpha(2pm-2) \circ E^2\gamma)$ とする。(3.2.3) の可換性から次を得る。

$$(3.3.3) \quad p(\bar{x}) = i_*(y), j_*(\bar{x}) = x.$$

よって、(3.3.2) の可換性から lemma を得る。■

$$HP(x) = ax$$

$$HP(X) = AX$$

[7] B.W.Gray, Unstable families related to the image of J , Proc. Camb. Phil. Soc, 96 (1984), 95-113.

[38] H.Toda. On Iterated Suspensions I,II,III, J. Math. Kyoto Univ. 5 (1966), 87-142, 209-250, 8(1968), 101-130.

$$x = g_{m+1*}(E^4\gamma), h'_{m^*}(\gamma) = 0, y = g_{m*}(\alpha(2pm-2) \circ E^2\gamma) \Rightarrow p \cdot \xi = P(y), E^2\xi = P(x).$$

$P(x)$ は E^2 の像、よって $HP(x) = 0$.

$P(y)$ は p で割れる。

Lem 3.5 $\xi \in \pi_{i+5}(S^{2m+3})$ の Hopf invariant $H(\xi)$ が $E^4(\gamma)$ による M-represented であり、 $h'_{m^*}(\gamma) = 0$ ならば、元 $\eta \in \pi_{i+3}(S^{2m+1})$ が存在し、 $p \cdot \xi = E^2\eta$ であり、 $H(\eta)$ は $\alpha(2pm - 2) \circ E^2\gamma$ による M-represented である。

Proof. $x = H(\xi) \in \pi_{i+2}(Q_2^{2m+1})$ とすると、 $y = g_{m^*}(\alpha(2pm - 2) \circ E^2\gamma), \bar{x} \in \pi_i(Q_4^{2m-1})$ に対して、(3.3.3) が成り立つ。 $j_*(\bar{x} - H^{(4)}(\xi)) = j_*(\bar{x}) - H(\xi) = x - x = 0$ 。なので、 $\bar{x} = H^{(4)}(\xi) + i_*(z)$ を満たす $z \in \pi_i(Q_2^{2m-1})$ が存在する。Lem 2.2 により、 $pz = 0$ である。よって、 $i_*(y) = p(\bar{x}) = H^{(4)}(p\xi), P(y) = P^{(4)}(i_*(y)) = P^{(4)}H^{(4)}(p\xi) = 0$ である。EHP-sequence の完全性により、 $H(\eta') = y$ を満たす $\eta' \in \pi_{i+3}(S^{2m+1})$ が存在する。よって、ある $\eta_0 \in \pi_{i+1}(S^{2m-1})$ に対して、 $H^{(4)}(p\xi - E^2\eta') = i_*(y) - i_*H(\eta') = i_*(y) - i_*(y) = 0, p\xi - E^2\eta' = E^4\eta_0$ が成り立つ。 $\eta = \eta' + E^2\eta_0$ とすると、lemma が得られる。■

次に、準同型 $\Delta: {}_p\pi_{i+2}(S^{2pm+1}) \rightarrow {}_p\pi_i(S^{2pm-1})$ について考える。この準同型は、(2.1.9) のファイバー列

$\Omega^4 S^{2pm+1} \xrightarrow{\partial_p} \Omega^2 S^{2pm-1} \rightarrow Q_2^{2m-1} \rightarrow \Omega^3 S^{2pm+1} \xrightarrow{\partial_p} \Omega S^{2pm-1}$ の中の ∂_p によって誘導される。Lem 2.1 により、最初の ∂_p の S^{2pm-3} への制限は degree p の写像である。よって、path space をとることにより、写像

$\bar{\partial}_p: Q_4^{2pm+1} \rightarrow Q_2^{2pm-1}$ が得られ、次の図式を可換にする準同型 $\bar{\Delta}: \pi_{i-1}(Q_4^{2pm-3}) \rightarrow \pi_{i-1}(Q_2^{2pm-3})$ を誘導する。

$$(3.3.4) \quad \begin{array}{ccccccc} \pi_i(S^{2m+1}) & \xrightarrow{E^4} & \pi_{i+4}(S^{2pm+1}) & \xrightarrow{H^{(4)}} & \pi_{i-1}(Q_4^{2pm-3}) & \xrightarrow{P^{(4)}} & \pi_{i-1}(S^{2pm-3}) \\ \downarrow \times p & & \downarrow \Delta & & \downarrow \bar{\Delta} & & \downarrow \times p \\ \pi_i(S^{2pm-3}) & \xrightarrow{E^2} & \pi_{i+2}(S^{2pm-1}) & \xrightarrow{H} & \pi_{i-1}(Q_2^{2pm-3}) & \xrightarrow{P} & \pi_{i-1}(S^{2pm-3}) \end{array}$$

$\bar{g}_{pm-1}: K(pm-1, 2) \rightarrow Q_4^{2pm-3}$ と $g_{pm-1}: Y^{2p(pm-1)-2} \rightarrow Q_2^{2pm-3}$ は、up to degree $4p(pm-1) - 5$ で、mod p 同値なので、次の図式をホモトピー可換にする写像 D' が存在する。

$$(3.3.5) \quad \begin{array}{ccc} K(pm-1, 2) & \xrightarrow{D'} & Y^{2p(pm-1)-2} \\ \downarrow \bar{g}_{pm-1} & & \downarrow g_{pm-1} \\ Q_4^{2pm-3} & \xrightarrow{\bar{\partial}_p} & Q_2^{2pm-3} \end{array}$$

D' の部分複体 $Y^{2p(pm-1)-2}$ への制限は degree p の写像なので、それは null homotopic である。そこで、 D' として次の様にとることができる。 $D' = D \circ \pi: K(pm-1, 2) \rightarrow Y^{2p(pm-1)-2+q} \rightarrow Y^{2p(pm-1)-2}$ 。

Prop 3.3 上の写像 $D: Y^{2p(pm-1)-2+q} \rightarrow Y^{2p(pm-1)-2}$ は、up to non-zero coefficient で次の元を表す。

$\alpha(2p(pm-1) - 2)$ 。

この Lemma は [38] の Lemma 9.2 である。Th 3.1(1) を使ってこれを証明できる。

Lem 3.6 $\xi \in \pi_{i+4}(S^{2pm+1})$ の Hopf invariant $H(\xi) \in \pi_{i+1}(Q_2^{2pm-1})$ が、 $\gamma \in \pi_{i-1}(Y^{2p(pm-1)-4})$ に対して、 $E^2\gamma$ による

M-represented であり、 $h_{pm-1}(\gamma) = 0$ を満たすならば、up to non-zero coefficient で $H(\Delta(\xi))$ は、

$\alpha(2p(pm-1) - 2) \circ \gamma$ による M-represented である。

上の lemma の特別な場合だが、次の場合は頻繁に現れる。

Lem 3.7 $\xi \in \pi_{i+4}(S^{2pm+1})$, $\gamma \in \pi_s^s, \delta \in \pi_t^s$ に対して、up to non-zero coefficients で次の関係が成り立つ。

(1) $H(\xi) = Q^{pm}(\gamma)$ は、 $H(\Delta(\xi)) = \bar{Q}^{pm-1}(\alpha\gamma) = HP(\bar{Q}^{pm}(\xi))$ を誘導する。

(2) $H(\xi) = Q^{pm}(\gamma), \Delta(\xi) = P(\bar{Q}^{pm}(\gamma))$ は、 $H(\xi \circ \delta(i+4)) = Q^{pm}(\gamma\delta), \Delta(\xi \circ \delta(i)) = P(\bar{Q}^{pm}(\gamma\delta))$ を誘導する。

Proof. $S^{2pm} \subset Y^{2pm+1}$ の injection image を考えることにより、Lem 3.6 から (1) が成り立つ。

H, Δ, P の自然性から (2) が成り立つ。■

3.4 Short range unstable elements

2番目の微分 $d_2: Ker d_1 \rightarrow Coker d_1$ を考える。より正確には、次の条件を満たす元 $\xi \in \pi_i(S^{2m+1})$ を考える。

$$\begin{array}{ccccc} \pi_{i+3}(S^{2m+1}) & \xrightarrow{E^2} & \pi_{i+5}(S^{2m+3}) & \xrightarrow{\cong} & \pi_{i+5}(S^{2m+3}) \\ \downarrow H & & \downarrow H^{(4)} & & \downarrow H \\ \pi_i(Q_2^{2m-1}) & \xrightarrow{i_*} & \pi_i(Q_4^{2m-1}) & \xrightarrow{j_*} & \pi_{i+2}(Q_2^{2m+1}) \\ \downarrow P & & \downarrow P^{(4)} & & \downarrow P \\ \pi_i(S^{2m-1}) & \xrightarrow{\cong} & \pi_i(S^{2m-1}) & \xrightarrow{E^2} & \pi_{i+2}(S^{2m+1}) \end{array} \quad (3.3.2)$$

$$(3.3.3) \quad p(\bar{x}) = i_*(y), j_*(\bar{x}) = x.$$

Lem 2.2 ${}_p\pi_i(Q_2^{2m-1})$ は、elementary である。すなわち $p({}_p\pi_i(Q_2^{2m-1})) = 0$.

$$(2.1.9) \quad \Omega^2 S^{2pm-1} \xrightarrow{i} Q_2^{2m-1} \xrightarrow{j} \Omega^3 S^{2pm+1} \xrightarrow{\partial_p} \Omega S^{2pm-1}.$$

Lem 2.1 次の2つの合成は、どちらも p 倍する写像である。

$$\Delta \circ E^2: {}_p\pi_i(S^{2pm-1}) \rightarrow {}_p\pi_{i+2}(S^{2pm+1}) \rightarrow {}_p\pi_i(S^{2pm-1}),$$

$$E^2 \circ \Delta: {}_p\pi_{i+2}(S^{2pm+1}) \rightarrow {}_p\pi_i(S^{2pm-1}) \rightarrow {}_p\pi_{i+2}(S^{2pm+1}).$$

$$g_m: Y^{2pm-2} \rightarrow Q_2^{2m-1}$$

[38] H.Toda. On Iterated Suspensions I,II,III, J. Math. Kyoto Univ. 5 (1966), 87-142,209-250, 8(1968),101-130.

Th 3.1 (1) $degree < 2p^3m - 2p^2 - 4, u_0 \in H_{2pm-2}, v \in H_{2p^2m-2}$ に対して、

$$H_*(Q_2^{2m-1}; \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p[u_0, \Delta P_*^1 \Delta v, v] \otimes \wedge (\Delta u_0, P_*^1 \Delta v, \Delta v).$$

(2) $degree < 2p^2m - 2p - 3, u_i \in H_{2pm-2+iq} (0 \leq i \leq k-1)$ に対して、

$$H_*(Q_{2k}^{2m-1}; \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p[u_0, u_1, \dots, u_{k-1}] \otimes \wedge (\Delta u_0, \Delta u_1, \dots, \Delta u_{k-1}).$$

ここで、 $0 \leq i \leq k-1$ に対して次の関係が成り立つ。

$$P_*^1 u_i = (m+i-1)u_{i-1}, P_*^1 \Delta u_i = (m+i)\Delta u_{i-1}.$$

$$H(\xi) = c \Rightarrow H\Delta(\xi) = AC = HP(X)$$

$$H(\xi) = c, \Delta\xi = P(C) \Rightarrow H(\xi\delta) = cd, \Delta(\xi\delta) = P(CD)$$

Lem 3.6 $\xi \in \pi_{i+4}(S^{2pm+1})$ の Hopf invariant $H(\xi) \in \pi_{i+1}(Q_2^{2pm-1})$ が、 $\gamma \in \pi_{i-1}(Y^{2p(pm-1)-4})$ に対して、 $E^2\gamma$ による

M-represented であり、 $h_{pm-1}(\gamma) = 0$ を満たすならば、up to non-zero coefficient で $H(\Delta(\xi))$ は、

$\alpha(2p(pm-1) - 2) \circ \gamma$ による M-represented である。

(3.4.1) $E^2(\xi) \neq 0$, $E^4(\xi) = 0$, $\xi \notin \text{Im } E^2$.

これは、次に同値である。

(3.4.2) $H(\xi) \neq 0$, $E^2(\xi) = P(x) \neq 0$ for some $x \in \pi_{i+2}(Q_2^{2m+3})$.

このような元 $\{\xi, E^2\xi\}$ は、**two stage unstable elements** または、**secondary unstable elements** と呼ばれる。
次の図式は可換である。

$$(3.4.3) \begin{array}{ccccc} \pi_i(S^{2m+1}) & \xrightarrow{E^2} & \pi_{i+2}(S^{2m+3}) & \xleftarrow{P} & \pi_{i+2}(Q_2^{2m+3}) \\ \downarrow H & & \downarrow H^{(4)} & & \downarrow = \\ \pi_{i-3}(Q_2^{2m-1}) & \xrightarrow{i_*} & \pi_{i-3}(Q_4^{2m-1}) & \xleftarrow{\partial} & \pi_{i+2}(Q_2^{2m+3}) \end{array}$$

次に、(3.1.5) の結果を考慮することにより、次のホモトピー可換図式を得る。

$$(3.4.4) \begin{array}{ccccc} Y^{2pm-2} & \xrightarrow{i'} & K(m, 2) & \xleftarrow{\tilde{h}_{m+1}} & Y^{2pm+4p-5} \\ \downarrow g_m & & \downarrow \bar{g}_m & & \downarrow \Omega_0^3 g_{m+2} \\ Q_2^{2m-1} & \xrightarrow{i} & Q_4^{2m-1} & \xleftarrow{d} & \Omega^3 Q_2^{2m+3} \end{array}$$

ここで、 \tilde{h}_{m+1} は $h_{m+1}^{(2)}: Y^{2pm+4p-6} \rightarrow Y^{2pm+2p-4}$ の coextension である。

Prop 3.4 $\gamma \in \pi_{i-4}(Y^{2m+4p-8})$, $\eta_{m+1*}^{(3)}(\gamma) = 0$ に対して、 $x \in \pi_{i+2}(Q_2^{2m+3})$ は M-represented by $E^6\gamma$ と仮定すると、

$$i_*\{\eta_m, \eta_{m+1}^{(2)}, E^3\gamma\}_1 = \partial(x).$$

複体 $K(m, 2) = Y^{2pm-2} \cup e^{2pm+2p-5} \cup e^{2pm+2p-4}$ は $(m+1)\alpha_1(2pm-3)$ の mapping cone

$C_{(m+1)\alpha}^{2pm+2p-5} = S^{2pm-3} \cup e^{2pm+2p-5}$ を部分複体として含んでいる。さらに \tilde{h}_{m+1} の $S^{2pm+4p-6}$ への制限は、

$(m+2)\alpha_1(2pm+2p-6)$ の coextension $\tilde{h}: S^{2pm+4p-6} \rightarrow C_{(m+1)\alpha}^{2pm+2p-5}$ に homotopic である。よって、Prop 3.4 の系として次を得る。

Lem 3.8 $m \not\equiv -1, -2 \pmod{p}$ で、 $\gamma \in \pi_{i-4}(S^{2m+4p-9})$ に対して invariant $x \in \pi_{i+2}(Q_2^{2m+3})$ は $E^6(i_*\gamma)$ による

M-represented であり、 $\alpha_1(2m+4p-9) \circ \gamma = 0$ であるならば、 $\xi \in \pi_i(S^{2m+1})$ が存在して、up to non-zero

coefficient で、 $H(\xi) \in I\{\alpha_1(2pm-1), \alpha_1(2pm+2p-4), E^3\gamma\}, E^2(\xi) = P(x)$.

同様に、 $K(m, 2)/C_{(m+1)\alpha}^{2pm+2p-5}$ を考えることにより次を得る。

Lem 3.9 $m \not\equiv 0, -1 \pmod{p}$ で、 $\gamma \in \pi_{i-3}(Y^{2m+4p-8})$ に対して invariant $x \in \pi_{i+2}(Q_2^{2m+3})$ は $E^6\gamma$ による

M-represented であり、 $\eta_{m+1}^{(3)} \circ \gamma = 0$ であるならば、 $\xi \in \pi_{i+1}(S^{2m+1})$ が存在して、up to non-zero coefficient で

$$H_p(\xi) = JH(\xi) \in \{\alpha_1(2pm+1), \alpha_1(2pm+2p-2), E^3\pi_*\gamma\}.$$

β_1 を $\pi_{pq-2}^S \simeq \mathbb{Z}_p$ の生成元とする。 β_1 は p 個の α_1 の long bracket $\beta_1 = \{\alpha_1, \alpha_1, \dots, \alpha_1\}$ により与えられる。

そして、それは Adem relation の secondary operation $\mathcal{P}^{p-1}\mathcal{P}^1 = 0$ によって検出される。 $n \geq 2p-1$ に対して unstable case $\beta_1(n) \in \pi_{n+pq-2}(S^n)$, $E^\infty\beta_1(n) = \beta_1$ が定義され、 $n \geq 2p+1$ に対して stable であり、 $\beta_1(2p-1)$ の位数は p^2 である。

[38] から unstable elements の little longer series についての次の2つの lemma (Th 10.3, 10.8) を引用する。

Lem 3.10 $l \geq 1, m = pl$ とする。このとき、 $\pi_{2pm+pq-2}(S^{2m+1})$ の元 $v(2m+1)$ が存在し、up to non-zero coefficient で、 $H(v(2m+1)) = I(Q_m(\beta_1)), E^{2(p-2)}v(2m+1) = P(I(\alpha_1(2mp+pq-1)))$.

ここで、 $v(2m+2p-1) = E^{2p-2}v(2m+1)$ である。

(3.1.5) $H_*(Q_{2k}^{2m-1}) \mathbb{Z}_p[u_0, u_1, \dots, u_{k-1}, \Delta v, \dots] \otimes (\Delta u_0, \Delta u, u_1, \dots, \Delta v_{k-1}, \dots)$

for $u_i \in H_{2pm-2+iq}$ ($0 \leq i \leq k-1$) and $v \in H_{2p^2m-2p-1}$.

Prop 3.4 $\gamma \in \pi_{i-4}(Y^{2m+4p-8})$, $\eta_{m+1*}^{(3)}(\gamma) = 0$ に対して、 $x \in \pi_{i+2}(Q_2^{2m+3})$ は M-represented by $E^6\gamma$ と仮定すると、

$$i_*\{\eta_m, \eta_{m+1}^{(2)}, E^3\gamma\}_1 = \partial(x).$$

[38] H.Toda. On Iterated Suspensions I,II,III, J. Math. Kyoto Univ. 5 (1966), 87-142,209-250, 8(1968),101-130.

大きな n に対して β_1 の extension と coextension をそれぞれ $\bar{\beta} \in [Y^{n+pq-1}, S^n]$, $\tilde{\beta} \in \pi_{n+pq-1}(Y^{n+1})$ とする。 $\bar{\beta}$ と $\tilde{\beta}$ の mapping cone をそれぞれ $C_{\bar{\beta}} = S^n \cup e^{n+pq-1} \cup e^{n+pq}$, $C_{\tilde{\beta}} = S^n \cup e^{n+1} \cup e^{n+pq}$, とする。このとき、 β_1 は次の性質で特徴づけられる。

(3.4.5) $C_{\bar{\beta}}$ と $C_{\tilde{\beta}}$ 上で $\mathcal{P}^p \neq 0$.

$\pi_{(2p+1)q-2}^S \simeq \mathbb{Z}_p$ の他の生成元があり、これは Adem relation $\mathcal{P}^p \mathcal{P}^{p+1} = \mathcal{P}^{2p+1} + \mathcal{P}^{2p} \mathcal{P}^1$, に関する secondary operation により検出される。

Lem 3.11 整数 $n \not\equiv p - 2 \pmod{p}$, $n > 1$ に対して、 $m = pn$ と仮定する。このとき、 $\bar{\nu}_1(2m+1)$

$\in \pi_{2pm+(2p+1)q-2}(S^{2m+1})$ が存在し、up to non-zero coefficient で、

$$H(\bar{\nu}_1(2m+1)) = \bar{Q}^m(\beta_2), \nu_1(2m+2p+3) = P(Q^{m+p+1}(\beta_1)).$$

ここで、 $\nu(2m+2p+3) = E^{2p+2}\nu(2m+1)$ である。

3.5 Lemmas for α_1 times

$m \geq 1$ に対して、特性類 $\alpha_1(2m+1)$ を持つ sphere-bundle over sphere $S^{2m+1} \xrightarrow{i} B_m(\alpha) \xrightarrow{p} S^{2m+2p-1}$ を考える。この sphere-bundle に関するホモトピー完全列

$$\cdots \xrightarrow{i_*} \pi_{i+1}(B_m(\alpha)) \xrightarrow{p_*} \pi_{i+1}(S^{2m+2p-1}) \xrightarrow{\partial_\alpha} \pi_i(S^{2m+1}) \xrightarrow{i_*} \pi_i(B_m(\alpha)) \xrightarrow{p_*} \cdots,$$

の境界準同型 ∂_α を考え、次を得る。

Prop 3.5 $\gamma \in \pi_{i-1}(S^{2m-1+q})$ に対して、 $\partial_\alpha(E^2\gamma) = \alpha_1(2m+1) \circ E\gamma$.

Oka [21] は、写像

(3.5.1) $f: S^2(B_m(\alpha)) \rightarrow B_{m+1}(\alpha)$ for $m \geq 1$

を構成し、これは $i < 4m+2p$ に対して $H_i()$ の同型を誘導する。 $QB_m(\alpha)$ を f の adjoint の homotopy fiber とすると、次の fibration を得る。

(3.5.2) $QB_m(\alpha) \rightarrow B_m(\alpha) \xrightarrow{i} \Omega^2 B_{m+1}(\alpha)$,

また、 $B_m(\alpha)$ に対して、次の EHP-sequence を得る。

(3.5.3) $\cdots \xrightarrow{E^2} \pi_{i+3}(B_{m+1}(\alpha)) \xrightarrow{H} \pi_i(QB_m(\alpha)) \xrightarrow{P} \pi_i(B_m(\alpha)) \xrightarrow{E^2} \pi_{i+2}(B_{m+1}(\alpha)) \xrightarrow{H} \cdots$.

さらに、次の可換で完全な図式を得る。

(3.5.4)

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_{i+2}(B_m(\alpha)) & \xrightarrow{p_*} & \pi_{i+2}(S^{2m+2p-1}) & \xrightarrow{\partial_\alpha} & \pi_{i+1}(S^{2m+1}) & \xrightarrow{i_*} & \pi_{i+1}(B_m(\alpha)) \\ \downarrow E^2 & & \downarrow E^2 & & \downarrow E^2 & & \downarrow E^2 \\ \pi_{i+4}(B_{m+1}(\alpha)) & \xrightarrow{p_*} & \pi_{i+4}(S^{2m+2p+1}) & \xrightarrow{\partial_\alpha} & \pi_{i+3}(S^{2m+3}) & \xrightarrow{i_*} & \pi_{i+3}(B_{m+1}(\alpha)) \\ \downarrow H & & \downarrow H & & \downarrow H & & \downarrow H \\ \pi_{i+1}(QB_m(\alpha)) & \xrightarrow{p_*} & \pi_{i+1}(Q_2^{2m+2p-1}) & \xrightarrow{\partial_\alpha} & \pi_i(Q_2^{2m+1}) & \xrightarrow{i_*} & \pi_i(QB_m(\alpha)) \\ \downarrow P & & \downarrow P & & \downarrow P & & \downarrow P \\ \pi_{i+1}(B_m(\alpha)) & \xrightarrow{p_*} & \pi_{i+1}(S^{2m+2p-1}) & \xrightarrow{\partial_\alpha} & \pi_i(S^{2m+1}) & \xrightarrow{i_*} & \pi_i(B_m(\alpha)) \end{array}$$

次の合成を考える。

$$J \circ \partial_\alpha \circ I: \pi_{i+3}(S^{2p(m+p)-1}) \rightarrow \pi_{i+1}(Q_2^{2m+2p-1}) \rightarrow \pi_i(Q_2^{2m+1}) \rightarrow \pi_{i+3}(S^{2p(m+1)+1}).$$

次の Theorem は Oka [21] による。

Th 3.5 任意の $\gamma \in \pi_i(S^{2pm+p-1})$ に対して、up to non-zero coefficients で、次の関係が成り立つ。

$$J \partial_\alpha I(E^3\gamma) = \beta_1(2p(m+1)+1) \circ E^3\gamma.$$

[21] S.Oka, On the Homotopy Groups of Sphere Bundles over Spheres, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser.A-I 33 (1969), 161-195.

[21] S.Oka, On the Homotopy Groups of Sphere Bundles over Spheres, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser.A-I 33 (1969), 161-195.

境界準同型 $\partial_\alpha : \pi_{i+1}(Q_2^{2m+2p-1}) \rightarrow \pi_i(Q_2^{2m+1})$ は、写像 $d_\alpha : \Omega Q_2^{2m+2p-1} \rightarrow Q_2^{2m+1}$ により誘導される。Moore space で写像を近似することにより、 $m \geq 1$ に対して、次の可換図式を得る。

$$(3.5.5) \quad \begin{array}{ccc} Y^{2p(m+p)-3} & \xrightarrow{\beta_{(1)}} & Y^{2p(m+1)-2} \\ \downarrow \Omega_0 g_{m+p} & & \downarrow g_{m+1} \\ \Omega Q_2^{2m+2p-1} & \xrightarrow{d_\alpha} & Q_2^{2m+1} \end{array}$$

ここで、 $\beta_{(1)}$ は次を満たす。

$$(3.5.6) \quad \pi \beta_{(1)} i = \beta_1(2p(m+1) - 2).$$

これを (3.5.4) に適用することで次の lemma を得る。

Lem 3.12 元 $\xi \in \pi_{i+4}(S^{2m+2p+1})$ の Hopf invariant $H(\xi)$ が $\gamma \in \pi_i(Y^{2p(m+p)-3})$ に対して、 $E\gamma$ による M-represented であると仮定する。 $m \geq 1$ ならば、Hopf invariant $H(\partial_\alpha(\xi))$ は $\beta_{(1)} \circ \gamma$ による M-represented である。

invariant が stable type ならば、この lemma は次のように適用される。

$$(3.5.7) \quad H(\xi) = Q^{m+p}(\gamma) \text{ は、} H(\partial_\alpha(\xi)) = \bar{Q}^{m+1}(\beta_1 \gamma) \text{ を誘導する。}$$

Lem 3.13 $x \in \pi_{i+1}(Q_2^{2m+2p-1})$ が $E\gamma$ による M-represented であり、 $y \in \pi_i(Q_2^{2m+1})$ は $\beta_{(1)}\gamma$ による represented であるとする。 $m \geq 1$ ならば、 $P(y) = \partial_\alpha P(x)$ である。

Lem 2.5 $E^2 : {}_p\pi_i(S^{2pm-3}) \rightarrow {}_p\pi_{i+2}(S^{2pm-1})$ と $E^4 : {}_p\pi_{i-1}(S^{2pm-3}) \rightarrow {}_p\pi_{i+3}(S^{2pm+3})$ が全射ならば、

$g_{m*} : {}_p\pi_i(Y^{2pm-2}) \rightarrow {}_p\pi_i(Q_2^{2m-1})$ も全射である。

$\gamma \in \pi_i(Y^{2pm-2})$ の像 $g_{m*}(\gamma) \in \pi_i(Q_2^{2m-1})$ のことを、 γ による **M-represented** と呼ぶ。

$\bar{g} : Y^{2p} \rightarrow \Omega S^3$ の adjoint を次で表す。

$$(2.3.5) \quad G_1 = ad(\bar{g}) : Y^{2p+1} = S^{2p} \cup_p e^{2p+1} \rightarrow S^3.$$

この写像 G_1 は (2.3.3) の $g_1 : Y^{2p-2} \rightarrow Q_2^1$ の代わりに使われる。

$\gamma \in \pi_{i+1}(Y^{2p+1})$ の像 $G_1(\gamma) \in \pi_{i+1}(S^3)$ のことを γ による **purely M-represented** と呼ぶ。

$$H(\xi) \in \pi_{i+1}(Q_2^{2m+2p-1}), H(\xi) = g_{m+p*}(E\gamma)$$

$$\Rightarrow H(\partial_\alpha(\xi)) \in \pi_{i+3}(Q_2^{2m+3}), ?$$

4 Unstable Alpha families

4.1 Alpha type invariants

まず、Moore space の stable self homotopy \mathbb{Z}_p 上の algebra $[Y, Y]_* = \Sigma_k [Y, Y]_k$ における Yamamoto [45] の関係式を思い出す。

$$(4.1.1) \quad 2\alpha\delta\alpha = \alpha^2\delta + \delta\alpha^2.$$

この関係式と $\delta\delta = 0$ から次を得る。

$$(4.1.2) \quad \alpha^s\delta\alpha^t = t \cdot \alpha^{s+t-1}\delta\alpha + (1-t)\alpha^{s+t}\delta = s \cdot \alpha\delta\alpha^{s+t-1} + (1-s)\delta\alpha^{s+t},$$

$$\alpha^s\delta\alpha^t\delta = \delta\alpha^t\delta\alpha^s = t \cdot \alpha^{s+t-1}\delta\alpha\delta.$$

次に、Adams [1] の e -invariant $e : \pi_{rq-1}^S \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ を思い出す。特に、

Th 4.1 整数 $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ に対して、 $r = ap^v$ とする。

$$(1) \quad e(\alpha_r) \equiv -1/p \pmod{p}.$$

$$(2) \quad e(\pi_{rq-1}^S) \subset \mathbb{Z}(1/p^{v+1})/\mathbb{Z}.$$

$$(3) \quad e\{p, \alpha_{r-1}, \alpha_1\} = b/p^{v+1} \text{ for some } b \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

上の theorem の (1) と (2) から、 $r \not\equiv 0 \pmod{p}$ ならば、 $\alpha_r = \pi\alpha^r i = i^*\pi_*(\alpha^r)$ は p で割れず、(2.4.10) により $\delta\alpha^r\delta \neq 0$ である。 $(4.1.2)$ により、 $\delta\alpha^r\delta = r \cdot \alpha^{r-1}\delta\alpha\delta$ である。よって、 $r \not\equiv 0 \pmod{p}$ に対して、 $\alpha^{r-1}\delta\alpha\delta \neq 0$ であり、

$$(4.1.3) \quad \alpha^s\delta\alpha\delta \neq 0 \text{ for all } s > 0.$$

その結果、Yamamoto [45] は次を得た。

Prop 4.1 α, δ によって生成される $[Y, Y]_*$ の部分群は、次の additive base を持つ。

$$\{1_Y, \delta, \alpha^k, \alpha^k\delta, \alpha^{k-1}\delta\alpha, \alpha^{k-1}\delta\alpha\delta ; k = 1, 2, \dots\}.$$

(4.1.3) の結果は次を導く。

Prop 4.2 modulo $p \cdot \pi_{rq-1}^S$ で一意的な元 $\tilde{\alpha}_r \in \pi_{rq-1}^S$ が存在し、以下を満たす。

$$\tilde{i}\alpha_r = (\alpha^{r-1}i)\alpha_1, \tilde{\alpha}_r\pi = \alpha_1(\pi\alpha^{r-1}), \tilde{i}\alpha_r\pi = \alpha^{r-1}\delta\alpha\delta = \delta\alpha\delta\alpha^{r-1} \neq 0, \tilde{\alpha}_r \in \{p, \alpha_{r-1}, \alpha_1\} = \{\alpha_1, \alpha_{r-1}, p\}.$$

Proof. α_1 は J -image であり、よって $\alpha_1\alpha_{r-1} = \alpha_{r-1}\alpha_1$ は J -image であるので、 $\alpha_{r-1}\alpha_1 = 0$ であることが分かる。

よって $\pi(\alpha^{r-1}\delta\alpha i) = \alpha_{r-1}\alpha_1 = 0$ である。 $(2.4.9)$ の列の完全性により、 $\tilde{i}\alpha_r = \alpha^{r-1}\delta\alpha i = (\alpha^{r-1}i)\alpha_1$ を満たす $\tilde{\alpha}_r$ が存在する。よって、 $\tilde{i}\alpha_r\pi = \alpha^{r-1}\delta\alpha\delta = \delta\alpha\delta\alpha^{r-1} \neq 0$ である。 $\alpha^{r-1}i$ は α_{r-1} の coextension であるので、

$\tilde{i}\alpha_r = (\alpha^{r-1}i)\alpha_1$ は $i\{p, \alpha_{r-1}, \alpha_1\}$ に属している。 $\ker i_* = p\pi_{rq-1}^S$ であるので、 $\tilde{\alpha}_r$ は $\{p, \alpha_{r-1}, \alpha_1\}$ に属している。双対的に考えると、他方も得られる。■

Th 4.1 の (2), (3) は、 $\tilde{\alpha}_r$ の位数は p^{v+1} の倍数であることを示している。

次に unstable version を考える。 $n \geq 4$ に対して、 $(2.4.7)$ の中で $\alpha(n) \in [Y^{n+q}, Y^n]$, $q = 2(p-1)$ が定義され、 $n \geq 3$ に対して $\delta(n) \in [Y^{n-1}, Y^n]$ である。これらは $E\alpha(n) = \alpha(n+1)$ でつながり、 $E^\infty\alpha(n) = \alpha$, $E\delta(n) = \delta(n+1)$, $E^\infty\delta(n) = \delta$ である。積の unstable version もまた自然に定義される。例えば、 $\delta\alpha(n) = \delta(n+q) \cdot \alpha(n)$, $\alpha\delta(n) = \alpha(n-q) \cdot \delta(n)$ など。

LEM 4.1 次元 $n \geq 6$ に対して、関係 (4.1.1) が成り立つ。すなわち、 $2\alpha\delta\alpha(n) = (\alpha^2\delta + \delta\alpha^2)(n)$.

このように、次元 $n \geq 6$ の unstable case に対して、関係 (4.1.2) が成り立つ。

証明は、[38] Prop 4.2 の中で見られる。

$r \geq 0$ に対して、invariant $A_r(2m-1) \in \pi_{2pm+rq-3}(Q_2^{2m-1})$ を、次による M -represented であると定義する。

$$(4.1.4) \quad \alpha^r i(2pm-2) : S^{2pm+rq-3} \rightarrow Y_p^{2pm+rq-2} \rightarrow Y_p^{2pm-2} (\xrightarrow{g_m} Q_2^{2m-1}).$$

[45] N.Yamamoto, Algebra of stable homotopy of Moore space, J. Math. Osaka City Univ. 14 (1963), 45-67.

[1] J.F.Adams, On the groups $J(X)$ -IV, Topology 5 (1966), 21-71.

$$(2.4.10) \quad E^\infty : [Y^{n+k}, Y^n] \simeq [Y, Y]_k \text{ for } n > k + 3.$$

$$(2.4.9) \quad 0 \rightarrow \pi_k^S \otimes \mathbb{Z}_p \xrightarrow{i_*} \pi_k^*(Y) \xrightarrow{\pi_*} \text{Tor}(\pi_{k-1}^S, \mathbb{Z}_p) \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow \pi_{k-1}^S(Y) \xrightarrow{\pi_*} [Y, Y]_k \xrightarrow{i^*} \pi_k^S(Y) \rightarrow 0.$$

$$(2.4.7) \quad \alpha_r(n) \equiv \{\alpha_1(n), p\alpha_{n+q-1}, \alpha_{r-1}(n+q-1)\} \pmod{\alpha_1(n) \cdot \pi_{n+rq-1}^S(S^{n+q-1})}.$$

[38] H.Toda. On Iterated Suspensions I, II, III, J. Math. Kyoto Univ. 5 (1966), 87-142, 209-250, 8(1968), 101-130.

$r = 0$ のとき、identity class $\iota_{2pm-1} \in \pi_{2pm-1}(S^{2pm-1})$ に対して、 $A_0(2m-1) = I(\iota_{2pm-1}) \neq 0$. この元を次のように書く。

$$(4.1.5) w = I(\iota_{2pm-1}) = A_0(2m-1) \in \pi_{2pm-3}(Q_2^{2m-1}).$$

$r > 0$ のとき、 $J(A_r(2m-1)) = E^3(\pi\alpha^r i)(2pm+1)$, すなわち、

$$(4.1.6) J(A_r(2m-1)) = \alpha_r(2pm+1) \neq 0 \text{ in } \pi_{2pm+rq}(S^{2pm+1}).$$

Prop 4.3 $r \geq 0$ に対して、invariants $A_r(2m-1)$ は非自明である。

また、もう一つの invariant $a_r(2m-1) \in \pi_{2pm+rq-4}(Q_2^{2m-1})$ for $r > 0$

を、次で表される M-represented であると定義する。

$$(4.1.7) \alpha^{r-1} i \alpha_1(2pm-2) : S^{2pm+rq-4} \rightarrow S^{2pm+(r-1)q-3} \rightarrow Y_p^{2pm-2} (\rightarrow {}^{g_m} Q_2^{2m-1}).$$

4.2 Simple unstable alpha families

Prop 3.1 により、 $A_{r-1}(2m+1)$ の d_1 -image は、 Y^{2pm-2} 上で、

$$\eta_m \circ (\alpha^{r-1} i) = ((m+1)\delta\alpha - m\alpha\delta)(\alpha^{r-1} i) = (m+1)\delta\alpha^r - m\alpha\delta\alpha^{r-1} i$$

なので、M-represented である。

$\delta\alpha^r i = (r\alpha^{r-1}\delta\alpha + (1-r)\alpha^r\delta)i = r\alpha^{r-1}\delta\alpha i$ かつ $\alpha\delta\alpha^{r-1} i = (r-1)\alpha^{r-1}\delta\alpha i$ であるので、 Y^{2pm-2} 上で、

$$\eta_m \circ (\alpha^{r-1} i \alpha_1) = (m+r)\alpha^{r-1}\delta\alpha i = (m+r)\alpha^{r-1} \alpha_1.$$

よって、次を得る。

$$\text{Prop 4.4 } d_1(A_{r-1}(2m+1)) = HP(A_{r-1}(2m+1)) = (m+r)a_r(2m-1).$$

invariant $A_{r-m-1}(2m+1)$ の P-image を次のように書く。

$$(4.2.1) \alpha_r^*(2m+1) = P(A_{r-m-1}(2m+1)) \in \pi_{2m+rq-1}(S^{2m+1}) \text{ for } 1 \leq m < r.$$

meta-stable range では、 $J(a_r(2m-1)) = \tilde{i}\alpha_r(2pm-1)$ は p で割れないで、 $a_r(2m-1) \neq 0$. よって、

$m+r \not\equiv 0 \pmod{p}$ のとき、 $\alpha_r^*(2m+1)$ は simple unstable element である。

$a_r(2m-1)$ の非自明性を調べるために、次の準備をする。

Lem 4.2 元 $\xi \in \pi_i(S^{2m-1})$ と $\eta \in \pi_j(S^i)$ が次を満たすと仮定する。 $p\xi = 0, p\eta = 0, E^2(\xi \circ \eta) = 0$.

このとき、 $\{p\iota_{2m+1}, E^2\xi, E^2\eta\}$ と $\{E^2\xi, E^2\eta, p\iota_{j+2}\}$ は E^2 -images である。

Proof. $C_\eta = S^i \cup e^{j+1}$ を η の mapping cone とし、 $\bar{\xi} : E^2 C_\eta \rightarrow S^{2m+1}$ を $E^2\xi : S^{i+2} \rightarrow S^{2m+1}$ の extension とする。

$\mu^p \simeq i^2 \circ r_m : \Omega^2 S^{2m+1} \rightarrow \Omega^2 S^{2m+1}$ を (2.1.12) の deformation とする。 $\bar{\xi}$ の adjoint $\Omega_0^2 \bar{\xi}$ に対して、次を得る。

$$\mu^p \circ \Omega_0^2 \bar{\xi} \simeq i^2 \circ r_m \circ \Omega_0^2 \bar{\xi} : C_\eta \rightarrow \Omega^2 S^{2m+1} \rightarrow \Omega^2 S^{2m+1}.$$

$g = r_m \circ \Omega_0^2 \bar{\xi} : C_\eta \rightarrow S^{2m-1}$ とすると $i^2 \circ g$ の adjoint は $E^2 g$ である。

$\mu^p \circ \Omega_0^2 \bar{\xi}$ は $E^2 C_\eta \rightarrow \bar{\xi} S^{2m+1} \subset E^2 \Omega^2 S^{2m+1} \xrightarrow{E^2 \mu^p} E^2 \Omega^2 S^{2m+1} \xrightarrow{e} S^{2m+1}$ の adjoint である。

ここで、 e は evaluation、 $f_p = e \circ E^2 \mu^p \circ i^2 : S^{2m+1} \rightarrow S^{2m+1}$ は degree p の写像である。 $E^2 g \simeq f_p \circ \bar{\xi}$ であり、

$f_p \circ \bar{\xi} : E^2 C_\eta \rightarrow S^{2m+1} \rightarrow S^{2m+1}$ は、 $\pi : \pi_{j+3}(S^{2m+1}) \rightarrow [Y^{j+3}, S^{2m+1}]$ に対して、 $-\pi^* \{p\iota_{2m+1}, E^2\xi, E^2\eta\}$ を表わす。

よって、 $E^2[g] \in -\{p\iota_{2m+1}, E^2\xi, E^2\eta\}_2$ である。bracket の indeterminacy は、 $p \cdot \pi_{j+3}(S^{2m+1}) + E^3 \pi_{i+1}(S^i)$ である。

Lem 2.2 により $p(\pi_{j+3}(S^{2m+1})) \subset E^2(\pi_{j+1}(S^{2m-1}))$ なので、上の bracket は E^2 -image である。

2番目の bracket $\{E^2\xi, E^2\eta, p\iota_{j+2}\}$ は、合成 $\bar{\xi} \circ \tilde{p}\iota : S^{j+3} \rightarrow E^2 C_\eta \rightarrow S^{2m+1}$ で表される。ここで、 $\tilde{p}\iota$ は $p\iota_{j+2}$ の

coextension である。 $H(\{E^2\xi, E^2\eta, p\iota_{j+2}\})$ は p -times であり、Th 2.3 により zero である。■

Prop 3.1 (1) $m > 1$ とする。ある元 $\gamma \in \pi_i(Y^{2p(m+1)-5})$ に対して、 $x \in \pi_{i+3}(Q_2^{2m+1})$ が $E^3\gamma$ による M-represented であるならば、 $d_1(x) = HP(x) \in \pi_i(Q_2^{2m-1})$ は、 $h_{m*}(\gamma) = \eta_m \circ \gamma \in \pi_i(Y^{2pm-2})$ による M-represented である。

(2) $m = 1$ とする。 $x \in \pi_i(Q_2^3)$ が $\gamma \in \pi_i(Y^{4p-2})$ による M-represented であるならば、 $P(x) \in \pi_i(S^3)$ は、
 $\tilde{h}_{1*}(\gamma) = \tilde{h}_1 \circ \gamma \in \pi_i(Y^{2p+1})$ による purely M-represented である。

$$(2.1.12) \mu^p \simeq i^2 \circ r_m : (\Omega^2 S^{2m+1}, S^{2m-1}) \rightarrow (\Omega^2 S^{2m+1}, S^{2m-1})$$

Lem 2.2 ${}_p\pi_i(Q_2^{2m-1})$ は、elementary である。すなわち $p({}_p\pi_i(Q_2^{2m-1})) = 0$.

Th 2.3 $p^m({}_p\pi_i(S^{2m+1})) = 0$.

Prop 4.5 $r > 0$ に対して、invariants $a_r(2m - 1)$ は非自明である。

$$\text{Proof. } J(a_r(2m - 1)) = E^3((\pi\alpha^{r-1}i\alpha_1)(2pm - 2)) = \alpha_{r-1}\alpha_1(2pm + 1).$$

$\alpha_{r-1}\alpha_1(2pm + 1) \neq 0$ ならば $a_r(2m - 1) \neq 0$ である。

そこで、 $\alpha_{r-1}\alpha_1(2pm + 1) = 0$ と仮定する。 (2.1.9) の準同型 J は $j: Q_2^{2m-1} \rightarrow \Omega^3 S^{2pm+1}$ によって誘導され、 $j \circ g_m$ は i^3 。 $\pi: Y^{2pm-2} \rightarrow S^{2pm-2} \rightarrow \Omega^3 S^{2pm+1}$ と homotopic であるので、 $J(a_r(2m - 1)) = 0$ である。

すると、(2.1.9) の準同型 I のもとで、 $a_r(2m - 1)$ は $\{p, \alpha_{r-1}, \alpha_1\}(2pm + 1)$ に属するある元 $\tilde{\alpha}$ の像となる。 Lem 4.2 により、 $\tilde{\alpha}$ は $E^\infty(\tilde{\alpha})(2pm - 1) = \tilde{\alpha}_r$ を満たす $\tilde{\alpha}_r(2pm - 1)$ の E^2 -image である。

$a_r(2m - 1) = I(\tilde{\alpha}) = 0$ ならば、ある ξ に対して $E^2 \tilde{\alpha} = E^2 \Delta(\xi) = p\xi$ である。しかしこれは $\tilde{\alpha}_r$ の non-divisibility に矛盾する。よって $a_r(2m - 1) \neq 0$ である。 ■

Th 2.5 の結果は、次のように拡張される。

Th 4.2 $r \not\equiv 0 \pmod{p}$ と仮定する。

(1) $m \geq 1$ に対して、 $\alpha_r(2m + 1)$ が生成する $\pi_{2m+rq}(S^{2m+1})$ の直和成分は \mathbb{Z}_p に同型である。

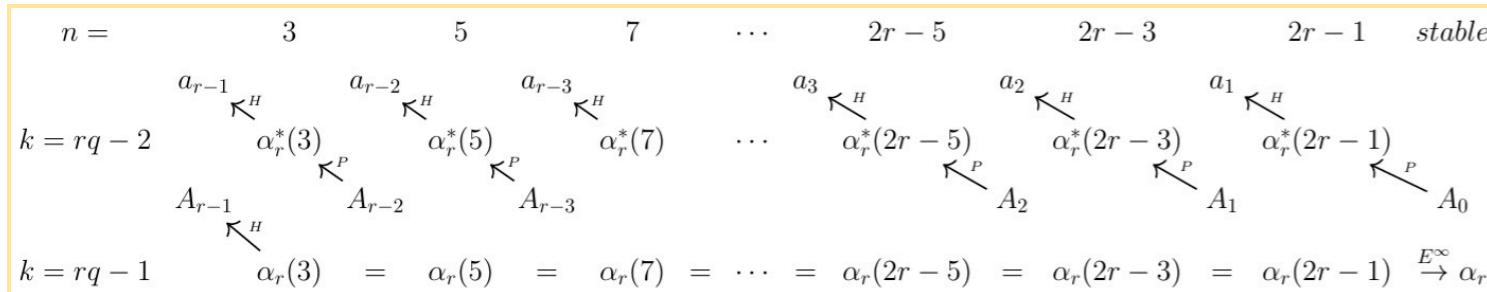
$E^2 \alpha_r(2m + 1) = \alpha_r(2m + 3)$ かつ $H_p(\alpha_r(3)) = \alpha_{r-1}(2p + 1)$ if $r > 1$.

(2) $1 \leq m < r$ に対して、 $\alpha_r^*(2m + 1)$ が生成する $\pi_{2m+rq-1}(S^{2m+1})$ の直和成分は \mathbb{Z}_p に同型である。

$$H(\alpha_r^*(2m + 1)) = r \cdot a_{r-m}(2m - 1).$$

Proof. (1) は、 $r \not\equiv 0$ のときの α_r が p で割り切れないことから成り立つ。 (2) は Prop 4.4, 4.5 から成り立つ。 ■

上の結果に対する computing diagram は次のように表される。



4.3 Unstable alpha families

ここで、 $r \equiv 0 \pmod{p}$ の場合に、 $(rq - 1)$ -stem と $(rq - 2)$ -stem の群を考える。この場合に、Prop 4.5 は、

$$(4.3.1) \quad HP(A_{r-m-1}(2m + 1)) = H(\alpha_r^*(2m + 1)) = 0.$$

Lem 3.5, 3.6 により、次を得る。

Lem 4.3 $r \equiv 0 \pmod{p}$ かつ $m \geq 1$ とする。

(1) 元 $\alpha_r^*(2m - 1) \in \pi_{2m-3+rq}(S^{2m-1})$ が存在して次を満たす。

$$E^2 \alpha_r^*(2m - 1) = \alpha_r^*(2m + 1), \quad p \cdot \alpha_r^*(2m - 1) = \alpha_r^*(2m - 1).$$

(2) $\pi_{2m+2+rq}(S^{2m+3})$ の元 ξ に対して $H(\xi) = A_{r-m-1}(2m + 1)$ ならば、 $\pi_{2m+rq}(S^{2m+1})$ の元 ξ' が存在して、次を満たす。 $H(\xi') = A_{r-m}(2m - 1)$ かつ $E^2 \xi' = p\xi$.

$a \not\equiv 0 \pmod{p}$ に対して $r = ap^{v(r)}$ とする。このとき、 α_r は $p^{v(r)}$ で割り切れる。 $1 \leq s \leq v(r)$ に対して、

$p^s \alpha_r^{(s)} = \alpha_r$ を満たす元を $\alpha_r^{(s)}$ と書く。Gray [6] は、 $\alpha_r^{(s)}$ に収束する unstable element $\alpha_r^{(s)}(2m + 2s + 1)$ を与えた。 $\pi_{2m-3+rq}(S^{2m-1})$ の元 $\alpha_r^{(s)}(2m - 1)$ を考え、もしそれが存在するならば、次を満たす。

$$(4.3.2) \quad E^{2s} \alpha_r^{(s)}(2m - 1) = \alpha_r^*(2m + 2s - 1) \quad \text{and} \quad p^s \alpha_r^{(s)}(2m - 1) = \alpha_r^*(2m - 1).$$

ここで、Gray [7] の結果を以下に引用する。

$$(2.1.9) \quad \Omega^2 S^{2pm-1} \xrightarrow{i} Q_2^{2m-1} \xrightarrow{j} \Omega^3 S^{2pm+1} \xrightarrow{\partial_p} \Omega S^{2pm-1}.$$

Lem 4.2 元 $\xi \in \pi_i(S^{2m-1})$ と $\eta \in \pi_j(S^i)$ が次を満たすと仮定する。

$$p\xi = 0, \quad p\eta = 0, \quad E^2(\xi \circ \eta) = 0.$$

このとき、 $\{p\iota_{2m+1}, E^2\xi, E^2\eta\}$ と $\{E^2\xi, E^2\eta, p\iota_{j+2}\}$ は E^2 -images である。

Th 2.5 $k < pq - 2$ に対する非自明な unstable k -stem group は下記の通りである。

$$\pi_{2m+rq}(S^{2m+1}) \simeq \mathbb{Z}_p \{\alpha_r(2m + 1)\} \text{ for } 1 \leq r \leq p - 1 \text{ and } 1 \leq m,$$

$$\pi_{2pm-1}(S^{2m+1}) \simeq \mathbb{Z}_p \{P(Q^{m+1}(\iota))\} \text{ for } 1 < m < p,$$

$$\pi_{2m+rq-1}(S^{2m+1}) \simeq \mathbb{Z}_p \{\overline{Q}^{m+1}(\alpha_{r-m-1})\} \text{ for } 1 < r < p \text{ and } 1 \leq m < r - 1,$$

Prop 4.5 $r > 0$ に対して、invariants $a_r(2m - 1)$ は非自明である。

$$\text{Prop 4.4} \quad d_1(A_{r-1}(2m + 1)) = HP(A_{r-1}(2m + 1)) = (m + r)a_r(2m - 1).$$

invariant $A_{r-m-1}(2m + 1)$ の P -image を次のように書く。

$$(4.2.1) \quad \alpha_r^*(2m + 1) = P(A_{r-m-1}(2m + 1)) \in \pi_{2m+rq-1}(S^{2m+1}) \text{ for } 1 \leq m < r.$$

Lem 3.5 $\xi \in \pi_{i+5}(S^{2m+3})$ の Hopf invariant $H(\xi)$ が $E^4(\gamma)$ による M-represented であり、 $h_{m^*}(\gamma) = 0$ ならば、元

$\eta \in \pi_{i+3}(S^{2m+1})$ が存在し、 $p \cdot \xi = E^2\eta$ であり、 $H(\eta)$ は $\alpha(2pm - 2) \circ E^2\gamma$ による M-represented である。

Lem 3.6 $\xi \in \pi_{i+4}(S^{2pm+1})$ の Hopf invariant $H(\xi) \in \pi_{i+1}(Q_2^{2pm-1})$ が、 $\gamma \in \pi_{i-1}(Y^{2p(pm-1)-4})$ に対して、 $E^2\gamma$ による

M-represented であり、 $h_{pm-1}(\gamma) = 0$ を満たすならば、up to non-zero coefficient で $H(\Delta(\xi))$ は、

$\alpha(2p(pm - 1) - 2) \circ \gamma$ による M-represented である。

$$E^2 \alpha_r^*(2m - 1) = \alpha_r^*(2m + 1), \quad (\text{まま})$$

$$E^2 \alpha_r^*(2m - 1) = \alpha_r^*(2m + 1) \text{ では？}$$

[6] B.W.Gray, On the sphere of origin of infinite families in the homotopy groups of spheres, Topology 8, (1969), 219-232.

[7] B.W.Gray, Unstable families related to the image of J , Proc. Camb. Phil. Soc, 96 (1984), 95-113.

Lem 4.4 $a \not\equiv 0 \pmod{p}$, $v = v(r)$ に対して $r = ap^v$ とする。このとき、元 $\alpha_r^{*(v)}(2r - 2v - 1) \in \pi_{2pr-2v-3}(S^{2r-2v-1})$

が存在して、次を満たす。 $E^{2v}\alpha_r^{*(v)}(2r - 2v - 1) = \omega = PI(\iota_{2pr-1}) \in \pi_{2pr-3}(S^{2r-1})$.

さらに、 $Im J \cap \pi_{v+1}^S$ の生成元 α_{v+1}^J に対して、 $H(\alpha_r^{*(v)}(2r - 2v - 1)) = Q^{2r-2v-1}(\alpha_{v+1}^J)$ である。

議論の便宜のために、以下を提案する。

Assertion A Lem 4.4 の中で、 α_{v+1}^J の代わりに up to non-zero coefficient で $\tilde{\alpha}_{v+1}$ を取ることができる。

$r < p(p-1)$ のとき、 π_{rq-1}^S は1つの生成元を持つことがわかる。したがって、Assertion A は成り立つ。

$r = p(p-1)$ の場合、 π_{rq-1}^S は他の生成元 $\alpha_1 \beta_1^{p-1}$ を持つ。 $Q^{2r-2v-1}(\alpha_1 \beta_1^{p-1}) = HP(Q^{2r-2v})$ なので、Lem 4.4 の

中の α_{v+1}^J を $\tilde{\alpha}_{v+1}$ で置き換えることができる。 π_{rq-1}^S の alpha type でない次の生成元は、 $\alpha_1 \beta_1^{p-2} \beta_2$ である。よって、 $r < p^2 + 1$ に対して Assertion A は成り立ち、以下同様である。

次の定理は、[7] における Gray の元と、EHP-sequence の中の invariants との関係を示している。

Recall (4.2.1) $\alpha_r^*(2m+1) = P(A_{r-m-1}(2m+1))$

Th 4.3 $a \not\equiv 0 \pmod{p}$, $v = v(r) > 0$ に対して、 $r = ap^v$ とする。 $s \leq v, s < m \leq r-s$ に対して、元

$\alpha_r^{*(s)}(2m+1) \in \pi_{2m-1+rq}(S^{2m+1})$ が、 $s \leq v, s < m$ に対して、元 $\alpha_r^{(s)}(2m+1) \in \pi_{2m+rq}(S^{2m+1})$ が存在して、up to non-zero coefficients で次の性質を満たす。

(0) $\alpha_r^{*(0)}(2m+1) = \alpha_r^*(2m+1), \alpha_r^{(0)}(2m+1) = \alpha_r^*(2m+1)$.

(1) $1 \leq s \leq v, s < m \leq r-s$ に対して、 $p \cdot \alpha_r^{*(s)}(2m+1) = \alpha_r^{*(s-1)}(2m+1), E^2 \alpha_r^{*(s)}(2m+1)$

$= \alpha_r^{*(s-1)}(2m+3)$.

(2) $1 \leq s \leq v, s < m$ に対して、 $p \cdot \alpha_r^{(s)}(2m+1) = \alpha_r^{(s-1)}(2m+1), E^2 \alpha_r^{(s)}(2m+1) = \alpha_r^{(s)}(2m+3)$.

(3) $1 \leq m \leq v+1$ に対して、 $H(\alpha_r^{(m)}(2m+1)) = A_{r-m}(2m-1)$,

$v+1 \leq m < r$ に対して、 $P(A_{r-m-1}(2m+1)) = E^{2v} \alpha_r^{*(s)}(2m+1)$.

(4) $\alpha_r^{*(s)}(2m+1)$ と $\alpha_r^{(s)}(2m+1)$ の位数はどちらも p^{s+1} である。

(5) r に対して Assertion A であるならば、特に $r \leq p^{p^2}$ のとき、 $s = \text{Min}(v, m+1), 1 \leq m < r-v$ に対して、

$H(\alpha_r^{*(s)}(2m+1)) = A_{r-m}(2m-1)$.

Proof. Lem4.3(2) の元 $\xi \in \pi_{2m+2+rq}(S^{2m+3})$ が存在するならば、次々に $\xi, \xi', \dots, \xi^{(m-1)}$ を得ることができ、最後の元 $\xi^{(m-1)} \in \pi_{2+rq}(S^3)$ は、 $E^{2m-2} \xi^{(m-1)} = p^{m-1} \xi$ と $H(\xi^{(m-1)}) = A_{r-1}(1) = H(\alpha_r(3))$ を満たす。

このように、 $\xi^{(m-1)}$ は位数 p であり、 ξ の位数は p^{m+1} である。Th4.1 から $m \leq v$ が成り立つ。これは、もし $m > v$ ならば、そのような元 ξ が存在せず、次が成り立つことを示している。

(4.3.3) $\alpha_r^*(2m+1) = P(A_{r-m-1}(2m+1)) \neq 0$ for $m > v$.

次に、上記の結果は、 m がより大きな値である場合、 $\alpha_r^{*(s)}(2m+1)$ は存在すれば order p^{s+1} であることを意味する。 $m = v$ に対して (4.3.3) が成り立つならば、Th2.3 に矛盾する order p^{v+1} の元 $\alpha_r^{*(v)}(2v+1)$ が存在する。

これは、 $\alpha_r^{(v)}(2v+3)$ が存在し $H(\alpha_r^{(v)}(2v+3)) = A_{r-v-1}(2v+1)$ が成り立つことを意味する。よって、

$1 \leq m \leq v+1$ に対して、 $\alpha_r^{(m-1)}(2m+1)$ が存在する。この結果、(1)~(4) が成立する。Lem4.4 から (5) が成り立つ。■

$\alpha_r^{(s)}$ または $E^{2j} \alpha_r^{*(s)}$ によって生成される $\pi_i^S(S^{2m+1})$ の部分群を A_i^{2m+1} と書く。

invariant $A_{r-m-1}(2m+1)$ の P-image を次のように書く。

(4.2.1) $\alpha_r^*(2m+1) = P(A_{r-m-1}(2m+1)) \in \pi_{2m+rq-1}(S^{2m+1})$ for $1 \leq m < r$.

Lem 4.3 $r \equiv 0 \pmod{p}$ かつ $m \geq 1$ とする。

(1) 元 $\alpha_r^*(2m-1) \in \pi_{2m-3+rq}(S^{2m-1})$ が存在して次を満たす。

$E^2 \alpha_r^*(2m-1) = \alpha_r^*(2m+1), p \cdot \alpha_r^*(2m-1) = \alpha_r^*(2m-1)$.

(2) $\pi_{2m+2+rq}(S^{2m+3})$ の元 ξ に対して $H(\xi) = A_{r-m-1}(2m+1)$ ならば、 $\pi_{2m+rq}(S^{2m+1})$ の元 ξ' が存在して、次を満たす。

$H(\xi') = A_{r-m}(2m-1)$ かつ $E^2 \xi' = p\xi$.

Th 4.1 $e : \pi_{rq-1}^S \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. 整数 $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ に対して、 $r = ap^v$ とする。

(1) $e(\alpha_r) \equiv -1/p \pmod{p}$.

(2) $e(\pi_{rq-1}^S) \subset \mathbb{Z}(1/p^{v+1})/\mathbb{Z}$.

(3) $e(p, \alpha_{r-1}, \alpha_1) = b/p^{v+1}$ for some $b \not\equiv 0 \pmod{p}$.

Lem 4.4 $a \not\equiv 0 \pmod{p}$, $v = v(r)$ に対して $r = ap^v$ とする。このとき、元 $\alpha_r^{*(v)}(2r-2v-1) \in \pi_{2pr-2v-3}(S^{2r-2v-1})$ が存在して、次を満たす。

$E^{2v} \alpha_r^{*(v)}(2r-2v-1) = \omega = PI(\iota_{2pr-1}) \in \pi_{2pr-3}(S^{2r-1})$.

さらに、 $Im J \cap \pi_{v+1}^S$ の生成元 α_{v+1}^J に対して、 $H(\alpha_r^{*(v)}(2r-2v-1)) = Q^{2r-2v-1}(\alpha_{v+1}^J)$ である。

Th 2.3 $p^m (\pi_i^S(S^{2m+1})) = 0$.

$$(4.3.4) A_{2m+rq}^{2m+1} = \{\alpha_r^{(s)}(2m+1)\} \text{ for } s = \min(v, m)$$

$$A_{2m+rq-1}^{2m+1} = \{\alpha_r^{*(s)}(2m+1)\} \text{ for } s = \min(v, r-m, m) \text{ and } m < r-v$$

$$A_i^{2m+1} = 0 \text{ otherwise.}$$

また、 $A_{r-m}(2m-1)$ または $a_{r-m}(2m-1) \in \text{Im } P$ によって生成される $\pi_i(Q_2^{2m-1})$ の部分群を AQ_i^{2m-1} と書く。

$$(4.3.5) AQ_{rq-1}^{2m-1} = \{A_{r-m}(2m-1)\} \text{ for } 1 \leq m \leq r$$

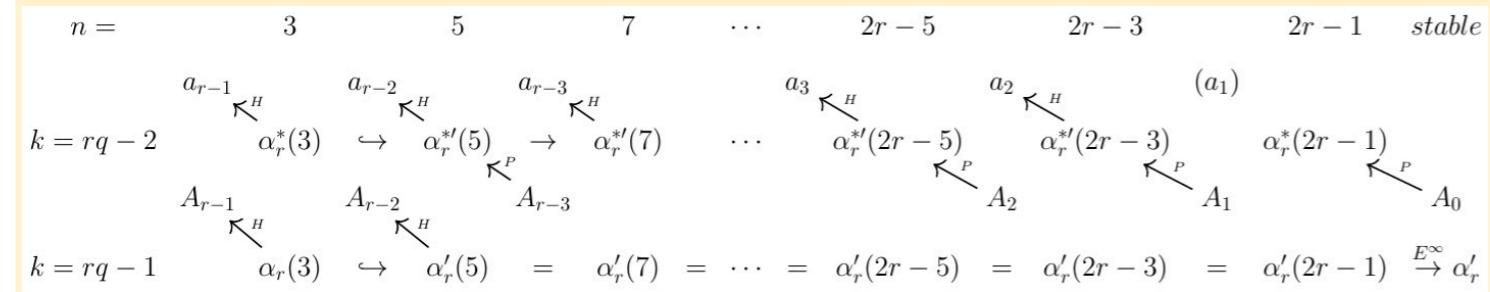
$$AQ_{rq-2}^{2m-1} = \{a_{r-m}(2m-1)\} \text{ for } 1 \leq m < r-v$$

$$AQ_i^{2m-1} = 0 \text{ otherwise.}$$

A_i^{2m+1} と AQ_i^{2m-1} からなる computing diagram の subsystem を **unstable alpha families** の system と呼ぶ。

Prop 4.6 $k < p^{p^2+1}q - 2$ に対して、up to a k -stem groups で、EHP-sequence の中の準同型 E^2, H, P は、unstable alpha families 上で閉じている。

$v(r) = 1$ の場合の unstable alpha families の computing diagram は次のようにある。



この場合に、invariant $a_1 = a_1(2r-3)$ は unstable alpha family の外にある。 $v(r) = 2$ ならば、 a_1, a_2 は family の外にある。

4.4 Removability and Residue

EHP-sequence に関して、unstable alpha families が閉じていることを見てきた。しかしながら、これらの system 上で、EHP-sequence は完全である必要はない。

Prop 4.7 unstable alpha families 上の EHP-sequence の完全性は、次の2点において壊れている。

(1) $r - v(r) < m < r$ に対して、invariants $a_r(2m+1)$ は unstable alpha families の H -images ではない。我々はこれを除外しなければならない。

(2) $s \equiv 0 \pmod{p}$, $s < v(r)$ に対して、unstable elements $\alpha_r^*(2r-2s-1)$ は、 Δ の kernel であり、alpha type でない invariant を生成する。

unstable alpha families を除いて、mod A の computing diagram を作成する。その場合、上記の2種類の要素を residue elements として加えなければならない。

他方、IJΔ-sequence に関する unstable alpha families の互換性、特に準同型 $\Delta: \pi_{i+2}(S^{2pm+1}) \rightarrow \pi_i(S^{2pm-1})$ をチェックする必要がある。

Th4.2 の $r \not\equiv 0 \pmod{p}$ の場合を考える。 $E^2: A_{2pm+rq-2}^{2pm-1} \rightarrow A_{2pm+rq}^{2pm+1} \simeq \mathbb{Z}_p$ は同型であり、 $\Delta \circ E^2 = p$ なので、

$\Delta(A_{2pm+rq}^{2pm+1}) = 0$ を得る。よって、IJΔ-sequence は2つの invariant $A_r(2m-1)$ と $a_r(2m-1)$ を与える。

$(rq-2)$ -stem group の生成元 $\alpha_r^*(2pm-1)$ と $\alpha_r^*(2pm+1)$ は、 $H(\alpha_r^*(2pm-1)) = a_{r-m}^*(2pm-3)$ と、 $H(\alpha_r^*(2pm+1)) = a_{r-m-1}^*(2pm-1)$ を満たす。 α_k^* の定義により、 $\alpha_k^* = \alpha \circ a_{r-m-1}^*$ を得る。よって、Lem3.7 から、 $\Delta(\alpha_r^*(2pm+1)) \equiv \alpha_r^*(2pm-1) \pmod{\ker H = \text{Im } E^2}$ が成り立つ。これは、 Δ が $(kq-2)$ -stem group の生成元を消すことを示している。

$r \equiv 0 \pmod{p}$ の場合、結果は似たようなものであるが、大きい order の生成元を使う方がより簡単である。

例外的に $E^2: A_{2pm+\epsilon+rq-2}^{2pm-1} \rightarrow A_{2pm+\epsilon+rq}^{2pm+1}$ ($\epsilon = 0, -1$) は単射であるが、 $\text{Coker } E^2 \simeq \mathbb{Z}_p$ となる場合がある。この場合、対応する Δ はどちらも全射であり、それぞれに対して1つの invariant を与える。

Th 4.2 $r \not\equiv 0 \pmod{p}$ と仮定する。

(1) $m \geq 1$ に対して、 $\alpha_r(2m+1)$ が生成する $\pi_{2m+rq}(S^{2m+1})$ の直和成分は \mathbb{Z}_p に同型である。

$E^2 \alpha_r(2m+1) = \alpha_r(2m+3)$ かつ $H_p(\alpha_r(3)) = \alpha_{r-1}(2p+1)$ if $r > 1$.

(2) $1 \leq m < r$ に対して、 $\alpha_r^*(2m+1)$ が生成する $\pi_{2m+rq-1}(S^{2m+1})$ の直和成分は \mathbb{Z}_p に同型である。

$H(\alpha_r^*(2m+1)) = r \cdot a_{r-m}(2m-1)$.

Lem 3.7 $\xi \in \pi_{i+4}(S^{2pm+1})$, $\gamma \in \pi_s^S$, $\delta \in \pi_t^S$ に対して、up to non-zero coefficients で次の関係が成り立つ。

(1) $H(\xi) = Q^{pm}(\gamma)$ は、 $H(\Delta(\xi)) = \bar{Q}^{pm-1}(\alpha\gamma) = HP(\bar{Q}^{pm}(\xi))$ を誘導する。

(2) $H(\xi) = Q^{pm}(\gamma)$, $\Delta(\xi) = P(\bar{Q}^{pm}(\gamma))$ は、 $H(\xi \circ \delta(i+4)) = Q^{pm}(\gamma\delta)$, $\Delta(\xi \circ \delta(i)) = P(\bar{Q}^{pm}(\gamma\delta))$ を誘導する。

5 Old Table of 3-primary Groups

5.1 3-primary Groups, stable to unstable

$k \leq 45$ に対する k -次ホモトピー群の 3-成分の結果は、Toda[37],[38] の中で与えられて、 $k \leq 55$ に対する報告は、1998年に Maruyama と Mimura によって与えられた。我々は下記の Oka[22] による、alpha type generators $\alpha_r, \alpha'_{3s}, \alpha''_{9t}$ を除いた $k < 62$ に対する 3-primary stable homotopy groups ${}_3\pi_k^S$ の結果から見積もりを始めることにする。生成元の記法について、[22] で与えられたものを用いる。

(5.1.1) 関係式は符号を無視するものとする。

- (1) ${}_3\pi_{10}^S = \{\beta_1\}, \quad \beta_1 = \{\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1\}.$
- (2) ${}_3\pi_{13}^S = \{\alpha_1 \beta_1\}.$
- (3) ${}_3\pi_{20}^S = \{\beta_1^2\}.$
- (4) ${}_3\pi_{23}^S = \{\alpha_1 \beta_1^2\}.$
- (5) ${}_3\pi_{26}^S = \{\beta_2\}.$
- (6) ${}_3\pi_{29}^S = \{\alpha_1 \beta_2\}.$
- (7) ${}_3\pi_{30}^S = \{\beta_1^3\}, \quad \beta_1^3 = \{\alpha_1, 3, \beta_2\}.$
- (8) ${}_3\pi_{36}^S = \{\beta_1 \beta_2\}.$
- (9) ${}_3\pi_{37}^S = \{\varepsilon'\}, \quad \varepsilon' = \{\alpha_1, \alpha_1, \beta_1^3\}.$
- (10) ${}_3\pi_{38}^S = \{\varepsilon_1\}, \quad \varepsilon_1 = \{\alpha_1, 3, \beta_1^3, \alpha_1\}.$
- (11) ${}_3\pi_{39}^S = \{\alpha_1 \beta_1 \beta_2\}.$
- (12) ${}_3\pi_{40}^S = \{\beta_1^4\}, \quad \alpha_1 \varepsilon' = \beta_1^4.$
- (13) ${}_3\pi_{42}^S = \{\varepsilon_2\}, \quad \varepsilon_2 = \{\alpha_1, 3, \varepsilon_1\} = 2\{3, \alpha_1, \varepsilon_1\}.$
- (14) ${}_3\pi_{45}^S = \{\varphi\}, \quad \varphi = \{\alpha_1, \alpha_1, \varepsilon_1\}, \quad p\varphi = \alpha_1 \varepsilon_2.$
- (15) ${}_3\pi_{46}^S = \{\beta_1^2 \beta_2\}.$
- (16) ${}_3\pi_{47}^S = \{\beta_1 \varepsilon'\}.$
- (17) ${}_3\pi_{49}^S = \{\alpha_1 \beta_1^2 \beta_2\}.$
- (18) ${}_3\pi_{50}^S = \{\beta_1^5\}.$
- (19) ${}_3\pi_{52}^S = \{\beta_2^2\}, \quad \beta_2^2 = \{\alpha_1, \alpha_1, \varphi\}.$
- (20) ${}_3\pi_{55}^S = \{\alpha_1 \beta_2^2\}.$

ここからは、3-primary unstable groups mod A の計算に限定し、簡単のため、次の記号を使う。

$$\pi_i^n = {}_3\pi_i^n / A_i^n, \quad Q_i^n = {}_3\pi_i(Q_i^n) / A Q_i^n, \quad \pi_k^S = {}_3\pi_k^S / A_k^S.$$

double suspension E^2 の次の列について、 k と n の帰納法によって行われる。

$$(5.1.2) \quad \pi_{3+k}^3 \xrightarrow{E^2} \pi_{5+k}^5 \xrightarrow{E^2} \dots \xrightarrow{E^2} \pi_{2m-1+k}^{2m-1} \xrightarrow{E^2} \pi_{2m+1+k}^{2m+1} \xrightarrow{E^2} \dots \xrightarrow{S^\infty} \pi_k^S,$$

ここで、stable group π_k^S と unstable groups π_{2m+1+j}^{2m+1} for $j < k$ は既に決定されているものと仮定する。

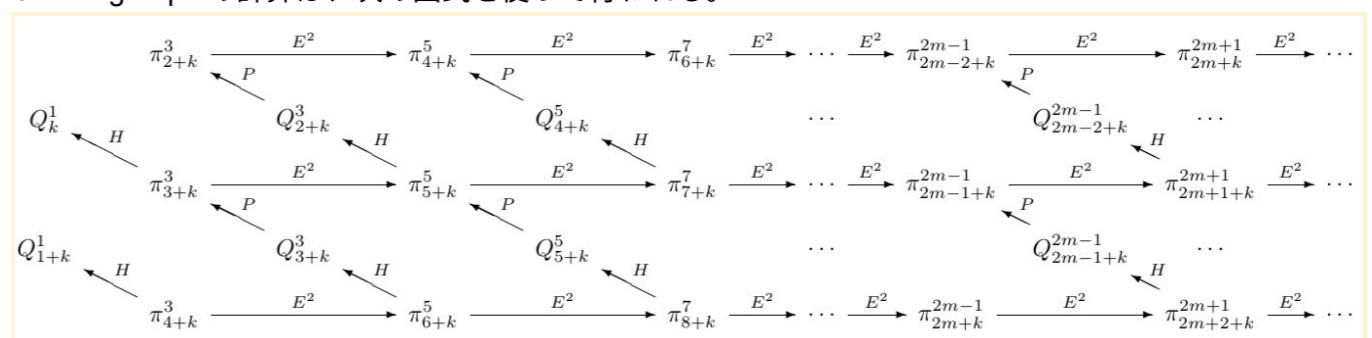
各 double suspension E^2 は、 $p = 3$ の EHP-sequence (2.1.1) を使うことにより確かめられる。

$$(5.1.3) \quad \dots \xrightarrow{H} Q_{2m-1+k}^{2m-1} \xrightarrow{P} \pi_{2m-1+k}^{2m-1} \xrightarrow{E^2} \pi_{2m+1+k}^{2m+1} \xrightarrow{H} Q_{2m-2+k}^{2m-1} \xrightarrow{P} \dots$$

- [37] H.Toda. On homotopy groups of S^3 -bundles over spheres, J. Math. Kyoto Univ. 2 (1963), 193-207.
 [38] H.Toda. On Iterated Suspensions I,II,III, J. Math. Kyoto Univ. 5 (1966), 87-142,209-250, 8(1968),101-130.
 [22] S.Oka, The stable homotopy groups of spheres, I, II, III, Hiroshima Math. J. 1(1971), 305-337, 2(1972), 99-161, 5(1975), 407-438.

Computing Diagram mod A

k-stem groups の計算は、次の図式を使って行われる。



ここで、群 Q_{2m-1+k}^{2m-1} は Th 2.2 の $IJ\Delta$ -sequence によって、あらかじめ決定されなければならない。 $k < 107$ に対して、section 4.5 (5.4?) により、 Q_{2m-1+k}^{2m-1} は次の extra elements を含んでいる。

$$(5.1.4) w = IP(\iota) \in Q_{18m-5}^{2m-1}, a_1 \in Q_{18m-8}^{6m-3}, a_2 \in Q_{54m-8}^{18m-5}.$$

(5.1.4) により生成される部分群による商を $\overline{Q}_{2m-1+k}^{2m-1}$ とする。このとき、invariants mod A は、次の完全列により得られる。

$$(5.1.5) \cdots \rightarrow^J \pi_{2m+1+k}^{6m+1} \xrightarrow{\Delta} \pi_{2m-1+k}^{6m-1} \rightarrow^I \overline{Q}_{2m-1+k}^{2m-1} \rightarrow^J \pi_{2m+k}^{6m+1} \xrightarrow{\Delta} \pi_{2m-2+k}^{6m-1} \rightarrow^I \cdots.$$

$m = 1$ のとき、 $k \neq 0$ に対して $H: \pi_{3+k}^3 \rightarrow Q_k^1$ は全射である。よって、 π_{3+k}^3 は Th 2.4 から得られる次の列により直接計算される。

$$(5.1.6) \cdots \rightarrow^{H_p} \pi_{4+k}^7 \xrightarrow{\Delta} \pi_{2+k}^5 \xrightarrow{G} \pi_{3+k}^3 \rightarrow^{H_p} \pi_{3+k}^7 \xrightarrow{\Delta} \pi_{1+k}^5 \xrightarrow{G} \cdots.$$

(5.1.6) は $k = 11$ の場合を除いて完全であることに注意する。computing diagram において Q_i^{2m-1} の生成元の多くは (2.3.1) ((2.4.1)[ママ]) または (2.3.2) ((2.4.2)[ママ]) の中で得られた stable type invariants $Q^m(\xi) \in Q_{6m-1+k}^{2m-1}$ or $\overline{Q}^m(\xi) \in Q_{6m+k}^{2m-1}$ for $\xi \in \pi_k^S$ として与えられる。我々はこのような生成元を、対応するアルファベットで表わすことにする。次の (5.1.7) は、(5.1.1) の stable generator に対する stable type invariants のリストである。

(5.1.7) Invariants $Q^m(\xi)$ and $\overline{Q}^m(\xi)$ for $\xi \in \pi_k^S, k \leq 55$.

k	0	3	7	10	13	20	23	26	29	30	36	37	38
ξ	ι	α_1	α_2	β_1	$\alpha_1\beta_1$	β_1^2	$\alpha_1\beta_1^2$	β_2	$\alpha_1\beta_2$	β_1^3	$\beta_1\beta_2$	ε'	ε_1
$Q^m(\xi)$	i	a	a_2	b	ab	b^2	ab^2	b_2	ab_2	b^3	bb_2	e'	e_1
$\overline{Q}^m(\xi)$				B	AB	B^2	AB^2	B_2	AB_2	B^3	BB_2	E'	E_1

k	39	40	42	45	45	46	47	47	49	50	52	55
ξ	$\alpha_1\beta_1\beta_2$	β_1^4	ε_2	φ	$\alpha_1\varepsilon_2$	$\beta_1^2\beta_2$	$\beta_1\varepsilon'$	$\alpha_1\beta_1^2\beta_2$	β_1^5	β_2^2	$\alpha_1\beta_2^2$	
$Q^m(\xi)$	abb_2	b^4	e_2	ph	\times	b^2b_2	be'	ab^2b_2	b^5	b_2^2	ab_2^2	
$\overline{Q}^m(\xi)$	ABB_2	B^4	E_2	\times	AE_2	B^2B_2	BE'	AB^2B_2	B^5	B_2^2	AB_2^2	

Lem 3.1, 3.2, 3.3 を使うことにより、これらの stable type invariants の最初の微分 $d_1 = H \circ P: \pi_{i+3}(Q_2^{2m+1}) \rightarrow \pi_{i+3}(S^{2m+1}) \rightarrow \pi_i(Q_2^{2m-1})$ が確かめられる。以下で見るようすに、その結果は、 $m \pmod 3$ の値によって定まる。

Prop 5.1 各 invariant $x \in Q_{6m+3+k}^{2m+1}$ の像 $d_1(x) = HP(x) \in Q_{6m+k}^{2m-1}$ は、符号を除いて、下記で与えられる。

k	10	11	20	21	26	27	36	37	38	39	43	
x	b	B	b^2	B^2	b_2	B_2	bb_2	BB_2	e'	E'	E_1	E_2
$m \equiv 0$	ab	0	ab^2	0	ab_2	b^3	abb_2	0	b^4	0	e_2	0
$m \equiv 1$	ab	AB	ab^2	AB^2	ab_2	AB_2	abb_2	ABB_2	b^4	B^4	0	AE_2
$m \equiv 2$	0	AB	0	AB^2	0	AB_2	0	ABB_2	0	B^4	e_2	AE_2

k	46	47	47	48	52	53
x	b^2b_2	B^2B_2	be'	BE'	b_2^2	B_2^2
$m \equiv 0$	ab^2b_2	0	b^5	0	ab_2^2	0
$m \equiv 1$	ab^2b_2	AB^2B_2	b^5	B^5	ab_2^2	AB_2^2
$m \equiv 2$	0	AB^2B_2	0	B^5	0	AB_2^2

残りの invariants に対して、 $d_1(x) = 0$ である。

$$(5.1.8) x = ab, ab^2, ab_2, b^3, e_1, abb_2, b^4, e_2, ab_2^2, b^5, ab_2^2,$$

$$(5.1.9) x = AB, AB^2, AB_2, B^3, ABB_2, B^4, AB^2B_2, B^5, AB_2^2.$$

Proof. $\alpha_1\xi$ が 3 で割れないならば、Lem 3.1 により $x = Q^{m+1}(\xi)$ に対して、 $d_1(x) = (m+1)Q^m(\alpha_1\xi) \neq 0$ である。これは invariants $x = b, b^2, bb_2, e', b^2b_2, be', b_2^2$ に適用される。ここで、 $\alpha_1\varepsilon' = \beta_1^4$ であることに注意する。同様に、Lem 3.2 から $X = B, B^2, B_2, BB_2, E', BE', B_2^2$ に対して、 $m \equiv 1, 2 \pmod 3$ ならば $d_1(X) = \pm AX$ である。

Th 2.2 (2.1.9) の mod p fibration は、次の $IJ\Delta$ -sequence を誘導し、これは、mod p で完全である。

$$\cdots \rightarrow^\Delta \pi_{i+2}(S^{2pm-1}) \rightarrow^I \pi_i(Q_2^{2m-1}) \rightarrow^J \pi_{i+3}(S^{2pm+1}) \rightarrow^\Delta \pi_{i+1}(S^{2pm-1}) \rightarrow^I \cdots$$

Th 2.4 次の列は $i + 1 \neq 3$ のとき、mod p で完全である。

$$\cdots \rightarrow^H \pi_{i+2}(S^{2p+1}) \rightarrow^\Delta \pi_i(S^{2p-1}) \rightarrow^G \pi_{i+1}(S^3) \rightarrow^H \pi_{i+1}(S^{2p+1}) \rightarrow^\Delta \cdots$$

ここで、 G は $G(\xi) = \alpha_1(3)$ 。 $E(\xi)$ for $\xi \in \pi_i(S^{2p-1})$ で与えられ、Hopf invariant H_p は、次を満たす。

$$H_p\{\alpha_1(3), p\iota_{2p}, E(\xi)\}_1 = -E^2(\xi) \text{ for } \xi \in \pi_i(S^{2p-1}) \text{ with } p \cdot \xi = 0.$$

invariant $x \in \pi_p(Q_2^{2m-1})$ に対して、 $x = I(\xi)$ となる元 $\xi' \in \pi_{i+2}(S^{2pm-1})$ が存在して、stable class $\xi = E^\infty(\xi')$ が p で割り切れないとき、(2.3.1) $x = Q^m(\xi)$ と書くことにする。また、 $y \in \pi_p(Q_2^{2m-1})$ に対して、stable class $\eta = E^\infty(J(y))$ が非自明のとき、(2.3.2) $y = \overline{Q}^m(\eta)$ と書くことにする。 $Q^m(\xi)$ と $\overline{Q}^m(\eta)$ はどちらも stable type と呼ばれる。これらの invariants は stable classes ξ または η によって一意に定まらないことに注意する。

$Q^m(\xi)$ は ξ' の選び方による。 $\overline{Q}^m(\eta)$ は indeterminacy が $\ker(E^\infty \circ J)$ である。

Lem 3.1 $\xi \in \pi_k^S$ に対して、 $u(\xi) < 2p(m+1) - 5$ ならば、 $d_1(Q^{m+1}(\xi)) = PH(Q^{m+1}(\xi)) = (m+1)Q^m(\alpha_1\xi)$.

$m = 1$ のときは、 $u(\xi) \leq 4p - 3$ である ξ に対してこの式が成り立つ。

Lem 3.2 $\xi \in \pi_k^S$ に対して、 $u(\xi) < 2p(m+1) - 5, p\xi = 0$ ならば、 $d_1(\overline{Q}^{m+1}(\xi)) = PH(\overline$

しかし $m \equiv 0 \pmod{3}$ の場合、 $d_1(X)$ は 0 である必要はなく、ある η に対して $Q^m(\eta)$ の形かもしれない。
 $\pi_{14}^S = 0$ なので $d_1(B) = 0$ である。よって、自然性により、 $X = B^2, BB_2, BE'$ に対して $d_1(X) = 0$ である。また
 $m \equiv 0 \pmod{3}$ の場合、 $\pi_{41}^S = 0$ なので $d_1(E') = 0$ であり、 $\pi_{56}^S = 0$ なので $d_1(B_2^2) = 0$ である。Lem 3.3 と
(5.1.1) (7) の関係式から $d_1(B_2) = b^3$ が成り立つ。(5.1.1) (13) の関係式と Lem 3.3 から

$$\eta = (m+1)\{\alpha_1, 3, \varepsilon_1\} - m\{3, \alpha_1, \varepsilon_1\} = ((m+1) - 2m)\varepsilon_2 = (1-m)\varepsilon_2$$

に対して $d_1(E_1) = Q^m(\eta)$ が成り立つ。よって E_1 に対する結果を得る。

$m \equiv 0 \pmod{3}$ のとき、同様に、 $\eta = \{\alpha_1, 3, \varepsilon_2\}$ に対して $d_1(E_2) = Q^m(\eta)$ である。 $\eta \neq 0$ と仮定すると、(5.1.1)
(15) により $\eta = \pm \beta_1^2 \beta_2$ である。(5.1.1) (13) により

$$\alpha_1 \eta = \{\alpha_1, \alpha_1, 3\} \varepsilon_2 = -\alpha_2 \varepsilon_2 = \alpha_2 \{3, \alpha_1, \varepsilon_1\} = \alpha_3 \varepsilon_1 = 3\alpha' \varepsilon_1 = 0$$

であり、これは $\alpha_1 \eta = \pm \alpha_1 \beta_1^2 \beta_2 \neq 0$ に矛盾する。よって $d_1(E_2) = Q^m(\eta) = 0$ である。
(5.1.8), (5.1.9) の元 x に対して $d_1 = 0$ であることは容易に証明できる。■

次に short range unstable elements $\{H(\xi) = x \neq 0, E^2 \xi = P(y) \neq 0\}$ を考える。

stable elements γ, δ が次を満たすと仮定する。

$$(5.1.10) \quad \delta \in \{\alpha_1, \alpha_1, \gamma\}.$$

Lem 3.8, 3.9 から次の Prop を得る。

Prop 5.2 $m \equiv 0 \pmod{3}$ とする。(5.1.10) の元 に対して、 $x = Q^{m+2}(\gamma), y = Q^m(\delta)$ とする。このとき、元
 $\xi \in \pi_i(S^{2m+1})$ が存在して次を満たす。 $H(\xi) = y, E^2 \xi = P(x)$.

Prop 5.3 $m \equiv 1 \pmod{3}$ とする。(5.1.10) の元 に対して、 $X = \bar{Q}^{m+2}(\gamma), Y = \bar{Q}^m(\delta)$ とする。Lem 3.9 の中の関
係 $d_1(X) = HP(X) = 0$ が得られる、例えば stable range の中の計算であると仮定する。このとき、元
 $\xi \in \pi_i(S^{2m+1})$ が存在して次を満たす。 $H(\xi) = Y, E^2 \xi = P(X)$.

(5.1.10) の元 γ, δ と、その関係する invariants のリストは下記の通りである。

γ	α_1	$\alpha_1 \beta_1$	$\alpha_1 \beta_1^2$	$\alpha_1 \beta_2$	β_1^3	ε_1	$\alpha_1 \beta_1 \beta_2$	β^4	φ
δ	β_1	β_1^2	β_1^3	$\beta_1 \beta_2$	ε'	φ	$\beta_1^2 \beta_2$	$\beta_1 \varepsilon'$	β_2^2
x	a	ab	ab^2	ab_2	b^3	e_1	abb_2	b^4	ph
y	b	b^2	b^3	bb_2	e'	ph	b_2^2	be'	b_2^2
X		AB	AB^2	AB_2	B^3		ABB_2	B^4	
Y		B^2	B^3	BB_2	E'		$B^2 B_2$	BE'	

5.2 Computation diagram mod A of lower stems

群 π_{n+k}^n を完全に計算するために、computing diagrams mod A を使い、symbols E^2, H, P を省略し、 Q_{n+k}^n を、そ
の生成元に置き換える。また、 π_{n+k}^n を次に示す直和成分の symbols の collection に置き換える。

$$(5.2.1) \quad \bullet \simeq \mathbb{Z}_3, \circlearrowleft \simeq \mathbb{Z}_9, \triangleright \simeq \mathbb{Z}_{27}.$$

E^2 に対する symbol = は、同型を表す。

$$(5.2.2) \quad \bullet = \bullet, \circlearrowleft = \circlearrowleft, \triangleright = \triangleright.$$

E^2 に対する symbol → は、同型でなく、非自明であるものを表す。

$$(5.2.3) \quad \bullet \rightarrow \circlearrowleft, \circlearrowleft \rightarrow \triangleright, \triangleright \rightarrow \bullet, \bullet \rightarrow \circlearrowleft, \circlearrowleft \rightarrow \bullet, \bullet \rightarrow \triangleright, \triangleright \rightarrow \bullet.$$

ここで、最初の 2 つは単射、次の 2 つは全射、最後の 2 つは p 倍を表している。

まず、10-stem groups ${}_3\pi_{n+10}(S^n)$ について述べる。 ${}_3\pi_{13}(S^3) \xrightarrow{E^2} {}_3\pi_{15}(S^5) \xrightarrow{E^2} {}_3\pi_{17}(S^7)$.

これは次のように表される。 $\bullet \rightarrow \circlearrowleft \rightarrow \bullet$.

Lem 2.1 の等式 $\Delta \cdot E^2 = p$ により次が成り立つ。 $Q_{13}^1 = \{b\} \simeq \mathbb{Z}/3, Q_{14}^1 = 0$.

これは (5.1.5) が適用されない唯一の場合であることが分かっている。

Lem 3.3 $\xi \in \pi_k^S$ に対して、 $u(\xi) < 2p(m+1) - 5, p\xi = 0, \alpha_1 \xi = 0$ ならば、 $\eta \in (m+1)\{\alpha_1, p, \xi\} - m\{p, \alpha_1, \xi\}$

に対して、 $d_1(\bar{Q}^{m+1}(\xi)) = PH(\bar{Q}^{m+1}(\xi)) = Q^m(\eta)$.

ここで、 $u(\xi) \leq 4p - 3$ の ξ に対して、 $m = 1$ のときに成り立つ。

$$(5.1.1) (7) \quad {}_3\pi_{30}^S = \{\beta_1^3\}, \quad \beta_1^3 = \{\alpha_1, 3, \beta_2\}.$$

$$(5.1.1) (13) \quad {}_3\pi_{42}^S = \{\varepsilon_2\}, \quad \varepsilon_2 = \{\alpha_1, 3, \varepsilon_1\} = 2\{3, \alpha_1, \varepsilon_1\}.$$

$$(5.1.1) (15) \quad {}_3\pi_{46}^S = \{\beta_1^2 \beta_2\}.$$

残りの invariants に対して、 $d_1(x) = 0$ である。

$$(5.1.8) \quad x = ab, ab^2, ab_2, b^3, e_1, abb_2, b^4, e_2, ab_2^2, b^5, ab_2^2,$$

$$(5.1.9) \quad x = AB, AB^2, AB_2, B^3, ABB_2, B^4, AB^2 B_2, B^5, AB_2^2.$$

Lem 3.8 $m \not\equiv -1, -2 \pmod{p}$ で、 $\gamma \in \pi_{i-4}(S^{2m+4p-9})$ に対して invariant $x \in \pi_{i+2}(Q_2^{2m+3})$ は $E^6(i_* \gamma)$ による

M-represented であり、 $\alpha_1(2m+4p-9) \circ \gamma = 0$ であるならば、 $\xi \in \pi_i(S^{2m+1})$ が存在して、up to non-zero

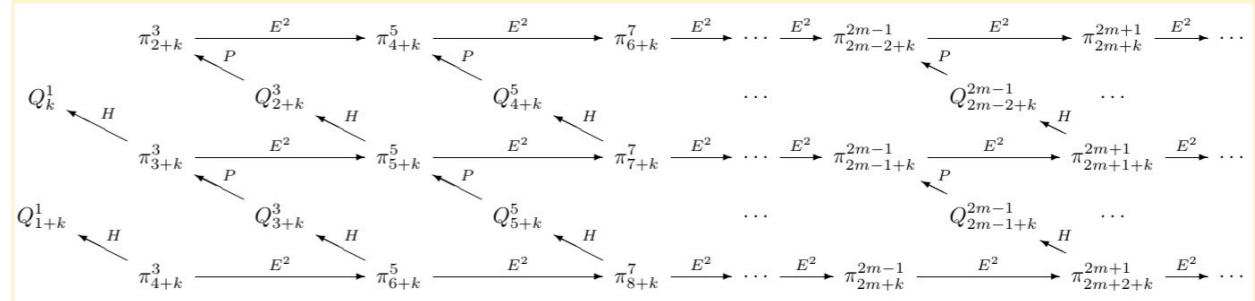
coefficient で $H(\xi) \in I\{\alpha_1(2pm-1), \alpha_1(2pm+2p-4), E^3 \gamma\}, E^2(\xi) = P(x)$.

Lem 3.9 $m \not\equiv 0, -1 \pmod{p}$ で、 $\gamma \in \pi_{i-3}(Y^{2m+4p-8})$ に対して invariant $x \in \pi_{i+2}(Q_2^{2m+3})$ は $E^6 \gamma$ による

M-represented であり、 $\eta_{m+1}^{(3)} \circ \gamma = 0$ であるならば、 $\xi \in \pi_{i+1}(S^{2m+1})$ が存在して、up to non-zero coefficient で

$$H_p(\xi) = JH(\xi) \in \{\alpha_1(2pm+1), \alpha_1(2pm+2p-2), E^3 \pi_* \gamma\}.$$

Computing Diagram mod A



Lem 2.1 次の 2 つの合成は、どちらも p 倍する写像である。

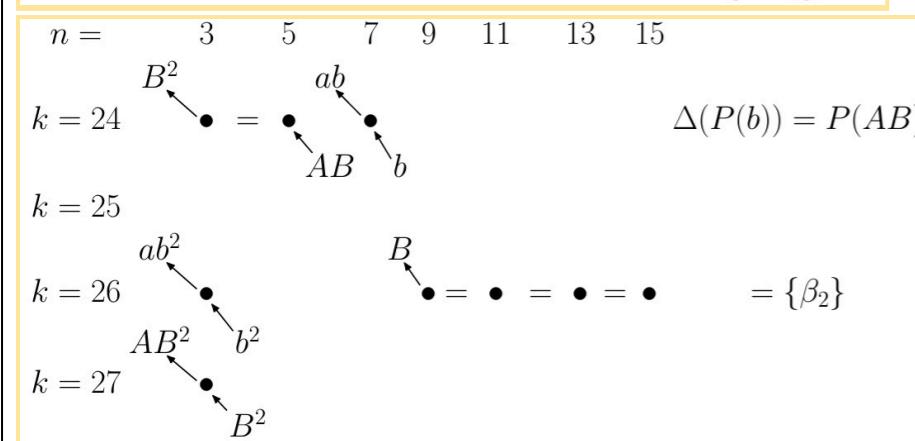
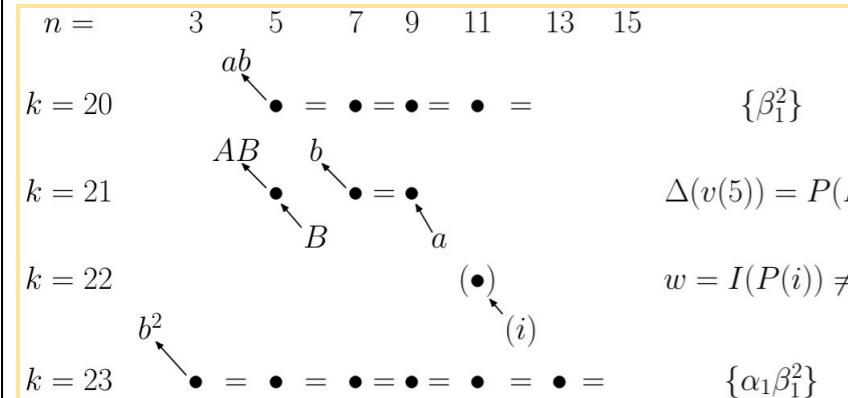
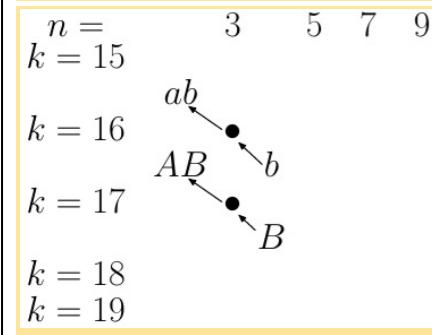
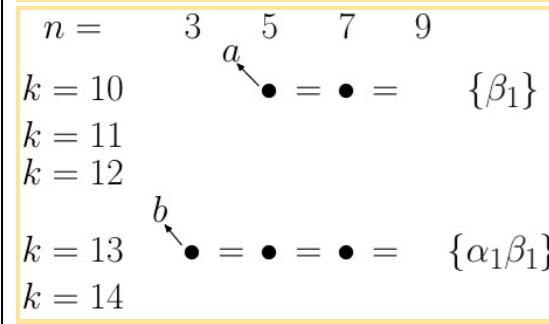
$$\Delta \cdot E^2 : {}_p\pi_i(S^{2pm-1}) \rightarrow {}_p\pi_{i+2}(S^{2pm+1}) \rightarrow {}_p\pi_i(S^{2pm-1}),$$

$$E^2 \cdot \Delta : {}_p\pi_{i+2}(S^{2pm+1}) \rightarrow {}_p\pi_i(S^{2pm-1}) \rightarrow {}_p\pi_{i+2}(S^{2pm+1}).$$

$$(5.1.5) \cdots \xrightarrow{J} {}_p\pi_{2m+1+k}^{6m+1} \xrightarrow{\Delta} {}_p\pi_{2m-1+k}^{6m-1} \xrightarrow{I} {}_Q^{2m-1} \xrightarrow{J} {}_p\pi_{2m+k}^{6m+1} \xrightarrow{\Delta} {}_p\pi_{2m-2+k}^{6m-1} \xrightarrow{I} \cdots.$$

27-stemまでの computing diagram mod Aは以下のように表される。

Th 5.1 $k \leq 27$ と奇数 n に対して、 k -stem groups mod A π_{n+k}^n は、以下の通りである。



$m \geq 2$ に対して、 Q_i^{2m-1} の全ての invariant は metastable range にあり、上の図式で示されているように、Th 2.2 または Prop 2.1 により生成元が得られる。

Δ の結果から、(5.1.6) により、 $Q_i^1 \simeq \pi_{3+i}^3$ の生成元が確かめられる。

$k = 13, 20, 23$ に対して、 $E^2: \pi_{5+k}^5 \rightarrow \pi_{7+k}^7$ が • の同型であるので、 $\Delta \circ E = p$ から、 $\Delta = 0: \pi_{7+k}^7 \rightarrow \pi_{5+k}^5$ である。

よって、図式で示されるように、 $\pi_{3+k}^3 \simeq Q_k^1$ と $\pi_{4+k}^3 \simeq Q_{1+k}^1$ の生成元は、Th 2.4 により得られる。

$k = 21, 24$ に対して、 $E^2 = 0: \pi_{5+k}^5 \rightarrow \pi_{7+k}^7$ である。よって、Th 4.3 から、 $\Delta: \pi_{7+k}^7 \rightarrow \pi_{5+k}^5$ は全射であるので同型である。よって、 π_{3+k}^3 にはこれ以上、生成元は無い。

Th 2.2 (2.1.9) の mod p fibration は、次の $IJ\Delta$ -sequence を誘導し、これは、mod p で完全である。

$$\dots \xrightarrow{\Delta} \pi_{i+2}(S^{2pm-1}) \xrightarrow{I} \pi_i(Q_2^{2m-1}) \xrightarrow{J} \pi_{i+3}(S^{2pm+1}) \xrightarrow{\Delta} \pi_{i+1}(S^{2pm-1}) \xrightarrow{I} \dots$$

Prop 2.1 $i < 2p^2m - 3$ に対して、次の split 完全列を得る。

$$0 \rightarrow \pi_{i-2pm+3}^S \otimes \mathbb{Z}_p \rightarrow \pi_i(Q_2^{2m-1}) \rightarrow \text{Tor}(\pi_{i-2pm+2}^S, \mathbb{Z}_p) \rightarrow 0.$$

$$(5.1.6) \dots \xrightarrow{H_p} \pi_{4+k}^7 \xrightarrow{\Delta} \pi_{2+k}^5 \xrightarrow{G} \pi_{3+k}^3 \xrightarrow{H_p} \pi_{3+k}^7 \xrightarrow{\Delta} \pi_{1+k}^5 \xrightarrow{G} \dots$$

Th 2.4 次の列は $i + 1 \neq 3$ のとき、mod p で完全である。

$$\dots \xrightarrow{H_p} \pi_{i+2}(S^{2p+1}) \xrightarrow{\Delta} \pi_i(S^{2p-1}) \xrightarrow{G} \pi_{i+1}(S^3) \xrightarrow{H_p} \pi_{i+1}(S^{2p+1}) \xrightarrow{\Delta} \dots$$

ここで、 G は $G(\xi) = \alpha_1(3) \circ E(\xi)$ for $\xi \in \pi_i(S^{2p-1})$ で与えられ、Hopf invariant H_p は、次を満たす。

$$H_p\{\alpha_1(3), p\iota_{2p}, E(\xi)\}_1 = -E^2(\xi) \text{ for } \xi \in \pi_i(S^{2p-1}) \text{ with } p \cdot \xi = 0.$$

Th 4.3 $a \not\equiv 0 \pmod{p}$, $v = v(r) > r$ に対して、 $r = ap^v$ とする。 $s \leq v, s < m \leq r - s$ に対して、元

$\alpha_r^{*(s)}(2m+1) \in \pi_{2m-1+rq}(S^{2m+1})$ が、 $s \leq v, s < m$ に対して、元 $a_r^{*(s)}(2m+1) \in \pi_{2m+rq}(S^{2m+1})$ が存在して、up

to non-zero coefficients で次の性質を満たす。

$$(0) \alpha_r^{*(0)}(2m+1) = \alpha_r(2m+1), \alpha_r^{*(0)}(2m+1) = \alpha_r(2m+1).$$

$$(1) 1 \leq s \leq v, s < m \leq r - s \text{ に対して, } p \cdot \alpha_r^{*(s)}(2m+1) = \alpha_r^{*(s-1)}(2m+1), E^2 \alpha_r^{*(s)}(2m+1) \\ = \alpha_r^{*(s-1)}(2m+3).$$

$$(2) 1 \leq s \leq v, s < m \text{ に対して, } p \cdot \alpha_r^{*(s)}(2m+1) = \alpha_r^{(s-1)}(2m+1), E^2 \alpha_r^{*(s)}(2m+1) = \alpha_r^{(s)}(2m+3).$$

$$(3) 1 \leq m \leq v+1 \text{ に対して, } H(\alpha_r^{(m)}(2m+1)) = A_{r-m}(2m-1),$$

$$v+1 \leq m < r \text{ に対して, } P(A_{r-m-1}(2m+1)) = E^{2v} \alpha_r^{*(s)}(2m+1).$$

$$(4) \alpha_r^{*(s)}(2m+1) \text{ と } a_r^{(s)}(2m+1) \text{ の位数はどちらも } p^{s+1} \text{ である。}$$

$$(5) r \text{ に対して Assertion A である、特に } r \leq p^{p^2} \text{ であるならば, } s = \text{Min}(v, m+1), 1 \leq m < r - v \text{ に対して, }$$

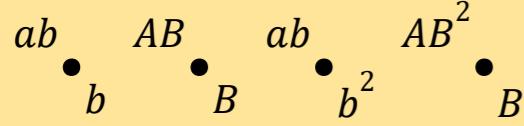
$$H(\alpha_r^{*(s)}(2m+1)) = a_{r-m}(2m-1).$$

EHP-sequence の完全性により、 $k = 16$ の場合の唯一の可能性は、 $HP(b) = ab$ である。 β_1 を合成することにより、自然数から、 $k = 26$ に対して $HP(b^2) = ab^2$ である。 $k = 17, 27$ の場合も同様。stable の生成元 $\alpha_1\beta_1$, β_1^2 , $\alpha_1\beta_1^2$, β_2 に対して、EHP-sequence の完全性から、 $k = 13, 20, 23, 26$ の場合の唯一の可能性を見る。 $k = 21, 24$ の場合はまた、 $\pi_k^S = 0$ からただ一つに定まる。

上の計算の中で、EHP-sequence の完全性と invariants の情報のみを必要とした。しかしながら、続きの計算にはいくつかあいまいな点があり、完全列を決定するためには、section 3 のいくつかの Lemma が必要である。そこで、computing diagram を、simple unstable elements の部分、short range unstable elements の部分、stable class に収束する long unstable series を含む残りの部分の、3つの部分に分ける。例えば、Th 5.1 の computation diagram は、次の3つの部分 (1), (2), (3) に分けられる。

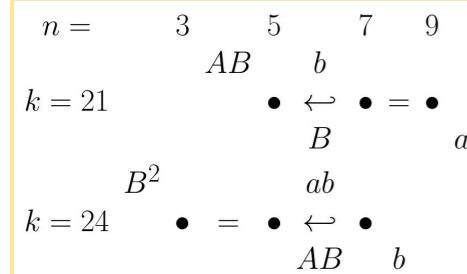
(1) Removable simple unstable elements.

$$(n, k) = (3, 16) \quad (3, 17) \quad (3, 26) \quad (3, 27)$$

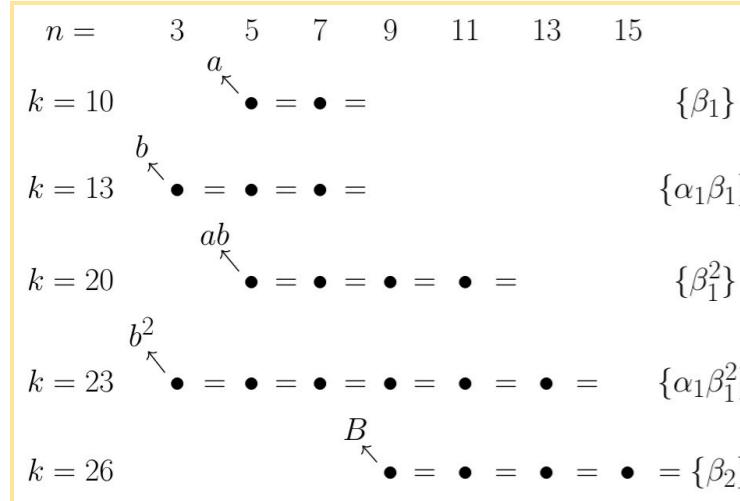


ここで、symbol ↵ は省略される。Prop 5.1, $m \equiv 1 \pmod{3}$ の中に並べられている対 $\{x, d_1(x)\}$ に対して、各 collection は $\{x, P(x) \in \pi_{n+k}^n, HP(x) \neq 0\}$ からなる。

(2) Removable short range unstable elements.



(3) Remaining parts.



(2)において symbol ↵ はまた、簡単のために消されている。

$n = 2m - 1$ と $n = 2m + 1$ の間の k -stem groups における symbol • ← • は、準同型

$$\Delta : \pi_{2m+1+k}^{2m+1} \rightarrow \pi_{2m-1+k}^{2m-1}, \quad m \equiv 0 \pmod{p},$$

で、2つの • に対応する位数 p の巡回群をキャンセルすることを示している。

$k = 21$ のとき、Lem 3.7 から $\Delta \neq 0$ が成り立つ。自然性により、 α_1 を右から合成することから $k = 24$ のときに $\Delta \neq 0$ であることを得る。

この図式から、stable class の origin の Hopf invariant についての次の結果を得る。

$$(5.2.4) \quad H(\beta_1(5)) = I(\alpha_1(9)), \quad H_p(\beta_2(9)) = J(H(\beta_2(9))) = \beta_1(25).$$

Prop 5.1 各 invariant $x \in Q_{6m+3+k}^{2m+1}$ の像 $d_1(x) = HP(x) \in Q_{6m+k}^{2m-1}$ は、符号を除いて、下記で与えられる。

k	10	11	20	21	26	27	36	37	37	38	39	43
x	b	B	b^2	B^2	b_2	B_2	bb_2	BB_2	e'	E'	E_1	E_2
$m \equiv 0$	ab	0	ab^2	0	ab_2	b^3	abb_2	0	b^4	0	e_2	0
$m \equiv 1$	ab	AB	ab^2	AB^2	ab_2	AB_2	abb_2	ABB_2	b^4	B^4	0	AE_2
$m \equiv 2$	0	AB	0	AB^2	0	AB_2	0	ABB_2	0	B^4	e_2	AE_2

k	46	47	47	48	52	53
x	b^2b_2	B^2B_2	be'	BE'	b_2^2	B_2^2
$m \equiv 0$	ab^2b_2	0	b^5	0	ab_2^2	0
$m \equiv 1$	ab^2b_2	AB^2B_2	b^5	B^5	ab_2^2	AB_2^2
$m \equiv 2$	0	AB^2B_2	0	B^5	0	AB_2^2

残りの invariants に対して、 $d_1(x) = 0$ である。

$$(5.1.8) \quad x = ab, ab^2, ab_2, b^3, e_1, abb_2, b^4, e_2, ab_2^2, b^5, ab_2^2,$$

$$(5.1.9) \quad x = AB, AB^2, AB_2, B^3, ABB_2, B^4, AB^2B_2, B^5, AB_2.$$

Lem 3.7 $\xi \in \pi_{i+4}(S^{2pm+1})$, $\gamma \in \pi_s^S$, $\delta \in \pi_t^S$ に対して、up to non-zero coefficients で次の関係が成り立つ。

$$(1) \quad H(\xi) = Q^{pm}(\gamma) \text{ は、 } H(\Delta(\xi)) = \bar{Q}^{pm-1}(\alpha\gamma) = HP(\bar{Q}^{pm}(\xi)) \text{ を誘導する。}$$

$$(2) \quad H(\xi) = Q^{pm}(\gamma), \Delta(\xi) = P(\bar{Q}^{pm}(\gamma)) \text{ は、 } H(\xi \circ \delta(i+4)) = Q^{pm}(\gamma\delta), \Delta(\xi \circ \delta(i)) = P(\bar{Q}^{pm}(\gamma\delta)) \text{ を誘導する。}$$

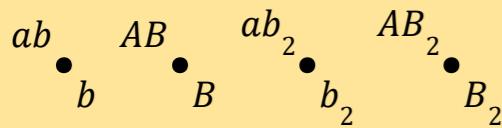
5.3 3-primary k -stem Groups for $28 \leq k \leq 35$

$28 \leq k \leq 35$ に対する computing diagram mod A を考える。このとき、 $w = IP(i) \in Q_{3+28}^3$ 以外の invariant は stable type である。

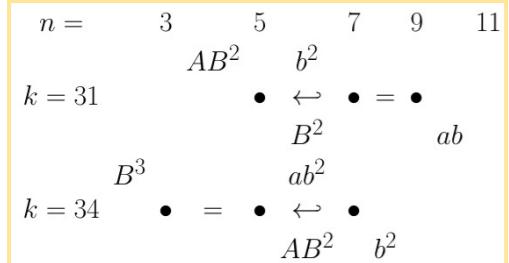
Th 5.2 $28 \leq k \leq 35, n: \text{odd}$ に対する mod A k -stem groups π_{n+k}^n は、以下の3つの部分の直和として得られる。

(1) Removable simple unstable elements.

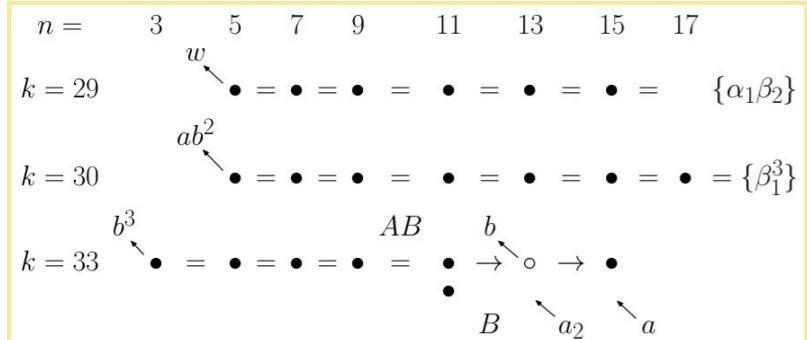
$$(n, k) = (9, 28) \quad (9, 29) \quad (3, 32) \quad (3, 33)$$



(2) Removable short range unstable elements.



(3) Remaining part.



$\pi_{13+33}^{13} \simeq \mathbb{Z}_9$ の生成元を v とすると、up to non-zero coefficient で、

$$H(v) = b, 3v = \alpha_1\beta_1^3(13), \Delta v = \alpha_1\beta_1^3(11) \pm P(B).$$

Proof. (1) の最初の2つは Prop 5.1 から成り立つ。 $\xi = \alpha_1(3) \circ \alpha_1\beta_2(6)$ とすると、 $H\xi = ab_2$ である。

$\alpha_1(5) \circ \alpha_1(8) = 0$ であるから、 $E^2\xi = 0, P(b_2) = \xi$ である。Th 2.4 により、 S^3 において、 $\xi \in \{\alpha_1, 3, \alpha_1\beta_2\}$ に対して、 $H(-\xi) = AB_2$ である。 S^5 において、 $\xi \in \alpha_2\beta_2 \equiv -\alpha_1\{\alpha_1, 3, \beta_2\} \equiv -\alpha_1\beta_1^3 \equiv 0$ である。よって、 $P(B_2) \equiv \xi \pmod{\alpha_1\beta_1^3}$ である。k = 21, 24 の(2)に、右から β_1 を合成することにより(2)が証明される。

(3) の $k = 29, 30$ の結果はただ一つの解である。k = 33 の場合について、次の一般的な結果を示す必要がある。

Lem 5.1 $l \geq 1$ とする。このとき up to non-zero coefficients で次が成り立つ。

(1) $v(6l+1) \in \pi_{18l+10}^{6l+1}$ が存在して、次を満たす。

$$H(v(6l+1)) = Q^{3l}(\beta_1) = b, \text{ and } v(6l+3) = P(Q^{3l+2}(\alpha_1)) = P(a).$$

ここで、 $v(6l+3) = E^2v(6l+1)$ 。このように、 $v(6l+3)$ の位数は 3 であり、 $E^2v(6l+3) = 0$ である。

さらに、 $\Delta(v(6l+1)) \equiv P(\bar{Q}^{3l-1}(\beta_1)) = P(B) \pmod{E^2\pi_{18l+6}^{6l-3}}$ 。

(2) $l \not\equiv 2 \pmod{3}$ のとき、 $v(6l+1)$ の位数は 3 である。

(3) $l \equiv 2 \pmod{3}$ 、 $E^\infty: \pi_{18l+7}^{6l-3} \rightarrow \pi_{12l+10}^S$ が全射ならば、 $v(6l+1)$ の位数は 9 であり、

$$\Delta(v(6l+1)) = P(B) + E^2v',$$

ここで、 $v' \in \pi_{18l+6}^{6l-3}$ は $E^4v' = 3v(6l+1)$ である。

Prop 5.1 各 invariant $x \in Q_{6m+3+k}^{2m+1}$ の像 $d_1(x) = HP(x) \in Q_{6m+k}^{2m-1}$ は、符号を除いて、下記で与えられる。

k	10	11	20	21	26	27	36	37	37	38	39	43
x	b	B	b^2	B^2	b_2	B_2	bb_2	BB_2	e'	E'	E_1	E_2
$m \equiv 0$	ab	0	ab^2	0	ab_2	b^3	abb_2	0	b^4	0	e_2	0
$m \equiv 1$	ab	AB	ab^2	AB^2	ab_2	AB_2	abb_2	ABB_2	b^4	B^4	0	AE_2
$m \equiv 2$	0	AB	0	AB^2	0	AB_2	0	ABB_2	0	B^4	e_2	AE_2

k	46	47	47	48	52	53
x	b^2b_2	B^2B_2	be'	BE'	b_2^2	B_2^2
$m \equiv 0$	ab^2b_2	0	b^5	0	ab_2^2	0
$m \equiv 1$	ab^2b_2	AB^2B_2	b^5	B^5	ab_2^2	AB_2^2
$m \equiv 2$	0	AB^2B_2	0	B^5	0	AB_2^2

残りの invariants に対して、 $d_1(x) = 0$ である。

$$(5.1.8) x = ab, ab^2, ab_2, b^3, e_1, abb_2, b^4, e_2, ab_2^2, b^5, ab_2,$$

$$(5.1.9) x = AB, AB^2, AB_2, B^3, ABB_2, B^4, AB^2B_2, B^5, AB_2.$$

Th 2.4 次の列は $i + 1 \neq 3$ のとき、mod p で完全である。

$$\dots \xrightarrow{H_p} \pi_{i+2}(S^{2p+1}) \xrightarrow{\Delta} \pi_i(S^{2p-1}) \xrightarrow{G} \pi_{i+1}(S^3) \xrightarrow{H_p} \pi_{i+1}(S^{2p+1}) \xrightarrow{\Delta} \dots$$

ここで、 G は $G(\xi) = \alpha_1(3) \circ E(\xi)$ for $\xi \in \pi_i(S^{2p-1})$ で与えられ、Hopf invariant H_p は、次を満たす。

$$H_p\{\alpha_1(3), p\iota_{2p}, E(\xi)\} = -E^2(\xi) \text{ for } \xi \in \pi_i(S^{2p-1}) \text{ with } p \cdot \xi = 0.$$

Prop 5.2 $m \equiv 0 \pmod{3}$ とする。(5.1.10) の元に対して、 $x = Q^{m+2}(\gamma), y = Q^m(\delta)$ とする。このとき、元 $\xi \in \pi_i(S^{2m+1})$ が存在して次を満たす。 $H(\xi) = y, E^2\xi = P(x)$.

Lem 3.7 $\xi \in \pi_{i+4}(S^{2pm+1}), \gamma \in \pi_s^S, \delta \in \pi_t^S$ に対して、up to non-zero coefficients で次の関係が成り立つ。

(1) $H(\xi) = Q^{pm}(\gamma)$ は、 $H(\Delta(\xi)) = \bar{Q}^{pm-1}(\alpha\gamma) = HP(\bar{Q}^{pm}(\xi))$ を誘導する。

(2) $H(\xi) = Q^{pm}(\gamma), \Delta(\xi) = P(\bar{Q}^{pm}(\gamma))$ は、 $H(\xi \circ \delta(i+4)) = Q^{pm}(\gamma\delta), \Delta(\xi \circ \delta(i)) = P(\bar{Q}^{pm}(\gamma\delta))$ を誘導する。

Lem 3.2 $\xi \in \pi_k^S$ に対して、 $u(\xi) < 2p(m+1) - 5, p\xi = 0$ ならば、 $d_1(\bar{Q}^{m+1}(\xi)) = HP(\bar{Q}^{m+1}(\xi)) = m \cdot \bar{Q}^m(\alpha_1\xi)$.

ここで、 $u(\xi) \leq 4p - 3$ の ξ に対して、 $m = 1$ のときに成り立つ。

Lem 3.4 $x \in \pi_{i+2}(Q_2^{2m+1})$ が $E^4(\gamma)$ による M-represented であり、 $h'_{m^*}(\gamma) = 0$ ならば、元 $\xi \in \pi_i(S^{2m-1})$ が存在し、 $\alpha(2pm - 2) \circ E^2\gamma$ による M-represented $y \in \pi_i(Q_2^{2m-1})$ に対して、 $p \cdot \xi = P(y), E^2\xi = P(x)$.

Lemma 2.1 次の2つの合成は、どちらも p 倍する写像である。

$$\Delta \circ E^2: {}_p\pi_i(S^{2pm-1}) \rightarrow {}_p\pi_{i+2}(S^{2pm+1}) \rightarrow {}_p\pi_i(S^{2pm-1}),$$

$$E^2 \circ \Delta: {}_p\pi_{i+2}(S^{2pm+1}) \rightarrow {}_p\pi_i(S^{2pm-1}) \rightarrow {}_p\pi_{i+2}(S^{2pm+1}).$$

$$(5.1.5) \dots \xrightarrow{J} \pi_{2m+1+k}^{6m+1} \xrightarrow{\Delta} \pi_{2m-1+k}^{6m-1} \xrightarrow{I} \bar{Q}_{2m-1+k}^{2m-1} \xrightarrow{J} \pi_{2m+k}^{6m+1} \xrightarrow{\Delta} \pi_{2m-2+k}^{6m-1} \xrightarrow{I} \dots.$$

Proof. $\beta_1 = \{\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1\}$ なので、Prop 5.2 により $H(\xi) = b, E^2\xi = P(a)$ を満たす $\xi = v(6l + 1)$ が存在することから (1) が成り立つ。Lem 3.7 (1) と Lem 3.2 により $H\Delta(v(6l + 1)) = \bar{Q}^{3l+1}(\alpha_1\beta_1) = AB = HP(B)$ であり、最後の結果が成り立つ。

(2) の場合、 $a_2 = a_2(6l + 1) = H(\alpha_{3l+3}^*(6l + 3))$ である。よって、 $P(a_2) = 0$ であり、 $E^2: \pi_{18l+10}^{6l+1} \rightarrow \pi_{18l+12}^{6l+3}$ は単射である。よって $3v(6l + 1) = 0$ である。

(3) の場合、 a_2 は alpha invariant ではなく $P(a_2) \neq 0$ である。 a は αi による M-represented であり、 a_2 は $\alpha^2 i$ による M-represented である。よって Lem 3.4 により $P(a_2) = 3v(6l + 1)$ である。ゆえに $v(6l + 1)$ の位数は 9 である。 $\Delta(v(6l + 1)) = P(B) + E^2v'$ とする。Lem 2.1 により、 $3v(6l + 1) = E^2\Delta v(6l + 1) = E^2P(B) + E^4v' = E^4v'$ である。■

5.4 3-primary k-stem Groups for $36 \leq k \leq 45$

33-stem groups の中で、unstable elements の long series があった。

$$(5.4.1) \alpha_1\beta_1^3(3) \xrightarrow{E^2} \alpha_1\beta_1^3(5) \xrightarrow{E^2} \alpha_1\beta_1^3(7) \xrightarrow{E^2} \alpha_1\beta_1^3(9) \xrightarrow{E^2} \alpha_1\beta_1^3(11) \xrightarrow{E^2} \alpha_1\beta_1^3(13) \xrightarrow{E^2} 0$$

ここで、 π_{43}^{13} の stable limit が β_1^3 となる生成元 $\beta_1^3(13)$ に対して $\alpha_1\beta_1^3(3) = \alpha_1(3) \cdot \beta_1^3(13)$ である。

よって、 $m = 1, 2$ に対して、次の not stable type invariants を得る。

$$ab^3 = I(\alpha_1\beta_1^3(6m - 1)), AB^3 \text{ with } J(AB^3)\alpha_1\beta_1^3(6m + 1).$$

$36 \leq k \leq 45$ に対して、not stable type の invariants は $w \in Q_{5+42}^5$ と、上の ab^3, AB^3 である。

Th 5.3 $36 \leq k \leq 45, n: \text{odd}$ に対する mod A k-stem groups π_{n+k}^n は、以下の3つの部分の直和として得られる。

(1) Removable simple unstable elements.

$$(n, k) = (3, 36) \quad (3, 37) \quad (9, 38) \quad (9, 39) \quad (15, 40) \quad (15, 41) \quad (3, 42) \quad (3, 43)$$

$$\begin{array}{ccccccccc} ab^3 & AB^3 & ab^2 & AB^2 & ab & AB & abb_2 & ABB_2 \\ \bullet & \bullet \\ b^3 & B^3 & b^2 & B^2 & b & B & bb_2 & BB_2 \end{array}$$

$$(n, k) = (3, 43) \quad (3, 44) \quad (9, 44) \quad (9, 45)$$

$$\begin{array}{cccc} b^4 & B^4 & ab_2 & AB_2 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ e' & E' & b_2 & B_2 \end{array}$$

(2) Removable short range unstable elements.

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc} n = & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 & 17 & 19 & 21 & 23 \\ & & & B^2 & & ab & & & & & & \\ k = 36 & & & \bullet = & \bullet \xleftarrow{\quad} & \bullet & \xleftarrow{\quad} & \bullet & & & & \\ & & & & & AB & & & & & & \\ & ab^3 & ab_2 & & & & & & & & & \\ k = 40 & \bullet \xleftarrow{\quad} & \bullet & & & & & & & & & \\ & & AB_2 & & b_2 & & & & & & & \\ & AB^3 & b^3 & & & & & & & & & \\ k = 41 & \bullet \xleftarrow{\quad} & \bullet & & & & & & & & & \\ & & B^3 & & B_2 & & & & & & & \\ & AB^2 & b^2 & & & & & & & & & \\ k = 43 & \bullet \xleftarrow{\quad} & \bullet = & \bullet & & ab & & & & & & \\ & & B^2 & & & AB & & & & & & \\ & & & & & \bullet \xleftarrow{\quad} & \bullet = & \bullet & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ k = 45 & & & & & & & & & & & \\ n = & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 & 17 & 19 & 21 & 23 \end{array}$$

Lem 5.1 $l \geq 1$ とする。このとき up to non-zero coefficients で次が成り立つ。

(1) $v(6l + 1) \in \pi_{18l+10}^{6l+1}$ が存在して、次を満たす。

$$H(v(6l + 1)) = Q^{3l}(\beta_1) = b, \text{ and } v(6l + 3) = P(Q^{3l+2}(\alpha_1)) = P(a).$$

ここで、 $v(6l + 3) = E^2v(6l + 1)$. このように、 $v(6l + 3)$ の位数は 3 であり、 $E^2v(6l + 3) = 0$ である。

さらに、 $\Delta(v(6l + 1)) \equiv P(\bar{Q}^{3l-1}(\beta_1)) = P(B) \pmod{E^2\pi_{18l+6}^{6l-3}}$.

(2) $l \not\equiv 2 \pmod{3}$ のとき、 $v(6l + 1)$ の位数は 3 である。

(3) $l \equiv 2 \pmod{3}, E^\infty: \pi_{18l+7}^{6l-3} \rightarrow \pi_{12l+10}^S$ が全射ならば、 $v(6l + 1)$ の位数は 9 であり、

$$\Delta(v(6l + 1)) = P(B) + E^2v',$$

ここで、 $v' \in \pi_{18l+6}^S$ は $E^4v' = 3v(6l + 1)$ である。

Prop 5.2 $m \equiv 0 \pmod{3}$ とする。(5.1.10) の元に対して、 $x = Q^{m+2}(\gamma), y = Q^m(\delta)$ とする。このとき、元 $\xi \in \pi_i(S^{2m+1})$ が存在して次を満たす。 $H(\xi) = y, E^2\xi = P(x)$.

Lem 3.7 $\xi \in \pi_{i+4}(S^{2pm+1}), \gamma \in \pi_s^S, \delta \in \pi_t^S$ に対して、up to non-zero coefficients で次の関係が成り立つ。

(1) $H(\xi) = Q^{pm}(\gamma)$ は、 $H(\Delta(\xi)) = \bar{Q}^{pm-1}(\alpha\gamma) = HP(\bar{Q}^{pm}(\xi))$ を誘導する。

(2) $H(\xi) = Q^{pm}(\gamma), \Delta(\xi) = P(\bar{Q}^{pm}(\gamma))$ は、 $H(\xi \circ \delta(i+4)) = Q^{pm}(\gamma\delta), \Delta(\xi \circ \delta(i)) = P(\bar{Q}^{pm}(\gamma\delta))$ を誘導する。

Lem 3.2 $\xi \in \pi_k^S$ に対して、 $u(\xi) < 2p(m+1) - 5, p\xi = 0$ ならば、 $d_1(\bar{Q}^{m+1}(\xi)) = HP(\bar{Q}^{m+1}(\xi)) = m \cdot \bar{Q}^m(\alpha_1\xi)$.

ここで、 $u(\xi) \leq 4p - 3$ の ξ に対して、 $m = 1$ のときに成り立つ。

Lem 3.4 $x \in \pi_{i+2}(Q_2^{2m+1})$ が $E^4(\gamma)$ による M-represented であり、 $h'_m(\gamma) = 0$ ならば、元 $\xi \in \pi_i(S^{2m-1})$ が存在し、 $\alpha(2pm - 2) \cdot E^2\gamma$ による M-represented $y \in \pi_i(Q_2^{2m-1})$ に対して、 $p \cdot \xi = P(y), E^2\xi = P(x)$.

Lemma 2.1 次の2つの合成は、どちらも p 倍する写像である。

$$\Delta \circ E^2: \pi_i(S^{2pm-1}) \rightarrow \pi_{i+2}(S^{2pm+1}) \rightarrow \pi_i(S^{2pm-1}),$$

$$E^2 \circ \Delta: \pi_{i+2}(S^{2pm+1}) \rightarrow \pi_i(S^{2pm-1}) \rightarrow \pi_{i+2}(S^{2pm+1}).$$

$$(5.1.5) \dots \rightarrow^J \pi_{2m+1+k}^{6m+1} \xrightarrow{\Delta} \pi_{2m-1+k}^{6m-1} \xrightarrow{I} \bar{Q}_{2m-1+k}^{2m-1} \rightarrow^J \pi_{2m+k}^{6m+1} \xrightarrow{\Delta} \pi_{2m-2+k}^{6m-1} \xrightarrow{I} \dots$$

(3) Remaining part.											
$n =$	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
$k = 36$											
	ab_2										
$k = 37$											
	AB_2	b_2									
$k = 38$											
		B_2									
$k = 39$											
	bb_2										
$k = 40$											
	BB^2										
$k = 42$											
	ab^2										
$k = 45$											
	w	b^3									
$n =$	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23

Proof. (1) Th 5.2 (1) の関係式 $d_1(b^2) = ab^2, d_1(B^2) = AB^2$ から、 β_1 を右から合成することにより、

$d_1(b^3) = ab^3, d_1(B^3) = AB^3$ を得る。残りの d_1 についての関係式は Prop 5.1 から成り立つ。

(2) $k = 36, 43, 45$ における short range unstable elements は Prop 5.2, 5.3 によって構成される。

$k = 43, 45$ における collections の removability は Lem 3.7 (1) から成り立ち、 $k = 36$ におけるものは Lem 3.7

(2) から成り立つ。

$k = 40$ において、 $d_1(AB_2) = d_1(A_1) \circ \beta_2 = \alpha_2 \circ \beta_2$ は、 S^9 の中で $\alpha_2 \beta_2 = -\{\alpha_1, \alpha_1, 3\} \beta_2 = \alpha_1 \{\alpha_1, 3, \beta_2\} = \alpha_1 \beta_1^3$ に

よって表わされる。よって $d_1(AB_2) = ab^3$ である。 $k = 40, 41$ における位数 3 の simple unstable elements は、

Prop 5.1 と naturality によって構成される。removability は Lem 2.4 から成り立つ。

(3) $d_1(B_2) = AB_2$ は Prop 5.1 から成り立つ。よって (3) の結果は EHP-sequence の完全性により一意的に定まる。 $k = 37$ における removability は Lem 2.4 から成り立つ。■

Th 5.3 (3) から次を得る。

(5.4.2) $u(\varepsilon') = 7, u(\varepsilon_1) = 15, u(\varepsilon_2) = 11, u(\varphi) = 9,$

(5.4.3) $u(\beta_1 \beta_2) = 5, u(\alpha_1 \beta_1 \beta_2) = 3, u(\beta_1^4) = 3, u(3\varphi) = u(\alpha_1 \varepsilon_2) = 7.$

ここで、Oka の ∂_α の応用について述べる。

Th 5.1 において、 $k = 21$ の中の short range unstable elements に ∂_α を適用し 24-stem groups の元を得る。

$$P(a) = E^2 v, H(v) = b \Rightarrow P(AB) = E^2(\partial_\alpha(v)), H(\partial_\alpha(v)) = B^2.$$

$k = 31, 33$ に対して、 k -stem gropus から $(k+3)$ -stem groups までの間で類似の状況が見られる。しかしながら、 $m = 0$ の場合が除外されているため、 $\pi_{7+k}^{2p^2}$ の元に対して Lem 3.12, 3.13 を適用することができない。

$m = 0$ の場合、(3.5.5) の中の $\beta_{(1)}$ は存在しないが、Th 3.5 はなお成立する。そこで次を用意する。

Lem 5.2 $\xi \in \pi_{i+4}(S^{2p+1})$ Hopf invariant $H(\xi)$ は $\gamma \in \pi_{i+1}(Y^{2p^2-2})$ による M-represented であると仮定する。このと

き up to non-zero coefficient で次が成り立つ。 $JH(\partial_\alpha(\xi)) = H_p(\partial\alpha(\xi)) = \bar{\beta}_1 \circ E^2 \gamma,$

ここで、 $\bar{\beta}_1: Y^{2p^2} \rightarrow S^{2p+1}$ は $\beta_1(2p+1)$ の extension である。

$(n, k) =$	$(9, 28)$	$(9, 29)$	$(3, 32)$	$(3, 33)$
	ab	AB	ab_2	AB_2

Th 5.2 (1)

Prop 5.1 各 invariant $x \in Q_{6m+3+k}^{2m+1}$ の像 $d_1(x) = HP(x) \in Q_{6m+k}^{2m-1}$ は、符号を除いて、下記で与えられる。

k	10	11	20	21	26	27	36	37	37	38	39	43
x	b	B	b^2	B^2	b_2	B_2	bb_2	BB_2	e'	E'	E_1	E_2
$m \equiv 0$	ab	0	ab^2	0	ab_2	b^3	abb_2	0	b^4	0	e_2	0
$m \equiv 1$	ab	AB	ab^2	AB^2	ab_2	AB_2	abb_2	ABB_2	b^4	B^4	0	AE_2

k	46	47	47	48	52	53
x	$b^2 b_2$	$B^2 B_2$	be'	BE'	b_2^2	B_2^2
$m \equiv 0$	$ab^2 b_2$	0	b^5	0	ab_2^2	0
$m \equiv 1$	$ab^2 b_2$	$AB^2 B_2$	b^5	B^5	ab_2^2	AB_2^2
$m \equiv 2$	0	$AB^2 B_2$	0	B^5	0	AB_2^2

Prop 5.2 $m \equiv 0 \pmod{3}$ とする。(5.1.10) の元に対して、 $x = Q^{m+2}(\gamma), y = Q^m(\delta)$ とする。このとき、元 $\xi \in \pi_i(S^{2m+1})$ が存在して次を満たす。 $H(\xi) = y, E^2 \xi = P(x).$

Prop 5.3 $m \equiv 1 \pmod{3}$ とする。(5.1.10) の元に対して、 $X = \bar{Q}^{m+2}(\gamma), Y = \bar{Q}^m(\delta)$ とする。Lem 3.9 の中の関係

$d_1(X) = HP(X) = 0$ が得られる、例えば stable range の中の計算であると仮定する。このとき、元 $\xi \in \pi_i(S^{2m+1})$ が存在して次を満たす。 $H(\xi) = Y, E^2 \xi = P(X).$

Lem 3.7 $\xi \in \pi_{i+4}(S^{2pm+1}), \gamma \in \pi_s^S, \delta \in \pi_t^S$ に対して、up to non-zero coefficients で次の関係が成り立つ。

(1) $H(\xi) = Q^{pm}(\gamma)$ は、 $H(\Delta(\xi)) = \bar{Q}^{pm-1}(\alpha\gamma) = HP(\bar{Q}^{pm}(\xi))$ を誘導する。

(2) $H(\xi) = Q^{pm}(\gamma), \Delta(\xi) = P(\bar{Q}^{pm}(\gamma))$ は、 $H(\xi \circ \delta(i+4)) = Q^{pm}(\gamma\delta), \Delta(\xi \circ \delta(i)) = P(\bar{Q}^{pm}(\gamma\delta))$ を誘導する。

Lem 2.4 $\xi \in \pi_p(S^{2p-1})$ に対して、 $E^2(\xi) = 0$ ならば、 ξ は Δ の像である。

$m \geq 1$ に対して、特性類 $\alpha_1(2m+1)$ を持つ sphere-bundle over sphere $S^{2m+1} \xrightarrow{i} B_m(\alpha) \xrightarrow{p} S^{2m+2p-1}$ を考える。この sphere-bundle に関するホモトピー完全列

$\dots \xrightarrow{i_*} \pi_{i+1}(B_m(\alpha)) \xrightarrow{p_*} \pi_{i+1}(S^{2m+2p-1}) \xrightarrow{\partial_\alpha} \pi_i(S^{2m+1}) \xrightarrow{i_*} \pi_i(B_m(\alpha)) \xrightarrow{p_*} \dots$ の境界準同型 ∂_α を考え、次を得る。

Prop 3.5 $\gamma \in \pi_{i-1}(S^{2m-1+q})$ に対して、 $\partial_\alpha(E^2 \gamma) = \alpha_1(2m+1) \circ E\gamma$.

Th 3.5 任意の $\gamma \in \pi_i(S^{2pm+p-1})$ に対して、up to non-zero coefficients で、次の関係が成り立つ。

$$J\partial_\alpha I(E^3 \gamma) = \beta_1(2p(m+1)+1) \circ E^3 \gamma.$$

境界準同型 $\partial_\alpha: \pi_{i+1}(Q_2^{2m+2p-1}) \rightarrow \pi_i(Q_2^{2m+1})$ は、写像 $d_\alpha: \Omega Q_2^{2m+2p-1} \rightarrow Q_2^{2m+1}$ により誘導される。Moore space で写像を近似することにより、 $m \geq 1$ に対して、次の可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccc} Y^{2p(m+p)-3} & \xrightarrow{\beta_{(1)}} & Y^{2p(m+1)-2} \\ \downarrow \Omega_0 g_{m+p} & & \downarrow g_{m+1} \\ \Omega Q_2^{2m+2p-1} & \xrightarrow{d_\alpha} & Q_2^{2m+1} \end{array}$$

ここで、 $\beta_{(1)}$ は次を満たす。(3.5.6) $\pi \beta_{(1)} i = \beta_1(2p(m+1)-2)$.

Lem 3.12 元 $\xi \in \pi_{i+4}(S^{2m+2p+1})$ の Hopf invariant $H(\xi)$ が $\gamma \in \pi_i(Y^{2p(m+p)-3})$ に対して、 $E\gamma$ による M-represented であると仮定する。 $m \geq 1$ ならば、Hopf invariant $H(\partial_\alpha(\xi))$ は $\beta_{(1)} \circ \gamma$ による M-represented である。

(3.5.7) $H(\xi) = Q^{m+p}(\gamma)$ は、 $H(\partial_\alpha(\xi)) = \bar{Q}^{m+1}(\beta_1 \gamma)$ を誘導する。

Lem 3.13 $x \in \pi_{i+1}(Q_2^{2m+2p-1})$ が Ey による M-represented であり、 $y \in \pi_i(Q_2^{2m+1})$ は $\beta_{(1)} \gamma$ による represented であるとする。

$m \geq 1$ ならば、 $P(y) = \partial_\alpha P(x)$ である。

Proof. ∂_α は $d_\alpha: \Omega S^{2p+1} \rightarrow S^3$ により誘導され、 H_p は $h_p: \Omega S^3 \rightarrow \Omega S^{2p+1}$ により誘導される。このとき、 $H_p \partial_\alpha$ は h_p 。 $\Omega d_\alpha: \Omega^2 S^{2p+1} \rightarrow \Omega S^{2p+1}$ により誘導され、 S^{2p-1} への制限は homotopic to zero である。よって $h_p \circ \Omega d_\alpha$ は次の写像を誘導する。

$$h': Q_2^{2p-1} = \Omega(\Omega^2 S^{2p+1}, S^{2p-1}) \rightarrow \Omega^2 S^{2p+1}.$$

$\bar{\beta}_1: Y^{2p^2} \rightarrow S^{2p+1}$ を H' 。 $g_{2p-1}: Y^{2p^2-2} \rightarrow Q_2^{2p-1} \rightarrow \Omega^2 S^{2p+1}$ の adjoint とすると、Th 3.5 は $\bar{\beta}_1|S^{2p^2-1} = \beta_1(2p+1)$ であることを示す。よって lemma が成り立つ。■

例えば、 $\varepsilon'(7) \in \pi_{7+37}^7 H(\varepsilon'(7)) = b_2$ に Lem 5.2 を適用し、 $\beta_1^4(3) = \partial_\alpha(\varepsilon'(7))$, $\beta_1^4(5) = E^2(\beta_1^4(3))$ と置く。よって、次を得る。

$$(5.4.4) \quad \beta_1^4(5) = \alpha_1(5) \circ \varepsilon'(8) = \beta_1(5) \circ \beta_1^3(15) \pm P(AB_2).$$

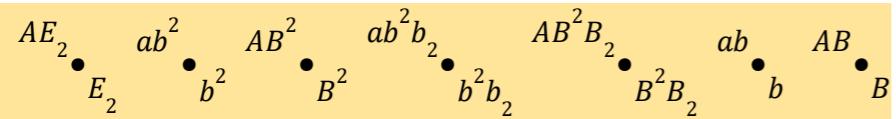
5.5 3-primary k-stem Groups for $46 \leq k \leq 55$

$46 \leq k \leq 55$ に対して、computing diagram の中の invariants は、全て stable type である。

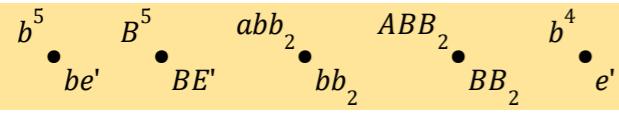
Th 5.4 $46 \leq k \leq 55$, $n: \text{odd}$ に対する mod A k-stem groups π_{n+k}^n は、以下の3つの部分の直和として得られる。

(1) Removable simple unstable elements.

$$(n, k) = (3, 49) (15, 50) (15, 51) (3, 52) (3, 53) (21, 52) (21, 53)$$



$$(n, k) = (3, 53) (3, 54) (9, 54) (9, 55) (9, 55)$$



(2) Removable short range unstable elements.

$n =$	3	5	7	B^3	9	11	ab^2	13	15	17	19	21	23		
$k = 46$					•	=	•	$\xleftrightarrow{AB^2}$	•	b^2					
$k = 47$			ABB_2	bb_2	•	$\xleftrightarrow{BB_2}$	•	=	•	ab_2					
$k = 48$			B^4	e'	•	$\xleftrightarrow{E'}$	•	=	•	b^3	B^2	•	ab		
$k = 49$			e_2	E_1	•	$\xleftrightarrow{e_1}$	•	=	•	AB	b				
$k = 50$			B^2B_2	abb_2	•	=	•	$\xleftrightarrow{ABB_2}$	•	bb_2					
$k = 51$			BE'	b^4	•	=	•	$\xleftrightarrow{B^4}$	•	e'					
$k = 52$				BB_2	•	=	•	$\xleftrightarrow{AB_2}$	•	ab_2					
$k = 53$			AE_2	e_2	•	$\xleftrightarrow{E'}$	•	=	•	b^3	B^2	•	b_2		
$k = 55$				E^2	•	$\xleftrightarrow{E_1}$	•	=	•	B^3	B_2				
$n =$	3	5	7	9	11	13	15	17	AB^2	b^2	B^2	19	21	ab	23

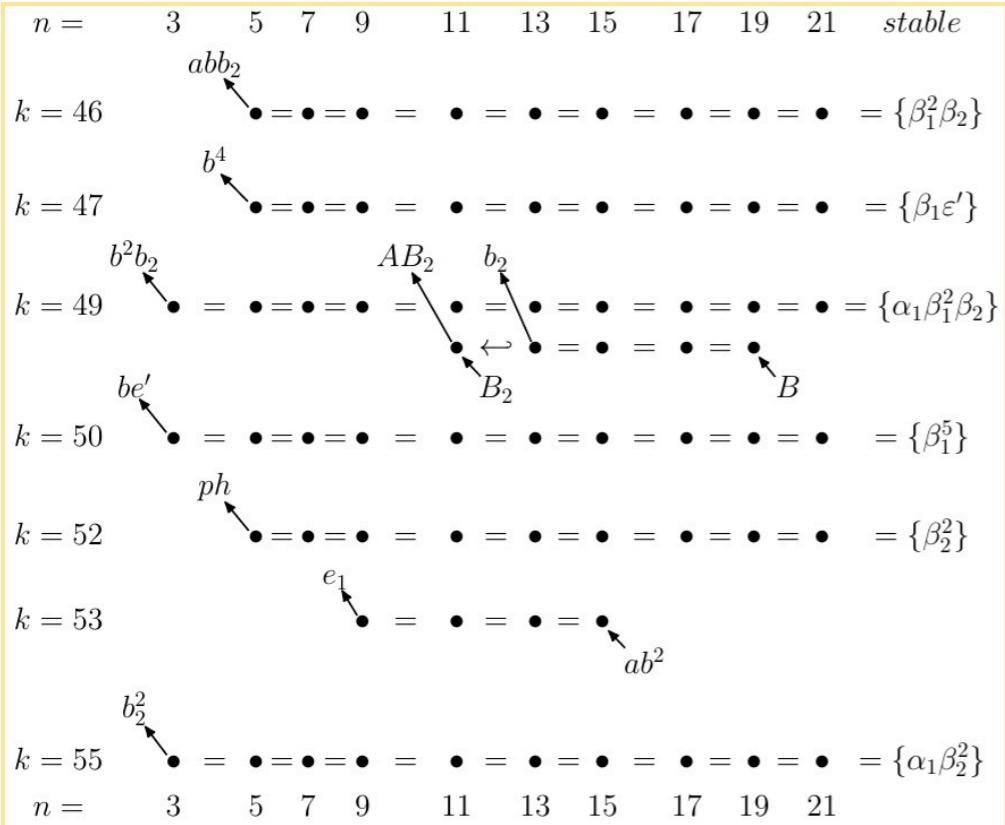
Lem 5.2 $\xi \in \pi_{i+4}(S^{2p+1})$ Hopf invariant $H(\xi)$ は $\gamma \in \pi_{i+1}(Y^{2p^2-2})$ による M-represented であると仮定する。このとき up to non-zero coefficient で次が成り立つ。 $JH(\partial_\alpha(\xi)) = H_p(\partial\alpha(\xi)) = \bar{\beta}_1 \circ E^2 \gamma$,

ここで、 $\bar{\beta}_1: Y^{2p^2} \rightarrow S^{2p+1}$ は $\beta_1(2p+1)$ の extension である。

Th 3.5 任意の $\gamma \in \pi_i(S^{2pm+p-1})$ に対して、up to non-zero coefficients で、次の関係が成り立つ。

$$J\partial_\alpha I(E^3 \gamma) = \beta_1(2p(m+1)+1) \circ E^3 \gamma.$$

(3) Remaining part.



Proof. (1) $u(E_2) = 11$ で E_2 は M-represented ではないので、最初の関係式は Prop 5.1 または Lem 3.2 によっては成立しない。これ以外の simple unstable elements は Prop 5.1 により成立する。

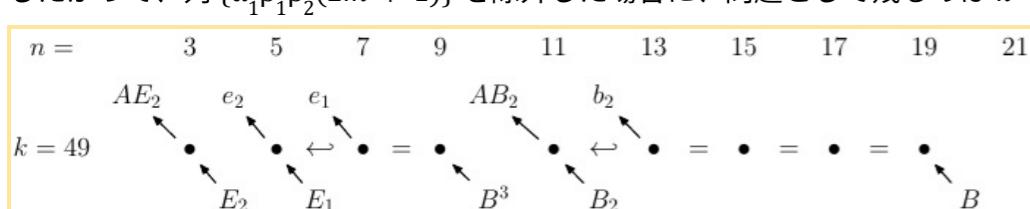
(2) $k = 49, 50, 51$ の場合以外に、short range unstable elements と、それらの removability は Prop 5.2, 5.3, Lem 2.4 により成立する。

β_2 を右から合成することにより、Th 5.1 の $k = 24$ の場合から $k = 50$ の場合が導かれる。

$k = 51$ の場合を考える。 η を $k = 48$ の中の $H(\eta) = e'$, $E^2 = P(B^3)$ を満たす元とする。Lem 5.2 により $\xi = \partial_\alpha(\eta)$ は $H(\xi) = BE'$, $E^2\xi = \alpha_1(5)$ 。 $E\eta$ を満たす。よって、 $E^5\xi = \alpha_1(8)$ 。 $E^4\eta = \alpha_1(8)$ 。 $E^2P(B^3) = 0$ であり、(2.1.2) により $E^4\xi = 0$ である。 $E^2\xi = 0$ ならば $\xi = \pm P(ph)$ である。しかし、 $HP(ph)$ は $i_*\alpha_1\varphi(7) = i_*E^2(\alpha_1(5)\varphi(8)) \in i_*E^2\pi_{5+48}^5 = 0$ による purely M-represented である。よって、 $E^2\xi \neq 0$, $E^4\xi = 0$, $E^2\xi = \pm P(B^4)$ である。Th 5.3 (2) の $k = 41$ のものから removability が導かれる。 $k = 49$ の場合が残されている。

(3) $\xi = \alpha_1(7)$ 。 $\varphi(10) \in \pi_{7+48}^7$ とする。 $\xi = E(\alpha_1(6))$ 。 $\varphi(9)$ なので、(2.1.2) と (2) の $k = 48$ から $\xi \in E^2\pi_{5+48}^5 = 0$ である。よって、 $\beta_2^2(5) \in \{\alpha_1(5), \alpha_1(8), \varphi(11)\}$ が定義される。このとき $\beta_2^2(5)$ は stable class $\beta_2^2 = \{\alpha_1, \alpha_1, \varphi\}$ の origin を与える。(2) の stable class の他の origin は明らかに得られる。

したがって、列 $\{\alpha_1\beta_1^2\beta_2(2m+1)\}$ を除外した場合に、問題として残るのは $k = 49$ の場合のみである。



上の群と E^2 は唯一の解である。Lem 2.4 と Lem 3.7 から removability が得られる。■

$k = 49$ の中の long range unstable elements は Lem 3.11 により与えられることに注意する。

Prop 5.1 各 invariant $x \in Q_{6m+3+k}^{2m+1}$ の像 $d_1(x) = HP(x) \in Q_{6m+k}^{2m-1}$ は、符号を除いて、下記で与えられる。

k	10	11	20	21	26	27	36	37	38	39	43
x	b	B	b^2	B^2	b_2	B_2	bb_2	BB_2	e'	E'	E_1
$m \equiv 0$	ab	0	ab^2	0	ab_2	b^3	abb_2	0	b^4	e_2	0
$m \equiv 1$	ab	AB	ab^2	AB^2	ab_2	AB_2	abb_2	ABB_2	b^4	B^4	AE_2

k	46	47	47	48	52	53
x	b^2b_2	B^2B_2	be'	BE'	b_2^2	B_2^2
$m \equiv 0$	ab^2b_2	0	b^5	0	ab_2^2	0
$m \equiv 1$	ab^2b_2	AB^2B_2	b^5	B^5	ab_2^2	AB_2^2
$m \equiv 2$	0	AB^2B_2	0	B^5	0	AB_2^2

Lem 3.2 $\xi \in \pi_k^S$ に対して、 $u(\xi) < 2p(m+1) - 5$, $p\xi = 0$ ならば、 $d_1(\bar{Q}^{m+1}(\xi)) = HP(\bar{Q}^{m+1}(\xi)) = m \cdot \bar{Q}^m(\alpha_1\xi)$.

ここで、 $u(\xi) \leq 4p - 3$ の ξ に対して、 $m = 1$ のときに成り立つ。

(5.1.10) $\delta \in \{\alpha_1, \alpha_1, \gamma\}$.

Prop 5.2 $m \equiv 0 \pmod{3}$ とする。(5.1.10) の元に対して、 $x = Q^{m+2}(\gamma)$, $y = Q^m(\delta)$ とする。このとき、元 $\xi \in \pi_i(S^{2m+1})$ が存在して次を満たす。 $H(\xi) = y$, $E^2\xi = P(x)$.

Prop 5.3 $m \equiv 1 \pmod{3}$ とする。(5.1.10) の元に対して、 $X = \bar{Q}^{m+2}(\gamma)$, $Y = \bar{Q}^m(\delta)$ とする。Lem 3.9 の中の関係 $d_1(X) = HP(X) = 0$ が得られる、例えば stable range の中の計算であると仮定する。このとき、元 $\xi \in \pi_i(S^{2m+1})$ が存在して次を満たす。 $H(\xi) = Y$, $E^2\xi = P(X)$.

(5.1.10) の元 γ, δ と、その関係する invariants のリストは下記の通りである。

γ	α_1	$\alpha_1\beta_1$	$\alpha_1\beta_1^2$	$\alpha_1\beta_2$	β_1^3	ε_1	$\alpha_1\beta_1\beta_2$	β^4	φ
δ	β_1	β_1^2	β_1^3	$\beta_1\beta_2$	ε'	φ	$\beta_1^2\beta_2$	$\beta_1\varepsilon'$	β_2^2
x	a	ab	ab^2	ab_2	b^3	e_1	abb_2	b^4	ph
y	b	b^2	b^3	bb_2	e'	ph	b_2^2	be'	b_2^2
X		AB	AB^2	AB_2	B^3		$A\bar{B}B_2$	B^4	
Y		B^2	B^3	BB_2	E'		B^2B_2	BE'	

Lem 5.2 $\xi \in \pi_{i+4}(S^{2p+1})$ Hopf invariant $H(\xi)$ は $\gamma \in \pi_{i+1}(Y^{2p^2-2})$ による M-represented であると仮定する。このとき up to non-zero coefficient で次が成り立つ。

$JH(\partial_\alpha(\xi)) = H_p(\partial\alpha(\xi)) = \bar{\beta}_1 \circ E^2\gamma$, ここで、 $\bar{\beta}_1: Y^{2p^2} \rightarrow S^{2p+1}$ は $\beta_1(2p+1)$ の extension である。

Lem 2.4 $\xi \in \pi_p(S^{2p-1})$ に対して、 $E^2(\xi) = 0$ ならば、 ξ は Δ の像である。

Lem 3.7 $\xi \in \pi_{i+4}(S^{2pm+1})$, $\gamma \in \pi_s^S$, $\delta \in \pi_t^S$ に対して、up to non-zero coefficients で次の関係が成り立つ。

(1) $H(\xi) = Q^{pm}(\gamma)$ は、 $H(\Delta(\xi)) = \bar{Q}^{pm-1}(\alpha\gamma) = HP(\bar{Q}^{pm}(\xi))$ を誘導する。

(2) $H(\xi) = Q^{pm}(\gamma)$, $\Delta(\xi) = P(\bar{Q}^{pm}(\gamma))$ は、 $H(\xi \circ \delta(i+4)) = Q^{pm}(\gamma\delta)$, $\Delta(\xi \circ \delta(i)) = P(\bar{Q}^{pm}(\gamma\delta))$ を誘導する。

Lem 3.11 整数 $n \not\equiv p-2 \pmod{p}$, $n > 1$ に対して、 $m = pn$ と仮定する。このとき、 $\bar{v}_1(2m+1)$

$\in \pi_{2pm+(2p+1)q-2}(S^{2m+1})$ が存在し、up to non-zero coefficient で、 $H(v_1(2m+1)) = \bar{Q}^m(\beta_2)$, $v_1(2m+2p+3) = P(Q^{m+p+1}(\beta_1))$ 。ここで、 $v(2m+2p+3) = E^{2p+2}v(2m+1)$ である。

また、 $\partial(B^3) = i_*(e_1)$ を満たす $x = B^3 \in \pi_{9+49}^9$ の場合が、Prop 3.4 の具体例として現れている。Prop 3.4 によれば、 $e_1 \in \{\eta_3, \eta_4^{(2)}, B^3\}$ である。stable range で $\eta_m = \eta_{m+3}$ なので、 $m \equiv 0 \pmod{3}$ に対して $e_1 \in \{\eta_m, \eta_{m+1}, B^3\}$ が成り立つ。よって次を得る。

Lem 5.3 $m \equiv 0 \pmod{3}$ ならば、次を満たす元 $v \in \pi_{6m+38}^{2m+1}$ が存在する。

$$H(v) = e_1, E^2 v = P(B^3).$$

$k = 49, 53$ の中の long range unstable elements を以下のように書く。

$$(5.5.1) \quad v_1(13) \in \pi_{13+49}^{13}, H(v_1(13)) = b_2, P(B) = E^6 v_1(13) = v_1(19),$$

$$(5.5.2) \quad v_2(9) \in \pi_{9+53}^9, H(v_2(9)) = e_1, P(ab^2) = E^6 v_2(9) = v_2(15).$$

Th 2.2 により、これらの元は、下記の not stable type invariants を誘導する。

$$(5.5.3) \quad u_1 = u_1(5) = I(v_1(17)) \in Q_{5+59}^5, U_1 = U_1(5) \in Q_{5+60}^5, J(U_1) = v_1(19),$$

$$(5.5.4) \quad u_2 = u_2(3) = I(v_2(11)) \in Q_{3+59}^3, U_2 = U_2(3) \in Q_{3+60}^3, J(U_2) = v_2(13).$$

5.6 Table of 3-primary k-stem Groups for $k \leq 55$

結果をまとめると、奇数 n と $k \leq 55$ に対して、下記のとおり ${}_3\pi_{n+k}(S^n)$ の table を得る。

$n =$	3	5	7	9	11	13	15	17
$k = 3$	• =							$\{\alpha_1\}$
$k = 6$	•							
$k = 7$	• = • =							$\{\alpha_2\}$
$k = 10$	• → o → • =							$\{\beta_1\}$
$k = 11$	• → o = o =							$\{\alpha'_3\}$
$k = 13$	• = • = • =							$\{\alpha_1\beta_1\}$
$k = 14$	• • •							
$k = 15$	• = • = • = • =							$\{\alpha_4\}$
$k = 16$	•							
$k = 17$	•							
$k = 18$	• • • •							
$k = 19$	• = • = • = • = • =							$\{\alpha_5\}$
$k = 20$	• = • = • = • =							$\{\beta_1^2\}$
$k = 21$	• • = •							
$k = 22$	• → o → o → o → •							
$k = 23$	• → o = o = o = o = o =							$\{\alpha'_6\}$
	• = • = • = • = • = • =							$\{\alpha_1\beta_1^2\}$

$n =$	3	5	7	9	11	13	15	17
$k = 24$	• = • •							
$k = 26$	•		• = • = • = • =					$\{\beta_2\}$
	• • •	• • •	• • •					
$k = 27$	• = • = • = • = • = • = • =							$\{\alpha_7\}$
	•							
$k = 28$		•						
$k = 29$	• = • = • = • = • = • =							$\{\alpha_1\beta_2\}$
	•							
$k = 30$	• = • = • = • = • = • = • =							$\{\beta_1^3\}$
	• • •	• • •	• • •					
$k = 31$	• = • = • = • = • = • = • = • =							$\{\alpha_8\}$
	• • = •							
$k = 32$	•							
$k = 33$	•	• = • = • = • =	•					
$k = 34$	• = • •	• → o → ▷ → ▷ → ▷ → ▷ → ▷ → o → •						

Prop 3.4 $\gamma \in \pi_{i-4}(Y^{2m+4p-8})$, $\eta_{m+1}^{(3)}(\gamma) = 0$ に対して、 $x \in \pi_{i+2}(Q_2^{2m+3})$ は M-represented by $E^6\gamma$ と仮定すると、

$$i_*\{\eta_m, \eta_{m+1}^{(2)}, E^3\gamma\}_1 = \partial(x).$$

Th 2.2 (2.1.9) の mod p fibration は、次の $IJ\Delta$ -sequence を誘導し、これは、mod p で完全である。

$$\cdots \rightarrow {}^\Delta \pi_{i+2}(S^{2pm-1}) \rightarrow {}^I \pi_i(Q_2^{2m-1}) \rightarrow {}^J \pi_{i+3}(S^{2pm+1}) \rightarrow {}^\Delta \pi_{i+1}(S^{2pm-1}) \rightarrow {}^I \cdots$$

$n =$	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
$k = 35$	• → o → ▷ = ▷ = ▷ = ▷ = ▷ = ▷ = ▷ = ▷ = ▷ =									$\{\alpha_9''\}$
$k = 36$	• = • = • = • = • = • = • = • = • =									$\{\beta_1\beta_2\}$
$k = 37$	•	• = •	•							
$k = 38$	•	• = • = • = • = • = • = • = • =								$\{\varepsilon'\}$
$k = 39$	• = • = • = • = • = • = • = • = • = • =									$\{\varepsilon_1\}$
	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
	• = • = • = • = • = • = • = • = • = • =									$\{\alpha_{10}\}$
	•									
	• = • = • = • = • = • = • = • = • = • =									$\{\alpha_1\beta_1\beta_2\}$

$n =$	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
$k = 40$	• = • = • = • = • = • = • = • = • =										$\{\beta_1^4\}$
$k = 41$	•	•									
$k = 42$	•		• = • = • = • = • = • = • = • =								$\{\varepsilon_2\}$
$k = 43$	• = • = • = • = • = • = • = • = • = • =										$\{\alpha_{11}\}$
	•										
	•	•	• = •								

$n =$	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
$k = 44$	•											
$k = 45$	• → o = o = o = o = o = o = o = o =											$\{\varphi\}$
	•											
$k = 46$	• = • = • = • = • = • = • = • = • = • =											$\{\beta_1^2\beta_2\}$
	• = •	•										
	• → o → o → o → o → o → o → o → o → o →											
$k = 47$	• → o = o = o = o = o = o = o = o = o = o = o = o = o =											$\{\alpha'_{12}\}$
	•	•	• = •									
	• = • = • = • = • = • = • = • = • = • = • = • =											$\{\beta_1\varepsilon'\}$

$n =$	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27
$k = 48$	•	• = •											
$k = 49$	• = • = • = • = • = • = • = • = • = • = • =												$\{\alpha_1\beta_1\beta_2\}$
	•	•	• = •	•	• = •	• = •	• = •	• = •	• = •	• = •	• = •	• = •	
$k = 50$	• = • = • = • = • = • = • = • = • = • = • = • =												$\{\beta_1^5\}$
	• = •	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
$k = 51$	• = • = • = • = • = • = • = • = • = • = • = • =												$\{\alpha_{13}\}$
	• = •	•											

$n =$	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29
$k = 52$	• = • = • = • = • = • = • = • = • = • = • = • =													$\{\beta_2^2\}$
	•													
	• = •	•												
$k = 53$	•	•	•	• = •	• = •	• = •								
	•													
$k = 54$	•				•									
	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
$k = 55$	• = • = • = • = • = • = • = • = • = • = • = • =													$\{\alpha_{14}\}$
	•													
	• = • = • = • = • = • = • = • = • = • = • = • =													$\{\alpha_1\beta_2^2\}$

6 New Tables of 3-primary Groups

6.1 Stable elements and Stable type invariants

$55 < k \leq 81$ に対する stable k -stem groups の結果について、Oka[22], Nakamura[18], Tangora[33], Ravenel[25] から引用する。

(6.1.1) ${}_3\pi_k^S = \{\text{generator}\}$ のリストは下記の通り、関係式は up to sign .

$$(1) {}_3\pi_{62}^S = \{\beta_1 \beta_2^2\}.$$

$$(2) {}_3\pi_{65}^S = \{\alpha_1 \beta_1 \beta_2^2\}.$$

$$(3) {}_3\pi_{68}^S = \{\lambda\}, \lambda = \{\beta_2, \varepsilon_1, \alpha_1\}.$$

$$(4) {}_3\pi_{72}^S = \{\beta_1^2 \beta_2^2\}, \beta_1^2 \beta_2^2 = \{\alpha_1, 3, \lambda\}.$$

$$(5) {}_3\pi_{74}^S = \{\beta_5\}.$$

$$(6) {}_3\pi_{75}^S = \{\mu\}, \mu = \{\alpha_1, \alpha_1, \lambda\}, 3\mu = \alpha \beta_1^2 \beta_2^2.$$

$$(7) {}_3\pi_{78}^S = \{\beta_2^3\}, \beta_2^3 = \beta_1 \lambda = \alpha_1 \mu.$$

$$(8) {}_3\pi_{81}^S = \{\gamma_2, \mu_2\}, \mu_2 = \{\alpha_1, \alpha_1, \beta_5\}.$$

(5.1.7) と同様の invariants の記法を使う。

k	62	65	68	72	74	75	75	78
ξ	$\beta_1 \beta_2^2$	$\alpha_1 \beta_1 \beta_2^2$	λ	$\beta_1^2 \beta_2^2$	β_5	μ	$\alpha_1 \beta_1^2 \beta_2^2$	β_2^3
$Q^m(\xi)$	bb_2^2	abb_2^2	l	$b^2 b_2^2$	b_5	m	\times	b_2^3
$\bar{Q}^m(\xi)$	BB_2^2	ABB_2^2	L	$B^2 B_2^2$	B_5	\times	$AB^2 B_2^2$	B_2^3

6.2 3-primary k -stem Groups for $56 \leq k \leq 61$

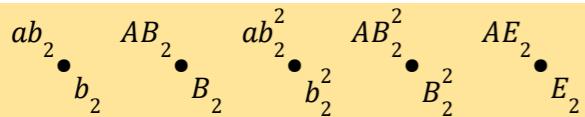
まず、 $55 \leq k \leq 61$ における Q_{n+k}^n 内のすべての invariants、ならびに $k < 59$ における $Q_k^1 \simeq {}_3\pi_{3+k}(S^3)$ の場合は、

いずれも既に得られた結果によって定まっていることに注意する。

Th 6.1 $56 \leq k \leq 61, n: \text{odd}$ に対する mod A k -stem groups π_{n+k}^n は、以下の3つの部分の直和として得られる。

(1) Removable simple unstable elements.

$$(n, k) = (15, 56) \quad (15, 57) \quad (3, 58) \quad (3, 59) \quad (9, 61)$$



(2) Removable short range unstable elements.

$n =$	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27
$k = 57$		$AB^2 B_2$	$b^2 b_2$								AB	b	
		•	\leftrightarrow	•	=	•					•	\leftrightarrow	• = •
			$B^2 B_2$			abb_2					B		a
$k = 58$		B^5	be'			B^3			ab^2				
		•	\leftrightarrow	•	=	•			•		•	\leftrightarrow	•
			BE'			b^4			AB^2				
						ABB_2			b^2				
$k = 59$													
$k = 60$		$B^3 B_2$			abb_2		B^4	e'		B^2		ab	
		•	=	•	\leftrightarrow	•	•	\leftrightarrow	•	•	\leftrightarrow	•	
					$AB^2 B_2$		$b^2 b_2$		b^3				
							E'						
$k = 61$		$B^2 E'$			b^5		e_2		e_1				
		•	=	•	\leftrightarrow	•							
					B^5		be'		E_1				
									B^3				

[22] S.Oka, The stable homotopy groups of spheres, I, II, III, Hiroshima Math. J. 1(1971), 305-337, 2(1972), 99-161, 5(1975), 407-438.

[18] O.Nakamura, On the cohomology of the mod p Steenrod algebra, Bull. Sci. Engrg. Div, Univ. Ryukyus(Math.Nat.Sci.) 18(1975), 9-58.

[33] M.C.Tangora, Some homotopy groups mod 3, Conference on homotopy theory Evanston III. (1974), 227-245, Notas Mat. Simpos., 1 Soc. Mat. Mexicana, Mexico 1975.

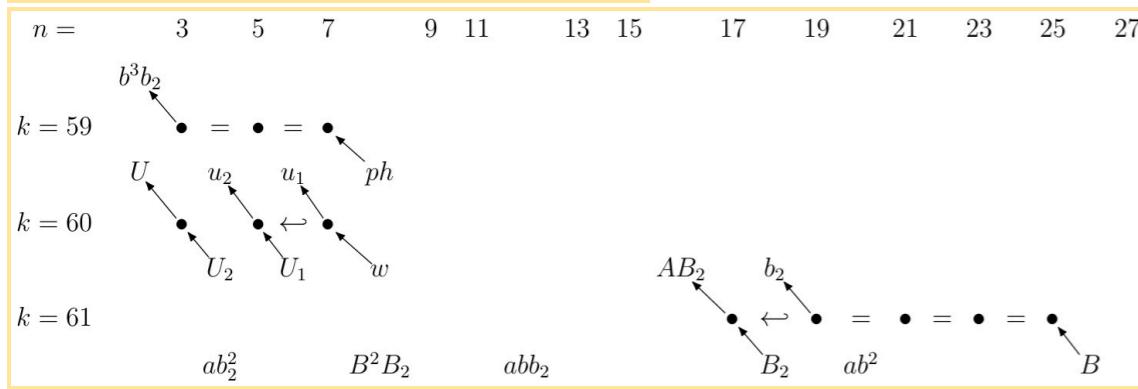
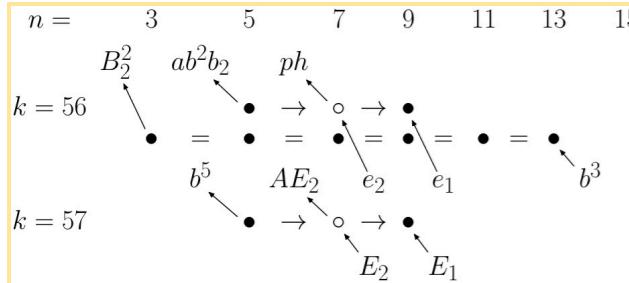
[25] D.C.Ravenel, Complex Bordism and stable Homotopy Groups of Spheres, Pure and Appl. Math. 121 (1986).

(5.1.7) Invariants $Q^m(\xi)$ and $\bar{Q}^m(\xi)$ for $\xi \in \pi_k^S, k \leq 55$.

k	0	3	7	10	13	20	23	26	29	30	36	37	38
ξ	ι	α_1	α_2	β_1	$\alpha_1 \beta_1$	β_1^2	$\alpha_1 \beta_1^2$	β_2	$\alpha_1 \beta_2$	β_1^3	$\beta_1 \beta_2$	ε'	ε_1
$Q^m(\xi)$	i	a	a_2	b	ab	b^2	ab^2	b_2	ab_2	b^3	bb_2	e'	e_1
$\bar{Q}^m(\xi)$				B	AB	B^2	AB^2	B_2	AB_2	B^3	BB_2	E'	E_1

k	39	40	42	45	45	46	47	49	50	52	55
ξ	$\alpha_1 \beta_1 \beta_2$	β_1^4	ε_2	φ	$\alpha_1 \varepsilon_2$	$\beta_1^2 \beta_2$	$\beta_1 \varepsilon'$	$\alpha_1 \beta_1^2 \beta_2$	β_1^5	β_2^2	$\alpha_1 \beta_2^2$
$Q^m(\xi)$	abb_2	b^4	e_2	ph	\times	$b^2 b_2$	be'	$ab^2 b_2$	b^5	b_2^2	ab_2^2
$\bar{Q}^m(\xi)$	ABB_2	B^4	E_2	\times	AE_2	$B^2 B_2$	BE'	$AB^2 B_2$	B^5	B_2^2	AB_2^2

(3) Remaining part.



Proof. 58-stem groups を求めることから始める。 $u(\beta_2^2) = 5$ なので、(1) の中の $(n, k) = (3, 58)$ の simple element は removable である。 $k = 58$ における 2 つのブロックは、これらのブロックのどんな元も消す可能性のある invariant が他に存在しないため、決定されている。stable group π_{58}^S は自明である。よって 58-stem groups は (1) と (2) の対応する群の直和である。

同様に、(1) と (2) の中の 56-stem と 57-stem の群は消される。56-stem と 57-stem の群を決定するために、stable の結果 $\pi_{56}^S = \pi_{57}^S = 0$ から (3) の群を決定することが残っている。

58-stem groups の結果から、 $P(E_2) \neq 0, P(E_1) \neq 0$ である。Prop 5.1 により $(n, k) = (7, 57)$ において $HP(E_1) = 0$ である。したがって、 π_{7+57}^7 の位数は 9 であることが分かる。しかし、 $i\varepsilon_2 = i\{p, \alpha_1, \varepsilon_1\} = \alpha \cdot i \cdot \varepsilon_1$ であることから、Lem 3.2 により、この群は巡回群である。

Lem 2.4 により、群 π_{59}^7 は次の元により生成される。 $v(3) \in \{\alpha_1(3), p\iota_6, \beta_2^2(6)\}_1, H(v(3)) = B_2^2$. $v(n) = E^{n-3}v(3)$ と書く。 $H(\beta_1(5)) = a = I(\alpha_1(5))$ なので、 $H(\beta_1^3\beta_2(5)) = ab^2b_2$ を得る。よって、 $\pi_{61}^5 = \{v(5), \beta_1^3\beta_2\} \simeq \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$. (5.1.1) (14) の関係式 $\varphi \in \{\alpha_1, \alpha_1, \varepsilon_1\}$ を Lem 3.8 に適用することで、次を満たす元 $\xi(7) \in \pi_{63}^7$ を得る。 $H(\xi(7)) = ph = I(\varphi(17)), P(e_1) = E^2\xi(7) = \xi(9)$. また、 $\alpha i\varepsilon_1 = i\{3, \alpha_1, \varepsilon_1\} = \pm i\varepsilon_2$ に Lem 3.4 を適用することで次を得る。 $3\xi(7) = \pm P(e_2)$. よって $\xi(7)$ の位数は 9 であり、これは $E^4: \pi_{63}^7 \rightarrow \pi_{67}^{11}$ の kernel を生成する。 $E^6: \pi_{61}^5 \rightarrow \pi_{67}^{11}$ の kernel は E^2 によって $3\xi(7)$ に写る位数 3 の元によって生成される。

(3) の $k = 56$ における結果は次の lemma から成立する。

Lem 6.1 $v(13) = \beta_1^3\beta_2(13)$ up to sign .

Proof. 52-stem groups の中で、 $\beta_2^2(9) \neq \beta_2(9) \cdot \beta_2(35)$ であるが、 $\beta_2^2(13) = \beta_2(13) \cdot \beta_2(39)$ であることが分かる。よって、up to sign で $v(10) \in \{\alpha_1(10), p, \beta_2^2(13)\} \supset \{\alpha_1(10), p, \beta_2(13)\} \cdot \beta_2(40) \ni \beta_1^3(10)\beta_2(40) = \beta_1^3\beta_2(10)$. これらの差 $v(10) - \beta_1^3\beta_2(10)$ は $\alpha_1(10) \cdot \pi_{66}^{13}$ に属している。 $\pi_{70}^{17} = 0$ なので、 $E(v(13) - \beta_1^3\beta_2(13)) \in \alpha_1(14) \cdot \pi_{70}^{17} = 0$ であり、(2.1.2) により lemma が証明される。■ up to sign で次が成り立つことに注意する。

(6.2.1) $P(e_2) = v(7) \pm \beta_1^3\beta_2(7)$.

Prop 5.1 各 invariant $x \in Q_{6m+3+k}^{2m+1}$ の像 $d_1(x) = HP(x) \in Q_{6m+k}^{2m-1}$ は、符号を除いて、下記で与えられる。

k	10	11	20	21	26	27	36	37	37	38	39	43
x	b	B	b^2	B^2	b_2	B_2	bb_2	BB_2	e'	E'	E_1	E_2
$m \equiv 0$	ab	0	ab^2	0	ab_2	b^3	abb_2	0	b^4	0	e_2	0
$m \equiv 1$	ab	AB	ab^2	AB^2	ab_2	AB_2	abb_2	ABB_2	b^4	B^4	0	AE_2

k	46	47	47	48	52	53
x	b^2b_2	B^2B_2	be'	BE'	b_2^2	B_2^2
$m \equiv 0$	ab^2b_2	0	b^5	0	ab_2^2	0
$m \equiv 1$	ab^2b_2	AB^2B_2	b^5	B^5	ab_2^2	AB_2^2
$m \equiv 2$	0	AB^2B_2	0	B^5	0	AB_2^2

Lem 3.2 $\xi \in \pi_k^S$ に対して、 $u(\xi) < 2p(m+1) - 5, p\xi = 0$ ならば、 $d_1(\overline{Q}^{m+1}(\xi)) = PH(\overline{Q}^{m+1}(\xi)) = m \cdot Q^m(\alpha_1 \xi)$.

ここで、 $u(\xi) \leq 4p - 3$ の ξ に対して、 $m = 1$ のときに成り立つ。

Lem 2.4 $\xi \in \pi_p(S^{2p-1})$ に対して、 $E^2(\xi) = 0$ ならば、 ξ は Δ の像である。

(5.1.1) (14) $\pi_{45}^S = \{\varphi\}, \varphi = \{\alpha_1, \alpha_1, \varepsilon_1\}, p\varphi = \alpha_1\varepsilon_2$.

Lem 3.8 $m \not\equiv -1, -2 \pmod{p}$ で、 $\gamma \in \pi_{i-4}(S^{2m+4p-9})$ に対して invariant $x \in \pi_{i+2}(Q_2^{2m+3})$ は $E^6(i_*\gamma)$ による M-represented であり、 $\alpha_1(2m+4p-9) \cdot \gamma = 0$ であるならば、 $\xi \in \pi_i(S^{2m+1})$ が存在して、up to non-zero coefficient で、 $H(\xi) \in I\{\alpha_1(2pm-1), \alpha_1(2pm+2p-4), E^3\gamma\}, E^2(\xi) = P(x)$.

Lem 3.4 $x \in \pi_{i+2}(Q_2^{2m+1})$ が $E^4(\gamma)$ による M-represented であり、 $h'_{m^*}(\gamma) = 0$ ならば、元 $\xi \in \pi_i(S^{2m-1})$ が存在し、 $\alpha(2pm-2) \cdot E^2\gamma$ による M-represented $y \in \pi_i(Q_2^{2m-1})$ に対して、 $p \cdot \xi = P(y), E^2\xi = P(x)$.

次に (3) の $k = 59, 60, 61$ の場合を考える。

$\Delta: \pi_{63}^7 \rightarrow \pi_{61}^5, \Delta: \pi_{64}^7 \rightarrow \pi_{62}^5$ から新しい invariants が得られる。 $E^2 \circ \Delta = \times p$ であるので、最初の Δ の image は $\{v(5) \pm \beta_1^3 \beta_2(5)\}$ であり、2番目の Δ は全射である。 $H(\beta_1^2 \varepsilon(5)) = I(\alpha_1 \beta_1 \varepsilon'(9)) = I(\beta_1^5)$ なので、最初の Δ の kernel は $\{v(7), \beta_1^3 \beta_2\}$ であり、2番目の kernel は $\{\beta_1^2 \varepsilon'(7)\}$ である。よって、次の not stable type invariants を得る。

$$b^3 b_2 \in Q_{59}^1, B^3 B_2, U \in Q_{60}^1, B^2 E' \in Q_{61}^1,$$

ここで、 $b^3 b_2 = I' \beta_1^3 \beta_2(5), J(B^3 B_2) = \beta_1^3 \beta_2(7), J(U) = v(7), J(B^2 E') = \beta_1^2 \varepsilon'(7)$ である。

(2) の $k = 60, 61$ における最初の short range unstable elements は、Th 5.4 (2) の $k = 50, 51$ における元にそれぞれ右から β_1 を合成することによって得られる。(2) の $k = 60, 61$ の2番目の short range unstable elements は、それぞれ Lem 3.8 と Lem 5.2 によって得られる。

よって (3) の $k = 59, 60, 61$ については、EHP-sequence により成立し、これによって定理の証明が完成する。■ 上の証明の中で次の関係式が得られた。

Prop 6.1 up to sign で、下記の関係式が成り立つ。

$$(1) H(v(3)) = B_2^2, H(\beta_1^3 \beta_2(5)) = ab^2 b_2, H(\xi(7)) = ph,$$

$$3\xi(7) = P(e_2) = v(7) \pm \beta_1^3 \beta_2(7), \xi(9) = P(e_1), P(b^3) = v(13) = \pm \beta_1^3 \beta_2(13).$$

$$(2) H(\xi(7)) = AE_2$$
 を満たす $\xi'(7) \in \pi_{64}^7$ が存在し、

$$H(\beta_1^2 \varepsilon'(5)) = b^5, 3\xi'(7) = \beta_1^2 \varepsilon'(7) = P(E_2), \xi'(9) = P(E_1).$$

$H(\xi(7)) = ph$ に Lem 3.5 を適用すると、Prop 6.1 (1) は $H(\beta_1^3(5)) = ab^2 b_2$ が $\alpha i(10) \circ \varphi(13) \in \{3\iota_9, \alpha_1(9), \varphi(12)\}$ による M-represented であることを示す。

同様に、 $H(\xi'(7)) = AE_2$ は $H(\beta_1^2 \varepsilon'(5)) = b^5$ は $\alpha(10) \circ \tilde{\alpha_1 \varepsilon_2}$ による M-represented である。ここで、 $\tilde{\alpha_1 \varepsilon_2} \in \pi_{69}(Y^{14})$ は $\alpha_1 \varepsilon_2(13) = 3\varphi(13)$ の coextension である。

これらは、以下の通り stable class による represented である。

Prop 6.2 up to sign で下記の関係式が成り立つ。

$$(1) \alpha_1 \beta_1^2 \beta_2 = \{3, \alpha_1, \varphi\}.$$

$$(2) i_* \beta_1^5 = \{\alpha i, 3, \alpha_1 \varepsilon_2\} \text{ i.e. } \beta_1^5 \in \{3, \alpha_1, 3, \alpha_1 \varepsilon_2\}.$$

6.3 3-primary k-stem Groups for $62 \leq k \leq 70$

$62 \leq k \leq 71$ に対して、 Q_{n+k}^n の中の invariants は、 $(n, k) = (3, 62), (3, 63)$ における simple elements に関する 4つの invariants を除いて stable type である。

Th 6.2 $62 \leq k \leq 70, n: \text{odd}$ に対する mod A k-stem groups π_{n+k}^n は、以下の3つの部分の直和として得られる。

(1) Removable simple unstable elements.

$$(n, k) = (3, 62) \quad (21, 62) \quad (3, 63) \quad (21, 63) \quad (9, 64) \quad (27, 64) \quad (9, 65) \quad (9, 65)$$

$$\begin{array}{ccccccc} ab^3 b_2 & ab^2 & AB^3 B_2 & AB^2 & ab^2 b_2 & ab & b^5 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ b^3 b_2 & b^2 & B^3 B_2 & B^2 & b^2 b_2 & b & be' \\ & & & & & & \end{array} AB^2 B_2 \bullet B^2 B_2$$

$$(n, k) = (27, 65) \quad (9, 66) \quad (15, 66) \quad (15, 67) \quad (15, 67) \quad (3, 68) \quad (15, 68) \quad (21, 68)$$

$$\begin{array}{ccccccc} AB & B^5 & abb_2 & ABB_2 & b^4 & abb_2^2 & B^4 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ B & BE' & bb_2 & BB_2 & e' & b_2 & E' \\ & & & & & & \bullet \\ & & & & & & b_2 \end{array}$$

$$(n, k) = (3, 69) \quad (21, 69) \quad (9, 70)$$

$$\begin{array}{ccc} ABB_2^2 & AB_2 & ab_2^2 \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ BB_2^2 & B_2 & b_2^2 \end{array}$$

Th 5.4 (2)

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} n = & 3 & 5 & 7 & B^3 & 9 & 11 & ab^2 & 13 & 15 & 17 & 19 & 21 & 23 \\ k = 46 & & & & & & \bullet = & \bullet & \xleftrightarrow{AB^2} & \bullet & & & & \\ & & & & & & & & & & & & & \\ & & & ABB_2 & bb_2 & & & & & & & & & \\ k = 47 & & & & \bullet \xleftrightarrow{BB_2} & \bullet = & \bullet & ab_2 & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & & \\ & & & B^4 & e' & & & & & & B^2 & = & \bullet & ab \\ k = 48 & & & & \bullet \xleftrightarrow{e'_1} & \bullet = & \bullet & b^3 & & & & & & \bullet \\ & & & & & & & & & & & & & \\ & & & e_2 & & & & & & & & & & \\ k = 49 & & & & \bullet \xleftrightarrow{E_1} & \bullet = & \bullet & & & & & & & \\ & & & & & & & B^3 & & & & & & \\ & & & B^2 B_2 & & & & & ab_2 & & & & & \\ k = 50 & & & & \bullet = & \bullet \xleftrightarrow{ABB_2} & \bullet & bb_2 & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & & \\ & & & BE' & & & b^4 & & & & & & & \\ k = 51 & & & & \bullet = & \bullet \xleftrightarrow{B^4} & \bullet & & & & & & & \\ & & & & & & & BB_2 & e' & & ab_2 & & & \\ k = 52 & & & & & & & & \bullet = & \bullet & \xleftrightarrow{AB_2} & \bullet & b_2 & \\ & & & & & & & & & & & & & \\ & & & AE_2 & e_2 & & E' & & b^3 & & & & & \\ k = 53 & & & & \bullet \xleftrightarrow{E^2} & \bullet = & \bullet & B^3 & \bullet & B_2 & & & & \\ & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & AB^2 & b^2 & & \\ k = 55 & & & & & & & & & & & \bullet \xleftrightarrow{B^2} & \bullet = & \bullet & ab \\ & & & & & & & & & & & & & & \\ n = & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 & 17 & 19 & 21 & 23 & & & \\ & & & & & & & & & & & & & & \end{array}$$

Lem 3.8 $m \not\equiv -1, -2 \pmod{p}$ で、 $\gamma \in \pi_{i-4}(S^{2m+4p-9})$ に対して invariant $x \in \pi_{i+2}(Q_2^{2m+3})$ は $E^6(i_* \gamma)$ による

M-represented であり、 $\alpha_1(2m + 4p - 9) \circ \gamma = 0$ であるならば、 $\xi \in \pi_i(S^{2m+1})$ が存在して、up to non-zero coefficient で、 $H(\xi) \in I\{\alpha_1(2pm - 1), \alpha_1(2pm + 2p - 4), E^3 \gamma\}, E^2(\xi) = P(x)$.

Lem 5.2 $\xi \in \pi_{i+4}(S^{2p+1})$ Hopf invariant $H(\xi)$ は $\gamma \in \pi_{i+1}(Y^{2p-2})$ による M-represented であると仮定する。このとき up to non-zero coefficient で次が成り立つ。

$JH(\partial_\alpha(\xi)) = H_p(\partial\alpha(\xi)) = \bar{\beta}_1 \circ E^2 \gamma$, ここで、 $\bar{\beta}_1: Y^{2p^2} \rightarrow S^{2p+1}$ は $\beta_1(2p + 1)$ の extension である。

Lem 3.5 $\xi \in \pi_{i+5}(S^{2m+3})$ の Hopf invariant $H(\xi)$ が $E^4(\gamma)$ による M-represented であり、 $h'_{m*}(\gamma) = 0$ ならば、 $\bar{\gamma} \in \pi_{i+3}(S^{2m+1})$ が存在し、 $p \cdot \xi = E^2 \bar{\gamma}$ であり、 $H(\eta)$ は $\alpha(2pm - 2) \circ E^2 \gamma$ による M-represented である。

Th 6.1 (1) Removable simple unstable elements.

$$(n, k) = (15, 56) \quad (15, 57) \quad (3, 58) \quad (3, 59) \quad (9, 61)$$

$$\begin{array}{ccccc} ab_2 & AB_2 & ab_2^2 & AB_2^2 & AB_2 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ b_2 & B_2 & b_2^2 & B_2^2 & B_2 \end{array}$$

(2) Removable short range unstable elements.

$n =$	3	5	7	9	B^2B_2	11	abb_2	13	15	17	19	21	23	25	27	
$k = 62$					•	=	•	\leftrightarrow	•							
							ABB_2		bb_2							
	AB_2^2	b_2^2	BE'				b^4									
$k = 63$					•	\leftrightarrow	•	=	•	\leftrightarrow	•					
					•		ph		B^4		e'					
					B_2^2				BB_2			ab_2				
$k = 64$									•	=	•	\leftrightarrow	•			
												AB_2	b_2			
					AE_2		e_2		E'			b^3				
$k = 65$						•	\leftrightarrow	•		•	=	•	\leftrightarrow	•		
	BB_2^2		ab_2^2				E_2		E_1			B^3		B_2		
$k = 66$		•	=	•	\leftrightarrow	•						AB^2	b^2			
					AB_2^2		b_2^2									
$k = 67$												•	\leftrightarrow	•	=	•
												B^2			ab	
$k = 68$					AB^2B_2		b^2b_2									
$k = 69$						•	\leftrightarrow	•	=	•						
							B^2B_2				abb_2					
$k = 70$					B^5		be'				B^3		ab^2			
						•	\leftrightarrow	•	=	•		•	\leftrightarrow	•		
							BE'				b^4		AB^2	b^2		

(3) Remaining part.

The diagram illustrates two rows of binary strings, each with associated labels and arrows indicating transitions.

Top Row:

- Labels: $n = 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27$
- String: $\bullet = \bullet = \cdots \{\beta_1\beta_2^2\}$
- Label: ab_2^2 (with an arrow pointing to the second string)

Bottom Row:

- Labels: $k = 62, 65$
- String: $\bullet = \bullet = \cdots \{\alpha_1\beta_1\beta_2^2\}$
- Label: bb_2^2 (with an arrow pointing to the second string)
- Label: e_1 (with an arrow pointing to the 15th string)
- Label: ab^2 (with an arrow pointing to the 15th string)

Bottom Part:

- Labels: $n = 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33$
- String: $\bullet = \bullet = \cdots \{\lambda\}$
- Label: B_2^2 (with an arrow pointing to the 9th string)
- Label: ab^2b_2 (with an arrow pointing to the 11th string)
- Label: ph (with an arrow pointing to the 13th string)
- Label: b^5 (with an arrow pointing to the 11th string)
- Label: AE_2 (with an arrow pointing to the 11th string)
- Label: E_2 (with an arrow pointing to the 11th string)
- Label: e_2 (with an arrow pointing to the 13th string)
- Label: e_1 (with an arrow pointing to the 15th string)
- Label: b^3 (with an arrow pointing to the 21st string)
- Label: AB (with an arrow pointing to the 29th string)
- Label: B (with an arrow pointing to the 29th string)
- Label: a_2 (with an arrow pointing to the 29th string)
- Label: a (with an arrow pointing to the 33rd string)

Proof. $\beta_1^4 = \alpha_1 \varepsilon'$ であるため、 $b^4 = ae'$, $b^5 = abe'$ とみなすことができる。(1) の全てのコレクションは $\{x, P(x), HP(x) = \pm ax\}$, $P(x) \in \pi_*(S^{6k+3})$ の形をしている。 $(n, k) = (3, 62), (3, 63)$ の場合のコレクションは、Th 5.4 (1) の $(n, k) = (3, 52), (3, 53)$ における対応するコレクションから β_1 を合成することにより得られる。(1) の他のコレクションはまた Prop 5.2 により simple で removable である。

(2) の $k = 66$ の中の short range collection を除いて、他の short range collections は全て Prop 5.3 により得られる。

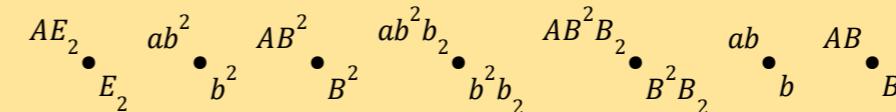
(5.4.2) の元 $\xi \in \pi_{43}^3$ を考える。 $H(\xi) = BB_2$ なので、 $H(\xi \circ \beta_2(43)) = BB_2^2$ を得る。Th 6.1 により $\pi_{73}^{17} = 0$ なので、(5.4.2) から次が成り立つ。

$$E^4(\xi \circ \beta_2(43)) = \beta_1^4 \beta_2(7) = \beta_1(7) \circ \beta_1^3 \beta_2(17) \in \beta_1(7) \circ \pi_{73}^{17} = 0,$$

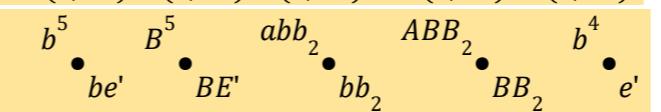
よって、 $E^2(\xi \cdot \beta_2(43)) = \pm P(AB_2^2)$ である。Lem 2.4 により $\Delta(P(b_2^2)) = \pm \xi \cdot \beta_2(43)$ であり、(2) が確立された。 $\beta_1\beta_2^2(5)$ と $\alpha_1\beta_1\beta_2^2(3)$ が定義される。よって、(3) の $k = 62$ と $k = 65$ が完成する。

Th 5.4 (1) Removable simple unstable elements.

$$(n, k) = (3, 49) \ (15, 50) \ (15, 51) \quad (3, 52) \quad (3, 53) \quad (21, 52) \ (21, 53)$$



$$(n, k) = (3, 53) \quad (3, 54) \quad (9, 54) \quad (9, 55) \quad (9, 55)$$



$$(5.1.10) \quad \delta \in \{\alpha_1, \alpha_1, \gamma\}.$$

Prop 5.2 $m \equiv 0 \pmod{3}$ とする。 $(5.1.10)$ の元に対して、 $x = Q^{m+2}(\gamma)$, $y = Q^m(\delta)$ とする。このとき、元 $\xi \in \pi_i(S^{2m+1})$ が存在して次を満たす。 $H(\xi) = y$, $E^2\xi = P(x)$.

Prop 5.3 $m \equiv 1 \pmod{3}$ とする。 $(5.1.10)$ の元に対して、 $X = \overline{Q}^{m+2}(\gamma)$, $Y = \overline{Q}^m(\delta)$ とする。Lem 3.9 の中の関係 $d_1(X) = HP(X) = 0$ が得られる、例えば stable range の中の計算であると仮定する。このとき、元

$\xi \in \pi_*(S^{2m+1})$ が存在して次を満たす。 $H(\xi) = Y, E^2\xi = P(X)$.

(5.1.10) の元 γ, δ と、その関係する invariants のリストは下記の通りである。

γ	α_1	$\alpha_1\beta_1$	$\alpha_1\beta_1^2$	$\alpha_1\beta_2$	β_1^3	ε_1	$\alpha_1\beta_1\beta_2$	β^4	φ
δ	β_1	β_1^2	β_1^3	$\beta_1\beta_2$	ε'	φ	$\beta_1^2\beta_2$	$\beta_1\varepsilon'$	β_2^2
x	a	ab	ab^2	ab_2	b^3	e_1	abb_2	b^4	ph
y	b	b^2	b^3	bb_2	e'	ph	b_2^2	be'	b_2^2
X		AB	AB^2	AB_2	B^3		ABB_2	B^4	
Y		B^2	B^3	BB_2	E'		B^2B_2	BE'	

$$(5.4.2) \quad \mu(\varepsilon') = 7, \quad \mu(\varepsilon_+) = 15, \quad \mu(\varepsilon_-) = 11, \quad \mu(\varphi) = 9.$$

LEM 2.4 $\xi \in \pi(S^{2p-1})$ に対して、 $E^2(\xi) = 0$ ならば、 ξ は A の像である。

次に $n: \text{odd}$ に対する unstable groups π_{n+67}^n と π_{n+70}^n について調べる。stable の結果 $\pi_{67}^S = \pi_{70}^S = 0$ から、これらの unstable groups が (1) と (2) の中のコレクションからなることが分かる。したがって、 B_2^2, ab_2^2, ph は H -image であり、 E_2, E_1, B, a_2, a は P によって单射的に写される。

また、 $n = 5, 7$ に対して $\pi_{n+68}^n = 0$ であり、 $n = 5, 7, 9$ に対して $\pi_{n+69}^n = 0$ であることが分かる。

$HP(b^5) = ab^5 = 0$ なので $P(b^5) \in E^2 \pi_{7+68}^7 = 0$ であり、 b^5 は H -image である。

また Lem 3.9 により、ある η に対して、

$$P(AE_2) = E^2 \eta, H_p(\eta) = \{\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1 \varepsilon_2\}(15) = \beta_1 \varepsilon_2(15).$$

stable range において、 $\beta_1 \varepsilon_2 \in \pi_{52}^S = \{\beta_2^2\}, \alpha_1 \beta_2^2 \neq 0, \alpha_1 \beta_1 \varepsilon_2 = 3\beta_1 \varphi = 0$ である。よって $H_p(\eta) = 0$,

$P(AE_2) \in E^4 \pi_{7+68}^7 = 0$ である。

(3) の $k = 69$ における最初の extension $\bullet \rightarrow \circlearrowleft \rightarrow \bullet$ は Lem 3.7 により確立される。

$\xi \in \pi_{13+68}^{13}$ が $H(\xi) = ph$ を満たすとする。 $HP(e_2) = ae_2 = 3ph = 0$ なので、 $E^2 \xi \neq 0$ である。Lem 3.7 と

$\varphi \in \{\alpha_1, \alpha_1, \varepsilon_1\}$ により、 $P(e_1) = E^2 \xi$ を得る。

Lem 3.7 と Prop 6.2 により、 $\xi' \in \pi_{11+68}^{11}$ が存在し $3\xi = E^2 \xi', H(\xi') = ab^2 b_2$ を満たす。よって、 ξ の位数は 9 であ

り、 $E^4 \xi = 0$ である。

λ は $\{\beta_2, \varepsilon_1, \alpha_1\}$ により与えられる。 $\beta_2(11) \cdot \varepsilon_1(37) \in \pi_{11+64}^{11} = 0$ なので、 $\lambda(11) \in \{\beta_2(11), \varepsilon_1(37), \alpha_1(75)\}$ が存

在し $E^\infty \lambda(11) = \lambda$ である。 $E^\infty \xi' = 0$ なので $E^2 \lambda(9) = \lambda(11)$ となる $\lambda(9)$ が存在する。 $\lambda(9)$ は $H(\lambda(9)) = \pm B_1^2$ を

満たさなければならない。よって (3) の $k = 68$ が確立され、 $P(b^3) = 0$ を得る。よって (3) の $k = 69$ が Lem

3.7 により確立される。■

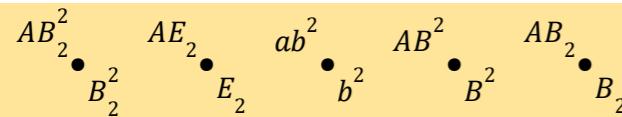
6.4 3-primary k -stem Groups for $71 \leq k \leq 80$

次の定理の中で、全ての invariants は stable type である。

Th 6.3 $71 \leq k \leq 75, n: \text{odd}$ に対する mod A k -stem groups π_{n+k}^n は、以下の3つの部分の直和として得られる。

(1) Removable simple unstable elements.

$$(n, k) = (9, 71) (15, 73) (27, 74) (27, 75) (23, 73)$$



(2) Removable short range unstable elements.

$n =$	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31
$k = 71$								ABB_2	bb_2						
									$\bullet \leftrightarrow \bullet = \bullet$						
								BB_2		ab_2					
$k = 72$								B^4	e'						
									$\bullet \leftrightarrow \bullet = \bullet$						
								E'		b^3					
$k = 73$								e_2	e_1						
									$\bullet \leftrightarrow \bullet = \bullet$						
								E_1		B^3					
$k = 74$								$B^2 B_2$		abb_2					
										$\bullet \leftrightarrow \bullet = \bullet$					
								ABB_2	bb_2						
$k = 75$								AB_2^2	b_2^2	BE'					
										b^4					
										$\bullet \leftrightarrow \bullet = \bullet$					
								B_2^2	ph	B^4	e'				

Lem 3.9 $m \not\equiv 0, -1 \pmod{p}$ で、 $\gamma \in \pi_{i-3}(Y^{2m+4p-8})$ に対して invariant $x \in \pi_{i+2}(Q_2^{2m+3})$ は $E^6 \gamma$ による

M-represented であり、 $\eta_{m+1}^{(3)} \circ \gamma = 0$ であるならば、 $\xi \in \pi_{i+1}(S^{2m+1})$ が存在して、up to non-zero coefficient で

$$H_p(\xi) = JH(\xi) \in \{\alpha_1(2pm + 1), \alpha_1(2pm + 2p - 2), E^3 \pi_* \gamma\}.$$

Lem 3.7 $\xi \in \pi_{i+4}(S^{2pm+1}), \gamma \in \pi_s^S, \delta \in \pi_t^S$ に対して、up to non-zero coefficients で次の関係が成り立つ。

(1) $H(\xi) = Q^{pm}(\gamma)$ は、 $H(\Delta(\xi)) = \bar{Q}^{pm-1}(\alpha \gamma) = HP(\bar{Q}^{pm}(\xi))$ を誘導する。

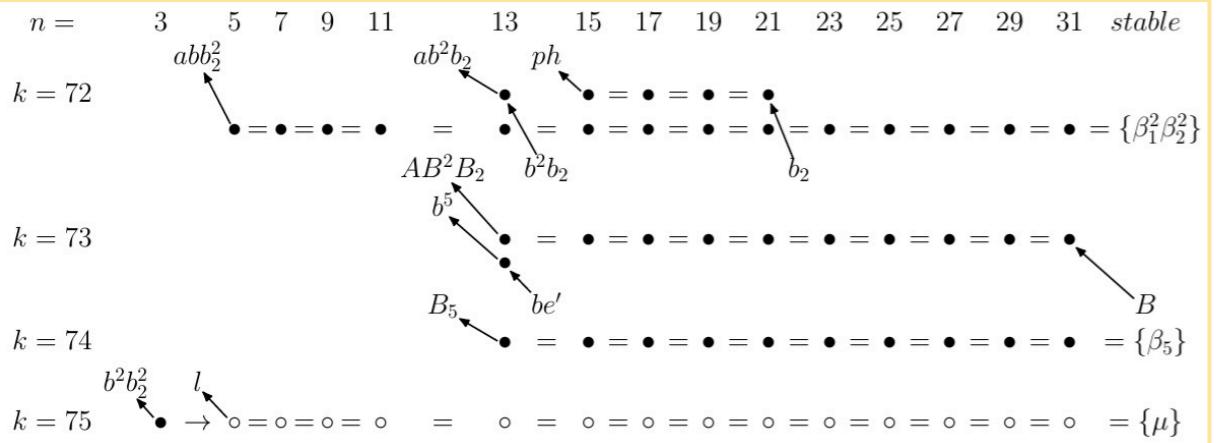
(2) $H(\xi) = Q^{pm}(\gamma), \Delta(\xi) = P(\bar{Q}^{pm}(\gamma))$ は、 $H(\xi \circ \delta(i+4)) = Q^{pm}(\gamma \delta), \Delta(\xi \circ \delta(i)) = P(\bar{Q}^{pm}(\gamma \delta))$ を誘導する。

Prop 6.2 up to sign で下記の関係式が成り立つ。

$$(1) \alpha_1 \beta_1^2 \beta_2 = \{3, \alpha_1, \varphi\}.$$

$$(2) i_* \beta_1^5 = \{\alpha i, 3, \alpha_1 \varepsilon_2\} \text{ i.e. } \beta_1^5 \in \{3, \alpha_1, 3, \alpha_1 \varepsilon_2\}.$$

(3) Remaining part.



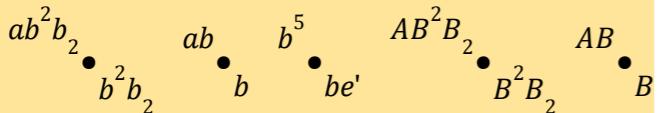
Proof. $k = 70$ の結果から 71-stem groups の H -image は AB_2^2, ABB_2, bb_2 であることが分かる。よって stable の結果 $\pi_{71}^S = 0$ は、unstable 71-stem groups が (1) と (2) の群の直和であることを導く。

72-stem groups を考える。 $H(\beta_1^2\beta_2^2) = abb_2^2$ なので、列 $\{\beta_1^2\beta_2^2(2m+1), m > 1\}$ は消去できる。 $\pi_{13+71}^{13} = 0$ ので $P(ph) = 0$ である。したがって、 ph と打ち消し合う可能性のある唯一の元は b_2 である。よって 72-stem groups は決定された。73-stem, 74-stem, 75-stem groups は問題なく決定される。■

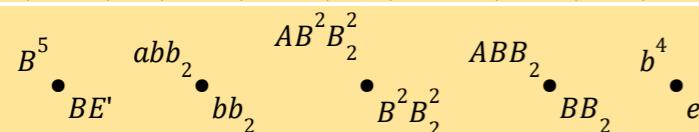
Th 6.4 $76 \leq k \leq 79, n: \text{odd}$ に対する mod A k -stem groups π_{n+k}^n は、以下の3つの部分の直和として得られる。

(1) Removable simple unstable elements.

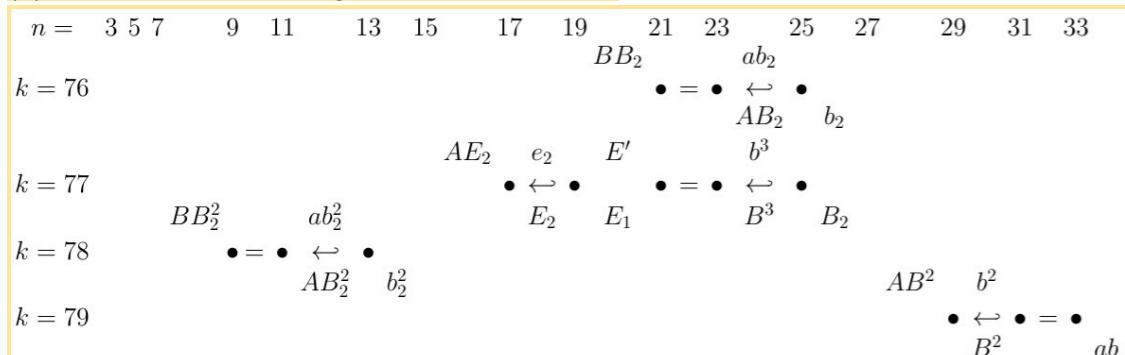
$$(n, k) = (15, 76) (33, 76) (15, 77) (15, 77) (33, 77)$$



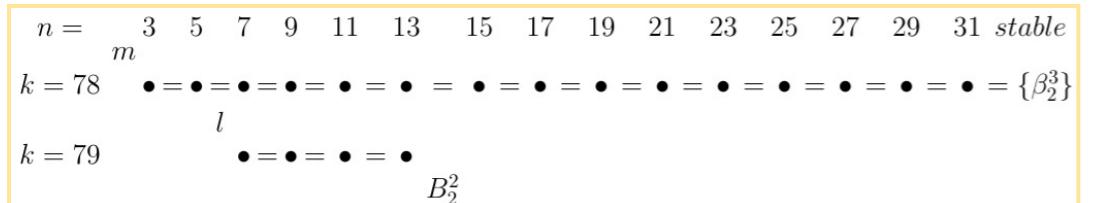
$$(n, k) = (15, 78) (21, 78) (3, 79) (21, 79) (21, 79)$$



(2) Removable short range unstable elements.



(3) Remaining part.



Proof. $k = 78$ において、 $\beta_2^3(5) = \beta_2^2(5)$ 。 $\beta_2(57)$ が存在し $H(\beta_2^3(5)) = 0$ である。よって 78-stem groups が決定され、 $P(l) = 0$ である。 $\pi_{79}^S = 0$ なので、 l は B_2^2 によって消されなければならない。他の場合は簡単に得られる。■

次の群 * と invariants が、まだ確定していないまま残っている。

$n =$	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27
		L		abb_2^2									
$k = 76$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
	U_3'	U_2	U_1	w									e_1
	U_3	U_2	U_1	b_2^2									
$k = 77$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	B_2^2

ここで、not stable type invariants は以下で与えられる。

$$J(U_3') = P(e_2), J(U_3) = P(E_2), J(U_2) = v_2(19), J(U_1) = v_1(25),$$

$$u_2 = I(v_2(17)), u_1 = I(v_1(23)), w = I(P(i)).$$

まず Lem 3.13 により $HP(w) = u_1$ を得る。

2つの場合 Case (I) $P(U_3) = 0$ と Case (II) $P(U_3) \neq 0$ を考える。

最初の場合、 $H\xi = U_3$ を満たす元 ξ が存在し、invariant ab^2 によって消去されなければならない。77-stem の中の群 * は全て \mathbb{Z}_3 に同型であり、同型写像 E^2 によってつながっている。よって invariants

$U_3, U_2, U_1, w, ABB_2^2, b_2^2$ は P によって単射的に写され、 $H(\eta') = B^2B_2^2$ となる元 η' が存在する。

関係式 $\beta_1^2\beta_2^2 = \{\alpha_1, 3, \lambda\}$ に Lem 3.7 と Lem 3.9 を適用すると、 η が存在して up to sign で

$$p\eta = E^2(\eta') = P(ABB_2^2) \neq 0 \text{ が成り立つことを得る。}$$

2番目の場合、Lem 3.9 は $P(ABB_2^2) = 0$ を示し、 $H(\eta) = ABB_2^2$ となる η が存在し、 ab^2 によって消去される。

EHP-sequence の完全性により、以下の可能性を得る。

Prop 6.3 以下のようなバリエーションがある。

$n =$	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27
Case (I)													
$k = 76$	•	→	○	→	•	⇒	•	=	•	=	•	=	•
	•	•	◇	•	•								
$k = 77$	•	=	•	=	•	=	•	=	•	=	•	=	•
Case (II)													
$k = 76$	•	•	=	•	⇒	•	=	•	=	•	=	•	=
	•	•	◇	•	•								
$k = 77$	•	=	•	=	•	=	•	=	•	=	•	=	•

ここで、 \Rightarrow は $E^2 : \pi_{7+76}^7 \rightarrow \pi_{9+76}^9$ の image が、上の成分であり、 \diamond は 9 個の要素を持つ群であることを意味している。

最後に、上の結果は $H(\pi_{3+79}^3)$ が stable type と non-stable type の 2つの生成元を持つことを示していることに注意する。また、群 Q_{3+79}^3 は同様に2つの生成元を持っている。よって次を得る。

$$(6.4.1) \quad \pi_{3+69}^3 \simeq \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3, \quad E^2(\pi_{3+79}^3) = 0.$$

6.5 Table of 3-primary k -stem Groups for $56 \leq k \leq 80$

以下は 3-primary k -stem groups mod A の表である。

$n =$	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27
$k = 56$	•	→	○	→	•								
	•	=	•	=	•	=	•	=	•				
$k = 57$	•	→	○	→	•					•	•	=	•
	•	•	•	=	•					•	•	=	•
$k = 58$	•	•	•	=	•				•	=	•	•	
$k = 59$	•	=	•	=	•				•	=	•		
	•												

Lem 3.13 $x \in \pi_{i+1}(Q_2^{2m+2p-1})$ が $E\gamma$ による M-represented であり、 $y \in \pi_i(Q_2^{2m+1})$ は $\beta_{(1)}\gamma$ による represented であるとする。 $m \geq 1$ ならば、 $P(y) = \partial_\alpha P(x)$ である。

Lem 3.7 $\xi \in \pi_{i+4}(S^{2pm+1})$, $\gamma \in \pi_s^S$, $\delta \in \pi_t^S$ に対して、up to non-zero coefficients で次の関係が成り立つ。

(1) $H(\xi) = Q^{pm}(\gamma)$ は、 $H(\Delta(\xi)) = \overline{Q}^{pm-1}(\alpha\gamma) = HP(\overline{Q}^{pm}(\xi))$ を誘導する。

(2) $H(\xi) = Q^{pm}(\gamma)$, $\Delta(\xi) = P(\overline{Q}^{pm}(\gamma))$ は、 $H(\xi \cdot \delta(i+4)) = Q^{pm}(\gamma\delta)$, $\Delta(\xi \cdot \delta(i)) = P(\overline{Q}^{pm}(\gamma\delta))$ を誘導する。

Lem 3.9 $m \not\equiv 0, -1 \pmod{p}$ で、 $\gamma \in \pi_{i-3}(Y^{2m+4p-8})$ に対して invariant $x \in \pi_{i+2}(Q_2^{2m+3})$ は $E^6\gamma$ による

M-represented であり、 $\eta_{m+1}^{(3)} \circ \gamma = 0$ であるならば、 $\xi \in \pi_{i+1}(S^{2m+1})$ が存在して、up to non-zero coefficient で

$$H_p(\xi) = JH(\xi) \in \{\alpha_1(2pm+1), \alpha_1(2pm+2p-2), E^3\pi_*\gamma\}.$$

$n =$	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	stable		
$k = 60$	• = •	•	•	•	• = •	•	•	• = •	•	• = •	•	•	•	•	•			
$k = 61$	• = •	•	•	•	•	• = •	•	•	• = •	• = •	• = •	• = •	•	•	•			
$k = 62$	• = { \beta_1 \beta_2^2 }																	
$k = 63$	•	•	•	• = •	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•			
$n =$	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	stable		
$k = 64$	•						• = •	•					•					
$k = 65$	• = { \alpha_1 \beta_1 \beta_2^2 }																	
$k = 66$	• = •	•	•	•														
$k = 67$							•			•	• = •							
$n =$	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33 stable		
$k = 68$	• = • = • = • = • = • = • = • = • = • = • = • = • = • = • = • = • = • = • = { \lambda }																	
	•						• → o → •			•								
$k = 69$	•						• → o → •			• = • = • = • = • = • = • → o → •								
$k = 70$	•	•	•	• = •						• = •	•							
$k = 71$	•					•	• = •											
$n =$	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35 stable	
$k = 72$	• = • = • = • = • = • = • = • = • = • = • = • = • = • = • = • = • = • = • = { \beta_1^2 \beta_2^2 }																	
	•						•	• = •	• = •	• = •	• = •	• = •	• = •	• = •	• = •	• = •		
$k = 73$	•	• = •					• = •	• = •	• = •	• = •	• = •	• = •	• = •	• = •	• = •	• = •		
$k = 74$							• = •	• = •	• = •	• = •	• = •	• = •	• = •	• = •	• = •	• = • = { \beta_5 }		
$k = 75$	• → o → o = { \mu }																	
	•						•	• = •	•									
$n =$	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37 stable
$k = 76$	• → o → • = • = • = • = • = • = • = • = •																	
	•						•			• = •	•							
$k = 77$	• = { \beta_2^3 }																	
	•						•	• = •	• = •	• = •	• = •	• = •	• = •	• = •	• = •	• = •	• = •	
$k = 78$	• = { \beta_2^3 }																	
$k = 79$	•	•	• = • = • = • = •				•			•	• = •							

$k = 76$ と $k = 77$ に対する結果はまだ決定されておらず、ここでは一例を示している。そのバリエーションは Prop 6.3 にみられる。

References

- [1] J.F.Adams, On the groups $J(X)$ -IV, Topology 5 (1966),21-71.
- [3] F.Cohen, J.C.Moore and J.Neisendorfer, The double suspension and exponents of the homotopy groups of spheres, Ann. of Math. 110 (1979),549-565.
- [4] E.Dyer and R.Lashof, Homology of iterated loop spaces, Ann. of Math. 84 (1962), 35-88.
- [6] B.W.Gray, On the sphere of origin of infinite families in the homotopy groups of spheres, Topology 8, (1969), 219-232.
- [7] B.W.Gray, Unstable families related to the image of J , Proc. Camb. Phil. Soc, 96 (1984), 95-113.
- [8] B.W.Gray, On Toda's fibrations, Proc. Camb. Phil. Soc. 97 (1985), 289-298.
- [10] J.R.Harper, A Proof of Gray's conjecture, Contemp. Math. 96 (1989), 181-188.
- [12] I.M.James, Reduced product space, Ann. of Math. 62 (1955), 170-197.
- [17] J.C.Moore, The double suspension and p-primary components of the homotopy groups of spheres, Boll. Soc. Mat. Mexicana, 1 (1956), 28-37.
- [18] O.Nakamura, On the cohomology of the mod p Steenrod algebra, Bull. Sci. Engrg. Div, Univ. Ryukyus(Math.Nat.Sci.) 18(1975), 9-58.
- [19] J.Neisendorfer, 3-primary exponents, Proc. Camb. Phil. Soc.90 (1981), 63-83.
- [20] G.Nishida, Cohomology operations in iterated loop space, Proc.Japan Acad. 44(1967), 839-842.
- [21] S.Oka, On the Homotopy Groups of Sphere Bundles over Spheres, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser.A-I 33 (1969), 161-195.
- [22] S.Oka, The stable homotopy groups of spheres, I, II, III, Hiroshima Math. J. 1(1971), 305-337, 2(1972), 99-161, 5(1975), 407-438.
- [25] D.C.Ravenel, Complex Bordism and stable Homotopy Groups of Spheres, Pure and Appl. Math. 121 (1986).
- [26] P.Selic, Odd primary torsion in $^*(S^3)$, Topology 17 (1978), 407-412.
- [27] P.Selic, A Decomposition of $\pi_*(S^{2p+1}; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, Topology 17 (1978), 407-412.
- [28] J.-P.Serre, Homologie singuliere des espaces fibres, Ann of Math. 54 (1951),425-505.
- [29] J.-P.Serre, Groupes d'homotopie et classes de groups abelian, Ann of Math. 58 (1953),258-294.
- [33] M.C.Tangora, Some homotopy groups mod 3, Conference on homotopy theory Evanston III. (1974), 227-245, Notas Mat. Simpos., 1 Soc. Mat. Mexicana, Mexico 1975.
- [34] H.Toda, On double suspension E2, Inst.Polytech. Osaka City Univ. Ser.A Math. A7 (1956), 922-924.
- [37] H.Toda. On homotopy groups of S^3 -bundles over spheres, J.Math.Kyoto Univ. 2 (1963), 193-207.
- [38] H.Toda. On Iterated Suspensions I,II,III, J. Math. Kyoto Univ. 5 (1966), 87-142,209-250, 8(1968),101-130.
- [39] H.Toda, An important relation in homotopy groups of spheres, Proc. Japan Acad. 43 (1967), 839-942.
- [45] N.Yamamoto, Algebra of stable homotopy of Moore space, J. Math. Osaka City Univ. 14 (1963), 45-67.