

Численное решение двумерного уравнения Лапласа в квадрате.

Ахматали Таумурзаев

1 Описание задачи

Необходимо решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа в двумерном случае:

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) = f(x, y), & (x, y) \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = g, \end{cases}$$

2 Описание метода решения

Как и в одномерном случае введём равномерную сетку в единичном квадрате $\{(x_i, y_j)\}, i, j = 0, \dots, N$, где $x_i = ih, y_j = jh, h = \frac{1}{N}$, и переменные $\{u_{i,j}\} \approx u(x_i, y_j)$, которые будут приближённо задавать значения функции на сетке.

По аналогии выпишем уравнение, приближающее оператор Лапласа на пятиточечном шаблоне, подставим его в первоначальное условие и получим:

$$-\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} - \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} = f(x_i, y_j),$$

Собрав вместе все эти уравнения, получим систему с пятидиагональной матрицей. Для её решения используем стабилизированный метод бисопряженных градиентов (BiCGStab) с переобуславливателем DDPQILUC из пакета INMOST.

3 Результаты

Отразим результаты работы программы на следующем графике

