ADMM

Jessy Khafif

April 20, 2023

Summary

Generality

Débruitage avec un à priori P(x)

Opérateur proximal : $\hat{x} = \arg\min_{x}\{\frac{1}{2}\|y - Hx\|_2^2 + \lambda P(x)\ \}$

Résolution avec l'ADMM:

- Équation : $\min_{x,z}\{\frac{1}{2}\|y - Hx\|_2^2 + \lambda P(z)\}$
- Contrainte : ...

Lagrangien augmenté :

$$\begin{aligned} L(x, z, u) &= \frac{1}{2}\|y - Hx\|_2^2 + \lambda P(z) + u^T(x - z) + \frac{\rho}{2}\|x - z\|_2^2 \\ &= \frac{1}{2}\|y - Hx\|_2^2 + \lambda P(z) + \frac{\rho}{2}\|x - z + \frac{u}{\rho}\|_2^2 - \frac{\|u\|_2^2}{2\rho} \end{aligned}$$

Algorithm

Algorithm 1 ADMM

1: **procedure** ADMM
Input: y, λ, ρ, $nb\_iterations$
2: **Output:** $x_{nb\_iterations}$
3: **for** $k \in 0...nb\_iterations$ **do**
4: $x_{k+1} = \arg\min_x L(x, z_k, u_k)$
5: $z_{k+1} = \arg\min_z L(x_{k+1}, z, u_k)$
6: $u_{k+1} = u_k + \rho(z_{k+1} - x_{k+1})$
7: **end for**
8: **end procedure**

$\hat{x} = \arg\min_x L(x, z, u)$

$$
\begin{aligned}
\hat{x} &= \arg\min_x L(x, z, u) \\
&= \arg\min_x \{\frac{1}{2}\|y - Hx\|_2^2 + \lambda P(z) + \frac{\rho}{2}\|x - z + \frac{u}{\rho}\|_2^2 - \frac{\|u\|_2^2}{2\rho}\} \\
&= \arg\min_x \{\frac{1}{2}\|y - Hx\|_2^2 + \frac{\rho}{2}\|x - z + \frac{u}{\rho}\|_2^2\}
\end{aligned}
$$

$\hat{x} = \arg\min_x L(x, z, u)$

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\|y - Hx\|_2^2 + \lambda P(z) + \frac{\rho}{2}\|x - z + \frac{u}{\rho}\|_2^2 - \frac{\|u\|_2^2}{2\rho}\right) = 0 \\
&\iff -H^T(y - Hx) + \rho(x - z + \frac{u}{\rho}) = 0 \\
&\iff -H^T y + H^T H x + \rho x - \rho z + u = 0 \\
&\iff -H^T y + (H^T H + \rho I)x - \rho z + u = 0 \\
&\iff x = (H^T H + \rho I)^{-1}(H^T y + \rho z - u)
\end{aligned}
$$

$\hat{z} = \arg\min_z L(x, z, u)$

$$\begin{aligned}
\hat{z} &= \arg\min_z L(x, z, u) \\
&= \arg\min_z \{ \frac{1}{2}\|y - Hx\|_2^2 + \lambda P(z) + \frac{\rho}{2}\|x - z + \frac{u}{\rho}\|_2^2 - \frac{\|u\|_2^2}{2\rho} \} \\
&= \arg\min_z \{ \lambda P(z) + \frac{\rho}{2}\|x - z + \frac{u}{\rho}\|_2^2 \} \\
&= \arg\min_z \{ \lambda P(z) + \frac{\rho}{2}\|-x + z - \frac{u}{\rho}\|_2^2 \} \\
&= \arg\min_z \{ \lambda P(z) + \frac{\rho}{2}\|-x + z - \frac{u}{\rho}\|_2^2 \}
\end{aligned}$$

Resolution

Algorithm 2 ADMM

procedure ADMM

Input: y, λ, ρ, $nb\_iterations$

Output: $x_{nb\_iterations}$

  for $k \in 0 ... nb\_iterations$ **do**

    $x_{k+1} = (H^T H + \rho I)^{-1}(H^T y + \rho z_k - u_k)$

    $z_{k+1} = \arg\min_z \{\lambda P(z) + \frac{\rho}{2} \|-x_{k+1} + z - \frac{u_k}{\rho}\|_2^2\}$

    $u_{k+1} = u_k + \rho(z_{k+1} - x_{k+1})$

  end for

end procedure

$P(x) = \|x\|_1$

Opérateur proximal : $\hat{x} = \arg\min_x \{\frac{1}{2}\|y - Hx\|_2^2 + \lambda \|x\|_1\}$

Résolution avec l'ADMM:

- Équation : $\min_{x,z} \{\frac{1}{2}\|y - Hx\|_2^2 + \lambda \|z\|_1\}$
- Contrainte : $x - z = \overrightarrow{0}$

Lagrangien augmenté :

$$\begin{aligned} L(x,z,u) &= \frac{1}{2}\|y - Hx\|_2^2 + \lambda \|z\|_1 + u^T(x - z) + \frac{\rho}{2}\|x - z\|_2^2 \\ &= \frac{1}{2}\|y - Hx\|_2^2 + \lambda \|z\|_1 + \frac{\rho}{2}\|x - z + \frac{u}{\rho}\|_2^2 - \frac{\|u\|_2^2}{2\rho} \end{aligned}$$

$P(x) = \|x\|_2^2$

Opérateur proximal : $\hat{x} = \arg\min_x\{\frac{1}{2}\|y - Hx\|_2^2 + \lambda\|x\|_2^2\ \}$

Résolution avec l'ADMM:

- Équation : $\min_{x,z}\{\frac{1}{2}\|y - Hx\|_2^2 + \lambda\|x\|_2^2\}$
- Contrainte : $x - z = \overrightarrow{0}$

Lagrangien augmenté :

$$\begin{aligned} L(x,z,u) &= \frac{1}{2}\|y - Hx\|_2^2 + \lambda\|z\|_2^2 + u^T(x - z) + \frac{\rho}{2}\|x - z\|_2^2 \\ &= \frac{1}{2}\|y - Hx\|_2^2 + \lambda\|z\|_2^2 + \frac{\rho}{2}\|x - z + \frac{u}{\rho}\|_2^2 - \frac{\|u\|_2^2}{2\rho} \end{aligned}$$

$P(x) = \|\nabla x\|_1$

Opérateur proximal : $\hat{x} = \arg\min_x \{\frac{1}{2}\|y - Hx\|_2^2 + \lambda\|\nabla x\|_1\}$

Résolution avec l'ADMM:

- Équation : $\min_{x,z}\{\frac{1}{2}\|y - Hx\|_2^2 + \lambda\|z\|_1\}$
- Contrainte : $\nabla x - z = \overrightarrow{0}$

Lagrangien augmenté :

$$
\begin{aligned}
L(x,z,u) &= \frac{1}{2}\|y - Hx\|_2^2 + \lambda\|z\|_1 + u^T(\nabla x - z) + \frac{\rho}{2}\|\nabla x - z\|_2^2 \\
&= \frac{1}{2}\|y - Hx\|_2^2 + \lambda\|z\|_1 + \frac{\rho}{2}\|\nabla x - z + \frac{u}{\rho}\|_2^2 - \frac{\|u\|_2^2}{2\rho}
\end{aligned}
$$

Notation ∇

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} \\ \frac{d}{dy} \end{bmatrix}$$

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} \\ \frac{d}{dy} \end{bmatrix} f = \begin{bmatrix} \frac{df}{dx} \\ \frac{df}{dy} \end{bmatrix}$$

$$\nabla^T f = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} \\ \frac{d}{dy} \end{bmatrix}^T f = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} \end{bmatrix} f = \begin{bmatrix} \frac{df}{dx} & \frac{df}{dy} \end{bmatrix}$$

$$\nabla^T \nabla f = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} \\ \frac{d}{dy} \end{bmatrix} f = (\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2}) f = \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{d^2 f}{dy^2} = \Delta f$$

Notation ∇

$$\nabla . v = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} \\ \frac{d}{dy} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \frac{dv_x}{dx} + \frac{dv_y}{dy}$$

The End