

# Syntheses

March 2019

## Synthesis 18/03

- **Multi-objective Knapsack problem (Maximization) :**

$n$  : number of items.

$p$  : number of criteria.

$u_{i,j}$  : utility of item  $i$  for the  $j$ -th criteria.

$w_i$  : weight of item  $i$ .

$W$  : capacity of the backpack.

$x_i$  : decision variable (1 if we add the item  $i$ , 0 otherwise).

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximize} \quad \dots \\
 & \quad z_1(x) = \sum_{i=1}^n u_{i,1} x_i \\
 & \quad z_p(x) = \sum_{i=1}^n u_{i,p} x_i \\
 & \text{s.t} \quad \sum_{i=1}^n w_i x_i \leq W \\
 & \quad x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, n
 \end{aligned}$$

Our experiments are based on a bi-objective knapsack problem but are adapted for more than 2 objectives.

- **The Decision Maker preferences** will be simulated by a hidden WS-function  $f_\lambda$  :

$$\begin{aligned}
 f_\lambda(x) &= \sum_{j=1}^p \lambda_j z_j(x) \\
 \sum_{j=1}^p \lambda_j &= 1
 \end{aligned}$$

- **Multi-Objective Local Search algorithms (MOLS) :**

is a generalization of a simple Local Search by considering only one criteria. It follows a common structure, described below for our problem :

1. Initial Population : What is the size of the population and how are they generated ? one alternative (for simplification) generated randomly.
2. Next exploration : Which alternative is explored next (from the archive) ? FIFO.
3. Neighborhood exploration : How do we generate new solutions ?  
For each item in the current backpack :  
—— Temporarily remove it from the Backpack.  
—— Generate a random set of weights  $\mathbf{c}_i$ ,  $i = 1, \dots, p$  for a WS-aggregation function :

$$f_{\mathbf{c}}(x) = \sum_{j=1}^p \mathbf{c}_j z_j(x)$$

—— Compute  $r_x = \frac{f_{\mathbf{c}}(x)}{w_x}$

—— Fill the backpack with the remaining items by adding them in the decreasing order of  $r_x$ .

→ NEED TO DIVERSIFY THE NEIGHBORHOOD.

4. Neighborhood selection : we focus on two approaches

- **Pareto Local Search :**

Select only neighbors that are non-dominated using a Pareto dominance relation.

→ ++Good quality of efficient front, ++Diversity, - -time consuming.

- **Aggregate function (Weighted Sum  $f_w(.)$ ) :**

Select the neighbor with the highest WS-function value.

→ ++Fast computation, - -Diversity, - -Quality of solution.

- **Experimental results :**

How the quality of the solution evolve when at first no information about the DMs preferences is given, then more information start to come to finally identify the exact set of weights (WS) of the DM.

Here one of given the elicitation process (test2) :

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A_1 = \begin{bmatrix} 0.461538 & 0 \\ 0.538462 & 1 \end{bmatrix} A_2 = \begin{bmatrix} 0.348333 & 0 \\ 0.651667 & 1 \end{bmatrix} A_3 = \begin{bmatrix} 0.348333 & 0.229086 \\ 0.651667 & 0.770914 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0.348333 & 0.268030 \\ 0.651667 & 0.731970 \end{bmatrix} A_5 = \begin{bmatrix} 0.312115 & 0.268030 \\ 0.687885 & 0.731970 \end{bmatrix} A_6 = \begin{bmatrix} 0.312115 & 0.273973 \\ 0.687885 & 0.726027 \end{bmatrix} A_7 = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.7 \end{bmatrix}$$

The sample size of the experiment was about **30** and fixed a timeout was required for large instances ( **3 minutes**) (information about CPU).

- Different experiments shown in page 1 and 2 of the attached PDF. It presents the evolution of the average gap considering the information rate (0% to 100%).

- The average execution time (second) was plotted respectively in page 5 and 6

- It is also interesting to measure the quality of the achieving front  $\chi$  regarding the information rate. Two types of indicators were used (pages 3 to 4) :

1. **Average minimal distance** : compute an euclidean distance between the MOLS solution  $\chi$  and the optimal front  $OPT$  :

$$D(\chi, OPT) = \frac{\sum_{r \in OPT} \min_{x \in \chi} dist(r, x)}{|OPT|}$$

2. **Proportion Reference** : measure the proportion of Pareto optimal front in  $\chi$ .

- **Hybrid method (combines Pareto and WS selection) :**

Starts with a WS strategy for a finite number of exploration then switch into a Pareto dominance (explore).

The aim behind this : usually taking time in the beginning of a local search method is time consuming and less effective.

- Results are presented in last figures of PDF file.

It shows the search space evolution using Pareto, WS and the hybrid approach. The optima front was also plotted (OPT).

- **Note :**

Due to a less divers neighborhood, the approaches tends to stuck very quickly (few iterations) into a local optima no matter how large the problem size is.

# Synthèse 25/03

## 1 Mesure de l'écart moyen minimum de la solution optimale & du temps moyen (CPU) :

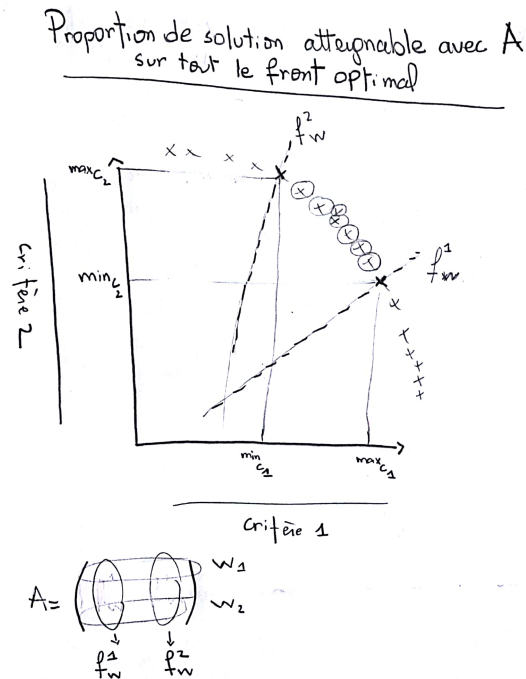
- Taille d'échantillon : 30.
- Deux exemples (test 1, test 2) utilisé pour mesurer l'impact qu'aura le taux d'information sur la qualité de la solution :

### test 1

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A_1 = \begin{bmatrix} 0.461538 & 0 \\ 0.538462 & 1 \end{bmatrix} A_2 = \begin{bmatrix} 0.348333 & 0 \\ 0.651667 & 1 \end{bmatrix} A_3 = \begin{bmatrix} 0.348333 & 0.229086 \\ 0.651667 & 0.770914 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0.348333 & 0.268030 \\ 0.651667 & 0.731970 \end{bmatrix} A_5 = \begin{bmatrix} 0.312115 & 0.268030 \\ 0.687885 & 0.731970 \end{bmatrix} A_6 = \begin{bmatrix} 0.312115 & 0.273973 \\ 0.687885 & 0.726027 \end{bmatrix} A_7 = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.7 \end{bmatrix}$$

- Mesurer le taux d'information : Calculer la proportion de solutions qu'englobe les solutions extrêmes courante de chaque critères.



## Instances Aléatoire A

### test 1 (page 1 & 2)

	T0		T9	
% d'incertitude	AVG gap	AVG time	AVG gap	AVG time
100	<b>0,086027</b>	1,08291	<b>0,160635</b>	0,93099
82	0,160398	0,653026	0,219599	0,381984
74	0,226571	0,374335	0,259352	0,198711
43	0,310811	0,0492448	0,40585	0,0729264
27	0,149543	0,0413449	0,404986	0,0493244
11	0,130627	0,0273932	0,40801	0,0328445
9	0,452677	0,027419	0,327146	<b>0,0264669</b>
0	0,572073	<b>0,0256762</b>	0,477595	0,0315368

test 2 (page 3 & 4 )

	T0		T2	
% d'incertitude	AVG gap	AVG time	AVG gap	AVG time
100	<b>0,00821947</b>	1,33089	<b>0,114969</b>	1,82534
74	0,0187214	0,363328	0,197184	0,215539
22	0,124473	0,0377843	0,410482	0,0386811
11	0,188092	0,0446825	0,336855	0,0367283
9	0,154829	0,0349121	0,345653	0,0288934
0	0,177107	<b>0,0266353</b>	0,646456	<b>0,0261349</b>

Remarque :

- On peut mesurer la pertinence des questions par l'écart qui les séparent. Par exemple on peut remarquer une faible évolution du gap entre [11; 43] sur l'instance T9 (test1) et [9; 22] sur l'instance T0 (test2).
- Une différence de 0.3% à 0.5% entre une solution "sans information de départ" (complète incertitude) et une solution avec "connaissance exacte du jeu de poids".

Instances Corrélés C

test 1 (page 5 & 6)

	T0		T6	
% d'incertitude	AVG gap	AVG time	AVG gap	AVG time
100	2,15526	11,1501	1,53486	3,80789
82	1,93485	5,03335	1,49327	1,80916
74	1,35774	0,780585	2,01443	0,215296
43	1,94758	0,103555	2,07769	0,0310049
27	1,72321	0,0347356	3,03294	0,0264439
11	1,80943	0,043791	1,61097	0,0336334
9	2,01992	<b>0,0276902</b>	1,30537	<b>0,0142873</b>
0	<b>1,04889</b>	0,0328617	<b>1,15875</b>	0,0305625

test 2 ( page 7 & 8)

	T0		T3	
% d'incertitude	AVG gap	AVG time	AVG gap	AVG time
100	0,202502	11,5825	0,133412	3,26818
74	<b>0,134324</b>	0,61324	0,342386	0,106222
22	0,291481	0,0696842	<b>0,0966744</b>	0,031065
11	0,327328	0,0319276	0,247356	0,0235855
9	0,260699	0,032303	0,201213	<b>0,0220573</b>
0	0,527256	<b>0,0224186</b>	0,182946	0,0286281

Remarque :

- La différence entre les deux cas extrêmes (100% et 0% d'incertitude) est peu significatif comparé aux instances aléatoires.

## 2 Mesure de la qualité du front obtenu :

### Instances Aléatoire A

#### test 1 (page 9)

	<b>T0</b>		<b>T9</b>	
% d'incertitude	AVG distance	Proportion reference	AVG distance	Proportion reference
100	<b>290,59</b>	<b>52,88</b>	<b>116,019</b>	<b>57,8571</b>
82	962,055	17,2857	1878,16	2,71605
74	2085,86	4,38095	3474,56	0
43	6273,96	0	1679,13	3,33333
27	4847,05	2,00855	1167,82	5,18519
11	4846,77	1,39535	1157,29	1,11111
9	4102,6	0,705882	1147,32	1,85185
0	9177,28	0	1363,97	0,909091

#### test 2 (page 10)

	<b>T0</b>		<b>T2</b>	
% d'incertitude	AVG distance	Proportion reference	AVG distance	Proportion reference
100	<b>206,191</b>	<b>62,8</b>	<b>138,86</b>	<b>41,4425</b>
74	2365,27	2,2381	3202,36	0,769231
22	3303,7	1,28205	3341,68	0,506329
11	3290,2	0,888889	3404,09	0,51282
9	3442,22	0,865385	3491,64	0,390946
0	8171,92	0	8422,77	0

#### Remarque :

- Meilleurs résultats dans des situations de grande incertitude (80% - 100%).

### Instances Corrélés C

#### test 1 (page 11)

	<b>T0</b>		<b>T6</b>	
% d'incertitude	AVG distance	Proportion reference	AVG distance	Proportion reference
100	1692,43	<b>41,2472</b>	<b>1615,29</b>	<b>57,0515</b>
82	<b>1428,3</b>	18,0435	1868,25	15,7728
74	6082,26	0,799273	7002,98	0
43	9775,7	0	12410,5	0
27	9108,14	0	7795,48	0,36036
11	8770,96	0	6825,92	0,0529101
9	8718,17	0,152778	6012,32	0,187416
0	20597,6	0	17900,7	0

test 2 (page 12)

% d'incertitude	T0		T3	
	AVG distance	Proportion reference	AVG distance	Proportion reference
100	<b>1602,79</b>	<b>40,5872</b>	<b>1929,31</b>	<b>49,376</b>
74	6439,87	0,563125	9317,23	0
22	6496,49	0,238971	7341,27	0,574324
11	6420,64	0,23622	6928,96	0,557377
9	6884,71	0,135052	7132,38	0,338983
0	16253,4	0	20819,5	0

Remarque :

- [10; 74%] : la distance moyenne du front couvert est presque constante.
- [0; 10%[ : commence a s'éloigner.

### 3 Évaluation de l'écart moyen minimum de la solution optimale avec WS+PLS:

- Tester l'approche en variant le nombre d'itération de  $WS \in \{2, \dots, 12\}$ .
- Taille de l'échantillon : 10.

#### Instances Aléatoire A

(pages 13,.... 20)

# steps	T0		T9	
	AVG gap	AVG time	AVG gap	AVG time
<b>PLS</b>	<b>0,086027</b>	1,08291	<b>0,160635</b>	0,93099
2	0,430331	0,531841	0,834156	0,404163
4	0,391702	0,586962	0,413412	0,323032
6	0,336002	0,533592	0,499291	0,294219
8	0,397776	0,541043	0,549694	0,512166
10	0,639639	0,191142	0,465322	0,334102
12	0,525448	0,44284	0,989465	0,245485
<b>WS</b>	0,572073	<b>0,0256762</b>	0,477595	<b>0,0315368</b>

Remarque :

- WS converge généralement plus tôt que le nombre fixé d'itération.
- En moyenne, bien mieux qu'une somme pondérée.

### 4 Mesure de la qualité du front obtenu :

#### Instances Aléatoire A

(pages 21,...., 28)

Remarque :

- La distance moyenne de l'approche hybride se rapproche de celle de *PLS*.

- La proportion de solutions est par contre moins grand comparé à *PLS* (dû au fait de démarrer avec une WS qui diminue l'espace de recherche).

## 5 Proposition : switch PLS+WS

- Démarrer avec une recherche Pareto.
- Quand la taille limite du front est atteint, basculer à une recherche WS. **OU**
- Basculer à une WS selection quand l'évolution du front est faible ( $\epsilon$  près).
- Sélection des points candidats  $N$  :
  - Les points extrêmes de chaque critère (englobant tout le front).
  - Diviser l'espace en deux afin de sélectionner un des points au milieu cet espace.
  - Répéter l'opération sur les deux sous-espaces jusqu'à atteindre le nombre voulu de candidat  $N$ .
- Chaque candidat suivra une direction (WS) différente.
- Après un certain nombre d'itération, reprendre une recherche Pareto.

