

Численное решение одномерного уравнения Лапласа на отрезке.

Ахматали Таумурзаев

1 Описание задачи

Необходимо решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа в одномерном случае:

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in (0, 1), \\ u(0) = a, \\ u(1) = b \end{cases}$$

2 Описание метода решения

Для начала введём на сегменте $(0, 1)$ равномерную сетку x_0, x_1, \dots, x_N , где $x_i = i \cdot h$, $h = \frac{1}{N}$, и переменные y_0, y_1, \dots, y_N , которые будут приближённо задавать значения функции на сетке. Аппроксимируем вторую производную с помощью разностного уравнения и подставим в уравнение Лапласа для узлов сетки:

$$-\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} = f(x_i),$$

Соберём вместе все эти уравнения и получим следующую систему с трех-диагональной матрицей:

$$\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & & \dots & & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_{N-2} \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_1) + \frac{a}{h^2} \\ f(x_2) \\ \dots \\ f(x_{N-2}) \\ f(x_{N-1}) + \frac{b}{h^2} \end{bmatrix}$$

Решив данную систему мы найдём приближённые значения функции в узлах сетки.

3 Результаты

Отразим результаты работы программы на следующем графике

