РАЗДЕЛ 4
ИЗЛУЧЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ ИЗ ОТКРЫТОГО КОНЦА КОАКСИАЛЬНОГО ВОЛНОВОДА (ПРИБЛИЖЕНИЕ КИРХГОФА)

Данный раздел посвящен решению задачи излучения нестационарных электромагнитных полей из открытого конца коаксиального волновода, возбуждаемого нестационарной ТЕМ-волной. В разделе 2 показано, что такая задача при помощи метода модового базиса сводится к решению однородных уравнений Клейна-Гордона с неоднородными начальными и граничными условиями. В данном разделе общие решения этих уравнений предлагается искать при помощи метода разделения переменных. Решение получено в приближении Кирхгофа, так как распределение поля на раскрыве взято таким же, как и в поперечном сечении бесконечного волновода. Проведено сравнение полученных теоретических результатов с экспериментальными данными. Основные результаты данного раздела изложены в статьях [126, 127], дополнительно освещены в статье [128] и докладывались на международных конференциях [129, 130].

4.1. Решение уравнения Клейна-Гордона методом разделения переменных

Под нахождением общего решения дифференциального уравнения в частных производных методом разделения переменных будем понимать не только представление решения в виде произведения функций, каждая из которых зависит только от одной переменной, но и проведение специальной замены переменных, при которой новое уравнение будет иметь решения с разделяющимися переменными. Причем методы теории групп позволяют для конкретного уравнения не только найти такие подстановки, но и доказать их единственность. Такое исследование уравнения Клейна-Гордона было проведено в работе [107]. Всего найдено десять вариантов подстановок, при которых переменные разделяются. В работе [131] приводятся все варианты замен переменных одномерного уравнения Клейна-Гордона с подробным их анализом с точки зрения покрытия решениями конуса Минковского. Это вызвано тем, что не все подстановки приводят к решениям, существующим для всех необходимых z и t.

Первый вариант подстановки дает обычное решение, эквивалентное применению преобразования Фурье по координате и времени. Так как мы ищем решение не в частотной, а во временной области, такая замена переменных для нас неприемлема.

Второй вариант замены переменных имеет вид

$$ct = u\,\mathrm{ch}\,v,\; z = u\,\mathrm{sh}\,v,$$

причем $0 \le u < \infty$, $-\infty < v < \infty$.

Положим для удобства, что $z \ge 0$, тогда $u = \sqrt{c^2t^2 - z^2}$, $v = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{ct+z}{ct-z}\right)$, при $z \le ct$. Отсюда следует, что общее решение уравнения (2.33) при $\varepsilon = \mu = 1$ есть бесконечная сумма, каждое из слагаемых которой имеет вид

$$\begin{aligned} h^{\nu}(z,t;\chi) = {} & \left(\frac{ct-z}{ct+z}\right)^{\frac{\nu}{2}}\left\{A_{\nu}^{+}J_{\nu}\left(\chi\sqrt{c^2t^2-z^2}\right) + B_{\nu}^{+}N_{\nu}\left(\chi\sqrt{c^2t^2-z^2}\right)\right\} + \\ & + \left(\frac{ct+z}{ct-z}\right)^{\frac{\nu}{2}}\left\{A_{\nu}^{-}J_{\nu}\left(\chi\sqrt{c^2t^2-z^2}\right) + B_{\nu}^{-}N_{\nu}\left(\chi\sqrt{c^2t^2-z^2}\right)\right\}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

где ν – индекс суммирования, представляющий собой любое число (целое, вещественное, комплексное), $N_{\nu}(\cdot)$ – функция Неймана. Данное решение уравнения Клейна-Гордона уже было использовано в волноводной задаче [132].

Остальные варианты замен переменных дают решения, представляющие собой произведения функций параболического цилиндра, функций Матье, Бесселя, Эйри, полиномов Эрмита, причем в двух случаях решения существуют не для всех необходимых z и t. В отличие от волноводных задач, в задачах излучения использование той или иной замены переменных усложняется необходимостью вычислять несобственный интеграл, содержащий произведение решения уравнения Клейна-Гордона и функции Бесселя. Поэтому самым перспективным для наших задач является второй вариант замены переменных, так как решение (4.1) предоставляет довольно большую свободу выбора функциональной зависимости источника от координат и времени.

4.2. Излучение плоского источника с произвольным пространственным распределением нестационарного поля

Пусть на плоскости $z=0$ расположен источник стороннего поля, имеющий произвольную временную зависимость. Подобно тому, как в подразделе 3.2 сторонние ток и заряд были разложены по модам свободного пространства, причем переменные $j_m(z,t;\chi)$ и $\rho_n(z,t;\xi)$ отражают вклад источников в возбуждение соответствующих мод, мы можем разложить любой плоский источник поля по тем же модам, а в качестве коэффициентов разложения получить условия на границе $z=0$ для эволюционных коэффициентов $h_m(z,t;\chi)$, $e_n(z,t;\xi)$ и их производных. В результате, целочисленные индексы m и n будут отражать угловую зависимость источника, а зависимости от χ и ξ – зависимость от ρ. Следующим этапом в решении данной задачи является решение уравнения Клейна-Гордона совместно с полученными начальными и граничными условиями.

Если источник поля несинфазный, то есть временная зависимость амплитуды стороннего поля в различных точках источника не одинаковая, то такая задача сводится к вычислению интегральной свертки и решению задачи для синфазного источника, подобно тому, как это описано в подразделе 3.2. В случае синфазного источника пространственное распределение амплитуды поля плоского источника учитывается в виде не зависящего от времени множителя в граничном условии для уравнения Клейна-Гордона. При использовании принципа суперпозиции решение задачи со ступенчатой временной зависимостью амплитуды поля источника даст возможность рассчитывать излучаемое поле при произвольном пространственно-временном распределении.

Решение (4.1) удобно использовать, когда условие на границе $z = 0$ имеет временную зависимость в виде функции Хевисайда. Использование известной формулы 21.8-26 из [101] для разложения единицы в ряд по функциям Бесселя

$$1 = J_0(z) + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(z)$$

позволяет легко найти коэффициенты $A_\nu^+, B_\nu^+, A_\nu^-, B_\nu^-$ для решения (4.1) при подстановке граничного условия

$$h_m^\nu(0,t;\chi) = R_m(\chi) H(t),$$

где $R_m(\chi)$ – коэффициент, определяющий распределение поля источника в зависимости от угла φ и от продольной координаты ρ. В выражении (4.1) будем считать, что $\nu = 0,1,2\ldots$. Полагая, что источник расположен в плоскости $z = 0$, получим коэффициенты:

$$A_0^+ = R_m(\chi),\ A_{2n+1}^+ = 0,\ A_{2n}^+ = 2R_m(\chi),\ B_n^+ = 0,\ A_n^- = 0,\ B_n^- = 0.$$

Таким образом, решение для ступенчатой функции возбуждения принимает вид

$$h_m(z,t;\chi) = R_m(\chi)\left\{ J_0\left(\chi\sqrt{c^2t^2 - z^2}\right) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{ct+z}{ct-z}\right)^n J_{2n}\left(\chi\sqrt{c^2t^2 - z^2}\right)\right\}. \quad (4.2)$$

Далее проиллюстрируем данный подход на примере задачи излучения в свободное полупространство раскрыва коаксиального волновода с бесконечным фланцем, возбуждаемого ТЕМ-волной с произвольной зависимостью от времени. Будем пренебрегать искажениями распределения поля на раскрыве в сравнении с его распределением в поперечной плоскости внутри бесконечного волновода, то есть, будем использовать приближение Кирхгофа. Для этого необходимо сначала решить волноводную задачу и найти поле ТЕМ-волны со ступенчатой зависимостью от времени.

4.3. Постановка и решение задачи распространения в коаксиальном волноводе ТЕМ-волны с произвольной зависимостью от времени

Как известно, поперечная волна в пустом коаксиальном волноводе с идеально проводящими стенками в процессе распространения не подвергается дисперсии. Таким образом, возбужденная в произвольном сечении волновода ТЕМ-волна со ступенчатой зависимостью от времени достигнет раскрыва, сохранив прежнюю временную зависимость.

Решим волноводную задачу при помощи метода эволюционных уравнений. Поле ТЕМ-волны внутри коаксиального волновода, согласно [104, 105], имеет вид

$$\vec{E}(\rho,z,t)=\mu_0\nabla U(\rho)\frac{\partial}{\partial t}f;\quad \vec{H}(\rho,z,t)=[\nabla U\times\vec{z}]\frac{\partial}{\partial z}f;$$
$$H_z=E_z\equiv 0,$$

где $U(\rho)$ – мембранная функция, определяющая распределение поля в поперечной плоскости, $f(z,t)$ – эволюционный коэффициент. Заметим, что мембранная функция не зависит от угла φ. Она является решением уравнения Лапласа $\Delta U=0$ в плоскости поперечного сечения с граничными условиями

$$U\big|_{\rho=b}=0;\; U\big|_{\rho=a}=p,$$

где a – радиус внешнего проводника коаксиального волновода, b – радиус внутреннего проводника, p – константа, подлежащая нахождению из условия энергетической нормировки поля [104]

$$\frac{1}{\pi\left(a^2-b^2\right)}\int_S dS\left|\nabla U\right|^2=1.$$

Отсюда легко получить общие выражения для поля ТЕМ-волны:

$$\vec{E}=-\vec{\rho}_0\sqrt{\frac{a^2-b^2}{2\ln\frac{a}{b}}}\frac{1}{\rho}\mu_0\frac{\partial}{\partial t}f,\; \vec{H}=\vec{\varphi}_0\sqrt{\frac{a^2-b^2}{2\ln\frac{a}{b}}}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}f. \tag{4.3}$$

Эволюционный коэффициент является решением волнового уравнения

$$\left\{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right\}f(z,t)=0,$$

дополненного однородными начальными условиями по времени

$$f(z,-t_0)=0\,,\ \frac{\partial}{\partial t}f(z,-t_0)=0$$

и начальными условиями по координате

$$f(z,t)\big|_{z=-z_0}=\varphi(ct)=I(ct),\ \frac{\partial}{\partial z}f(z,t)\big|_{z=-z_0}=\psi(ct)=-\dot{I}(ct),$$

где $I(ct)$ – произвольная временная зависимость ТЕМ-волны, возбужденной в момент времени $t=-t_0$ в сечении $z=-z_0=-ct_0$. Получаем задачу, решение которой найдем по формуле Даламбера

$$f(z,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi(ct-z)+\varphi(ct+z)\right]+\frac{1}{2}\int\limits_{ct-z}^{ct+z}d\theta\psi(\theta)=I(ct-z).$$

Таким образом, мы получили волну, распространяющуюся без искажений в сторону $z>0$.

В подразделе 4.2 отмечалось, что использование принципа суперпозиции позволяет решать задачу для произвольной зависимости источника от времени, имея решение для временной зависимости источника в виде функции Хевисайда. Исходя из этого будем полагать, что

$$I(ct-z)=\begin{cases}0, & ct-z<0;\\ ct-z, & ct-z\geq 0,\end{cases}$$

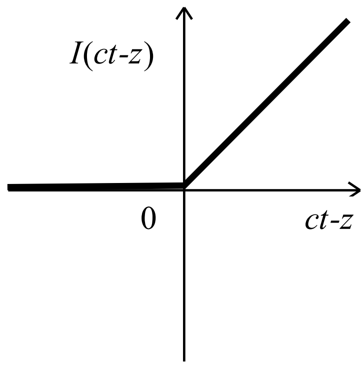

Рис. 4.1. Вид функции $I(ct-z)$.

(см. рис. 4.1), при этом, согласно (4.3), временная зависимость амплитуд поперечных компонент поля имеет вид ступенчатой функции. Будем считать, что распределение поля на раскрыве такое же, как и в поперечном сечении бесконечного волновода, представленное выражениями (4.3). Таким образом, зная пространственно-временное распределение поля источника, можно приступать к решению задачи излучения.

4.4. Постановка задачи излучения

В плоскости $z=0$ расположен раскрыв коаксиального волновода с бесконечным идеальнопроводящим фланцем (рис. 4.2). Так как до момента времени $t=0$ в свободном пространстве электромагнитное поле отсутствовало, то имеем нулевые начальные условия для эволюционных коэффициентов. Чтобы получить граничные условия для эволюционных коэффициентов, необходимо потребовать выполнение равенства амплитуд в сечении $z=0$ соответствующих компонент поля падающей на раскрыв ТЕМ-волны и волны, излученной в свободное полупространство. Будем пренебрегать токами на поверхности фланца. С одной стороны, поля внутри коаксиального волновода заданы выражениями

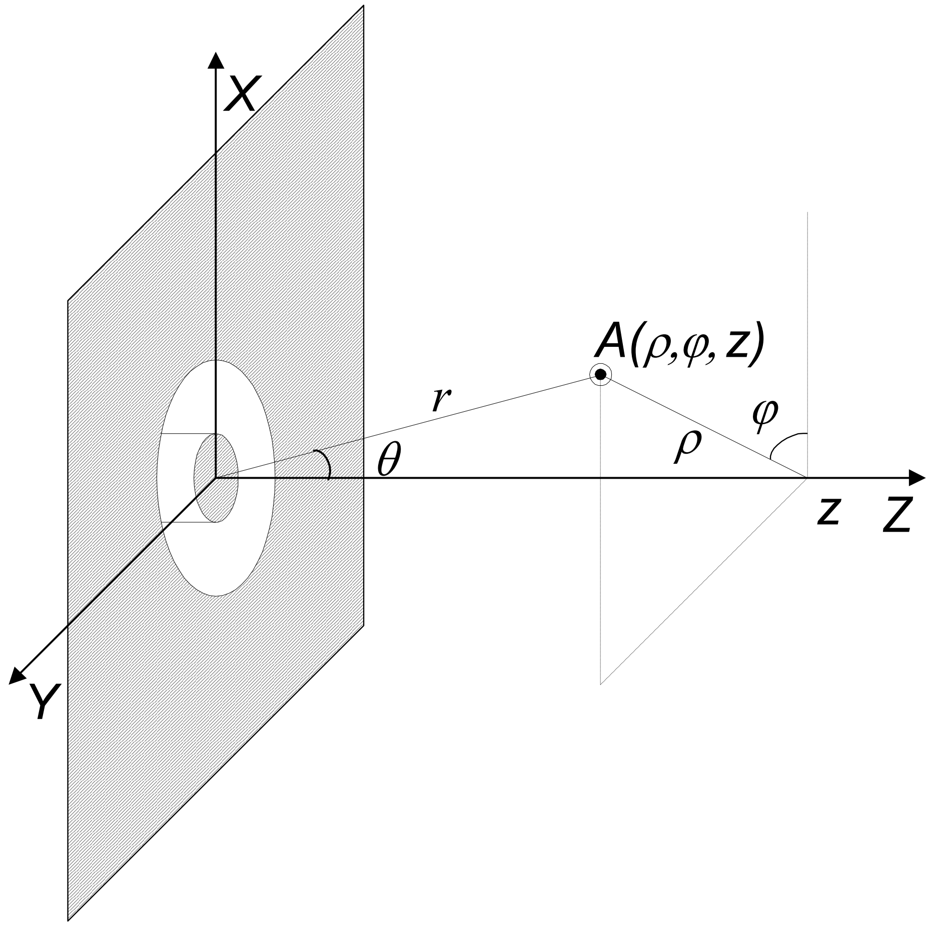

Рис. 4.2. Геометрия задачи.

$$\left.\begin{aligned}
&\vec{E} = -\vec{\rho}_0 \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{2\ln\frac{a}{b}}}\frac{\mu_0}{\rho}\frac{\partial}{\partial t} I(ct - z);\\
&\vec{H} = \vec{\varphi}_0 \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{2\ln\frac{a}{b}}}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z} I(ct - z);\\
&E_z = H_z = 0.
\end{aligned}\right\}(b < \rho < a) \tag{4.4}$$

С другой стороны, поля в свободном пространстве представляются формулами (2.34, 2.36). Приравняв соответствующие компоненты поля, получим соотношения, из которых найдем эволюционные коэффициенты $h_m(z,t;\chi)$, $e_n(z,t;\xi)$ и их производные при $z = 0$. Так как поле источника не зависит от угла φ, коэффициенты с индексами $m,n \neq 0$ и их производные равны нулю.

Наличие же в выражениях (4.4) электрического поля, направленного только вдоль $\vec{\rho}_0$, свидетельствует об излучении Е-волны в свободное пространство, так как в этом случае $h_0(0,t;\chi)\equiv 0$. Далее для удобства мы опустим индекс в обозначении эволюционного коэффициента: $e_0(z,t;\xi)\equiv e(z,t;\xi)$. “Сшивание” полей при $z=0$ дает

$$\int_0^\infty d\xi\sqrt{\xi}J_1(\xi\rho)\frac{\partial}{\partial z}e\bigg|_{z=0} = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{2\ln\frac{a}{b}}}\frac{1}{\rho}\mu_0\frac{\partial}{\partial t}I(ct-z)\bigg|_{z=0}, \quad b<\rho<a;$$

$$-\int_0^\infty d\xi\sqrt{\xi}J_1(\xi\rho)\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}e\bigg|_{z=0} = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{2\ln\frac{a}{b}}}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}I(ct-z)\bigg|_{z=0}, \quad b<\rho<a. \tag{4.5}$$

Отсутствие продольной компоненты в волноводе дает первое граничное условие

$$e(0,t;\xi)=0.$$

Остальные условия получим, если умножим правую и левую части выражений (4.5) на $\sqrt{\xi}J_1(\xi\rho)$ и проинтегрируем их по ρ в пределах от 0 до ∞, считая, что токи на фланце отсутствуют, т.е. $\frac{\partial}{\partial t}e\Big|_{z=0}=0$ при $\rho<b$ и $\rho>a$. В результате этого в правых частях появятся выражения, зависящие от ξ и отражающие амплитудное распределение на источнике. После использования в левых частях выражения для δ-функции [101], условия для эволюционного коэффициента получаем в следующем виде

$$\frac{\partial}{\partial z} e(z,t;\xi)\Big|_{z=0} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{2\ln\frac{a}{b}}} \frac{\mu_0}{\sqrt{\xi}} \frac{\partial}{\partial t} I(ct - z)\Big|_{z=0} \left[J_0(\xi b) - J_0(\xi a)\right];$$

$$\frac{\partial}{\partial t} e(z,t;\xi)\Big|_{z=0} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{2\ln\frac{a}{b}}} \frac{1}{\varepsilon_0 \sqrt{\xi}} \frac{\partial}{\partial z} I(ct - z)\Big|_{z=0} \left[J_0(\xi b) - J_0(\xi a)\right]. \tag{4.6}$$

Считаем, что в момент времени $t < 0$ в полупространстве $z \geq 0$ поле отсутствует, то есть

$$e(z,t;\xi) = 0, \ \frac{\partial}{\partial t} e(z,t;\xi) = 0, \ \frac{\partial}{\partial z} e(z,t;\xi) = 0 \ \text{при} \ t < 0.$$

Необходимо учесть, что полученное решение должно удовлетворять условию равенства нулю амплитуды продольной компоненты поля на бесконечности $e(\infty,t;\xi) = 0$ по аналогии с условием излучения. Так как задача рассматривается в приближении Кирхгофа, мы не можем одновременно удовлетворить всем условиям сопряжения полей. В частности, так как не учитывается наличие отраженной ТЕМ-волны и преобразование мод внутри волновода, решение будет удовлетворять второму равенству (4.6) и условию равенства нулю продольной компоненты поля при $z = 0$ только в начальный момент времени.

Сформулируем задачу в следующем виде

$$\left\{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \xi^2\right\} e(z,t;\xi) = 0; \tag{4.7}$$

граничные условия:

$$e(z,t;\xi)\big|_{z=\infty}=0\,;\quad \frac{\partial}{\partial z}e(z,t;\xi)\big|_{z=0}=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{2\ln\frac{a}{b}}}\,\frac{\mu_0\left[J_0(\xi b)-J_0(\xi a)\right]}{\sqrt{\xi}}\frac{\partial}{\partial t}I(ct-z)\big|_{z=0}\,,$$

начальные условия:

$$e(z,t;\xi)\big|_{t=0}=0\,,\ \ \frac{\partial}{\partial t}e(z,t;\xi)\big|_{t=0}=0\,.$$

Таким образом, дополняя уравнение Клейна-Гордона (4.7) граничными условиями по координате и начальными условиями по времени, мы завершили постановку задачи для нахождения эволюционных коэффициентов.

4.5. Решение задачи излучения из открытого конца коаксиального волновода, возбужденного ТЕМ-волной со ступенчатой зависимостью от времени

Будем решать задачу (4.7) относительно производной по продольной координате, для чего сделаем замену

$$B(z,t;\xi)=\frac{\partial}{\partial z}e(z,t;\xi).$$

Задача (4.7) относительно новой переменной $B(z,t;\xi)$ принимает вид

$$\left\{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\xi^2\right\}B(z,t;\xi)=0\,;$$

$$B(z,t;\xi)\big|_{z=0}=C(\xi)H(t),$$

где $C(\xi) = \sqrt{\dfrac{a^2 - b^2}{2\ln\dfrac{a}{b}}}\,\dfrac{c\mu_0\left[J_0(\xi b) - J_0(\xi a)\right]}{\sqrt{\xi}}$.

После нахождения решения данной задачи потребуем выполнения остальных граничных и начальных условий задачи (4.7).

В подразделе 4.1 было получено решение этой задачи, которое, согласно (4.2), имеет вид

$$B(z,t;\xi) = C(\xi)\left\{J_0\left(\xi\sqrt{c^2t^2 - z^2}\right) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{ct - z}{ct + z}\right)^n J_{2n}\left(\xi\sqrt{c^2t^2 - z^2}\right)\right\}.$$

Выражение в фигурных скобках удобно переписать с помощью функции Ломмеля двух переменных

$$\frac{\partial}{\partial z}e(z,t;\xi) = C(\xi)\left[U_0(W,Z) - U_2(W,Z)\right],$$

где $W = i\xi(ct - z)$, $Z = \xi\sqrt{c^2t^2 - z^2}$.

Проинтегрировав по z решение для $B(z,t;\xi)$, получаем решение для $e(z,t;\xi)$ в виде

$$e(z,t;\xi) = C(\xi)\frac{2i}{\xi}U_1(W,Z) + C_1(t;\xi),$$

где $C_1(t;\xi)$ – функция, подлежащая нахождению путём подстановки решения в граничное условие $e(z,t;\xi)\big|_{z=\infty} = 0$ задачи (4.7). Легко видеть, что $C_1(t;\xi) \equiv 0$ и решение принимает следующий вид

$$e(z,t;\xi)=\frac{-2}{\xi}C(\xi)\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{ct-z}{ct+z}\right)^{m+\frac{1}{2}}J_{2m+1}\left(\xi\sqrt{c^2t^2-z^2}\right), \qquad (4.8)$$

где $C(\xi)=\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{2\ln\dfrac{a}{b}}}\dfrac{c\mu_0\left[J_0(\xi b)-J_0(\xi a)\right]}{\sqrt{\xi}}$.

Для нахождения амплитуды магнитной компоненты поля в свободном пространстве необходимо вычислить производную по t от эволюционного коэффициента (4.8)

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}e(z,t;\xi)=-C(\xi)J_0\left(\xi\sqrt{c^2t^2-z^2}\right).$$

Подставляя полученный эволюционный коэффициент и его производные в (2.36) мы можем найти все компоненты поля в свободном пространстве.

При помощи формулы 2.12.42.2 [114]

$$\int_0^{\infty}dxJ_0(ax)J_0(bx)J_1(cx)=\begin{cases}\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}\dfrac{1}{c}, & \begin{Bmatrix}0<c<|a-b|\\ c>a+b\end{Bmatrix},\\ \dfrac{1}{\pi c}\arccos\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}, & |a-b|<c<a+b,\end{cases}$$

получаем точное выражение для амплитуды магнитного поля в свободном полупространстве

$$H_\varphi(\rho,\varphi,z,t)=\frac{-1}{\pi\rho}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{2\ln\dfrac{a}{b}}}\times$$

$$\times\left[\left\{\begin{matrix}\arccos\dfrac{c^2t^2-z^2+b^2-\rho^2}{2b\sqrt{c^2t^2-z^2}}\\ \pi\\ 0\end{matrix}\right\}-\quad\left\{\begin{matrix}\left|\sqrt{c^2t^2-z^2}-b\right|<\rho<\sqrt{c^2t^2-z^2}+b\\ \rho>\sqrt{c^2t^2-z^2}+b\\ 0<\rho<\left|\sqrt{c^2t^2-z^2}-b\right|\end{matrix}\right.\right. \tag{4.9}$$

$$\left.-\left\{\begin{matrix}\arccos\dfrac{c^2t^2-z^2+a^2-\rho^2}{2a\sqrt{c^2t^2-z^2}}\\ \pi\\ 0\end{matrix}\right\}\right]\quad\left\{\begin{matrix}\left|\sqrt{c^2t^2-z^2}-a\right|<\rho<\sqrt{c^2t^2-z^2}+a\\ \rho>\sqrt{c^2t^2-z^2}+a\\ 0<\rho<\left|\sqrt{c^2t^2-z^2}-a\right|\end{matrix}\right. .$$

Вычисление амплитуд продольной и поперечной электрических компонент поля усложняется наличием несобственных абсолютно сходящихся интегралов вида

$$I_1=\int\limits_0^\infty d\xi J_0(\xi r)J_0(\xi\rho)J_{2m+1}(\xi ct)\text{ и }I_2=\int\limits_0^\infty d\xi J_0(\xi r)J_1(\xi\rho)J_{2m}(\xi ct),$$

которые можно преобразовать при помощи замены двух первых функций Бесселя в I_1 интегралом Пуассона

$$J_n(z)=\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int\limits_0^\pi\cos(z\cos\theta)\sin^{2n}\theta d\theta,$$

а в I_2 – выражениями 21.8-16, 21.8-17 из [101]

$$J_0(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x\sin\theta)d\theta;\ J_1(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi\cos(\theta-x\sin\theta)d\theta.$$

Так как полученные тройные интегралы существуют, можно изменить порядок интегрирования и, используя формулу 2.12.15.2 [114],

$$I_{\nu}^{\left\{ s \atop c \right\}}(b,c)=\int_0^{\infty}\begin{Bmatrix}\sin bx\\ \cos bx\end{Bmatrix}J_{\nu}(cx)dx=$$

$$=\begin{cases}\left(c^2-b^2\right)^{-\frac{1}{2}}\begin{Bmatrix}\sin\left[\nu\arcsin\left(\dfrac{b}{c}\right)\right]\\ \cos\left[\nu\arcsin\left(\dfrac{b}{c}\right)\right]\end{Bmatrix}, & \left[0<b<c,\operatorname{Re}\nu>-1-\delta\right];\\ \dfrac{c^{\nu}}{\sqrt{b^2-c^2}}\left(b+\sqrt{b^2-c^2}\right)^{-\nu}\begin{Bmatrix}\cos\left(\nu\dfrac{\pi}{2}\right)\\ \sin\left(\nu\dfrac{\pi}{2}\right)\end{Bmatrix}, & \left[0<c<b,\operatorname{Re}\nu>-1-\delta\right],\end{cases}$$

избавиться от интеграла с бесконечным верхним пределом, заменив его на двойной интеграл с конечными пределами. В итоге выражения для амплитуд поперечной E_{ρ} и продольной E_z электрических компонент принимают вид

$$E_{\rho}(\rho,\varphi,z,t)=-\frac{c\mu_0}{\pi\rho}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{2\ln\dfrac{a}{b}}}\times$$

$$\times\left[\begin{cases}\arccos\dfrac{c^2t^2-z^2+b^2-\rho^2}{2b\sqrt{c^2t^2-z^2}}\\ \pi\\ 0\end{cases}\;\begin{cases}\left|\sqrt{c^2t^2-z^2}-b\right|<\rho<\sqrt{c^2t^2-z^2}+b\\ \rho>\sqrt{c^2t^2-z^2}+b\\ 0<\rho<\left|\sqrt{c^2t^2-z^2}-b\right|\end{cases}\right.-$$

$$\left.-\begin{cases}\arccos\dfrac{c^2t^2-z^2+a^2-\rho^2}{2a\sqrt{c^2t^2-z^2}}\\ \pi\\ 0\end{cases}\;\begin{cases}\left|\sqrt{c^2t^2-z^2}-a\right|<\rho<\sqrt{c^2t^2-z^2}+a\\ \rho>\sqrt{c^2t^2-z^2}+a\\ 0<\rho<\left|\sqrt{c^2t^2-z^2}-a\right|\end{cases}\right] \qquad (4.10)$$

$$-\frac{2c\mu_0}{\pi^2}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{2\ln\frac{a}{b}}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{ct-z}{ct+z}\right)^n \times$$

$$\times\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta' \Big\{\cos\theta\Big[I_{2n}^{c}(\rho\sin\theta - b\sin\theta',\tau) + I_{2n}^{c}(\rho\sin\theta + b\sin\theta',\tau) -$$
$$- I_{2n}^{c}(\rho\sin\theta - a\sin\theta',\tau) - I_{2n}^{c}(\rho\sin\theta + a\sin\theta',\tau)\Big] +$$
$$+ \sin\theta\Big[I_{2n}^{s}(\rho\sin\theta - b\sin\theta',\tau) + I_{2n}^{s}(\rho\sin\theta + b\sin\theta',\tau) -$$
$$- I_{2n}^{s}(\rho\sin\theta - a\sin\theta',\tau) - I_{2n}^{s}(\rho\sin\theta + a\sin\theta',\tau)\Big]\Big\},$$

где $\tau = \sqrt{c^2t^2 - z^2}$,

$$I_{2n}^{\left\{\begin{smallmatrix} s \\ c \end{smallmatrix}\right\}}(d,\tau) = \begin{cases} \left(\tau^2 - d^2\right)^{-\frac{1}{2}} \begin{Bmatrix} \operatorname{sign}(d)\sin\left[2n\arcsin\left(\frac{|d|}{\tau}\right)\right] \\ \cos\left[2n\arcsin\left(\frac{|d|}{\tau}\right)\right] \end{Bmatrix}, & [0<|d|<\tau]; \\ \operatorname{sign}(d)\frac{\tau^{2n}}{\sqrt{d^2-\tau^2}}\left(|d| + \sqrt{d^2-\tau^2}\right)^{-2n} \begin{Bmatrix} (-1)^n \\ 0 \end{Bmatrix}, & [0<\tau<|d|], \end{cases}$$

$$\operatorname{sign}(d) = \begin{cases} 1, & d>0 \\ 0, & d=0 \\ -1, & d<0 \end{cases},$$

$$E_z(\rho,\varphi,z,t) = -\frac{2c\mu_0}{\pi(ct-z)}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{2\ln\frac{a}{b}}} \times$$

$$\times\left[\begin{Bmatrix} \arccos\frac{-c^2t^2+z^2+b^2+\rho^2}{2b\rho} \\ \pi \\ 0 \end{Bmatrix} - \qquad \begin{Bmatrix} |b-\rho| < \sqrt{c^2t^2-z^2} < \rho+b \\ \sqrt{c^2t^2-z^2} > \rho + b \\ 0 < \sqrt{c^2t^2-z^2} < |\rho - b| \end{Bmatrix}\right. \tag{4.11}$$