5 Домашнее задание 2

Задача 1. Найдите центры групп $SL_n(\mathbb{R})$ и A_n.

Решение 1. Утверждается, что $Z(SL_n(\mathbb{R})) = \{E\}$. Понятно, что единичная матрица коммутирует со всеми. Кроме того, мы знаем, что в $M_n(\mathbb{R})$ со всеми коммутируют лишь скалярные матрицы. Применим похожую идею доказательства. Возьмем матрицы E_{ij}, где 1 стоит только на позиции (i, j), а на остальных 0. Так как $\det E_{ij} = 0$ при $n > 1$, добавим к ней единичную матрицу, тогда по методу пристального взгляда $\det(E + E_{ij}) = 1$. Пусть матрица $X \in SL_n(\mathbb{R})$ коммутирует со всеми. Тогда она коммутирует с E_{ij} тогда и только тогда, когда она коммутирует с $E + E_{ij}$, так как

$$X(E + E_{ij}) = X + XE_{ij} = XE_{ij} + X = (E_{ij} + E)X = E_{ij}X + X \Leftrightarrow XE_{ij} = E_{ij}X$$

Но она коммутирует с E_{ij} тогда и только тогда, когда $X = \lambda E$ (в случае $M_n(\mathbb{R})$; если посмотреть на произведение $XE_{ij} = E_{ij}X$, то видно, что $X_{ii} = X_{jj}$ и $X_{kl} = 0$ при $k \neq l$), а в нашем случае только с E, что и требовалось.

Осталось только заметить, что подобными свойствами будет обладать и $-E$ в случае четного n, так как $\det(-E) = (-1)^n \det E = 1$. То есть при $n = 2k : Z(SL_n(\mathbb{R})) = \{\pm E\}$, а при $n = 2k + 1 : Z(SL_n(\mathbb{R})) = \{E\}$.

Теперь для A_n. Мы знаем, что при $n \leq 3$ группа A_n коммутативна, поэтому при $n \leq 3 : Z(A_n) = A_n$. При $n \geq 4$ утверждается, что $Z(A_n) = \{\mathrm{id}\}$. Понятно, что тождественная перестановка коммутирует со всеми. Докажем, что других нет. Пусть $h \in A_n \setminus \{\mathrm{id}\}$ также подходит. Разложим ее в произведение независимых циклов и возьмем из них максимальный по длине. Пусть это цикл $(i_1, \dots, i_k)$. Разберем 3 случая:

1. $k = 2$. Так как h четна, в ней есть еще одна транспозиция, пусть (i_3, i_4). Но если взять $g = (i_1, i_2, i_3)$, то $gh \neq hg$ (посмотрим на $i_1, \dots, i_4$):
$$gh = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \\ i_3 & i_2 & i_4 & i_1 \end{pmatrix}, hg = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \\ i_1 & i_4 & i_2 & i_3 \end{pmatrix}$$
2. $k = 3$. Пусть (i_1, i_2, i_3) входит в h. Здесь просто возьмем $g = (i_1, i_2)(i_3, i_4)$, где i_4 — какая-то другая вершина. По предыдущему пункту можно видеть, что они также не коммутируют.
3. $k \geq 4$. Пусть $(i_1, \dots, i_k)$ входит в h. Тогда возьмем $g = (i_1, i_2, i_3)$.
$$gh = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \dots \\ i_3 & i_4 & i_2 & \dots \end{pmatrix}, hg = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \dots \\ i_3 & i_1 & i_2 & \dots \end{pmatrix}$$

Задача 2. Найдите подгруппу из чисел, изоморфную факторгруппе $GL_n(\mathbb{R})/H$, где $H = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det A = \pm 1\}$.

Решение 2. Утверждается, что подходит $(\mathbb{R}_{>0}, \times)$. Понятно, что это группа по умножению, потому что замкнута относительно умножения, есть обратный и $1 \in \mathbb{R}_{>0}$.

Также понятно, что $AH = \{C \mid \det C = \pm \det A\} = \{C \mid (\det C)^2 = (\det A)^2\}$. Теперь построим изоморфизм $\varphi : G/H \to \mathbb{R}_{>0}$. Сопоставим каждому классу $AH \mapsto \det^2 A$. Сначала проверим, что это гомоморфизм.

$$\varphi(AH \circ BH) = \varphi(ABH) = (\det AB)^2 = (\det A \det B)^2 = (\det A)^2 \cdot (\det B)^2 = \varphi(AH) \cdot \varphi(BH)$$

Теперь осталось проверить, что это изоморфизм. Понятно, что φ — сюръекция, потому что можно просто брать в качестве A скалярные матрицы. Осталось показать, что разные классы под действием φ переходят в разные значения. Но если $AH \cap BH = \varnothing$, то $\varphi(AH) = (\det A)^2 \neq (\det B)^2 = \varphi(BH)$.

Задача 3. Найдите число гомоморфизмов из $\mathbb{Z}_4$ в $GL_2(\mathbb{Z}_2)$.

Решение 3. Для начала выпишем все элементы $GL_2(\mathbb{Z}_2)$:

$$GL_2(\mathbb{Z}_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

При гомоморфизме $0 \mapsto E$, потому что $GL_2(\mathbb{Z}_2)$ — группа по умножению, нейтральный элемент в ней E. Пусть $1 \mapsto A$. Тогда $(-1) = 3 \mapsto A^{-1} = A^3$. Наконец если $2 \mapsto B$, то $-2 \mapsto B^{-1} = B$. С другой стороны, $2 = 1 + 1 \mapsto A^2$.

Так как 1 порождает $(\mathbb{Z}_4, +)$, переберем A. Тогда остальные определяются однозначно. Заметим, что у первых 4 матриц из $GL_2(\mathbb{Z}_2)$ обратные — это они же. Поэтому их можно взять в качестве A, тогда $A^2 = E = (A^2)^{-1}, A^3 = A = A^{-1}$.

Теперь разберемся с оставшимися.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, (A_1^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A_1 не подходит, потому что $A_1^2 \neq (A_1^2)^{-1}$.

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, (A_2^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ну и A_2 не подходит по тем же причинам. Получаем, что всего возможно 4 гомоморфизма.

Задача 4. Докажите, что $\mathbb{Q}_{>0}$ изоморфна прямому произведению каких-то двух своих собственных подгрупп.

Решение 4. Заметим, что любое положительное рациональное число представимо в виде $2^a \cdot \frac{2b+1}{2d+1}$, где $a \in \mathbb{Z}, b, d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Пусть H_1 — подгруппа по умножению, состоящая из чисел вида 2^k ($k \in \mathbb{Z}$), а H_2 — подгруппа по умножению, состоящая из чисел вида $\frac{2b+1}{2d+1}$, где $b, d \geq 0$.

Покажем, что они действительно будут подгруппами. Для любого $2^k \in H_1$ найдется обратный 2^{-k}, $1 \in H_1$ и $2^k \cdot 2^p = 2^{k+p} \in H_1$. Для любого $\frac{2b+1}{2d+1} \in H_2$ найдется обратный $\frac{2d+1}{2b+1}$, $1 \in H_2$ и $\frac{(2a+1)}{(2b+1)} \cdot \frac{(2c+1)}{(2d+1)} = \frac{4ac+2a+2c+1}{4bd+2b+2d+1} = \frac{2(2ac+a+c)+1}{2(2bd+b+d)+1}$.

Ну и понятно $\mathbb{Q} \cong H_1 \times H_2$, потому что любое число $\frac{m}{n}$ представимо единственным образом в виде $2^a \frac{2b+1}{2c+1}$, если выделить степень двойки в числителе и знаменателе и сократить ее. Формально установим изоморфизм $\varphi : \mathbb{Q} \to H_1 \times H_2$, где $\varphi\left(2^a \cdot \frac{2b+1}{2c+1}\right) = \left(2^a, \frac{2b+1}{2c+1}\right)$. Понятно, что это гомоморфизм, потому что произведение сохраняется. То, что это изоморфизм, также очевидно, потому что мы это показали ранее.

Задача 5. Коммутатором элементов g и h в группе G называется элемент $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$. Пусть подгруппа H в G содержит коммутаторы всех пар элементов из G. Докажите, что H нормальна, а факторгруппа G/H абелева.

Решение 5. Сначала докажем, что H — нормальная подгруппа. Нужно показать, что $\forall g \in G : gHg^{-1} \subseteq H$. Возьмем произвольный коммутатор $[g_1, g_2] = g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1}$ и покажем, что его сопряжение лежит в H.

$$g\left(g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1}\right)g^{-1} = \left(gg_1g^{-1}\right)\left(gg_2g^{-1}\right)\left(gg_1^{-1}g^{-1}\right)\left(gg_2^{-1}g^{-1}\right) = [gg_1g^{-1}, gg_2g^{-1}]$$

Понятно, что $gg_1g^{-1}, gg_2g^{-1} \in G$, поэтому такой коммутатор лежит в H. Теперь покажем, что G/H абелева, то есть $\forall a, b \in G : aH \circ bH = bH \circ aH$. По определению, $aH \circ bH = abH$. Возьмем произвольный коммутатор $[g, h] \in H$. Хотим подобрать $[g', h'] \in H$, такой что:

$$ab[g, h] = ba[g', h'] \Leftrightarrow [g, h] = b^{-1}a^{-1}ba[g', h'] = [b^{-1}, a^{-1}][g', h']$$

Но так как H — подгруппа, у каждого элемента есть обратный. Поэтому можно выразить

$$[g', h'] = \left[b^{-1}, a^{-1}\right]^{-1}[g, h]$$