ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

Московский институт электроники и математики им. А.Н. Тихонова

Хачатрян Армен Аветикович

Паньков Кирилл Игоревич

Выбор оптимального дележа риска между страховщиком и клиентом максимизацией ожидаемой полезности страховщика

Междисциплинарная курсовая работа
студентов образовательной программы
«Прикладная математика»,
наименование образовательной программы

группы БПМ-153

Руководитель

Доцент

Голубин Алексей Юрьевич

И.О. Фамилия

____

Подпись студента

А. А. Хачатрян

____

Подпись студента

К. И. Паньков

Консультант

ученая степень, звание (при наличии)

____

И.О. Фамилия

Москва 2018 г.

Аннотация

Объектом разработки данной Междисциплинарной курсовой работы является модель индивидуального риска или, иначе, статистическая модель суммарного ущерба из капитала, состоящего как из собственного капитала страховой компании, так и из средств, собранных с клиентов.

Основной целью изучения данной модели является оптимальный выбор дележа риска между страховщиком (страховой компанией) и страхователем (клиентом) посредством максимизации ожидаемой полезности финальной прибыли страховщика.

В результате проделанной работы были найдены верхние пределы ответственности страховщика при непрерывном и дискретном случаях распределения ущерба клиента, сделаны выводы об их зависимости от варьирования входных данных.

Работа состоит из двух частей: теоретической и практической. В первой описываются исследуемая модель страхования, основные термины и теоретические основы. Вторая включает в себя численное решение искомой задачи при различных условиях. Для наглядности представлены графики зависимости изменения верхнего уровня ответственности страховщика в двух случаях.

Annotation

The principal object of study in term paper is the model of individual risk or, in a different way, the statistical model of normal total loss from the fund, which consists of the own capital of insurance company and amounts of money raised from their clients.

The critical goal of model study is the choice of optimal risk sharing between insurer (insurance company) and client to maximize the final expected utility of insurer.

As a result of work accomplished upper limits of the responsibility of insurer were found in cases of continuous and discrete distributions. Furthermore, the conclusions of their dependence of variation in input data were reached.

The term paper is divided into two parts: theoretic and practical. The first part includes the description of the insurance model, terminology and theoretical bases. The second part comprises numerical solutions under different conditions. For illustrative purposes, there are plots showing susceptibility of changes of the upper limit of insurer responsibility in two cases.

Оглавление

Аннотация 2
Annotation 3
Теоретическая часть 6

Введение

Сегодня страхование подразумевает собой социальный механизм, направленный на распределении риска и возмещение ущерба лиц из страхового фонда, образованного из страховых взносов, внесенных этими лицами на основе расчетов тарифов страхования с помощью методов математической статистики и закона больших чисел.

Оптимальный выбор дележа риска в случае страховщик-страхователь – основная тема данной работы. Данное исследование основывается на страховании формой «stop-loss», так как это наиболее благоприятная модель отношений для страховщика, с позиции которого происходит максимизация ожидаемой полезности его финального капитала. Она является таковой, потому что применяется в тех случаях, когда клиент сталкивается с катастрофическими значениями собственного ущерба, за погашение которого страховая компания не берет на себя ответственность. Данная форма, разработанная с целью ограничить величину ущерба, возмещенную впоследствии страховщиком, в наши дни – одна из наиболее востребованных в сфере страхования. Риск подразумевает собой денежный эквивалент, выраженный с помощью случайной величины возможного ущерба.

Основная задача данной курсовой работы – нахождение верхнего предела ответственности страховщика следующими способами:

a) Непрерывный случай: нахождение минимального корня уравнения $\psi(k) = 0$с целью нахождения k^0, которому он равен, чтобы затем найти значение k^* (см. Теория). Далее варьирование параметра c (коэффициент неприятия) и демонстрация тенденции на изменение k^*.

b) Дискретный случай: нахождение максимального значения целевого функционала ожидаемой полезности капитала страховщика путём перебора различных возможных для данного случая значений k и определение k^*, при котором этот функционал принимает наибольшее значение. Далее варьирование ω (собственный капитал) и демонстрация тенденции на изменение k^*.

Теоретическая часть

Суть дележа риска между страховщиком и клиентом заключается в том, что клиент принимает на себя часть риска возникновения страхового случая при условии получения выгодных условий на страховой взнос. Обозначим риск k-ого клиента случайной величиной X_k, $I(X_k)$ – доля риска, оплачиваемая страховой компанией, а доля клиента тогда X_k - $I(X_k)$, где $I\ (x)$ – функция дележа риска. Теоретически, эта функция может быть любой, определенной на [0; ∞), лежащей в пределах от 0 до x включительно.

Объектом изучения служит нахождение оптимального дележа риска между страховщиком и страхователями в количестве n. Ожидаемая полезность финального капитала $\omega + nd - \sum_{j=1}^{n} I(X_j)$ – критерий оптимальности страховщика.

Заданную функцию полезности $u_0(y)$ считаем непрерывно дифференцируемой, причем $u'(y)>0$, а также строго вогнутой. Тогда задача обретает следующий вид:

$$\begin{cases} J[I] \to \max_I \\ 0 \le I(X) \le x \end{cases} \qquad (1)$$

В данной системе: $J[I] \equiv Eu_0(\omega + nd - \sum_{j=1}^{n} I(X_j))$ и взнос $d = (1 + \alpha)EI(X_1)$. Необходимо отметить конечность математических ожиданий, запись которых будет использоваться в ходе работы. Число клиентов n предполагаем равным 1.

<u>Теорема 1</u>

Единственным решением задачи (1) является функция

$I^*(x) = x \wedge k^*$, уровень

$$k^* = \begin{cases} k^0, k^0 < IS \\ IS, \text{иначе}, \end{cases} \qquad (2)$$

где k^0 – минимальный корень уравнения $\psi(k) = 0$, а IS - страховая сумма или верхняя грань носителя $F_1(x)$, иначе говоря, максимально возможная сумма страховой выплаты. При $k^* = IS$ страховщик полностью берет на себя весь риск клиентов.

$$\psi(k) \stackrel{\text{def}}{=} (1+\alpha)Eu'\big(S(k)\big) - E[u'(S(k))|X_1 = k], \qquad (3)$$

где $S(k) \stackrel{\text{def}}{=} \omega + n * (1+\alpha)\int_0^k \overline{F}_1\,(x)dx - \sum_{j=1}^{n}\big(X_j \wedge k\big)$

При условии (n = 1) получаем:

$$S(k) \stackrel{\text{def}}{=} \omega + (1+\alpha)\int_0^k \overline{F}_1\,(x)dx - X_1 \wedge k \qquad (4)$$

Доказательство:

Функционал $J[I]$ является вогнутым (так как функция полезности является, как было указано ранее, вогнутой). В таком случае необходимое и достаточное условия оптимальности $I(x)$ представляется в следующем виде:

$$\frac{d}{d\rho}J[\rho I^* + (1-\rho)I]\Big|\,\rho = 1 \geq 0$$

После того, как продифференцировать данное условие оптимальности, неравенство представляется в виде интеграла:

$$\int_0^{IS} u'(\omega + d^* - I^*(x_1) \times (1+\alpha)\int_0^{IS} \big(I^*(x) - I(x)\big)dF_1(x) - I^*(x_1)dF_1(x) \geq 0$$

или

$\int_0^{IS} \xi(x)\big(I^*(x) - I(x)\big)dF_1(x) \geq 0$, где

$$\xi(x) = (1+\alpha)Eu'(Z(X_1) - Eu'(Z(x))$$

$Z(x) = \omega + d^* - I^*(X_1)$ и $d^* = (1+\alpha)EI^*(X_1)$

Тогда $I^*(x)$ является решением задачи по максимизации интеграла:

$$\max_I \int_0^{IS} \xi\,(x)I(x)dF_1(x)$$

Данный тип задач исследуется в теории моментов, поэтому воспользуемся леммой Неймана-Пирсона, чтобы найти решение задачи.

Лемма заключается в том, что пусть на $[a, b]$ даны две функции $0 \leq l(x) \leq L(x)$ и функция $\xi(x)$, измеримые по Борелю, а так же вероятностная мера с функцией распределения $F(x)$. Также конечны интегралы $\int_a^b \xi\,(x)l(x)dF(x)$ и $\int_a^b \xi\,(x)L(x)dF(x)$

Функция $y^*(x)$ доставляет максимум интегралу $\int_a^b \xi\,(x)y(x)dF(x)$

(на множестве Борелевских функций $\{y:\ l(x) \le y(x) \le L(x)\}$)

$\Leftrightarrow y^*(x) = \begin{cases} l(x), \xi(x) < 0 \\ L(x), \xi(x) > 0 \end{cases}$

С точностью до множества нулевой меры F.

Вернемся к решению задачи (1), $I^*(x)$ оптимально $\Leftrightarrow$

$$I^*(x) = \begin{cases} 0, \xi(x) < 0 \\ x, \xi(x) > 0 \end{cases} \tag{5}$$

При возрастании x от 0 $\xi(x) > 0$ убывает в силу убывания функции $u'(\cdot)$, при этом функция дележа риска $I^*(x) = x$, в силу формулы(5). После того, как произойдет касание с осью абсцисс в некоторой точке k^0, функция $\xi(x)$ не может принимать отрицательных значений из-за того, что по условию (5) для таких x верно следующее : $I^*(x) = 0$, что является противоречием: $\xi(x) > 0$. Также исключено и возрастание $\xi(x)$, поскольку для таких x справедливо $I^*(x) = x$, а из этого следует убывание $\xi(x)$.

Поэтому функция дележа риска рассчитывается таким образом: $I^*(x) = x \wedge k^*$

Для получения $\psi(k) = 0$, которому соответствует корень k^0, подставим в функцию $\xi\,(x)$ выражение $X_1 \wedge k$ вместо $I^*(X_1)$ и k вместо $I^*(x)$. С учетом того, что

$(1+\alpha)E(x \wedge k) = (1+\alpha)\int_0^k \overline{F_1}\,(x)dx$, полученное уравнение имеет вид $\psi(k) = 0$, где $\psi(k)$ задана в формулировке Теоремы 1. Искомая точка первого касания с осью абсцисс функцией $\xi(x)$ является минимальным корнем этого уравнения.

Практическая часть

a) Случай непрерывной случайной величины

Пусть дана функция полезности $u(y) = -e^{-cy}$, где c>0 – показатель неприятия риска, математическое ожидание $Ee^{\,cX_1} < \infty$, где X_1 – случайная величина. Тогда

$\psi(k) = 0$ (уравнение, которое определяет значение верхнего предела в $I^*(x) = x \wedge k^*$) можно представить следующим образом:

$$(1+\alpha)Ee^{-c((1+\alpha)\int_0^k \overline{F_1}(x)dx - X_1\wedge k)} - Ee^{-c\left((1+\alpha)\int_0^k \overline{F_1}(x)dx - k\right)} = 0 \qquad (6)$$

Сократим повторяющие слагаемые, используем свойство математического ожидания (математическое ожидание от константы есть сама константа) и получим:

$$(1+\alpha)Ee^{c(X_1\wedge k)} - e^{ck} = 0$$

(7)

Необходимо отметить, что левая часть уравнения (7) не зависит от n (количество клиентов), а значит и оптимальный дележ тоже не зависит от n. Поэтому количество клиентов в оптимальном выборе дележа между страхователем и страховщиком не играет роли.

Экспоненциальный момент $Ee^{c(X_1\wedge k)}$ выразим с помощью распределения риска клиента ($F_1(x)$) в виде интеграла Римана:

$$Ee^{c(X_1\wedge k)} = \int_0^\infty P\{e^{c(X_1\wedge k)} > x\}\,dx = \int_0^\infty P\{X_1 \wedge k > \tfrac{1}{c}\ln x\}\,dx = 1 + \int_1^{e^{ck}} \overline{F}_1\left(\tfrac{1}{c}\ln x\right)dx = 1 + c\int_0^k \overline{F}_1\, e^{cx}(x)dx \qquad (8)$$

Тогда подставим полученное уравнение (8) в (7) и вынесем e^{ck} , получаем $\psi(k)$:

$$(1+\alpha)e^{-ck}\left[1 + c\int_0^k \overline{F}_1\, e^{cx}(x)dx\right] - 1 = 0 \qquad (9)$$

Обозначим за $\mu(k)$ функцию в левой части формулы (9). Она непрерывно убывает от $\mu(0) = \alpha > 0$ и $\lim\limits_{k\to\infty}\mu(k) = -1$

В данном случае для уравнения оптимальности (9) k^0на (0,∞). А уровень $k^* = k^0 \wedge IS < IS \Leftrightarrow \mu(IS) < 0$. Перепишем формулу (7) в виде:

$$\frac{Eexp\; cX_1}{\exp cIS} < \frac{1}{1+\alpha}$$

Необходимо заметить, что это условие выполняется, например при неограниченной страховой сумме($IS = \infty$).

Теперь перейдет к примеру. Для непрерывной случайной величины дана функция распределения $F_1(x)$ (см. Рис. 1):

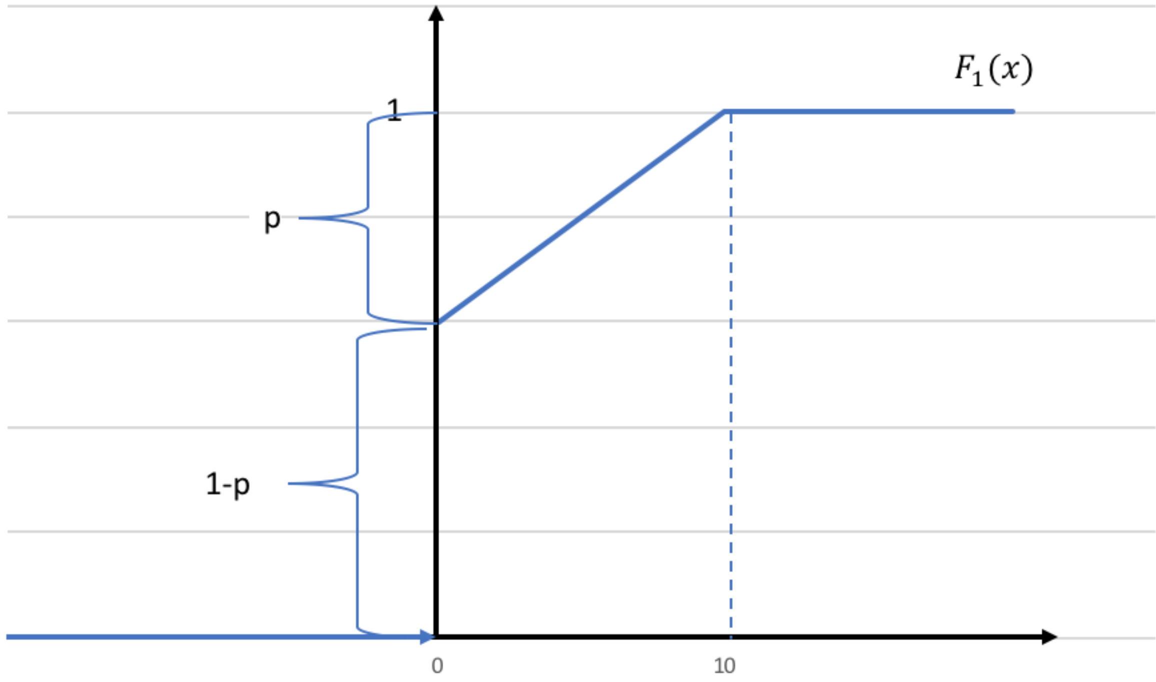

Рис. 1

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ (1-p) + \dfrac{px}{10}, 0 \le x \le 10 \\ 1, x > 10 \end{cases}$$

Очевидно, что upper limit k будет лежать в интервале от [0, 10], поскольку распределение ущерба страхователя равномерно именно на этом отрезке.

Подставим в формулу (8) функцию распределения $F_1(x)$:

$1 + c\int_0^k \overline{F_1}\, e^{cx}(x)dx = 1 + c\int_0^k (1 - F_1(x))\, e^{cx}(x)dx =$

$= 1 + c(\int_0^k e^{cx}\, dx$ - $\int_0^k (F_1(x)\, e^{cx}(x)dx =$

$=1 + c(\frac{e^{cx}}{c}|_0^k - \int_0^k ((1-p) + \frac{px}{10})\, e^{cx} dx) =$

$= 1 + c(\frac{e^{ck}}{c} - \frac{e^0}{c}) - c(1-p)(\frac{e^{ck}}{c} - \frac{e^0}{c}) - c\, \int_0^k \frac{px}{10} e^{cx} dx =$

$=1 + e^{ck} - 1 - (1-p)(e^{ck} - 1) - c\, \frac{p}{10} \int_0^k x\, e^{cx} dx =$

$= e^{ck} - (1-p)(e^{ck} - 1) - c\, \frac{p}{10} \frac{e^{cx}(cx-1)}{c^2} |_0^k =$

$$= e^{ck} - (e^{ck} - 1 - pe^{ck} + p) - \frac{p}{10} \frac{e^{cx}(cx-1)}{c} |_0^k =$$

$=1 + pe^{ck} - p - \frac{p}{10} (\frac{e^{ck}(ck-1)-1}{c}) =$

$$=\frac{p}{10c}\left(\frac{10c}{p}+(e^{ck}-1\right)\cdot 10c-e^{ck}(ck-1\ )-1)=$$

$$\frac{p}{10c}\left(\frac{10c}{p}+e^{ck}(10c-\ ck+1\right)-10c-1) \qquad (10)$$

Подставляем полученную формулу (10) в (9), получаем:

$$\psi(k)=\ (1+\alpha)e^{-ck}\left[\frac{p}{10c}\left(\frac{10c}{p}+e^{ck}(10c-\ ck+1\right)-10c-1)\right]-1=0$$

$$(1+\alpha)\left[\frac{p}{10c}((10c-\ ck+1)-e^{-ck}(10c+1))+e^{-ck}\right]-1=0$$

$$\frac{p}{10c}((10c-\ ck+1)-e^{-ck}(10c+1))+e^{-ck}=\frac{1}{1+\alpha}$$

(11)

Введем входные данные: p = 0.4, α = 0.5 (коэффициент нагрузки). Менять будем параметр c (показатель неприятия риска). Результаты получены с помощью программы Wolfram|Alpha

- *c=0.1, k≈6,06077*
- *c=0.2, k≈3,39975*
- *c=0.3, k≈2,37986*
- *c=0.4, k≈1,83446*
- *c=0.5, k≈1,49364*
- *c=0.6, k≈1,26011*
- *c=0.7, k≈1,08996*
- *c=0.8, k≈0,960411*
- *c=0.9, k≈0,85845*
- *c=1, k≈0,776099*

Построим в Python полученные точки и наглядно увидим данную зависимость(см. Рис. 2):

```
In [27]: import matplotlib.pyplot as plt
         %matplotlib inline
         plt.scatter(0.1, 6.06077)
         plt.scatter(0.2, 3.39975)
         plt.scatter(0.3, 2.37986)
         plt.scatter(0.4, 1.83446)
         plt.scatter(0.5, 1.49364)
         plt.scatter(0.6, 1.26011)
         plt.scatter(0.7, 1.08996)
         plt.scatter(0.8, 0.960411)
         plt.scatter(0.9, 0.85845)
         plt.scatter(1.0, 0.776099)
         plt.legend()
         plt.grid()
         plt.xlabel('$c$', fontsize=14)
         plt.ylabel('$k$', fontsize = 14)
```

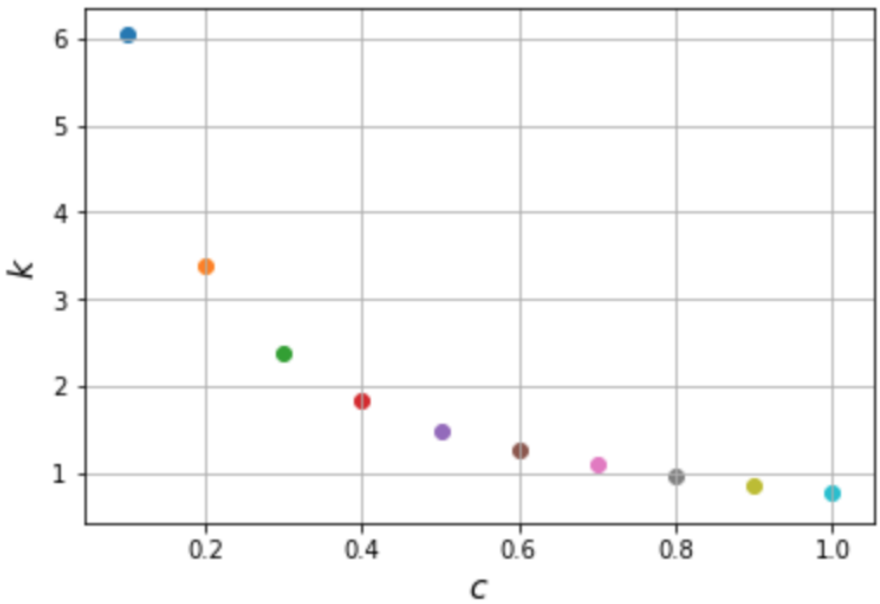

Рис. 2

Вывод по части а):

Как видно на рисунке, с увеличением показателя неприятия риска c upper limit k уменьшается. Обратимся к формуле (7), предварительно переписав его в вид:

$$Eexp\ c[k \wedge X_1 < k] = (1+\alpha)^{-1} \tag{12}$$

В выражении (12) отчетливо видно, что при увеличении c левая часть (12) убывает, так как случайная величина $k \wedge X_1 < k$ в показателе экспоненты неположительна и $P\{k \wedge X_1 - k < 0\} = P\{k \wedge X_1 < k\} > 0$ при $\forall k > 0$. Из-за этого убывания оптимальное значение k^* сместится влево, а следовательно $X_1 \wedge k^*$ (доля покрытия страховщика) уменьшится.