Харкивськкій національний університет імені В. Н. Каразіна

На правах рукопису

Ахмедов Ролан Джавадович

УДК 511.72

Випромінювання нестаціонарних полів та їх розповсюдження в нелінійному просторі

01.04.03 — радіофізика

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник
Думін Олександр Миколайович,
кандидат фізико-математичних наук, доцент

Харків — 2017

ЗМІСТ

РОЗДІЛ 1
МЕТОД ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ

1.1. Матеріальні рівняння середовища

Електромагнітні властивості середовища можна математично описати шляхом визначення векторів електричної $\overrightarrow{\mathbf{D}}$ та магнітної $\overrightarrow{\mathbf{B}}$ індукції за допомогою математичних рівнянь.

$$\overrightarrow{\mathbf{D}} = \epsilon_0 \overrightarrow{\mathbf{E}} + \overrightarrow{\mathbf{P}} \left(\overrightarrow{\mathbf{E}}, \overrightarrow{\mathbf{H}} \right) \tag{1.1}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{B}} = \mu_0 \overrightarrow{\mathbf{H}} + \mu_0 \overrightarrow{\mathbf{M}} \left(\overrightarrow{\mathbf{E}}, \overrightarrow{\mathbf{H}} \right) \tag{1.2}$$

Нелінійне середовище характеризується нелінійною залежністю поляризації $\overrightarrow{\mathbf{P}}$ і намагніченості $\overrightarrow{\mathbf{M}}$ від векторів напруження електромагнітного поля.

Коли P залежить від H? Чи можна її не враховувати надалі. Приклади. Яка фізична остова лежить у відмінності розмірностей доданих?

В загальному випадку вектор поляризації має довільній вид та залежать від магнітної та електричної складової поля, а у лінійному випадку має вид $\epsilon \overrightarrow{\mathbf{E}}$. Відносна діелектрична проникність середовища ϵ взагалі є матриця, кожний з елементів якої, залежить від повного переліку незалежних координат та часу. Розглянемо шарувате середовище, як середу для розповсюдження і припустимо що фронт хвильового пакету проходить через шари під прямим кутом, тоді ϵ є скалярна функція, що залежить лише від поздовжньої координати та часу. Аналогічні міркування можна провести і для вектора намагніченості.

Уточнити чи не є ϵ тензором для нелінійних компонент.

Для задач слабкої нелінійності оптичної фізики використовується ряд Тейлора, так як при не надто сильних полях вклад більших степенів, дійсно, мінімізується за рахунок невеликого відхилення від лінійної функції [джерело].

$$\overrightarrow{\mathbf{P}} = \epsilon_0 (\epsilon - 1) \overrightarrow{\mathbf{E}} + \overrightarrow{\mathbf{P'}} = \epsilon_0 (\epsilon - 1) \overrightarrow{\mathbf{E}} + \sum_{i=2}^{\infty} \chi^{e}{}_{i} \overrightarrow{\mathbf{E}}^{i} \tag{1.3}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{D}} = \epsilon_0 \epsilon \overrightarrow{\mathbf{E}} + \overrightarrow{\mathbf{P'}}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{M}} = (\mu - 1) \overrightarrow{\mathbf{H}} + \overrightarrow{\mathbf{M'}} = (\mu - 1) \overrightarrow{\mathbf{H}} + \sum_{i=2}^{\infty} \chi^{m}{}_{i} \overrightarrow{\mathbf{H}}^{i} \tag{1.4}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{B}} = \mu_0 \mu \overrightarrow{\mathbf{H}} + \mu_0 \overrightarrow{\mathbf{M'}}$$

Тут перший додаток має особливий фізичний смисл – це лінійна складова поля та складова з найбільшим абсолютнім значенням коефіцієнту при векторі напруженості. Фізично, коефіцієнт є відносною пронекністю середовища для відповідного степеню поля. Всі додатки крім першого це нелінійні складові поля, кожен з яких має свій фізичний смисл. Позначмо суму нелінійних складових векторів поляризації та намагніченості $\overrightarrow{\mathbf{P'}}$ та $\overrightarrow{\mathbf{M'}}$ відповідно.

Смисл перших 5и додатків (таблиця).

1.2. Рівняння Максвела

Закон Ампера

$$\left[\nabla \times \overrightarrow{\mathbf{H}}\right] = \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{D}}}{\partial t} + \overrightarrow{\mathbf{J}^{\sigma}} + \overrightarrow{\mathbf{J}^{e}} \tag{1.5}$$

Закон индукції Фарадея

$$-\left[\nabla\times\overrightarrow{\mathbf{E}}\right]=\frac{\partial\overrightarrow{\mathbf{B}}}{\partial t}+\overrightarrow{\mathbf{J}}^{h}\tag{1.6}$$

Теорема Гаусса

$$\left(\nabla\cdot\overrightarrow{\mathbf{D}}\right)=\rho^{\sigma}+\rho^{e}\tag{1.7}$$

Теорема Гаусса для магнітного поля

$$\left(\nabla\cdot\overrightarrow{\mathbf{B}}\right)=\rho^{h}\tag{1.8}$$

1.2.1. Узагальнене джерело поля для задач випромінювання. Додатки з нелінійними складовими векторів поляризації та намагніченості мають розмірність густин струму, відповідно. Введемо узагальнений електричний $\overrightarrow{\mathbf{J}}$ та $\overrightarrow{\mathbf{I}}$ магнітній струми таким чином, щоб ці додатки не заважали майбутнім міркуванням. Ця дія відповідає фізичному змісту цих додатків та не порушує математичної консеквентності, що буде обумовлено далі.

$$\overrightarrow{\mathbf{J}}=\frac{\partial\overrightarrow{\mathbf{P}'}}{\partial t}+\overrightarrow{\mathbf{J}}^{\sigma}+\overrightarrow{\mathbf{J}}^{e}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{I}}=\mu_0\frac{\partial\overrightarrow{\mathbf{M}'}}{\partial t}+\overrightarrow{\mathbf{J}}^{h}$$

Підставляючи поляризацію (1.3) і намагніченість (1.4) до матеріальних рівнянь (1.2) и (1.1) з наступною підставковою в роторні рівняння Максвелла (1.5) и (1.6) отримаємо наступне:

$$\left[\nabla\times\overrightarrow{\mathbf{H}}\right]=\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left[\overrightarrow{\mathbf{E}}+(\epsilon-1)\,\overrightarrow{\mathbf{E}}\right]+\frac{\partial\overrightarrow{\mathbf{P}'}}{\partial t}+\overrightarrow{\mathbf{J}}^{\sigma}+\overrightarrow{\mathbf{J}}^{e}=$$
$$=\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\epsilon\overrightarrow{\mathbf{E}}\right)+\frac{\partial\overrightarrow{\mathbf{P}'}}{\partial t}+\overrightarrow{\mathbf{J}}^{\sigma}+\overrightarrow{\mathbf{J}}^{e}=\epsilon_0\left(\frac{\partial\epsilon}{\partial t}\overrightarrow{\mathbf{E}}+\epsilon\frac{\partial\overrightarrow{\mathbf{E}}}{\partial t}\right)+\frac{\partial\overrightarrow{\mathbf{P}'}}{\partial t}+\overrightarrow{\mathbf{J}}^{\sigma}+\overrightarrow{\mathbf{J}}^{e}$$

$$\left[\nabla \times \overrightarrow{\mathbf{H}}\right] = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\epsilon \overrightarrow{\mathbf{E}}\right) + \overrightarrow{\mathbf{J}} \tag{1.9}$$

$$-\left[\nabla \times \overrightarrow{\mathbf{E}}\right] = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\mu \overrightarrow{\mathbf{H}}\right) + \overrightarrow{\mathbf{I}} \tag{1.10}$$

Схожа ситуація і для джерел що представлена зарядами. Нехай наступні вирази опишуть узагальнену електричну ϱ (ро) та магнітну g густини заряду.

$$\varrho = \rho^{\sigma} + \rho^{e} - \left(\nabla \cdot \overrightarrow{\mathbf{P'}}\right)$$

$$g = \rho^{h} - \mu_0 \left(\nabla \cdot \overrightarrow{\mathbf{M'}}\right)$$

Підставляючи поляризацію та намагніченість до відповідних формулювань теореми Гаусса отримаємо її вигляд для задачі слабкої нелінійності в анізотропному середовищі.

$$\left(\nabla \cdot \left(\epsilon_0 \epsilon \overrightarrow{\mathbf{E}} + \overrightarrow{\mathbf{P'}}\right)\right) = \rho^{\sigma} + \rho^{e}$$
$$\left(\nabla \cdot \epsilon_0 \epsilon \overrightarrow{\mathbf{E}}\right) = \rho^{\sigma} + \rho^{e} - \left(\nabla \cdot \overrightarrow{\mathbf{P'}}\right)$$

$$\epsilon_0 \left(\nabla \cdot \epsilon \overrightarrow{\mathbf{E}}\right) = \varrho \tag{1.11}$$

$$\mu_0 \left(\nabla \cdot \mu \overrightarrow{\mathbf{H}}\right) = g \tag{1.12}$$

1.2.2. Відокремлення поздовжних компонент поля. Диференціальні рівняння першого порядку (1.11), (1.12) та векторні другого (1.9), (1.10) формують систему рівнянь Максвелла відносно невідомих векторних величин $\overrightarrow{\mathbf{E}}$ і $\overrightarrow{\mathbf{H}}$.

Для спрощення цієї системи пропонується використати метод розділення змінних Фур'є. Аналогічно до методу функції Гріна з класичної електродинаміки, спрощення відбувається шляхом зменшення кількості невідомих Джерело, вилучаючи їх з рівняння.

Метод Функції Гріна як і будь-який метод частотної області, вибирає саме час, як змінну для виключення, обмежуючи себе розгляданням квазістаціонарних процесів. Метод еволюційних рівнянь, в свою чергу, пропонує виключення просторової змінної. З трьох просторових координат можна виділити одну – вісь розповсюдження поля.

Виключення саме цієї просторової залежності зумовлено тісним зв'язком координати розповсюдження з координатою часу через принцип причинності. Його сутність в термінології спеціальної теорії відносності полягає в тому, що дві події можуть бути причинно зв'язані одна з одної тоді, і тільки коли, інтервал між ними часоподібний, що напряму слідує з того, що ніяка взаємодія не може розповсюджуватись швидше за світло. [3, ст. 22]. В електродинамічному сенсі це означає, що поле не може розповсюдитись далі у вільному просторі, ніж може пройти світло за той самий час та по тій самій осі випромінювання. Математично це можна записати, як $ct - z > 0$, де z поздовжна просторова координата розповсюдження, а $c = 2,998 \cdot 10^8$ м/с – фундаментальна константа, швидкість світла в вакуумі.

В рівнянні (1.9) відокремимо векторну компоненту $\overrightarrow{\mathbf{z}_0}$. Користуючись визначенням векторного добутку лінійної комбінації векторів отримаємо два незалежні рівняння.

$$\operatorname{rot} \overrightarrow{\mathbf{A}} = \left[\nabla \times \overrightarrow{\mathbf{A}}\right] = \left[\left(\nabla_\perp + \overrightarrow{\mathbf{z}_0}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times \left(\overrightarrow{\mathbf{A}_\perp} + \overrightarrow{\mathbf{z}_0} A_z\right)\right] =$$

$$\left[\nabla_\perp \times \overrightarrow{\mathbf{A}_\perp}\right] + \left[\nabla_\perp \times \overrightarrow{\mathbf{z}_0} A_z\right] + \left[\overrightarrow{\mathbf{z}_0}\frac{\partial}{\partial z} \times \overrightarrow{\mathbf{A}_\perp}\right] + \left[\overrightarrow{\mathbf{z}_0}\frac{\partial}{\partial z} \times \overrightarrow{\mathbf{z}_0} A_z\right]$$

$$a + b = 1 \tag{1.13}$$

$$a - b = 1 \tag{1.14}$$

1.2.3. Уравнения Максвелла в матричной форме.

1.3. Построение модового базиса

1.4. Эволюционные уравнения

1.5. Итеративный учет слабой нелинейности

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Watson, G. *Theory of Bessel Functions.* Cambridge University Press, London, 1922.

[2] А.П. Прудников, Ю.А. Бычков, *Интегралы и рады: Специальные функции.* Наука, Москва, 1983.

[3] Л.Д. Ландау, *Теоретическая физика: Том II. Теория поля.* Физматлит, Москва, 2012.

Додаток А

Свойства функции Бесселя первого рода

А.1. Определение и линейные свойства

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z) \tag{A.1}$$

$$J_{n+1}(z) + J_{n-1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z) \tag{A.2}$$

А.2. Интегродифференциальные свойства

$$2\frac{d}{dz} J_n(z) = J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z) \tag{A.3}$$

$$\frac{d}{dz} J_n(z) = J_{n-1}(z) - \frac{n}{z} J_n(z) \tag{A.4}$$

$$\frac{d}{dz} J_n(z) = \frac{n}{z} J_n(z) - J_{n+1}(z) \tag{A.5}$$

$$\frac{d}{dz} \frac{J_n(z)}{z^n} = -\frac{J_{n+1}(z)}{z^n} \tag{A.6}$$

$$\frac{d}{dz} \left(z^n J_n(z)\right) = z^n J_{n-1}(z) \tag{A.7}$$

A.3. Интеграл 1

$$I_1 = \int\limits_0^\infty \frac{d\nu}{\nu} J_1(\nu R) J_1(\nu\rho) J_0\left(\nu\sqrt{c^2t^2 - z^2}\right) \tag{A.8}$$

Интегралы такого вида встречаются в [1, ст. 398].

$$\begin{aligned} \int\limits_0^\infty \frac{dt}{t^{\lambda+\nu}} J_\mu(at) J_\nu(bt) J_\nu(ct) = \frac{(bc/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1/2)\Gamma(1/2)} \cdot \\ \cdot \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\pi \frac{J_\mu(at) J_\nu(\omega t)}{\omega^\nu t^\lambda} \sin^{2\nu}\phi d\phi dt, \\ \omega = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\phi} \end{aligned} \tag{A.9}$$

$$a = \sqrt{c^2t^2 - z^2}; b = R; c = \rho; \lambda = 0$$

$$\nu = 1; \mu = 0; \omega = \sqrt{R^2 + \rho^2 - 2\rho R\cos\phi}$$

$$\int\limits_0^\infty \frac{d\nu}{\nu} J_1(\nu R) J_1(\nu\rho) J_0\left(\nu\sqrt{c^2t^2 - z^2}\right) = \frac{\rho R}{2\Gamma(3/2)\Gamma(1/2)} \cdot$$

$$\int\limits_0^\pi \frac{\sin^2\phi}{\sqrt{R^2 + \rho^2 - 2\rho R\cos\phi}} \int\limits_0^\infty d\nu J_1(\nu\omega) J_0\left(\nu\sqrt{c^2t^2 - z^2}\right) d\phi =$$

Далее для вычислений пригодится [2, ст. 209].

$$\int\limits_0^\infty d\nu J_n(\nu t) J_{n-1}(\nu t) = \tag{A.10}$$

A.4. Интеграл 2

[2, ст. 10]