

PROJET DE RÉOLUTION DE PROBLÈMES :  
*METAHEURISTIQUES POUR LA RÉOLUTION DU PROBLÈME DE L'ARBRE DE  
**STEINER** DE POIDS MINIMUM*

Introduction

Le problème de l'arbre de Steiner est un problème d'optimisation combinatoire dont nous nous appliquons, dans le cadre de ce projet, à résoudre la version graphique. Elle consiste à rechercher dans un graphe connexe valué le sous-ensemble de nœuds « steiner » (non-terminaux) permettant d'obtenir un arbre couvrant tous ses nœuds terminaux et qui soit de poids minimum. À cette fin, deux métaheuristiques nous sont proposées : l'une dont la progression vers l'optimum global se fait suivant un algorithme génétique et l'autre par simple recherche locale.

Le but du projet est de les comparer. Pour ce faire, dans un premier temps, nous rappellerons les techniques envisagées pour générer des « bonnes solutions » (heuristiques du Plus Court Chemin (PCC) et de l'Arbre Couvrant Minimum (ACM) ) et analyserons leurs résultats (valeurs trouvées) et performances (temps de calcul) sur les différentes instances fournies. Puis, nous évoquerons les principes des métaheuristiques proposées et analyserons les résultats de leur application sur ces mêmes instances.

A. HEURISTIQUES POUR LE CALCUL DE BONNES SOLUTIONS

Dans cette section, nous comparerons suivant deux (02) critères (valeur de la solution et temps de calcul) les heuristiques du plus court chemin et de l'arbre couvrant minimum. Mais avant, nous en rappelons brièvement les principes.

1. Heuristique du Plus Court Chemin (PCC)

◆ Principe

Son fonctionnement s'articule en cinq (05) étapes :

Étape 1 : La construction d'un graphe  $G_1$  de distances entre les sommets terminaux de  $G$ .

Étape 2 : Le calcul d'un arbre  $G_2$  de poids minimum couvrant les sommets terminaux.

Étape 3 : Construire le sous-graphe  $G_3$  de  $G$  en remplaçant chaque arête de  $G_2$  par les arêtes situées sur le plus court chemin correspondant dans  $G$ .

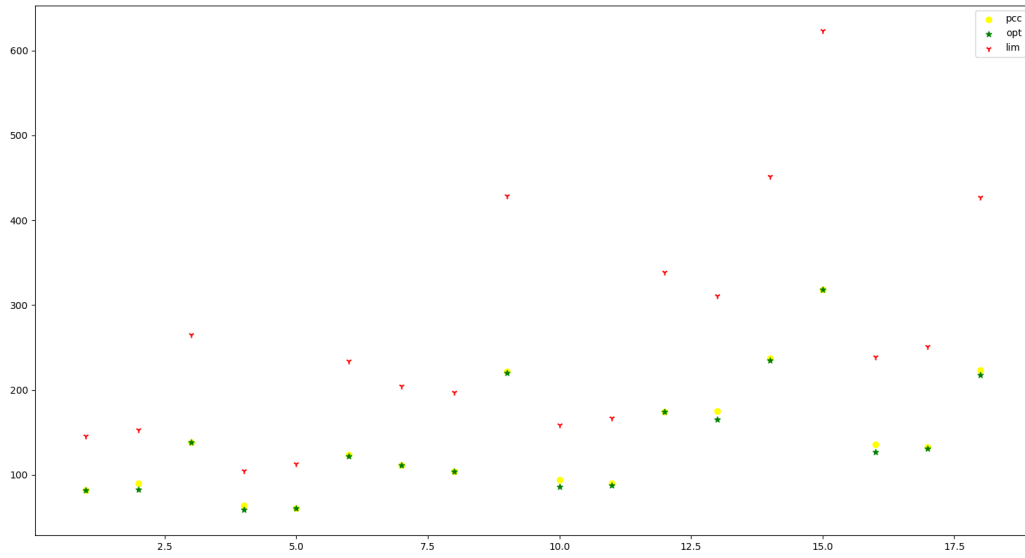
Étape 4 : Construire l'arbre de poids minimum  $G_4$  couvrant les sommets de  $G_3$  (supprimant ainsi les arêtes se trouvant sur plus d'un des plus courts chemins considérés)/

Étape 5 : Éliminer les feuilles non-terminales de  $G_4$  pour obtenir  $G_5$  : la solution de l'heuristique.

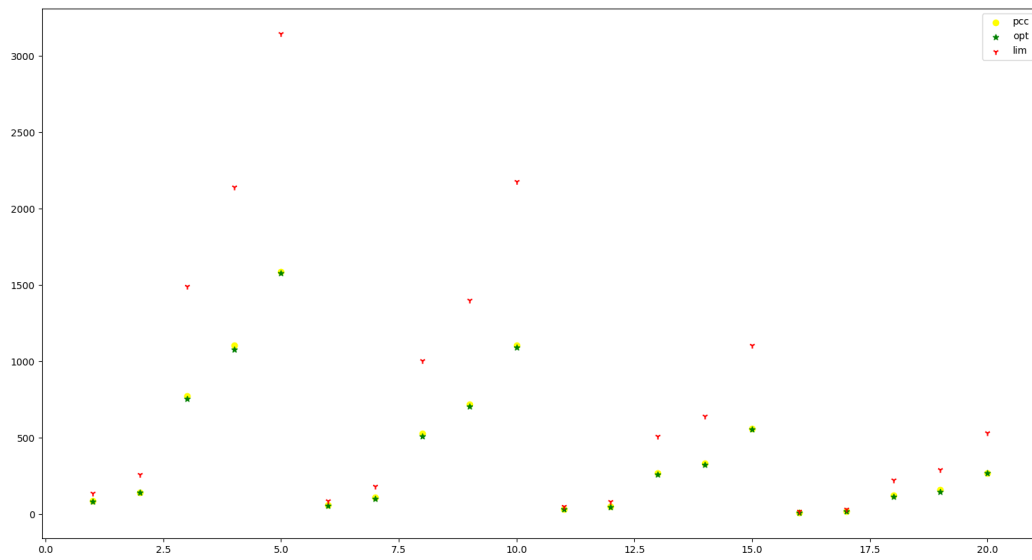
◆ Évaluation de la solution obtenue

Les graphiques suivants nous permettent d'apprécier la qualité de la solution retournée par l'algorithme du plus court chemin. Elle semble assez proche de la solution optimale et s'écarte considérablement à la borne supérieure déduite de son rapport d'approximation  $(2 - 2/\#T)$  où  $\#T$  représente le cardinal de l'ensemble des nœuds terminaux de  $G$ .

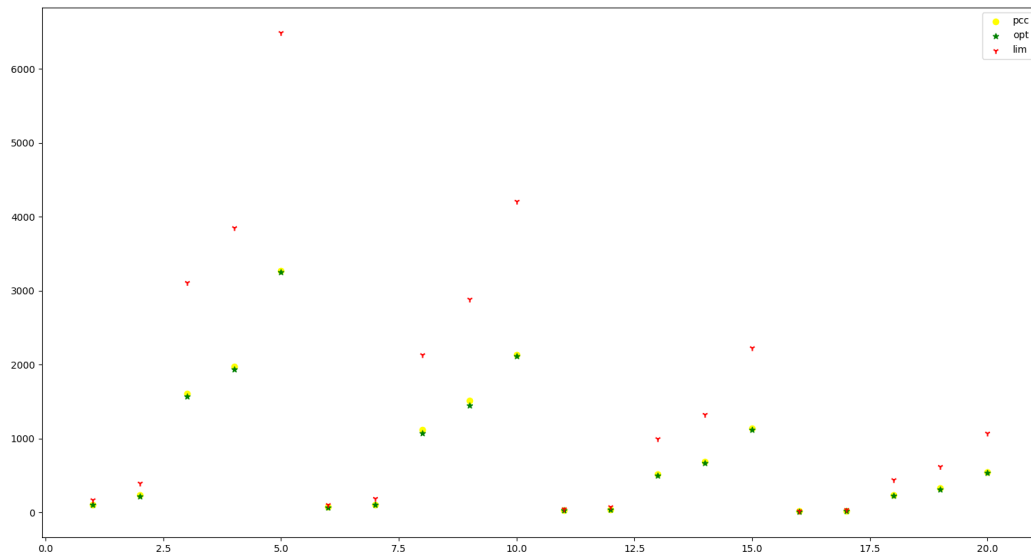
Evaluation empirique : Heuristique du plus court chemin (TestSet B)



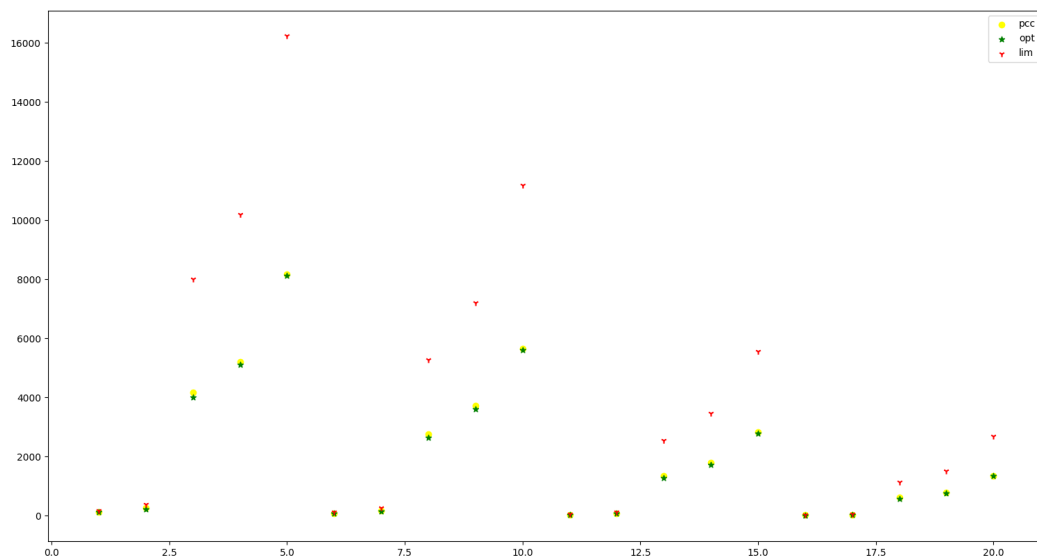
Evaluation empirique : Heuristique du plus court chemin (TestSet C)



Evaluation empirique : Heuristique du plus court chemin (TestSet D)



Evaluation empirique : Heuristique du plus court chemin (TestSet E)



## 2. Heuristique de l'Arbre Couvrant minimum (ACM)

### ◆ Principe

Elle consiste à réduire successivement l'ensemble des nœuds « steiner » par construction d'un arbre couvrant de poids minimum. Les nœuds supprimés à chaque étape sont des nœuds non-terminaux feuilles de l'arbre couvrant calculé. Intuitivement, elle parût bien moins efficace que l'heuristique du PCC (qui est bien plus élaborée). Le paragraphe suivant en fournit les résultats d'évaluation sur les instances B, C, D et E.

### ◆ Évaluation de la solution obtenue

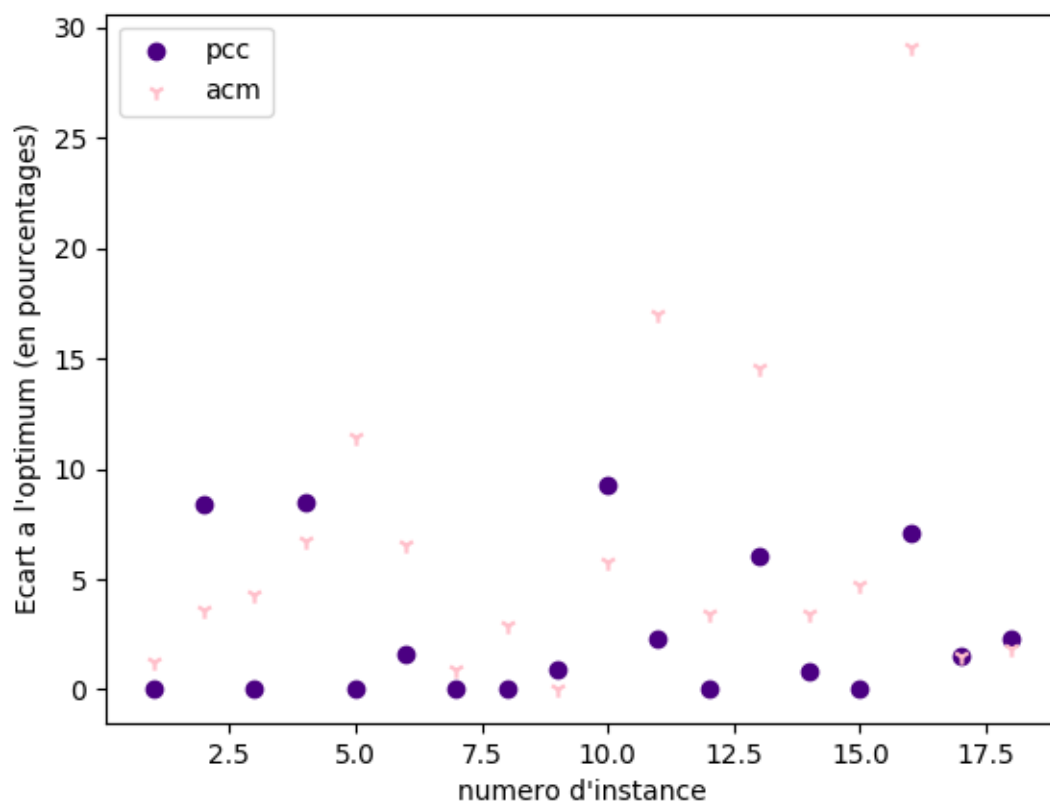
Comme l'indiquent les graphiques ci-dessous, les solutions retournées par cette heuristique sont de loin meilleures à celles que retourneraient des instances critiques de graphe auxquelles l'on appliquerait l'heuristique du PCC. Elles semblent même presque aussi bonnes que celles de cette dernière. Pour y voir plus clair, dans le prochain paragraphe, nous comparons ces deux heuristiques d'une part, par leur écart par rapport à la solution optimale (en pourcentage) et d'autre part, par leur temps d'exécution.

### 3. PCC Versus ACM

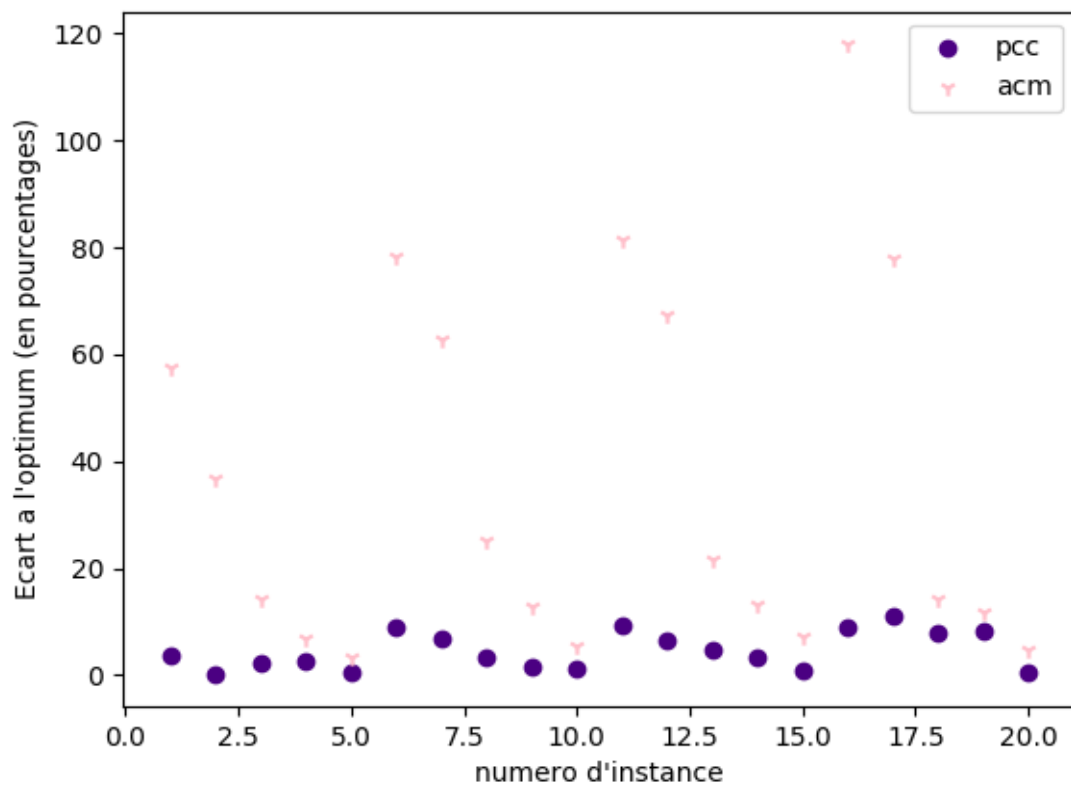
#### ◆ Critère : Écart à la solution en pourcentage

Les solutions obtenues par l'heuristique du PCC, quelque soit la classe d'instances considérée s'écarte d'au plus 20 % de la solution optimale tandis que celles de l'heuristique de l'ACM semblent globalement s'accroître avec la taille des instances (voir graphiques ci-dessous). Cette heuristique retourne parfois une solution deux (02) fois supérieure à l'optimum.

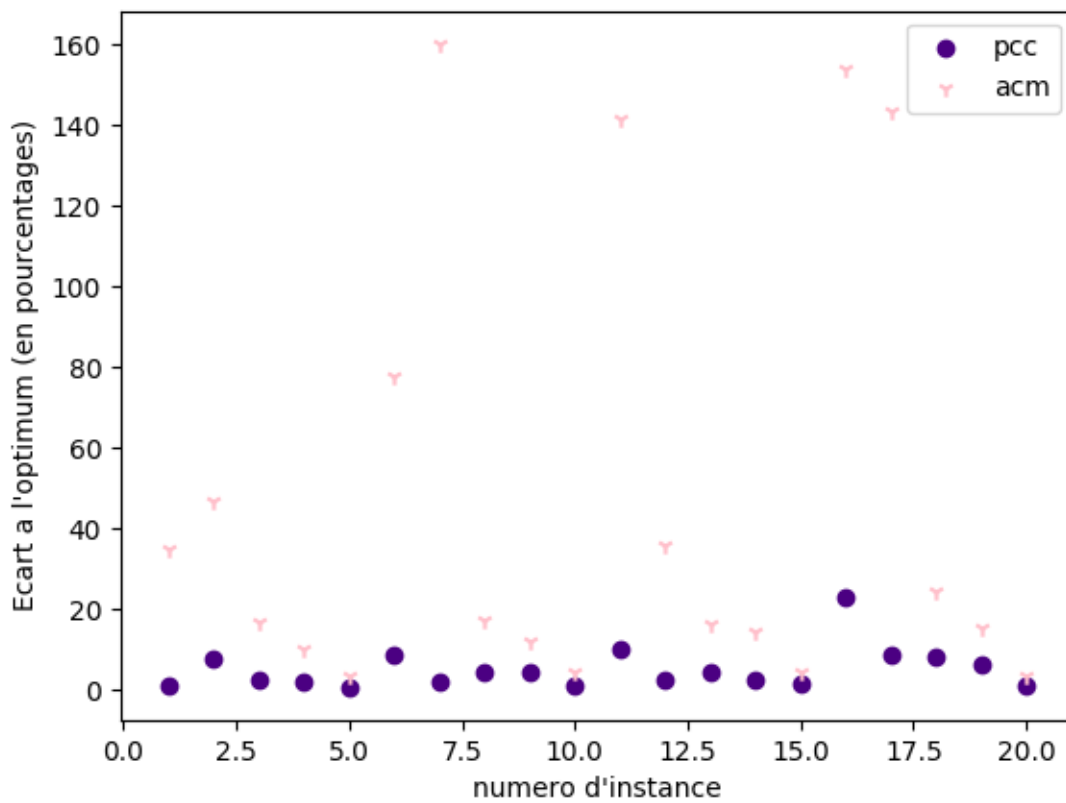
Comparaison des heuristiques:(TestSetB)



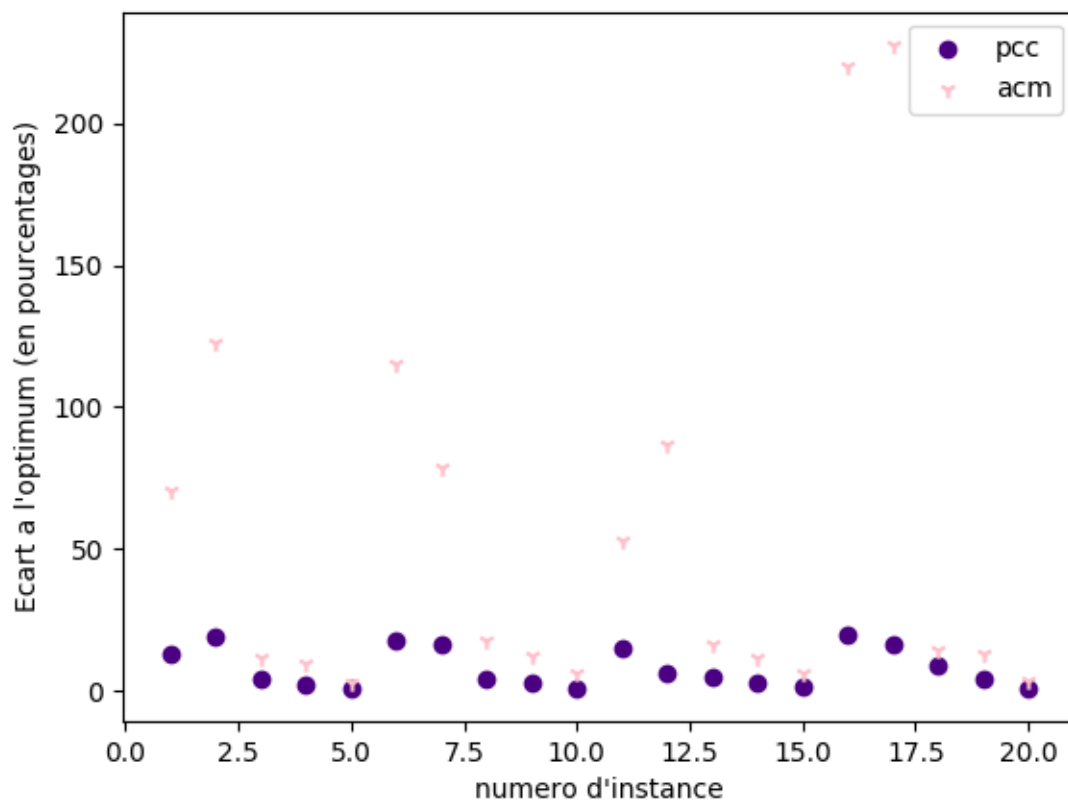
Comparaison des heuristiques:(TestSetC)



Comparaison des heuristiques:(TestSetD)



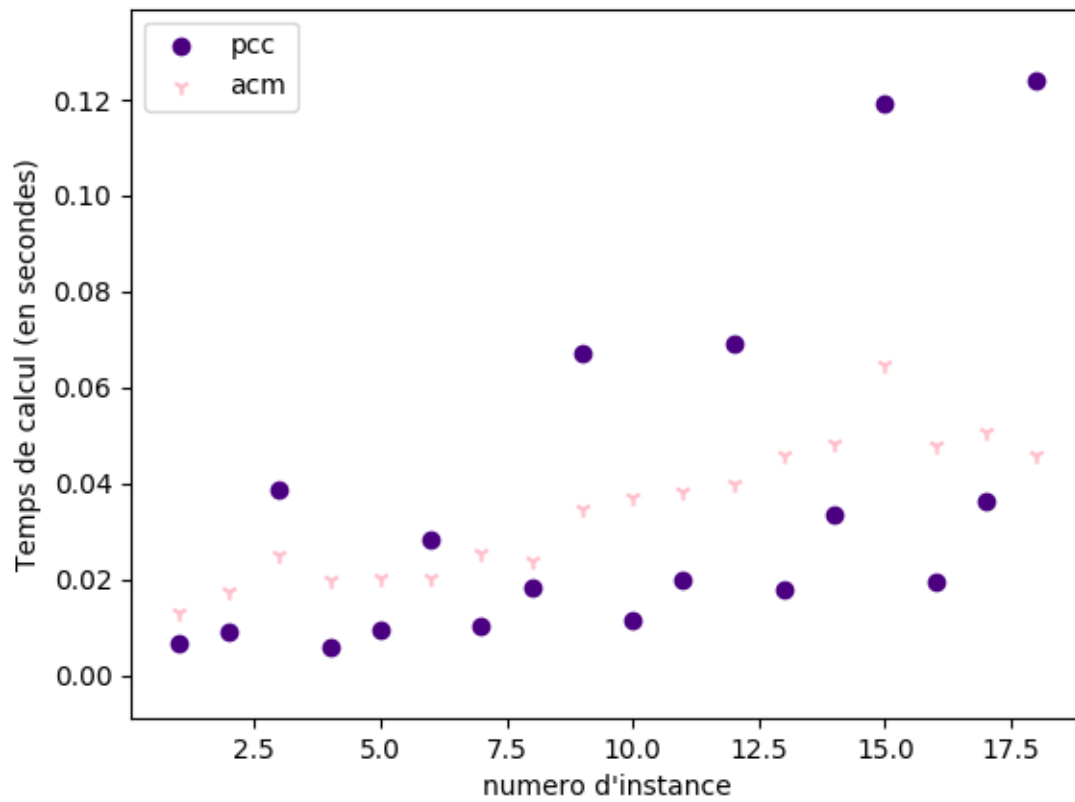
### Comparaison des heuristiques:(TestSetE)



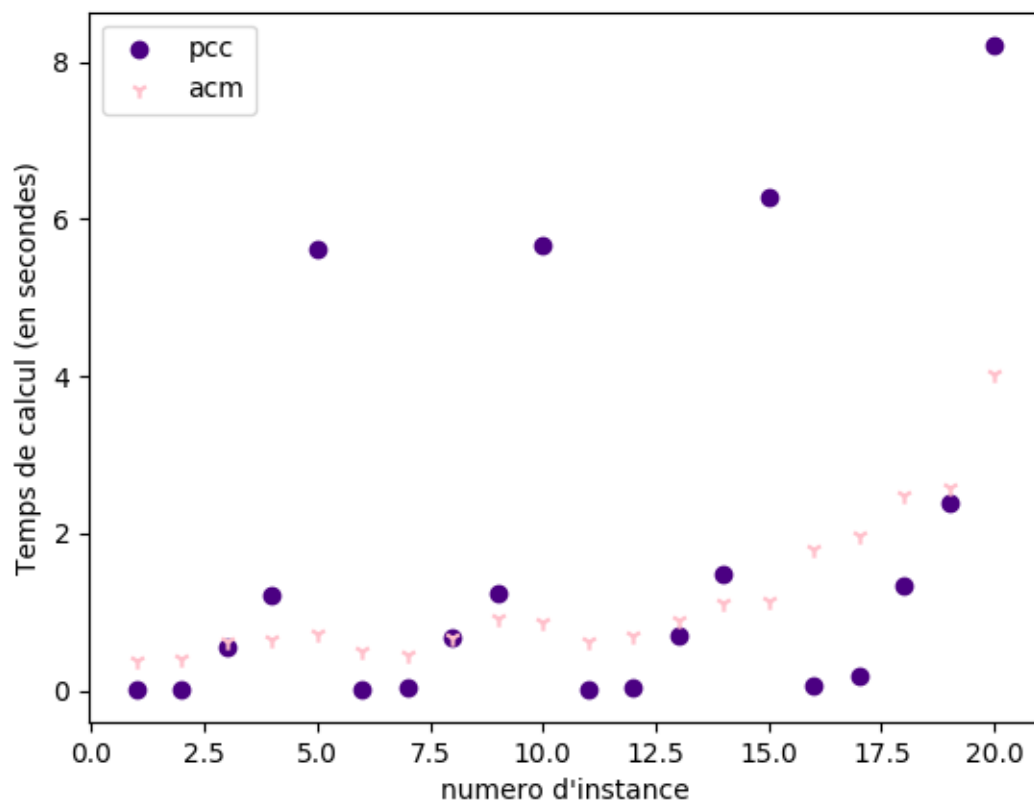
◆ Critère

A contrario, l'efficacité de l'heuristique du PCC est assez coûteuse en temps de calcul . Par exemple, sur la classe d'instances E, le temps de convergence de l'heuristique de l'ACM semble constant (20 secondes) indépendamment de l'instance considérée tandis que le temps d'exécution du PCC croît (de façon importante) avec la taille de l'instance (en particulier le nombre de nœuds terminaux).

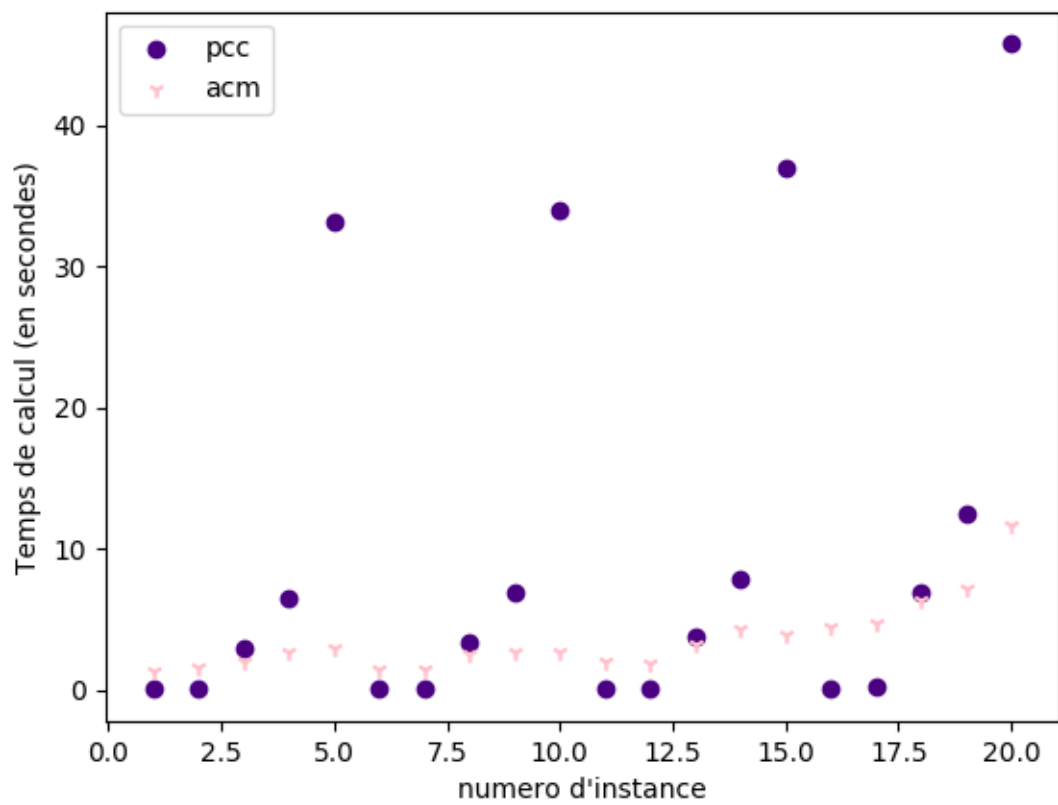
Comparaison des heuristiques:(TestSetB)



Comparaison des heuristiques:(TestSetC)



Comparaison des heuristiques:(TestSetD)



Comparaison des heuristiques:(TestSetE)

