4 Лекция 8.04

Абелевы группы

Пример (Конечно порожденная, но не свободная абелева группа)**.** Подходит любая конечная абелева группа. Например, $\mathbb{Z}_n$. Докажем, почему она не свободна. Пусть $a_1, \dots, a_n$ — базис. Но тогда $0 = 0 \cdot a_1 + \dots + 0 \cdot a_n = |A| \cdot a_1 + \dots + |A| \cdot a_n$.

Определение 25. *Рангом свободной абелевой группы A называется число элементов в ее базисе. Обозначается как* $\operatorname{rk} A$.

Пример. Пусть $A = \mathbb{Z}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in \mathbb{Z}\}$ (это решетка!). Покажем, что она свободна. Выберем в A стандартный базис $e_1, \dots, e_n$. Тогда любой вектор $(x_1, \dots, x_n)$ раскладывается в $x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$. Понятно, что такое представление единственно.

Предложение 3. Любая свободная абелева группа A изоморфна $\mathbb{Z}^n$, где $n = \operatorname{rk} A$.

Доказательство. Зафиксируем базис $a_1, \dots, a_n$ в A. Установим изоморфизм $\varphi : A \to \mathbb{Z}^n$, где $\varphi(a) = \varphi(s_1 a_1) + \dots + \varphi(s_n a_n) = (s_1, \dots, s_n)$. Понятно, что разным a_1, a_2 сооветствуют разные векторы, так как разложение единственно, то есть φ — инъекция. С другой стороны, это сюръекция, потому что каждому набору $s_1, \dots, s_n$ можно найти $a = s_1 a_1 + \dots + s_n a_n$.

Наконец покажем, что φ сохраняет операцию. Распишем $\varphi(a + b)$:

$$\varphi(a+b) = \varphi((s_1 + s_1')a_1 + \dots + (s_n + s_n')a_n) = (s_1 + s_1', \dots, s_n + s_n') = \varphi(a) + \varphi(b) =$$

$$= (s_1, \dots, s_n) + (s_1', \dots, s_n')$$

$\square$

Предложение 4. Ранг свободной абелевой группы определен корректно, то есть не зависит от выбора базиса.

Доказательство. От противного. Пусть в A есть базисы $a_1, \dots, a_n$ и $b_1, \dots, b_m$. Без ограничения общности $m > n$. Пусть $b_1 = \alpha_{11} a_1 + \dots + \alpha_{1n} a_n, \dots, b_n = \alpha_{m1} a_1 + \dots + \alpha_{mn} a_n$. Запишем в матрицу:

$$C = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

Тогда строки матрицы линейно зависимы над $\mathbb{Q}$, значит существует ненулевой набор $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, такой что

$$\lambda_1 C_{(1)} + \dots + \lambda_m C_{(m)} = (0, \dots, 0)$$

Можно считать, что $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ (если не так, то домножить на НОК знаменателей). Тогда заметим, что

$$\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_m b_m = 0 b_1 + \dots + 0 b_m = (0, \dots, 0)$$

Получили две разные записи нуля, противоречие с тем, что $b_1, \dots, b_m$ — базис. $\square$

Классификация базисов Пусть $e_1, \dots, e_n$ — базис в A, $e_1', \dots, e_1'$ — какой-то набор из A. Тогда

$$(e_1', \dots, e_n') = (e_1, \dots, e_n) \cdot C$$

где C — целочисленная матрица размером $n \times n$. Тогда столбцы C — координаты $e_1', \dots, e_n'$ в базисе $e_1, \dots, e_n$.

Предложение 5. Векторы $e_1', \dots, e_n'$ также являются базисом $\Leftrightarrow \det C = \pm 1$.

Доказательство. Докажем $\Rightarrow$. Если $e_1', \dots, e_n'$ — базис, то через них можно выразить $e_1, \dots, e_n$:

$$(e_1, \dots, e_n) = (e_1', \dots, e_n')D = (e_1, \dots, e_n)CD$$

Отсюда следует, что $CD = E$. Тогда $\det CD = \det C \det D = 1$. Понятно, что если матрица целочисленна, то $\det C, \det D \in \{\pm 1\}$.

Теперь докажем $\Leftarrow$. Заметим, что C^{-1} целочисленна. По формуле обратной матрицы через присоединенную получаем, что $\det C = \det C^{-1} = 1$. Тогда:

$$(e_1', \dots, e_n') = (e_1, \dots, e_n)C \Rightarrow (e_1', \dots, e_n')C^{-1} = (e_1, \dots, e_n)$$

Отсюда делаем вывод, что векторы $e_1, \dots, e_n$ выражаются через $e_1', \dots, e_n'$ с целыми коэффициентами. Получаем, что все векторы выражаются через $e_1', \dots, e_n'$ с целыми коэффициентами. Тогда $e_1', \dots, e_n'$ порождают абелеву группу A.

Осталось показать, что любой элемент выражается единственным образом. Пусть $s_1'e_1' + \dots + s_n'e_n' = s_1''e_1' + \dots + s_n''e_n'$. Или что то же самое:

$$(e_1', \dots, e_n') \cdot \begin{pmatrix} s_1' \\ \vdots \\ s_n' \end{pmatrix} = (e_1', \dots, e_n') \cdot \begin{pmatrix} s_1'' \\ \vdots \\ s_n'' \end{pmatrix}$$

$$(e_1, \dots, e_n)C \cdot \begin{pmatrix} s_1' \\ \vdots \\ s_n' \end{pmatrix} = (e_1, \dots, e_n)C \cdot \begin{pmatrix} s_1'' \\ \vdots \\ s_n'' \end{pmatrix} \Leftrightarrow C \cdot \begin{pmatrix} s_1' \\ \vdots \\ s_n' \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} s_1'' \\ \vdots \\ s_n'' \end{pmatrix}$$

Так как обратимая матрица существует, домножим на нее слева. Тогда справедливо $s_i' = s_i''$ для любого i, что и завершает доказательство. □

Цель Мы хотим классифицировать конечные абелевы группы.

Теорема 6. *Всякая подгруппа N свободной абелевой группы L ранга n тоже свободна, причем ее ранг $\leq n$.*

Замечание 4. *В линейной алгебре это означает, что для любого подпространства $U \subseteq V$ справедливо* $\dim U \leq \dim V$. *Причем* $\dim U = \dim V \Leftrightarrow U = V$. *Для свободных групп в алгебре это неверно, например для* $\mathbb{Z}$ *и* $2\mathbb{Z}$. *Ранги этих групп равны 1, но они не равны.*

Доказательство. Докажем индукцией по n. В качестве базы докажем для $n = 0$. Тогда любая подгруппа равна самой себе.

Теперь шаг. Пусть $n > 0$, $e_1, \dots, e_n$ — базис L. Определим $L_1 = \{s_1e_1 + \dots + s_{n-1}e_{n-1} \mid s_i \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}e_1 + \dots + \mathbb{Z}e_{n-1}$. Тогда это свободная абелева группа ранга $n-1$. Пусть $N_1 = N \cap L_1$. Тогда это подгруппа в L_1, и по предположению индукции в N_1 есть базис $f_1, \dots, f_m$, где $m \leq n-1$. Рассмотрим отображение $\varphi : N \to \mathbb{Z}$, причем $\varphi(s_1e_1 + \dots + s_ne_n) = s_n$. Ясно, что это гомоморфизм и $\ker \varphi = N_1, \operatorname{Im} \varphi = k\mathbb{Z}$, где $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Рассмотрим 2 случая:

1. $k = 0$. Тогда $N = N_1$, и все доказано.
2. $k > 0$. Пусть $f_{m+1} = s_1 e_1 + \dots + s_{n-1} e_{n-1} + k e_n \mapsto k$. Докажем, что $f_1, \dots, f_{m+1}$ — базис в N. Тогда $\mathrm{rk} = m + 1 \leq (n-1) + 1 = n$. Заметим, что $\forall f \in N : \varphi(f) = k \cdot c$. Тогда $\varphi(f - c f_{m+1}) = kc - kc = 0$. Тогда $f - c f_{m+1} \in N_1$, а тогда $f - c f_{m+1} = s_1 f_1 + \dots + s_m f_m$, тогда $f = s_1 f_1 + \dots + s_m f_m + c f_{m+1}$, то есть любой вектор представим.

Осталось показать, что все представления различны. Пусть какие-то совпали:

$$s_1 f_1 + \dots + s_{m+1} f_{m+1} = s'_1 f_1 + \dots + s'_{m+1} f_{m+1}$$

Посмотрим на последнюю координату. Тогда $s_{m+1} k = s'_{m+1} k \Leftrightarrow s_{m+1} = s'_{m+1}$, поэтому последнюю часть можно сократить. Тогда $s_1 = s'_1, \dots, s_m = s'_m$, поскольку $f_1, \dots, f_m$ базис по определению. □

Теорема 7 (О согласованных базисах)**.** *Для всякой подгруппы N свободной абелевой группы L существует такой базис $e_1, \dots, e_n$ в L, $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, m \leq n$ и $u_1, \dots, u_n$ ($u_i \in \mathbb{N}, u_i \mid u_{i+1}$), такие что $u_1 e_1, \dots, u_m e_m$ — базис в подгруппе N.*