

## Toda\_Unstable 3-primary Homotopy Groups of Spheres

### 1 Introduction

本論文の目的は、奇素数  $p$ 、特に  $p = 3$  に対して、stable group  $\pi_k^S = \lim \pi_{n+k}(S^n)$  に関するいくつかの結果から、 $\pi_i(S^n)$  の  $p$ -成分  ${}_p\pi_i(S^n)$  を求めることである。Serre [28], [29] により、 $\pi_i(S^n)$  は、

$$\pi_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}, \pi_{4m-1}(S^{2m}) \simeq \mathbb{Z} \oplus (\text{finite}),$$

を除いて有限群である。また、次の Serre decomposition が知られている。

$${}_p\pi_{i+1}(S^{2m}) \simeq {}_p\pi_i(S^{2m-1}) \oplus {}_p\pi_{i+1}(S^{4m-1}).$$

よって、奇数  $n = 2m + 1$  に対して、 ${}_p\pi_i(S^n)$  を求めれば十分である。この計算は、大抵の場合、 $k$ -stem の列

$$(1.1)_k \quad {}_p\pi_{3+k}(S^3) \xrightarrow{E^2} {}_p\pi_{5+k}(S^5) \xrightarrow{E^2} {}_p\pi_{7+k}(S^7) \xrightarrow{E^2} \cdots \xrightarrow{E^\infty} {}_p\pi_k^S$$

を使って、下の stem の情報と、stable group  ${}_p\pi_k^S$  の情報から、double suspension を考えることで行われる。

$\pi_i(S^{2m+1})$  を求めるための主な道具は、次の double EHP-sequence である。

$$(1.2)_m \quad \cdots \xrightarrow{H} \pi_i(Q_2^{2m-1}) \xrightarrow{P} \pi_i(S^{2m-1}) \xrightarrow{E^2} \pi_{i+2}(S^{2m+1}) \xrightarrow{H} \pi_{i-1}(Q_2^{2m-1}) \xrightarrow{\cdots} \cdots.$$

ここで、 $Q_2^{2m-1}$  は、double suspension map  $i^2 : S^{2m-1} \rightarrow \Omega^2 S^{2m+1}$  のホモトピーファイバーであり、 $H$  と  $P$  はそれぞれ、Hopf invariant と Whitehead product の double version である。

$$Q_2^{2m-1} = \Omega(\Omega^2 S^{2m+1}, S^{2m-1}).$$

ここでは、便宜上、 $\pi_i(Q_2^{2m-1})$  の元を不变量 (invariant) と呼ぶことにする。 $Q_2^{2m-1}$  のホモトピー群は、次の  $IJ\Delta$ -sequence (この列は  $p$  で局所化すると完全になる) を使って計算されることがある。

$$(1.3)_m \quad \cdots \xrightarrow{J} \pi_{i+4}(S^{2pm+1}) \xrightarrow{\Delta} \pi_{i+2}(S^{2pm-1}) \xrightarrow{I} \pi_i(Q_2^{2m-1}) \xrightarrow{J} \pi_{i+3}(S^{2pm+1}) \xrightarrow{\Delta} \pi_{i+1}(S^{2pm-1}) \xrightarrow{\cdots} \cdots$$

ここで、 $\Delta \circ E^2 \circ E^2$ 。 $\Delta$  は  $p$  倍する写像であり、

$$J \circ H = H_p : \pi_{i+3}(S^{2m+1}) \rightarrow \pi_{i+3}(S^{2pm+1})$$

は James-Hopf invariant である。

Toda [38] の iterated suspension についてのいくつかの lemma は、Selic [26], Neisendorfer [19] の Moore-type representations, exponential theorems と、Gray [7], Harper [10], Oka [21] の結果を使うことによって、次元の制限を取り除くことができる。

奇数  $n$  に対する  ${}_p\pi_{n+k}(S^n)$  の表を、symbolic な方法で記述することができる。

例えば、 $p = 3$  に対する 10-stem と 11-stem の表は、次のように表される。

$n =$	3	5	7
$k = 10$	• → ○ → • = { $\beta_1$ }		
$k = 11$	• → ○ ≡ ○ = { $\alpha'_3$ }		

ここで、• と ○ はそれぞれ、 $\mathbb{Z}_3$  と  $\mathbb{Z}_9$  を表わしている。

= は、double suspension  $E^2$  の同型を、→ は、同型でなく、自明でない  $E^2$  を表わしている。

最後の項の • = <  $\beta_1$  > は、 ${}_3\pi_{7+10}(S^7)$  が stable range であり、 $\beta_1$  で生成される stable group  ${}_3\pi_{10}^S$  に同型であることを意味している。

○ = <  $\alpha'_3$  > も同様である。もし  ${}_3\pi_{n+k}(S^n)$  が巡回群の多くの数の直和であるならば、table の中に群は対応するシンボル •, ○ または ▷ ≈  $\mathbb{Z}_{27}$  を縦に重ねて表わされる。

[28] J.-P.Serre, Homologie singulière des espaces fibres, Ann of Math. 54 (1951), 425-505.

[29] J.-P.Serre, Groupes d'homotopie et classes de groups abelian, Ann of Math. 58 (1953), 258-294.

[38] H.Toda, On Iterated Suspensions I,II,III, J.Math.Kyoto U. 5 (1966), 87-142, 209-250, 8(1968), 101-130.

[26] P.Selic, Odd primary torsion in  $\pi_*(S^3)$ , Topology 17 (1978), 407-412.

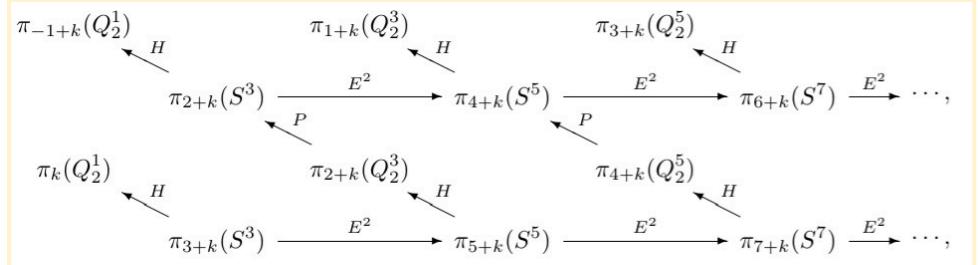
[19] J.Neisendorfer, 3-primary exponents, Proc. Camb. Phil. Soc. 90 (1981), 63-83.

[7] B.W.Gray, Unstable families related to the image of  $J$ , Proc. Camb. Phil. Soc. 96 (1984), 95-113.

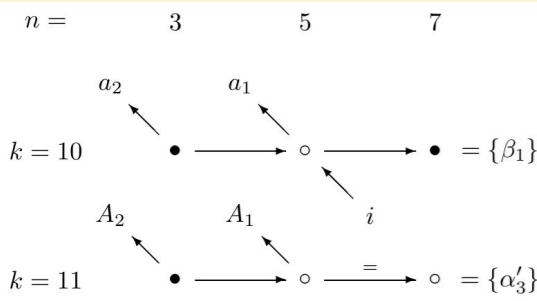
[10] J.R.Harper, A Proof of Gray's conjecture, Contemp. Math. 96 (1989), 181-188.

[21] S.Oka, On the Homotopy Groups of Sphere Bundles over Spheres, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser.A-I 33 (1969), 161-195.

計算は次のような完全列のコレクション  $(1.2)_m$  を使うことにより与えられ、これは **computation diagram** と呼ばれる。



computation diagram はまたシンボル化される。上記の  $k = 10, 11$  の場合は、次のように計算される。



ここで、ローマ字は適宜、定義された不变量を示しており、準同型  $P, H$  は自明なときは省略し、それが自明でないときは矢印だけを残している。stable  $\alpha$ -series

$$\{\alpha_r \in \pi_{rq-1}^S; r \geq 1\}, q = 2(p-1),$$

の unstable バージョンは典型的な例である。これは、各  $r$  に対して、 $(rq-1)$ -stem と  $(rq-2)$ -stem の中の元のコレクションであり、 ${}_p\pi_i(Q_2^{2m-1})$  の直和成分の生成元と対応しており、Gray[7] で示されたように、1つの例外  ${}_p\pi_{2p^2-3}(S^{2p-1}) \simeq \mathbb{Z}_{p^2}$  を除いて、EHP-sequence の中で閉じている。そのコレクションは  $IJ\Delta$ -sequence と適合するように選ぶことができる。これは、 ${}_p\pi_i(S^{2m+1})$  の計算の中で、わずかな余りの不变量を残すことにより、これらのコレクションを除外することを意味している。このコレクションは **unstable alpha families** と呼ばれる。

unstable alpha families の他に、計算の前に除外できるいくつかのコレクションがある。元  $\xi \in {}_p\pi_i(S^{2m+1})$  は、 $E^2\xi = 0$ かつ  $\xi \notin Im E^2$  のとき **simple** であるという。 $m \not\equiv -1, 0 \pmod{p}$  のとき、この  $\xi$  は  $IJ\Delta$ -sequence とは独立である。そこで、 $P(x) = \xi$  を満たす不变量  $H(\xi)$  と  $x \in {}_p\pi_i(Q_2^{2m-1})$  とともに  $\xi$  を取り除くことができる。これらの3つの元のことを **simple removable collection** と呼ぶ。対  $\{\xi, \Delta\xi \neq 0\}$  を含むもう一つの種類の removable collection があり、**short range removable collection** と呼ばれる。

3-primary k-stem groups  ${}_3\pi_{2m-1+k}(S^{2m+1})$  の結果は、上の様に symbolized tables で与えられ、2つの部分に分けられる。一つは  $k \leq 55$  に対する古い table であり、もう一つは  $56 \leq k < 80$  に対する新しい table である。最初の table は、K.Maruyama の  $k \leq 45$  に対する報告 [38],[39] と、M.Mimura の  $45 < k \leq 55$  に対する 1998年の結果を再掲したものである。最初の難点は、関係式  $\beta_1^3\beta_2 = 0$  の非安定版を含む 56-stem にある。この関係式は

$S^{15}$  中で成立している。また、57-stem では、関係式  $\beta_1^3\varepsilon' = 0$  を含み、これは  $S^9$  中で成立している。

$n =$	3	5	7	9	11	13	15
$k = 56$	{	•	=	•	=	•	=
$k = 57$		•	$\rightarrow$	○	$\rightarrow$	•	

2番目の難点は、60-stem と 76-stem に集中しており、さらに **deeply unstable range** の中にある。これらの場合には、多くの stable でない不变量があり、これらをコントロールするためのいくつかの効果的な理論を持っている。deep range の 76-stem と 77-stem において、我々の表にはいくつかの曖昧な点がある。

[7] B.W.Gray, Unstable families related to the image of  $J$ , Proc. Camb. Phil. Soc, 96 (1984), 95-113.

$m \not\equiv -1, 0 \pmod{3} \leftrightarrow m = 1 \pmod{3}$

[38] H.Toda, On Iterated Suspensions I,II,III, J.Math.Kyoto U. 5 (1966), 87-142, 209-250, 8(1968), 101-130.

[39] H.Toda, An important relation in homotopy groups of spheres, Proc. Japan Acad. 43 (1967), 839-942.

## 2 Double Suspension and Lemmas

### 2.1 EHP sequence

$Q_1^n = \Omega(\Omega S^{n+1}, S^n)$  を canonical inclusion (suspension map)  $i : S^n \rightarrow \Omega S^{n+1}$  のホモトピーファイバーとする。

このとき、次の完全列を得る。(single EHP sequence)

$$(2.1.1) \cdots \xrightarrow{E} \pi_{i+2}(S^{n+1}) \xrightarrow{H'} \pi_i(Q_1^n) \xrightarrow{P'} \pi_i(S^n) \xrightarrow{E} \pi_{i+1}(S^{n+1}) \xrightarrow{H'} \cdots$$

恒等写像のクラス  $\iota_n \in \pi_n(S^n)$  の Whitehead product  $w_n = [\iota_n, \iota_n] \in \pi_{2n-1}(S^n)$  は  $P'$  の像であり、 $n$  が偶数のとき、 $H'(w_n) = 2\iota_{2n-1}$ 。これは、奇素数  $p$  に対して、次の Serre's decomposition [29] を誘導する。

$$(2.1.2) E + w_{2m*} : \pi_i(S^{2m-1}) \oplus \pi_{i+1}(S^{4m-1}) \xrightarrow{p} \pi_{i+1}(S^{2m}).$$

ここで  $\simeq_p$  は mod  $p$  同型を意味する。すなわち kernel と cokernel が有限で  $p$ -torsion を持たない。よって  $E$  と  $w_{2m*}$  は、mod  $p$  単射である。 $Q_2^{2m-1} = \Omega(\Omega^2 S^{2m+1}, S^{2m-1})$  を canonical inclusion (double suspension map)

$i : S^{2m-1} \rightarrow \Omega^2 S^{2m+1}$  のホモトピーファイバーとする。このとき、次の完全列を得る。(double EHP sequence)

$$(2.1.3) \cdots \xrightarrow{E^2} \pi_{i+3}(S^{2m+1}) \xrightarrow{H} \pi_i(Q_2^{2m-1}) \xrightarrow{P} \pi_i(S^{2m-1}) \xrightarrow{E^2} \pi_{i+2}(S^{2m+1}) \xrightarrow{H} \cdots$$

$H$  と  $P$  はそれぞれ、Hopf invariant  $H'$  と Whitehead product  $P'$  の double version であり、 $\pi_i(Q_2^{2m-1})$  のことを、**invariants** の群という。次の  $H$  と  $P$  の naturality が成り立つ。

$$(2.1.4) H(\alpha) \circ \xi = H(\alpha \circ E^3 \xi) \text{ for } \alpha \in \pi_{i+3}(S^{2m+1}), \xi \in \pi_j(S^i)$$

$$(2.1.5) P(\alpha) \circ \xi = P(\alpha \circ \xi) \text{ for } \alpha \in \pi_i(Q_2^{2m-1}), \xi \in \pi_j(S^i).$$

よく知られているように、 $\Omega S^{2m+1}$  のホモロジー環は、次の多項式環である。 $H_*(\Omega S^{2m+1}) = \mathbb{Z}[u], u \in H_{2m}$ .

可縮な全空間  $E$  の fibration  $\Omega^2 S^{2m+1} \rightarrow E \rightarrow \Omega S^{2m+1}$  に関する spectral sequence を考えることで次を得る。

$$(2.1.6) H_i(\Omega^2 S^{2m+1}, S^{2m-1}) \simeq_p 0 \text{ for } i < 2pm - 2,$$

$$H_i(\Omega^2 S^{2m+1}, S^{2m-1}) \simeq_p \mathbb{Z}_p \text{ for } i = 2mp - 2.$$

homotopy に対しても同じ結果であり、Serre[29] による球面のホモトピー群の mod  $p$  stability (持続性) を得る。

**Th 2.1 (Serre [29])** double suspension  $E^2 : \pi_i(S^{2m-1}) \rightarrow \pi_{i+2}(S^{2m+1})$  は、

$i < 2pm - 3$  のとき、 $p$ 成分の同型あり、 $i = 2mp - 3$  のとき、( $p$ 成分の?) 全射である。

$\pi_k^S = \lim_n \pi_{n+k}(S^n)$  を stable  $k$ -stem group とし、次の群を stable range にあるという。

$$(2.1.7) \pi_{2m-1+k}(S^{2m-1}) \simeq_p \pi_k^S \text{ for } k < 2(p-1)m - 2.$$

$S_\infty^n = S^n \cup e^{2n} \cup \dots \cup e^{kn} \cup \dots$  を  $n$ -sphere の James' reduced product [12] とすると、自然な H-map  $i : S_\infty^n \rightarrow \Omega S^{n+1}$

により、 $S_\infty^n$  と  $\Omega S^{n+1}$  はホモトピー同値であり、今後これを同一視する。 $S_k^n = S^n \cup e^{2n} \cup \dots \cup e^{kn}$  を  $S_\infty^n$  の  $kn$

-skeleton とし、 $h_p : \Omega S^{2m+1} = S_\infty^{2m} \rightarrow S_\infty^{2pm} = \Omega S^{2pm+1}$  を、shrinking map  $S_p^{2m} \rightarrow S_p^{2m}/S_{p-1}^{2m} = S^{2pm}$  の James's

extension [12] とする。[34] の中で、 $h_p$  のホモトピーファイバーは、 $S_{p-1}^{2m}$  に mod  $p$  同値であり、写像

$T_p : \Omega S_{p-1}^{2m} \rightarrow \Omega S^{2pm-1}$  が存在して、そのホモトピーファイバーが、 $S^{2m-1}$  に mod  $p$  同値となることを示した。

よって、 $p$  で局所化することにより、次の fibration を得る。

$$(2.1.8) S_{p-1}^{2m} \rightarrow \Omega S^{2m+1} \xrightarrow{h_p} \Omega S^{2pm+1}, S^{2m-1} \rightarrow \Omega S_{p-1}^{2m} \xrightarrow{T_p} \Omega S^{2pm-1}.$$

これらを組み合わせて、次の mod  $p$  fibration を得る。

$$(2.1.9) \Omega^2 S^{2pm-1} \xrightarrow{i} Q_2^{2m-1} \xrightarrow{j} \Omega^3 S^{2pm+1} \xrightarrow{\partial_p} \Omega S^{2pm-1}.$$

**Th 2.2** (2.1.9) の mod  $p$  fibration は、次の  $I\Delta$ -sequence を誘導し、これは、mod  $p$  で完全である。

$$\cdots \xrightarrow{\Delta} \pi_{i+2}(S^{2pm-1}) \xrightarrow{I} \pi_i(Q_2^{2m-1}) \xrightarrow{J} \pi_{i+3}(S^{2pm+1}) \xrightarrow{\Delta} \pi_{i+1}(S^{2pm-1}) \xrightarrow{I} \cdots$$

[29] J.-P.Serre, Groupes d'homotopie et classes de groups abelian, Ann of Math. 58 (1953), 258-294.

[戸田三村ホモトピー論] p72

[29] J.-P.Serre, Groupes d'homotopie et classes de groups abelian, Ann of Math. 58 (1953), 258-294.

[12] I.M.James, Reduced product space, Ann. of Math. 62 (1955), 170-197.

[34] H.Toda, On double suspension  $E^2$ , Inst.Polytech. Osaka City Univ. Ser.A Math. A7 (1956), 922-924.

$$Q_2^{2m-1} \rightarrow S^{2m-1} \rightarrow \Omega^2 S^{2m+1}$$

$$\Omega^3 S^{2m+1} \xrightarrow{\Omega^2 h_p} \Omega^3 S^{2pm+1} \rightarrow \Omega S_{p-1}^{2m} \rightarrow \Omega^2 S^{2m+1} \xrightarrow{\Omega h_p} \Omega^2 S^{2pm+1},$$

$$S^{2m-1} \rightarrow \Omega S_{p-1}^{2m} \xrightarrow{T_p} \Omega S^{2pm-1}.$$

写像  $h_p$  は、James-Hopf invariant  $H_p$  を誘導し、次を満たす。

$$(2.1.10) \quad H_p = J \circ H : \pi_{i+3}(S^{2m+1}) \rightarrow \pi_i(Q_2^{2m-1}) \rightarrow \pi_{i+3}(S^{2pm+1}).$$

写像  $T_p$  は、Gray [8] によって再構成され、(2.1.9) の写像  $\partial_p : \Omega^3 S^{2pm+1} \rightarrow \Omega S^{2pm-1}$  は、degree  $p$  の写像  $f_p : S^{2pm-1} \rightarrow S^{2pm-1}$  に対して、 $\partial_p \circ i^2 \simeq \Omega f_p : \Omega S^{2pm-1} \rightarrow \Omega^3 S^{2pm+1} \rightarrow \Omega S^{2pm-1}$  を満たす。

さらに、Harper [10] は、次を示した。

$$i^2 \circ \partial_p \simeq \Omega(S^2 f_p) : \Omega^3 S^{2pm+1} \rightarrow \Omega S^{2pm-1} \rightarrow \Omega^3 S^{2pm+1}.$$

**Lemma 2.1** 次の2つの合成は、どちらも  $p$  倍する写像である。

$$\Delta \circ E^2 : {}_p \pi_i(S^{2pm-1}) \rightarrow {}_p \pi_{i+2}(S^{2pm+1}) \rightarrow {}_p \pi_i(S^{2pm-1}),$$

$$E^2 \circ \Delta : {}_p \pi_{i+2}(S^{2pm+1}) \rightarrow {}_p \pi_i(S^{2pm-1}) \rightarrow {}_p \pi_{i+2}(S^{2pm+1}).$$

次の naturality が成り立つ。

$$(2.1.11) \quad I(\alpha \circ E^2 \xi) = I(\alpha) \circ \xi \text{ for } \alpha \in \pi_{i+2}(S^{2pm-1}), \xi \in \pi_j(S^i)$$

$$J(\alpha \circ \xi) = J(\alpha) \circ E^3 \xi \text{ for } \alpha \in \pi_i(Q_2^{2m-1}), \xi \in \pi_j(S^i)$$

$$\Delta(\alpha \circ E^3 \xi) = \Delta(\alpha) \circ E \xi \text{ for } \alpha \in \pi_{i+3}(S^{2pm+1}), \xi \in \pi_j(S^i)$$

$$H_p(\alpha \circ E \xi) = H_p(\alpha) \circ E \xi \text{ for } \alpha \in \pi_{i+1}(S^{2m+1}), \xi \in \pi_j(S^i)$$

次の exponent theorem は、 $p = 3$  に対しては、Cohen-Moore-Neisendorfer [3], Neisendorfer [19] によって、 $m = 1$  に対しては、Selic [26] によって示された。

$$\text{Th 2.3} \quad p^m({}_p \pi_i(S^{2m+1})) = 0.$$

この定理は、 $\Omega^2 S^{2m+1}$  上の適当な H-structure に対して、積  $\mu$  の  $p$ -th power  $\mu^p : \Omega^2 S^{2m+1} \rightarrow \Omega^2 S^{2m+1}$  が、写像  $r_m : \Omega^2 S^{2m+1} \rightarrow S^{2m-1}$  に変形されるという事実を元にしている。すなわち、

$$(2.1.12) \quad \mu^p \simeq i^2 \circ r_m : (\Omega^2 S^{2m+1}, S^{2m-1}) \rightarrow (\Omega^2 S^{2m+1}, S^{2m-1}).$$

したがって、

**Lem 2.2**  ${}_p \pi_i(Q_2^{2m-1})$  は、elementary である。すなわち  $p({}_p \pi_i(Q_2^{2m-1})) = 0$ .

Th 2.1 により、 $i < 2p^2 m - 3$  に対して、 $E^2 : {}_p \pi_i(S^{2pm-1}) \rightarrow {}_p \pi_{i+2}(S^{2pm+1})$  は全単射である。

IJΔ-sequence の完全性から次を得る。

**Prop 2.1**  $i < 2p^2 m - 3$  に対して、次の split 完全列を得る。

$$0 \rightarrow \pi_{i-2pm+3}^S \otimes \mathbb{Z}_p \rightarrow {}_p \pi_i(Q_2^{2m-1}) \rightarrow \text{Tor}(\pi_{i-2pm+2}^S, \mathbb{Z}_p) \rightarrow 0.$$

この場合のことを、meta-stable range という。

## 2.2 Homotopy groups of $S^3$

$m = 1$  の場合の (2.1.8) の mod  $p$  fibration を考える。

$$(2.2.1) \quad S_{p-1}^2 \rightarrow S_\infty^2 \xrightarrow{h_p} S_\infty^{2p}.$$

$f_\infty : S_\infty^2 \rightarrow \mathbb{CP}^\infty = S^2 \cup e^4 \cup e^6 \cup \dots$  を、 $S^2$  上の恒等写像の拡張とする。 $\mathbb{CP}^\infty$  は、 $(\mathbb{Z}, 2)$  型の Eilenberg-MacLane 空間であるので、 $f_\infty$  のホモトピーファイバー  $\tilde{S}_\infty^2$  は、 $S_\infty^2$  上の 2-connective fibration である。

$\tilde{S}_\infty^2 \rightarrow S_\infty^2 \rightarrow \mathbb{CP}^\infty = K(\mathbb{Z}, 2)$ .  $S^3$  の 3-connective fiber  $\tilde{S}^3$  に対して、 $\tilde{S}_\infty^2 = \Omega \tilde{S}^3$ .  $f_\infty$  の  $S_k^2$  への制限  $f_k$  は、

2-connective fibration である。 $\tilde{S}_k^2 \xrightarrow{\rho_k} S_k^2 \xrightarrow{f_k} \mathbb{CP}^\infty$ .

$S_\infty^2 = \Omega S^{2p+1}$  は 2-connected であるので、(2.2.1) の fibration は、次の mod  $p$  fibration にリフトされる。

$$(2.2.2) \quad \tilde{S}_{p-1}^2 \xrightarrow{i} \tilde{S}_\infty^2 \xrightarrow{h_p} S_\infty^{2p}.$$

[8] B.W.Gray, On Toda's fibrations, Proc. Camb. Phil. Soc. 97 (1985), 289-298.

[10] J.R.Harper, A Proof of Gray's conjecture, Contemp. Math. 96 (1989), 181-188.

[3] F.Cohen, J.C.Moore and J.Neisendorfer, The double suspension and exponents of the homotopy groups of spheres, Ann. of Math. 110 (1979), 549-565.

[19] J.Neisendorfer, 3-primary exponents, Proc. Camb. Phil. Soc. 90 (1981), 63-83.

[26] P.Selic, Odd primary torsion in  $\pi_*(S^3)$ , Topology 17 (1978), 407-412.

**Th 2.1 (Serre [29])** double suspension  $E^2 : {}_p \pi_i(S^{2m-1}) \rightarrow {}_p \pi_{i+2}(S^{2m+1})$  は、 $i < 2pm - 3$  のとき、 $p$ 成分の同型あり、 $i = 2mp - 3$  のとき、( $p$ 成分の?) 全射である。

$$(2.1.8) \quad S_{p-1}^{2m} \rightarrow \Omega S^{2m+1} \xrightarrow{h_p} \Omega S^{2pm+1}, \quad S^{2m-1} \rightarrow \Omega S_{p-1}^{2m} \xrightarrow{T_p} \Omega S^{2pm-1}.$$

$$(2.2.1) \quad S_{p-1}^2 \rightarrow S_\infty^2 \xrightarrow{h_p} S_\infty^{2p}.$$

$H^*(S_\infty^2)$  は divided polynomial algebra であり、 $H^*(\mathbb{C}P^\infty)$  は polynomial algebra であるので、コホモロジー類において、関係式  $f_\infty^*(e^{2k}) = k! e^{2k}$  が成り立つ。特に、 $2(p-1)$ -skeleton の写像  $f_{p-1}: S_{p-1}^2 \rightarrow \mathbb{C}P^{p-1} = S^{2p-1}/S^1$  は、 $p$ -同値になる。 $f_{p-1}$  は、 $S^1$ -bundle map  $\tilde{f}_{p-1}: \tilde{S}_{p-1}^2 \rightarrow S^{2p-1}$  を誘導し、これもまた  $p$ -同値である。よって、次の  $p$ -同値を得る。

$$(2.2.3) \quad \tilde{g}: S^{2p-1} \rightarrow \tilde{S}_{p-1}^2 \text{ s.t. } \deg(\tilde{f}_{p-1} \circ \tilde{g}) \equiv 1 \pmod{p}.$$

fibration (2.2.2) から、次の mod  $p$  fibration を得る。

$$(2.2.4) \quad S^{2p-1} \xrightarrow{\tilde{g}} \Omega \tilde{S}^3 \xrightarrow{\tilde{h}_p} \Omega S^{2p+1}.$$

**Prop 2.2** (2.2.4) の mod  $p$  fibration は、次の mod  $p$  完全列を誘導する。

$$\dots \xrightarrow{\Delta} \pi_i(S^{2p-1}) \xrightarrow{\tilde{g}} \pi_{i+1}(\tilde{S}^3) \xrightarrow{\tilde{h}_p} \pi_{i+1}(S^{2p+1}) \xrightarrow{\Delta} \pi_{i-1}(S^{2p-1}) \xrightarrow{\tilde{g}} \dots$$

この完全列は、 $m=1$  のときには、Th 2.2 の  $IJ\Delta$ -sequence に同値である。実際、 $Q_2^1$  は  $\Omega^3 S^3$  にホモトピー同値であるが、合成の関係式 (relations with the composition) は、(2.1.11) よりもう少しいものである。

$$(2.2.5) \quad \tilde{G}(\alpha \circ \xi) = \tilde{G}(\alpha) \circ E\xi \text{ for } \alpha \in \pi_i(S^{2p-1}), \xi \in \pi_j(S^i)$$

$$\tilde{H}_p(\alpha \circ E\xi) = \tilde{H}_p(\alpha) \circ E\xi \text{ for } \alpha \in \pi_{i+1}(\tilde{S}^3), \xi \in \pi_j(S^i)$$

$$\Delta(\alpha \circ E^2\xi) = \Delta(\alpha) \circ \xi \text{ for } \alpha \in \pi_{i+1}(S^{2p+1}), \xi \in \pi_j(S^{i-1})$$

写像  $\tilde{g}: S^{2p-1} \rightarrow \Omega \tilde{S}^3$  のホモトピーファイバーの包含写像を、 $\partial_p: \Omega^2 S^{2p+1} \rightarrow S^{2p-1}$  とする。Selic [27] の中で、 $\partial_p$  は (2.1.12) の写像  $r_p$  にホモトピックであることが示された。このとき、Prop 2.2 の  $\Delta$  に対して、Lem 2.1 が成り立っている。

$$(2.2.6) \quad \Delta(E^2\xi) = p\xi, E^2(\Delta\xi) = p\xi.$$

合成  $g = \rho_{p-1} \circ \tilde{g}: S^{2p-1} \rightarrow \tilde{S}_{p-1}^2 \rightarrow S_{p-1}^2$  の mapping cone を、 $K' = S_{p-1}^2 \cup_g e^{2p}$  とする。

$\mathbb{C}P^p = \mathbb{C}P^{p-1} \cup e^{2p}$  は、 $S^1$ -bundle map  $S^{2p-1} \rightarrow \mathbb{C}P^{p-1}$  の mapping cone なので、写像  $f_{p-1}: S_{p-1}^2 \rightarrow \mathbb{C}P^{p-1}$  は、

$\bar{f}: K' = S_{p-1}^2 \cup_g e^{2p} \rightarrow \mathbb{C}P^p = \mathbb{C}P^{p-1} \cup e^{2p}$  に拡張され、top cell は  $\deg \equiv 1 \pmod{p}$  で写される。 $x \in H^2(X; \mathbb{Z}_p)$  に対して、 $x^p = \mathcal{P}^1(x)$  なので、 $X = \mathbb{C}P^p$  の bottom cell と top cell の向きをそれぞれ  $e^2$  と  $e^{2p}$  とすると、

$$(2.2.7) \quad \mathcal{P}^1(e^2) = (e^2)^p = e^{2p}$$

が成り立つ。 $\bar{f}$  に対する  $\mathcal{P}^1$  の自然性から、 $X = K' = S_{p-1}^2 \cup_g e^{2p}$  に対しても、上の等式が成立する。

$$(2.2.8) \quad G: S^{2p} \rightarrow S^3$$

を、 $i \circ g: S^{2p-1} \rightarrow S_{p-1}^2 \rightarrow \Omega \tilde{S}^3$  の adjoint とし、 $K = S^3 \cup_G e^{2p+1}$  を  $G$  の mapping cone とする。このとき、bottom cell  $e^3$  と top cell  $e^{2p+1}$  上の degree 1 の写像  $SK' \rightarrow K$  を得る。 $\mathcal{P}^1$  の自然性から、次が成り立つ。

$$(2.2.9) \quad \mathcal{P}^1(e^3) = e^{2p+1} \text{ in } H^*(K; \mathbb{Z}_p), \quad K = S^3 \cup_G e^{2p+1}.$$

$G$  の homotopy class  $[G]$  は  $\pi_{2p}(S^3) \simeq \pi_{2p}(\tilde{S}^3) \simeq \mathbb{Z}_p$  に属している。Th 2.2 は、ある整数  $a \equiv 1 \pmod{p}$  に対して、 $a[G]$  の位数が  $p$  であることを示す。ここで、(2.2.3) の写像  $\tilde{g}$  を、その  $a$  倍と置き換えると、homotopy class  $[G]$  と  $[i \circ g]$  は位数  $p$  で、(2.2.3) と (2.2.9) を満たしている。この class を次のように書く。

$$(2.2.10) \quad \alpha_1(3) = [G] \in \pi_{2p}(S^3) \simeq \mathbb{Z}_p.$$

class  $[i \circ g] \in \pi_{2p-1}(S_p^2) \simeq \pi_{2p-1}(S_\infty^2)$  の位数は  $p$  なので、写像  $i \circ g: S^{2p-1} \rightarrow S_p^2$  は、次の写像に拡張される。

$$\bar{g}: (Y^{2p}, S^{2p-1}) \rightarrow (S_p^2, S_{p-1}^2).$$

$$(2.2.2) \quad S_{p-1}^2 \xrightarrow{\tilde{g}} \tilde{S}_\infty^2 \xrightarrow{\tilde{h}_p} S_\infty^{2p}.$$

**Th 2.2** (2.1.9) の mod  $p$  fibration は、次の  $IJ\Delta$ -sequence を誘導し、これは、mod  $p$  で完全である。

$$\dots \xrightarrow{\Delta} \pi_{i+2}(S^{2pm-1}) \xrightarrow{I} \pi_i(Q_2^{2m-1}) \xrightarrow{J} \pi_{i+3}(S^{2pm+1}) \xrightarrow{\Delta} \pi_{i+1}(S^{2pm-1}) \xrightarrow{I} \dots$$

$$\dots \xrightarrow{\Delta} \pi_{i+2}(S^{2p-1}) \xrightarrow{\tilde{g}} \pi_{i+3}(\tilde{S}^3) \xrightarrow{\tilde{h}_p} \pi_{i+3}(S^{2p+1}) \xrightarrow{\Delta} \pi_{i+1}(S^{2p-1}) \xrightarrow{\tilde{g}} \dots$$

$$(2.1.11) \quad I(\alpha \circ E^2\xi) = I(\alpha) \circ \xi \text{ for } \alpha \in \pi_{i+2}(S^{2pm-1}), \xi \in \pi_j(S^i)$$

$$J(\alpha \circ \xi) = J(\alpha) \circ E^3\xi \text{ for } \alpha \in \pi_i(Q_2^{2m-1}), \xi \in \pi_j(S^i)$$

$$\Delta(\alpha \circ E^3\xi) = \Delta(\alpha) \circ E\xi \text{ for } \alpha \in \pi_{i+3}(S^{2pm+1}), \xi \in \pi_j(S^i)$$

$$H_p(\alpha \circ E\xi) = H_p(\alpha) \circ E\xi \text{ for } \alpha \in \pi_{i+1}(S^{2m+1}), \xi \in \pi_j(S^i)$$

[27] P.Selic, A Decomposition of  $\pi_*(S^{2p+1}; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ , Topology 17 (1978), 407-412.

$$(2.1.12) \quad \mu^p \simeq i^2 \circ r_m: (\Omega^2 S^{2m+1}, S^{2m-1}) \rightarrow (\Omega^2 S^{2m+1}, S^{2m-1})$$

**Lem 2.1** 次の 2 つの合成は、どちらも  $p$  倍する写像である。

$$\Delta \circ E^2: {}_p \pi_i(S^{2pm-1}) \rightarrow {}_p \pi_{i+2}(S^{2pm+1}) \rightarrow {}_p \pi_i(S^{2pm-1}),$$

$$E^2 \circ \Delta: {}_p \pi_{i+2}(S^{2pm+1}) \rightarrow {}_p \pi_i(S^{2pm-1}) \rightarrow {}_p \pi_{i+2}(S^{2pm+1}).$$

$$\text{Th 2.3} \quad p^m({}_p \pi_i(S^{2m+1})) = 0.$$

$$(2.2.3) \quad \tilde{g}: S^{2p-1} \rightarrow \tilde{S}_{p-1}^2 \text{ s.t. } \deg(f_{p-1} \circ \tilde{g}) \equiv 1 \pmod{p}.$$

$$(2.2.9) \quad \mathcal{P}^1(e^3) = e^{2p+1} \text{ in } H^*(K; \mathbb{Z}_p), \quad K = S^3 \cup_G e^{2p+1}.$$

**Lem 2.3** top cell 上の  $\bar{g}$  の degree は mod  $p$  で  $-1$  である。

Proof. 次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccccc}
 \pi_{2p-1}(S^{2p-1}) & \xrightarrow{\tilde{g}_*} & \pi_{2p-1}(\widetilde{S_{p-1}^2}) & \xrightarrow{\widetilde{f_{p-1}}_*} & \pi_{2p-1}(S^{2p-1}) \\
 \downarrow & & \rho_{p-1*} \downarrow & & \downarrow \cong \\
 \pi_{2p-1}(S^{2p-1}) & \xrightarrow{g_*} & \pi_{2p-1}(S_{p-1}^2) & \xrightarrow{f_{p-1}*} & \pi_{2p-1}(\mathbb{C}P^{p-1}) \\
 \partial \uparrow \times p & & \partial \uparrow & & \partial \uparrow \cong \\
 \pi_{2p}(Y^{2p}, S^{2p-1}) & \xrightarrow[\times x]{\bar{g}_*} & \pi_{2p}(S_p^2, S_{p-1}^2) & \xrightarrow[\times p!]{f_p*} & \pi_{2p}(\mathbb{C}P^p, \mathbb{C}P^{p-1})
 \end{array}$$

$a$  を  $\tilde{f}_{p-1*} \circ \tilde{g}_*$  の degree とすると、(2.2.3) により  $a \equiv 1 \pmod{p}$  である。 $x$  を  $\bar{g}_*$  の degree とする。上の図式の可換性から  $p \times a = x \times p!$  である。よって、 $x = a/(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$  である。■

Prop 2.2 の mod  $p$  完全列の中で、 $i+1 \neq 3$  に対して、 $\pi_{i+1}(\widetilde{S^3})$  を  $\pi_{i+1}(S^3)$  で置き換えることができる。このと

き、準同型  $\tilde{G}, \tilde{H}_p$  はそれぞれ、次の写像によって与えられる  $G, H_p$  に置き換えられる。 $S^{2p-1} \xrightarrow{g} S_\infty^2 \xrightarrow{h_p} S_\infty^{2p}$ .

shrinking map  $\pi: Y^{2p} \rightarrow S^{2p} = Y^{2p}/S^{2p-1}$  は次の全射を誘導する。 $\pi_{2p}(S^{2p}) \rightarrow [Y^{2p}, S^{2p}] \simeq \mathbb{Z}_p$ .

このとき、 $\pi^*(a \lrcorner_{2p}) = [\pi] = \pi^*(\lrcorner_{2p})$  であるための必要十分条件は、 $a \equiv 1 \pmod{p}$  である。Lem 2.3 は、  
 $\bar{g} \simeq -\pi: Y^{2p} \rightarrow S^{2p}$  を示し、次のホモトピー可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccccc}
 S^{2p-1} & \xrightarrow{i} & Y^{2p} & \xrightarrow{\pi} & S^{2p} \\
 \downarrow & & \bar{g} \downarrow & & \downarrow -i \\
 S^{2p-1} & \xrightarrow{g} & S_\infty^2 & \xrightarrow{h_p} & S_\infty^{2p}.
 \end{array}$$

(2.2.11)

**Th 2.4** 次の列は  $i+1 \neq 3$  のとき、mod  $p$  で完全である。

$$\dots \xrightarrow{H_p} \pi_{i+2}(S^{2p+1}) \xrightarrow{\Delta} \pi_i(S^{2p-1}) \xrightarrow{G} \pi_{i+1}(S^3) \xrightarrow{H_p} \pi_{i+1}(S^{2p+1}) \xrightarrow{\Delta} \dots$$

ここで、 $G$  は  $G(\xi) = \alpha_1(3) \circ E(\xi)$  for  $\xi \in \pi_i(S^{2p-1})$  で与えられ、Hopf invariant  $H_p$  は、次を満たす。

$$H_p \{\alpha_1(3), p \lrcorner_{2p}, E(\xi)\}_1 = -E^2(\xi) \text{ for } \xi \in \pi_i(S^{2p-1}) \text{ with } p \cdot \xi = 0.$$

Proof.  $g$  の adjoint は  $\alpha_1(3)$  を表わし、最初の関係が成り立つ。 $\xi$  の coextension  $\tilde{\xi}$  に対して、 $\bar{g}_*(\tilde{\xi})$  の adjoint は  $\{\alpha_1(3), p \lrcorner, E(\xi)\}_1$  に属し、 $\pi_*(\tilde{\xi})$  の adjoint は  $E^2(\xi)$  である。よって、(2.2.11) の可換性から 最後の関係が成り立つ。■

次の lemma は、Th 2.4 の中で、準同型  $\Delta$  を調べるために適用される。

**Lem 2.4**  $\xi \in \pi_i(S^{2p-1})$  に対して、 $E^2(\xi) = 0$  ならば、 $\xi$  は  $\Delta$  の像である。

Proof.  $E(G(\xi)) = E(\alpha_1(3)) \circ E^2(\xi) = 0$  なので、(2.1.2) から  $G(\xi) = 0$  がある。Th 2.4 の列の完全性により

Lemma が成り立つ。■

### 2.3 Representation of invariants

[38] (On Iterated Suspensions I,II,III) の中で、 $\pi_i(Q_2^{2m-1})$  の invariants について、以下の表現を使った。

invariant  $x \in \pi_i(Q_2^{2m-1})$  に対して、 $x = I(\xi)$  となる元  $\xi \in \pi_{i+2}(S^{2pm-1})$  が存在して、stable class  $\xi = E^\infty(\xi')$  が  $p$  で割り切れないとき、(2.3.1)  $x = Q^m(\xi)$  と書くことにする。また、 $y \in \pi_i(Q_2^{2m-1})$  に対して、stable class  $\eta = E^\infty(J(y))$  が非自明のとき、(2.3.2)  $y = \bar{Q}^m(\eta)$  と書くことにする。

写像  $\tilde{g}: S^{2p-1} \rightarrow \Omega \widetilde{S^3}$  のホモトピーファイバーの包含写像を、 $\partial_p: \Omega^2 S^{2p+1} \rightarrow S^{2p-1}$  とする。Selic [27] の中で、 $\partial_p$  は (2.1.12) の写像  $r_p$  にホモトピックであることが示された。このとき、Prop 2.2 の  $\Delta$  に対して、Lem 2.1 が成り立っている。

$$(2.2.6) \quad \Delta(E^2 \xi) = p \xi, \quad E^2(\Delta \eta) = p \eta.$$

合成  $g = \rho_{p-1} \circ \tilde{g}: S^{2p-1} \rightarrow S_{p-1}^2 \rightarrow S_{p-1}^2$  の mapping cone を、 $K' = S_{p-1}^2 \cup_g e^{2p}$  とする。

$\mathbb{C}P^p = \mathbb{C}P^{p-1} \cup e^{2p}$  は、 $S^1$ -bundle map  $S^{2p-1} \rightarrow \mathbb{C}P^{p-1}$  の mapping cone なので、写像  $f_{p-1}: S_{p-1}^2 \rightarrow \mathbb{C}P^{p-1}$  は、

$\bar{f}: K' = S_{p-1}^2 \cup_g e^{2p} \rightarrow \mathbb{C}P^p = \mathbb{C}P^{p-1} \cup e^{2p}$  に拡張され、top cell は  $\deg \equiv 1 \pmod{p}$  で写される。 $x \in H^2(X; \mathbb{Z}_p)$  に對して、 $x^p = P^1(x)$  なので、 $X = \mathbb{C}P^p$  の bottom cell と top cell の向きをそれぞれ  $e^2$  と  $e^{2p}$  とすると、

$$(2.2.7) \quad P^1(e^2) = (e^2)^p = e^{2p}$$

が成り立つ。 $\bar{f}$  に対する  $P^1$  の自然性から、 $X = K' = S_{p-1}^2 \cup_g e^{2p}$  に対しても、上の等式が成立する。

$$(2.2.8) \quad G: S^{2p} \rightarrow S^3$$

を、 $i \circ g: S^{2p-1} \rightarrow S_{p-1}^2 \rightarrow \Omega S^3$  の adjoint とし、 $K = S^3 \cup_G e^{2p+1}$  を  $G$  の mapping cone とする。このとき、bottom cell  $e^3$  と top cell  $e^{2p+1}$  上の degree 1 の写像  $SK' \rightarrow K$  を得る。 $P^1$  の自然性から、次が成り立つ。

$$(2.2.9) \quad P^1(e^3) = e^{2p+1} \text{ in } H^*(K; \mathbb{Z}_p), \quad K = S^3 \cup_G e^{2p+1}.$$

[38] H.Toda. On Iterated Suspensions I,II,III, J. Math. Kyoto Univ. 5 (1966), 87-142,209-250, 8(1968),101-130.

$Q^m(\xi)$  と  $\bar{Q}^m(\eta)$  はどちらも **stable type** と呼ばれる。これらの invariants は stable classes  $\xi$  または  $\eta$  によってでは一意に定まらないことに注意する。 $Q^m(\xi)$  は  $\xi'$  の選び方による。 $\bar{Q}^m(\eta)$  は indeterminacy が  $\ker(E^\infty \circ J)$  である。

他方、Moore [17] により与えられた invariants の表現を用いる。

(2.1.6) から次の図式を up to non-zero mod  $p$  coefficients of  $i^2, i^3$  でホモトピー可換にする写像

(2.3.3)  $g_m : Y^{2pm-2} \rightarrow Q_2^{2m-1}$  を選ぶことができる。

$$\begin{array}{ccccc} S^{2pm-3} & \xrightarrow{i} & Y^{2pm-2} & \xrightarrow{\pi} & S^{2pm-2} \\ i^2 \downarrow & & g_m \downarrow & & \downarrow i^3 \\ \Omega^2 S^{2pm-1} & \longrightarrow & Q_2^{2m-1} & \longrightarrow & \Omega^3 S^{2pm+1}. \end{array}$$

(2.3.4) 対応するホモトピー群の図式を考えることで次を得る。

**Lem 2.5**  $E^2 : \pi_p(S^{2pm-3}) \xrightarrow{p} \pi_{i+2}(S^{2pm-1})$  と  $E^4 : \pi_{i-1}(S^{2pm-3}) \xrightarrow{p} \pi_{i+3}(S^{2pm+3})$  が全射ならば、

$g_m : \pi_p(Y^{2pm-2}) \xrightarrow{p} \pi_i(Q_2^{2m-1})$  も全射である。

$\gamma \in \pi_i(Y^{2pm-2})$  の像  $g_m(\gamma) \in \pi_i(Q_2^{2m-1})$  のことを、 $\gamma$  による **Moore represented** または、単に **M-represented** と呼ぶ。 $\bar{g} : Y^{2p} \rightarrow \Omega S^3$  の adjoint を次で表す。

(2.3.5)  $G_1 : Y^{2p+1} = S^{2p} \cup_p e^{2p+1} \rightarrow S^3$ .

この写像  $G_1$  は (2.3.3) の  $g_1 : Y^{2p-2} \rightarrow Q_2^1$  の代わりに使われる。

$\gamma \in \pi_{i+1}(Y^{2p+1})$  の像  $G_1(\gamma) \in \pi_{i+1}(S^3)$  のことを  $\gamma$  による **purely M-represented** と呼ぶ。

## 2.4 Primary computations

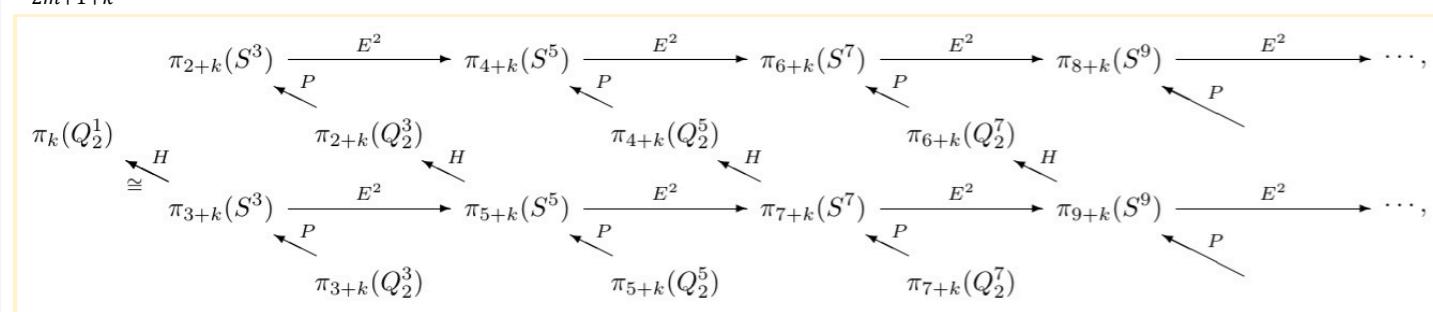
簡単のため、 $p$ -component の記号を次のように省略する。

(2.4.1)  $\pi_i(S^{2m+1}) = \pi_i(S^{2m+1}), \pi_i(\tilde{S}^3) = \pi_i(\tilde{S}^3), \pi_i(Q_2^{2m-1}) = \pi_i(Q_2^{2m-1})$ .

EHP-sequence (2.1.3) の完全性を利用する。

unstable groups の計算は、次の computing diagram と呼ばれる図式を使うことにより、 $k$ -stem groups

$\pi_{2m+1+k}(S^{2m+1})$  を  $k$  に関して帰納的に行う。



これから、 $k < pq - 2, q = 2(p - 1)$  に対して、 $k$ -stem unstable groups  $\pi_{n+k}(S^n)$  の計算を行う。

最初に stable group の結果を引用する。

(2.4.2)  $\pi_{rq-1}^S = \{\alpha_r\} \simeq \mathbb{Z}_p$  for  $1 \leq r \leq p - 1$

$\pi_k^S = 0$  otherwise for  $0 < k < pq - 2$ .

ここで、 $\bar{\alpha}_1$  は  $\alpha_1(3) \in \pi_{2p}(S^3)$  の stable class であり、 $r > 1$  に対して、 $\alpha_r$  は帰納的に次で定義される。

(2.4.3)  $\alpha_r \equiv \{\alpha_1, p_1, \alpha_{r-1}\} \bmod \alpha_1 \circ \pi_{(r-1)q}^S$ .

この範囲の invariant は全て stable type であり、Prop 2.1 により計算される。computation diagram において、自明な群  $\pi_i(Q_2^{2m-1}) = 0$  を消去し、invariants の非自明な群をその生成元に置き換える。

$k = q - 1 = 2p - 3$  のときに、diagram は次のようになる。

[17] J.C.Moore, The double suspension and  $p$ -primary components of the homotopy groups of spheres, Boll. Soc. Mat. Mexicana, 1 (1956), 28-37.

(2.1.3)  $\dots \xrightarrow{E^2} \pi_{i+3}(S^{2m+1}) \xrightarrow{H} \pi_i(Q_2^{2m-1}) \xrightarrow{P} \pi_i(S^{2m-1}) \xrightarrow{E^2} \pi_{i+2}(S^{2m+1}) \xrightarrow{H} \dots$

**Prop 2.1**  $i < 2p^2m - 3$  に対して、次の split 完全列を得る。

$0 \rightarrow \pi_{i-2pm+3}^S \otimes \mathbb{Z}_p \rightarrow \pi_i(Q_2^{2m-1}) \rightarrow \text{Tor}(\pi_{i-2pm+2}^S, \mathbb{Z}_p) \rightarrow 0$ .

$$Q^1(\iota) \xleftarrow{H} \pi_{q+2}(S^3) \xrightarrow{E^2} \pi_{q+4}(S^5) \xrightarrow{E^2} \pi_{q+6}(S^7) \xrightarrow{E^2} \cdots$$

ここで  $m \geq 1$  に対して、 $H(\pi_{2m+q}(S^{2m+1})) = 0$ かつ  $P(\pi_{2m+q}(Q_2^{2m+1})) = 0$  なので、 $E^2$  は同型である。

$\alpha_1(n) \in \pi_{q+n-1}(S^n)$  を次で定義する。

$$\alpha_1(n) = E^{n-3}\alpha_1(3) \text{ for } n > 3.$$

このとき、 $m \geq 1$  に対して、 $\pi_{q+2m}(S^{2m+1})$  は  $\alpha_1(2m+1)$  で生成される。

次に、 $k = 2q - 2, k = 2q - 1$  に対して、unstable groups が現れ、図式は次のようにになる。

$$\begin{array}{ccccccc} Q^1(\alpha_1) & & & & & & \\ \downarrow H & & & & & & \\ \pi_{2q+1}(S^3) & \xrightarrow{E^2} & \pi_{2q+3}(S^5) & \xrightarrow{E^2} & \pi_{2q+5}(S^7) & \xrightarrow{E^2} & \cdots \\ & \downarrow P & & & & & \\ \overline{Q}^1(\alpha_1) & & & & & & \\ \downarrow H & & \downarrow Q^2(\iota) & & & & \\ \pi_{2q+2}(S^3) & \xrightarrow{E^2} & \pi_{2q+4}(S^5) & \xrightarrow{E^2} & \pi_{2q+6}(S^7) & \xrightarrow{E^2} & \cdots \end{array}$$

Th 2.4 により、 $\alpha_2(3) = \{\alpha_1(3), p\iota_{2p}, E\alpha_1(2p-1)\} \in \pi_{2q+2}(S^3)$  は、 $\overline{Q}^1(\alpha_1)$  に対応している。また、 $\alpha_2(3)$  の stable class は  $\alpha_2$  である。従って、下の行の  $E^2$  は同型であり、 $H(\pi_{2q+4}(S^5)) = 0$  である。よって、 $P \neq 0$  かつ  $\pi_{2q+3}(S^5) = 0$  であり、 $\pi_{2q-2}^S = 0$  であることが分かる。 $p > 3$  ならば、新しい stable generator  $\beta_1 \in {}_p\pi_{pq-2}^S$  が現れるまで、この議論を続けることができる。

$n \geq 3, 1 \leq r < p$  に対して、 $\alpha_r(n) \in \pi_{n+rq-1}(S^n)$  を帰納的に次で定義する。

$$\alpha_r(3) = \{\alpha_1(3), p\iota_{2p}, \alpha_{r-1}(2p)\} \text{ and } \alpha_r(n) = E^{n-3}\alpha_r(3).$$

このとき、次を得る。

Th 2.5  $k < pq - 2$  に対する非自明な unstable  $k$ -stem group は下記の通りである。

$${}_p\pi_{2m+rq}(S^{2m+1}) \simeq \mathbb{Z}_p\{\alpha_r(2m+1)\} \text{ for } 1 \leq r \leq p-1 \text{ and } 1 \leq m,$$

$${}_p\pi_{2pm-1}(S^{2m+1}) \simeq \mathbb{Z}_p\{P(Q^{m+1}(\iota))\} \text{ for } 1 < m < p,$$

$${}_p\pi_{2m+rq-1}(S^{2m+1}) \simeq \mathbb{Z}_p\{P(\overline{Q}^{m+1}(\alpha_{r-m-1}))\} \text{ for } 1 < r < p \text{ and } 1 \leq m < r-1,$$

次に、Moore 空間  $Y^{n+1} = S^n \cup_p e^{n+1}$  の低次元ホモトピーを考える。

$$(2.4.4) S^n \xrightarrow{f_p} S^n \xrightarrow{i} Y^{n+1} \xrightarrow{\pi} S^{n+1} \xrightarrow{f_p} S^{n+1} \xrightarrow{i} Y^{n+2} \xrightarrow{\pi} \cdots$$

をコファイバー列とする。写像  $G: S^{2p} \rightarrow S^3$  は、位数  $p$  の生成元  $\alpha_1(3) \in \pi_{2p}(S^3)$  を表わすので、次のような  $G$  の  $Y^{2p+1}$  への拡張が存在する。

$$(2.4.5) \overline{G}: Y^{2p+1} \rightarrow S^3 \text{ s.t. } G = \overline{G} \circ i.$$

合成  $f_p \circ \overline{G}: Y^{2p+1} \rightarrow S^3 \rightarrow S^3$  を考える。 $S^3$  は H-space であり、 $Y^{2p+1}$  は co-H-space である。

このとき、 $f_p \circ \overline{G}$  は  $\overline{G}$  の  $p$  倍にホモトピックであり、 $Y^{2p+1}$  の恒等写像の  $p$  倍も同じであるため、ホモトピックゼロとなる。そこで、次のような  $\overline{G}$  の coextension  $A$  を得る。

$$A: Y^{2p+2} \rightarrow Y^4 \text{ s.t. } \pi \circ A = E\overline{G}: Y^{2p+2} \rightarrow S^4 \text{ and } \pi \circ A \circ i = EG.$$

$n \geq 4, q = 2(p-1)$  に対して、 $A$  の suspension とそれらの類を次のように書く。

$$(2.4.6) A(n): Y^{n+q} \rightarrow Y^n \text{ and } \alpha(n) \in [Y^{n+q}, Y^n].$$

これらのことを、それぞれ、Adams map, Adams class と呼ぶ。

$\alpha(n) = \alpha^1(n)$  の  $r$ -fold composition を次のように帰納的に定義する。

$$\alpha^r(n) = \alpha(n) \circ \alpha^{r-1}(n+q) \in [Y^{n+rq}, Y^n] \text{ for } n \geq 4, r > 1.$$

Th 2.4 次の列は  $i + 1 \neq 3$  のとき、mod  $p$  で完全である。

$$\cdots \xrightarrow{H_p} \pi_{i+2}(S^{2p+1}) \xrightarrow{\Delta} \pi_i(S^{2p-1}) \xrightarrow{G} \pi_{i+1}(S^3) \xrightarrow{H_p} \pi_{i+1}(S^{2p+1}) \xrightarrow{\Delta} \cdots$$

ここで、 $G$  は  $G(\xi) = \alpha_1(3) \circ E(\xi)$  for  $\xi \in {}_p\pi_i(S^{2p-1})$  で与えられ、Hopf invariant  $H_p$  は、次を満たす。

$$H_p\{\alpha_1(3), p\iota_{2p}, E(\xi)\}_1 = -E^2(\xi) \text{ for } \xi \in {}_p\pi_i(S^{2p-1}) \text{ with } p \cdot \xi = 0.$$

$\alpha$ -series の  $r$ -th member  $\alpha_r(n)$  は、次のように定義される。

$$\alpha_r(n) = \pi \circ \alpha^r(n) \circ i \in \pi_{n+rq-1}(S^n) \text{ for } n \geq 4 \text{ and } r \geq 1,$$

ここで、 $i, \pi$  は、それぞれ、 $i: S^{n+rq-1} \rightarrow Y^{n+rq}$ ,  $\pi: Y^n \rightarrow S^n$  の類を同じ記号で表わしたものである。また、次の式による  $\alpha_r(3)$ ,  $r > 1$  の定義を加えなければならない。

$$\alpha_r(3) = \bar{G}_*(\alpha^{r-1} \circ i).$$

$\alpha^{r-1}(n+q) \circ i$  は、 $\alpha_{r-1}(n+q-1)$  の coextension  $S^{n+rq-1} \rightarrow Y^{n+q}$  を表わすので、 $n \geq 3$  に対して、

$$(2.4.7) \quad \alpha_r(n) \equiv \{\alpha_1(n), p_{\pi_{n+q-1}} \circ \alpha_{r-1}(n+q-1)\} \pmod{\alpha_1(n) \circ \pi_{n+rq-1}(S^{n+q-1})}.$$

これは、(2.4.3) の定義と適合し、次を得る。

$$(2.4.8) \quad \alpha_r = E^\infty \alpha_r(n) \in \pi_{rq-1}^S \text{ for } n \geq 3.$$

$[Y, Y]_k = \lim_n [Y^{n+k}, Y^n]$  を Moore spectrum  $Y = \{Y^{n+1}\}$  の stable self homotopy group とする。これは、次の 2 つの完全列により計算される。

$$\begin{aligned} \pi_k^S &\xrightarrow{f_{p^*}} \pi_k^S \xrightarrow{i_*} \pi_k(Y) \xrightarrow{\pi_{k-1}^S} \pi_{k-1}^S \xrightarrow{f_{p^*}} \pi_{k-1}^S, \\ \pi_{k-1}^S(Y) &\xrightarrow{f_p^*} \pi_{k-1}^S(Y) \xrightarrow{\pi^*} [Y, Y]_k \xrightarrow{i^*} \pi_k^S(Y) \xrightarrow{f_p^*} \pi_k^S(Y). \end{aligned}$$

ここで、sphere spectrum  $S = \{S^n\}$  に対して、 $\pi_k^S = [S, S]_k$ ,  $\pi_k^S(Y) = [S, Y]_k$  である。

$f_{p^*}, f_p^*$  は  $p$  倍なので、次の split 完全列を得る。

$$(2.4.9) \quad 0 \rightarrow \pi_k^S \otimes \mathbb{Z}_p \xrightarrow{i_*} \pi_k(Y) \xrightarrow{\pi^*} \text{Tor}(\pi_{k-1}^S, \mathbb{Z}_p) \rightarrow 0, \quad 0 \rightarrow \pi_{k-1}^S(Y) \xrightarrow{\pi^*} [Y, Y]_k \xrightarrow{i^*} \pi_k^S(Y) \rightarrow 0.$$

identity class  $1_Y \in [Y, Y]_0$  の位数は  $p$  なので、 $\pi_k^S(Y)$ ,  $[Y, Y]_k$  は  $\mathbb{Z}_p$ -module である。

$0 < r < p$  に対して、 $\pi_{rq-1}^S = \{\alpha_r\}$ ,  $\alpha_r = \pi \alpha^r i$  であり、よって、(2.4.9) から

$$\pi_{rq-1}^S(Y) = \{\delta \alpha^r i\}, \quad \pi_{rq}^S(Y) = \{\alpha^r i\}$$

である。ここで、 $\delta = i \circ \pi \in [Y, Y]_{-1}$  である。

**Prop 2.3**  $[Y, Y]_0 = \{1_Y\} \simeq \mathbb{Z}_p$ ,  $[Y, Y]_{-1} = \{\delta\} \simeq \mathbb{Z}_p$ .

$0 < r < p$  に対して、

$$[Y, Y]_{rq} = \{\alpha^r\} \simeq \mathbb{Z}_p,$$

$$[Y, Y]_{rq-1} = \{\delta \alpha^r, \alpha^r \delta\} \simeq \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p,$$

$$[Y, Y]_{rq-2} = \{\delta \alpha^r \delta\} \simeq \mathbb{Z}_p.$$

他の  $k < pq - 3$  に対して、 $[Y, Y]_k$  は自明である。

$Y^n$  は  $(n-2)$ -連結なので、

$$(2.4.10) \quad E^\infty: [Y^{n+k}, Y^n] \simeq [Y, Y]_k \text{ for } n > k + 3.$$

ここで次のような記法を使うことにする。

stable class  $\xi \in [Y, Y]_k$  が  $E^\infty$  の像であるならば、 $\xi(n) \in [Y^{n+k}, Y^n]$  は、 $E^\infty(\xi(n)) = \xi$  を満たす元を示しているものとする。

同様に、 $\xi \in \pi_k^S$  に対して、 $\xi(n) \in \pi_{n+k}^S(S^n)$  は、 $E^\infty(\xi(n)) = \xi$  を満たすものとする。

この記法  $\xi(n)$  は必ずしも一意的ではないが、それらが存在するときは、 $E(\xi(n)) = \xi(n+1)$  を満たす  $\{\xi(n)\}$  を選ぶことができる。ときどき、 $\xi(n)$  の代わりに、単に  $\xi$  を使うことにする。

$\xi$  in  $S^n$  or  $\xi$  in  $Y^n$ .

### 3 Iterated Suspension and Lemmas

#### 3.1 Homology of iterated suspension fibre

2k-fold iterated suspension  $E^{2k}: \pi_i(S^{2m-1}) \rightarrow \pi_{i+2k}(S^{2m-1+2k})$  は、 canonical inclusion  $i^{2k}: S^{2m-1} \rightarrow \Omega^{2k} S^{2m-1+2k}$  により誘導された準同型に同値である。 $i^{2k}$  の homotopy fiber は、次の path space として与えられる。

$$Q_{2k}^{2m-1} = \Omega(\Omega^{2k} S^{2m-1+2k}, S^{2m-1}).$$

fibration  $Q_{2k}^{2m-1} \rightarrow S^{2m-1} \rightarrow \Omega^{2k} S^{2m-1+2k}$  は次の完全列を誘導する。

$$(3.1.1) \cdots \rightarrow \pi_{i+2k+1}^{2m-1+2k} \xrightarrow{E^{2k}} \pi_i(Q_{2k}^{2m-1}) \xrightarrow{P^{(2k)}} \pi_i^{2m-1} \rightarrow \pi_{i+2k}^{2m-1+2k} \xrightarrow{H^{(2k)}} \cdots,$$

ここで単に  $\pi_j^m = \pi_j(S^n)$  と書いている。3対  $(\Omega^{2k+2h} S^{2m-1+2k+2h}, \Omega^{2k} S^{2m-1+2k}, S^{2m-1})$  から、次の fibration を得る。

$$(3.1.2) Q_{2k}^{2m-1} \xrightarrow{i} Q_{2k+2h}^{2m-1} \xrightarrow{j} \Omega^{2k} Q_{2h}^{2m-1+2k}.$$

よって次の列は完全である。

$$(3.1.3) \cdots \rightarrow \pi_i(Q_{2k}^{2m-1}) \xrightarrow{\partial} \pi_i(Q_{2k+2h}^{2m-1}) \xrightarrow{i_*} \pi_{i+2k}(Q_{2h}^{2m-1+2k}) \xrightarrow{\partial} \pi_{i-1}(Q_{2k}^{2m-1}) \xrightarrow{i_*} \cdots.$$

[4] でよく知られているように、mod  $p$  homology ring  $H_*(\Omega^r S^{n+r})$  は  $\mathbb{Z}_p$  上の free commutative algebra であり、

$\Omega^r S^{n+r}$  から infinite loop space  $Q(S^n) = \lim_s \Omega^s S^{n+s}$  への包含写像は、環準同型の単射を誘導する。[20] で構成さ

れた Dyer-Lashof operation  $Q^j: H_i(\Omega^r S^{n+r}) \rightarrow H_{i+jq}(\Omega^r S^{n+r})$ ,  $q = 2(p-1)$  は、homology suspension と compatible であり、degree  $2j$  の  $x$  に対して  $Q^j(x) = x^p$  である。

$H_*(S^{2m+1}) = \wedge(u)$  から始めて、 $H_*(\Omega S^{2m+1}) = \mathbb{Z}_p[u]$  であり、各基本類  $u$  と homology Bockstein  $\Delta$  に対して、

$$H_*(\Omega^2 S^{2m+1}) = \wedge(u, Q^m u, Q^{pm} u, \dots) \otimes \mathbb{Z}_p[\Delta Q^m u, \Delta Q^{pm} Q^m u, \dots],$$

$$H_*(\Omega^3 S^{2m+1}) = \mathbb{Z}_p[u, Q^m u, \Delta Q^{pm-1} \Delta Q^m u, Q^{pm} Q^m u, \Delta Q^{p(pm-1)} Q^{pm-1} \Delta Q^m u, \dots] \otimes \wedge(\Delta Q^m u, Q^{pm-1} \Delta Q^m u,$$

$$\Delta Q^{pm} Q^m u, Q^{p(pm-1)} Q^{pm-1} \Delta Q^m u, \dots).$$

さらに、 $k < pm$  に対して次を得る。

$$H_*(\Omega^{2k+1} S^{2m+2k-1}) = \mathbb{Z}_p[u, Q^m u, Q^{m+1} u, \dots, Q^{m+k-1} u, \Delta Q^{pm-1} \Delta Q^m u, \dots] \otimes \wedge(\Delta Q^m u, \Delta Q^{m+1} u, \dots,$$

$$\Delta Q^{m+k-1} u, Q^{pm-1} \Delta Q^m u, \dots).$$

2k-fold iterated suspension  $i^{2k}: S^{2m-1} \rightarrow \Omega^{2k} S^{2m+2k-1}$  の homotopy fiber  $Q_{2k}^{2m-1} = \Omega(\Omega^{2k} S^{2m+2k-1}, S^{2m-1})$  の mod  $p$  homology は、fibration  $\Omega^{2k} S^{2m+2k-1} \xrightarrow{i} Q_{2k}^{2m-1} \rightarrow S^{2m-1}$  に対する Wang 完全列により計算される。

このとき、 $i$  は  $H_*$  の全射を誘導し、その kernel は  $(u)$  である。このように、 $H_*(Q_{2k}^{2m+2k-1})$  は誘導された環構造を持ち、次の結果が成り立つ。

$$(3.1.4) H_*(Q_2^{2m-1}) = \mathbb{Z}_p[u, \Delta v_1, v_2, \Delta w, \dots] \otimes (\Delta u, v_1, \Delta v_2, \dots)$$

for  $u \in H_{2pm-2}$ ,  $v_1 \in H_{2p^2 m - 2p - 1}$ ,  $v_2 \in H_{2p^2 m - 2}$ ,  $w \in H_{2p^3 m - 2p^2 - 1}$ .

$$(3.1.5) H_*(Q_{2k}^{2m-1}) = \mathbb{Z}_p[u_0, u_1, \dots, u_{k-1}, \Delta v, \dots] \otimes (\Delta u_0, \Delta u, u_1, \dots, \Delta v_{k-1}, \dots)$$

for  $u_i \in H_{2pm-2+iq}$  ( $0 \leq i \leq k-1$ ) and  $v \in H_{2p^2 m - 2p - 1}$ .

$\mathcal{P}_*^i: H_n(X) \rightarrow H_{n-iq}(X)$  を mod  $p$  dual Steenrod operation とする。このとき、[20] により  $Q^j$  と  $\mathcal{P}_*^i$  における Nishida の関係がある。特に次が成り立つ。

$$(3.1.6) \mathcal{P}_*^1 Q^{s+1} = sQ^s, \mathcal{P}_*^1 \Delta Q^{s+1} = (s+1)\Delta Q^s + Q^s \Delta \quad (s > 0)$$

$$(3.1.7) \mathcal{P}_*^p Q^{s+p} = -\binom{s(p-1)}{p} Q^s + Q^{s+1} \mathcal{P}_*^1$$

$$(3.1.8) \mathcal{P}_*^p \Delta Q^{s+p} = -\binom{s(p-1)-1}{p} \Delta Q^s + \Delta Q^{s+1} \mathcal{P}_*^1 + \binom{s(p-1)-1}{p-1} Q^s \Delta$$

[4] E.Dyer and R.Lashof, Homology of iterated loop spaces, Ann. of Math. 84 (1962), 35-88.

[20] G.Nishida, Cohomology operations in iterated loop space, Proc.Japan Acad. 44(1967), 839-842.

[20] G.Nishida, Cohomology operations in iterated loop space, Proc.Japan Acad. 44(1967), 839-842.

(3.1.6)を適用することにより次を得る。

$$\mathcal{P}_*^1(\Delta Q^{pm}Q^m u) = (pm\Delta Q^{pm-1} + Q^{pm-1}\Delta)Q^m u = Q^{pm-1}\Delta Q^m u,$$

$$\mathcal{P}_*^1(Q^{m+i}u) = (m+i-1)Q^{m+i-1}u,$$

$$\mathcal{P}_*^1(\Delta Q^{m+i}u) = ((m+i)\Delta Q^{m+i-1} + Q^{m+i-1}\Delta)u = (m+i)\Delta Q^{m+i-1}u.$$

$\mathcal{P}_*^1$  の自然性により、対応する元

$$u_i = i_*(Q^{m+i}u) \in H_{2mp-2+iq}(Q_{2k}^{2m-1}; \mathbb{Z}_p) \quad (0 \leq i < k), \quad v = i_*(Q^{pm}Q^m u) \in H_{2p^2m-2}(Q_2^{2m-1}; \mathbb{Z}_p)$$

に対して、同じ関係が成り立つ。よって、次の定理を得る。

**Th 3.1** (1)  $\text{degree} < 2p^3m - 2p^2 - 4$ ,  $u_0 \in H_{2pm-2}$ ,  $v \in H_{2p^2m-2}$  に対して、

$$H_*(Q_2^{2m-1}; \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p[u_0, \Delta \mathcal{P}_*^1 \Delta v, v] \otimes \wedge (\Delta u_0, \mathcal{P}_*^1 \Delta v, \Delta v).$$

(2)  $\text{degree} < 2p^2m - 2p - 3$ ,  $u_i \in H_{2pm-2+iq}$  ( $0 \leq i \leq k-1$ ) に対して、

$$H_*(Q_{2k}^{2m-1}; \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p[u_0, u_1, \dots, u_{k-1}] \otimes \wedge (\Delta u_0, \Delta u_1, \dots, \Delta u_{k-1}).$$

ここで、 $0 \leq i \leq k-1$  に対して次の関係が成り立つ。

$$\mathcal{P}_*^1 u_i = (m+i-1)u_{i-1}, \quad \mathcal{P}_*^1 \Delta u_i = (m+i)\Delta u_{i-1}.$$

### 3.2 Simple unstable elements

EHP-sequence に付随する exact coupleにおいて、最初の微分は、 $d_1 = H \circ P: \pi_{i+3}(Q_2^{2m+1}) \rightarrow \pi_i(Q_2^{2m-1})$  である。 $x \in \pi_{i+3}(Q_2^{2m+1})$  の  $d_1$ -image  $d_1(x)$  が非自明で、 $\xi = P(x) \in \pi_{i+3}(S^{2m+1})$  と仮定する。このとき、次を得る。

(3.2.1)  $E^2(\xi) = 0$  and  $\xi \notin \text{Im } E^2$ .

このような元  $\xi$  は simple unstable element と呼ばれる。 $m \not\equiv 0, 1 \pmod{p}$  の場合、collection

$\{x, \xi = P(x), H(\xi) \neq 0\}$  は EHP-sequence, IJΔ-sequence のどちらに対しても独立で、unstable groups の計算の中で消すことができるという意味で、removable であるという。上の differential  $d_1$  は、 $i: Q_2^{2m-1} \rightarrow Q_4^{2m-1}$  の homotopy fiber の inclusion  $d: \Omega^3 Q_2^{2m+1} \rightarrow Q_2^{2m-1}$  によって誘導される。(2.3.3) の写像  $g_m: Y^{2pm-2} \rightarrow Q_2^{2m-1}$  について考える。これから誘導される mod p homology の写像  $g_m$  が top cell の orientation を Th 3.1 のクラス  $u_0$  に写すように  $g_m$  を選ぶ。同様に、 $g_{m+1}: Y^{2p(m+1)-2} \rightarrow Q_2^{2m+1}$  を考え、 $\Omega_0^3 g_{m+1}: Y^{2p(m+1)-5} = Y^{2pm+q-3} \rightarrow \Omega^3 Q_2^{2m+1}$  ( $q = 2(p-1)$ ) を、 $g_{m+1}$  の adjoint とする。 $g_{m+1}$  は degree  $< 4pm - 5$  のとき、mod p 同値であるので、 $m > 1$  に対して、写像  $h_m: Y^{2pm+q-3} \rightarrow Y^{2pm-2}$  が存在して、次の図式がホモトピー可換になる。

$$(3.2.2) \quad \begin{array}{ccc} Y^{2pm+q-3} & \xrightarrow{h_m} & Y^{2pm-2} \\ \Omega_0^3 g_{m+1} \downarrow & & \downarrow g_m \\ \Omega^3 Q_2^{2m+1} & \xrightarrow{d} & Q_2^{2m-1}. \end{array}$$

$K(m, 2) = Y^{2pm-2} \cup_{h_m} CY^{2pm+q-3}$  を、写像  $h_m$  の mapping cone とする。このとき、 $g_m$  は、 $\bar{g}_m: K(m, 2) \rightarrow Q_4^{2m-1}$  に拡張され、次のホモトピー可換図式を得る。

$$(3.2.3) \quad \begin{array}{ccccc} Y^{2pm-2} & \xrightarrow{i'} & K(m, 2) & \xrightarrow{\pi'} & Y^{2pm+q-2} \\ g_m \downarrow & & \bar{g}_m \downarrow & & \downarrow \Omega_0^2 g_{m+1} \\ Q_2^{2m-1} & \xrightarrow{i} & Q_4^{2m-1} & \xrightarrow{j} & \Omega^2 Q_2^{2m+1}. \end{array}$$

ここで、 $\pi'$  は  $K(m, 2)$  の部分複体  $Y^{2pm-2}$  をつぶす写像である。これらの写像  $g_m, g_{m+1}, \bar{g}_m$  は、up to homotopy で一意的である。 $\bar{g}_m$  はまた、degree  $< 4pm - 5$  で、mod p 同値である。

unstable alpha families の他に、計算の前に除外できるいくつかのコレクションがある。元  $\xi \in {}_p \pi_i(S^{2m+1})$  は、 $E^2 \xi = 0$ かつ  $\xi \notin \text{Im } E^2$  のとき simple であるという。 $m \not\equiv 1, 0 \pmod{p}$  のとき、この  $\xi$  は IJΔ-sequence とは独立である。そこで、 $P(x) = \xi$  を満たす不变量  $H(\xi)$  と  $x \in \pi_i(Q_2^{2m-1})$  とともに  $\xi$  を取り除くことができる。これらの 3 つの元のことを simple removable collection と呼ぶ。

$m \not\equiv 1, 0 \pmod{3} \leftrightarrow m = 1 \pmod{3}$ ?

$m \not\equiv 0, 1 \pmod{3} \leftrightarrow m = 2 \pmod{3}$ ?

**Th 2.2** (2.1.9) の mod p fibration は、次の IJΔ-sequence を誘導し、これは、mod p で完全である。

$$\dots \xrightarrow{\Delta} \pi_{i+2}(S^{2pm-1}) \xrightarrow{I} \pi_i(Q_2^{2m-1}) \xrightarrow{J} \pi_{i+3}(S^{2pm+1}) \xrightarrow{\Delta} \pi_{i+1}(S^{2pm-1}) \xrightarrow{I} \dots$$

$$(2.3.3) \quad g_m: Y^{2pm-2} \rightarrow Q_2^{2m-1}$$

**Th 3.1** (1)  $\text{degree} < 2p^3m - 2p^2 - 4$ ,  $u_0 \in H_{2pm-2}$ ,  $v \in H_{2p^2m-2}$  に対して、

$$H_*(Q_2^{2m-1}; \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p[u_0, \Delta \mathcal{P}_*^1 \Delta v, v] \otimes \wedge (\Delta u_0, \mathcal{P}_*^1 \Delta v, \Delta v).$$

(2)  $\text{degree} < 2p^2m - 2p - 3$ ,  $u_i \in H_{2pm-2+iq}$  ( $0 \leq i \leq k-1$ ) に対して、

$$H_*(Q_{2k}^{2m-1}; \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p[u_0, u_1, \dots, u_{k-1}] \otimes \wedge (\Delta u_0, \Delta u_1, \dots, \Delta u_{k-1}).$$

ここで、 $0 \leq i \leq k-1$  に対して次の関係が成り立つ。

$$\mathcal{P}_*^1 u_i = (m+i-1)u_{i-1}, \quad \mathcal{P}_*^1 \Delta u_i = (m+i)\Delta u_{i-1}.$$

$m > 1$  のとき、類  $\eta_m = [h_m] \in [Y^{2pm+q-3}, Y^{2pm-2}] \simeq [Y^{q-1}, Y^0]^S$  は一意に定まる。このとき、次の定理を得る。

**Th 3.2**  $m > 1$  に対して、写像  $h_m: Y^{2pm+q-3} \rightarrow Y^{2pm-2}$  は、次の元を表わす。

$$\eta_m = ((m+1)\delta\alpha - m \cdot \alpha\delta)(2pm - 2) \in [Y^{2pm+q-3}, Y^{2pm-2}].$$

これは、Th 3.1(2) で与えられた  $Q_4^{2m-1}$  のホモロジー構造から得られる。詳細は [37] の Prop 4.5 を見よ。 $\eta_m$  の desuspensions を次のように書く。

$$(3.2.4) \quad \eta_m^{(t)} = ((m+1)\delta\alpha - m \cdot \alpha\delta)(2pm - 2 - t), \quad \eta'_m = \eta_m^{(1)}.$$

$m = 1$  の場合、 $Q_2^1 \simeq \Omega^3 S^3$  なので、 $Q_2^1$  を  $S^3$  の 3-連結 fiber  $\tilde{S}^3$  に置き換える。 $Q_4^1$  をまた  $\Omega^2 S^5$  の 3-連結 fiber  $\tilde{\Omega^2 S^5}$  に置き換える。このとき、 $\Omega(\Omega^2 S^5, S^3)$  は  $Q_2^3 = \Omega(\Omega^2 S^5, S^3)$  にホモトピー同値であり、次の fibration を得る。

$$Q_2^3 \xrightarrow{\tilde{d}} \tilde{S}^3 \xrightarrow{\tilde{i}} \tilde{\Omega^2 S^5}. \quad S^5 \text{ の mod } p \text{ コホモロジー構造は、次の fibration } \tilde{S}^5 \rightarrow S^5 \rightarrow K(Z, 5) \text{ から確かめられ、}$$

$$H^*(K(Z, 5); \mathbb{Z}_p) = \wedge(u, \mathcal{P}^1 u, \mathcal{P}^2 u, \mathcal{P}^3 \mathcal{P}^1 u, \dots) \otimes \mathbb{Z}_p[\Delta \mathcal{P}^1 u, \Delta \mathcal{P}^2 u, \Delta \mathcal{P}^3 \mathcal{P}^1 u, \dots], \quad \text{ここで、 } u \in H^5 \text{ は fundamental class, } \Delta$$

は cohomology Bockstein である。Adem relation により、 $\mathcal{P}^1(\mathcal{P}^1 u) = 2\mathcal{P}^2 u, \mathcal{P}^1(\Delta \mathcal{P}^1 u) = \Delta \mathcal{P}^2 u$ .

$w_5 \in H^{2p+2}(\tilde{S}^5; \mathbb{Z}_p)$  を  $\mathcal{P}^1 u \in H^{2p+3}$  の cohomology suspension とすると、Serre spectral sequence により、

$$H^*(\tilde{S}^5; \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p[w_5, \mathcal{P}^1 w_5, \mathcal{P}^2 w_5, \dots] \otimes \wedge(\Delta w_5, \Delta \mathcal{P}^1 w_5, \Delta \mathcal{P}^2 w_5, \dots) \quad \text{for } * < p(2p+2), \Delta \mathcal{P}^1 w_5 = 2\mathcal{P}^1 \Delta w_5$$

であり、さらに、 $w_3 \in H^*(\tilde{\Omega^2 S^5}; \mathbb{Z}_p)$  に対して、

$$(3.2.5) \quad H^*(\tilde{\Omega^2 S^5}; \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p[w_3, \mathcal{P}^1 w_3] \otimes \wedge(\Delta w_3, \Delta \mathcal{P}^1 w_3) \quad \text{for } * < 2p^2, \Delta \mathcal{P}^1 w_3 = 2\mathcal{P}^1 \Delta w_3.$$

同様に、 $H^*(\tilde{\Omega S^3}; \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p[w_3] \otimes \wedge(\Delta w_3)$  for  $* < 2p^2$ .

$\tilde{G}_1: Y^{2p+1} \rightarrow \tilde{S}^3$  を、 $G_1: Y^{2p+1} \rightarrow S^3$  のリフトとすると、 $\tilde{G}_1$  は dimension  $< 4p+1$  に対して mod  $p$  同値である。

$\tilde{d}: Q_2^3 \rightarrow \tilde{S}^3$  を  $g_2$  と  $\tilde{G}_1$  で近似すると、次の図式がホモトピー可換となるような写像  $\tilde{h}_1: Y^{2p+q} \rightarrow Y^{2p+1}$  を得る。

$$(3.2.6) \quad \begin{array}{ccccc} Y^{2p+q} & \xrightarrow{\tilde{h}_1} & Y^{2p+1} & \xrightarrow{i'} & \tilde{K} \\ \downarrow g_2 & & \downarrow \tilde{G}_1 & & \downarrow \tilde{G}_2 \\ Q_2^3 & \xrightarrow{\tilde{d}} & \tilde{S}^3 & \xrightarrow{i} & \Omega^2 S^5. \end{array}$$

ここで、 $\tilde{K} = Y^{2p+1} \cup CY^{2p+q}$  は、 $\tilde{h}_1$  の mapping cone で、 $\tilde{G}_2$  は dimension  $< 4p+1$  で mod  $p$  同値である。

Th3.2 と同様に、 $\tilde{h}_1$  のクラス  $\tilde{\eta}_1$  に対して、次の定理が成り立つ。

**Th 3.3** 写像  $\tilde{h}_1: Y^{4p-2} \rightarrow Y^{2p+1}$  は次の元を表す。 $\tilde{\eta}_1 = (2\delta\alpha - \alpha\delta)(2p+1) \in [Y^{4p-2}, Y^{2p+1}]$ .

simple unstable element に対して、Th3.2 と3.3 を適用すると次を得る。

**Prop 3.1** (1)  $m > 1$  とする。ある元  $\gamma \in \pi_i(Y^{2p(m+1)-5})$  に対して、 $x \in \pi_{i+3}(Q_2^{2m+1})$  が  $E^3 \gamma$  による M-represented

であるならば、 $d_1(x) = HP(x) \in \pi_i(Q_2^{2m-1})$  は、 $h_{m*}(\gamma) = \eta_m$ 。 $\gamma \in \pi_i(Y^{2p-2})$  による M-represented である。

(2)  $m = 1$  とする。 $x \in \pi_i(Q_2^3)$  が  $\gamma \in \pi_i(Y^{4p-2})$  による M-represented であるならば、 $P(x) \in \pi_i(S^3)$  は、

$\tilde{h}_{1*}(\gamma) = \tilde{\eta}_1$ 。 $\gamma \in \pi_i(Y^{2p+1})$  による purely M-represented である。

stable element  $\xi \in \pi_k^S$  に対して、 $E^\infty(\xi(n)) = \xi$  を満たす元を、 $\xi(n) \in \pi_{n+k}(S^n)$  と書く。stable element  $\xi \in \pi_k^S$  の unstableness  $u(\xi)$  を次で定義する。

$$(3.2.7) \quad u(\xi) = \min \{n \mid \exists \xi(n): E^\infty(\xi(n)) = \xi\}.$$

**Th 3.1 (1)** degree  $< 2p^3 m - 2p^2 - 4$ ,  $u_0 \in H_{2pm-2}, v \in H_{2p^2 m-2}$  に対して、

$$H_*(Q_2^{2m-1}; \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p[u_0, \Delta \mathcal{P}_*^1 \Delta v, v] \otimes \wedge(\Delta u_0, \mathcal{P}_*^1 \Delta v, \Delta v).$$

(2) degree  $< 2p^2 m - 2p - 3$ ,  $u_i \in H_{2pm-2+i}$  ( $0 \leq i \leq k-1$ ) に対して、

$$H_*(Q_{2k}^{2m-1}; \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p[u_0, u_1, \dots, u_{k-1}] \otimes \wedge(\Delta u_0, \Delta u_1, \dots, \Delta u_{k-1}).$$

ここで、 $0 \leq i \leq k-1$  に対して次の関係が成り立つ。

$$\mathcal{P}_*^1 u_i = (m+i-1)u_{i-1}, \mathcal{P}_*^1 \Delta u_i = (m+i)\Delta u_{i-1}.$$

[37] H.Toda. On homotopy groups of  $S^3$ -bundles over spheres, J.Math.Kyoto Univ. 2 (1963), 193-207.

$$w_5 \in H^{2p+2}$$

$$w_3 \in H^{2p}$$

**Lem 2.5**  $E^2: \pi_i(S^{2pm-3}) \rightarrow \pi_{i+2}(S^{2pm-1})$  と  $E^4: \pi_{i-1}(S^{2pm-3}) \rightarrow \pi_{i+3}(S^{2pm+3})$  が全射ならば、

$g_{m*}: \pi_i(Y^{2pm-2}) \rightarrow \pi_i(Q_2^{2m-1})$  も全射である。

$\gamma \in \pi_i(Y^{2pm-2})$  の像  $g_{m*}(\gamma) \in \pi_i(Q_2^{2m-1})$  のことを、 $\gamma$  による **M-represented** と呼ぶ。

$\bar{g}: Y^{2p} \rightarrow \Omega S^3$  の adjoint を次で表す。

$$(2.3.5) \quad G_1 = ad(\bar{g}): Y^{2p+1} = S^{2p} \cup_p e^{2p+1} \rightarrow S^3.$$

この写像  $G_1$  は (2.3.3) の  $g_1: Y^{2p-2} \rightarrow Q_2^1$  の代わりに使われる。

$\gamma \in \pi_{i+1}(Y^{2p+1})$  の像  $G_{1*}(\gamma) \in \pi_{i+1}(S^3)$  のことを  $\gamma$  による **purely M-represented** と呼ぶ。

$$2p + q = 2p + 2(p-1) = 4p - 2$$

$$x = g_{m+1*}(E^3 \gamma) \Rightarrow HP(x) = g_{m*}(\eta_m \circ \gamma).$$

$$x = g_{2*}(\gamma) \Rightarrow P(x) = G_{1*}(\tilde{\eta}_1 \circ \gamma).$$

section 3.2 の記法  $Q^m(\xi), \bar{Q}^m(\xi)$  を使うと、つぎの Lemma を得る。

**Lem 3.1**  $\xi \in \pi_k^S$  に対して、 $u(\xi) < 2p(m+1) - 5$  ならば、 $d_1(Q^{m+1}(\xi)) = HP(Q^{m+1}(\xi)) = (m+1)Q^m(\alpha_1\xi)$ .

$m=1$  のときは、 $u(\xi) \leq 4p-3$  である  $\xi$  に対してこの式が成り立つ。

**Lem 3.2**  $\xi \in \pi_k^S$  に対して、 $u(\xi) < 2p(m+1) - 5, p\xi = 0$  ならば、 $d_1(\bar{Q}^{m+1}(\xi)) = HP(\bar{Q}^{m+1}(\xi)) = m \cdot \bar{Q}^m(\alpha_1\xi)$ .

ここで、 $u(\xi) \leq 4p-3$  の  $\xi$  に対して、 $m=1$  のときに成り立つ。

**Lem 3.3**  $\xi \in \pi_k^S$  に対して、 $u(\xi) < 2p(m+1) - 5, p\xi = 0, \alpha_1\xi = 0$  ならば、 $\eta \in (m+1)\{\alpha_1, p, \xi\} - m\{p, \alpha_1, \xi\}$

に対して、 $d_1(\bar{Q}^{m+1}(\xi)) = HP(\bar{Q}^{m+1}(\xi)) = Q^m(\eta)$ .

ここで、 $u(\xi) \leq 4p-3$  の  $\xi$  に対して、 $m=1$  のときに成り立つ。

### 3.3 Lemmas for $p$ times and $\Delta$

mapping cone  $K(m, 2) = Y^{2pm-2} \cup_{h_m} CY^{2pm+q-3}$  の cofibration

$$(3.3.1) \quad Y^{2pm-2} \xrightarrow{i'} K(m, 2) \xrightarrow{\pi'} Y^{2pm+q-2}$$

を考える。 $1_K : K(m, 2) \rightarrow K(m, 2)$  を  $K(m, 2)$  の恒等写像とする。

**Th 3.4** 恒等写像  $1_K$  の  $p$  倍  $p \cdot 1_K : K(m, 2) \rightarrow K(m, 2)$  は次の合成にホモトピックである。

$$i' \circ \alpha(2pm-2) \circ \pi' : K(m, 2) \rightarrow Y^{2pm+q-2} \rightarrow Y^{2pm-2} \rightarrow K(m, 2).$$

この定理は本質的には Gray[7] で証明された。 $[Y^n, Y^n] \simeq \mathbb{Z}_p$  なので、 $Y^n$  の恒等写像の  $p$  倍はゼロホモトピックで

ある。これはある  $f : Y^{2pm+q-2} \rightarrow Y^{2pm-2}$  に対して、homotopy  $p \cdot 1_K \simeq i' \circ f \circ \pi'$  を与え、2つの写像の

mapping cone はホモトピー同値である。 $p \cdot 1_K$  の mapping cone は smash product  $Y^2 \wedge K(m, 2)$  である。

$i' \circ f \circ \pi'$  の mapping cone は  $f$  の mapping cone を部分複体として含んでいる。Cartan formula により

$Y^2 \wedge K(m, 2)$  のなかで、 $\mathcal{P}^1$  作用素を考えると、 $f$  の mapping cone の中の  $\mathcal{P}^1$  が得られ、定理が証明される。

$h_m : Y^{2pm+q-4} \rightarrow Y^{2pm-3}, K'(m, 2) = Y^{2pm-3} \cup_{h_m} CY^{2pm+q-4}$  を  $h_m$  と  $K(m, 2)$  の desuspensions とし、suspension

$E : \pi_{i-1}(K'(m, 2)) \rightarrow \pi_i(K(m, 2))$  を考える。 $x \in Im E$  ならば、 $p \cdot x = (p \cdot 1_K)_*(x)$  である。よって、Th 3.4 の系として次を得る。

**Prop 3.2**  $\gamma \in \pi_i(K(m, 2))$  が suspension image とすると、次が成り立つ。 $p(\gamma) = i'_*(\alpha(2pm-2) \circ \pi'_*(\gamma))$ .

これを次の可換図式

$$(3.3.2) \quad \begin{array}{ccccc} \pi_{i+3}(S^{2m+1}) & \xrightarrow{E^2} & \pi_{i+5}(S^{2m+3}) & \xrightarrow{\cong} & \pi_{i+5}(S^{2m+3}) \\ \downarrow H & & \downarrow H^{(4)} & & \downarrow H \\ \pi_i(Q_2^{2m-1}) & \xrightarrow{i_*} & \pi_i(Q_4^{2m-1}) & \xrightarrow{j_*} & \pi_{i+2}(Q_2^{2m+1}) \\ \downarrow P & & \downarrow P^{(4)} & & \downarrow P \\ \pi_i(S^{2m-1}) & \xrightarrow{=} & \pi_i(S^{2m-1}) & \xrightarrow{E^2} & \pi_{i+2}(S^{2m+1}) \end{array}$$

に適用すると、[38] の Th 5.3, 5.4 の一般化である次の2つの lemma を得る。

**Lem 3.4**  $x \in \pi_{i+2}(Q_2^{2m+1})$  が  $E^4(\gamma)$  による M-represented であり、 $h'_{m^*}(\gamma) = 0$  ならば、元  $\xi \in \pi_i(S^{2m-1})$  が存在

し、 $\alpha(2pm-2) \circ E^2\gamma$  による M-represented  $y \in \pi_i(Q_2^{2m-1})$  に対して、 $p \cdot \xi = P(y), E^2\xi = P(x)$ .

Proof. (3.2.3) の記法により、 $x = \Omega_0^2 g_{m+1*}(E^2\gamma)$  である。仮定により、 $x$  の coextension  $\bar{x} \in \pi_i(K(m, 2))$  が存在して、 $\pi'_*(\bar{x}) = E^2\gamma$  であり、 $\bar{x}$  は suspension の像である。Prop 3.2 から次を得る。

$$p(\bar{x}) = i'_*(\alpha(2pm-2) \circ E^2\gamma).$$

(3.2.3) の写像に対して、 $\bar{x} = \bar{g}_{m*}(\bar{\gamma}), y = g_{m*}(\alpha(2pm-2) \circ E^2\gamma)$  とする。(3.2.3) の可換性から次を得る。

$$(3.3.3) \quad p(\bar{x}) = i_*(y), j_*(\bar{x}) = x.$$

よって、(3.3.2) の可換性から lemma を得る。■

$$HP(x) = ax$$

$$HP(X) = AX$$

[7] B.W.Gray, Unstable families related to the image of  $J$ , Proc. Camb. Phil. Soc, 96 (1984), 95-113.

[38] H.Toda. On Iterated Suspensions I,II,III, J. Math. Kyoto Univ. 5 (1966), 87-142, 209-250, 8(1968), 101-130.

$$x = g_{m+1*}(E^4\gamma), h'_{m^*}(\gamma) = 0, y = g_{m*}(\alpha(2pm-2) \circ E^2\gamma) \Rightarrow p \cdot \xi = P(y), E^2\xi = P(x).$$

$P(x)$  は  $E^2$  の像、よって  $HP(x) = 0$ .

$P(y)$  は  $p$  で割れる。

**Lem 3.5**  $\xi \in \pi_{i+5}(S^{2m+3})$  の Hopf invariant  $H(\xi)$  が  $E^4(\gamma)$  による M-represented であり、 $h'_{m^*}(\gamma) = 0$  ならば、元  $\eta \in \pi_{i+3}(S^{2m+1})$  が存在し、 $p \cdot \xi = E^2\eta$  であり、 $H(\eta)$  は  $\alpha(2pm - 2) \circ E^2\gamma$  による M-represented である。

**Proof.**  $x = H(\xi) \in \pi_{i+2}(Q_2^{2m+1})$  とすると、 $y = g_{m^*}(\alpha(2pm - 2) \circ E^2\gamma), \bar{x} \in \pi_i(Q_4^{2m-1})$  に対して、(3.3.3) が成り立つ。 $j_*(\bar{x} - H^{(4)}(\xi)) = j_*(\bar{x}) - H(\xi) = x - x = 0$ 。なので、 $\bar{x} = H^{(4)}(\xi) + i_*(z)$  を満たす  $z \in \pi_i(Q_2^{2m-1})$  が存在する。Lem 2.2 により、 $pz = 0$  である。よって、 $i_*(y) = p(\bar{x}) = H^{(4)}(p\xi), P(y) = P^{(4)}(i_*(y)) = P^{(4)}H^{(4)}(p\xi) = 0$  である。EHP-sequence の完全性により、 $H(\eta') = y$  を満たす  $\eta' \in \pi_{i+3}(S^{2m+1})$  が存在する。よって、ある  $\eta_0 \in \pi_{i+1}(S^{2m-1})$  に対して、 $H^{(4)}(p\xi - E^2\eta') = i_*(y) - i_*H(\eta') = i_*(y) - i_*(y) = 0, p\xi - E^2\eta' = E^4\eta_0$  が成り立つ。 $\eta = \eta' + E^2\eta_0$  とすると、lemma が得られる。■

次に、準同型  $\Delta: {}_p\pi_{i+2}(S^{2pm+1}) \rightarrow {}_p\pi_i(S^{2pm-1})$  について考える。この準同型は、(2.1.9) のファイバー列

$\Omega^4 S^{2pm+1} \xrightarrow{\partial_p} \Omega^2 S^{2pm-1} \rightarrow Q_2^{2m-1} \rightarrow \Omega^3 S^{2pm+1} \xrightarrow{\partial_p} \Omega S^{2pm-1}$  の中の  $\partial_p$  によって誘導される。Lem 2.1 により、最初の  $\partial_p$  の  $S^{2pm-3}$  への制限は degree  $p$  の写像である。よって、path space をとることにより、写像

$\bar{\partial}_p: Q_4^{2pm+1} \rightarrow Q_2^{2pm-1}$  が得られ、次の図式を可換にする準同型  $\bar{\Delta}: \pi_{i-1}(Q_4^{2pm-3}) \rightarrow \pi_{i-1}(Q_2^{2pm-3})$  を誘導する。

$$(3.3.4) \quad \begin{array}{ccccccc} \pi_i(S^{2m+1}) & \xrightarrow{E^4} & \pi_{i+4}(S^{2pm+1}) & \xrightarrow{H^{(4)}} & \pi_{i-1}(Q_4^{2pm-3}) & \xrightarrow{P^{(4)}} & \pi_{i-1}(S^{2pm-3}) \\ \downarrow \times p & & \downarrow \Delta & & \downarrow \bar{\Delta} & & \downarrow \times p \\ \pi_i(S^{2pm-3}) & \xrightarrow{E^2} & \pi_{i+2}(S^{2pm-1}) & \xrightarrow{H} & \pi_{i-1}(Q_2^{2pm-3}) & \xrightarrow{P} & \pi_{i-1}(S^{2pm-3}) \end{array}$$

$\bar{g}_{pm-1}: K(pm-1, 2) \rightarrow Q_4^{2pm-3}$  と  $g_{pm-1}: Y^{2p(pm-1)-2} \rightarrow Q_2^{2pm-3}$  は、up to degree  $4p(pm-1) - 5$  で、mod  $p$  同値なので、次の図式をホモトピー可換にする写像  $D'$  が存在する。

$$(3.3.5) \quad \begin{array}{ccc} K(pm-1, 2) & \xrightarrow{D'} & Y^{2p(pm-1)-2} \\ \downarrow \bar{g}_{pm-1} & & \downarrow g_{pm-1} \\ Q_4^{2pm-3} & \xrightarrow{\bar{\partial}_p} & Q_2^{2pm-3} \end{array}$$

$D'$  の部分複体  $Y^{2p(pm-1)-2}$  への制限は degree  $p$  の写像なので、それは null homotopic である。そこで、 $D'$  として次の様にとることができ。 $D' = D \circ \pi: K(pm-1, 2) \rightarrow Y^{2p(pm-1)-2+q} \rightarrow Y^{2p(pm-1)-2}$ 。

**Prop 3.3** 上の写像  $D: Y^{2p(pm-1)-2+q} \rightarrow Y^{2p(pm-1)-2}$  は、up to non-zero coefficient で次の元を表す。

$\alpha(2p(pm-1) - 2)$ 。

この Lemma は [38] の Lemma 9.2 である。Th 3.1(1) を使ってこれを証明できる。

**Lem 3.6**  $\xi \in \pi_{i+4}(S^{2pm+1})$  の Hopf invariant  $H(\xi) \in \pi_{i+1}(Q_2^{2pm-1})$  が、 $\gamma \in \pi_{i-1}(Y^{2p(pm-1)-4})$  に対して、 $E^2\gamma$  による

M-represented であり、 $h_{pm-1}(\gamma) = 0$  を満たすならば、up to non-zero coefficient で  $H(\Delta(\xi))$  は、

$\alpha(2p(pm-1) - 2) \circ \gamma$  による M-represented である。

上の lemma の特別な場合だが、次の場合は頻繁に現れる。

**Lem 3.7**  $\xi \in \pi_{i+4}(S^{2pm+1})$ ,  $\gamma \in \pi_s^s, \delta \in \pi_t^s$  に対して、up to non-zero coefficients で次の関係が成り立つ。

(1)  $H(\xi) = Q^{pm}(\gamma)$  は、 $H(\Delta(\xi)) = \bar{Q}^{pm-1}(\alpha\gamma) = HP(\bar{Q}^{pm}(\xi))$  を誘導する。

(2)  $H(\xi) = Q^{pm}(\gamma), \Delta(\xi) = P(\bar{Q}^{pm}(\gamma))$  は、 $H(\xi \circ \delta(i+4)) = Q^{pm}(\gamma\delta), \Delta(\xi \circ \delta(i)) = P(\bar{Q}^{pm}(\gamma\delta))$  を誘導する。

**Proof.**  $S^{2pm} \subset Y^{2pm+1}$  の injection image を考えることにより、Lem 3.6 から (1) が成り立つ。

$H, \Delta, P$  の自然性から (2) が成り立つ。■

### 3.4 Short range unstable elements

2番目の微分  $d_2: Ker d_1 \rightarrow Coker d_1$  を考える。より正確には、次の条件を満たす元  $\xi \in \pi_i(S^{2m+1})$  を考える。

$$\begin{array}{ccccc} \pi_{i+3}(S^{2m+1}) & \xrightarrow{E^2} & \pi_{i+5}(S^{2m+3}) & \xrightarrow{\cong} & \pi_{i+5}(S^{2m+3}) \\ \downarrow H & & \downarrow H^{(4)} & & \downarrow H \\ \pi_i(Q_2^{2m-1}) & \xrightarrow{i_*} & \pi_i(Q_4^{2m-1}) & \xrightarrow{j_*} & \pi_{i+2}(Q_2^{2m+1}) \\ \downarrow P & & \downarrow P^{(4)} & & \downarrow P \\ \pi_i(S^{2m-1}) & \xrightarrow{\cong} & \pi_i(S^{2m-1}) & \xrightarrow{E^2} & \pi_{i+2}(S^{2m+1}) \end{array} \quad (3.3.2)$$

$$(3.3.3) \quad p(\bar{x}) = i_*(y), j_*(\bar{x}) = x.$$

**Lem 2.2**  ${}_p\pi_i(Q_2^{2m-1})$  は、elementary である。すなわち  $p({}_p\pi_i(Q_2^{2m-1})) = 0$ .

$$(2.1.9) \quad \Omega^2 S^{2pm-1} \xrightarrow{i} Q_2^{2m-1} \xrightarrow{j} \Omega^3 S^{2pm+1} \xrightarrow{\partial_p} \Omega S^{2pm-1}.$$

**Lem 2.1** 次の2つの合成は、どちらも  $p$  倍する写像である。

$$\Delta \circ E^2: {}_p\pi_i(S^{2pm-1}) \rightarrow {}_p\pi_{i+2}(S^{2pm+1}) \rightarrow {}_p\pi_i(S^{2pm-1}),$$

$$E^2 \circ \Delta: {}_p\pi_{i+2}(S^{2pm+1}) \rightarrow {}_p\pi_i(S^{2pm-1}) \rightarrow {}_p\pi_{i+2}(S^{2pm+1}).$$

$$g_m: Y^{2pm-2} \rightarrow Q_2^{2m-1}$$

[38] H.Toda. On Iterated Suspensions I,II,III, J. Math. Kyoto Univ. 5 (1966), 87-142,209-250, 8(1968),101-130.

**Th 3.1** (1)  $degree < 2p^3m - 2p^2 - 4, u_0 \in H_{2pm-2}, v \in H_{2p^2m-2}$  に対して、

$$H_*(Q_2^{2m-1}; \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p[u_0, \Delta P_*^1 \Delta v, v] \otimes \wedge (\Delta u_0, P_*^1 \Delta v, \Delta v).$$

(2)  $degree < 2p^2m - 2p - 3, u_i \in H_{2pm-2+iq} (0 \leq i \leq k-1)$  に対して、

$$H_*(Q_{2k}^{2m-1}; \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p[u_0, u_1, \dots, u_{k-1}] \otimes \wedge (\Delta u_0, \Delta u_1, \dots, \Delta u_{k-1}).$$

ここで、 $0 \leq i \leq k-1$  に対して次の関係が成り立つ。

$$P_*^1 u_i = (m+i-1)u_{i-1}, P_*^1 \Delta u_i = (m+i)\Delta u_{i-1}.$$

$$H(\xi) = c \Rightarrow H\Delta(\xi) = AC = HP(X)$$

$$H(\xi) = c, \Delta\xi = P(C) \Rightarrow H(\xi\delta) = cd, \Delta(\xi\delta) = P(CD)$$

**Lem 3.6**  $\xi \in \pi_{i+4}(S^{2pm+1})$  の Hopf invariant  $H(\xi) \in \pi_{i+1}(Q_2^{2pm-1})$  が、 $\gamma \in \pi_{i-1}(Y^{2p(pm-1)-4})$  に対して、 $E^2\gamma$  による

M-represented であり、 $h_{pm-1}(\gamma) = 0$  を満たすならば、up to non-zero coefficient で  $H(\Delta(\xi))$  は、

$\alpha(2p(pm-1) - 2) \circ \gamma$  による M-represented である。

(3.4.1)  $E^2(\xi) \neq 0$ ,  $E^4(\xi) = 0$ ,  $\xi \notin \text{Im } E^2$ .

これは、次に同値である。

(3.4.2)  $H(\xi) \neq 0$ ,  $E^2(\xi) = P(x) \neq 0$  for some  $x \in \pi_{i+2}(Q_2^{2m+3})$ .

このような元  $\{\xi, E^2\xi\}$  は、**two stage unstable elements** または、**secondary unstable elements** と呼ばれる。  
次の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccccc} \pi_i(S^{2m+1}) & \xrightarrow{E^2} & \pi_{i+2}(S^{2m+3}) & \xleftarrow{P} & \pi_{i+2}(Q_2^{2m+3}) \\ \downarrow H & & \downarrow H^{(4)} & & \downarrow = \\ \pi_{i-3}(Q_2^{2m-1}) & \xrightarrow{i_*} & \pi_{i-3}(Q_4^{2m-1}) & \xleftarrow{\partial} & \pi_{i+2}(Q_2^{2m+3}) \end{array}$$

(3.4.3) 次に、(3.1.5) の結果を考慮することにより、次のホモトピー可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccccc} Y^{2pm-2} & \xrightarrow{i'} & K(m, 2) & \xleftarrow{\tilde{h}_{m+1}} & Y^{2pm+4p-5} \\ \downarrow g_m & & \downarrow \bar{g}_m & & \downarrow \Omega_0^3 g_{m+2} \\ Q_2^{2m-1} & \xrightarrow{i} & Q_4^{2m-1} & \xleftarrow{d} & \Omega^3 Q_2^{2m+3} \end{array}$$

ここで、 $\tilde{h}_{m+1}$  は  $h_{m+1}^{(2)}: Y^{2pm+4p-6} \rightarrow Y^{2pm+2p-4}$  の coextension である。

**Prop 3.4**  $\gamma \in \pi_{i-4}(Y^{2m+4p-8})$ ,  $\eta_{m+1*}^{(3)}(\gamma) = 0$  に対して、 $x \in \pi_{i+2}(Q_2^{2m+3})$  は M-represented by  $E^6\gamma$  と仮定すると、

$$i_*\{\eta_m, \eta_{m+1}^{(2)}, E^3\gamma\}_1 = \partial(x).$$

複体  $K(m, 2) = Y^{2pm-2} \cup e^{2pm+2p-5} \cup e^{2pm+2p-4}$  は  $(m+1)\alpha_1(2pm-3)$  の mapping cone

$C_{(m+1)\alpha}^{2pm+2p-5} = S^{2pm-3} \cup e^{2pm+2p-5}$  を部分複体として含んでいる。さらに  $\tilde{h}_{m+1}$  の  $S^{2pm+4p-6}$  への制限は、

$(m+2)\alpha_1(2pm+2p-6)$  の coextension  $\tilde{h}: S^{2pm+4p-6} \rightarrow C_{(m+1)\alpha}^{2pm+2p-5}$  に homotopic である。よって、Prop 3.4 の系として次を得る。

**Lem 3.8**  $m \not\equiv -1, -2 \pmod{p}$  で、 $\gamma \in \pi_{i-4}(S^{2m+4p-9})$  に対して invariant  $x \in \pi_{i+2}(Q_2^{2m+3})$  は  $E^6(i_*\gamma)$  による

M-represented であり、 $\alpha_1(2m+4p-9) \circ \gamma = 0$  であるならば、 $\xi \in \pi_i(S^{2m+1})$  が存在して、up to non-zero

coefficient で、 $H(\xi) \in I\{\alpha_1(2pm-1), \alpha_1(2pm+2p-4), E^3\gamma\}, E^2(\xi) = P(x)$ .

同様に、 $K(m, 2)/C_{(m+1)\alpha}^{2pm+2p-5}$  を考えることにより次を得る。

**Lem 3.9**  $m \not\equiv 0, -1 \pmod{p}$  で、 $\gamma \in \pi_{i-3}(Y^{2m+4p-8})$  に対して invariant  $x \in \pi_{i+2}(Q_2^{2m+3})$  は  $E^6\gamma$  による

M-represented であり、 $\eta_{m+1}^{(3)} \circ \gamma = 0$  であるならば、 $\xi \in \pi_{i+1}(S^{2m+1})$  が存在して、up to non-zero coefficient で

$$H_p(\xi) = JH(\xi) \in \{\alpha_1(2pm+1), \alpha_1(2pm+2p-2), E^3\pi_*\gamma\}.$$

$\beta_1$  を  $\pi_{pq-2}^S \simeq \mathbb{Z}_p$  の生成元とする。 $\beta_1$  は  $p$  個の  $\alpha_1$  の long bracket  $\beta_1 = \{\alpha_1, \alpha_1, \dots, \alpha_1\}$  により与えられる。

そして、それは Adem relation の secondary operation  $\mathcal{P}^{p-1}\mathcal{P}^1 = 0$  によって検出される。 $n \geq 2p-1$  に対して unstable case  $\beta_1(n) \in \pi_{n+pq-2}(S^n)$ ,  $E^\infty\beta_1(n) = \beta_1$  が定義され、 $n \geq 2p+1$  に対して stable であり、 $\beta_1(2p-1)$  の位数は  $p^2$  である。

[38] から unstable elements の little longer series についての次の2つの lemma (Th 10.3, 10.8) を引用する。

**Lem 3.10**  $l \geq 1, m = pl$  とする。このとき、 $\pi_{2pm+pq-2}(S^{2m+1})$  の元  $v(2m+1)$  が存在し、up to non-zero coefficient で、 $H(v(2m+1)) = I(Q_m(\beta_1)), E^{2(p-2)}v(2m+1) = P(I(\alpha_1(2mp+pq-1)))$ .

ここで、 $v(2m+2p-1) = E^{2p-2}v(2m+1)$  である。

(3.1.5)  $H_*(Q_{2k}^{2m-1}) \mathbb{Z}_p[u_0, u_1, \dots, u_{k-1}, \Delta v, \dots] \otimes (\Delta u_0, \Delta u, u_1, \dots, \Delta v_{k-1}, \dots)$

for  $u_i \in H_{2pm-2+iq}$  ( $0 \leq i \leq k-1$ ) and  $v \in H_{2p^2m-2p-1}$ .

**Prop 3.4**  $\gamma \in \pi_{i-4}(Y^{2m+4p-8})$ ,  $\eta_{m+1*}^{(3)}(\gamma) = 0$  に対して、 $x \in \pi_{i+2}(Q_2^{2m+3})$  は M-represented by  $E^6\gamma$  と仮定すると、

$$i_*\{\eta_m, \eta_{m+1}^{(2)}, E^3\gamma\}_1 = \partial(x).$$

[38] H.Toda. On Iterated Suspensions I, II, III, J. Math. Kyoto Univ. 5 (1966), 87-142, 209-250, 8(1968), 101-130.

大きな  $n$  に対して  $\beta_1$  の extension と coextension をそれぞれ  $\bar{\beta} \in [Y^{n+pq-1}, S^n]$ ,  $\tilde{\beta} \in \pi_{n+pq-1}(Y^{n+1})$  とする。 $\bar{\beta}$  と  $\tilde{\beta}$  の mapping cone をそれぞれ  $C_{\bar{\beta}} = S^n \cup e^{n+pq-1} \cup e^{n+pq}$ ,  $C_{\tilde{\beta}} = S^n \cup e^{n+1} \cup e^{n+pq}$ , とする。このとき、 $\beta_1$  は次の性質で特徴づけられる。

(3.4.5)  $C_{\bar{\beta}}$  と  $C_{\tilde{\beta}}$  上で  $\mathcal{P}^p \neq 0$ .

$\pi_{(2p+1)q-2}^S \simeq \mathbb{Z}_p$  の他の生成元があり、これは Adem relation  $\mathcal{P}^p \mathcal{P}^{p+1} = \mathcal{P}^{2p+1} + \mathcal{P}^{2p} \mathcal{P}^1$ , に関する secondary operation により検出される。

**Lem 3.11** 整数  $n \not\equiv p - 2 \pmod{p}$ ,  $n > 1$  に対して、 $m = pn$  と仮定する。このとき、 $\bar{\nu}_1(2m+1)$

$\in \pi_{2pm+(2p+1)q-2}(S^{2m+1})$  が存在し、up to non-zero coefficient で、

$$H(\bar{\nu}_1(2m+1)) = \bar{Q}^m(\beta_2), \nu_1(2m+2p+3) = P(Q^{m+p+1}(\beta_1)).$$

ここで、 $\nu(2m+2p+3) = E^{2p+2}\nu(2m+1)$  である。

### 3.5 Lemmas for $\alpha_1$ times

$m \geq 1$  に対して、特性類  $\alpha_1(2m+1)$  を持つ sphere-bundle over sphere  $S^{2m+1} \xrightarrow{i} B_m(\alpha) \xrightarrow{p} S^{2m+2p-1}$  を考える。この sphere-bundle に関するホモトピー完全列

$$\cdots \xrightarrow{i_*} \pi_{i+1}(B_m(\alpha)) \xrightarrow{p_*} \pi_{i+1}(S^{2m+2p-1}) \xrightarrow{\partial_\alpha} \pi_i(S^{2m+1}) \xrightarrow{i_*} \pi_i(B_m(\alpha)) \xrightarrow{p_*} \cdots,$$

の境界準同型  $\partial_\alpha$  を考え、次を得る。

**Prop 3.5**  $\gamma \in \pi_{i-1}(S^{2m-1+q})$  に対して、 $\partial_\alpha(E^2\gamma) = \alpha_1(2m+1) \circ E\gamma$ .

Oka [21] は、写像

(3.5.1)  $f: S^2(B_m(\alpha)) \rightarrow B_{m+1}(\alpha)$  for  $m \geq 1$

を構成し、これは  $i < 4m+2p$  に対して  $H_i()$  の同型を誘導する。 $QB_m(\alpha)$  を  $f$  の adjoint の homotopy fiber とすると、次の fibration を得る。

(3.5.2)  $QB_m(\alpha) \rightarrow B_m(\alpha) \xrightarrow{i} \Omega^2 B_{m+1}(\alpha)$ ,

また、 $B_m(\alpha)$  に対して、次の EHP-sequence を得る。

(3.5.3)  $\cdots \xrightarrow{E^2} \pi_{i+3}(B_{m+1}(\alpha)) \xrightarrow{H} \pi_i(QB_m(\alpha)) \xrightarrow{P} \pi_i(B_m(\alpha)) \xrightarrow{E^2} \pi_{i+2}(B_{m+1}(\alpha)) \xrightarrow{H} \cdots$ .

さらに、次の可換で完全な図式を得る。

(3.5.4)

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_{i+2}(B_m(\alpha)) & \xrightarrow{p_*} & \pi_{i+2}(S^{2m+2p-1}) & \xrightarrow{\partial_\alpha} & \pi_{i+1}(S^{2m+1}) & \xrightarrow{i_*} & \pi_{i+1}(B_m(\alpha)) \\ \downarrow E^2 & & \downarrow E^2 & & \downarrow E^2 & & \downarrow E^2 \\ \pi_{i+4}(B_{m+1}(\alpha)) & \xrightarrow{p_*} & \pi_{i+4}(S^{2m+2p+1}) & \xrightarrow{\partial_\alpha} & \pi_{i+3}(S^{2m+3}) & \xrightarrow{i_*} & \pi_{i+3}(B_{m+1}(\alpha)) \\ \downarrow H & & \downarrow H & & \downarrow H & & \downarrow H \\ \pi_{i+1}(QB_m(\alpha)) & \xrightarrow{p_*} & \pi_{i+1}(Q_2^{2m+2p-1}) & \xrightarrow{\partial_\alpha} & \pi_i(Q_2^{2m+1}) & \xrightarrow{i_*} & \pi_i(QB_m(\alpha)) \\ \downarrow P & & \downarrow P & & \downarrow P & & \downarrow P \\ \pi_{i+1}(B_m(\alpha)) & \xrightarrow{p_*} & \pi_{i+1}(S^{2m+2p-1}) & \xrightarrow{\partial_\alpha} & \pi_i(S^{2m+1}) & \xrightarrow{i_*} & \pi_i(B_m(\alpha)) \end{array}$$

次の合成を考える。

$$J \circ \partial_\alpha \circ I: \pi_{i+3}(S^{2p(m+p)-1}) \rightarrow \pi_{i+1}(Q_2^{2m+2p-1}) \rightarrow \pi_i(Q_2^{2m+1}) \rightarrow \pi_{i+3}(S^{2p(m+1)+1}).$$

次の Theorem は Oka [21] による。

**Th 3.5** 任意の  $\gamma \in \pi_i(S^{2pm+p-1})$  に対して、up to non-zero coefficients で、次の関係が成り立つ。

$$J \partial_\alpha I(E^3\gamma) = \beta_1(2p(m+1)+1) \circ E^3\gamma.$$

[21] S.Oka, On the Homotopy Groups of Sphere Bundles over Spheres, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser.A-I 33 (1969), 161-195.

[21] S.Oka, On the Homotopy Groups of Sphere Bundles over Spheres, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser.A-I 33 (1969), 161-195.

境界準同型  $\partial_\alpha : \pi_{i+1}(Q_2^{2m+2p-1}) \rightarrow \pi_i(Q_2^{2m+1})$  は、写像  $d_\alpha : \Omega Q_2^{2m+2p-1} \rightarrow Q_2^{2m+1}$  により誘導される。Moore space で写像を近似することにより、 $m \geq 1$  に対して、次の可換図式を得る。

$$(3.5.5) \quad \begin{array}{ccc} Y^{2p(m+p)-3} & \xrightarrow{\beta_{(1)}} & Y^{2p(m+1)-2} \\ \downarrow \Omega_0 g_{m+p} & & \downarrow g_{m+1} \\ \Omega Q_2^{2m+2p-1} & \xrightarrow{d_\alpha} & Q_2^{2m+1} \end{array}$$

ここで、 $\beta_{(1)}$  は次を満たす。

$$(3.5.6) \quad \pi \beta_{(1)} i = \beta_1(2p(m+1) - 2).$$

これを (3.5.4) に適用することで次の lemma を得る。

**Lem 3.12** 元  $\xi \in \pi_{i+4}(S^{2m+2p+1})$  の Hopf invariant  $H(\xi)$  が  $\gamma \in \pi_i(Y^{2p(m+p)-3})$  に対して、 $E\gamma$  による M-represented であると仮定する。 $m \geq 1$  ならば、Hopf invariant  $H(\partial_\alpha(\xi))$  は  $\beta_{(1)} \circ \gamma$  による M-represented である。

invariant が stable type ならば、この lemma は次のように適用される。

$$(3.5.7) \quad H(\xi) = Q^{m+p}(\gamma) \text{ は、} H(\partial_\alpha(\xi)) = \bar{Q}^{m+1}(\beta_1 \gamma) \text{ を誘導する。}$$

**Lem 3.13**  $x \in \pi_{i+1}(Q_2^{2m+2p-1})$  が  $E\gamma$  による M-represented であり、 $y \in \pi_i(Q_2^{2m+1})$  は  $\beta_{(1)} \gamma$  による represented であるとする。 $m \geq 1$  ならば、 $P(y) = \partial_\alpha P(x)$  である。

**Lem 2.5**  $E^2 : {}_p \pi_i(S^{2pm-3}) \rightarrow {}_p \pi_{i+2}(S^{2pm-1})$  と  $E^4 : {}_p \pi_{i-1}(S^{2pm-3}) \rightarrow {}_p \pi_{i+3}(S^{2pm+3})$  が全射ならば、

$g_{m*} : {}_p \pi_i(Y^{2pm-2}) \rightarrow {}_p \pi_i(Q_2^{2m-1})$  も全射である。

$\gamma \in \pi_i(Y^{2pm-2})$  の像  $g_{m*}(\gamma) \in \pi_i(Q_2^{2m-1})$  のことを、 $\gamma$  による **M-represented** と呼ぶ。

$\bar{g} : Y^{2p} \rightarrow \Omega S^3$  の adjoint を次で表す。

$$(2.3.5) \quad G_1 = ad(\bar{g}) : Y^{2p+1} = S^{2p} \cup_p e^{2p+1} \rightarrow S^3.$$

この写像  $G_1$  は (2.3.3) の  $g_1 : Y^{2p-2} \rightarrow Q_2^1$  の代わりに使われる。

$\gamma \in \pi_{i+1}(Y^{2p+1})$  の像  $G_1(\gamma) \in \pi_{i+1}(S^3)$  のことを  $\gamma$  による **purely M-represented** と呼ぶ。

$$H(\xi) \in \pi_{i+1}(Q_2^{2m+2p-1}), H(\xi) = g_{m+p*}(E\gamma)$$

$$\Rightarrow H(\partial_\alpha(\xi)) \in \pi_{i+3}(Q_2^{2m+3}), ?$$

## 4 Unstable Alpha families

### 4.1 Alpha type invariants

まず、Moore space の stable self homotopy  $\mathbb{Z}_p$  上の algebra  $[Y, Y]_* = \Sigma_k [Y, Y]_k$  における Yamamoto [45] の関係式を思い出す。

$$(4.1.1) \quad 2\alpha\delta\alpha = \alpha^2\delta + \delta\alpha^2.$$

この関係式と  $\delta\delta = 0$  から次を得る。

$$(4.1.2) \quad \alpha^s\delta\alpha^t = t \cdot \alpha^{s+t-1}\delta\alpha + (1-t)\alpha^{s+t}\delta = s \cdot \alpha\delta\alpha^{s+t-1} + (1-s)\delta\alpha^{s+t},$$

$$\alpha^s\delta\alpha^t\delta = \delta\alpha^t\delta\alpha^s = t \cdot \alpha^{s+t-1}\delta\alpha\delta.$$

次に、Adams [1] の  $e$ -invariant  $e : \pi_{rq-1}^S \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  を思い出す。特に、

**Th 4.1** 整数  $a \not\equiv 0 \pmod{p}$  に対して、 $r = ap^v$  とする。

$$(1) \quad e(\alpha_r) \equiv -1/p \pmod{p}.$$

$$(2) \quad e(\pi_{rq-1}^S) \subset \mathbb{Z}(1/p^{v+1})/\mathbb{Z}.$$

$$(3) \quad e\{p, \alpha_{r-1}, \alpha_1\} = b/p^{v+1} \text{ for some } b \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

上の theorem の (1) と (2) から、 $r \not\equiv 0 \pmod{p}$  ならば、 $\alpha_r = \pi\alpha^r i = i^*\pi_*(\alpha^r)$  は  $p$  で割れず、(2.4.10) により  $\delta\alpha^r\delta \neq 0$  である。 $(4.1.2)$  により、 $\delta\alpha^r\delta = r \cdot \alpha^{r-1}\delta\alpha\delta$  である。よって、 $r \not\equiv 0 \pmod{p}$  に対して、 $\alpha^{r-1}\delta\alpha\delta \neq 0$  であり、

$$(4.1.3) \quad \alpha^s\delta\alpha\delta \neq 0 \text{ for all } s > 0.$$

その結果、Yamamoto [45] は次を得た。

**Prop 4.1**  $\alpha, \delta$  によって生成される  $[Y, Y]_*$  の部分群は、次の additive base を持つ。

$$\{1_Y, \delta, \alpha^k, \alpha^k\delta, \alpha^{k-1}\delta\alpha, \alpha^{k-1}\delta\alpha\delta ; k = 1, 2, \dots\}.$$

(4.1.3) の結果は次を導く。

**Prop 4.2** modulo  $p \cdot \pi_{rq-1}^S$  で一意的な元  $\tilde{\alpha}_r \in \pi_{rq-1}^S$  が存在し、以下を満たす。

$$i\tilde{\alpha}_r = (\alpha^{r-1}i)\alpha_1, \tilde{\alpha}_r\pi = \alpha_1(\pi\alpha^{r-1}), i\tilde{\alpha}_r\pi = \alpha^{r-1}\delta\alpha\delta = \delta\alpha\delta\alpha^{r-1} \neq 0, \tilde{\alpha}_r \in \{p, \alpha_{r-1}, \alpha_1\} = \{\alpha_1, \alpha_{r-1}, p\}.$$

Proof.  $\alpha_1$  は  $J$ -image であり、よって  $\alpha_1\alpha_{r-1} = \alpha_{r-1}\alpha_1$  は  $J$ -image であるので、 $\alpha_{r-1}\alpha_1 = 0$  であることが分かる。

よって  $\pi(\alpha^{r-1}\delta\alpha i) = \alpha_{r-1}\alpha_1 = 0$  である。 $(2.4.9)$  の列の完全性により、 $i\tilde{\alpha}_r = \alpha^{r-1}\delta\alpha i = (\alpha^{r-1}i)\alpha_1$  を満たす  $\tilde{\alpha}_r$  が存在する。よって、 $i\tilde{\alpha}_r\pi = \alpha^{r-1}\delta\alpha\delta = \delta\alpha\delta\alpha^{r-1} \neq 0$  である。 $\alpha^{r-1}i$  は  $\alpha_{r-1}$  の coextension であるので、

$i\tilde{\alpha}_r = (\alpha^{r-1}i)\alpha_1$  は  $i\{p, \alpha_{r-1}, \alpha_1\}$  に属している。 $\ker i_* = p\pi_{rq-1}^S$  であるので、 $\tilde{\alpha}_r$  は  $\{p, \alpha_{r-1}, \alpha_1\}$  に属している。双対的に考えると、他方も得られる。■

Th 4.1 の (2), (3) は、 $\tilde{\alpha}_r$  の位数は  $p^{v+1}$  の倍数であることを示している。

次に unstable version を考える。 $n \geq 4$  に対して、 $(2.4.7)$  の中で  $\alpha(n) \in [Y^{n+q}, Y^n]$ ,  $q = 2(p-1)$  が定義され、 $n \geq 3$  に対して  $\delta(n) \in [Y^{n-1}, Y^n]$  である。これらは  $E\alpha(n) = \alpha(n+1)$  でつながり、 $E^\infty\alpha(n) = \alpha$ ,  $E\delta(n) = \delta(n+1)$ ,  $E^\infty\delta(n) = \delta$  である。積の unstable version もまた自然に定義される。例えば、 $\delta\alpha(n) = \delta(n+q) \cdot \alpha(n)$ ,  $\alpha\delta(n) = \alpha(n-q) \cdot \delta(n)$  など。

**LEM 4.1** 次元  $n \geq 6$  に対して、関係 (4.1.1) が成り立つ。すなわち、 $2\alpha\delta\alpha(n) = (\alpha^2\delta + \delta\alpha^2)(n)$ .

このように、次元  $n \geq 6$  の unstable case に対して、関係 (4.1.2) が成り立つ。

証明は、[38] Prop 4.2 の中で見られる。

$r \geq 0$  に対して、invariant  $A_r(2m-1) \in \pi_{2pm+rq-3}(Q_2^{2m-1})$  を、次による  $M$ -represented であると定義する。

$$(4.1.4) \quad \alpha^r i(2pm-2) : S^{2pm+rq-3} \rightarrow Y_p^{2pm+rq-2} \rightarrow Y_p^{2pm-2} (\xrightarrow{g_m} Q_2^{2m-1}).$$

[45] N.Yamamoto, Algebra of stable homotopy of Moore space, J. Math. Osaka City Univ. 14 (1963), 45-67.

[1] J.F.Adams, On the groups  $J(X)$  -IV, Topology 5 (1966), 21-71.

$$(2.4.10) \quad E^\infty : [Y^{n+k}, Y^n] \simeq [Y, Y]_k \text{ for } n > k + 3.$$

$$(2.4.9) \quad 0 \rightarrow \pi_k^S \otimes \mathbb{Z}_p \xrightarrow{i_*} \pi_k^*(Y) \xrightarrow{\pi_*} \text{Tor}(\pi_{k-1}^S, \mathbb{Z}_p) \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow \pi_{k-1}^S(Y) \xrightarrow{\pi_*} [Y, Y]_k \xrightarrow{i^*} \pi_k^S(Y) \rightarrow 0.$$

$$(2.4.7) \quad \alpha_r(n) \equiv \{\alpha_1(n), p\alpha_{n+q-1}, \alpha_{r-1}(n+q-1)\} \pmod{\alpha_1(n) \cdot \pi_{n+rq-1}^S(S^{n+q-1})}.$$

[38] H.Toda. On Iterated Suspensions I, II, III, J. Math. Kyoto Univ. 5 (1966), 87-142, 209-250, 8(1968), 101-130.

$r = 0$  のとき、identity class  $\iota_{2pm-1} \in \pi_{2pm-1}(S^{2pm-1})$  に対して、 $A_0(2m-1) = I(\iota_{2pm-1}) \neq 0$ . この元を次のように書く。

$$(4.1.5) w = I(\iota_{2pm-1}) = A_0(2m-1) \in \pi_{2pm-3}(Q_2^{2m-1}).$$

$r > 0$  のとき、 $J(A_r(2m-1)) = E^3(\pi\alpha^r i)(2pm+1)$ , すなわち、

$$(4.1.6) J(A_r(2m-1)) = \alpha_r(2pm+1) \neq 0 \text{ in } \pi_{2pm+rq}(S^{2pm+1}).$$

**Prop 4.3**  $r \geq 0$  に対して、invariants  $A_r(2m-1)$  は非自明である。

また、もう一つの invariant  $a_r(2m-1) \in \pi_{2pm+rq-4}(Q_2^{2m-1})$  for  $r > 0$

を、次で表される M-represented であると定義する。

$$(4.1.7) \alpha^{r-1} i \alpha_1(2pm-2) : S^{2pm+rq-4} \rightarrow S^{2pm+(r-1)q-3} \rightarrow Y_p^{2pm-2} (\rightarrow {}^{g_m} Q_2^{2m-1}).$$

## 4.2 Simple unstable alpha families

Prop 3.1 により、 $A_{r-1}(2m+1)$  の  $d_1$ -image は、 $Y^{2pm-2}$  上で、

$$\eta_m \circ (\alpha^{r-1} i) = ((m+1)\delta\alpha - m\alpha\delta)(\alpha^{r-1} i) = (m+1)\delta\alpha^r - m\alpha\delta\alpha^{r-1} i$$

なので、M-represented である。

$\delta\alpha^r i = (r\alpha^{r-1}\delta\alpha + (1-r)\alpha^r\delta)i = r\alpha^{r-1}\delta\alpha i$ かつ  $\alpha\delta\alpha^{r-1} i = (r-1)\alpha^{r-1}\delta\alpha i$  であるので、 $Y^{2pm-2}$  上で、

$$\eta_m \circ (\alpha^{r-1} i \alpha_1) = (m+r)\alpha^{r-1}\delta\alpha i = (m+r)\alpha^{r-1} \alpha_1.$$

よって、次を得る。

$$\text{Prop 4.4 } d_1(A_{r-1}(2m+1)) = HP(A_{r-1}(2m+1)) = (m+r)a_r(2m-1).$$

invariant  $A_{r-m-1}(2m+1)$  の P-image を次のように書く。

$$(4.2.1) \alpha_r^*(2m+1) = P(A_{r-m-1}(2m+1)) \in \pi_{2m+rq-1}(S^{2m+1}) \text{ for } 1 \leq m < r.$$

meta-stable range では、 $J(a_r(2m-1)) = \tilde{i}\alpha_r(2pm-1)$  は  $p$  で割れないで、 $a_r(2m-1) \neq 0$ . よって、

$m+r \not\equiv 0 \pmod{p}$  のとき、 $\alpha_r^*(2m+1)$  は simple unstable element である。

$a_r(2m-1)$  の非自明性を調べるために、次の準備をする。

**Lem 4.2** 元  $\xi \in \pi_i(S^{2m-1})$  と  $\eta \in \pi_j(S^i)$  が次を満たすと仮定する。 $p\xi = 0, p\eta = 0, E^2(\xi \circ \eta) = 0$ .

このとき、 $\{p\iota_{2m+1}, E^2\xi, E^2\eta\}$  と  $\{E^2\xi, E^2\eta, p\iota_{j+2}\}$  は  $E^2$ -images である。

Proof.  $C_\eta = S^i \cup e^{j+1}$  を  $\eta$  の mapping cone とし、 $\bar{\xi} : E^2 C_\eta \rightarrow S^{2m+1}$  を  $E^2\xi : S^{i+2} \rightarrow S^{2m+1}$  の extension とする。

$\mu^p \simeq i^2 \circ r_m : \Omega^2 S^{2m+1} \rightarrow \Omega^2 S^{2m+1}$  を (2.1.12) の deformation とする。 $\bar{\xi}$  の adjoint  $\Omega_0^2 \bar{\xi}$  に対して、次を得る。

$$\mu^p \circ \Omega_0^2 \bar{\xi} \simeq i^2 \circ r_m \circ \Omega_0^2 \bar{\xi} : C_\eta \rightarrow \Omega^2 S^{2m+1} \rightarrow \Omega^2 S^{2m+1}.$$

$g = r_m \circ \Omega_0^2 \bar{\xi} : C_\eta \rightarrow S^{2m-1}$  とすると  $i^2 \circ g$  の adjoint は  $E^2 g$  である。

$\mu^p \circ \Omega_0^2 \bar{\xi}$  は  $E^2 C_\eta \rightarrow \bar{\xi} S^{2m+1} \subset E^2 \Omega^2 S^{2m+1} \xrightarrow{E^2 \mu^p} E^2 \Omega^2 S^{2m+1} \xrightarrow{e} S^{2m+1}$  の adjoint である。

ここで、 $e$  は evaluation、 $f_p = e \circ E^2 \mu^p \circ i^2 : S^{2m+1} \rightarrow S^{2m+1}$  は degree  $p$  の写像である。 $E^2 g \simeq f_p \circ \bar{\xi}$  であり、

$f_p \circ \bar{\xi} : E^2 C_\eta \rightarrow S^{2m+1} \rightarrow S^{2m+1}$  は、 $\pi : \pi_{j+3}(S^{2m+1}) \rightarrow [Y^{j+3}, S^{2m+1}]$  に対して、 $-\pi^* \{p\iota_{2m+1}, E^2\xi, E^2\eta\}$  を表わす。

よって、 $E^2[g] \in -\{p\iota_{2m+1}, E^2\xi, E^2\eta\}_2$  である。bracket の indeterminacy は、 $p \cdot \pi_{j+3}(S^{2m+1}) + E^3 \pi_{i+1}(S^i)$  である。

Lem 2.2 により  $p(\pi_{j+3}(S^{2m+1})) \subset E^2(\pi_{j+1}(S^{2m-1}))$  なので、上の bracket は  $E^2$ -image である。

2番目の bracket  $\{E^2\xi, E^2\eta, p\iota_{j+2}\}$  は、合成  $\bar{\xi} \circ \tilde{p}\iota : S^{j+3} \rightarrow E^2 C_\eta \rightarrow S^{2m+1}$  で表される。ここで、 $\tilde{p}\iota$  は  $p\iota_{j+2}$  の

coextension である。 $H(\{E^2\xi, E^2\eta, p\iota_{j+2}\})$  は  $p$ -times であり、Th 2.3 により zero である。■

**Prop 3.1 (1)**  $m > 1$  とする。ある元  $\gamma \in \pi_i(Y^{2p(m+1)-5})$  に対して、 $x \in \pi_{i+3}(Q_2^{2m+1})$  が  $E^3\gamma$  による M-represented であるならば、 $d_1(x) = HP(x) \in \pi_i(Q_2^{2m-1})$  は、 $h_{m*}(\gamma) = \eta_m \circ \gamma \in \pi_i(Y^{2pm-2})$  による M-represented である。

(2)  $m = 1$  とする。 $x \in \pi_i(Q_2^3)$  が  $\gamma \in \pi_i(Y^{4p-2})$  による M-represented であるならば、 $P(x) \in \pi_i(S^3)$  は、  
 $\tilde{h}_{1*}(\gamma) = \tilde{h}_1 \circ \gamma \in \pi_i(Y^{2p+1})$  による purely M-represented である。

$$(2.1.12) \mu^p \simeq i^2 \circ r_m : (\Omega^2 S^{2m+1}, S^{2m-1}) \rightarrow (\Omega^2 S^{2m+1}, S^{2m-1})$$

**Lem 2.2**  ${}_p\pi_i(Q_2^{2m-1})$  は、elementary である。すなわち  $p({}_p\pi_i(Q_2^{2m-1})) = 0$ .

**Th 2.3**  $p^m({}_p\pi_i(S^{2m+1})) = 0$ .

**Prop 4.5**  $r > 0$  に対して、invariants  $a_r(2m - 1)$  は非自明である。

$$\text{Proof. } J(a_r(2m - 1)) = E^3((\pi\alpha^{r-1}i\alpha_1)(2pm - 2)) = \alpha_{r-1}\alpha_1(2pm + 1).$$

$\alpha_{r-1}\alpha_1(2pm + 1) \neq 0$  ならば  $a_r(2m - 1) \neq 0$  である。

そこで、 $\alpha_{r-1}\alpha_1(2pm + 1) = 0$  と仮定する。 (2.1.9) の準同型  $J$  は  $j: Q_2^{2m-1} \rightarrow \Omega^3 S^{2pm+1}$  によって誘導され、 $j \circ g_m$  は  $i^3$ 。  $\pi: Y^{2pm-2} \rightarrow S^{2pm-2} \rightarrow \Omega^3 S^{2pm+1}$  と homotopic であるので、 $J(a_r(2m - 1)) = 0$  である。

すると、(2.1.9) の準同型  $I$  のもとで、 $a_r(2m - 1)$  は  $\{p, \alpha_{r-1}, \alpha_1\}(2pm + 1)$  に属するある元  $\tilde{\alpha}$  の像となる。 Lem 4.2 により、 $\tilde{\alpha}$  は  $E^\infty(\tilde{\alpha})(2pm - 1) = \tilde{\alpha}_r$  を満たす  $\tilde{\alpha}_r(2pm - 1)$  の  $E^2$ -image である。

$a_r(2m - 1) = I(\tilde{\alpha}) = 0$  ならば、ある  $\xi$  に対して  $E^2 \tilde{\alpha} = E^2 \Delta(\xi) = p\xi$  である。しかしこれは  $\tilde{\alpha}_r$  の non-divisibility に矛盾する。よって  $a_r(2m - 1) \neq 0$  である。 ■

Th 2.5 の結果は、次のように拡張される。

**Th 4.2**  $r \not\equiv 0 \pmod{p}$  と仮定する。

(1)  $m \geq 1$  に対して、 $\alpha_r(2m + 1)$  が生成する  $\pi_{2m+rq}(S^{2m+1})$  の直和成分は  $\mathbb{Z}_p$  に同型である。

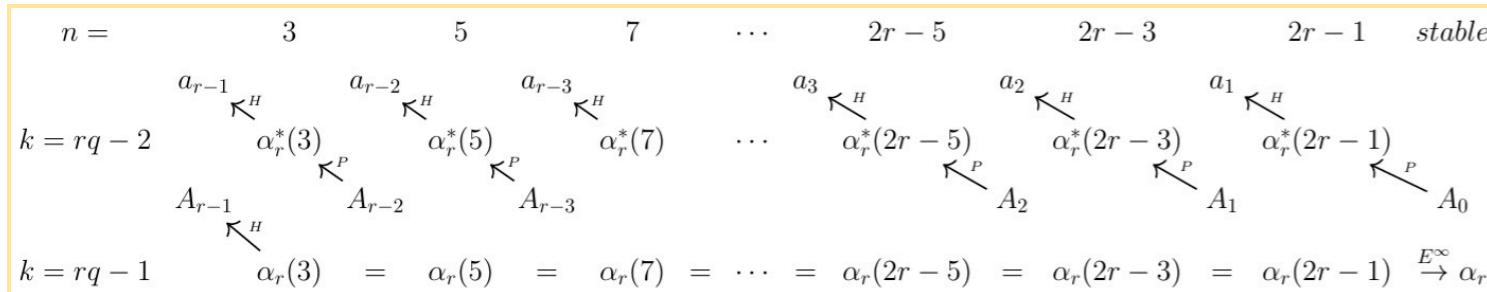
$E^2 \alpha_r(2m + 1) = \alpha_r(2m + 3)$  かつ  $H_p(\alpha_r(3)) = \alpha_{r-1}(2p + 1)$  if  $r > 1$ .

(2)  $1 \leq m < r$  に対して、 $\alpha_r^*(2m + 1)$  が生成する  $\pi_{2m+rq-1}(S^{2m+1})$  の直和成分は  $\mathbb{Z}_p$  に同型である。

$$H(\alpha_r^*(2m + 1)) = r \cdot a_{r-m}(2m - 1).$$

Proof. (1) は、 $r \not\equiv 0$  のときの  $\alpha_r$  が  $p$  で割り切れないことから成り立つ。 (2) は Prop 4.4, 4.5 から成り立つ。 ■

上の結果に対する computing diagram は次のように表される。



### 4.3 Unstable alpha families

ここで、 $r \equiv 0 \pmod{p}$  の場合に、 $(rq - 1)$ -stem と  $(rq - 2)$ -stem の群を考える。この場合に、Prop 4.5 は、

$$(4.3.1) \quad HP(A_{r-m-1}(2m + 1)) = H(\alpha_r^*(2m + 1)) = 0.$$

Lem 3.5, 3.6 により、次を得る。

**Lem 4.3**  $r \equiv 0 \pmod{p}$  かつ  $m \geq 1$  とする。

(1) 元  $\alpha_r^*(2m - 1) \in \pi_{2m-3+rq}(S^{2m-1})$  が存在して次を満たす。

$$E^2 \alpha_r^*(2m - 1) = \alpha_r^*(2m + 1), \quad p \cdot \alpha_r^*(2m - 1) = \alpha_r^*(2m - 1).$$

(2)  $\pi_{2m+2+rq}(S^{2m+3})$  の元  $\xi$  に対して  $H(\xi) = A_{r-m-1}(2m + 1)$  ならば、 $\pi_{2m+rq}(S^{2m+1})$  の元  $\xi'$  が存在して、次を満たす。  $H(\xi') = A_{r-m}(2m - 1)$  かつ  $E^2 \xi' = p\xi$ .

$a \not\equiv 0 \pmod{p}$  に対して  $r = ap^{v(r)}$  とする。このとき、 $\alpha_r$  は  $p^{v(r)}$  で割り切れる。  $1 \leq s \leq v(r)$  に対して、

$p^s \alpha_r^{(s)} = \alpha_r$  を満たす元を  $\alpha_r^{(s)}$  と書く。Gray [6] は、 $\alpha_r^{(s)}$  に収束する unstable element  $\alpha_r^{(s)}(2m + 2s + 1)$  を与えた。 $\pi_{2m-3+rq}(S^{2m-1})$  の元  $\alpha_r^{(s)}(2m - 1)$  を考え、もしそれが存在するならば、次を満たす。

$$(4.3.2) \quad E^{2s} \alpha_r^{(s)}(2m - 1) = \alpha_r^*(2m + 2s - 1) \quad \text{and} \quad p^s \alpha_r^{(s)}(2m - 1) = \alpha_r^*(2m - 1).$$

ここで、Gray [7] の結果を以下に引用する。

$$(2.1.9) \quad \Omega^2 S^{2pm-1} \xrightarrow{i} Q_2^{2m-1} \xrightarrow{j} \Omega^3 S^{2pm+1} \xrightarrow{\partial_p} \Omega S^{2pm-1}.$$

**Lem 4.2** 元  $\xi \in \pi_i(S^{2m-1})$  と  $\eta \in \pi_j(S^i)$  が次を満たすと仮定する。

$$p\xi = 0, \quad p\eta = 0, \quad E^2(\xi \circ \eta) = 0.$$

このとき、 $\{p\iota_{2m+1}, E^2\xi, E^2\eta\}$  と  $\{E^2\xi, E^2\eta, p\iota_{j+2}\}$  は  $E^2$ -images である。

**Th 2.5**  $k < pq - 2$  に対する非自明な unstable  $k$ -stem group は下記の通りである。

$$\pi_{2m+rq}(S^{2m+1}) \simeq \mathbb{Z}_p \{\alpha_r(2m + 1)\} \text{ for } 1 \leq r \leq p - 1 \text{ and } 1 \leq m,$$

$$\pi_{2pm-1}(S^{2m+1}) \simeq \mathbb{Z}_p \{P(Q^{m+1}(\iota))\} \text{ for } 1 < m < p,$$

$$\pi_{2m+rq-1}(S^{2m+1}) \simeq \mathbb{Z}_p \{\overline{Q}^{m+1}(\alpha_{r-m-1})\} \text{ for } 1 < r < p \text{ and } 1 \leq m < r - 1,$$

**Prop 4.5**  $r > 0$  に対して、invariants  $a_r(2m - 1)$  は非自明である。

$$\text{Prop 4.4} \quad d_1(A_{r-1}(2m + 1)) = HP(A_{r-1}(2m + 1)) = (m + r)a_r(2m - 1).$$

invariant  $A_{r-m-1}(2m + 1)$  の  $P$ -image を次のように書く。

$$(4.2.1) \quad \alpha_r^*(2m + 1) = P(A_{r-m-1}(2m + 1)) \in \pi_{2m+rq-1}(S^{2m+1}) \text{ for } 1 \leq m < r.$$

**Lem 3.5**  $\xi \in \pi_{i+5}(S^{2m+3})$  の Hopf invariant  $H(\xi)$  が  $E^4(\gamma)$  による M-represented であり、 $h_{m^*}(\gamma) = 0$  ならば、元

$\eta \in \pi_{i+3}(S^{2m+1})$  が存在し、 $p \cdot \xi = E^2\eta$  であり、 $H(\eta)$  は  $\alpha(2pm - 2) \circ E^2\gamma$  による M-represented である。

**Lem 3.6**  $\xi \in \pi_{i+4}(S^{2pm+1})$  の Hopf invariant  $H(\xi) \in \pi_{i+1}(Q_2^{2pm-1})$  が、 $\gamma \in \pi_{i-1}(Y^{2p(pm-1)-4})$  に対して、 $E^2\gamma$  による

M-represented であり、 $h_{pm-1}(\gamma) = 0$  を満たすならば、up to non-zero coefficient で  $H(\Delta(\xi))$  は、

$\alpha(2p(pm - 1) - 2) \circ \gamma$  による M-represented である。

$$E^2 \alpha_r^*(2m - 1) = \alpha_r^*(2m + 1), \quad (\text{まま})$$

$$E^2 \alpha_r^*(2m - 1) = \alpha_r^*(2m + 1) \text{ では？}$$

[6] B.W.Gray, On the sphere of origin of infinite families in the homotopy groups of spheres, Topology 8, (1969), 219-232.

[7] B.W.Gray, Unstable families related to the image of  $J$ , Proc. Camb. Phil. Soc, 96 (1984), 95-113.

**Lem 4.4**  $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ ,  $v = v(r)$  に対して  $r = ap^v$  とする。このとき、元  $\alpha_r^{*(v)}(2r - 2v - 1) \in \pi_{2pr-2v-3}(S^{2r-2v-1})$

が存在して、次を満たす。 $E^{2v}\alpha_r^{*(v)}(2r - 2v - 1) = \omega = PI(\iota_{2pr-1}) \in \pi_{2pr-3}(S^{2r-1})$ .

さらに、 $Im J \cap \pi_{v+1}^S$  の生成元  $\alpha_{v+1}^J$  に対して、 $H(\alpha_r^{*(v)}(2r - 2v - 1)) = Q^{2r-2v-1}(\alpha_{v+1}^J)$  である。

議論の便宜のために、以下を提案する。

**Assertion A** Lem 4.4 の中で、 $\alpha_{v+1}^J$  の代わりに up to non-zero coefficient で  $\tilde{\alpha}_{v+1}$  を取ることができる。

$r < p(p-1)$  のとき、 $\pi_{rq-1}^S$  は1つの生成元を持つことがわかる。したがって、Assertion A は成り立つ。

$r = p(p-1)$  の場合、 $\pi_{rq-1}^S$  は他の生成元  $\alpha_1 \beta_1^{p-1}$  を持つ。 $Q^{2r-2v-1}(\alpha_1 \beta_1^{p-1}) = HP(Q^{2r-2v})$  なので、Lem 4.4 の

中の  $\alpha_{v+1}^J$  を  $\tilde{\alpha}_{v+1}$  で置き換えることができる。 $\pi_{rq-1}^S$  の alpha type でない次の生成元は、 $\alpha_1 \beta_1^{p-2} \beta_2$  である。よって、 $r < p^2 + 1$  に対して Assertion A は成り立ち、以下同様である。

次の定理は、[7] における Gray の元と、EHP-sequence の中の invariants との関係を示している。

Recall (4.2.1)  $\alpha_r^*(2m+1) = P(A_{r-m-1}(2m+1))$

**Th 4.3**  $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ ,  $v = v(r) > 0$  に対して、 $r = ap^v$  とする。 $s \leq v, s < m \leq r-s$  に対して、元

$\alpha_r^{*(s)}(2m+1) \in \pi_{2m-1+rq}(S^{2m+1})$  が、 $s \leq v, s < m$  に対して、元  $\alpha_r^{(s)}(2m+1) \in \pi_{2m+rq}(S^{2m+1})$  が存在して、up to non-zero coefficients で次の性質を満たす。

(0)  $\alpha_r^{*(0)}(2m+1) = \alpha_r^*(2m+1), \alpha_r^{(0)}(2m+1) = \alpha_r^*(2m+1)$ .

(1)  $1 \leq s \leq v, s < m \leq r-s$  に対して、 $p \cdot \alpha_r^{*(s)}(2m+1) = \alpha_r^{*(s-1)}(2m+1), E^2 \alpha_r^{*(s)}(2m+1)$

$= \alpha_r^{*(s-1)}(2m+3)$ .

(2)  $1 \leq s \leq v, s < m$  に対して、 $p \cdot \alpha_r^{(s)}(2m+1) = \alpha_r^{(s-1)}(2m+1), E^2 \alpha_r^{(s)}(2m+1) = \alpha_r^{(s)}(2m+3)$ .

(3)  $1 \leq m \leq v+1$  に対して、 $H(\alpha_r^{(m)}(2m+1)) = A_{r-m}(2m-1)$ ,

$v+1 \leq m < r$  に対して、 $P(A_{r-m-1}(2m+1)) = E^{2v} \alpha_r^{*(s)}(2m+1)$ .

(4)  $\alpha_r^{*(s)}(2m+1)$  と  $\alpha_r^{(s)}(2m+1)$  の位数はどちらも  $p^{s+1}$  である。

(5)  $r$  に対して Assertion A であるならば、特に  $r \leq p^{p^2}$  のとき、 $s = \text{Min}(v, m+1), 1 \leq m < r-v$  に対して、

$H(\alpha_r^{*(s)}(2m+1)) = A_{r-m}(2m-1)$ .

Proof. Lem4.3(2) の元  $\xi \in \pi_{2m+2+rq}(S^{2m+3})$  が存在するならば、次々に  $\xi, \xi', \dots, \xi^{(m-1)}$  を得ることができ、最後の元  $\xi^{(m-1)} \in \pi_{2+rq}(S^3)$  は、 $E^{2m-2} \xi^{(m-1)} = p^{m-1} \xi$  と  $H(\xi^{(m-1)}) = A_{r-1}(1) = H(\alpha_r(3))$  を満たす。

このように、 $\xi^{(m-1)}$  は位数  $p$  であり、 $\xi$  の位数は  $p^{m+1}$  である。Th4.1 から  $m \leq v$  が成り立つ。これは、もし  $m > v$  ならば、そのような元  $\xi$  が存在せず、次が成り立つことを示している。

(4.3.3)  $\alpha_r^*(2m+1) = P(A_{r-m-1}(2m+1)) \neq 0$  for  $m > v$ .

次に、上記の結果は、 $m$  がより大きな値である場合、 $\alpha_r^{*(s)}(2m+1)$  は存在すれば order  $p^{s+1}$  であることを意味する。 $m = v$  に対して (4.3.3) が成り立つならば、Th2.3 に矛盾する order  $p^{v+1}$  の元  $\alpha_r^{*(v)}(2v+1)$  が存在する。

これは、 $\alpha_r^{(v)}(2v+3)$  が存在し  $H(\alpha_r^{(v)}(2v+3)) = A_{r-v-1}(2v+1)$  が成り立つことを意味する。よって、

$1 \leq m \leq v+1$  に対して、 $\alpha_r^{(m-1)}(2m+1)$  が存在する。この結果、(1)~(4) が成立する。Lem4.4 から (5) が成り立つ。■

$\alpha_r^{(s)}$  または  $E^{2j} \alpha_r^{*(s)}$  によって生成される  $\pi_i^S(S^{2m+1})$  の部分群を  $A_i^{2m+1}$  と書く。

invariant  $A_{r-m-1}(2m+1)$  の P-image を次のように書く。

(4.2.1)  $\alpha_r^*(2m+1) = P(A_{r-m-1}(2m+1)) \in \pi_{2m+rq-1}(S^{2m+1})$  for  $1 \leq m < r$ .

**Lem 4.3**  $r \equiv 0 \pmod{p}$ かつ  $m \geq 1$  とする。

(1) 元  $\alpha_r^*(2m-1) \in \pi_{2m-3+rq}(S^{2m-1})$  が存在して次を満たす。

$E^2 \alpha_r^*(2m-1) = \alpha_r^*(2m+1), p \cdot \alpha_r^*(2m-1) = \alpha_r^*(2m-1)$ .

(2)  $\pi_{2m+2+rq}(S^{2m+3})$  の元  $\xi$  に対して  $H(\xi) = A_{r-m-1}(2m+1)$  ならば、 $\pi_{2m+rq}(S^{2m+1})$  の元  $\xi'$  が存在して、次を満たす。

$H(\xi') = A_{r-m}(2m-1)$  かつ  $E^2 \xi' = p\xi$ .

**Th 4.1**  $e : \pi_{rq-1}^S \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ . 整数  $a \not\equiv 0 \pmod{p}$  に対して、 $r = ap^v$  とする。

(1)  $e(\alpha_r) \equiv -1/p \pmod{p}$ .

(2)  $e(\pi_{rq-1}^S) \subset \mathbb{Z}(1/p^{v+1})/\mathbb{Z}$ .

(3)  $e(p, \alpha_{r-1}, \alpha_1) = b/p^{v+1}$  for some  $b \not\equiv 0 \pmod{p}$ .

**Lem 4.4**  $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ ,  $v = v(r)$  に対して  $r = ap^v$  とする。このとき、元  $\alpha_r^{*(v)}(2r-2v-1) \in \pi_{2pr-2v-3}(S^{2r-2v-1})$  が存在して、次を満たす。

$E^{2v} \alpha_r^{*(v)}(2r-2v-1) = \omega = PI(\iota_{2pr-1}) \in \pi_{2pr-3}(S^{2r-1})$ .

さらに、 $Im J \cap \pi_{v+1}^S$  の生成元  $\alpha_{v+1}^J$  に対して、 $H(\alpha_r^{*(v)}(2r-2v-1)) = Q^{2r-2v-1}(\alpha_{v+1}^J)$  である。

**Th 2.3**  $p^m (\pi_i^S(S^{2m+1})) = 0$ .

$$(4.3.4) A_{2m+rq}^{2m+1} = \{\alpha_r^{(s)}(2m+1)\} \text{ for } s = \min(v, m)$$

$$A_{2m+rq-1}^{2m+1} = \{\alpha_r^{*(s)}(2m+1)\} \text{ for } s = \min(v, r-m, m) \text{ and } m < r-v$$

$$A_i^{2m+1} = 0 \text{ otherwise.}$$

また、 $A_{r-m}(2m-1)$  または  $a_{r-m}(2m-1) \in \text{Im } P$  によって生成される  $\pi_i(Q_2^{2m-1})$  の部分群を  $AQ_i^{2m-1}$  と書く。

$$(4.3.5) AQ_{rq-1}^{2m-1} = \{A_{r-m}(2m-1)\} \text{ for } 1 \leq m \leq r$$

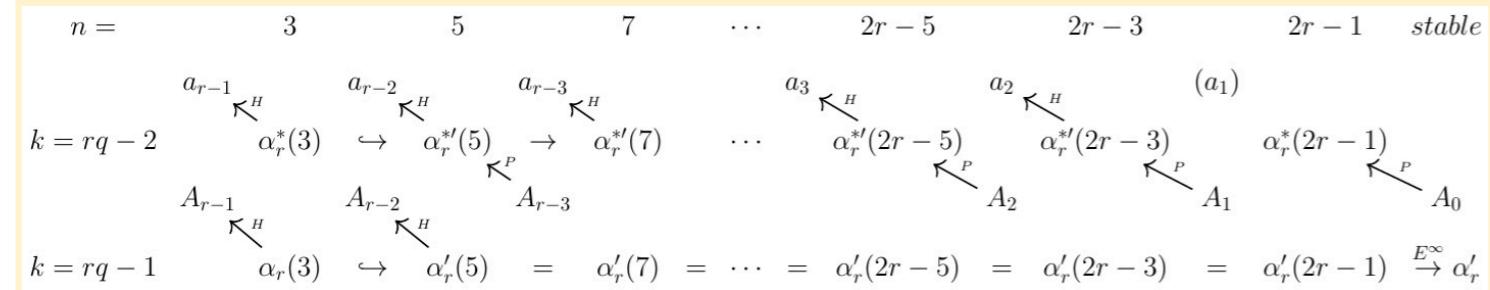
$$AQ_{rq-2}^{2m-1} = \{a_{r-m}(2m-1)\} \text{ for } 1 \leq m < r-v$$

$$AQ_i^{2m-1} = 0 \text{ otherwise.}$$

$A_i^{2m+1}$  と  $AQ_i^{2m-1}$  からなる computing diagram の subsystem を **unstable alpha families** の system と呼ぶ。

**Prop 4.6**  $k < p^{p^2+1}q - 2$  に対して、up to a  $k$ -stem groups で、EHP-sequence の中の準同型  $E^2, H, P$  は、unstable alpha families 上で閉じている。

$v(r) = 1$  の場合の unstable alpha families の computing diagram は次のようにある。



この場合に、invariant  $a_1 = a_1(2r-3)$  は unstable alpha family の外にある。 $v(r) = 2$  ならば、 $a_1, a_2$  は family の外にある。

#### 4.4 Removability and Residue

EHP-sequence に関して、unstable alpha families が閉じていることを見てきた。しかしながら、これらの system 上で、EHP-sequence は完全である必要はない。

**Prop 4.7** unstable alpha families 上の EHP-sequence の完全性は、次の2点において壊れている。

(1)  $r - v(r) < m < r$  に対して、invariants  $a_r(2m+1)$  は unstable alpha families の  $H$ -images ではない。我々はこれを除外しなければならない。

(2)  $s \equiv 0 \pmod{p}, s < v(r)$  に対して、unstable elements  $\alpha_r^*(2r-2s-1)$  は、 $\Delta$  の kernel であり、alpha type でない invariant を生成する。

unstable alpha families を除いて、mod  $A$  の computing diagram を作成する。その場合、上記の2種類の要素を residue elements として加えなければならない。

他方、IJΔ-sequence に関する unstable alpha families の互換性、特に準同型  $\Delta: \pi_{i+2}(S^{2pm+1}) \rightarrow \pi_i(S^{2pm-1})$  をチェックする必要がある。

Th4.2 の  $r \not\equiv 0 \pmod{p}$  の場合を考える。 $E^2: A_{2pm+rq-2}^{2pm-1} \rightarrow A_{2pm+rq}^{2pm+1} \simeq \mathbb{Z}_p$  は同型であり、 $\Delta \circ E^2 = p$  なので、

$\Delta(A_{2pm+rq}^{2pm+1}) = 0$  を得る。よって、IJΔ-sequence は2つの invariant  $A_r(2m-1)$  と  $a_r(2m-1)$  を与える。

$(rq-2)$ -stem group の生成元  $\alpha_r^*(2pm-1)$  と  $\alpha_r^*(2pm+1)$  は、 $H(\alpha_r^*(2pm-1)) = a_{r-m}^*(2pm-3)$  と、 $H(\alpha_r^*(2pm+1)) = a_{r-m-1}^*(2pm-1)$  を満たす。 $\alpha_k^*$  の定義により、 $\alpha_k^* = \alpha \circ a_{r-m-1}^*$  を得る。よって、Lem3.7 から、 $\Delta(\alpha_r^*(2pm+1)) \equiv \alpha_r^*(2pm-1) \pmod{\ker H = \text{Im } E^2}$  が成り立つ。これは、 $\Delta$  が  $(kq-2)$ -stem group の生成元を消すことを示している。

$r \equiv 0 \pmod{p}$  の場合、結果は似たようなものであるが、大きい order の生成元を使う方がより簡単である。

例外的に  $E^2: A_{2pm+\epsilon+rq-2}^{2pm-1} \rightarrow A_{2pm+\epsilon+rq}^{2pm+1}$  ( $\epsilon = 0, -1$ ) は単射であるが、 $\text{Coker } E^2 \simeq \mathbb{Z}_p$  となる場合がある。この場合、対応する  $\Delta$  はどちらも全射であり、それぞれに対して1つの invariant を与える。

**Th 4.2**  $r \not\equiv 0 \pmod{p}$  と仮定する。

(1)  $m \geq 1$  に対して、 $\alpha_r(2m+1)$  が生成する  $\pi_{2m+rq}(S^{2m+1})$  の直和成分は  $\mathbb{Z}_p$  に同型である。

$E^2 \alpha_r(2m+1) = \alpha_r(2m+3)$  かつ  $H_p(\alpha_r(3)) = \alpha_{r-1}(2p+1)$  if  $r > 1$ .

(2)  $1 \leq m < r$  に対して、 $\alpha_r^*(2m+1)$  が生成する  $\pi_{2m+rq-1}(S^{2m+1})$  の直和成分は  $\mathbb{Z}_p$  に同型である。

$H(\alpha_r^*(2m+1)) = r \cdot a_{r-m}(2m-1)$ .

**Lem 3.7**  $\xi \in \pi_{i+4}(S^{2pm+1}), \gamma \in \pi_s^S, \delta \in \pi_t^S$  に対して、up to non-zero coefficients で次の関係が成り立つ。

(1)  $H(\xi) = Q^{pm}(\gamma)$  は、 $H(\Delta(\xi)) = \bar{Q}^{pm-1}(\alpha\gamma) = HP(\bar{Q}^{pm}(\xi))$  を誘導する。

(2)  $H(\xi) = Q^{pm}(\gamma), \Delta(\xi) = P(\bar{Q}^{pm}(\gamma))$  は、 $H(\xi \circ \delta(i+4)) = Q^{pm}(\gamma\delta), \Delta(\xi \circ \delta(i)) = P(\bar{Q}^{pm}(\gamma\delta))$  を誘導する。

## 5 Old Table of 3-primary Groups

### 5.1 3-primary Groups, stable to unstable

$k \leq 45$  に対する  $k$ -次ホモトピー群の 3-成分の結果は、Toda[37],[38] の中で与えられて、 $k \leq 55$  に対する報告は、1998年に Maruyama と Mimura によって与えられた。我々は下記の Oka[22] による、alpha type generators  $\alpha_r, \alpha'_{3s}, \alpha''_{9t}$  を除いた  $k < 62$  に対する 3-primary stable homotopy groups  ${}_3\pi_k^S$  の結果から見積もりを始めることにする。生成元の記法について、[22] で与えられたものを用いる。

(5.1.1) 関係式は符号を無視するものとする。

$$(1) {}_3\pi_{10}^S = \{\beta_1\}, \quad \beta_1 = \{\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1\}.$$

$$(2) {}_3\pi_{13}^S = \{\alpha_1 \beta_1\}.$$

$$(3) {}_3\pi_{20}^S = \{\beta_1^2\}.$$

$$(4) {}_3\pi_{23}^S = \{\alpha_1 \beta_1^2\}.$$

$$(5) {}_3\pi_{26}^S = \{\beta_2\}.$$

$$(6) {}_3\pi_{29}^S = \{\alpha_1 \beta_2\}.$$

$$(7) {}_3\pi_{30}^S = \{\beta_1^3\}, \quad \beta_1^3 = \{\alpha_1, 3, \beta_2\}.$$

$$(8) {}_3\pi_{36}^S = \{\beta_1 \beta_2\}.$$

$$(9) {}_3\pi_{37}^S = \{\varepsilon'\}, \quad \varepsilon' = \{\alpha_1, \alpha_1, \beta_1^3\}.$$

$$(10) {}_3\pi_{38}^S = \{\varepsilon_1\}, \quad \varepsilon_1 = \{\alpha_1, 3, \beta_1^3, \alpha_1\}.$$

$$(11) {}_3\pi_{39}^S = \{\alpha_1 \beta_1 \beta_2\}.$$

$$(12) {}_3\pi_{40}^S = \{\beta_1^4\}, \quad \alpha_1 \varepsilon' = \beta_1^4.$$

$$(13) {}_3\pi_{42}^S = \{\varepsilon_2\}, \quad \varepsilon_2 = \{\alpha_1, 3, \varepsilon_1\} = 2\{3, \alpha_1, \varepsilon_1\}.$$

$$(14) {}_3\pi_{45}^S = \{\varphi\}, \quad \varphi = \{\alpha_1, \alpha_1, \varepsilon_1\}, p\varphi = \alpha_1 \varepsilon_2.$$

$$(15) {}_3\pi_{46}^S = \{\beta_1^2 \beta_2\}.$$

$$(16) {}_3\pi_{47}^S = \{\beta_1 \varepsilon'\}.$$

$$(17) {}_3\pi_{49}^S = \{\alpha_1 \beta_1^2 \beta_2\}.$$

$$(18) {}_3\pi_{50}^S = \{\beta_1^5\}.$$

$$(19) {}_3\pi_{52}^S = \{\beta_2^2\}, \quad \beta_2^2 = \{\alpha_1, \alpha_1, \varphi\}.$$

$$(20) {}_3\pi_{55}^S = \{\alpha_1 \beta_2^2\}.$$

ここからは、3-primary unstable groups mod A の計算に限定し、簡単のため、次の記号を使う。

$$\pi_i^n = {}_3\pi_i(S^n)/A_i^n, \quad Q_i^n = {}_3\pi_i(Q_2^n)/AQ_i^n, \quad \pi_k^S = {}_3\pi_k^S/A_k^S.$$

double suspension  $E^2$  の次の列について、 $k$  と  $n$  の帰納法によって行われる。

$$(5.1.2) \quad \pi_{3+k}^3 \xrightarrow{E^2} \pi_{5+k}^5 \xrightarrow{E^2} \cdots \xrightarrow{E^2} \pi_{2m-1+k}^{2m-1} \xrightarrow{E^2} \pi_{2m+1+k}^{2m+1} \xrightarrow{E^2} \cdots \xrightarrow{S^\infty} \pi_k^S,$$

ここで、stable group  $\pi_k^S$  と unstable groups  $\pi_{2m+1+j}^{2m+1}$  for  $j < k$  は既に決定されているものと仮定する。

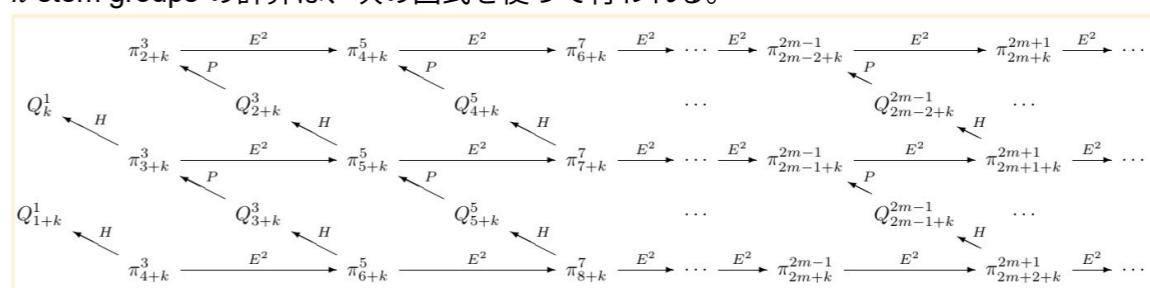
各 double suspension  $E^2$  は、 $p = 3$  の EHP-sequence (2.1.1) を使うことにより確かめられる。

$$(5.1.3) \quad \cdots \xrightarrow{H} Q_{2m-1+k}^{2m-1} \xrightarrow{P} \pi_{2m-1+k}^{2m-1} \xrightarrow{E^2} \pi_{2m+1+k}^{2m+1} \xrightarrow{H} Q_{2m-2+k}^{2m-1} \xrightarrow{P} \cdots.$$

- [37] H.Toda. On homotopy groups of  $S^3$ -bundles over spheres, J. Math. Kyoto Univ. 2 (1963), 193-207.
- [38] H.Toda. On Iterated Suspensions I,II,III, J. Math. Kyoto Univ. 5 (1966), 87-142,209-250, 8(1968),101-130.
- [22] S.Oka, The stable homotopy groups of spheres, I, II, III, Hiroshima Math. J. 1(1971), 305-337, 2(1972), 99-161, 5(1975), 407-438.

### Computing Diagram mod A

$k$ -stem groups の計算は、次の図式を使って行われる。



ここで、群  $Q_{2m-1+k}^{2m-1}$  は Th 2.2 の  $IJ\Delta$ -sequence によって、あらかじめ決定されなければならない。 $k < 107$  に対して、section 4.5 により、 $Q_{2m-1+k}^{2m-1}$  は次の extra elements を含んでいる。

$$(5.1.4) w = IP(\iota) \in Q_{18m-5}^{2m-1}, a_1 \in Q_{18m-8}^{6m-3}, a_2 \in Q_{54m-8}^{18m-5}.$$

(5.1.4) により生成される部分群による商を  $\overline{Q}_{2m-1+k}^{2m-1}$  とする。このとき、invariants mod A は、次の完全列により得られる。

$$(5.1.5) \cdots \rightarrow^J \pi_{2m+1+k}^{6m+1} \xrightarrow{\Delta} \pi_{2m-1+k}^{6m-1} \rightarrow^I \overline{Q}_{2m-1+k}^{2m-1} \rightarrow^J \pi_{2m+k}^{6m+1} \xrightarrow{\Delta} \pi_{2m-2+k}^{6m-1} \rightarrow^I \cdots.$$

$m = 1$  のとき、 $k \neq 0$  に対して  $H: \pi_{3+k}^3 \rightarrow Q_k^1$  は全射である。よって、 $\pi_{3+k}^3$  は Th 2.4 から得られる次の列により直接計算される。

$$(5.1.6) \cdots \rightarrow^{H_p} \pi_{4+k}^7 \xrightarrow{\Delta} \pi_{2+k}^5 \xrightarrow{G} \pi_{3+k}^3 \rightarrow^{H_p} \pi_{3+k}^7 \xrightarrow{\Delta} \pi_{1+k}^5 \xrightarrow{G} \cdots.$$

(5.1.6) は  $k = 11$  の場合を除いて完全であることに注意する。computing diagram において  $Q_i^{2m-1}$  の生成元の多くは (2.3.1) ((2.4.1)[ママ]) または (2.3.2) ((2.4.2)[ママ]) の中で得られた stable type invariants  $Q^m(\xi) \in Q_{6m-1+k}^{2m-1}$  or  $\overline{Q}^m(\xi) \in Q_{6m+k}^{2m-1}$  for  $\xi \in \pi_k^S$  として与えられる。我々はこのような生成元を、対応するアルファベットで表わすことにする。次の (5.1.7) は、(5.1.1) の stable generator に対応する stable type invariants のリストである。

(5.1.7) Invariants  $Q^m(\xi)$  and  $\overline{Q}^m(\xi)$  for  $\xi \in \pi_k^S, k \leq 55$ .

$k$	0	3	7	10	13	20	23	26	29	30	36	37	38
$\xi$	$\iota$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\beta_1$	$\alpha_1\beta_1$	$\beta_1^2$	$\alpha_1\beta_1^2$	$\beta_2$	$\alpha_1\beta_2$	$\beta_1^3$	$\beta_1\beta_2$	$\varepsilon'$	$\varepsilon_1$
$Q^m(\xi)$	$i$	$a$	$a_2$	$b$	$ab$	$b^2$	$ab^2$	$b_2$	$ab_2$	$b^3$	$bb_2$	$e'$	$e_1$
$\overline{Q}^m(\xi)$				$B$	$AB$	$B^2$	$AB^2$	$B_2$	$AB_2$	$B^3$	$BB_2$	$E'$	$E_1$

$k$	39	40	42	45	45	46	47	49	50	52	55
$\xi$	$\alpha_1\beta_1\beta_2$	$\beta_1^4$	$\varepsilon_2$	$\varphi$	$\alpha_1\varepsilon_2$	$\beta_1^2\beta_2$	$\beta_1\varepsilon'$	$\alpha_1\beta_1^2\beta_2$	$\beta_1^5$	$\beta_2^2$	$\alpha_1\beta_2^2$
$Q^m(\xi)$	$abb_2$	$b^4$	$e_2$	$ph$	$\times$	$b^2b_2$	$be'$	$ab^2b_2$	$b^5$	$b_2^2$	$ab_2^2$
$\overline{Q}^m(\xi)$	$ABB_2$	$B^4$	$E_2$	$\times$	$AE_2$	$B^2B_2$	$BE'$	$AB^2B_2$	$B^5$	$B_2^2$	$AB_2^2$

Lem 3.1, 3.2, 3.3 を使うことにより、これらの stable type invariants の最初の微分  $d_1 = H \circ P: \pi_{i+3}(Q_2^{2m+1}) \rightarrow \pi_{i+3}(S^{2m+1}) \rightarrow \pi_i(Q_2^{2m-1})$  が確かめられる。以下で見るようすに、その結果は、 $m \pmod{3}$  の値によって定まる。

**Prop 5.1** 各 invariant  $x \in Q_{6m+3+k}^{2m+1}$  の像  $d_1(x) = HP(x) \in Q_{6m+k}^{2m-1}$  は、符号を除いて、下記で与えられる。

$k$	10	11	20	21	26	27	36	37	38	39	43
$x$	$b$	$B$	$b^2$	$B^2$	$b_2$	$B_2$	$bb_2$	$BB_2$	$e'$	$E'$	$E_1$
$m \equiv 0$	$ab$	$0$	$ab^2$	$0$	$ab_2$	$b^3$	$abb_2$	$0$	$b^4$	$0$	$e_2$
$m \equiv 1$	$ab$	$AB$	$ab^2$	$AB^2$	$ab_2$	$AB_2$	$abb_2$	$ABB_2$	$b^4$	$B^4$	$0$
$m \equiv 2$	$0$	$AB$	$0$	$AB^2$	$0$	$AB_2$	$0$	$ABB_2$	$0$	$B^4$	$e_2$
											$AE_2$

$k$	46	47	47	48	52	53
$x$	$b^2b_2$	$B^2B_2$	$be'$	$BE'$	$b_2^2$	$B_2^2$
$m \equiv 0$	$ab^2b_2$	$0$	$b^5$	$0$	$ab_2^2$	$0$
$m \equiv 1$	$ab^2b_2$	$AB^2B_2$	$b^5$	$B^5$	$ab_2^2$	$AB_2^2$
$m \equiv 2$	$0$	$AB^2B_2$	$0$	$B^5$	$0$	$AB_2^2$

残りの invariants に対して、 $d_1(x) = 0$  である。

$$(5.1.8) x = ab, ab^2, ab_2, b^3, e_1, abb_2, b^4, e_2, ab_2^2, b^5, ab_2^2,$$

$$(5.1.9) x = AB, AB^2, AB_2, B^3, ABB_2, B^4, AB^2B_2, B^5, AB_2^2.$$

Proof.  $\alpha_1\xi$  が 3 で割れないならば、Lem 3.1 により  $x = Q^{m+1}(\xi)$  に対して、 $d_1(x) = (m+1)Q^m(\alpha_1\xi) \neq 0$  である。これは invariants  $x = b, b^2, bb_2, e', b^2b_2, be', b_2^2$  に適用される。ここで、 $\alpha_1\varepsilon' = \beta_1^4$  であることに注意する。同様に、Lem 3.2 から  $X = B, B^2, B_2, BB_2, E', BE', B_2^2$  に対して、 $m \equiv 1, 2 \pmod{3}$  ならば  $d_1(X) = \pm AX$  である。

**Th 2.2** (2.1.9) の mod  $p$  fibration は、次の  $IJ\Delta$ -sequence を誘導し、これは、mod  $p$  で完全である。

$$\cdots \rightarrow^\Delta \pi_{i+2}(S^{2pm-1}) \rightarrow^I \pi_i(Q_2^{2m-1}) \rightarrow^J \pi_{i+3}(S^{2pm+1}) \rightarrow^\Delta \pi_{i+1}(S^{2pm-1}) \rightarrow^I \cdots$$

**Th 2.4** 次の列は  $i + 1 \neq 3$  のとき、mod  $p$  で完全である。

$$\cdots \rightarrow^{H_p} \pi_{i+2}(S^{2p+1}) \rightarrow^\Delta \pi_i(S^{2p-1}) \rightarrow^G \pi_{i+1}(S^3) \rightarrow^{H_p} \pi_{i+1}(S^{2p+1}) \rightarrow^\Delta \cdots$$

ここで、 $G$  は  $G(\xi) = \alpha_1(3)$  。  $E(\xi)$  for  $\xi \in \pi_i(S^{2p-1})$  で与えられ、Hopf invariant  $H_p$  は、次を満たす。

$$H_p\{\alpha_1(3), p\iota_{2p}, E(\xi)\}_1 = -E^2(\xi) \text{ for } \xi \in \pi_i(S^{2p-1}) \text{ with } p \cdot \xi = 0.$$

invariant  $x \in \pi_p(Q_2^{2m-1})$  に対して、 $x = I(\xi')$  となる元  $\xi' \in \pi_{i+2}(S^{2pm-1})$  が存在して、stable class  $\xi = E^\infty(\xi')$  が  $p$  で割り切れないとき、(2.3.1)  $x = Q^m(\xi)$  と書くことにする。また、 $y \in \pi_p(Q_2^{2m-1})$  に対して、stable class  $\eta = E^\infty(J(y))$  が非自明のとき、(2.3.2)  $y = \overline{Q}^m(\eta)$  と書くことにする。 $Q^m(\xi)$  と  $\overline{Q}^m(\eta)$  はどちらも stable type と呼ばれる。これらの invariants は stable classes  $\xi$  または  $\eta$  によって一意に定まらないことに注意する。

$Q^m(\xi)$  は  $\xi'$  の選び方による。 $\overline{Q}^m(\eta)$  は indeterminacy が  $\ker(E^\infty \circ J)$  である。

**Lem 3.1**  $\xi \in \pi_k^S$  に対して、 $u(\xi) < 2p(m+1) - 5$  ならば、 $d_1(Q^{m+1}(\xi)) = PH(Q^{m+1}(\xi)) = (m+1)Q^m(\alpha_1\xi)$  .

$m = 1$  のときは、 $u(\xi) \leq 4p - 3$  である  $\xi$  に対してこの式が成り立つ。

**Lem 3.2**  $\xi \in \pi_k^S$  に対して、 $u(\xi) < 2p(m+1) - 5, p\xi = 0$  ならば、 $d_1(\overline{$

しかし  $m \equiv 0 \pmod{3}$  の場合、 $d_1(X)$  は 0 である必要はなく、ある  $\eta$  に対して  $Q^m(\eta)$  の形かもしれない。  
 $\pi_{14}^S = 0$  なので  $d_1(B) = 0$  である。よって、自然性により、 $X = B^2, BB_2, BE'$  に対して  $d_1(X) = 0$  である。また  
 $m \equiv 0 \pmod{3}$  の場合、 $\pi_{41}^S = 0$  なので  $d_1(E') = 0$  であり、 $\pi_{56}^S = 0$  なので  $d_1(B_2^2) = 0$  である。Lem 3.3 と  
(5.1.1) (7) の関係式から  $d_1(B_2) = b^3$  が成り立つ。(5.1.1) (13) の関係式と Lem 3.3 から

$$\eta = (m+1)\{\alpha_1, 3, \varepsilon_1\} - m\{3, \alpha_1, \varepsilon_1\} = ((m+1) - 2m)\varepsilon_2 = (1-m)\varepsilon_2$$

に対して  $d_1(E_1) = Q^m(\eta)$  が成り立つ。よって  $E_1$  に対する結果を得る。

$m \equiv 0 \pmod{3}$  のとき、同様に、 $\eta = \{\alpha_1, 3, \varepsilon_2\}$  に対して  $d_1(E_2) = Q^m(\eta)$  である。 $\eta \neq 0$  と仮定すると、(5.1.1)  
(15) により  $\eta = \pm \beta_1^2 \beta_2$  である。(5.1.1) (13) により

$$\alpha_1 \eta = \{\alpha_1, \alpha_1, 3\} \varepsilon_2 = -\alpha_2 \varepsilon_2 = \alpha_2 \{3, \alpha_1, \varepsilon_1\} = \alpha_3 \varepsilon_1 = 3\alpha' \varepsilon_1 = 0$$

であり、これは  $\alpha_1 \eta = \pm \alpha_1 \beta_1^2 \beta_2 \neq 0$  に矛盾する。よって  $d_1(E_2) = Q^m(\eta) = 0$  である。  
(5.1.8), (5.1.9) の元  $x$  に対して  $d_1 = 0$  であることは容易に証明できる。■

次に short range unstable elements  $\{H(\xi) = x \neq 0, E^2 \xi = P(y) \neq 0\}$  を考える。

stable elements  $\gamma, \delta$  が次を満たすと仮定する。

$$(5.1.10) \quad \delta \in \{\alpha_1, \alpha_1, \gamma\}.$$

Lem 3.8, 3.9 から次の Prop を得る。

**Prop 5.2**  $m \equiv 0 \pmod{3}$  とする。(5.1.10) の元 に対して、 $x = Q^{m+2}(\gamma), y = Q^m(\delta)$  とする。このとき、元  
 $\xi \in \pi_i(S^{2m+1})$  が存在して次を満たす。 $H(\xi) = y, E^2 \xi = P(x)$ .

**Prop 5.3**  $m \equiv 1 \pmod{3}$  とする。(5.1.10) の元 に対して、 $X = \bar{Q}^{m+2}(\gamma), Y = \bar{Q}^m(\delta)$  とする。Lem 3.9 の中の関  
係  $d_1(X) = HP(X) = 0$  が得られる、例えば stable range の中の計算であると仮定する。このとき、元  
 $\xi \in \pi_i(S^{2m+1})$  が存在して次を満たす。 $H(\xi) = Y, E^2 \xi = P(X)$ .

(5.1.10) の元  $\gamma, \delta$  と、その関係する invariants のリストは下記の通りである。

$\gamma$	$\alpha_1$	$\alpha_1 \beta_1$	$\alpha_1 \beta_1^2$	$\alpha_1 \beta_2$	$\beta_1^3$	$\varepsilon_1$	$\alpha_1 \beta_1 \beta_2$	$\beta^4$	$\varphi$
$\delta$	$\beta_1$	$\beta_1^2$	$\beta_1^3$	$\beta_1 \beta_2$	$\varepsilon'$	$\varphi$	$\beta_1^2 \beta_2$	$\beta_1 \varepsilon'$	$\beta_2^2$
$x$	$a$	$ab$	$ab^2$	$ab_2$	$b^3$	$e_1$	$abb_2$	$b^4$	$ph$
$y$	$b$	$b^2$	$b^3$	$bb_2$	$e'$	$ph$	$b_2^2$	$be'$	$b_2^2$
$X$		$AB$	$AB^2$	$AB_2$	$B^3$		$ABB_2$	$B^4$	
$Y$		$B^2$	$B^3$	$BB_2$	$E'$		$B^2 B_2$	$BE'$	

## 5.2 Computation diagram mod A of lower stems

群  $\pi_{n+k}^n$  を完全に計算するために、computing diagrams mod A を使い、symbols  $E^2, H, P$  を省略し、 $Q_{n+k}^n$  を、そ  
の生成元に置き換える。また、 $\pi_{n+k}^n$  を次に示す直和成分の symbols の collection に置き換える。

$$(5.2.1) \quad \bullet \simeq \mathbb{Z}_3, \circlearrowleft \simeq \mathbb{Z}_9, \triangleright \simeq \mathbb{Z}_{27}.$$

$E^2$  に対する symbol = は、同型を表す。

$$(5.2.2) \quad \bullet = \bullet, \circlearrowleft = \circlearrowleft, \triangleright = \triangleright.$$

$E^2$  に対する symbol → は、同型でなく、非自明であるものを表す。

$$(5.2.3) \quad \bullet \rightarrow \circlearrowleft, \circlearrowleft \rightarrow \triangleright, \triangleright \rightarrow \bullet, \bullet \rightarrow \circlearrowleft, \circlearrowleft \rightarrow \bullet, \bullet \rightarrow \triangleright, \triangleright \rightarrow \bullet.$$

ここで、最初の 2 つは単射、次の 2 つは全射、最後の 2 つは  $p$  倍を表している。

まず、10-stem groups  ${}_3\pi_{n+10}(S^n)$  について述べる。 ${}_3\pi_{13}(S^3) \xrightarrow{E^2} {}_3\pi_{15}(S^5) \xrightarrow{E^2} {}_3\pi_{17}(S^7)$ .

これは次のように表される。 $\bullet \rightarrow \circlearrowleft \rightarrow \bullet$ .

Lem 2.1 の等式  $\Delta \cdot E^2 = p$  により次が成り立つ。 $Q_{13}^1 = \{b\} \simeq \mathbb{Z}/3, Q_{14}^1 = 0$ .

これは (5.1.5) が適用されない唯一の場合であることが分かっている。

**Lem 3.3**  $\xi \in \pi_k^S$  に対して、 $u(\xi) < 2p(m+1) - 5, p\xi = 0, \alpha_1 \xi = 0$  ならば、 $\eta \in (m+1)\{\alpha_1, p, \xi\} - m\{p, \alpha_1, \xi\}$

に対して、 $d_1(\bar{Q}^{m+1}(\xi)) = PH(\bar{Q}^{m+1}(\xi)) = Q^m(\eta)$ .

ここで、 $u(\xi) \leq 4p - 3$  の  $\xi$  に対して、 $m = 1$  のときに成り立つ。

$$(5.1.1) (7) \quad {}_3\pi_{30}^S = \{\beta_1^3\}, \quad \beta_1^3 = \{\alpha_1, 3, \beta_2\}.$$

$$(5.1.1) (13) \quad {}_3\pi_{42}^S = \{\varepsilon_2\}, \quad \varepsilon_2 = \{\alpha_1, 3, \varepsilon_1\} = 2\{3, \alpha_1, \varepsilon_1\}.$$

$$(5.1.1) (15) \quad {}_3\pi_{46}^S = \{\beta_1^2 \beta_2\}.$$

残りの invariants に対して、 $d_1(x) = 0$  である。

$$(5.1.8) \quad x = ab, ab^2, ab_2, b^3, e_1, abb_2, b^4, e_2, ab_2^2, b^5, ab_2^2,$$

$$(5.1.9) \quad x = AB, AB^2, AB_2, B^3, ABB_2, B^4, AB^2 B_2, B^5, AB_2^2.$$

**Lem 3.8**  $m \not\equiv -1, -2 \pmod{p}$  で、 $\gamma \in \pi_{i-4}(S^{2m+4p-9})$  に対して invariant  $x \in \pi_{i+2}(Q_2^{2m+3})$  は  $E^6(i_* \gamma)$  による

M-represented であり、 $\alpha_1(2m+4p-9) \circ \gamma = 0$  であるならば、 $\xi \in \pi_i(S^{2m+1})$  が存在して、up to non-zero

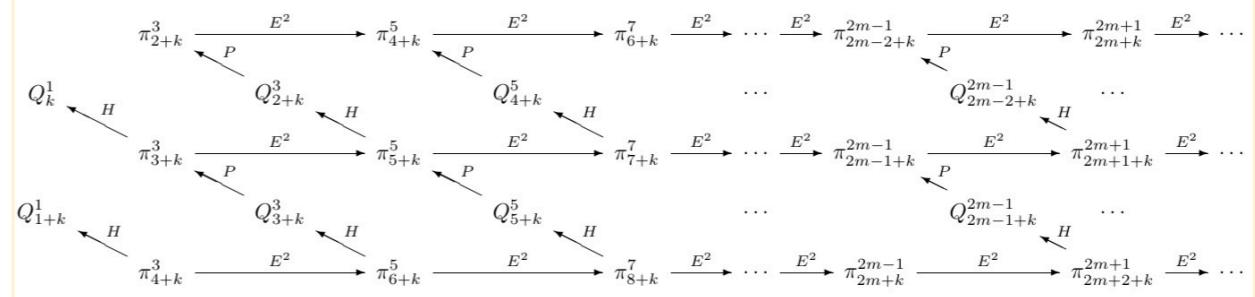
coefficient で  $H(\xi) \in I\{\alpha_1(2pm-1), \alpha_1(2pm+2p-4), E^3 \gamma\}, E^2(\xi) = P(x)$ .

**Lem 3.9**  $m \not\equiv 0, -1 \pmod{p}$  で、 $\gamma \in \pi_{i-3}(Y^{2m+4p-8})$  に対して invariant  $x \in \pi_{i+2}(Q_2^{2m+3})$  は  $E^6 \gamma$  による

M-represented であり、 $\eta_{m+1}^{(3)} \circ \gamma = 0$  であるならば、 $\xi \in \pi_{i+1}(S^{2m+1})$  が存在して、up to non-zero coefficient で

$$H_p(\xi) = JH(\xi) \in \{\alpha_1(2pm+1), \alpha_1(2pm+2p-2), E^3 \pi_* \gamma\}.$$

## Computing Diagram mod A



**Lem 2.1** 次の 2 つの合成は、どちらも  $p$  倍する写像である。

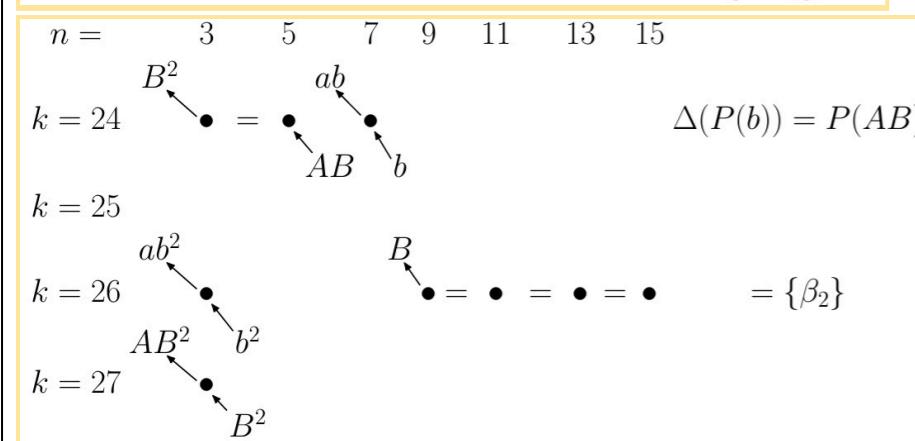
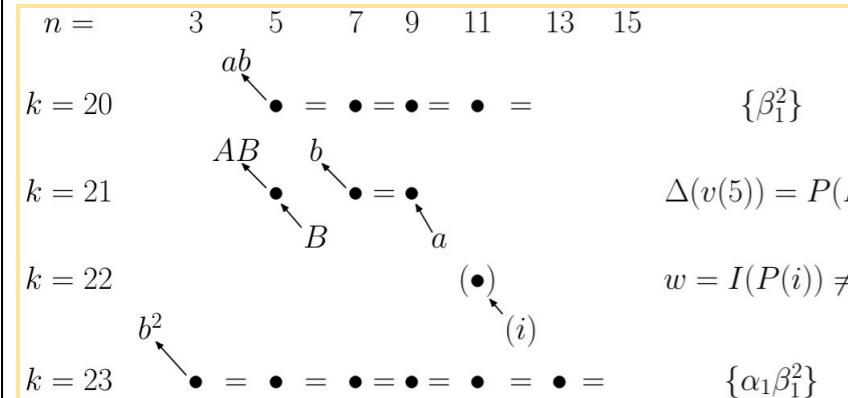
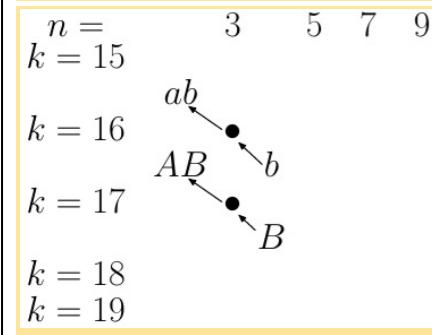
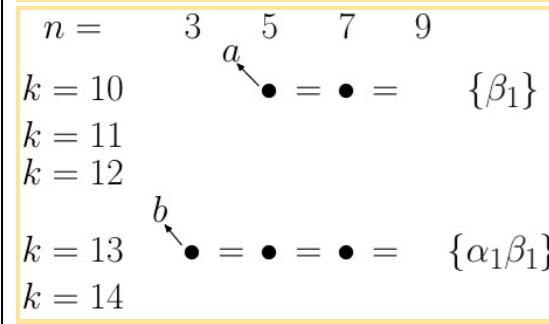
$$\Delta \cdot E^2 : {}_p\pi_i(S^{2pm-1}) \rightarrow {}_p\pi_{i+2}(S^{2pm+1}) \rightarrow {}_p\pi_i(S^{2pm-1}),$$

$$E^2 \cdot \Delta : {}_p\pi_{i+2}(S^{2pm+1}) \rightarrow {}_p\pi_i(S^{2pm-1}) \rightarrow {}_p\pi_{i+2}(S^{2pm+1}).$$

$$(5.1.5) \cdots \xrightarrow{J} {}_p\pi_{2m+1+k}^{6m+1} \xrightarrow{\Delta} {}_p\pi_{2m-1+k}^{6m-1} \xrightarrow{I} {}_Q^{2m-1} \xrightarrow{J} {}_p\pi_{2m+k}^{6m+1} \xrightarrow{\Delta} {}_p\pi_{2m-2+k}^{6m-1} \xrightarrow{I} \cdots.$$

27-stemまでの computing diagram mod Aは以下のように表される。

**Th 5.1**  $k \leq 27$  と奇数  $n$  に対して、 $k$ -stem groups mod  $A$   $\pi_{n+k}^n$  は、以下の通りである。



$m \geq 2$  に対して、 $Q_i^{2m-1}$  の全ての invariant は metastable range にあり、上の図式で示されているように、Th 2.2 または Prop 2.1 により生成元が得られる。

$\Delta$  の結果から、(5.1.6) により、 $Q_i^1 \simeq \pi_{3+i}^3$  の生成元が確かめられる。

$k = 13, 20, 23$  に対して、 $E^2: \pi_{5+k}^5 \rightarrow \pi_{7+k}^7$  が • の同型であるので、 $\Delta \circ E = p$  から、 $\Delta = 0: \pi_{7+k}^7 \rightarrow \pi_{5+k}^5$  である。

よって、図式で示されるように、 $\pi_{3+k}^3 \simeq Q_k^1$  と  $\pi_{4+k}^3 \simeq Q_{1+k}^1$  の生成元は、Th 2.4 により得られる。

$k = 21, 24$  に対して、 $E^2 = 0: \pi_{5+k}^5 \rightarrow \pi_{7+k}^7$  である。よって、Th 4.3 から、 $\Delta: \pi_{7+k}^7 \rightarrow \pi_{5+k}^5$  は全射であるので同型である。よって、 $\pi_{3+k}^3$  にはこれ以上、生成元は無い。

**Th 2.2** (2.1.9) の mod  $p$  fibration は、次の  $IJ\Delta$ -sequence を誘導し、これは、mod  $p$  で完全である。

$$\dots \xrightarrow{\Delta} \pi_{i+2}(S^{2pm-1}) \xrightarrow{I} \pi_i(Q_2^{2m-1}) \xrightarrow{J} \pi_{i+3}(S^{2pm+1}) \xrightarrow{\Delta} \pi_{i+1}(S^{2pm-1}) \xrightarrow{I} \dots$$

**Prop 2.1**  $i < 2p^2m - 3$  に対して、次の split 完全列を得る。

$$0 \rightarrow \pi_{i-2pm+3}^S \otimes \mathbb{Z}_p \rightarrow \pi_i(Q_2^{2m-1}) \rightarrow \text{Tor}(\pi_{i-2pm+2}^S, \mathbb{Z}_p) \rightarrow 0.$$

$$(5.1.6) \dots \xrightarrow{H_p} \pi_{4+k}^7 \xrightarrow{\Delta} \pi_{2+k}^5 \xrightarrow{G} \pi_{3+k}^3 \xrightarrow{H_p} \pi_{3+k}^7 \xrightarrow{\Delta} \pi_{1+k}^5 \xrightarrow{G} \dots$$

**Th 2.4** 次の列は  $i + 1 \neq 3$  のとき、mod  $p$  で完全である。

$$\dots \xrightarrow{H_p} \pi_{i+2}(S^{2p+1}) \xrightarrow{\Delta} \pi_i(S^{2p-1}) \xrightarrow{G} \pi_{i+1}(S^3) \xrightarrow{H_p} \pi_{i+1}(S^{2p+1}) \xrightarrow{\Delta} \dots$$

ここで、 $G$  は  $G(\xi) = \alpha_1(3) \circ E(\xi)$  for  $\xi \in \pi_i(S^{2p-1})$  で与えられ、Hopf invariant  $H_p$  は、次を満たす。

$$H_p\{\alpha_1(3), p\iota_{2p}, E(\xi)\}_1 = -E^2(\xi) \text{ for } \xi \in \pi_i(S^{2p-1}) \text{ with } p \cdot \xi = 0.$$

**Th 4.3**  $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ ,  $v = v(r) > r$  に対して、 $r = ap^v$  とする。 $s \leq v, s < m \leq r - s$  に対して、元

$\alpha_r^{*(s)}(2m+1) \in \pi_{2m-1+rq}(S^{2m+1})$  が、 $s \leq v, s < m$  に対して、元  $a_r^{*(s)}(2m+1) \in \pi_{2m+rq}(S^{2m+1})$  が存在して、up

to non-zero coefficients で次の性質を満たす。

$$(0) \alpha_r^{*(0)}(2m+1) = \alpha_r(2m+1), \alpha_r^{*(0)}(2m+1) = \alpha_r(2m+1).$$

$$(1) 1 \leq s \leq v, s < m \leq r - s \text{ に対して, } p \cdot \alpha_r^{*(s)}(2m+1) = \alpha_r^{*(s-1)}(2m+1), E^2 \alpha_r^{*(s)}(2m+1) \\ = \alpha_r^{*(s-1)}(2m+3).$$

$$(2) 1 \leq s \leq v, s < m \text{ に対して, } p \cdot \alpha_r^{*(s)}(2m+1) = \alpha_r^{(s-1)}(2m+1), E^2 \alpha_r^{*(s)}(2m+1) = \alpha_r^{(s)}(2m+3).$$

$$(3) 1 \leq m \leq v+1 \text{ に対して, } H(\alpha_r^{(m)}(2m+1)) = A_{r-m}(2m-1),$$

$$v+1 \leq m < r \text{ に対して, } P(A_{r-m-1}(2m+1)) = E^{2v} \alpha_r^{*(s)}(2m+1).$$

$$(4) \alpha_r^{*(s)}(2m+1) \text{ と } a_r^{(s)}(2m+1) \text{ の位数はどちらも } p^{s+1} \text{ である。}$$

$$(5) r \text{ に対して Assertion A である、特に } r \leq p^{p^2} \text{ であるならば, } s = \text{Min}(v, m+1), 1 \leq m < r-v \text{ に対して, }$$

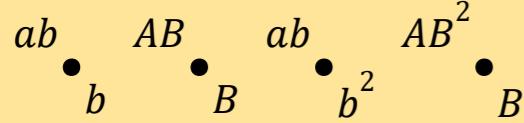
$$H(\alpha_r^{*(s)}(2m+1)) = a_{r-m}(2m-1).$$

EHP-sequence の完全性により、 $k = 16$  の場合の唯一の可能性は、 $HP(b) = ab$  である。 $\beta_1$  を合成することにより、自然数から、 $k = 26$  に対して  $HP(b^2) = ab^2$  である。 $k = 17, 27$  の場合も同様。stable の生成元  $\alpha_1\beta_1$ ,  $\beta_1^2$ ,  $\alpha_1\beta_1^2$ ,  $\beta_2$  に対して、EHP-sequence の完全性から、 $k = 13, 20, 23, 26$  の場合の唯一の可能性を見る。 $k = 21, 24$  の場合はまた、 $\pi_k^S = 0$  からただ一つに定まる。

上の計算の中で、EHP-sequence の完全性と invariants の情報のみを必要とした。しかしながら、続きの計算にはいくつかあいまいな点があり、完全列を決定するためには、section 3 のいくつかの Lemma が必要である。そこで、computing diagram を、simple unstable elements の部分、short range unstable elements の部分、stable class に収束する long unstable series を含む残りの部分の、3つの部分に分ける。例えば、Th 5.1 の computation diagram は、次の3つの部分 (1), (2), (3) に分けられる。

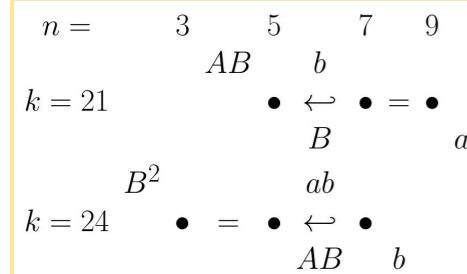
#### (1) Removable simple unstable elements.

$$(n, k) = (3, 16) \quad (3, 17) \quad (3, 26) \quad (3, 27)$$

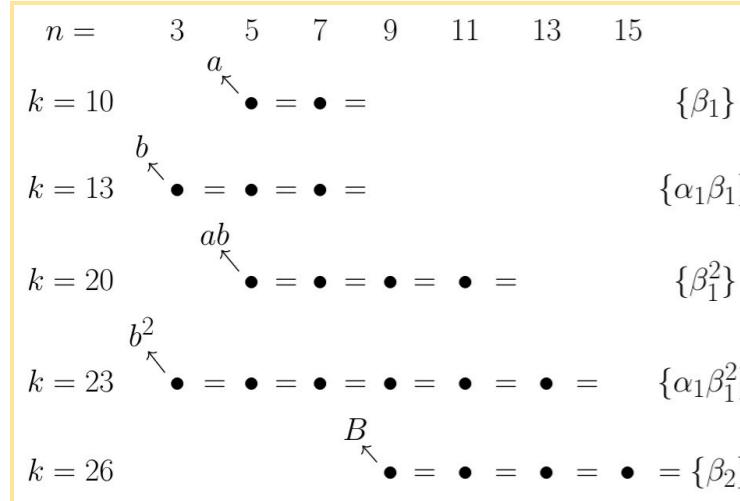


ここで、symbol ↵ は省略される。Prop 5.1,  $m \equiv 1 \pmod{3}$  の中に並べられている対  $\{x, d_1(x)\}$  に対して、各 collection は  $\{x, P(x) \in \pi_{n+k}^n, HP(x) \neq 0\}$  からなる。

#### (2) Removable short range unstable elements.



#### (3) Remaining parts.



(2)において symbol ↵ はまた、簡単のために消されている。

$n = 2m - 1$  と  $n = 2m + 1$  の間の  $k$ -stem groups における symbol • ← • は、準同型

$$\Delta : \pi_{2m+1+k}^{2m+1} \rightarrow \pi_{2m-1+k}^{2m-1}, \quad m \equiv 0 \pmod{p},$$

で、2つの • に対応する位数  $p$  の巡回群をキャンセルすることを示している。

$k = 21$  のとき、Lem 3.7 から  $\Delta \neq 0$  が成り立つ。自然性により、 $\alpha_1$  を右から合成することから  $k = 24$  のときに  $\Delta \neq 0$  であることを得る。

この図式から、stable class の origin の Hopf invariant についての次の結果を得る。

$$(5.2.4) \quad H(\beta_1(5)) = I(\alpha_1(9)), \quad H_p(\beta_2(9)) = J(H(\beta_2(9))) = \beta_1(25).$$

Prop 5.1 各 invariant  $x \in Q_{6m+3+k}^{2m+1}$  の像  $d_1(x) = HP(x) \in Q_{6m+k}^{2m-1}$  は、符号を除いて、下記で与えられる。

$k$	10	11	20	21	26	27	36	37	37	38	39	43
$x$	$b$	$B$	$b^2$	$B^2$	$b_2$	$B_2$	$bb_2$	$BB_2$	$e'$	$E'$	$E_1$	$E_2$
$m \equiv 0$	$ab$	0	$ab^2$	0	$ab_2$	$b^3$	$abb_2$	0	$b^4$	0	$e_2$	0
$m \equiv 1$	$ab$	$AB$	$ab^2$	$AB^2$	$ab_2$	$AB_2$	$abb_2$	$ABB_2$	$b^4$	$B^4$	0	$AE_2$
$m \equiv 2$	0	$AB$	0	$AB^2$	0	$AB_2$	0	$ABB_2$	0	$B^4$	$e_2$	$AE_2$

$k$	46	47	47	48	52	53
$x$	$b^2b_2$	$B^2B_2$	$be'$	$BE'$	$b_2^2$	$B_2^2$
$m \equiv 0$	$ab^2b_2$	0	$b^5$	0	$ab_2^2$	0
$m \equiv 1$	$ab^2b_2$	$AB^2B_2$	$b^5$	$B^5$	$ab_2^2$	$AB_2^2$
$m \equiv 2$	0	$AB^2B_2$	0	$B^5$	0	$AB_2^2$

残りの invariants に対して、 $d_1(x) = 0$  である。

$$(5.1.8) \quad x = ab, ab^2, ab_2, b^3, e_1, abb_2, b^4, e_2, ab_2^2, b^5, ab_2^2,$$

$$(5.1.9) \quad x = AB, AB^2, AB_2, B^3, ABB_2, B^4, AB^2B_2, B^5, AB_2.$$

Lem 3.7  $\xi \in \pi_{i+4}(S^{2pm+1})$ ,  $\gamma \in \pi_s^S$ ,  $\delta \in \pi_t^S$  に対して、up to non-zero coefficients で次の関係が成り立つ。

$$(1) \quad H(\xi) = Q^{pm}(\gamma) \text{ は、 } H(\Delta(\xi)) = \bar{Q}^{pm-1}(\alpha\gamma) = HP(\bar{Q}^{pm}(\xi)) \text{ を誘導する。}$$

$$(2) \quad H(\xi) = Q^{pm}(\gamma), \Delta(\xi) = P(\bar{Q}^{pm}(\gamma)) \text{ は、 } H(\xi \circ \delta(i+4)) = Q^{pm}(\gamma\delta), \Delta(\xi \circ \delta(i)) = P(\bar{Q}^{pm}(\gamma\delta)) \text{ を誘導する。}$$

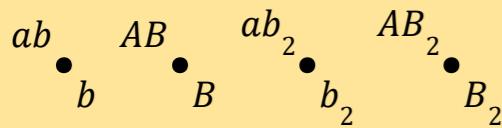
### 5.3 3-primary $k$ -stem Groups for $28 \leq k \leq 35$

$28 \leq k \leq 35$  に対する computing diagram mod  $A$  を考える。このとき、 $w = IP(i) \in Q_{3+28}^3$  以外の invariant は stable type である。

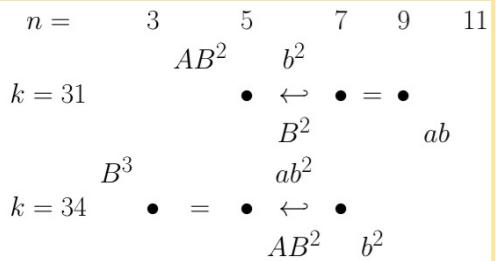
**Th 5.2**  $28 \leq k \leq 35, n: \text{odd}$  に対する mod  $A$   $k$ -stem groups  $\pi_{n+k}^n$  は、以下の3つの部分の直和として得られる。

(1) Removable simple unstable elements.

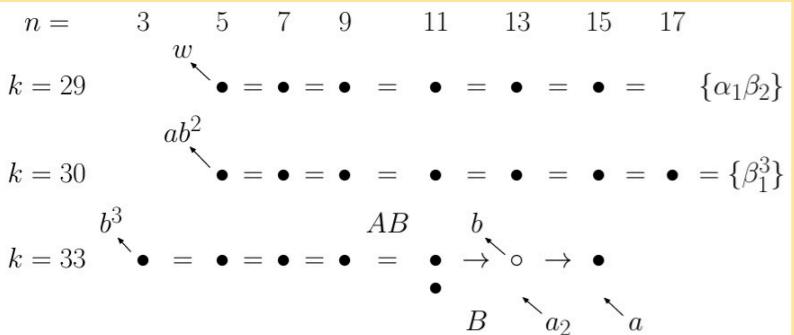
$$(n, k) = (9, 28) \quad (9, 29) \quad (3, 32) \quad (3, 33)$$



(2) Removable short range unstable elements.



(3) Remaining part.



$\pi_{13+33}^{13} \simeq \mathbb{Z}_9$  の生成元を  $v$  とすると、up to non-zero coefficient で、

$$H(v) = b, 3v = \alpha_1\beta_1^3(13), \Delta v = \alpha_1\beta_1^3(11) \pm P(B).$$

Proof. (1) の最初の2つは Prop 5.1 から成り立つ。 $\xi = \alpha_1(3) \circ \alpha_1\beta_2(6)$  とすると、 $H\xi = ab_2$  である。

$\alpha_1(5) \circ \alpha_1(8) = 0$  であるから、 $E^2\xi = 0, P(b_2) = \xi$  である。Th 2.4 により、 $S^3$  において、 $\xi \in \{\alpha_1, 3, \alpha_1\beta_2\}$  に対して、 $H(-\xi) = AB_2$  である。 $S^5$  において、 $\xi \in \alpha_2\beta_2 \equiv -\alpha_1\{\alpha_1, 3, \beta_2\} \equiv -\alpha_1\beta_1^3 \equiv 0$  である。よって、 $P(B_2) \equiv \xi \pmod{\alpha_1\beta_1^3}$  である。k = 21, 24 の(2)に、右から  $\beta_1$  を合成することにより(2)が証明される。

(3) の  $k = 29, 30$  の結果はただ一つの解である。k = 33 の場合について、次の一般的な結果を示す必要がある。

**Lem 5.1**  $l \geq 1$  とする。このとき up to non-zero coefficients で次が成り立つ。

(1)  $v(6l+1) \in \pi_{18l+10}^{6l+1}$  が存在して、次を満たす。

$$H(v(6l+1)) = Q^{3l}(\beta_1) = b, \text{ and } v(6l+3) = P(Q^{3l+2}(\alpha_1)) = P(a).$$

ここで、 $v(6l+3) = E^2v(6l+1)$ 。このように、 $v(6l+3)$  の位数は 3 であり、 $E^2v(6l+3) = 0$  である。

さらに、 $\Delta(v(6l+1)) \equiv P(\bar{Q}^{3l-1}(\beta_1)) = P(B) \pmod{E^2\pi_{18l+6}^{6l-3}}$ 。

(2)  $l \not\equiv 2 \pmod{3}$  のとき、 $v(6l+1)$  の位数は 3 である。

(3)  $l \equiv 2 \pmod{3}$ 、 $E^\infty: \pi_{18l+7}^{6l-3} \rightarrow \pi_{12l+10}^S$  が全射ならば、 $v(6l+1)$  の位数は 9 であり、

$$\Delta(v(6l+1)) = P(B) + E^2v',$$

ここで、 $v' \in \pi_{18l+6}(S^{6l-3})$  は  $E^4v' = 3v(6l+1)$  である。

**Prop 5.1** 各 invariant  $x \in Q_{6m+3+k}^{2m+1}$  の像  $d_1(x) = HP(x) \in Q_{6m+k}^{2m-1}$  は、符号を除いて、下記で与えられる。

$k$	10	11	20	21	26	27	36	37	37	38	39	43
$x$	$b$	$B$	$b^2$	$B^2$	$b_2$	$B_2$	$bb_2$	$BB_2$	$e'$	$E'$	$E_1$	$E_2$
$m \equiv 0$	$ab$	0	$ab^2$	0	$ab_2$	$b^3$	$abb_2$	0	$b^4$	0	$e_2$	0
$m \equiv 1$	$ab$	$AB$	$ab^2$	$AB^2$	$ab_2$	$AB_2$	$abb_2$	$ABB_2$	$b^4$	$B^4$	0	$AE_2$
$m \equiv 2$	0	$AB$	0	$AB^2$	0	$AB_2$	0	$ABB_2$	0	$B^4$	$e_2$	$AE_2$

$k$	46	47	47	48	52	53
$x$	$b^2b_2$	$B^2B_2$	$be'$	$BE'$	$b_2^2$	$B_2^2$
$m \equiv 0$	$ab^2b_2$	0	$b^5$	0	$ab_2^2$	0
$m \equiv 1$	$ab^2b_2$	$AB^2B_2$	$b^5$	$B^5$	$ab_2^2$	$AB_2^2$
$m \equiv 2$	0	$AB^2B_2$	0	$B^5$	0	$AB_2^2$

残りの invariants に対して、 $d_1(x) = 0$  である。

$$(5.1.8) x = ab, ab^2, ab_2, b^3, e_1, abb_2, b^4, e_2, ab_2^2, b^5, ab_2,$$

$$(5.1.9) x = AB, AB^2, AB_2, B^3, ABB_2, B^4, AB^2B_2, B^5, AB_2.$$

**Th 2.4** 次の列は  $i + 1 \neq 3$  のとき、mod  $p$  で完全である。

$$\dots \xrightarrow{H_p} \pi_{i+2}(S^{2p+1}) \xrightarrow{\Delta} \pi_i(S^{2p-1}) \xrightarrow{G} \pi_{i+1}(S^3) \xrightarrow{H_p} \pi_{i+1}(S^{2p+1}) \xrightarrow{\Delta} \dots$$

ここで、 $G$  は  $G(\xi) = \alpha_1(3) \circ E(\xi)$  for  $\xi \in \pi_i(S^{2p-1})$  で与えられ、Hopf invariant  $H_p$  は、次を満たす。

$$H_p\{\alpha_1(3), p\iota_{2p}, E(\xi)\} = -E^2(\xi) \text{ for } \xi \in \pi_i(S^{2p-1}) \text{ with } p \cdot \xi = 0.$$

**Prop 5.2**  $m \equiv 0 \pmod{3}$  とする。(5.1.10) の元に対して、 $x = Q^{m+2}(\gamma), y = Q^m(\delta)$  とする。このとき、元  $\xi \in \pi_i(S^{2m+1})$  が存在して次を満たす。 $H(\xi) = y, E^2\xi = P(x)$ .

**Lem 3.7**  $\xi \in \pi_{i+4}(S^{2pm+1}), \gamma \in \pi_s^S, \delta \in \pi_t^S$  に対して、up to non-zero coefficients で次の関係が成り立つ。

(1)  $H(\xi) = Q^{pm}(\gamma)$  は、 $H(\Delta(\xi)) = \bar{Q}^{pm-1}(\alpha\gamma) = HP(\bar{Q}^{pm}(\xi))$  を誘導する。

(2)  $H(\xi) = Q^{pm}(\gamma), \Delta(\xi) = P(\bar{Q}^{pm}(\gamma))$  は、 $H(\xi \circ \delta(i+4)) = Q^{pm}(\gamma\delta), \Delta(\xi \circ \delta(i)) = P(\bar{Q}^{pm}(\gamma\delta))$  を誘導する。

**Lem 3.2**  $\xi \in \pi_k^S$  に対して、 $u(\xi) < 2p(m+1) - 5, p\xi = 0$  ならば、 $d_1(\bar{Q}^{m+1}(\xi)) = HP(\bar{Q}^{m+1}(\xi)) = m \cdot \bar{Q}^m(\alpha_1\xi)$ .

ここで、 $u(\xi) \leq 4p - 3$  の  $\xi$  に対して、 $m = 1$  のときに成り立つ。

**Lem 3.4**  $x \in \pi_{i+2}(Q_2^{2m+1})$  が  $E^4(\gamma)$  による M-represented であり、 $h'_{m^*}(\gamma) = 0$  ならば、元  $\xi \in \pi_i(S^{2m-1})$  が存在し、 $\alpha(2pm - 2) \circ E^2\gamma$  による M-represented  $y \in \pi_i(Q_2^{2m-1})$  に対して、 $p \cdot \xi = P(y), E^2\xi = P(x)$ .

**Lemma 2.1** 次の2つの合成は、どちらも  $p$  倍する写像である。

$$\Delta \circ E^2: {}_p\pi_i(S^{2pm-1}) \rightarrow {}_p\pi_{i+2}(S^{2pm+1}) \rightarrow {}_p\pi_i(S^{2pm-1}),$$

$$E^2 \circ \Delta: {}_p\pi_{i+2}(S^{2pm+1}) \rightarrow {}_p\pi_i(S^{2pm-1}) \rightarrow {}_p\pi_{i+2}(S^{2pm+1}).$$

$$(5.1.5) \dots \xrightarrow{J} \pi_{2m+1+k}^{6m+1} \xrightarrow{\Delta} \pi_{2m-1+k}^{6m-1} \xrightarrow{I} \bar{Q}_{2m-1+k}^{2m-1} \xrightarrow{J} \pi_{2m+k}^{6m+1} \xrightarrow{\Delta} \pi_{2m-2+k}^{6m-1} \xrightarrow{I} \dots.$$

Proof.  $\beta_1 = \{\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1\}$  なので、Prop 5.2 により  $H(\xi) = b, E^2\xi = P(a)$  を満たす  $\xi = v(6l + 1)$  が存在することがから (1) が成り立つ。Lem 3.7 (1) と Lem 3.2 により  $H\Delta(v(6l + 1)) = \overline{Q}^{3l+1}(\alpha_1\beta_1) = AB = HP(B)$  であり、最後の結果が成り立つ。

(2) の場合、 $a_2 = a_2(6l + 1) = H(\alpha_{3l+3}^*(6l + 3))$  である。よって、 $P(a_2) = 0$  であり、 $E^2: \pi_{18l+10}^{6l+1} \rightarrow \pi_{18l+12}^{6l+3}$  は単射である。よって  $3v(6l + 1) = 0$  である。

(3) の場合、 $a_2$  は alpha invariant ではなく  $P(a_2) \neq 0$  である。 $a$  は  $\alpha i$  による M-represented であり、 $a_2$  は  $\alpha^2 i$  による M-represented である。よって Lem 3.4 により  $P(a_2) = 3v(6l + 1)$  である。ゆえに  $v(6l + 1)$  の位数は 9 である。 $\Delta(v(6l + 1)) = P(B) + E^2v'$  とする。Lem 2.1 により、 $3v(6l + 1) = E^2\Delta v(6l + 1) = E^2P(B) + E^4v' = E^4v'$  である。■

#### 5.4 3-primary k-stem Groups for $36 \leq k \leq 45$

33-stem groups の中で、unstable elements の long series があった。

$$(5.4.1) \alpha_1\beta_1^3(3) \xrightarrow{E^2} \alpha_1\beta_1^3(5) \xrightarrow{E^2} \alpha_1\beta_1^3(7) \xrightarrow{E^2} \alpha_1\beta_1^3(9) \xrightarrow{E^2} \alpha_1\beta_1^3(11) \xrightarrow{E^2} \alpha_1\beta_1^3(13) \xrightarrow{E^2} 0$$

ここで、 $\pi_{43}^{13}$  の stable limit が  $\beta_1^3$  となる生成元  $\beta_1^3(13)$  に対して  $\alpha_1\beta_1^3(3) = \alpha_1(3) \cdot \beta_1^3(13)$  である。

よって、 $m = 1, 2$  に対して、次の not stable type invariants を得る。

$$ab^3 = I(\alpha_1\beta_1^3(6m - 1)), AB^3 \text{ with } J(AB^3)\alpha_1\beta_1^3(6m + 1).$$

$36 \leq k \leq 45$  に対して、not stable type の invariants は  $w \in Q_{5+42}^5$  と、上の  $ab^3, AB^3$  である。

**Th 5.3**  $36 \leq k \leq 45, n: \text{odd}$  に対する mod A k-stem groups  $\pi_{n+k}^n$  は、以下の3つの部分の直和として得られる。

##### (1) Removable simple unstable elements.

$$(n, k) = (3, 36) \quad (3, 37) \quad (9, 38) \quad (9, 39) \quad (15, 40) \quad (15, 41) \quad (3, 42) \quad (3, 43)$$

$ab^3$	$AB^3$	$ab^2$	$AB^2$	$ab$	$AB$	$abb_2$	$ABB_2$
•	•	•	•	•	•	•	•
$b^3$	$B^3$	$b^2$	$B^2$	$b$	$B$	$bb_2$	$BB_2$

$$(n, k) = (3, 43) \quad (3, 44) \quad (9, 44) \quad (9, 45)$$

$b^4$	$B^4$	$ab_2$	$AB_2$	•
•	•	•	•	
$e'$	$E'$	$b_2$	$B_2$	

##### (2) Removable short range unstable elements.

$n =$	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
$k = 36$					•	=	•	↔	•		
								$AB$	$b$		
$k = 40$											
$k = 41$											
$k = 43$											
$k = 45$											
$n =$	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23

**Lem 5.1**  $l \geq 1$  とする。このとき up to non-zero coefficients で次が成り立つ。

(1)  $v(6l + 1) \in \pi_{18l+10}^{6l+1}$  が存在して、次を満たす。

$$H(v(6l + 1)) = Q^{3l}(\beta_1) = b, \text{ and } v(6l + 3) = P(Q^{3l+2}(\alpha_1)) = P(a).$$

ここで、 $v(6l + 3) = E^2v(6l + 1)$ . このように、 $v(6l + 3)$  の位数は 3 であり、 $E^2v(6l + 3) = 0$  である。

さらに、 $\Delta(v(6l + 1)) \equiv P(\overline{Q}^{3l-1}(\beta_1)) = P(B) \pmod{E^2\pi_{18l+6}^{6l-3}}$ .

(2)  $l \not\equiv 2 \pmod{3}$  のとき、 $v(6l + 1)$  の位数は 3 である。

(3)  $l \equiv 2 \pmod{3}, E^\infty: \pi_{18l+7}^{6l-3} \rightarrow \pi_{12l+10}^S$  が全射ならば、 $v(6l + 1)$  の位数は 9 であり、

$$\Delta(v(6l + 1)) = P(B) + E^2v',$$

ここで、 $v' \in \pi_{18l+6}^{6l-3}$  は  $E^4v' = 3v(6l + 1)$  である。

(3) Remaining part.											
$n =$	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
$k = 36$											
	$ab_2$										
		•	•	•	•	•	•	•	•	•	
$k = 37$											
	$AB_2$										
		•	•	•	•	•	•	•	•	•	
$k = 38$											
		$B_2$									
			•	•	•	•	•	•	•	•	
$k = 39$											
	$bb_2$										
		•	•	•	•	•	•	•	•	•	
$k = 40$											
	$BB^2$										
		•	•	•	•	•	•	•	•	•	
$k = 42$											
	$ab^2$										
		•	•	•	•	•	•	•	•	•	
$k = 45$											
	$w$										
		•	→	○	○	○	○	○	○	○	
			$b^3$								
$n =$	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23

Proof. (1) Th 5.2 (1) の関係式  $d_1(b^2) = ab^2, d_1(B^2) = AB^2$  から、 $\beta_1$  を右から合成することにより、

$d_1(b^3) = ab^3, d_1(B^3) = AB^3$  を得る。残りの  $d_1$  についての関係式は Prop 5.1 から成り立つ。

(2)  $k = 36, 43, 45$  における short range unstable elements は Prop 5.2, 5.3 によって構成される。

$k = 43, 45$  における collections の removability は Lem 3.7 (1) から成り立ち、 $k = 36$  におけるものは Lem 3.7 (2) から成り立つ。

$k = 40$  において、 $d_1(AB_2) = d_1(A_1) \circ \beta_2 = \alpha_2 \circ \beta_2$  は、 $S^9$  の中で  $\alpha_2 \beta_2 = -\{\alpha_1, \alpha_1, 3\} \beta_2 = \alpha_1 \{\alpha_1, 3, \beta_2\} = \alpha_1 \beta_1^3$  によって表わされる。よって  $d_1(AB_2) = ab^3$  である。 $k = 40, 41$  における位数 3 の simple unstable elements は、Prop 5.1 と naturality によって構成される。removability は Lem 2.4 から成り立つ。

(3)  $d_1(B_2) = AB_2$  は Prop 5.1 から成り立つ。よって (3) の結果は EHP-sequence の完全性により一意的に定まる。 $k = 37$  における removability は Lem 2.4 から成り立つ。■

Th 5.3 (3) から次を得る。

(5.4.2)  $u(\varepsilon') = 7, u(\varepsilon_1) = 15, u(\varepsilon_2) = 11, u(\varphi) = 9,$

(5.4.3)  $u(\beta_1 \beta_2) = 5, u(\alpha_1 \beta_1 \beta_2) = 3, u(\beta_1^4) = 3, u(3\varphi) = u(\alpha_1 \varepsilon_2) = 7.$

ここで、Oka の  $\partial_\alpha$  の応用について述べる。

Th 5.1 において、 $k = 21$  の中の short range unstable elements に  $\partial_\alpha$  を適用し 24-stem groups の元を得る。

$$P(a) = E^2 v, H(v) = b \Rightarrow P(AB) = E^2(\partial_\alpha(v)), H(\partial_\alpha(v)) = B^2.$$

$k = 31, 33$  に対して、 $k$ -stem gropus から  $(k+3)$ -stem groups までの間で類似の状況が見られる。しかしながら、 $m = 0$  の場合が除外されているため、 $\pi_{7+k}^{2m+1}$  の元に対して Lem 3.12, 3.13 を適用することができない。

$m = 0$  の場合、(3.5.5) の中の  $\beta_{(1)}$  は存在しないが、Th 3.5 はなお成立する。そこで次を用意する。

Lem 5.2  $\xi \in \pi_{i+4}(S^{2p+1})$  Hopf invariant  $H(\xi)$  は  $\gamma \in \pi_{i+1}(Y^{2p^2-2})$  による M-represented であると仮定する。このとき up to non-zero coefficient で次が成り立つ。 $JH(\partial_\alpha(\xi)) = H_p(\partial\alpha(\xi)) = \bar{\beta}_1 \circ E^2 \gamma,$

ここで、 $\bar{\beta}_1: Y^{2p^2} \rightarrow S^{2p+1}$  は  $\beta_1(2p+1)$  の extension である。

$(n, k) =$	$(9, 28)$	$(9, 29)$	$(3, 32)$	$(3, 33)$
	$ab$	$AB$	$ab_2$	$AB_2$

Th 5.2 (1)

Prop 5.1 各 invariant  $x \in Q_{6m+3+k}^{2m+1}$  の像  $d_1(x) = HP(x) \in Q_{6m+k}^{2m-1}$  は、符号を除いて、下記で与えられる。

$k$	10	11	20	21	26	27	36	37	37	38	39	43
$x$	$b$	$B$	$b^2$	$B^2$	$b_2$	$B_2$	$bb_2$	$BB_2$	$e'$	$E'$	$E_1$	$E_2$
$m \equiv 0$	$ab$	0	$ab^2$	0	$ab_2$	$b^3$	$abb_2$	0	$b^4$	0	$e_2$	0
$m \equiv 1$	$ab$	$AB$	$ab^2$	$AB^2$	$ab_2$	$AB_2$	$abb_2$	$ABB_2$	$b^4$	$B^4$	0	$AE_2$

$k$	46	47	47	48	52	53
$x$	$b^2 b_2$	$B^2 B_2$	$be'$	$BE'$	$b_2^2$	$B_2^2$
$m \equiv 0$	$ab^2 b_2$	0	$b^5$	0	$ab_2^2$	0
$m \equiv 1$	$ab^2 b_2$	$AB^2 B_2$	$b^5$	$B^5$	$ab_2^2$	$AB_2^2$
$m \equiv 2$	0	$AB^2 B_2$	0	$B^5$	0	$AB_2^2$

Prop 5.2  $m \equiv 0 \pmod{3}$  とする。(5.1.10) の元に対して、 $x = Q^{m+2}(\gamma), y = Q^m(\delta)$  とする。このとき、元  $\xi \in \pi_i(S^{2m+1})$  が存在

して次を満たす。 $H(\xi) = y, E^2 \xi = P(x).$

Prop 5.3  $m \equiv 1 \pmod{3}$  とする。(5.1.10) の元に対して、 $X = \overline{Q}^{m+2}(\gamma), Y = \overline{Q}^m(\delta)$  とする。Lem 3.9 の中の関係

$d_1(X) = HP(X) = 0$  が得られる、例えば stable range の中の計算であると仮定する。このとき、元  $\xi \in \pi_i(S^{2m+1})$  が存在して次を満たす。 $H(\xi) = Y, E^2 \xi = P(X).$

Lem 3.7  $\xi \in \pi_{i+4}(S^{2pm+1}), \gamma \in \pi_s^S, \delta \in \pi_t^S$  に対して、up to non-zero coefficients で次の関係が成り立つ。

(1)  $H(\xi) = Q^{pm}(\gamma)$  は、 $H(\Delta(\xi)) = \overline{Q}^{pm-1}(\alpha\gamma) = HP(\overline{Q}^{pm}(\xi))$  を誘導する。

(2)  $H(\xi) = Q^{pm}(\gamma), \Delta(\xi) = P(\overline{Q}^{pm}(\gamma))$  は、 $H(\xi \circ \delta(i+4)) = Q^{pm}(\gamma\delta), \Delta(\xi \circ \delta(i)) = P(\overline{Q}^{pm}(\gamma\delta))$  を誘導する。

Lem 2.4  $\xi \in \pi_p(S^{2p-1})$  に対して、 $E^2(\xi) = 0$  ならば、 $\xi$  は  $\Delta$  の像である。

$m \geq 1$  に対して、特性類  $\alpha_1(2m+1)$  を持つ sphere-bundle over sphere  $S^{2m+1} \xrightarrow{i} B_m(\alpha) \xrightarrow{p} S^{2m+2p-1}$  を考える。この sphere-bundle に関するホモトピー完全列

$\dots \xrightarrow{i_*} \pi_{i+1}(B_m(\alpha)) \xrightarrow{p_*} \pi_{i+1}(S^{2m+2p-1}) \xrightarrow{\partial_\alpha} \pi_i(S^{2m+1}) \xrightarrow{i_*} \pi_i(B_m(\alpha)) \xrightarrow{p_*} \dots$  の境界準同型  $\partial_\alpha$  を考え、次を得る。

Prop 3.5  $\gamma \in \pi_{i-1}(S^{2m-1+q})$  に対して、 $\partial_\alpha(E^2 \gamma) = \alpha_1(2m+1) \circ E\gamma$ .

Th 3.5 任意の  $\gamma \in \pi_i(S^{2pm+p-1})$  に対して、up to non-zero coefficients で、次の関係が成り立つ。

$$J\partial_\alpha I(E^3 \gamma) = \beta_1(2p(m+1)+1) \circ E^3 \gamma.$$

境界準同型  $\partial_\alpha: \pi_{i+1}(Q_2^{2m+2p-1}) \rightarrow \pi_i(Q_2^{2m+1})$  は、写像  $d_\alpha: \Omega Q_2^{2m+2p-1} \rightarrow Q_2^{2m+1}$  により誘導される。Moore space で写像を近似することにより、 $m \geq 1$  に対して、次の可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccc} Y^{2p(m+p)-3} & \xrightarrow{\beta_{(1)}} & Y^{2p(m+1)-2} \\ \downarrow \Omega_0 g_{m+p} & & \downarrow g_{m+1} \\ (3.5.5) \quad \Omega Q_2^{2m+2p-1} & \xrightarrow{d_\alpha} & Q_2^{2m+1} \end{array}$$

ここで、 $\beta_{(1)}$  は次を満たす。(3.5.6)  $\pi \beta_{(1)} i = \beta_1(2p(m+1)-2)$ .

Lem 3.12 元  $\xi \in \pi_{i+4}(S^{2m+2p+1})$  の Hopf invariant  $H(\xi)$  が  $\gamma \in \pi_i(Y^{2p(m+p)-3})$  に対して、 $E\gamma$  による M-represented であると仮定する。 $m \geq 1$  ならば、Hopf invariant  $H(\partial_\alpha(\xi))$  は  $\beta_{(1)} \circ \gamma$  による M-represented である。

(3.5.7)  $H(\xi) = Q^{m+p}(\gamma)$  は、 $H(\partial_\alpha(\xi)) = \overline{Q}^{m+1}(\beta_1 \gamma)$  を誘導する。

Lem 3.13  $x \in \pi_{i+1}(Q_2^{2m+2p-1})$  が  $E\gamma$  による M-represented であり、 $y \in \pi_i(Q_2^{2m+1})$  は  $\beta_{(1)} \gamma$  による represented であるとする。

Proof.  $\partial_\alpha$  は  $d_\alpha: \Omega S^{2p+1} \rightarrow S^3$  により誘導され、 $H_p$  は  $h_p: \Omega S^3 \rightarrow \Omega S^{2p+1}$  により誘導される。このとき、 $H_p \partial_\alpha$  は  $h_p$ 。 $\Omega d_\alpha: \Omega^2 S^{2p+1} \rightarrow \Omega S^{2p+1}$  により誘導され、 $S^{2p-1}$  への制限は homotopic to zero である。よって  $h_p \circ \Omega d_\alpha$  は次の写像を誘導する。

$$h': Q_2^{2p-1} = \Omega(\Omega^2 S^{2p+1}, S^{2p-1}) \rightarrow \Omega^2 S^{2p+1}.$$

$\bar{\beta}_1: Y^{2p^2} \rightarrow S^{2p+1}$  を  $H'$ 。 $g_{2p-1}: Y^{2p^2-2} \rightarrow Q_2^{2p-1} \rightarrow \Omega^2 S^{2p+1}$  の adjoint とすると、Th 3.5 は  $\bar{\beta}_1|S^{2p^2-1} = \beta_1(2p+1)$  であることを示す。よって lemma が成り立つ。■

例えば、 $\varepsilon'(7) \in \pi_{7+37}^7 H(\varepsilon'(7)) = b_2$  に Lem 5.2 を適用し、 $\beta_1^4(3) = \partial_\alpha(\varepsilon'(7))$ ,  $\beta_1^4(5) = E^2(\beta_1^4(3))$  と置く。よって、次を得る。

$$(5.4.4) \quad \beta_1^4(5) = \alpha_1(5) \circ \varepsilon'(8) = \beta_1(5) \circ \beta_1^3(15) \pm P(AB_2).$$

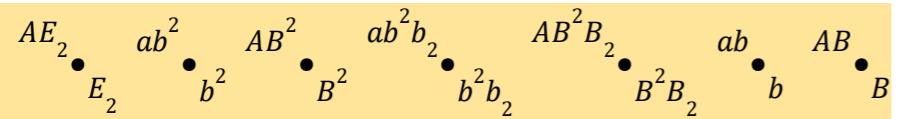
### 5.5 3-primary k-stem Groups for $46 \leq k \leq 55$

$46 \leq k \leq 55$  に対して、computing diagram の中の invariants は、全て stable type である。

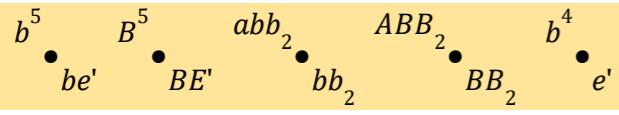
**Th 5.4**  $46 \leq k \leq 55$ ,  $n: \text{odd}$  に対する mod A k-stem groups  $\pi_{n+k}^n$  は、以下の3つの部分の直和として得られる。

#### (1) Removable simple unstable elements.

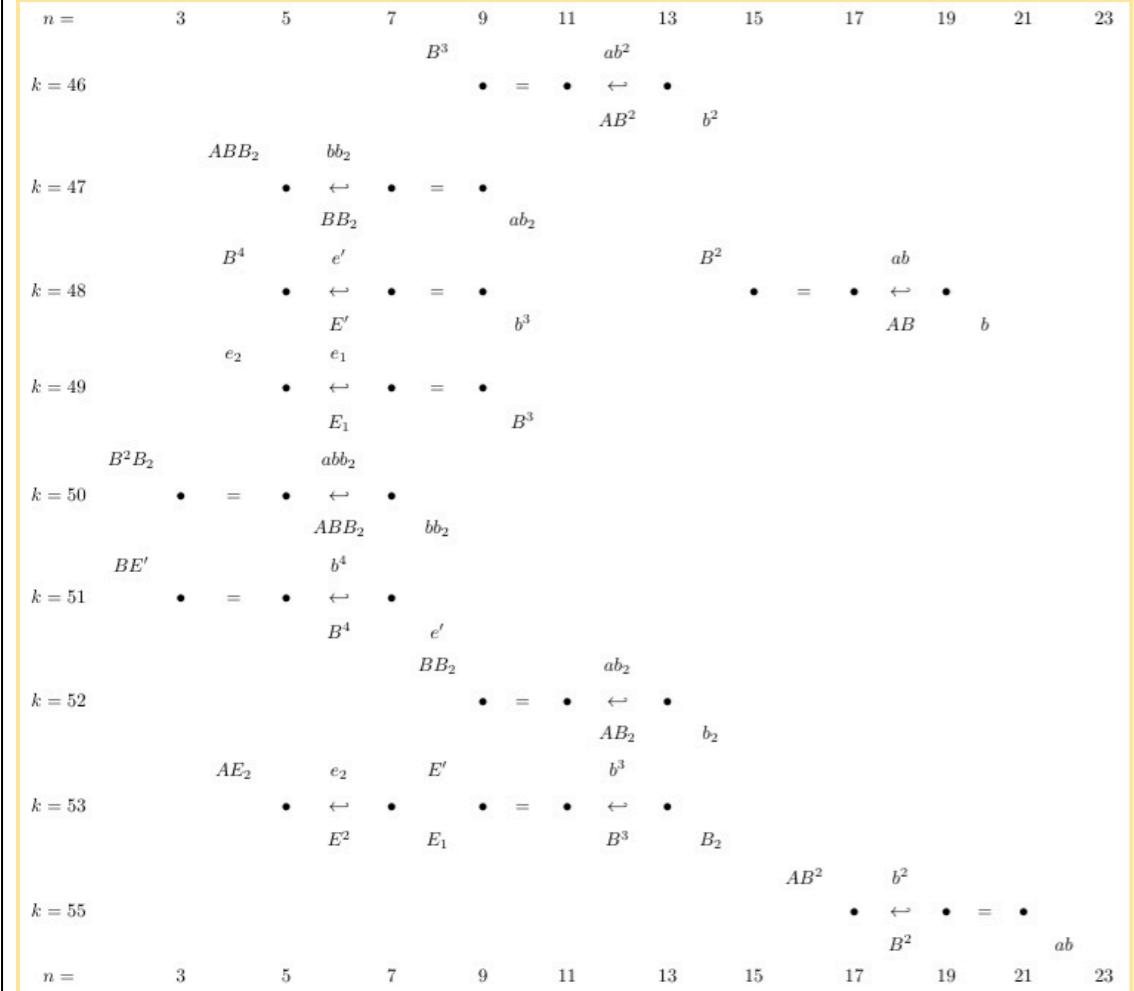
$$(n, k) = (3, 49) (15, 50) (15, 51) (3, 52) (3, 53) (21, 52) (21, 53)$$



$$(n, k) = (3, 53) (3, 54) (9, 54) (9, 55) (9, 55)$$



#### (2) Removable short range unstable elements.



**Lem 5.2**  $\xi \in \pi_{i+4}(S^{2p+1})$  Hopf invariant  $H(\xi)$  は  $\gamma \in \pi_{i+1}(Y^{2p^2-2})$  による M-represented であると仮定する。このとき up to non-zero coefficient で次が成り立つ。 $JH(\partial_\alpha(\xi)) = H_p(\partial\alpha(\xi)) = \bar{\beta}_1 \circ E^2 \gamma$ ,

ここで、 $\bar{\beta}_1: Y^{2p^2} \rightarrow S^{2p+1}$  は  $\beta_1(2p+1)$  の extension である。

**Th 3.5** 任意の  $\gamma \in \pi_i(S^{2pm+p-1})$  に対して、up to non-zero coefficients で、次の関係が成り立つ。

$$J\partial_\alpha I(E^3 \gamma) = \beta_1(2p(m+1)+1) \circ E^3 \gamma.$$

### (3) Remaining part

$n =$	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	$stable$
$k = 46$	$abb_2$	•	=	•	=	•	=	•	=	•	$\{\beta_1^2 \beta_2\}$
$k = 47$	$b^4$	•	=	•	=	•	=	•	=	•	$\{\beta_1 \varepsilon'\}$
$k = 49$	$b^2 b_2$	•	=	•	=	•	=	•	=	•	$\{\alpha_1 \beta_1^2 \beta_2\}$
$k = 50$	$AB_2$	•	=	•	=	•	=	•	=	•	$\{B\}$
$k = 52$	$b_2$	•	=	•	=	•	=	•	=	•	$\{be'\}$
$k = 53$	$B_2$	•	=	•	=	•	=	•	=	•	$\{ph\}$
$k = 55$	$e_1$	•	=	•	=	•	=	•	=	•	$\{\beta_1^2\}$
$n =$	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	$\{\alpha_1 \beta_2^2\}$

Proof. (1)  $u(E_2) = 11$  で  $E_2$  は M-represented ではないので、最初の関係式は Prop 5.1 または Lem 3.2 によっては成立しない。これ以外の simple unstable elements は Prop 5.1 により成立する。

(2)  $k = 49, 50, 51$  の場合以外に、short range unstable elements と、それらの removability は Prop 5.2, 5.3, Lem 2.4 により成立する。

$\beta_2$  を右から合成することにより、Th 5.1 の  $k = 24$  の場合から  $k = 50$  の場合が導かれる。

$k = 51$  の場合を考える。 $\eta$  を  $k = 48$  の中の  $H(\eta) = e'$ ,  $E^2 = P(B^3)$  を満たす元とする。Lem 5.2 により  $\xi = \partial_\alpha(\eta)$  は  $H(\xi) = BE'$ ,  $E^2\xi = \alpha_1(5)$  。 $E\eta$  を満たす。よって、 $E^5\xi = \alpha_1(8)$  。 $E^4\eta = \alpha_1(8)$  。 $E^2P(B^3) = 0$  であり、(2.1.2) により  $E^4\xi = 0$  である。 $E^2\xi = 0$  ならば  $\xi = \pm P(ph)$  である。しかし、 $HP(ph)$  は  $i_*\alpha_1\varphi(7) = i_*E^2(\alpha_1(5)\varphi(8)) \in i_*E^2\pi_{5+48}^5 = 0$  による purely M-represented である。よって、 $E^2\xi \neq 0$ ,  $E^4\xi = 0$ ,  $E^2\xi = \pm P(B^4)$  である。Th 5.3 (2) の  $k = 41$  のものから removability が導かれる。 $k = 49$  の場合が残されている。

(3)  $\xi = \alpha_1(7) \circ \varphi(10) \in \pi_{7+48}^7$  とする。 $\xi = E(\alpha_1(6) \circ \varphi(9))$  なので、(2.1.2) と (2) の  $k = 48$  から  
 $\xi \in E^2 \pi_{5+48}^5 = 0$  である。よって、 $\beta_2^2(5) \in \{\alpha_1(5), \alpha_1(8), \varphi(11)\}$  が定義される。このとき  $\beta_2^2(5)$  は stable class  
 $\beta^2 = \{\alpha_1, \alpha_1, \varphi\}$  の origin を与える。(2) の stable class の他の origin は明らかに得られる。

したがって、列  $\{\alpha \beta^2 \beta (2m+1)\}$  を除外した場合に、問題として残るのは  $k=49$  の場合のみである。

$n = \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 9 \quad 11 \quad 13 \quad 15 \quad 17 \quad 19 \quad 21$   
 $k = 49$

上の群と  $E^2$  は唯一の解である。Lem 2.4 と Lem 3.7 から removability が得られる。■

$k = 49$  の中の long range unstable elements は Lem 3.11 により与えられることに注意する

また、 $\partial(B^3) = i_*(e_1)$  を満たす  $x = B^3 \in \pi_{9+49}^9$  の場合が、Prop 3.4 の具体例として現れている。Prop 3.4 によれば、 $e_1 \in \{\eta_3, \eta_4^{(2)}, B^3\}$  である。stable range で  $\eta_m = \eta_{m+3}$  なので、 $m \equiv 0 \pmod{3}$  に対して  $e_1 \in \{\eta_m, \eta_{m+1}, B^3\}$  が成り立つ。よって次を得る。

**Prop 5.1** 各 invariant  $x \in Q_{6m+3+k}^{2m+1}$  の像  $d_1(x) = HP(x) \in Q_{6m+k}^{2m-1}$  は、符号を除いて、下記で与えられる。

$k$	10	11	20	21	26	27	36	37	37	38	39	43
$x$	$b$	$B$	$b^2$	$B^2$	$b_2$	$B_2$	$bb_2$	$BB_2$	$e'$	$E'$	$E_1$	$E_2$
$m \equiv 0$	$ab$	$0$	$ab^2$	$0$	$ab_2$	$b^3$	$abb_2$	$0$	$b^4$	$0$	$e_2$	$0$
$m \equiv 1$	$ab$	$AB$	$ab^2$	$AB^2$	$ab_2$	$AB_2$	$abb_2$	$ABB_2$	$b^4$	$B^4$	$0$	$AE$
$m \equiv 2$	$0$	$AB$	$0$	$AB^2$	$0$	$AB_2$	$0$	$ABB_2$	$0$	$B^4$	$e_2$	$AE$

$k$	46	47	47	48	52	53
$x$	$b^2 b_2$	$B^2 B_2$	$be'$	$BE'$	$b_2^2$	$B_2^2$
$m \equiv 0$	$ab^2 b_2$	0	$b^5$	0	$ab_2^2$	0
$m \equiv 1$	$ab^2 b_2$	$AB^2 B_2$	$b^5$	$B^5$	$ab_2^2$	$AB_2^2$
$m \equiv 2$	0	$AB^2 B_2$	0	$B^5$	0	$AB_2^2$

**LEM 3.2**  $\xi \in \pi_k^S$  に対して、 $u(\xi) < 2p(m+1) - 5$ ,  $p\xi = 0$  ならば、 $d_1(\overline{Q}^{m+1}(\xi)) = HP(\overline{Q}^{m+1}(\xi)) = m \cdot \overline{Q}^m(\alpha_1 \xi)$ .

ここで、 $u(\xi) \leq 4p - 3$  の  $\xi$  に対して、 $m = 1$  のときに成り立つ

$$(5.1.10) \quad \delta \in \{\alpha_1, \alpha_1, \gamma\}.$$

**Prop 5.2**  $m \equiv 0 \pmod{3}$  とする。 $(5.1.10)$  の元に対して、 $x = Q^{m+2}(\gamma)$ ,  $y = Q^m(\delta)$  とする。このとき、元  $\xi \in \pi_i(S^{2m+1})$  が存在して次を満たす。 $H(\xi) = y$ ,  $E^2\xi = P(x)$ .

**Prop 5.3**  $m \equiv 1 \pmod{3}$  とする。 $(5.1.10)$  の元に対して、 $X =$  係  $d_1(X) = HP(X) = 0$  が得られる、例えば stable range の中  $\xi \in \pi_i(S^{2m+1})$  が存在して次を満たす。  $H(\xi) = Y, E^2\xi = P(X)$

(5.1.10) の元  $\gamma, \delta$  と、その関係する invariants のリストは下記の通りである。

	$\gamma$	$\alpha_1$	$\alpha_1\beta_1$	$\alpha_1\beta_1^2$	$\alpha_1\beta_2$	$\beta_1^3$	$\varepsilon_1$	$\alpha_1\beta_1\beta_2$	$\beta^4$	$\varphi$
	$\delta$	$\beta_1$	$\beta_1^2$	$\beta_1^3$	$\beta_1\beta_2$	$\varepsilon'$	$\varphi$	$\beta_1^2\beta_2$	$\beta_1\varepsilon'$	$\beta_1^2$
	$x$	$a$	$ab$	$ab^2$	$ab_2$	$b^3$	$e_1$	$abb_2$	$b^4$	$p$
	$y$	$b$	$b^2$	$b^3$	$bb_2$	$e'$	$ph$	$b_2^2$	$be'$	$b_2^3$
(5.1.11)	$X$		$AB$	$AB^2$	$A\bar{B}_2$	$B^3$		$ABB_2$	$B^4$	
	$Y$		$B^2$	$B^3$	$BB_2$	$E'$		$B^2B_2$	$BE'$	

**Lem 5.2**  $\xi \in \pi_{i+4}(S^{2p+1})$  Hopf invariant  $H(\xi)$  は  $\gamma \in \pi_{i+1}(Y^{2p^2-2})$  による M-represented であると仮定する。このとき up to non-zero coefficient で次が成り立つ。

$H(\partial\alpha(\xi)) = H(\partial\alpha(\bar{\xi})) = \bar{\beta} \Rightarrow F^2y = \bar{\beta}$  で、 $\bar{\beta}: Y^{2p^2} \rightarrow S^{2p+1}$  は  $\beta$  ( $2n+1$ ) の extension である。

**Lemma 2.4**  $\xi \in \pi(S^{2p-1})$  に対して  $F^2(\xi) = 0$  ならば  $\xi$  は  $\Lambda$  の像である

Lemma 3.7  $\zeta \in \mathbb{F}_{q^{2pm+1}}$ ,  $\gamma \in \mathbb{F}_q^S$ ,  $\delta \in \mathbb{F}_q^S$  に対して, up to non-zero coefficients, 以下の関係が成り立つ

$$\text{LEM. 5. } \zeta \in \kappa_{i+4}(\phi_{\alpha_1, \dots, \alpha_i}), \quad \text{if } \zeta \in \kappa_s, \quad \text{if } \zeta \in \kappa_t, \quad \text{if } \zeta \in \kappa_u, \quad \text{up to non-zero second}$$

(1)  $H(\xi) \equiv Q$  ( $\gamma$ ) は、 $H(\Delta(\xi)) \equiv Q$  ( $\alpha\gamma$ )  $\equiv HP(Q)(\xi)$  を誘導する。

(2)  $H(\xi) \equiv Q^-(\gamma)$ ,  $\Delta(\xi) \equiv P(Q^-(\gamma))$  は、 $H(\xi \circ \delta(i+4)) \equiv Q^-(\gamma\delta)$ ,

**LEM 3.11** 整数  $n \neq p - 2 \pmod{p}$ ,  $n > 1$  に対して、 $m = pn$  を假定する。このとき、元  $\nu_1(zm + 1)$

$\in \pi_{2pm+(2p+1)q-2}(S^{2m+1})$  が存在し、up to non-zero coefficient で、 $H(v_1(2m+1)) = Q(\beta_2), v_1(2m+1)$

$$= P(\theta^{m+p+1}(\beta)) \quad \text{である。} \quad v(2m + 2n + 3) = F^{2p+2}v(2m + 1) \quad \text{である。}$$

**Prop 3**  $y \in \pi_{-} - (Y^{2m+4p-8})$ ,  $y^{(3)} = 0$  に対して  $x \in \pi_{-} - (Y^{2m+3})$  は  $M$  represented by  $E^6_{yy}$  と仮定すると

$$i_*\{\eta_m, \eta_{m+1}^{(2)}, E^3\gamma\}_1 = \partial(x).$$

**Lem 5.3**  $m \equiv 0 \pmod{3}$  ならば、次を満たす元  $v \in \pi_{6m+38}^{2m+1}$  が存在する。

$$H(v) = e_1, E^2 v = P(B^3).$$

$k = 49, 53$  の中の long range unstable elements を以下のように書く。

$$(5.5.1) \quad v_1(13) \in \pi_{13+49}^{13}, H(v_1(13)) = b_2, P(B) = E^6 v_1(13) = v_1(19),$$

$$(5.5.2) \quad v_2(9) \in \pi_{9+53}^9, H(v_2(9)) = e_1, P(ab^2) = E^6 v_2(9) = v_2(15).$$

Th 2.2により、これらの元は、下記の not stable type invariants を誘導する。

$$(5.5.3) \quad u_1 = u_1(5) = I(v_1(17)) \in Q_{5+59}^5, \quad U_1 = U_1(5) \in Q_{5+60}^5, \quad J(U_1) = v_1(19),$$

$$(5.5.4) \quad u_2 = u_2(3) = I(v_2(11)) \in Q_{3+59}^3, \quad U_2 = U_2(3) \in Q_{3+60}^3, \quad J(U_2) = v_2(13).$$

## 5.6 Table of 3-primary $k$ -stem Groups for $k \leq 55$

結果をまとめると、奇数  $n$  と  $k \leq 55$  に対して、下記のとおり  ${}_3\pi_{n+k}(S^n)$  の table を得る。

$n =$	3	5	7	9	11	13	15	17	
$k = 3$	•	=							$\{\alpha_1\}$
$k = 6$	•								
$k = 7$	•	=	•	=					$\{\alpha_2\}$
$k = 10$	•	$\rightarrow$	○	$\rightarrow$	•	=			$\{\beta_1\}$
$k = 11$	•	$\rightarrow$	○	=	○	=			$\{\alpha'_3\}$
$k = 13$	•	=	•	=	•	=			$\{\alpha_1\beta_1\}$
$k = 14$	•		•		•				
$k = 15$	•	=	•	=	•	=	•	=	$\{\alpha_4\}$
$k = 16$	•								
$k = 17$	•								
$k = 18$	•		•		•		•		
$k = 19$	•	=	•	=	•	=	•	=	$\{\alpha_5\}$
$k = 20$		•	=	•	=	•	=	•	$\{\beta_1^2\}$
$k = 21$		•		•	=	•			
$k = 22$	•	$\rightarrow$	○	$\rightarrow$	○	$\rightarrow$	○	$\rightarrow$	•
$k = 23$	•	$\rightarrow$	○	=	○	=	○	=	$\{\alpha'_6\}$
	•	=	•	=	•	=	•	=	$\{\alpha_1\beta_1^2\}$

$n =$	3	5	7	9	11	13	15	17					
$k = 24$	•	=	•	•									
$k = 26$	•			•	=	•	=	•	=	$\{\beta_2\}$			
	•		•	•	•	•	•	•					
$k = 27$	•	=	•	=	•	=	•	=	$\{\alpha_7\}$				
	•												
$k = 28$				•									
$k = 29$		•	=	•	=	•	=	•	=	$\{\alpha_1 \beta_2\}$			
					•								
$k = 30$		•	=	•	=	•	=	•	=	$\{\beta_1^3\}$			
		•		•	•	•	•	•					
$k = 31$	•	=	•	=	•	=	•	=	•	$= \{\alpha_8\}$			
		•		•	=	•							
$k = 32$	•												
$k = 33$	•				•								
	•	=	•	=	•	=	•	→	○	→	•		
$k = 34$	•	=	•										
	•	→	○	→	▷	→	▷	→	▷	→	○	→	•

**Th 2.2** (2.1.9) の mod  $p$  fibration は、次の  $IJ\Delta$ -sequence を誘導し、これは、mod  $p$  で完全である。

$$\dots \xrightarrow{\Delta} \pi_{i+2}(S^{2pm-1}) \xrightarrow{I} \pi_i(Q_2^{2m-1}) \xrightarrow{J} \pi_{i+3}(S^{2pm+1}) \xrightarrow{\Delta} \pi_{i+1}(S^{2pm-1}) \xrightarrow{I} \dots$$

$n =$	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	
$k = 35$	•	→	○	→	▷	=	▷	=	▷	=	$\{\alpha''_9\}$
$k = 36$	•	=	•	=	•	=	•	=	•	=	$\{\beta_1\beta_2\}$
•					•	=	•				
$k = 37$	•		•	=	•	=	•	=	•	=	$\{\varepsilon'\}$
$k = 38$							•	=	•	=	$\{\varepsilon_1\}$
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		
$k = 39$	•	=	•	=	•	=	•	=	•	=	$\{\alpha_{10}\}$
										•	
•	=	•	=	•	=	•	=	•	=	•	$\{\alpha_1\beta_1\beta_2\}$

$n =$	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
$k = 40$	•	=	•	=	•	=	•	=	•	=	$\{\beta_1^4\}$
											•
$k = 41$	•		•								•
$k = 42$	•				•	=	•	=	•	=	$\{\varepsilon_2\}$
					•		•		•		•
$k = 43$	•	=	•	=	•	=	•	=	•	=	$\{\alpha_{11}\}$
											•
•					•		•	=	•		

$n =$	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
$k = 44$	•			•								
$k = 45$		•	→	○	=	○	=	○	=	○	=	$\{\varphi\}$
								•	•	=	•	
$k = 46$	•	=	•	=	•	=	•	=	•	=	•	$\{\beta_1^2\beta_2\}$
		•	=	•								•
	•	→	○	→	○	→	○	→	○	→	○	→
$k = 47$	•	→	○	=	○	=	○	=	○	=	○	$\{\alpha'_{12}\}$
												•
•	•	=	•									
•	=	•	=	•	=	•	=	•	=	•	=	$\{\beta_1\varepsilon'\}$

$n =$	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27
$k = 48$	•		•	=	•			•	=	•			
$k = 49$	•	=	•	=	•	=	•	=	•	=	•	=	$\{\alpha_1\beta_1\beta_2\}$
													•
$k = 50$	•	=	•	=	•	=	•	=	•	=	•	=	$\{\beta_1^5\}$
		•	=	•									•
	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
$k = 51$	•	=	•	=	•	=	•	=	•	=	•	=	$\{\alpha_{13}\}$
													•

$n =$	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29
$k = 52$	•	=	•	=	•	=	•	=	•	=	•	=	•	$\{\beta_2^2\}$
														•
$k = 53$	•		•	•	•	=	•	=	•	=	•	=	•	
														•
$k = 54$	•													
														•
$k = 55$	•	=	•	=	•	=	•	=	•	=	•	=	•	$\{\alpha_{14}\}$
														•
•	=	•	=	•	=	•	=	•	=	•	=	•	=	$\{\alpha_1\beta_2^2\}$

## 6 New Tables of 3-primary Groups

### 6.1 Stable elements and Stable type invariants

$55 < k \leq 81$  に対する stable  $k$ -stem groups の結果について、Oka[22], Nakamura[18], Tangora[33], Ravenel[25] から引用する。

(6.1.1)  ${}_3\pi_k^S = \{\text{generator}\}$  のリストは下記の通り、関係式は up to sign .

$$(1) {}_3\pi_{62}^S = \{\beta_1 \beta_2^2\}.$$

$$(2) {}_3\pi_{65}^S = \{\alpha_1 \beta_1 \beta_2^2\}.$$

$$(3) {}_3\pi_{68}^S = \{\lambda\}, \lambda = \{\beta_2, \varepsilon_1, \alpha_1\}.$$

$$(4) {}_3\pi_{72}^S = \{\beta_1^2 \beta_2^2\}, \beta_1^2 \beta_2^2 = \{\alpha_1, 3, \lambda\}.$$

$$(5) {}_3\pi_{74}^S = \{\beta_5\}.$$

$$(6) {}_3\pi_{75}^S = \{\mu\}, \mu = \{\alpha_1, \alpha_1, \lambda\}, 3\mu = \alpha \beta_1^2 \beta_2^2.$$

$$(7) {}_3\pi_{78}^S = \{\beta_2^3\}, \beta_2^3 = \beta_1 \lambda = \alpha_1 \mu.$$

$$(8) {}_3\pi_{81}^S = \{\gamma_2, \mu_2\}, \mu_2 = \{\alpha_1, \alpha_1, \beta_5\}.$$

(5.1.7) と同様の invariants の記法を使う。

$k$	62	65	68	72	74	75	75	78
$\xi$	$\beta_1 \beta_2^2$	$\alpha_1 \beta_1 \beta_2^2$	$\lambda$	$\beta_1^2 \beta_2^2$	$\beta_5$	$\mu$	$\alpha_1 \beta_1^2 \beta_2^2$	$\beta_2^3$
$Q^m(\xi)$	$bb_2^2$	$abb_2^2$	$l$	$b^2 b_2^2$	$b_5$	$m$	$\times$	$b_2^3$
$\bar{Q}^m(\xi)$	$BB_2^2$	$ABB_2^2$	$L$	$B^2 B_2^2$	$B_5$	$\times$	$AB^2 B_2^2$	$B_2^3$

### 6.2 3-primary $k$ -stem Groups for $56 \leq k \leq 61$

まず、 $55 \leq k \leq 61$  における  $Q_{n+k}^n$  内のすべての invariants、ならびに  $k < 59$  における  $Q_k^1 \simeq {}_3\pi_{3+k}(S^3)$  の場合は、

いずれも既に得られた結果によって定まっていることに注意する。

**Th 6.1**  $56 \leq k \leq 61, n: \text{odd}$  に対する mod A  $k$ -stem groups  $\pi_{n+k}^n$  は、以下の3つの部分の直和として得られる。

(1) Removable simple unstable elements.

$(n, k) =$	$(15, 56)$	$(15, 57)$	$(3, 58)$	$(3, 59)$	$(9, 61)$
	$ab_2$	$AB_2$	$ab_2^2$	$AB_2^2$	$AB_2$
	•	•	•	•	•
	$b_2$	$B_2$	$b_2^2$	$B_2^2$	$B_2$

(2) Removable short range unstable elements.

$n =$	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	
		$AB^2 B_2$	$b^2 b_2$							$AB$	$b$			
$k = 57$		•	$\leftrightarrow$	•	=	•				•	$\leftrightarrow$	•	=	•
			$B^2 B_2$			$abb_2$					$B$			$a$
$k = 58$		$B^5$	$be'$				$B^3$		•	=	•	$ab^2$		
		•	$\leftrightarrow$	•	=	•			•	$\leftrightarrow$	•			
			$BE'$				$b^4$			$AB^2$	$b^2$			
$k = 59$				$ABB_2$			$bb_2$							
					$\bullet \leftrightarrow \bullet = \bullet$									
$k = 60$		$B^3 B_2$		$abb_2$		$B^4$	$e'$		$B^2$		$ab$			
		•	=	•	$\leftrightarrow$	•	=	•	•	$\leftrightarrow$	•			
				$AB^2 B_2$	$b^2 b_2$		$E'$		$b^3$		$AB$	$b$		
$k = 61$		$B^2 E'$		$b^5$		$e_2$	$e_1$							
		•	=	•	$\leftrightarrow$	•	=	•		$\bullet \leftrightarrow \bullet = \bullet$				
				$B^5$	$be'$		$E_1$		$B^3$					

[22] S.Oka, The stable homotopy groups of spheres, I, II, III, Hiroshima Math. J. 1(1971), 305-337, 2(1972), 99-161, 5(1975), 407-438.

[18] O.Nakamura, On the cohomology of the mod p Steenrod algebra, Bull. Sci. Engrg. Div, Univ. Ryukyus(Math.Nat.Sci.) 18(1975), 9-58.

[33] M.C.Tangora, Some homotopy groups mod 3, Conference on homotopy theory Evanston III. (1974), 227-245, Notas Mat. Simpos., 1 Soc. Mat. Mexicana, Mexico 1975.

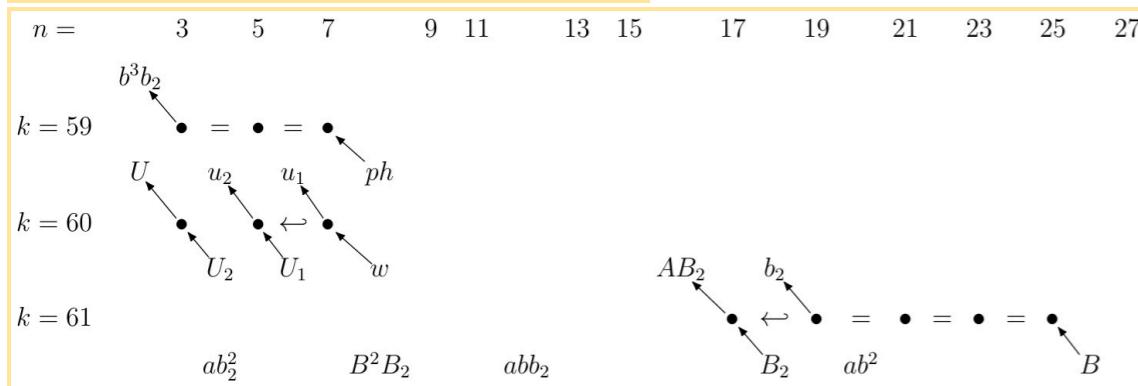
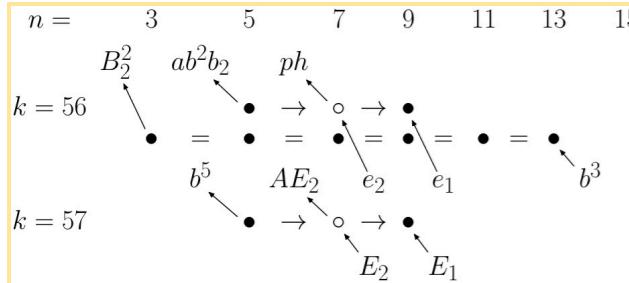
[25] D.C.Ravenel, Complex Bordism and stable Homotopy Groups of Spheres, Pure and Appl. Math. 121 (1986).

(5.1.7) Invariants  $Q^m(\xi)$  and  $\bar{Q}^m(\xi)$  for  $\xi \in \pi_k^S, k \leq 55$ .

$k$	0	3	7	10	13	20	23	26	29	30	36	37	38
$\xi$	$\iota$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\beta_1$	$\alpha_1 \beta_1$	$\beta_1^2$	$\alpha_1 \beta_1^2$	$\beta_2$	$\alpha_1 \beta_2$	$\beta_1^3$	$\beta_1 \beta_2$	$\varepsilon'$	$\varepsilon_1$
$Q^m(\xi)$	$i$	$a$	$a_2$	$b$	$ab$	$b^2$	$ab^2$	$b_2$	$ab_2$	$b^3$	$bb_2$	$e'$	$e_1$
$\bar{Q}^m(\xi)$				$B$	$AB$	$B^2$	$AB^2$	$B_2$	$AB_2$	$B^3$	$BB_2$	$E'$	$E_1$

$k$	39	40	42	45	45	46	47	49	50	52	55
$\xi$	$\alpha_1 \beta_1 \beta_2$	$\beta_1^4$	$\varepsilon_2$	$\varphi$	$\alpha_1 \varepsilon_2$	$\beta_1^2 \beta_2$	$\beta_1 \varepsilon'$	$\alpha_1 \beta_1^2 \beta_2$	$\beta_1^5$	$\beta_2^2$	$\alpha_1 \beta_2^2$
$Q^m(\xi)$	$abb_2$	$b^4$	$e_2$	$ph$	$\times$	$b^2 b_2$	$be'$	$ab^2 b_2$	$b^5$	$b_2^2$	$ab_2^2$
$\bar{Q}^m(\xi)$	$ABB_2$	$B^4$	$E_2$	$\times$	$AE_2$	$B^2 B_2$	$BE'$	$AB^2 B_2$	$B^5$	$B_2^2$	$AB_2^2$

(3) Remaining part.



Proof. 58-stem groups を求めることから始める。 $u(\beta_2^2) = 5$  なので、(1) の中の  $(n, k) = (3, 58)$  の simple element は removable である。 $k = 58$  における 2 つのブロックは、これらのブロックのどんな元も消す可能性のある invariant が他に存在しないため、決定されている。stable group  $\pi_{58}^S$  は自明である。よって 58-stem groups は (1) と (2) の対応する群の直和である。

同様に、(1) と (2) の中の 56-stem と 57-stem の群は消される。56-stem と 57-stem の群を決定するために、stable の結果  $\pi_{56}^S = \pi_{57}^S = 0$  から (3) の群を決定することが残っている。

58-stem groups の結果から、 $P(E_2) \neq 0, P(E_1) \neq 0$  である。Prop 5.1 により  $(n, k) = (7, 57)$  において  $HP(E_1) = 0$  である。したがって、 $\pi_{7+57}^7$  の位数は 9 であることが分かる。しかし、 $i\varepsilon_2 = i\{p, \alpha_1, \varepsilon_1\} = \alpha \cdot i \cdot \varepsilon_1$  であることから、Lem 3.2 により、この群は巡回群である。

Lem 2.4 により、群  $\pi_{59}^7$  は次の元により生成される。 $v(3) \in \{\alpha_1(3), p\iota_6, \beta_2^2(6)\}_1, H(v(3)) = B_2^2$ .  $v(n) = E^{n-3}v(3)$  と書く。 $H(\beta_1(5)) = a = I(\alpha_1(5))$  なので、 $H(\beta_1^3\beta_2(5)) = ab^2b_2$  を得る。よって、 $\pi_{61}^5 = \{v(5), \beta_1^3\beta_2\} \simeq \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$ . (5.1.1) (14) の関係式  $\varphi \in \{\alpha_1, \alpha_1, \varepsilon_1\}$  を Lem 3.8 に適用することで、次を満たす元  $\xi(7) \in \pi_{63}^7$  を得る。 $H(\xi(7)) = ph = I(\varphi(17)), P(e_1) = E^2\xi(7) = \xi(9)$ . また、 $\alpha i\varepsilon_1 = i\{3, \alpha_1, \varepsilon_1\} = \pm i\varepsilon_2$  に Lem 3.4 を適用することで次を得る。 $3\xi(7) = \pm P(e_2)$ . よって  $\xi(7)$  の位数は 9 であり、これは  $E^4: \pi_{63}^7 \rightarrow \pi_{67}^{11}$  の kernel を生成する。 $E^6: \pi_{61}^5 \rightarrow \pi_{67}^{11}$  の kernel は  $E^2$  によって  $3\xi(7)$  に写る位数 3 の元によって生成される。

(3) の  $k = 56$  における結果は次の lemma から成立する。

**Lem 6.1**  $v(13) = \beta_1^3\beta_2(13)$  up to sign .

Proof. 52-stem groups の中で、 $\beta_2^2(9) \neq \beta_2(9) \cdot \beta_2(35)$  であるが、 $\beta_2^2(13) = \beta_2(13) \cdot \beta_2(39)$  であることが分かる。よって、up to sign で  $v(10) \in \{\alpha_1(10), p, \beta_2^2(13)\} \supset \{\alpha_1(10), p, \beta_2(13)\} \cdot \beta_2(40) \ni \beta_1^3(10)\beta_2(40) = \beta_1^3\beta_2(10)$ . これらの差  $v(10) - \beta_1^3\beta_2(10)$  は  $\alpha_1(10) \cdot \pi_{66}^{13}$  に属している。 $\pi_{70}^{17} = 0$  なので、 $E(v(13) - \beta_1^3\beta_2(13)) \in \alpha_1(14) \cdot \pi_{70}^{17} = 0$  であり、(2.1.2) により lemma が証明される。■ up to sign で次が成り立つことに注意する。

(6.2.1)  $P(e_2) = v(7) \pm \beta_1^3\beta_2(7)$ .

**Prop 5.1** 各 invariant  $x \in Q_{6m+3+k}^{2m+1}$  の像  $d_1(x) = HP(x) \in Q_{6m+k}^{2m-1}$  は、符号を除いて、下記で与えられる。

$k$	10	11	20	21	26	27	36	37	37	38	39	43
$x$	$b$	$B$	$b^2$	$B^2$	$b_2$	$B_2$	$bb_2$	$BB_2$	$e'$	$E'$	$E_1$	$E_2$
$m \equiv 0$	$ab$	0	$ab^2$	0	$ab_2$	$b^3$	$abb_2$	0	$b^4$	0	$e_2$	0
$m \equiv 1$	$ab$	$AB$	$ab^2$	$AB^2$	$ab_2$	$AB_2$	$abb_2$	$ABB_2$	$b^4$	$B^4$	0	$AE_2$

$k$	46	47	47	48	52	53
$x$	$b^2b_2$	$B^2B_2$	$be'$	$BE'$	$b_2^2$	$B_2^2$
$m \equiv 0$	$ab^2b_2$	0	$b^5$	0	$ab_2^2$	0
$m \equiv 1$	$ab^2b_2$	$AB^2B_2$	$b^5$	$B^5$	$ab_2^2$	$AB_2^2$
$m \equiv 2$	0	$AB^2B_2$	0	$B^5$	0	$AB_2^2$

**Lem 3.2**  $\xi \in \pi_k^S$  に対して、 $u(\xi) < 2p(m+1) - 5, p\xi = 0$  ならば、 $d_1(\overline{Q}^{m+1}(\xi)) = PH(\overline{Q}^{m+1}(\xi)) = m \cdot Q^m(\alpha_1 \xi)$ .

ここで、 $u(\xi) \leq 4p - 3$  の  $\xi$  に対して、 $m = 1$  のときに成り立つ。

**Lem 2.4**  $\xi \in \pi_p(S^{2p-1})$  に対して、 $E^2(\xi) = 0$  ならば、 $\xi$  は  $\Delta$  の像である。

(5.1.1) (14)  $\pi_{45}^S = \{\varphi\}, \varphi = \{\alpha_1, \alpha_1, \varepsilon_1\}, p\varphi = \alpha_1\varepsilon_2$ .

**Lem 3.8**  $m \not\equiv -1, -2 \pmod{p}$  で、 $\gamma \in \pi_{i-4}(S^{2m+4p-9})$  に対して invariant  $x \in \pi_{i+2}(Q_2^{2m+3})$  は  $E^6(i_*\gamma)$  による M-represented であり、 $\alpha_1(2m+4p-9) \cdot \gamma = 0$  であるならば、 $\xi \in \pi_i(S^{2m+1})$  が存在して、up to non-zero coefficient で、 $H(\xi) \in I\{\alpha_1(2pm-1), \alpha_1(2pm+2p-4), E^3\gamma\}, E^2(\xi) = P(x)$ .

**Lem 3.4**  $x \in \pi_{i+2}(Q_2^{2m+1})$  が  $E^4(\gamma)$  による M-represented であり、 $h'_{m^*}(\gamma) = 0$  ならば、元  $\xi \in \pi_i(S^{2m-1})$  が存在し、 $\alpha(2pm-2) \cdot E^2\gamma$  による M-represented  $y \in \pi_i(Q_2^{2m-1})$  に対して、 $p \cdot \xi = P(y), E^2\xi = P(x)$ .

次に(3)の  $k = 59, 60, 61$  の場合を考える。

$\Delta: \pi_{63}^7 \rightarrow \pi_{61}^5$ ,  $\Delta: \pi_{64}^7 \rightarrow \pi_{62}^5$  から新しいinvariantsが得られる。 $E^2$ 。 $\Delta = \times p$ であるので、最初の  $\Delta$  のimageは  $\{v(5) \pm \beta_1^3 \beta_2(5)\}$  であり、2番目の  $\Delta$  は全射である。 $H(\beta_1^2 \varepsilon(5)) = I(\alpha_1 \beta_1 \varepsilon'(9)) = I(\beta_1^5)$  なので、最初の  $\Delta$  のkernelは  $\{v(7), \beta_1^3 \beta_2\}$  であり、2番目のkernelは  $\{\beta_1^2 \varepsilon'(7)\}$  である。よって、次のnot stable type invariantsを得る。

$$b^3 b_2 \in Q_{59}^1, B^3 B_2, U \in Q_{60}^1, B^2 E' \in Q_{61}^1,$$

ここで、 $b^3 b_2 = I' \beta_1^3 \beta_2(5)$ ,  $J(B^3 B_2) = \beta_1^3 \beta_2(7)$ ,  $J(U) = v(7)$ ,  $J(B^2 E') = \beta_1^2 \varepsilon'(7)$ である。

(2)の  $k = 60, 61$  における最初の short range unstable elements は、Th 5.4 (2) の  $k = 50, 51$  における元にそれぞれ右から  $\beta_1$  を合成することによって得られる。(2)の  $k = 60, 61$  の2番目の short range unstable elements は、それぞれ Lem 3.8 と Lem 5.2 によって得られる。

よって(3)の  $k = 59, 60, 61$  については、EHP-sequenceにより成立し、これによって定理の証明が完成する。■ 上の証明の中で次の関係式が得られた。

**Prop 6.1 up to sign** で、下記の関係式が成り立つ。

$$(1) H(v(3)) = B_2^2, H(\beta_1^3 \beta_2(5)) = ab^2 b_2, H(\xi(7)) = ph,$$

$$3\xi(7) = P(e_2) = v(7) \pm \beta_1^3 \beta_2(7), \xi(9) = P(e_1), P(b^3) = v(13) = \pm \beta_1^3 \beta_2(13).$$

$$(2) H(\xi'(7)) = AE_2 \text{ を満たす } \xi'(7) \in \pi_{64}^7 \text{ が存在し、}$$

$$H(\beta_1^2 \varepsilon'(5)) = b^5, 3\xi'(7) = \beta_1^2 \varepsilon'(7) = P(E_2), \xi'(9) = P(E_1).$$

$H(\xi(7)) = ph$  に Lem 3.5 を適用すると、Prop 6.1 (1) は  $H(\beta_1^3(5)) = ab^2 b_2$  が  $\alpha i(10) \circ \varphi(13)$

$\in \{3l_9, \alpha_1(9), \varphi(12)\}$  による M-represented であることを示す。

同様に、 $H(\xi'(7)) = AE_2$  は  $H(\beta_1^2 \varepsilon'(5)) = b^5$  は  $\alpha(10) \circ \tilde{\alpha_1 \varepsilon_2}$  による M-represented である。ここで、

$\tilde{\alpha_1 \varepsilon_2} \in \pi_{69}(Y^{14})$  は  $\alpha_1 \varepsilon_2(13) = 3\varphi(13)$  の coextension である。

これらは、以下の通り stable class による represented である。

**Prop 6.2 up to sign** で下記の関係式が成り立つ。

$$(1) \alpha_1 \beta_1^2 \beta_2 = \{3, \alpha_1, \varphi\}.$$

$$(2) i_* \beta_1^5 = \{\alpha i, 3, \alpha_1 \varepsilon_2\} \text{ i.e. } \beta_1^5 \in \{3, \alpha_1, 3, \alpha_1 \varepsilon_2\}.$$

### 6.3 3-primary k-stem Groups for $62 \leq k \leq 70$

$62 \leq k \leq 71$  に対して、 $Q_{n+k}^n$  の中の invariants は、 $(n, k) = (3, 62), (3, 63)$  における simple elements に関する4つの invariants を除いて stable type である。

**Th 6.2**  $62 \leq k \leq 70$ ,  $n: \text{odd}$  に対する mod A k-stem groups  $\pi_{n+k}^n$  は、以下の3つの部分の直和として得られる。

(1) Removable simple unstable elements.

$$(n, k) = \begin{matrix} (3, 62) & (21, 62) & (3, 63) & (21, 63) & (9, 64) & (27, 64) & (9, 65) & (9, 65) \\ ab^3 b_2 & ab^2 & AB^3 B_2 & AB^2 & ab^2 b_2 & ab & b^5 & AB^2 B_2 \\ \bullet & \bullet \\ b^3 b_2 & b^2 & B^3 B_2 & B^2 & b^2 b_2 & b & be' & B^2 B_2 \end{matrix}$$

$$(n, k) = \begin{matrix} (27, 65) & (9, 66) & (15, 66) & (15, 67) & (15, 67) & (3, 68) & (15, 68) & (21, 68) \\ AB & B^5 & abb_2 & ABB_2 & b^4 & abb_2^2 & B^4 & ab_2 \\ \bullet & \bullet \\ B & BE' & bb_2 & BB_2 & e' & bb_2^2 & E' & b_2 \end{matrix}$$

$$(n, k) = \begin{matrix} (3, 69) & (21, 69) & (9, 70) \\ ABB_2^2 & AB_2 & ab_2^2 \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ BB_2^2 & B_2 & b_2^2 \end{matrix}$$

Th 5.4 (2)

$n =$	3	5	7	9	11	$B^3$	$ab^2$	13	15	17	19	21	23
$k = 46$						•	=	•	$\leftrightarrow$	•			
									$AB^2$	$b^2$			
						$ABB_2$	$bb_2$						
$k = 47$						•	$\leftrightarrow$	•	=	•			
									$BB_2$	$ab_2$			
						$B^4$	$e'$						
$k = 48$						•	$\leftrightarrow$	•	=	•			
							$E'$			$b^3$			
						$e_2$	$e_1$						
$k = 49$						•	$\leftrightarrow$	•	=	•			
									$E_1$	$B^3$			
						$B^2 B_2$	$abb_2$						
$k = 50$						•	=	•	$\leftrightarrow$	•			
									$ABB_2$	$bb_2$			
						$BE'$	$b^4$						
$k = 51$						•	=	•	$\leftrightarrow$	•			
							$B^4$	$e'$					
						$BB_2$			$ab_2$				
$k = 52$									•	$\leftrightarrow$	•	=	•
										$AB_2$	$b_2$		
						$AE_2$	$e_2$			$E'$	$b^3$		
$k = 53$						•	$\leftrightarrow$	•	=	•	$\leftrightarrow$	•	
							$E^2$	$E_1$		$B^3$	$B_2$		
									$AB^2$	$b^2$			
$k = 55$									•	$\leftrightarrow$	•	=	•
										$B^2$		$ab$	
$n =$	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23		

**Lem 3.8**  $m \not\equiv -1, -2 \pmod{p}$  で、 $\gamma \in \pi_{i-4}(S^{2m+4p-9})$  に対して invariant  $x \in \pi_{i+2}(Q_2^{2m+3})$  は  $E^6(i_* \gamma)$  による

M-represented であり、 $\alpha_1(2m + 4p - 9) \circ \gamma = 0$  であるならば、 $\xi \in \pi_i(S^{2m+1})$  が存在して、up to non-zero coefficient で、 $H(\xi) \in I\{\alpha_1(2pm - 1), \alpha_1(2pm + 2p - 4), E^3 \gamma\}$ ,  $E^2(\xi) = P(x)$ .

**Lem 5.2**  $\xi \in \pi_{i+4}(S^{2p+1})$  Hopf invariant  $H(\xi)$  は  $\gamma \in \pi_{i+1}(Y^{2p^2-2})$  による M-represented であると仮定する。このとき up to non-zero coefficient で次が成り立つ。

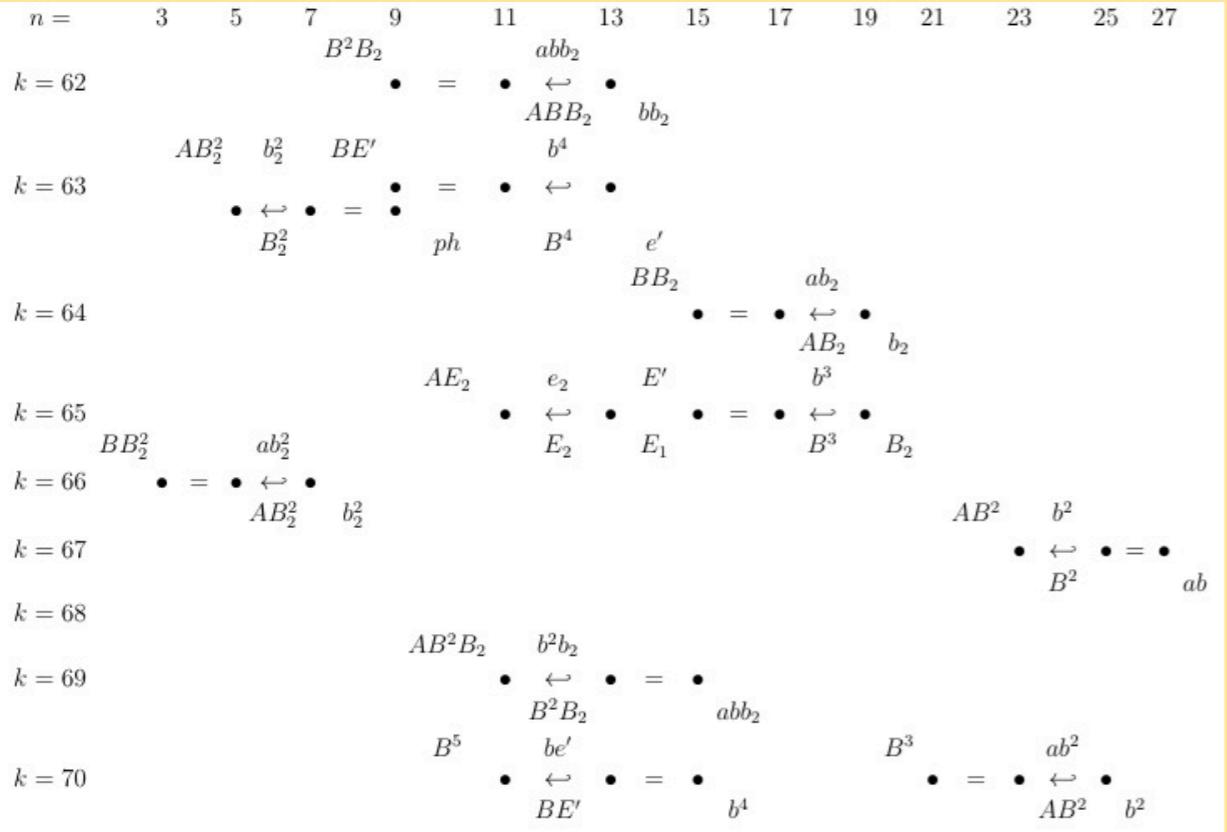
$JH(\partial_\alpha(\xi)) = H_p(\partial \alpha(\xi)) = \bar{\beta}_1 \circ E^2 \gamma$ , ここで、 $\bar{\beta}_1: Y^{2p^2} \rightarrow S^{2p+1}$  は  $\beta_1(2p + 1)$  の extension である。

**Lem 3.5**  $\xi \in \pi_{i+5}(S^{2m+3})$  の Hopf invariant  $H(\xi)$  が  $E^4(\gamma)$  による M-represented であり、 $h'_m(\gamma) = 0$  ならば、元  $\eta \in \pi_{i+3}(S^{2m+1})$  が存在し、 $p \cdot \xi = E^2 \eta$  であり、 $H(\eta)$  は  $\alpha(2pm - 2) \circ E^2 \gamma$  による M-represented である。

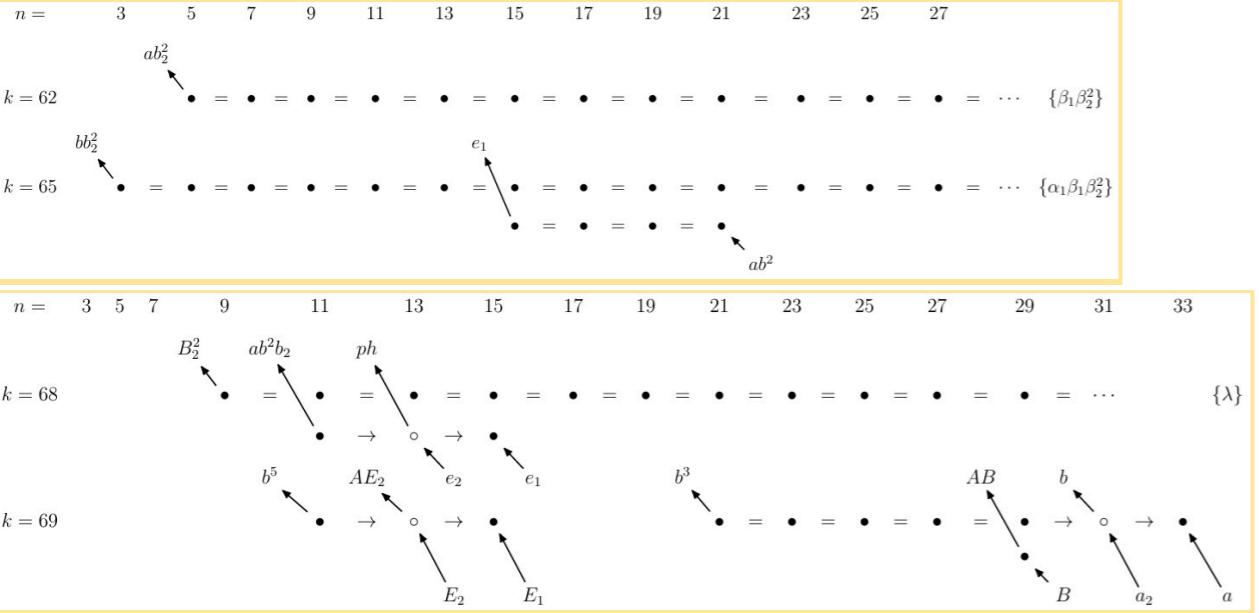
**Th 6.1 (1)** Removable simple unstable elements.

$(n, k) =$	(15, 56)	(15, 57)	(3, 58)	(3, 59)	(9, 61)
	$ab_2$	$AB_2$	$ab_2^2$	$AB_2^2$	$AB_2$
	•	•	•	•	•
	$b_2$	$B_2$	$b_2^2$	$B_2^2$	$B_2$

(2) Removable short range unstable elements.



(3) Remaining part.



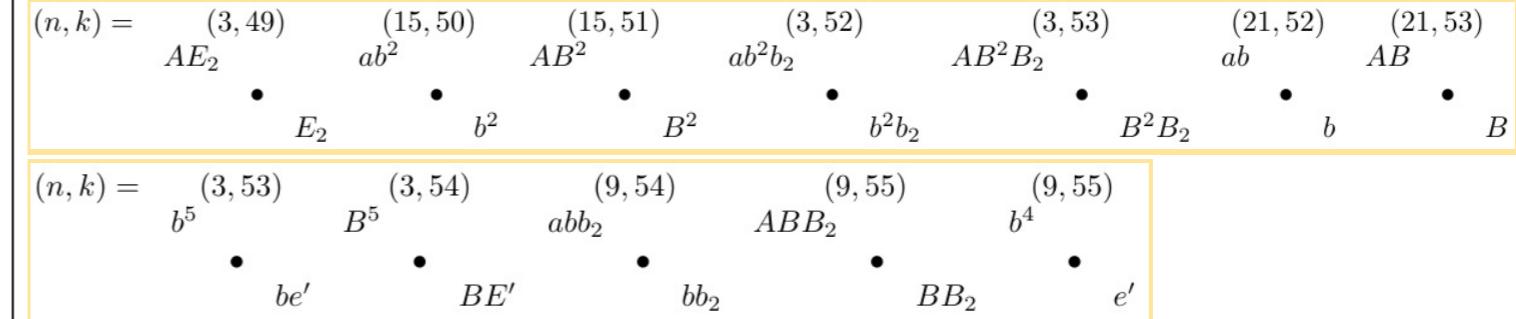
Proof.  $\beta_1^4 = \alpha_1 \varepsilon'$  であるため、 $b^4 = ae'$ ,  $b^5 = abe'$  とみなすことができる。(1) の全てのコレクションは  $\{x, P(x), HP(x) = \pm ax\}, P(x) \in \pi_*(S^{6k+3})$  の形をしている。 $(n, k) = (3, 62), (3, 63)$  の場合のコレクションは、Th 5.4 (1) の  $(n, k) = (3, 52), (3, 53)$  における対応するコレクションから  $\beta_1$  を合成することにより得られる。(1) の中の他のコレクションはまた Prop 5.2 により simple で removable である。

(2) の  $k = 66$  の中の short range collection を除いて、他の short range collections は全て Prop 5.3 により得られる。

(5.4.2) の元  $\xi \in \pi_{43}^3$  を考える。 $H(\xi) = BB_2$  なので、 $H(\xi \cdot \beta_2(43)) = BB_2^2$  を得る。Th 6.1 により  $\pi_{73}^{17} = 0$  なので、(5.4.2) から次が成り立つ。

$$E^4(\xi \cdot \beta_2(43)) = \beta_1^4 \beta_2(7) = \beta_1(7) \cdot \beta_1^3 \beta_2(17) \in \beta_1(7) \cdot \pi_{73}^{17} = 0.$$

Th 5.4 (1) Removable simple unstable elements.



(5.1.10)  $\delta \in \{\alpha_1, \alpha_1, \gamma\}$ .

**Prop 5.2**  $m \equiv 0 \pmod{3}$  とする。(5.1.10) の元に対して、 $x = Q^{m+2}(\gamma)$ ,  $y = Q^m(\delta)$  とする。このとき、元  $\xi \in \pi_i(S^{2m+1})$  が存在して次を満たす。 $H(\xi) = y$ ,  $E^2\xi = P(x)$ .

**Prop 5.3**  $m \equiv 1 \pmod{3}$  とする。(5.1.10) の元に対して、 $X = \overline{Q}^{m+2}(\gamma)$ ,  $Y = \overline{Q}^m(\delta)$  とする。Lem 3.9 の中の関係  $d_1(X) = HP(X) = 0$  が得られる、例えば stable range の中の計算であると仮定する。このとき、元  $\xi \in \pi_i(S^{2m+1})$  が存在して次を満たす。 $H(\xi) = Y$ ,  $E^2\xi = P(X)$ .

(5.1.10) の元  $\gamma, \delta$  と、その関係する invariants のリストは下記の通りである。

$\gamma$	$\alpha_1$	$\alpha_1 \beta_1$	$\alpha_1 \beta_1^2$	$\alpha_1 \beta_2$	$\beta_1^3$	$\varepsilon_1$	$\alpha_1 \beta_1 \beta_2$	$\beta^4$	$\varphi$
$\delta$	$\beta_1$	$\beta_1^2$	$\beta_1^3$	$\beta_1 \beta_2$	$\varepsilon'$	$\varphi$	$\beta_1^2 \beta_2$	$\beta_1 \varepsilon'$	$\beta_2^2$
$x$	$a$	$ab$	$ab^2$	$ab_2$	$b^3$	$e_1$	$abb_2$	$b^4$	$ph$
$y$	$b$	$b^2$	$b^3$	$bb_2$	$e'$	$ph$	$b_2^2$	$be'$	$b_2^2$
$X$	$AB$	$AB^2$	$AB_2$	$B^3$			$ABB_2$	$B^4$	
$Y$	$B^2$	$B^3$	$BB_2$	$E'$			$B^2 B_2$	$BE'$	

(5.4.2)  $u(\varepsilon') = 7$ ,  $u(\varepsilon_1) = 15$ ,  $u(\varepsilon_2) = 11$ ,  $u(\varphi) = 9$ ,

よって、 $E^2(\xi \circ \beta_2(43)) = \pm P(AB_2^2)$  である。Lem 2.4 により  $\Delta(P(b_2^2)) = \pm \xi \circ \beta_2(43)$  であり、(2) が確立された。 $\beta_1\beta_2^2(5)$  と  $\alpha_1\beta_1\beta_2^2(3)$  が定義される。よって、(3) の  $k = 62$  と  $k = 65$  が完成する。

次に  $n: odd$  に対する unstable groups  $\pi_{n+67}^n$  と  $\pi_{n+70}^n$  について調べる。stable の結果  $\pi_{67}^S = \pi_{70}^S = 0$  から、これらの unstable groups が (1) と (2) の中のコレクションからなることが分かる。したがって、 $B_2^2, ab_2^2, ph$  は  $H$ -image であり、 $E_2, E_1, B, a_2, a$  は  $P$  によって単射的に写される。

また、 $n = 5, 7$  に対して  $\pi_{n+68}^n = 0$  であり、 $n = 5, 7, 9$  に対して  $\pi_{n+69}^n = 0$  であることが分かる。

$HP(b^5) = ab^5 = 0$  なので  $P(b^5) \in E^2\pi_{7+68}^7 = 0$  であり、 $b^5$  は  $H$ -image である。

また Lem 3.9 により、ある  $\eta$  に対して、

$$P(AE_2) = E^2\eta, H_p(\eta) = \{\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1 \varepsilon_2\}(15) = \beta_1\varepsilon_2(15).$$

stable range において、 $\beta_1\varepsilon_2 \in \pi_{52}^S = \{\beta_2^2\}$ ,  $\alpha_1\beta_2^2 \neq 0$ ,  $\alpha_1\beta_1\varepsilon_2 = 3\beta_1\varphi = 0$  である。よって  $H_p(\eta) = 0$ ,

$P(AE_2) \in E^4\pi_{7+68}^7 = 0$  である。

(3) の  $k = 69$  における最初の extension  $\bullet \rightarrow \circlearrowleft \rightarrow \bullet$  は Lem 3.7 により確立される。

$\xi \in \pi_{13+68}^{13}$  が  $H(\xi) = ph$  を満たすとする。 $HP(e_2) = ae_2 = 3ph = 0$  なので、 $E^2\xi \neq 0$  である。Lem 3.7 と

$\varphi \in \{\alpha_1, \alpha_1, \varepsilon_1\}$  により、 $P(e_1) = E^2\xi$  を得る。

Lem 3.7 と Prop 6.2 により、 $\xi' \in \pi_{11+68}^{11}$  が存在し  $3\xi = E^2\xi'$ ,  $H(\xi') = ab^2b_2$  を満たす。よって、 $\xi$  の位数は 9 であり、 $E^4\xi = 0$  である。

$\lambda$  は  $\{\beta_2, \varepsilon_1, \alpha_1\}$  により与えられる。 $\beta_2(11) \circ \varepsilon_1(37) \in \pi_{11+64}^{11} = 0$  なので、 $\lambda(11) \in \{\beta_2(11), \varepsilon_1(37), \alpha_1(75)\}$  が存在し  $E^\infty\lambda(11) = \lambda$  である。 $E^\infty\xi' = 0$  なので  $E^2\lambda(9) = \lambda(11)$  となる  $\lambda(9)$  が存在する。 $\lambda(9)$  は  $H(\lambda(9)) = \pm B_1^2$  を満たさなければならない。よって (3) の  $k = 68$  が確立され、 $P(b^3) = 0$  を得る。よって (3) の  $k = 69$  が Lem 3.7 により確立される。■

#### 6.4 3-primary $k$ -stem Groups for $71 \leq k \leq 80$

次の定理の中で、全ての invariants は stable type である。

**Th 6.3**  $71 \leq k \leq 75$ ,  $n: odd$  に対する mod A  $k$ -stem groups  $\pi_{n+k}^n$  は、以下の3つの部分の直和として得られる。

(1) Removable simple unstable elements.

$$(n, k) = \begin{array}{cccc} (9, 71) & (15, 73) & (27, 75) & (27, 75) \\ AB_2^2 & AE_2 & ab^2 & AB^2 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ B_2^2 & E_2 & b^2 & B^2 \end{array}$$

(2) Removable short range unstable elements.

$$\begin{array}{ccccccccccccc} n = & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 & 17 & 19 & 21 & 23 & 25 & 27 & 29 & 31 \\ k = 71 & & & & & & & ABB_2 & bb_2 & & & & & & & \\ & & & & & & & \bullet & \leftrightarrow & \bullet = \bullet & & & & & & \\ & & & & & & & BB_2 & & ab_2 & & & & & & \\ & & & & & & & B^4 & e' & & & & & & & \\ & & & & & & & \bullet & \leftrightarrow & \bullet = \bullet & B^2 & ab & & & & \\ & & & & & & & E' & & & \bullet = \bullet & \leftrightarrow & \bullet & & & \\ & & & & & & & & & b^3 & & & AB & & & \\ k = 72 & & & & & & & & & & & & b & & & \\ & & & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & ABB_2^2 & bb_2^2 & & & & & & & \\ k = 73 & & & & & & & \bullet \leftrightarrow \bullet = \bullet & & & & & & & & \\ & & & & & & & BB_2^2 & ab_2^2 & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & B^2B_2 & & abb_2 & & & & & & \\ & & & & & & & \bullet & = & \bullet \leftrightarrow \bullet & & & & & & \\ & & & & & & & & & & ABB_2 & bb_2 & & & & \\ & & & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & AB_2^2 & b_2^2 & BE' & & b^4 & & & & \\ & & & & & & & \bullet \leftrightarrow \bullet = \bullet & = & \bullet \leftrightarrow \bullet & & & & & & \\ k = 74 & & & & & & & B_2^2 & ph & B^4 & e' & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & & & & \\ k = 75 & & & & & & & & & & & & & & & & \end{array}$$

**Lem 2.4**  $\xi \in {}_p\pi_i(S^{2p-1})$  に対して、 $E^2(\xi) = 0$  ならば、 $\xi$  は  $\Delta$  の像である。

**Lem 3.9**  $m \not\equiv 0, -1 \pmod{p}$  で、 $\gamma \in \pi_{i-3}(Y^{2m+4p-8})$  に対して invariant  $x \in \pi_{i+2}(Q_2^{2m+3})$  は  $E^6\gamma$  による

M-represented であり、 $\eta_{m+1}^{(3)} \circ \gamma = 0$  であるならば、 $\xi \in \pi_{i+1}(S^{2m+1})$  が存在して、up to non-zero coefficient で

$$H_p(\xi) = JH(\xi) \in \{\alpha_1(2pm + 1), \alpha_1(2pm + 2p - 2), E^3\pi_*\gamma\}.$$

**Lem 3.7**  $\xi \in \pi_{i+4}(S^{2pm+1})$ ,  $\gamma \in \pi_s^S$ ,  $\delta \in \pi_t^S$  に対して、up to non-zero coefficients で次の関係が成り立つ。

(1)  $H(\xi) = Q^{pm}(\gamma)$  は、 $H(\Delta(\xi)) = \overline{Q}^{pm-1}(\alpha\gamma) = HP(\overline{Q}^{pm}(\xi))$  を誘導する。

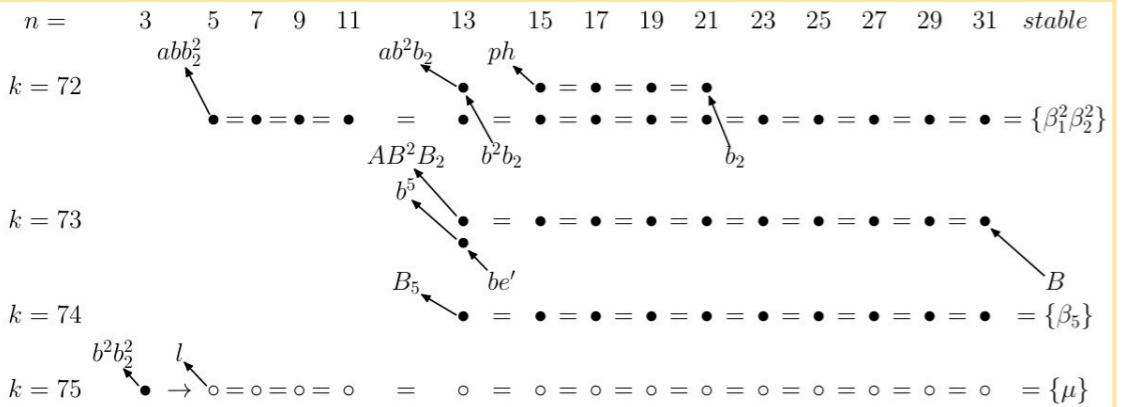
(2)  $H(\xi) = Q^{pm}(\gamma)$ ,  $\Delta(\xi) = P(\overline{Q}^{pm}(\gamma))$  は、 $H(\xi \circ \delta(i+4)) = Q^{pm}(\gamma\delta)$ ,  $\Delta(\xi \circ \delta(i)) = P(\overline{Q}^{pm}(\gamma\delta))$  を誘導する。

**Prop 6.2** up to sign で下記の関係式が成り立つ。

$$(1) \alpha_1\beta_1^2\beta_2 = \{3, \alpha_1, \varphi\}.$$

$$(2) i_*\beta_1^5 = \{\alpha i, 3, \alpha_1\varepsilon_2\} \text{ i.e. } \beta_1^5 \in \{3, \alpha_1, 3, \alpha_1\varepsilon_2\}.$$

(3) Remaining part.



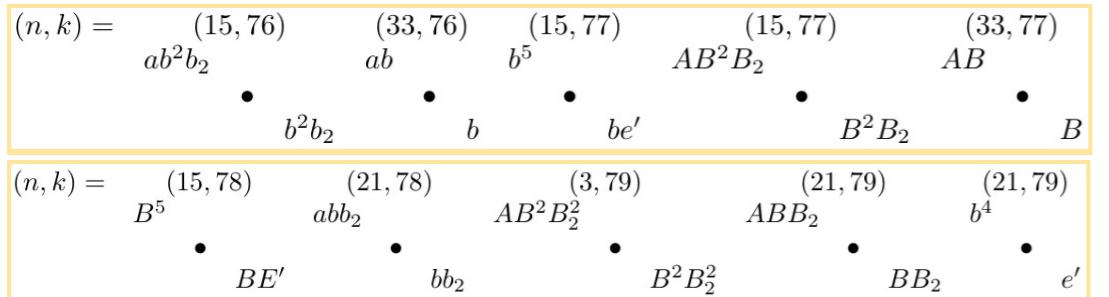
Proof.  $k = 70$  の結果から 71-stem groups の  $H$ -image は  $AB_2^2, ABB_2, bb_2$  であることが分かる。よって stable の

結果  $\pi_{71}^S = 0$  は、unstable 71-stem groups が (1) と (2) の群の直和であることを導く。

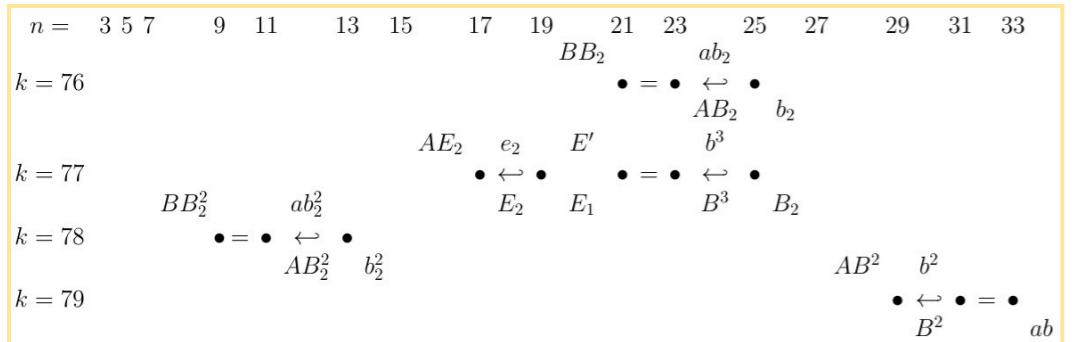
72-stem groups を考える。 $H(\beta_1^2\beta_2^2) = ab^2$  なので、列  $\{\beta_1^2\beta_2^2(2m+1), m > 1\}$  は消去できる。 $\pi_{13+71}^{13} = 0$  ので  $P(ph) = 0$  である。したがって、 $ph$  と打ち消し合う可能性のある唯一の元は  $b_2$  である。よって 72-stem groups は決定された。73-stem, 74-stem, 75-stem groups は問題なく決定される。■

**Th 6.4**  $76 \leq k \leq 79, n: \text{odd}$  に対する mod  $A$   $k$ -stem groups  $\pi_{n+k}^n$  は、以下の3つの部分の直和として得られる。

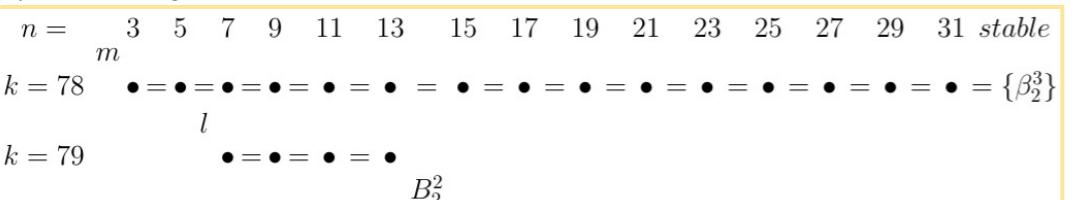
(1) Removable simple unstable elements.



(2) Removable short range unstable elements.



(3) Remaining part.



Proof.  $k = 78$ において、 $\beta_2^3(5) = \beta_2^2(5)$ 。 $\beta_2(57)$ が存在し  $H(\beta_2^3(5)) = 0$  である。よって 78-stem groups が決定され、 $P(l) = 0$  である。 $\pi_{79}^S = 0$  なので、 $l$  は  $B_2^2$  によって消されなければならない。他の場合は簡単に得られる。■

次の群  $*$  と invariants が、まだ確定していないまま残っている。

$n =$	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27
	$L$		$abb_2^2$										
	$B^2B_2^2$	$U'_3$	$u_2$	$u_1$									
$k = 76$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
	$U_3$	$U_2$	$U_1$	$w$									$e_1$
	$ABB_2^2$	$b_2^2$											
$k = 77$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
													$B_2^2$

ここで、not stable type invariants は以下で与えられる。

$$J(U_3') = P(e_2), J(U_3) = P(E_2), J(U_2) = v_2(19), J(U_1) = v_1(25),$$

$$u_2 = I(v_2(17)), u_1 = I(v_1(23)), w = I(P(i)).$$

まず Lem 3.13 により  $HP(w) = u_1$  を得る。

2つの場合 Case (I)  $P(U_3) = 0$  と Case (II)  $P(U_3) \neq 0$  を考える。

最初の場合、 $H\xi = U_3$  を満たす元  $\xi$  が存在し、invariant  $ab^2$  によって消去されなければならない。77-stem の中

の群  $*$  は全て  $\mathbb{Z}_3$  に同型であり、同型写像  $E^2$  によってつながっている。よって invariants

$U_3, U_2, U_1, w, ABB_2^2, b_2^2$  は  $P$  によって単射的に写され、 $H(\eta') = B^2B_2^2$  となる元  $\eta'$  が存在する。

関係式  $\beta_1^2\beta_2^2 = \{\alpha_1, 3, \lambda\}$  に Lem 3.7 と Lem 3.9 を適用すると、 $\eta$  が存在して up to sign で

$p\eta = E^2(\eta') = P(ABB_2^2) \neq 0$  が成り立つことを得る。

2番目の場合、Lem 3.9 は  $P(ABB_2^2) = 0$  を示し、 $H(\eta) = ABB_2^2$  となる  $\eta$  が存在し、 $ab^2$  によって消去される。

EHP-sequence の完全性により、以下の可能性を得る。

**Prop 6.3** 以下のようなバリエーションがある。

$n =$	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27
-------	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----

Case (I)

$$k = 76 \quad \bullet \rightarrow \circ \rightarrow \bullet \Rightarrow \bullet = \bullet = \bullet = \bullet = \bullet = \bullet = \bullet$$

$$k = 77 \quad \bullet = \bullet$$

Case (II)

$$k = 76 \quad \bullet = \bullet = \bullet = \bullet \Rightarrow \bullet = \bullet = \bullet = \bullet = \bullet = \bullet = \bullet$$

$$k = 77 \quad \bullet = \bullet$$

ここで、 $\Rightarrow$  は  $E^2: \pi_{7+76}^7 \rightarrow \pi_{9+76}^9$  の image が、上の成分であり、 $\diamond$  は 9 個の要素を持つ群であることを意味している。

最後に、上の結果は  $H(\pi_{3+79}^3)$  が stable type と non-stable type の 2つの生成元を持つことを示していることに注意する。また、群  $Q_{3+79}^3$  は同様に2つの生成元を持っている。よって次を得る。

$$(6.4.1) \quad \pi_{3+69}^3 \simeq \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3, \quad E^2(\pi_{3+79}^3) = 0.$$

## 6.5 Table of 3-primary $k$ -stem Groups for $56 \leq k \leq 80$

以下は 3-primary  $k$ -stem groups mod  $A$  の表である。

$n =$	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27
$k = 56$		$\bullet \rightarrow \circ \rightarrow \bullet$								$\bullet$			
		$\bullet = \bullet = \bullet = \bullet = \bullet = \bullet$											
$k = 57$		$\bullet \rightarrow \circ \rightarrow \bullet$							$\bullet$		$\bullet = \bullet$		
		$\bullet = \bullet = \bullet$											
$k = 58$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet = \bullet$					$\bullet = \bullet = \bullet$					
$k = 59$	$\bullet = \bullet = \bullet$		$\bullet$	$\bullet = \bullet$									
	$\bullet$												

**Lem 3.13**  $x \in \pi_{i+1}(Q_2^{2m+2p-1})$  が  $E\gamma$  による M-represented であり、 $y \in \pi_i(Q_2^{2m+1})$  は  $\beta_{(1)}\gamma$  による represented であるとする。 $m \geq 1$  ならば、 $P(y) = \partial_\alpha P(x)$  である。

**Lem 3.7**  $\xi \in \pi_{i+4}(S^{2pm+1})$ ,  $\gamma \in \pi_s^S$ ,  $\delta \in \pi_t^S$  に対して、up to non-zero coefficients で次の関係が成り立つ。

(1)  $H(\xi) = Q^{pm}(\gamma)$  は、 $H(\Delta(\xi)) = \bar{Q}^{pm-1}(\alpha\gamma) = HP(\bar{Q}^{pm}(\xi))$  を誘導する。

(2)  $H(\xi) = Q^{pm}(\gamma)$ ,  $\Delta(\xi) = P(\bar{Q}^{pm}(\gamma))$  は、 $H(\xi \cdot \delta(i+4)) = Q^{pm}(\gamma\delta)$ ,  $\Delta(\xi \cdot \delta(i)) = P(\bar{Q}^{pm}(\gamma\delta))$  を誘導する。

**Lem 3.9**  $m \not\equiv 0, -1 \pmod{p}$  で、 $\gamma \in \pi_{i-3}(Y^{2m+4p-8})$  に対して invariant  $x \in \pi_{i+2}(Q_2^{2m+3})$  は  $E^6\gamma$  による

M-represented であり、 $\eta_{m+1}^{(3)} \cdot \gamma = 0$  であるならば、 $\xi \in \pi_{i+1}(S^{2m+1})$  が存在して、up to non-zero coefficient で

$$H_p(\xi) = JH(\xi) \in \{\alpha_1(2pm+1), \alpha_1(2pm+2p-2), E^3\pi_*\gamma\}.$$

$n =$	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	stable	
$k = 60$	• = •	•		•	• = •				• = •	•							
$k = 61$	• = •	•	•	•	•	• = •	•	•	• = •	• = •	• = •	• = •					
$k = 62$		• = { \beta_1 \beta_2^2 }															
$k = 63$	•	•	•	• = •					•								
$n =$	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	stable
$k = 64$		•					• = •	•					•				
$k = 65$	• = { \alpha_1 \beta_1 \beta_2^2 }																
$k = 66$	• = •	•	•					•									
$k = 67$								•	• = •								
$n =$	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35 stable
$k = 68$		• = •	=	• =	• =	• =	• =	• =	• =	• =	• =	• =	• =	• =	• =	• =	{ \lambda }
		•															
$k = 69$	•																
$k = 70$		•	•	•	• =	•			• = •	•							
$k = 71$		•				•	• =	•									
$n =$	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35 stable
$k = 72$	• = { \beta_1^2 \beta_2^2 }																
$k = 73$	•	•	• = •				• = •	• = •	• = •	• = •	• = •	• = •	• = •	• = •	• = •		
$k = 74$																	
$k = 75$	• → o → o = { \mu }																
$n =$	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35 stable
$k = 76$	• → o → o = • = • = • = • = • = • = • = • = •																
$k = 77$	•	•	•				•			• = •	•					•	
$k = 78$	• = { \beta_2^3 }																
$k = 79$	•	•	• = • = • = • = •						•								

$k = 76$  と  $k = 77$  に対する結果はまだ決定されておらず、ここでは一例を示している。そのバリエーションは Prop 6.3 にみられる。

## References

- [1] J.F.Adams, On the groups  $J(X)$  -IV, Topology 5 (1966),21-71.
- [3] F.Cohen, J.C.Moore and J.Neisendorfer, The double suspension and exponents of the homotopy groups of spheres, Ann. of Math. 110 (1979),549-565.
- [4] E.Dyer and R.Lashof, Homology of iterated loop spaces, Ann. of Math. 84 (1962), 35-88.
- [6] B.W.Gray, On the sphere of origin of infinite families in the homotopy groups of spheres, Topology 8, (1969), 219-232.
- [7] B.W.Gray, Unstable families related to the image of  $J$ , Proc. Camb. Phil. Soc, 96 (1984), 95-113.
- [8] B.W.Gray, On Toda's fibrations, Proc. Camb. Phil. Soc. 97 (1985), 289-298.
- [10] J.R.Harper, A Proof of Gray's conjecture, Contemp. Math. 96 (1989), 181-188.
- [12] I.M.James, Reduced product space, Ann. of Math. 62 (1955), 170-197.
- [17] J.C.Moore, The double suspension and p-primary components of the homotopy groups of spheres, Boll. Soc. Mat. Mexicana, 1 (1956), 28-37.
- [18] O.Nakamura, On the cohomology of the mod  $p$  Steenrod algebra, Bull. Sci. Engrg. Div, Univ. Ryukyus(Math.Nat.Sci.) 18(1975), 9-58.
- [19] J.Neisendorfer, 3-primary exponents, Proc. Camb. Phil. Soc.90 (1981), 63-83.
- [20] G.Nishida, Cohomology operations in iterated loop space, Proc.Japan Acad. 44(1967), 839-842.
- [21] S.Oka, On the Homotopy Groups of Sphere Bundles over Spheres, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser.A-I 33 (1969), 161-195.
- [22] S.Oka, The stable homotopy groups of spheres, I, II, III, Hiroshima Math. J. 1(1971), 305-337, 2(1972), 99-161, 5(1975), 407-438.
- [25] D.C.Ravenel, Complex Bordism and stable Homotopy Groups of Spheres, Pure and Appl. Math. 121 (1986).
- [26] P.Selic, Odd primary torsion in  $^*(S^3)$ , Topology 17 (1978), 407-412.
- [27] P.Selic, A Decomposition of  $\pi_*(S^{2p+1}; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ , Topology 17 (1978), 407-412.
- [28] J.-P.Serre, Homologie singuliere des espaces fibres, Ann of Math. 54 (1951),425-505.
- [29] J.-P.Serre, Groupes d'homotopie et classes de groups abelian, Ann of Math. 58 (1953),258-294.
- [33] M.C.Tangora, Some homotopy groups mod 3, Conference on homotopy theory Evanston III. (1974), 227-245, Notas Mat. Simpos., 1 Soc. Mat. Mexicana, Mexico 1975.
- [34] H.Toda, On double suspension E2, Inst.Polytech. Osaka City Univ. Ser.A Math. A7 (1956), 922-924.
- [37] H.Toda. On homotopy groups of  $S^3$ -bundles over spheres, J.Math.Kyoto Univ. 2 (1963), 193-207.
- [38] H.Toda. On Iterated Suspensions I,II,III, J. Math. Kyoto Univ. 5 (1966), 87-142,209-250, 8(1968),101-130.
- [39] H.Toda, An important relation in homotopy groups of spheres, Proc. Japan Acad. 43 (1967), 839-942.
- [45] N.Yamamoto, Algebra of stable homotopy of Moore space, J. Math. Osaka City Univ. 14 (1963), 45-67.