Q3 MAT022 2021-1

1. Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?

   1. Todos los valores propios de A son reales.
   2. Existe un vector u no nulo tal que $Au = u$.
   3. Si u y v son vectores tales que $Au + u = 0$ y $Av = 2v$, entonces $u \perp v$.

- ○ 1 y 2.
- ○ Sólo 3.
- ○ Sólo 2.
- ○ todas.
- ○ 2 y 3.
- ◉ 1 y 3. ✔
- ○ Sólo 1

2. Supongamos que k es número natural tal que $k > 1$ ¿Para qué valor de k las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{kn}}{n} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{k}{4}\right)^n$$

convergen simultáneamente?

Respuesta: 3 ✔

3. Supongamos que a y b son números reales positivos con $0 < a < b$. Considere la curva C parametrizada por

$$x(t) = \frac{\cos(t)}{t}, \quad y(t) = \frac{\operatorname{sen}(t)}{t}, \text{ con } t \in [a, b].$$

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?

1. La longitud de la curva satisface $L(C) \geq \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.
2. C es una curva cerrada.
3. C es una curva simple.

- 1 y 2.
- Sólo 2.
- 1 y 3. ✔
- Sólo 1
- todas.
- Sólo 3.
- 2 y 3.

4. Supongamos que a es un número real tal que $|a| > 1$. Sobre el valor del límite

$$L = \lim_{n \to \infty} \frac{1 + ar + (ar)^2 + (ar)^3 + \ldots + (ar)^n}{r^{n+1} + a}$$

es correcto afirmar que:

- ○ $L = \dfrac{1}{1-(ar)^2}$, si $|r| < \dfrac{1}{|a|}$.
- ◉ $L = \dfrac{1}{a - a^2 r}$, si $|r| < \dfrac{1}{|a|}$. ✔
- ○ $L = \dfrac{1}{a - ar^2}$, si $|r| < \dfrac{1}{|a|}$.
- ○ El límite no existe y no se puede calcular.
- ○ $L = \dfrac{-1}{a - (ar)^2}$, si $|r| > \dfrac{1}{|a|}$.

5. Supongamos que a y r son dos números reales positivos tales que $0 < r < a$. Consideremos la circunferencia de radio r definida como

$$S : (x-a)^2 + y^2 = r^2.$$

¿Qué podemos afirmar respecto al volumen $V(S)$ del sólido de revolución que se obtiene al girar S respecto a la recta $x = -a$?

- Por el Método de las capas cilíndricas $V(S) = 2\pi \int_{a-r}^{a+r} \sqrt{r^2 - (x-a)^2}(x+a)dx.$
- Por el Método de las capas cilíndricas $V(S) = 4\pi \int_{a-r}^{a+r} \sqrt{r^2 - (x-a)^2}xdx.$
- Por el Método de los Discos $V(S) = \pi \int_{-r}^{r} \left((\sqrt{r^2 - y^2} + 2a)^2 - (\sqrt{r^2 - y^2} - 2a)^2 \right) dy.$ ✔
- Por el Método de los Discos $V(S) = \pi \int_{-r}^{r} \left((\sqrt{r^2 - y^2} + a)^2 - (\sqrt{r^2 - y^2} - a)^2 \right) dy.$

6. ¿Cuál es el volumen del sólido de revolución que se obtiene al rotar la región $x^2 + 4y^2 \leq 4$ alrededor de la recta $y = 3$?

- 6π.
- 12π.
- $18\pi^2$.
- $6\pi^2$.
- $12\pi^2$. ✔

7. Consideremos la parametrización estándar de la gráfica de una función estrictamente creciente en $[0,1]$ y dos veces derivable en $(0,1)$

$$P:(x,y)=(x,f(x)), \qquad x\in[0,1].$$

Definamos $s(x)=\int_0^x \sqrt{1+(f'(t))^2}dt$ para $x\in[0,1]$ y $\tau(x)=f'(x)$ para $x\in(0,1)$, entonces:

- $\frac{d\tau}{ds}=f''(x(s))\sqrt{1+(f'(x(s)))^2}$
- $\frac{d\tau}{ds}=f'(s)$
- $\frac{d\tau}{ds}=f''(x(s))\dfrac{1}{\sqrt{1+(f'(x(s)))^2}}$ ✔
- $\frac{d\tau}{ds}=f''(s)$

8. De las siguientes series:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+n}$,
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{1}{n}\right)$,
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{(n+1)^2}$,

cuáles son convergentes?

- ○ Sólo 2 y 3
- ◉ Todas ✔
- ○ Sólo 1 y 3
- ○ Sólo 1
- ○ Sólo 1 y 2
- ○ Sólo 2
- ○ Ninguna
- ○ Sólo 3