

Думин Александр Николаевич
Излучение сверхширокополосных сигналов
Специальный курс

Конспект лекций

1. Введение

1.1. Определения

Сверхширокополосный сигнал – сигнал, у которого величина

$$\eta = \frac{f_{\max} - f_{\min}}{f_{\max} + f_{\min}},$$

где f_{\max} – максимальная частота спектра сигнала,
 f_{\min} – минимальная частота спектра,

принимает значения в пределах $0,25 < \eta < 1$ (согласно IEEE P1672 TM Ultrawideband Radar Definitions Draft Version 1.5, April 4, 2006 Prepared by the Ultrawideband Radar Working Group of the IEEE Aerospace and Electronic Systems Society UWB Radar Committee).

Узкополосный сигнал: у которого $\eta \ll 1$ (обычно меньше 0,1).

Иногда пользуются понятием широкополосный сигнал. Под ним понимают сигнал с относительной шириной спектра, занимающей промежуточное положение между описанными выше классами сигналов, т.е.

$$0,1 < \eta < 0,25$$

Физическая основа для введения такой классификации состоит в известном из теории длинных линий факте, что изменение частоты в два раза ведет к кардинальному изменению электрических свойств отрезка проводника, например, закороченная на конце длинная линия длиной $\frac{1}{4}\lambda$ обладает на заданной частоте свойствами изолятора, тогда как увеличение частоты уже в два раза превращает данную структуру в проводник. Отсюда следует, что распространение сверхширокополосных сигналов в обычных электродинамических структурах, обладающих подобными резонансными свойствами, практически невозможно.

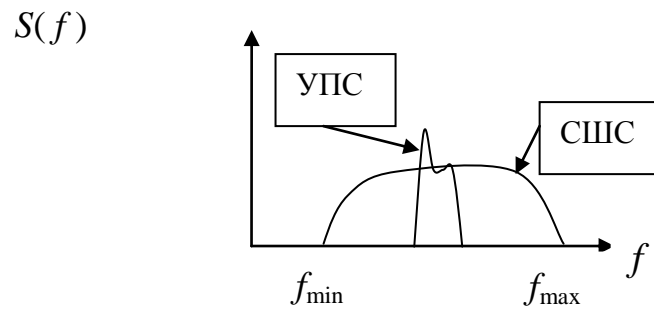
Видеосигнал – сигнал без несущей.

Нестационарный сигнал – сигнал с произвольной зависимостью от времени, даже физически нереализуемой. Противоположность – стационарный сигнал – у которого форма не меняется, т.е. обладает периодичностью. Обычно он описывает установившийся процесс. Нестационарный сигнал описывает неуставившийся процесс, нечто быстропротекающее.

Нестационарные сигналы имеют сверхширокий или даже бесконечный спектр, и поэтому могут переносить огромное количество информации, т.к. пропускная способность канала связи пропорционально ширине спектра сигнала (теорема Шеннона-Хартли):

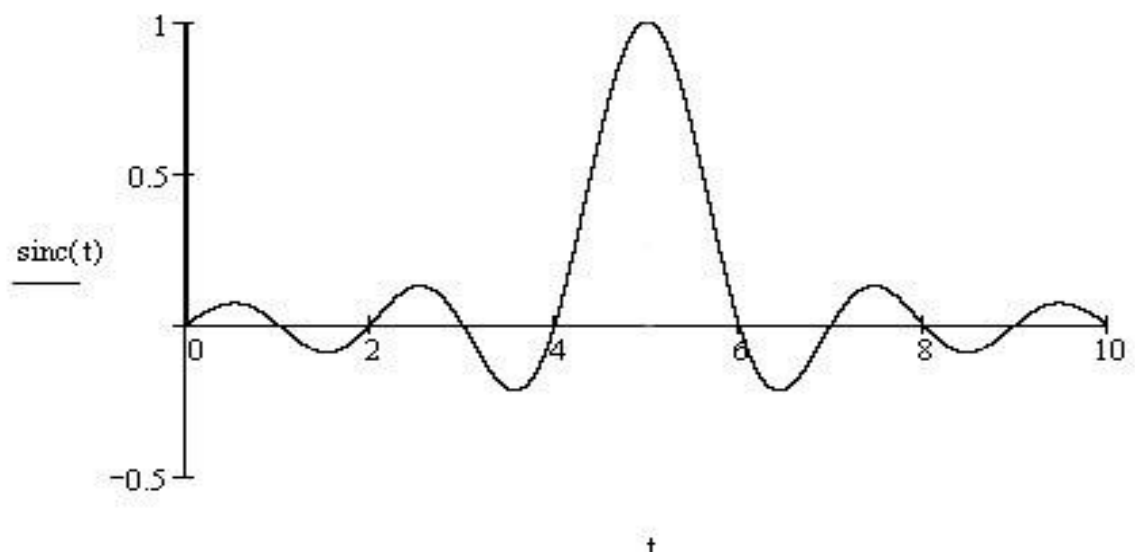
$$C = \Delta f \lg \left(1 + \frac{P_{sig}}{P_{noise}} \right).$$

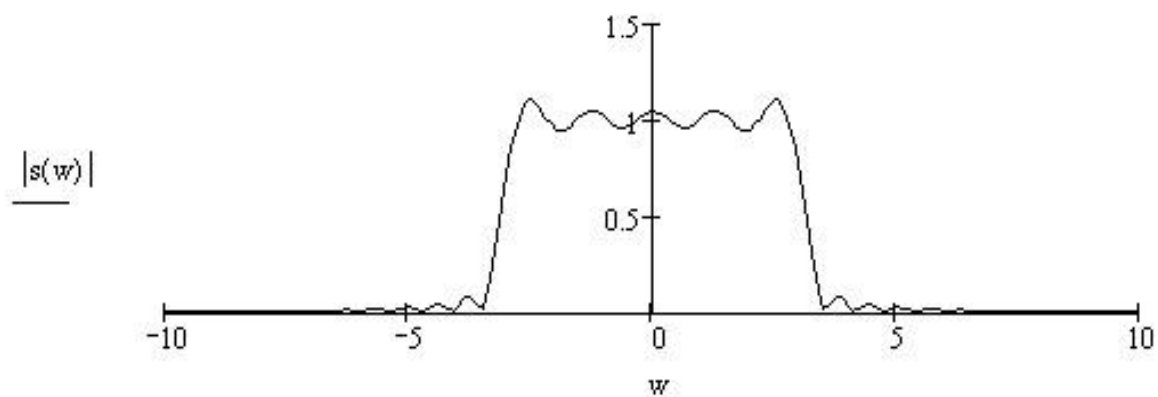
Примеры спектров сигнала



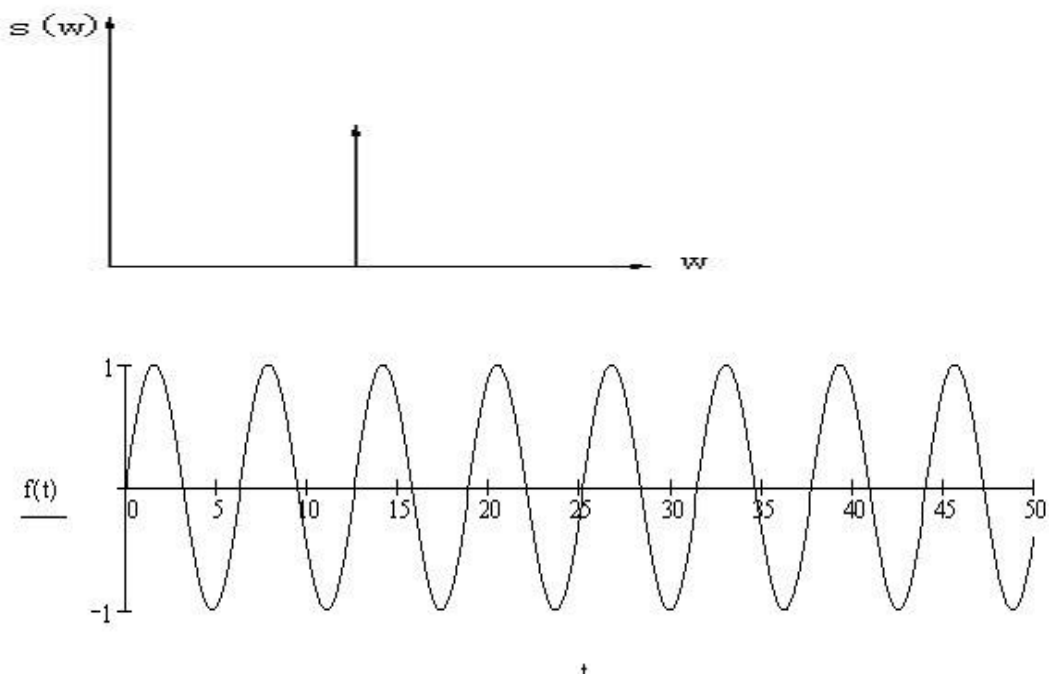
Простейшие примеры сигналов

Сверхширокополосный сигнал вида $\frac{\sin t}{t}$ и его спектр:



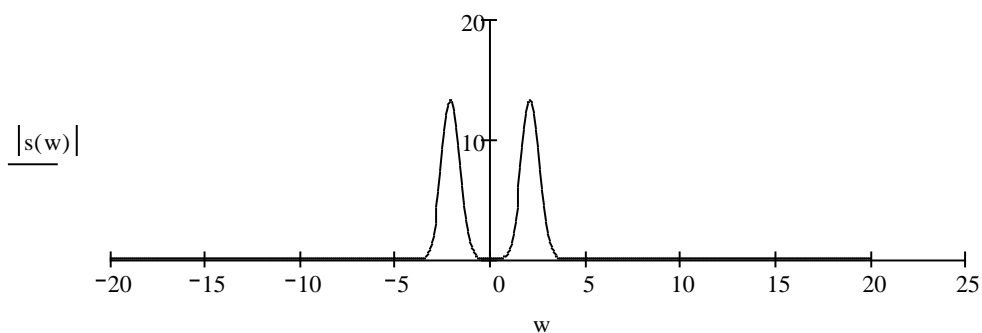
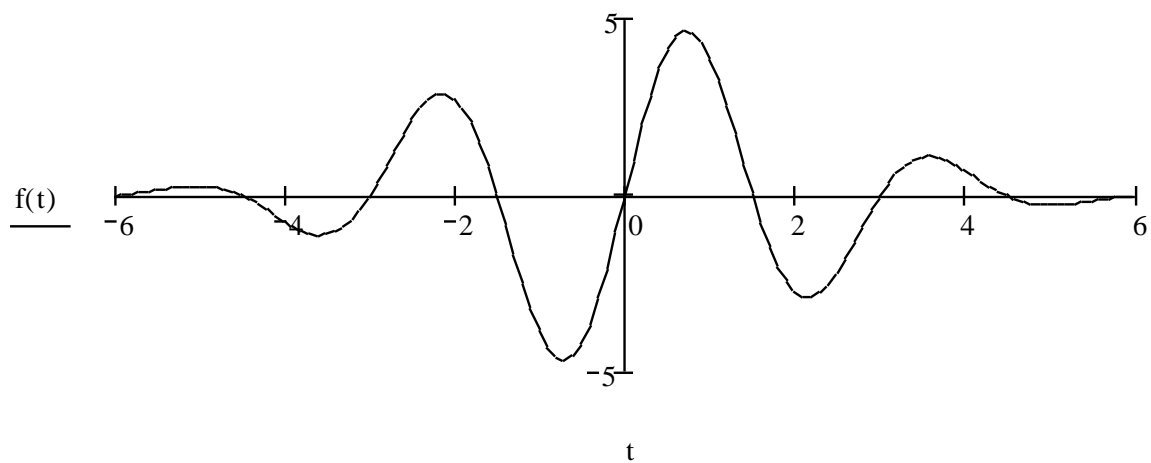


Идеальный гармонический сигнал, не содержащий информации:

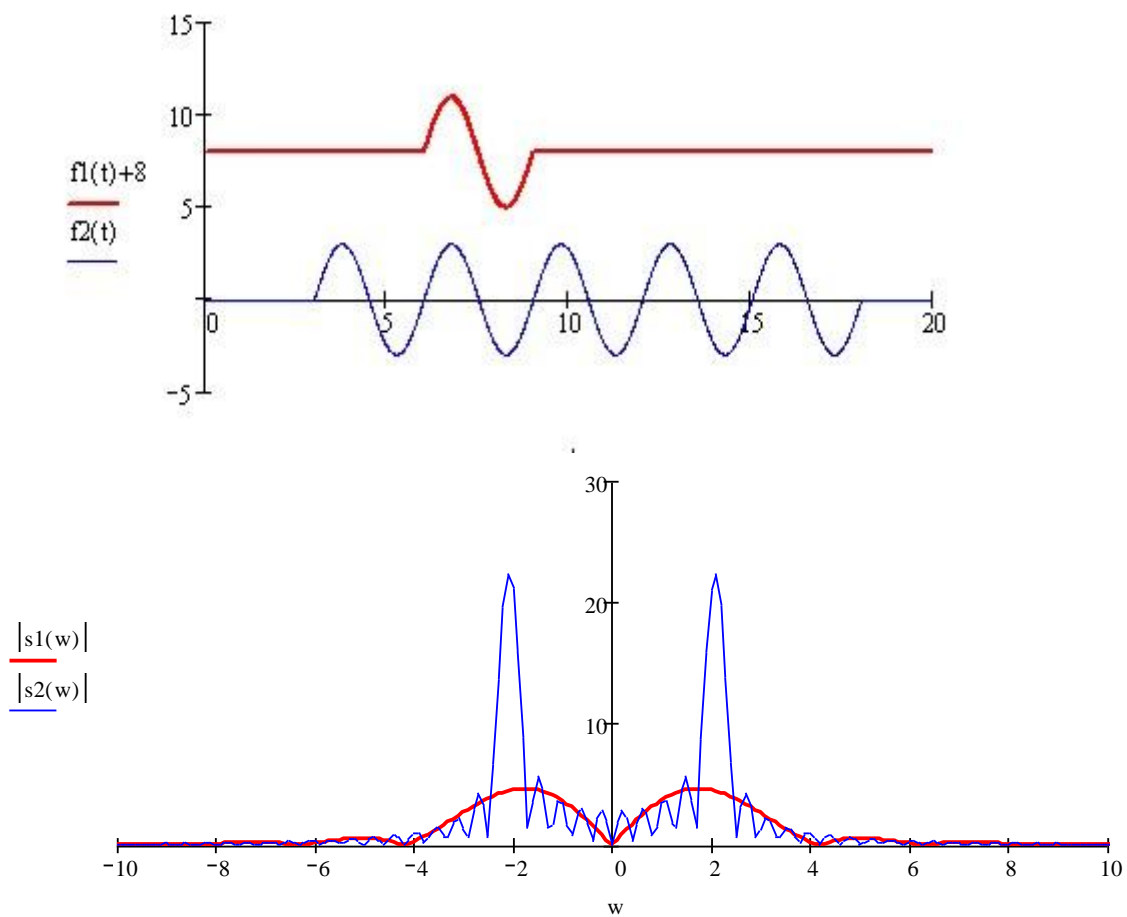


Радиосигнал с гауссовой огибающей:

$$f(t) := A \cdot e^{\frac{-t^2}{T^2}} \cdot \sin(w_0 \cdot t)$$



Радиосигнал с прямоугольной огибающей разной длительности:



1.2. Области использования СШС

Области, где не обойтись без использования СШС:

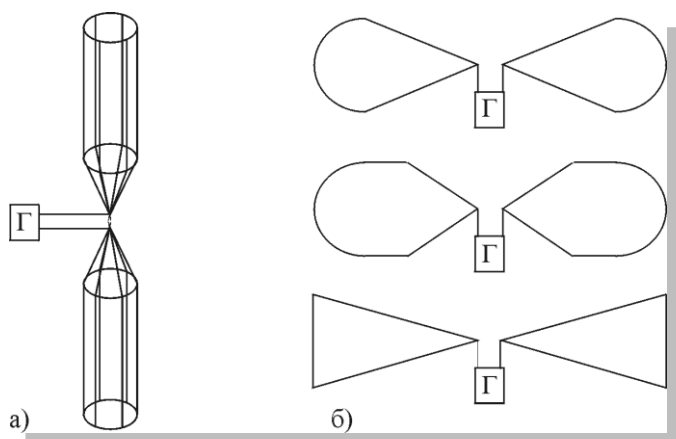
- Связь с объектами, погруженными в проводящую среду;
- Радиолокация (интроскопия) поглощающих сред;
- Сверхточная радиолокация (с высоким разрешением, объектов с поглощающими покрытиями);
- Увеличение скорости передачи информации, в том числе через поглощающие среды;
- Передача секретной информации в заданном направлении.

Экзотические, неисследованные, спорные области применения СШС:

- Формирование сверхнаправленных пучков (пакетов): ЭМ снаряды, ЭМ пули, ЭМ брызги, бесселевы лучи и т.д.;
- Активация воды, изменение ее диэлектрических свойств;
- Очистка воды, в т.ч. от бактерий;
- Получение высокопрочного гипса;
- Повышение коррозионной стойкости (облучение металла в электролитах Zn, Fe, Ni);
- Очистка нефтепродуктов от серы;
- Облучение расплавов цветных металлов с целью упрочнения, уплотнения кристаллической решетки;
- Термоядерные реакции под воздействием СШС.

1.3. Излучатели несинусоидальных сигналов

- Толстый вибратор (симметричный, несимметричный);



- Щелевые антенны;

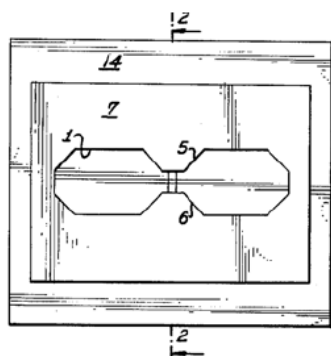


Figure 14: Marié's wide band slot antenna (1962).

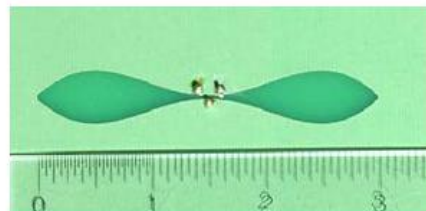
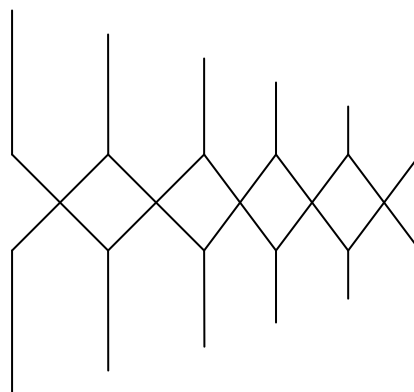
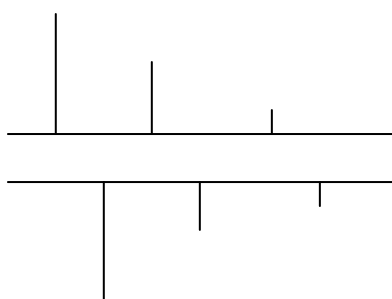
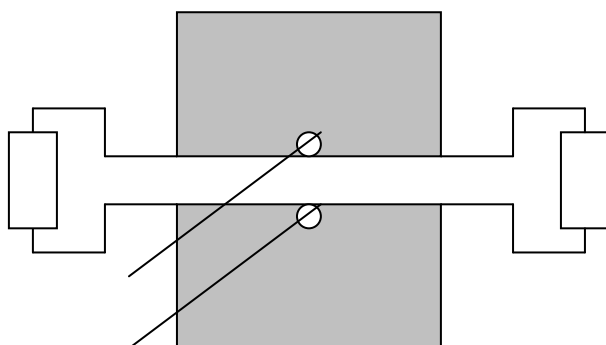


Figure 16: Barnes's UWB slot antenna (2000).

- Логопериодическая антенна;

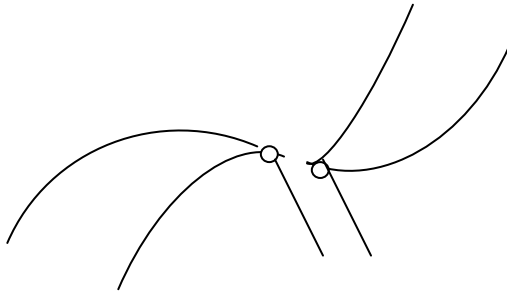


- Комбинированные щелевые антенны;



- Логарифмическая спиральная антенна:

I. $\rho_1 = \rho_0 e^a$, $\rho_2 = \rho_0 e^{a(\varphi - \delta)} = c \rho_1$;
 II. $\rho_3 = \rho_0 e^{a(\varphi - \pi)}$, $\rho_4 = \rho_0 e^{a(\varphi - \pi - \delta)} = c \rho_3$.



- Рупорные антенны.

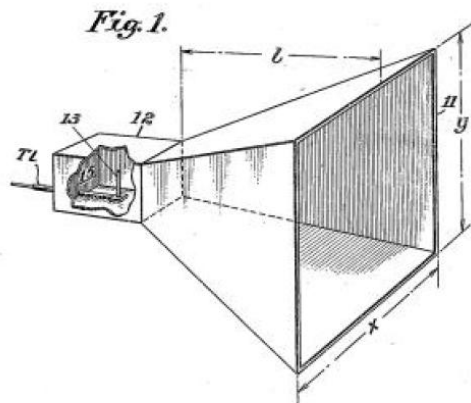


Figure 10: Katzin's rectangular horn (1946).

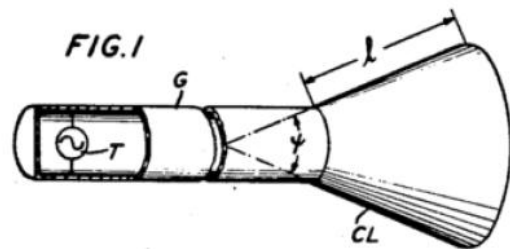


Figure 9: King's conical horn (1942).

- Антенна Хармута (антенна большого тока)

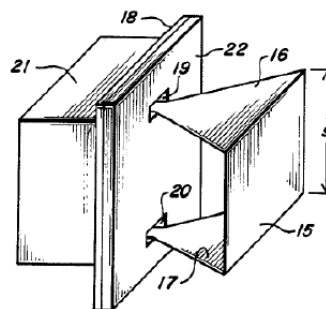
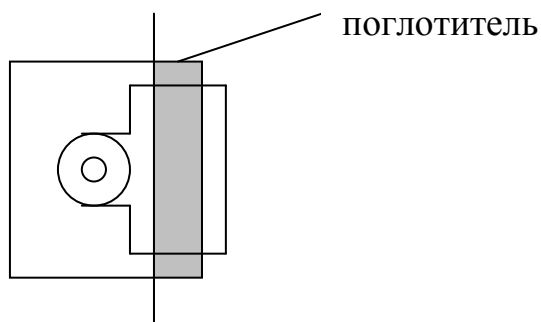
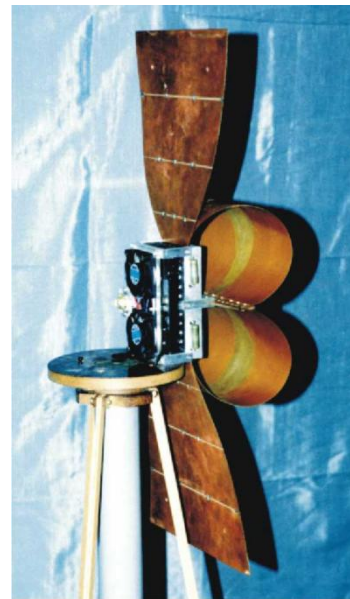
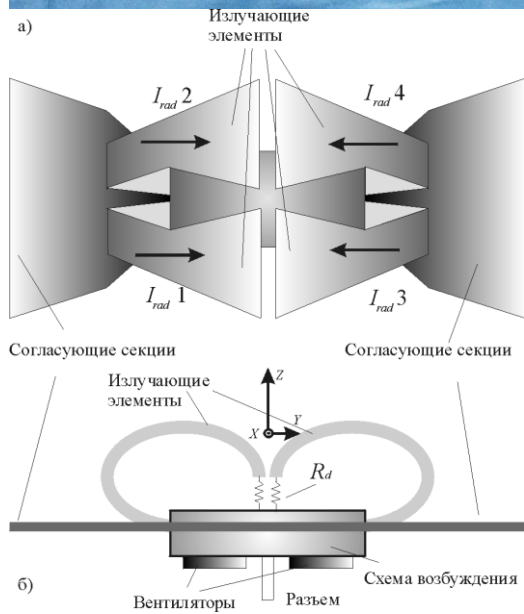
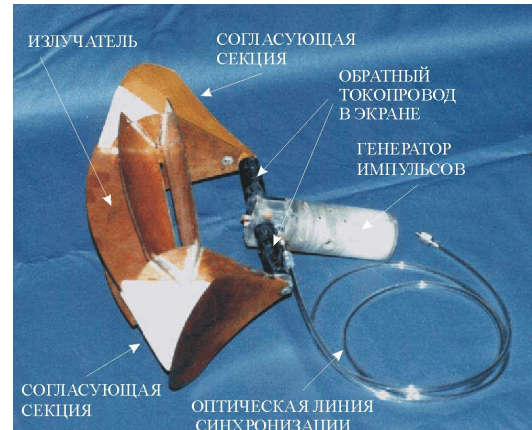
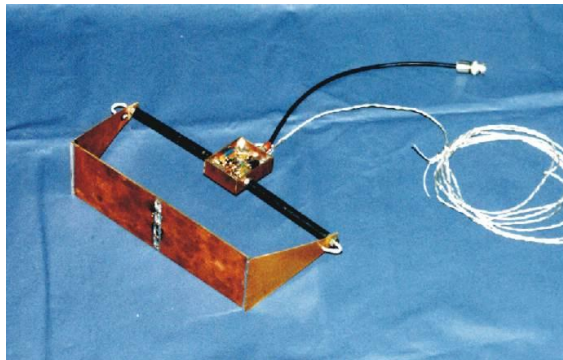
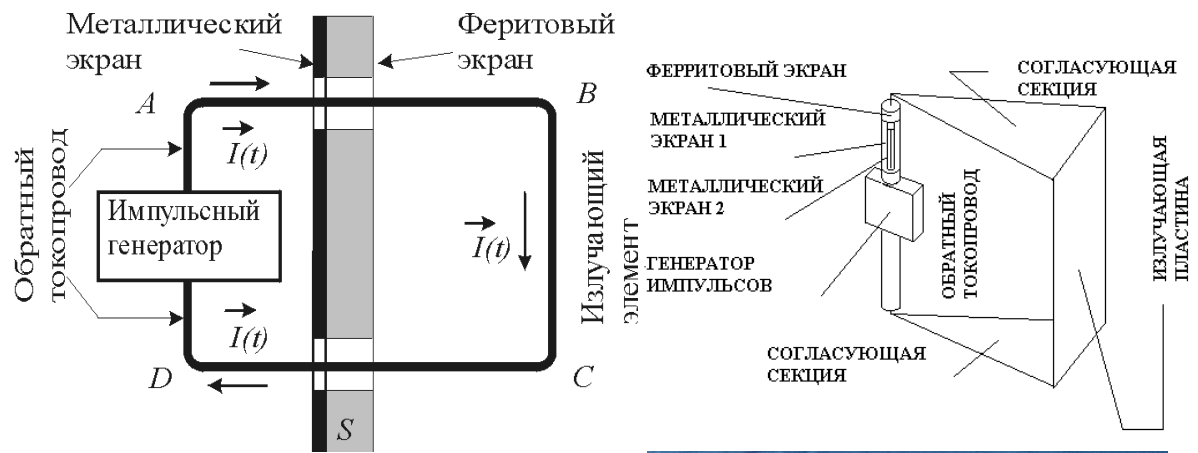
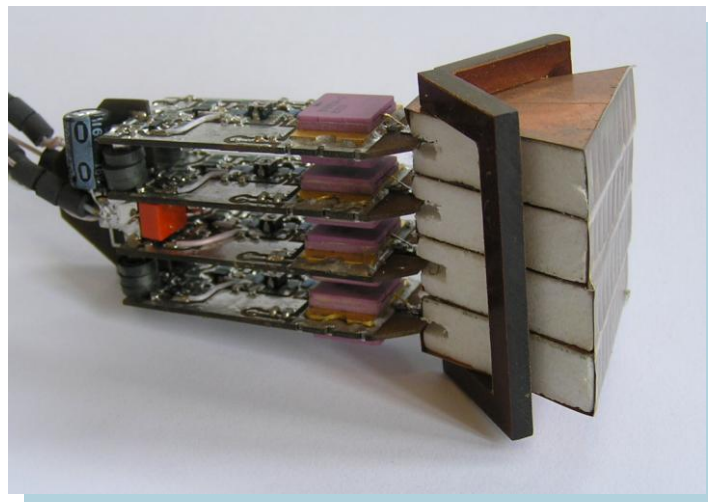


Figure 15: Harman's large current radiator (1985).



Решетка АБТ



- Биконический вибратор

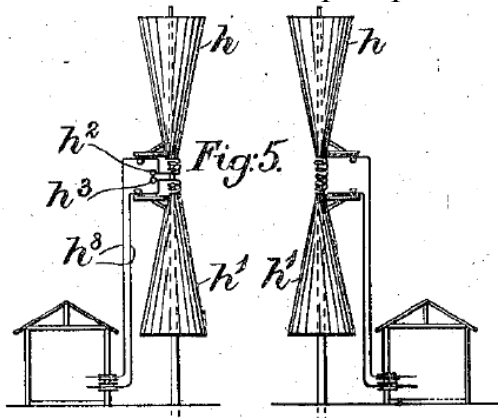


Figure 2: Lodge's biconical antennas (1898)

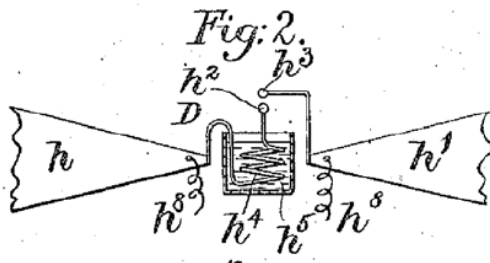


Figure 1: Lodge preferred antennas consisting of triangular "capacity areas," a clear precursor to the "bow tie" antenna (1898).

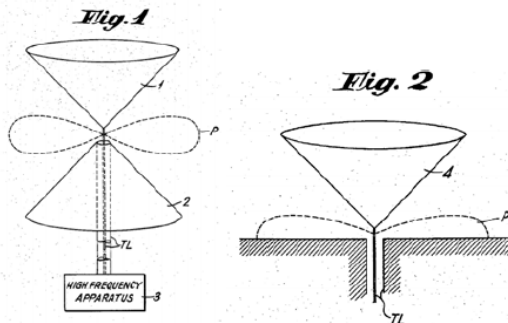


Figure 3a (left): Carter's biconical antenna (1939)
Figure 3b (right): Carter's conical monopole (1939).

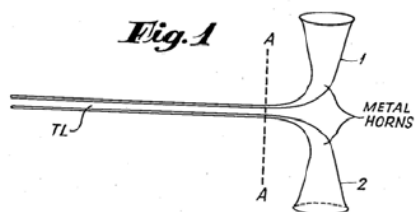
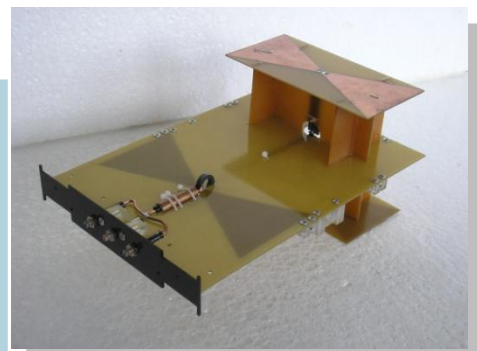


Figure 4: Carter's improved match biconical (1939)



Сферический диполь

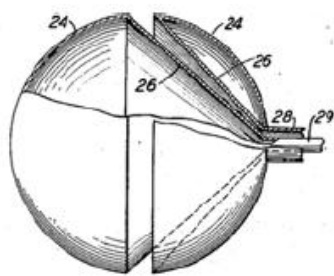


Figure 5: Schelkunoff's spherical dipole (1940)

Всенаправленный коаксиальный рупор

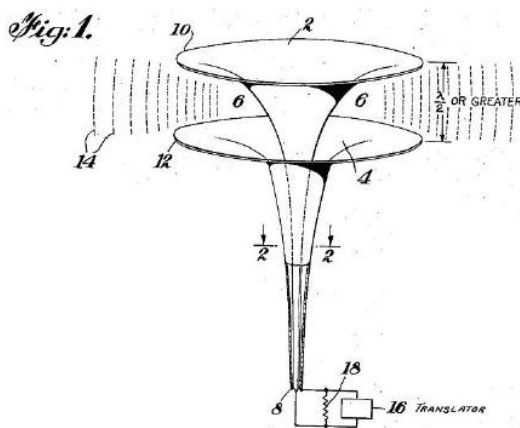


Figure 7: Brillouin' omni-directional coaxial horn (1948).

Направленный коаксиальный рупор

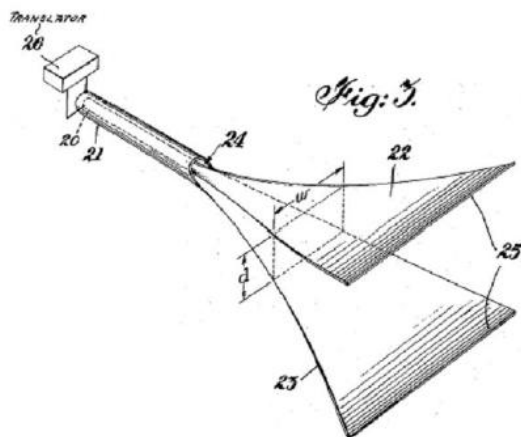


Figure 8: Brillouin's directional coaxial horn (1948).

Бриллиантовый диполь

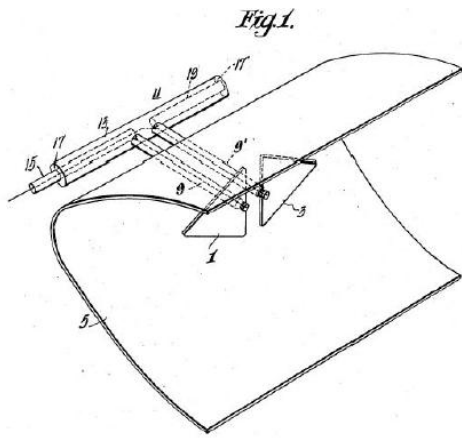


Figure 11: Master's diamond dipole (1947).

Диполи

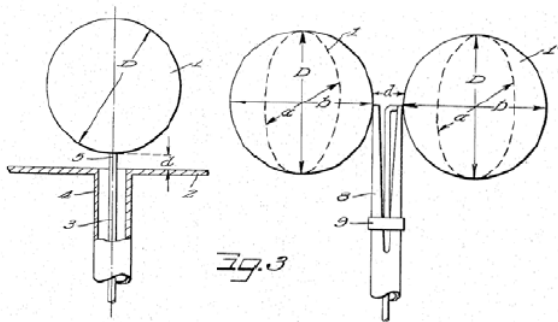


Figure 12a (left): Stohr's ellipsoidal monopole(1968).
Figure 12b (right): Stohr's ellipsoidal dipole(1968).

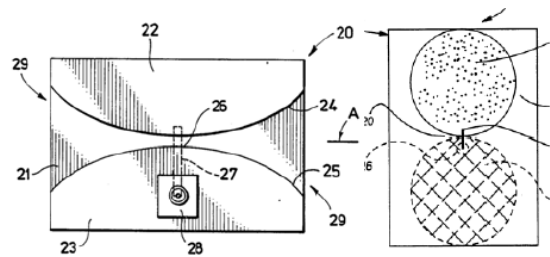
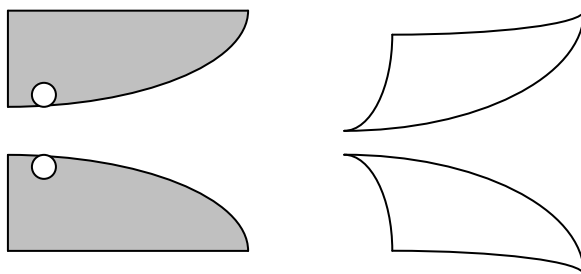


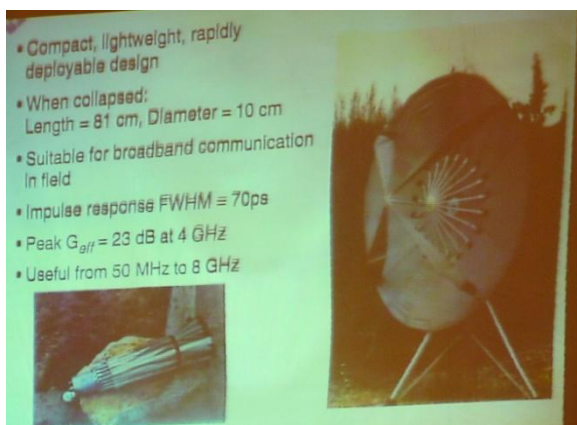
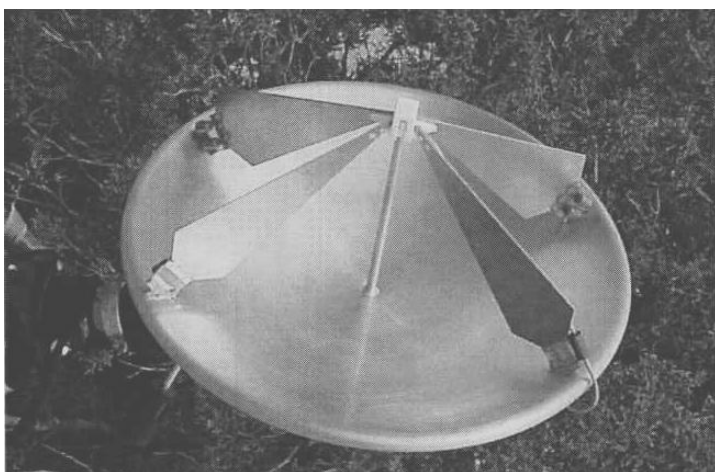
Figure 13a (left): Lalezari et al's broadband notch antenna (1989).
Figure 13b (right): Thomas et al's circular element dipole(1994).

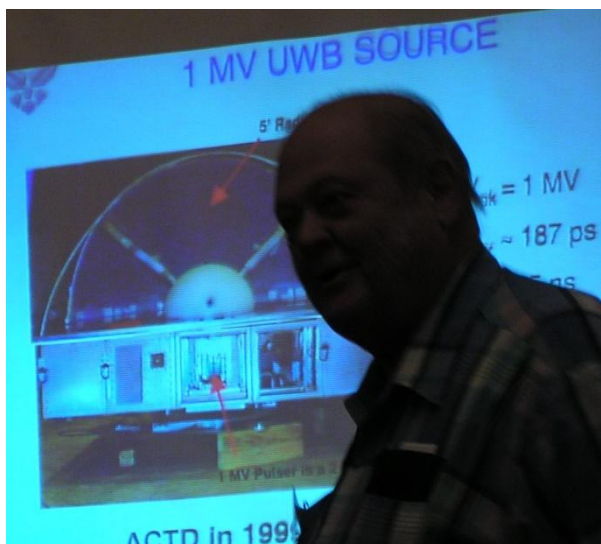
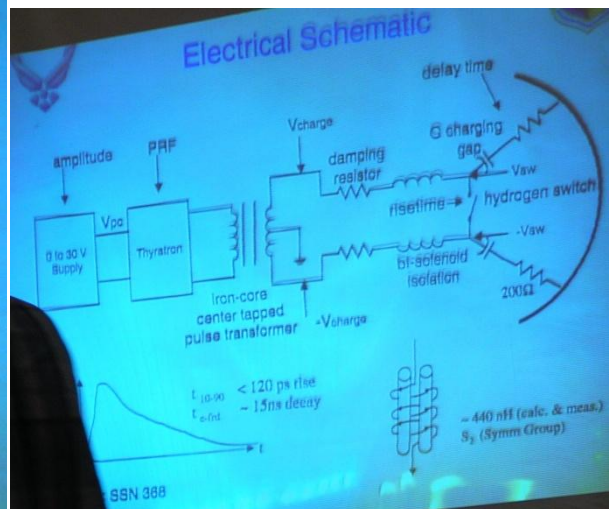
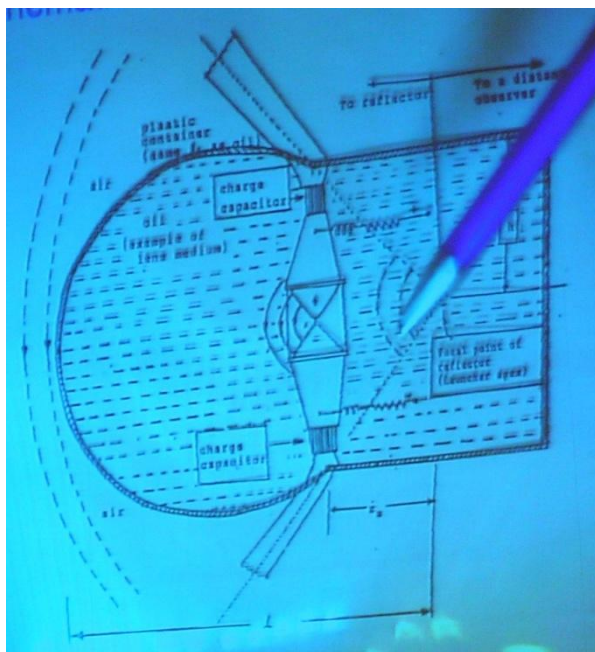
- ТЕМ-рупор(плоский и объемный)





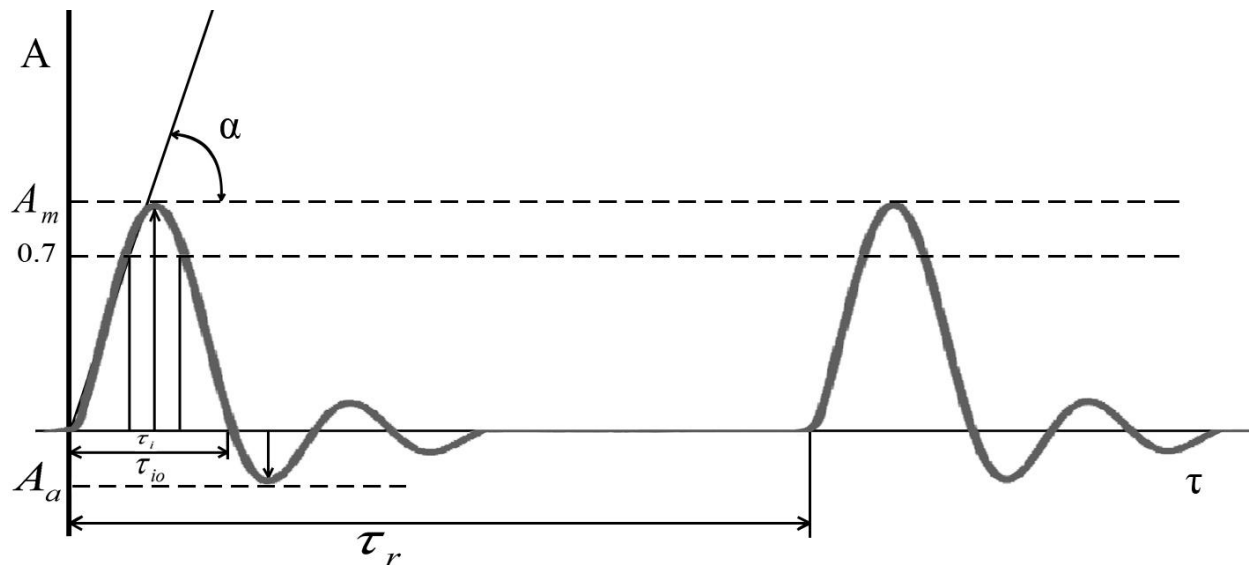
- Антенна для излучения импульсов (IRA)





1.4. Характеристики СШС

Рассмотрим характеристики сверхширокополосных сигналов на примере:



Изображение импульсов

Из рисунка следует:

- 1) τ_i – длительность импульса; (обычно измеряется в наносекундах или в пространственных размерах импульса, удобных для оценки его разрешающей способности, 1нс соответствует 30см);
- τ_{i0} – длительность импульса по нулевым значениям;

- 2) α – крутизна фронта импульса (чем круче фронт, тем лучше);
Для напряжений задается в В/с
- 3) A_m – максимальная амплитуда импульса;
- 4) A_a – амплитуда послеимпульсных колебаний;
- 5) $\frac{\tau_r}{\tau_i}$ – скважность при подаче серии импульсов (частота стробирования),
 τ_r – период подачи импульсов.

1.5. Характеристики излучателей

1.5.1. Диаграмма направленности и другие характеристики направленности

- ДН по пиковой амплитуде:

$$F_1(\varphi) = \frac{U_A(\varphi, t = t_{\max})}{U_A(\varphi = \varphi_{\max}, t = t_{\max})};$$

- ДН по пиковой мощности:

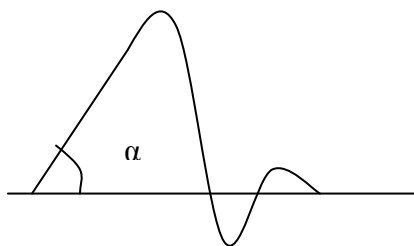
$$F_2(\varphi) = \frac{P(\varphi, t = t_{\max})}{P(\varphi = \varphi_{\max}, t = t_{\max})} = F_1^2(\varphi);$$

- ДН по энергии:

$$F_3(\varphi) = \frac{\int_0^{\tau} U_A^2(t, \varphi) dt}{\int_0^{\tau} U_A^2(t, \varphi = \varphi_{\max}) dt};$$

- ДН по максимальной крутизне фронта:

$$F_4(\varphi) = \frac{\alpha_{\max}(\varphi)}{\alpha_{\max}(\varphi_{\max})};$$



- Пространственно-временная импульсная характеристика:

$$U_{\text{ВХ}} = \delta(t) \uparrow \boxed{} \uparrow U_{\text{ВЫХ}} = h(t)$$

$$K(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt$$

-

1) $h_{\text{radiation}}(t, \vec{r}) = E(t, \vec{r})$, при возбуждении антенны током $I_{\text{input}} = \delta(t)$ – в режиме излучения;

2) $h_{\text{reception}}(t, \vec{r}) = I_{\text{output}}(t)$, при падении из точки \vec{r} волны с зависимостью от времени $E_{\text{incident}}(t, \vec{r}) = \delta(t)$ – в режиме приема.

3) $h(t, \vec{r}) = I_{\text{output1}}(t)$, при $I_{\text{input2}}(t) = \delta(t)$, сквозная импульсная характеристика, через две антенны, одна из которых приемная, вторая – передающая, причем одна из этих антенн – с известными стандартными характеристиками. Зная эту характеристику, мы можем получить сигнал на выходе антенны при возбуждении стандартной антенны произвольным входным сигналом:

$$I_{\text{output1}}(t, \vec{r}) = \int_0^t I_{\text{input2}}(\tau) h(t - \tau, \vec{r}) d\tau.$$

Только последняя характеристика дает исчерпывающую характеристику антенны как во временной, так и в частотной области.

Знание импульсной характеристики позволяет найти частотную передаточную функцию системы:

$$K(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

И наоборот, импульсную характеристику можно найти, зная комплексную передаточную характеристику системы:

$$h(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega,$$

однако получение импульсной характеристики с удовлетворительной точностью по данной формуле требует знания амплитудно-частотной и фазочастотной характеристик системы в большом количестве точек и в широком диапазоне частот. Хороша же импульсная характеристика тем, что помогает получить токи и напряжения на выходе антенны при возбуждении ее сигналом любой временной зависимости согласно формуле интеграла Дюамеля

$$S_{\text{output}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{input}}(t) h(t - \tau) d\tau.$$

1.5.2. Коэффициент направленного действия

- КНД – увеличение входной мощности, подаваемой на антенну при замене направленной антенны на ненаправленную, для обеспечения того же уровня сигнала в точке наблюдения:

- КНД во временной области есть функция времени, поэтому можно говорить либо о его максимальном значении в какой-то момент времени:

$$D_{\text{max}} = \frac{P_{\Sigma 0}}{P_{\Sigma}}, \text{ где } P_{\Sigma} = A \int_{\Omega} F^2(\theta, \varphi) d\Omega, P_{\Sigma 0} = 4\pi A, \text{ тогда}$$

$$D_{\max} = \frac{4\pi}{\int_{\Omega} F^2(\theta, \varphi) d\Omega}.$$

Либо определять КНД через энергию импульса, что более правильно, и наиболее широко применяется:

$$D = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |E(t, \theta_{\max}, \varphi_{\max}, r_{FZ})|^2 dt}{\frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} r_{FZ}^2 \sin \varphi d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} |E(t, \theta, \varphi, r_{FZ})|^2 dt d\Omega}.$$

Ни то, ни другое определение не избавлено от недостатков. Возьмем за основу последнее определение КНД [Шанц].

Коэффициент направленного действия (D) - это соотношение, количества излучаемой энергии в заданном направлении, к среднему значению этой же энергии:

$$D = \frac{\text{энергия}_{\max}}{\text{энергия}_{\text{ср.}}} = \frac{|P(\theta, \phi)|_{\max}}{\frac{1}{4\pi} \oint_s |P(\theta, \phi)| d\Omega} = \frac{1}{\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_0^{\pi} |P(\theta, \phi)| \sin \theta d\theta d\phi}$$

Коэффициент направленного действия изотропной антенны равен $D = 1$. Для точечного диполя, направленность равна $D = 1,5$. В таблице 2.1 предоставлены КНД для нескольких типов антенн.

Также существует соотношения между КНД и размерностью антенны. Малый коэффициент усиления или всенаправленность антенны, как правило, составляет около четверти длины волны или меньше. КНД или высокий коэффициент усиления антенны будет увеличиваться – обычно на несколько длин волн и более. Основные соотношения между размером антенны, направленностью и пропускной способности являются предметом обсуждения следующей главы.

Диаграмма направленности, КНД, апертура и ширина ДН для некоторых типов антенн

Антенна	Диаграмма Направленности $[P(\theta, \phi)]$	КНД (D)	Апертура $[\Lambda (\lambda^2)]$	Ширина диаграммы направленности
Изотропный диполь	1	1,00 (0,00 дБ)	0,0796	изотропная
Точечный диполь	$\sin^2 \theta$	1,50 (1,76 дБ)	0,119	θ : 45°-135° ϕ : все
$\lambda/2$ диполь	$\frac{\cos^2 \theta \left(\frac{\pi}{2} \cos^2 \theta \right)}{\sin^2 \theta}$	1,64(2,15 дБ)	0,131	θ : 51°-129° ϕ : все
Диполь с плоским	$\sin^2 \theta \cos^2 \frac{\phi}{2}$	3,00(4,77 дБ)	0,239	θ : 45°-135° ϕ : -90° - 90°

рефлектором				
Секториальная или остро-направленная антенна	$1 \begin{cases} \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \\ \phi_1 \leq \phi \leq \phi_2 \end{cases}$ $0 \quad \text{другое}$	$-\frac{32,400}{(\theta_2 - \theta_1)(\phi_2 - \phi_1)}$	$-\frac{2,580}{(\theta_2 - \theta_1)(\phi_2 - \phi_1)}$	$\theta: \theta_1 - \theta_2$ $\phi: \phi_1 - \phi_2$

Коэффициент направленного действия и коэффициент усиление связаны между собой "коэффициентом полезного действия" (η). Коэффициент полезного действия является отношением излучаемой мощности ($P_{\text{вых.}}$) к входной мощности ($P_{\text{вход.}}$)

$$\eta = \frac{P_{\text{вых.}}}{P_{\text{вход.}}} = \frac{G}{D}$$

Для идеальной или антенны с большой эффективностью ($\eta \cong 1$), КУ идентичен КНД ($G = D$). Усиления и направленность тесно связаны. Чем больше КНД антенны, тем больше энергии она концентрирует в заданном направлении, и тем выше КУ. Также, усиление, как правило, интерпретируется как пик, или максимум, коэффициента усиления антенны. Иногда его также называют "прицельным усилением". КУ обычно выражает отношение усиления заданной антенны к усилению изотропной антенны в децибелах

$$G_{\text{дб}} = 10 \log G$$

Таким образом, идеальная ($\eta = 1$) изотропная антенна имеет единичный коэффициент усиления. Идеальный маленький диполь имеет максимальный коэффициент усиления $G = D = 1,5$ и $G_{\text{дб}} = 1,76$ дБ. А маленький диполь с КПД 50% (-3.00дБ), будет иметь максимальный коэффициент усиления около $1,76 \text{ дБ} - 3,00 \text{ дБ} = -1,24 \text{ дБ}$.

Для изотропной антенны с КУ $G=1$, передаваемая мощность (P_{TX}) равномерно распределена по площади сферической оболочки в определенном радиусе (r) от антенны. Таким образом, плотность потока мощности (S):

$$S = \frac{P_{\text{TX}}}{4\pi r^2}.$$

Для неизотропной антенны с коэффициентом усиления $G_{\text{TX}} \neq 1$ плотность потока мощности равна:

$$S = \frac{P_{\text{TX}} G_{\text{TX}}}{4\pi r^2}$$

И наконец, эффективная изотропно излучаемая мощность (ЭИИМ) определяется как:

$$\text{ЭИИМ} = P_{TX} G_{TX}.$$

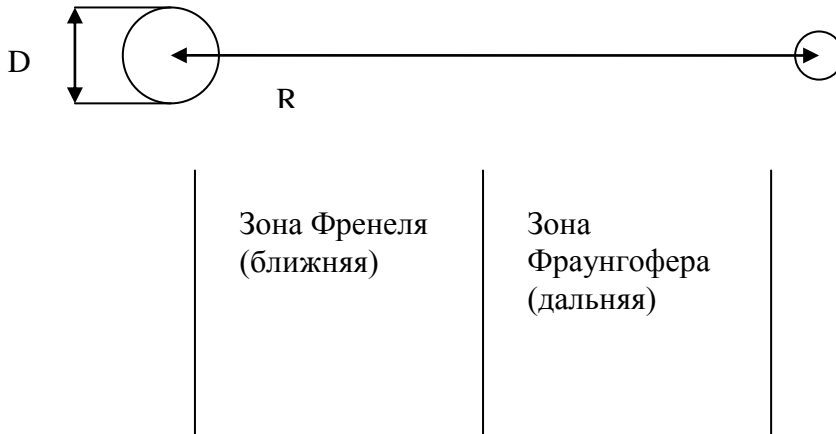
где G_{TX} - максимум излучения передающей антенны.

2. Зоны излучения

2.1. Зоны излучения излучателей синусоидальных волн

Для дифракции света была введена зона Френеля:

$$R < \frac{4D^2}{\lambda}$$



Аналогично, в случае монохроматических ЭМВ, вводятся зоны излучения.

Используем выражение для векторного потенциала, через который можно всегда определить компоненты электромагнитного поля:

$$\vec{A}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{I}(x', y', z') \frac{e^{-ikr}}{r} dV.$$

Разложим расстояние r от произвольной точки излучателя до точки наблюдения по малому параметру, каковым является расстояние R' от некоторого условного центра излучателя до любой его точки, которое гораздо меньше, чем расстояние R от этого центра до точки наблюдения:

$$r = \sqrt{R^2 + (R')^2 - 2RR' \cos \alpha} \cong R \left[1 - \frac{R'}{R} \cos \alpha + \frac{(R')^2}{2R^2} (1 - \cos^2 \alpha) + \frac{(R')^3}{2R^3} \cos \alpha \dots \right],$$

используя известное разложение в ряд Тейлора

$$\sqrt{1-x} = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} + \frac{f''(0)}{2!} + \dots = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \dots, \text{ где } x = \frac{2R'}{R} \cos \alpha - \left(\frac{R'}{R}\right)^2 -$$

малая величина.

Упрощаем выражение для r с той или иной точностью.

- Критерий дальней зоны, когда считаем, что

1) $r=R$ – в знаменателе

2) $r = R - R' \cos \alpha$ – в показателе экспоненты (учитываем 2 члена ряда).

Тогда возникают две ошибки:

1) по амплитуде – $\frac{R'}{R} \cos \alpha$,

2) по фазе – $\frac{k(R')^2 \sin^2 \alpha}{2R}$.

Если $R' \sim \frac{D}{2}$, где D – максимальный размер антенны, то максимальная фазовая ошибка – $\frac{kD^2}{8R}$.

Пусть абсолютная фазовая ошибка для определения дальней зоны равна $\frac{\pi}{8}$,

$$\text{тогда } \frac{kD^2}{8R} = \frac{\pi}{8} \Rightarrow R_{FZ} > \frac{2D^2}{\lambda}$$

Отсюда получен критерий дальней зоны согласно Содину для СШП антенн:

$$R_{FZ} = \frac{2D^2}{\tau}, \text{ где } \tau \text{ - эффективная пространственная длительность импульса.}$$

- Критерий промежуточной области:

1) $r=R$ – в знаменателе

2) в показателе экспоненты учитывают 3 члена ряда:

$$r = R - R' \cos \alpha + (R')^2 (1 - \cos^2 \alpha) / 2R$$

3) при дифференцировании отбрасываются члены ряда с зависимостью $1/R^2$, $1/R^3$ и промежуточная область находится из условия

$$\frac{D}{4} + \frac{D}{2} \left(\frac{D}{\lambda} \right)^{1/3} \leq R_{IZ} \leq \frac{2D^2}{\lambda}.$$

Сазонов Антенны и устройства СВЧ. С.189 1988

- Тогда ближняя зона находится в области

$$R_{NFZ} \leq \frac{D}{4} + \frac{D}{2} \left(\frac{D}{\lambda} \right)^{1/3}$$

3. Волновые уравнения для потенциалов (метод векторного потенциала)

Данный метод позволяет рассчитать нестационарное электромагнитное поле, порожденное источником с заданным распределением тока и заряда.

Система уравнений Максвелла

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{I}; \\ \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \\ \text{div } \vec{D} = \rho; \\ \text{div } \vec{B} = 0, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array}$$

включает в себя уравнение непрерывности

$$\text{div } \vec{I} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

и дополняется материальными уравнениями

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E};$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H},$$

законом Ома

$$\vec{I} = \sigma \vec{E},$$

начальными (граничными условиями) и выражениями для заданного стороннего тока и заряда, которые добавляются в $\vec{I}(\vec{r}, t)$ и $\rho(\vec{r}, t)$.

Суть метода векторного потенциала заключается во введении новой векторной переменной $\vec{A}(\vec{r}, t)$:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A},$$

$$\text{тогда } \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\text{rot } \vec{A}) \text{ или } \text{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \right) = 0.$$

Вводим электрический скалярный потенциал таким образом:

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\text{grad } \varphi,$$

тогда предыдущее соотношение выполняется тождественно и

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (5)$$

Подставим это выражение в 1-е уравнение Максвелла

$\frac{1}{\mu_0} \text{rot rot } \vec{A} = -\varepsilon_0 \text{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \vec{I}$, и, используя известное векторное тождество $\text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}$, получаем

$$\text{grad div } \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} = -\varepsilon_0 \mu_0 \text{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \vec{I} \mu_0$$

или

$$\nabla^2 \vec{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \text{grad} \left(\text{div } \vec{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \mu_0 \vec{I}.$$

Требуя выполнения равенства $\text{div } \vec{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$, называемого калибровкой Лоренца, получаем трехмерное векторное волновое уравнение

$$\nabla^2 \vec{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{I}.$$

Подставляя в (3) соотношение (5), имеем $-\underbrace{\text{div grad } \varphi}_{\nabla^2} - \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{A} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}$, $-\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}$

что дает скалярное волновое уравнение для скалярного потенциала

$$\nabla^2 \varphi - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}.$$

Решения полученных волновых уравнений известны и имеют вид

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{I} \left(\vec{r}, t - \frac{R}{c} \right)}{R} dV', \quad (6)$$

где $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$ – расстояние между точкой наблюдения и текущей точкой излучателя, дающей вклад в общее поле в процессе интегрирования,

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho \left(\vec{r}, t - \frac{R}{c} \right)}{R} dV'. \quad (7)$$

По сути, данные решения иллюстрируют принцип суперпозиции, когда вклад в поле в точке наблюдения состоит из суммы вкладов элементарных источников, причем влияние каждого убывает с расстоянием как $\frac{1}{R}$, а само воздействие поступит с задержкой, необходимой для преодоления со скоростью света расстояния между точкой наблюдения и координатой элементарного источника.

Зная векторный и скалярный потенциалы в любой точке наблюдения, можно получить искомые поля при помощи выражений

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{A}; \quad \vec{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

Причем скалярный потенциал можно найти из калибровки Лоренца

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \operatorname{div} \vec{A}:$$

$$\varphi = -c^2 \int_0^t \operatorname{div} \vec{A} dt,$$

тогда

$$\vec{E} = c^2 \int_0^t \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} dt - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t},$$

или, например, в декартовой системе координат,

$$\vec{E} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} (\vec{r}, t) = c^2 \int_0^t \frac{\partial}{\partial \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dt - \frac{\partial}{\partial t} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

4. Энергетические соотношения для нестационарного поля

Для нестационарного поля, в отличие от стационарного, все энергетические соотношения должны выполняться в любой момент времени.

Энергия поля в объёме V , заполненном неоднородной нестационарной средой,

$$W(t) = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon_0 \varepsilon(\vec{r}', t) \vec{E}^2(\vec{r}', t) + \mu_0 \mu(\vec{r}', t) \vec{H}^2(\vec{r}', t) dV'.$$

Вектор Пойнтинга, плотности потока электромагнитной энергии

$$\vec{\Pi}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t).$$

Уравнение баланса мощностей для объема V , заполненного неоднородной нестационарной средой с потерями, содержащего источник стороннего тока $\vec{I}_{cm}(\vec{r}', t)$ и окруженного замкнутой поверхностью S :

$$-\int_V \vec{I}_{cm}(\vec{r}', t) \vec{E}(\vec{r}', t) dV' = \frac{\partial W(t)}{\partial t} + \int_V \sigma(\vec{r}', t) \vec{E}^2(\vec{r}', t) dV' + \oint_S \vec{\Pi}(\vec{r}', t) \vec{n} dS',$$

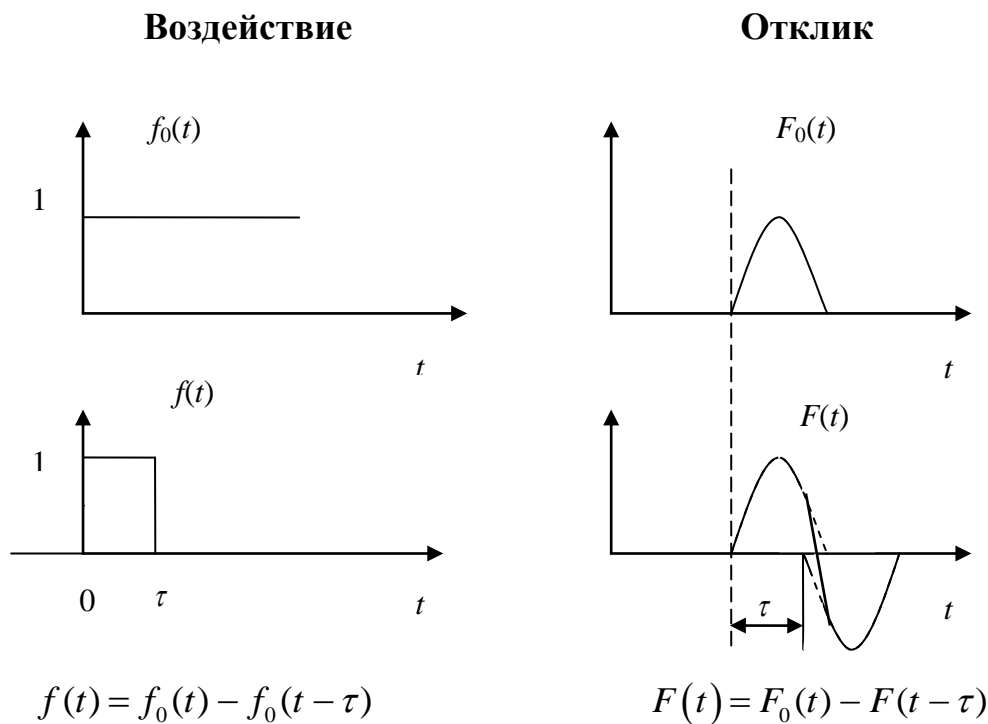
\vec{n} – внешний вектор нормали к поверхности S .

5. Принцип суперпозиции (интеграл Дюамеля)

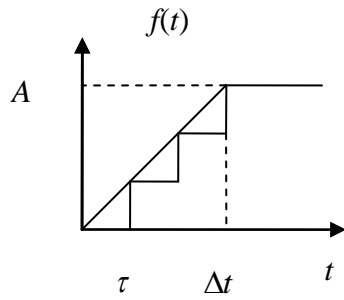
Принцип суперпозиции (наложения) выполняется в любой линейной системе. Применительно к задачам излучения, он выполняется тогда, когда в

исходной электродинамической задаче отсутствуют нелинейные и нестационарные среды. Используя принцип суперпозиции, можно получить решение нестационарной задачи для произвольной временной зависимости источника, если предварительно было получено решение для временной зависимости источника в виде дельта-функции Дирака (импульсная характеристика) или функции Хевисайда (переходная функция). Формулу, отражающую принцип наложения в общем виде и позволяющую получить такое решение часто называют интегралом Дюамеля.

Проиллюстрируем получение данной формулы на примере, когда нам известна переходная функция (решение некоторой электродинамической задачи), т.е. источник тока (заряда, поля) с временной зависимостью в виде функции Хевисайда (ступенчатой функции, единичного скачка) $f_0(t)$ порождает в некоторой точке наблюдения напряженность поля (электрического или магнитного) с временной зависимостью $F_0(t)$. Данная реакция системы должна запаздывать во времени по отношению к воздействию исходя из принципа причинности.



Аппроксимируем линейно нарастающий сигнал тремя ступеньками:



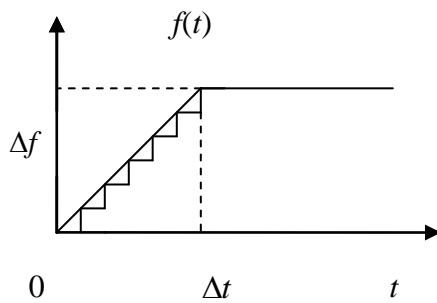
$$f(t) = \frac{A}{3} f_0(t - \tau) + \frac{A}{3} f_0(t - 2\tau) + \frac{A}{3} f_0(t - 3\tau)$$

$$F(t) = \frac{A}{3} F_0(t - \tau) + \frac{A}{3} F_0(t - 2\tau) + \frac{A}{3} F_0(t - 3\tau)$$

или

$$f(t) = \sum_{n=1}^3 \frac{A}{3} f_0\left(t - n \frac{\Delta t}{3}\right)$$

$$F(t) = \sum_{n=1}^3 \frac{A}{3} F_0\left(t - n \frac{\Delta t}{3}\right)$$



Аппроксимируем линейно нарастающий сигнал, используя N ступенек

$$f(t) = \sum_{n=1}^N \frac{A}{N} f_0\left(t - n \frac{\Delta t}{N}\right)$$

$$F(t) = \sum_{n=1}^N \frac{A}{N} F_0\left(t - n \frac{\Delta t}{N}\right)$$

Перейдем к пределу $N \rightarrow \infty$, $\tau = n \frac{\Delta t}{N}$, $\frac{A}{N} = \Delta f(\tau)$:

$$f(t) = \sum_{n=1}^N \Delta f f_0(t - \tau) \frac{\Delta \tau}{\Delta \tau} =$$

$$= \sum_{n=1}^N \frac{\Delta f}{\Delta \tau} f_0(t - \tau) \Delta \tau =$$

$$= \int_0^{\Delta t} f'(\tau) f_0(t - \tau) d\tau$$

$$F(t) = \sum_{n=1}^N \Delta f F_0(t - \tau) \frac{\Delta \tau}{\Delta \tau} =$$

$$= \sum_{n=1}^N \frac{\Delta f}{\Delta \tau} F_0(t - \tau) \Delta \tau =$$

$$= \int_0^t f'(\tau) F_0(t - \tau) d\tau$$

Полученная формула и есть временная зависимость поля в заданной точке при возбуждении источника сигналом с произвольной временной зависимостью поля $f(t)$. Интегрируя ее по частям и накладывая ограничение, что возбуждающий сигнал в начальный момент равен нулю и, соответствуя принципу причинности, имеем $F_0(0) = 0$, можем получить альтернативное выражение, которое может быть более удобно для численного счета, если переходная функция системы есть более гладкая функция, чем возбуждающий сигнал:

$$F(t) = \int_0^t f'(\tau) F_0(t - \tau) d\tau = \underbrace{F_0(t - \tau) f(\tau)}_0 \Big|_0^t + \int_0^t f(t) F'(t - \tau) d\tau = \int_0^t f(t) F'(t - \tau) d\tau.$$

6. Элементарные излучатели

6.1. Электрический диполь Герца

Для расчета излучателя с заданным распределением электрического тока необходимо знать вклад элементарного участка с равномерным распределением тока вдоль одной линии и длиной $L \ll \lambda_{\min}$. Такой элементарный излучатель и называется электрическим диполем Герца. Найдем поле, которое он излучает, при возбуждении током с произвольной временной зависимостью.

Дипольный момент системы зарядов в некотором объеме V вводится следующим образом:

$$\vec{P}\left(t - \frac{R}{c}\right) = \int_V \vec{r}' \rho\left(\vec{r}', t - \frac{R}{c}\right) dv',$$

где \vec{r}' – радиус-вектор, пробегающий по всему объему, ρ – распределение заряда в объеме как функция координаты и времени.

Пусть в рассматриваемом объеме находится диполь, система из двух зарядов, одинаковых по величине и противоположных по знаку. Зависимость величины заряда от времени – произвольная.

Из определения дипольного момента следует, что для малого диполя длины l с зарядами $\pm Q$ на концах полный дипольный момент равен $\vec{P}_\Sigma = Q\vec{l}$, действительно, считая, что расстояние l мало и порождает незначительную задержку во времени, полагаем, что заряды во времени меняются синхронно, тогда

$$\begin{aligned} \vec{P}_\Sigma\left(t - \frac{R}{c}\right) &= \int_V \vec{r}' Q(t) \delta(x) \delta(y) (\delta(z-l) - \delta(z)) dv' = \\ &= Q(t) \int_0^l \vec{z}' (\delta(z-l) - \delta(z)) dz' = Q(t) \vec{l} \end{aligned}$$

Пусть полный ток I , протекающий по проводнику с площадью поперечного сечения S , направлен вдоль оси OZ и равен $I = j_z S = \frac{\partial Q}{\partial t}$, где j_z – плотность тока. Тогда дипольный момент на единицу объема будет равен

$$\vec{P} = \frac{\vec{P}_\Sigma}{V} = \frac{Q\vec{l}}{Sl}.$$

Отсюда можно найти связь плотности тока и дипольного момента

$$j_z = \frac{1}{S} \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial t}.$$

Обобщая данные рассуждения на общий случай произвольно ориентированного тока, можно получить

$$\vec{P} = \vec{z}_0 \int_{-\infty}^t j_z dt$$

или, используя уравнение непрерывности $\text{div } \vec{P} = -\rho$.

Потенциал Герца выражается через векторный потенциал следующим образом:

$$\vec{\Pi} = c^2 \int_{-\infty}^t \vec{A} dt,$$

и наоборот, векторный и скалярный потенциалы равны

$$\begin{cases} \vec{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{\Pi}}{\partial t}; \\ \varphi = -\text{div } \vec{\Pi}, \end{cases}$$

где последнее равенство получено за счет применения калибровки Лоренца. Тогда, используя уравнение для векторного потенциала, получим

$$c^2 \int dt \left\{ \nabla^2 \vec{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j} \right\},$$

после чего волновое уравнение для потенциала Герца приобретает вид

$$\nabla^2 \vec{\Pi} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \vec{P},$$

а выражение для полей через него:

$$\begin{cases} \vec{E} = \text{grad div } \vec{\Pi} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial t^2}; \\ \vec{B} = \frac{1}{c^2} \text{rot } \frac{\partial \vec{\Pi}}{\partial t}. \end{cases}$$

Воспользуемся решением для векторного потенциала и получим

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\vec{P}\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R} dv'.$$

Для бесконечно малого диполя можем пренебречь его размерами по сравнению с расстоянием до точки наблюдения, заменить R на r и вынести за знак интеграла

$$\vec{\Pi} = \frac{Sl}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{P}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r},$$

тогда выражения для полей приобретут вид

$$\vec{E} = Sl \operatorname{grad} \operatorname{div} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P}}{r} \right) - Sl \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P} \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r} \right);$$

$$\vec{B} = Sl \frac{1}{c^2} \operatorname{rot} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P}}{r} \right),$$

а для упрощения дальнейших расчетов вектор \vec{P} направим вдоль оси OZ .

Для вычисления компонент поля воспользуемся известными выражениями для векторных операций в сферической системе координат

$$\operatorname{grad} \psi = \vec{r}_0 \frac{\partial \psi}{\partial r} + \vec{\theta}_0 \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \vec{\phi}_0 \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi};$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi};$$

Учтем, что в рассматриваемой задаче в силу симметрии все частные производные по ϕ равны нулю, следовательно $E_\phi \equiv 0$. Зная проекции вектора $P_r = P \cos \theta$ и $P_\theta = -P \sin \theta$, получим

$$\begin{aligned} E_\theta &= \frac{Sl}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{P \cos \theta}{r} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\sin^2 \theta \frac{P}{r} \right) \right\} \right\} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{P(-\sin \theta)}{r} \right) \right\} = \\ &= \frac{Sl \sin \theta}{4\pi\epsilon_0} \left\{ -\frac{1}{r^3} \left(P - \frac{r}{c} \dot{P} \right) + \frac{2}{r^3} P + \frac{1}{c^2 r} \ddot{P} \right\} = \frac{\sin \theta}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r^3} P + \frac{1}{cr^2} \dot{P} + \frac{1}{c^2 r} \ddot{P} \right\}; \\ E_r &= \frac{Sl}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{P \cos \theta}{r} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\sin^2 \theta \frac{P}{r} \right) \right) \right\} - \\ &- \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{P \cos \theta}{r} \right) = \frac{\cos \theta}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^2} \left(P - \frac{r}{c} \dot{P} \right) \right) + \frac{4}{r^3} P + \frac{2}{cr^2} \dot{P} - \frac{1}{c^2 r} \ddot{P} \right\} = \\ &= \frac{Sl \cos \theta}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{-2}{r^3} P + \frac{1}{r^2} \frac{-1}{c} \dot{P} - \frac{-1}{cr^2} \dot{P} - \frac{1}{r} \frac{-1}{c^2} \ddot{P} + \frac{4}{r^3} P + \frac{2}{cr^2} \dot{P} - \frac{1}{c^2 r} \ddot{P} \right\} = \\ &= \frac{Sl \cos \theta}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{2}{r^3} P + \frac{2}{cr^2} \dot{P} \right\} = \frac{Sl \cos \theta}{2\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r^3} P + \frac{1}{cr^2} \dot{P} \right\}. \end{aligned}$$

Так как в сферической системе координат

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{A} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} A_\phi \sin \theta - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \vec{r}_0 + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r A_\phi)}{\partial r} \right] \vec{\theta}_0 + \\ &+ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \vec{\phi}_0, \end{aligned}$$

то компоненты магнитного поля вдоль орт \vec{r}_0 и $\vec{\theta}_0$ отсутствует в силу отсутствия компоненты A_φ и вариации поля по углу φ , тогда

$$H_\varphi = \frac{Sl}{\mu_0 c^2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \operatorname{rot} \frac{\dot{\vec{P}}}{r} = \frac{Sl}{4\pi} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (\dot{P}(-\sin\theta)) - \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\dot{P} \cos\theta}{r} \right] = \frac{Sl \sin\theta}{4\pi} \left[\frac{\ddot{P}}{rc} + \frac{\dot{P}}{r^2} \right].$$

Заменив дипольный момент на ток через диполь с произвольной временной зависимостью, получим

$$E_\theta = \frac{Sl \sin\theta}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r^3} \int_{-\infty}^t j\left(t - \frac{r}{c}\right) dt + \frac{1}{cr^2} j\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{c^2 r} \dot{j}\left(t - \frac{r}{c}\right) \right\};$$

$$E_r = \frac{Sl \cos\theta}{2\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r^3} \int_{-\infty}^t j\left(t - \frac{r}{c}\right) dt + \frac{1}{cr^2} j\left(t - \frac{r}{c}\right) \right\};$$

$$H_\varphi = \frac{cSl \sin\theta}{4\pi} \left\{ \frac{1}{cr^2} j\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{c^2 r} \dot{j}\left(t - \frac{r}{c}\right) \right\}.$$

$$E_\theta = \frac{l \sin\theta}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r^3} \int_{-\infty}^t I\left(t - \frac{r}{c}\right) dt + \frac{1}{cr^2} I\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{c^2 r} \dot{I}\left(t - \frac{r}{c}\right) \right\};$$

$$E_r = \frac{l \cos\theta}{2\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r^3} \int_{-\infty}^t I\left(t - \frac{r}{c}\right) dt + \frac{1}{cr^2} I\left(t - \frac{r}{c}\right) \right\};$$

$$H_\varphi = \frac{cl \sin\theta}{4\pi} \left\{ \frac{1}{cr^2} I\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{c^2 r} \dot{I}\left(t - \frac{r}{c}\right) \right\}.$$

Полученные выражения показывают, что поле электрического диполя состоит из трех составляющих: электромагнитной волны с убыванием, обратно пропорциональным расстоянию, и временной зависимостью в виде производной от возбуждающего тока; квазистатической составляющей с убыванием, обратно пропорциональным квадрату расстояния, с временной зависимостью возбуждающего тока, которая в случае магнитной компоненты поля в пределе переходит в поле, порождаемое постоянным током; дипольной составляющей с убыванием, обратно пропорциональным кубу расстояния, с временной зависимостью в виде интеграла от возбуждающего тока, которая представляет собой электростатическое поле диполя, образованного двумя зарядами, при этом магнитной компоненты у этой составляющей нет. В случае постоянного тока, последняя составляющая представляет собой электростатическое поле диполя, величины зарядов которого линейно растут со временем.

Интересно, что две из этих трех составляющих в поперечных компонентах поля пропорциональны друг другу и коэффициентом пропорциональности является волновое сопротивление свободного пространства. Необычным здесь является то, что не только электромагнитная волна с затуханием обратно пропорциональным расстоянию, но и

быстрозатухающие компоненты поля пропорциональны друг другу. Следует отметить также быстрое затухание продольной компоненты поля.

Известно, что закон сохранения энергии электромагнитного поля будет выполняться только при учете всех компонент поля и всех слагаемых в выражениях для поля диполя. Рассмотрение только слагаемых, наименее быстро убывающих с расстоянием, приводит к тому, что нарушается и закон сохранения энергии, и не удовлетворяются дивергентные уравнения Максвелла [Schantz H.G. Electromagnetic Energy Around Hertzian Dipoles // IEEE Antenna & Prop. Magazine. – 2001. – Vol.43, №2. – P.50-62.]. Амплитуда нормальной компоненты плотности потока мощности на сфере радиуса r , в центре которой находится диполь, состоит из шести слагаемых с пятью разными видами временной зависимости, как это видно при последовательном перемножении каждого слагаемого в выражениях для поля диполя:

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H};$$

$P_z = \frac{cl^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \varepsilon_0} \times$	H_φ		
	\times	$\frac{1}{cr^2} \dot{Q}$	$\frac{1}{c^2 r} \ddot{Q}$
E_θ	$\frac{1}{r^3} Q$	$\left(\frac{1}{cr^5} Q \dot{Q} \right.$	$\left. + \frac{1}{c^2 r^4} Q \ddot{Q} \right)$
	$\frac{1}{cr^2} \dot{Q}$	$+ \frac{1}{c^2 r^4} \dot{Q} \dot{Q}$	$+ \frac{1}{c^3 r^3} \dot{Q} \ddot{Q}$
	$\frac{1}{c^2 r} \ddot{Q}$	$+ \frac{1}{c^3 r^3} \ddot{Q} \dot{Q}$	$+ \frac{1}{c^4 r^2} \ddot{Q} \ddot{Q}$

Нижнее правое слагаемое, подчеркнутое волнистой линией, обозначает плотность потока энергии волны в дальней зоне, это самое медленно убывающее слагаемое, дающее вклад в полную излученную энергию. Суммарная энергия данной составляющей не убывает с увеличением радиуса сферы, а остается постоянной. Вклад же остальных слагаемых убывает с увеличением радиуса сферы. Используя формулу интегрирования по частям, легко показать, что подчеркнутые двойной линией слагаемые дают нулевой суммарный вклад в поток энергии, если изменение заряда происходит на конечном временном промежутке. Подчеркнутые прерывистой линией слагаемые также могут давать нулевой вклад в поток энергии, если ток через диполь есть функция времени, симметричная относительно оси ординат или относительно начала координат. Уменьшение суммарного потока энергии с

расстоянием объясняется тем, что благодаря этому в пространстве, окружающем диполь, сосредотачивается энергия электромагнитного поля, если через диполь протекает ток. При прекращении протекания тока через диполь энергия, сосредоточенная в окружающем пространстве, преобразуется в излученную, как показано в [Schantz H.G. Electromagnetic Energy Around Hertzian Dipoles // IEEE Antenna & Prop. Magazine. – 2001. – Vol.43, №2. – P.50-62.] путем построения и анализа линий с нулевым потоком энергии вокруг диполя. Однако удостовериться в правильности данного утверждения математически весьма сложно, ведь, как хорошо видно, энергия электромагнитной волны в дальней зоне, представленная слагаемым, подчеркнутым волнистой линией, не зависит от расстояния, следовательно, она как бы совершенно не связана с энергией в пространстве, а рождается внутри диполя. Данное противоречие можно объяснить тем, что в процессе вывода выражений для поля диполя мы посчитали размеры диполя l намного меньшими расстояния от центра диполя до точки наблюдения r . Таким образом, выражения для полей перестают быть верными при достаточно близких расстояниях наблюдения. Поэтому при выключении тока можно увидеть как энергия, представленная всеми слагаемыми за исключением последнего, направится в центр диполя.

Проиллюстрируем этот процесс на простой задаче, когда заряды на концах диполя в нулевой момент времени начали линейно уменьшаться до нулевого значения. Пусть временная зависимость заряда имеет вид, представленный на нижеследующем рисунке.

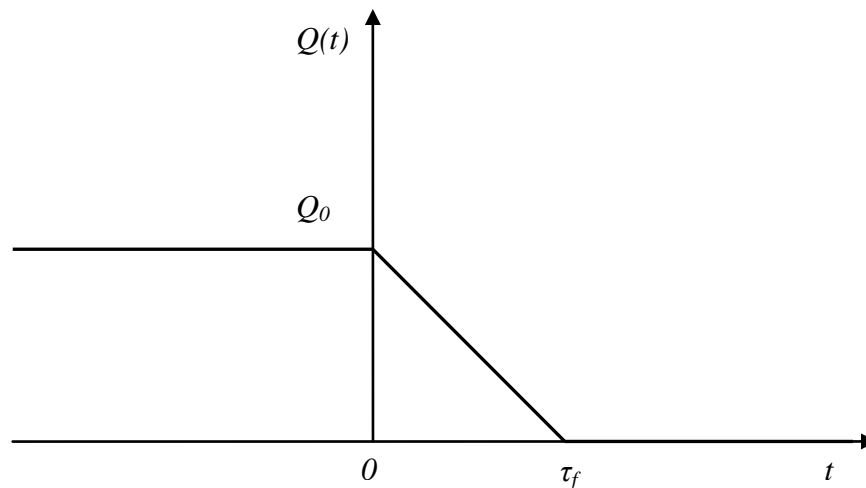


Рис. 1. Временная зависимость заряда диполя при линейном изменении заряда

Тогда аналитически заряд и его производные по времени могут быть представлены как

$$Q(t) = \begin{cases} Q_0, & t < 0, \\ Q_0 - \frac{Q_0}{\tau_f} t, & 0 \leq t \leq \tau_f, \\ 0, & t > \tau_f, \end{cases} \quad \dot{Q}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ -\frac{Q_0}{\tau_f}, & 0 \leq t \leq \tau_f, \\ 0, & t > \tau_f, \end{cases} \quad \ddot{Q}(t) = -\frac{Q_0}{\tau_f} (\delta(t) - \delta(t - \tau_f)).$$

Рассмотрим энергию поля в пространстве вокруг диполя, ограниченном двумя сферами с радиусами R_0 и ξR_0 , где $\xi > 1$. Легко показать, что до момента

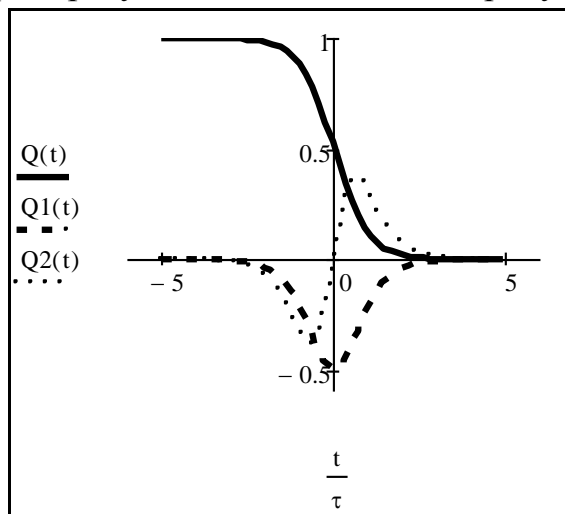
$$t = 0 \quad \text{данное пространство содержало энергию} \quad W_E = \frac{l^2 Q_0^2}{12\pi\epsilon_0 R_0^3} \left(\frac{\xi^3 - 1}{\xi^3} \right)$$

электрического поля, представленного компонентами, убывающими с расстоянием обратно пропорционально кубу расстояния до точки наблюдения. А расчет потока энергии, проведенный с использованием первых пяти слагаемых, показывает, что через сферу радиуса ξR_0 в рассматриваемый объем за все время переходного процесса добавляется энергия величины $W_{out} = \frac{l^2 Q_0^2}{12\pi\epsilon_0 R_0^3} \frac{1}{\xi^3}$, а через сферу радиуса R_0 из данного объема

$$\text{выходит энергия величины} \quad W_{in} = \frac{l^2 Q_0^2}{12\pi\epsilon_0 R_0^3}, \quad \text{таким образом, из объема в направлении к центру диполя выйдет энергия электромагнитного поля}$$

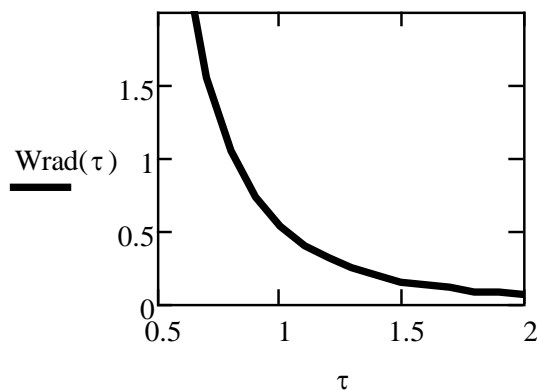
$$W_\Sigma = \frac{l^2 Q_0^2}{12\pi\epsilon_0 R_0^3} \left(\frac{\xi^3 - 1}{\xi^3} \right).$$

Описанный выше пример обладает тем недостатком, что при таком возбуждении диполь должен излучить бесконечную энергию. Чтобы избежать подобных сложностей, необходимо в качестве временной зависимости заряда диполя взять плавную функцию, подобно предложенным в [Schantz H.G. Electromagnetic Energy Around Hertzian Dipoles // IEEE Antenna & Prop. Magazine. – 2001. – Vol.43, №2. – P.50-62.]. Например, пусть $Q(t) = Q_0 (1 - \text{th}(t/\tau))/2$. Тогда нормированная на максимум функция $Q(t)$ при $\tau = 1$ нс и ее первая и вторая производные приобретут вид, показанный на рисунке ниже.



Временная зависимость заряда диполя при плавном изменении заряда и тока

Для случая, когда излучатель окружен сферой радиуса 1 м, найдем такую скорость изменения сигнала, определяемую параметром τ , при которой сфера с радиусом 1 м становится каузальной [Schantz H.G. The art and science of ultrawideband antennas. - London: Artech House, 2005. – 153 p.], т.е. суммарный поток энергии, включающий поток энергии квазистатического поля внутрь и поток излучаемой наружу волны, становится равным нулю. Так как энергия квазистатического поля, проходящая внутрь сферы, не зависит от τ , то удобно построить отношение излученной энергии к энергии квазистатических компонент поля за пределами сферы, как изображено на рисунке.

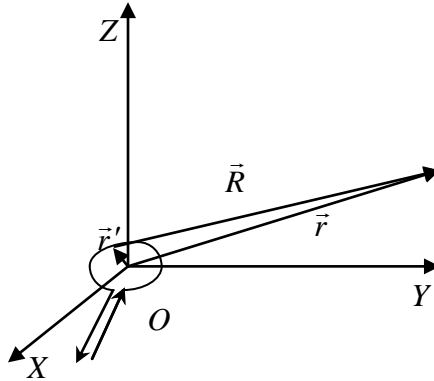


Отношение излученной энергии к энергии квазистатических компонент поля за пределами сферы радиуса 1 м

Видно, что сфера выбранного размера является каузальной при $\tau = 0,8$ нс. Следует также отметить, что энергия излученной волны растет с уменьшением τ обратно пропорционально четвертой степени τ , а энергия квазистатических компонент поля растет обратно пропорционально третьей степени r и обратно пропорционально τ . Проводя условную оценку временного интервала, на котором возбуждающий ток существенно меняется, можно сделать вывод, что размеры каузальной сферы вокруг электрического диполя Герца приблизительно равны пространственной длительности возбуждающего импульса, и, исходя из указанных выше соотношений, это утверждение остается верным для различных скоростей изменения сигнала, задаваемых параметром τ . В [Schantz H.G. Electromagnetic Energy Around Hertzian Dipoles // IEEE Antenna & Prop. Magazine. – 2001. – Vol.43, №2. – P.50-62.] утверждается, что на самом деле никакого равенства потоков энергии через каузальную сферу нет, что имеется лишь преобразование энергии квазистатических компонент поля вне этой сферы в электромагнитную волну. Данное утверждение можно также трактовать в качестве подтверждения существования ограничений на применимость выражений для поля диполя, которые естественным образом следуют из способа получения данных выражений.

6.2. Магнитный диполь Герца

Моделью элементарного магнитного излучателя может быть бесконечно малая рамка с током (петля).



Для нее в силу равенства входящего и выходящего тока $\text{div } \vec{j} = 0$, тогда $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, следовательно, скалярный потенциал $\varphi = \text{const}$. В силу этого представляет интерес только векторный потенциал

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{R}{c}\right)}{R} dv', \quad (1)$$

где $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$, $R = \sqrt{r^2 - 2\vec{r}\vec{r}' + r'^2}$.

Если $|r'| \ll |r|$, то $R = r \sqrt{1 - 2\frac{\vec{r}\vec{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}} \approx r \left(1 - \frac{\vec{r}\vec{r}'}{r^2} + \dots\right) = r - \frac{\vec{r}\vec{r}'}{r}$, тогда

$$\frac{\vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{R}{c}\right)}{R} \approx \frac{\vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{r - \frac{\vec{r}\vec{r}'}{r}}{c}\right)}{r - \frac{\vec{r}\vec{r}'}{r}}.$$

Пользуясь разложением в ряд Тейлора с удержанием первых двух слагаемых $F(x_0 + x) \approx F(x_0) + xF'(x_0)$, если x — мало, для функции

$$F(x_0 + x) = \frac{f(x_0 + x)}{x_0 + x}, \quad \text{имеем} \quad \frac{f(x_0 + x)}{x_0 + x} = \frac{f(x_0)}{x_0} + x \frac{d}{dx_0} \left(\frac{f(x_1)}{x_0} \right), \quad \text{где}$$

$$x = \frac{-\vec{r}\vec{r}'}{r}, \quad x_0 = r.$$

Тогда
$$\frac{\vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{R}{c}\right)}{R} \approx \frac{\vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c}\right)}{r} - \frac{\vec{r}\vec{r}'}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{\vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c}\right)}{r} \right]$$
 подставим в (1) и получим
$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c}\right)}{r} - \frac{\vec{r}\vec{r}'}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{\vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c}\right)}{r} \right] dV'.$$

Расстояние до точки наблюдения r в знаменателе первого слагаемого можно вынести за знак интеграла и убедиться, что первое слагаемое дает нулевой вклад в потенциал в силу замкнутости токов. Обозначая производную по времени точкой, перепишем

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left\{ \frac{\vec{r}\vec{r}'}{r^3} \vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c}\right) + \frac{\vec{r}\vec{r}'}{cr^2} \dot{\vec{j}}\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c}\right) \right\} dV'.$$

Проведем некоторые векторные преобразования с имеющимся вектором $(\vec{r}' \cdot \vec{r}) \vec{j}$. Так как $[\vec{r}' \times \vec{j}] \times \vec{r} = \vec{j}(\vec{r} \cdot \vec{r}') - \vec{r}'(\vec{j} \cdot \vec{r})$, то

$$(\vec{r}' \cdot \vec{r}) \vec{j} = [\vec{r}' \times \vec{j}] \times \vec{r} + \vec{r}'(\vec{j} \cdot \vec{r}) = \left\{ [\vec{r}' \times \vec{j}] \times \vec{r} / 2 + [\vec{r}' \times \vec{j}] \times \vec{r} / 2 \right\} + \vec{r}'(\vec{j} \cdot \vec{r})$$

Заменим второе слагаемое согласно вышеуказанной формуле для двойного векторного произведения и получим

$$(\vec{r}' \cdot \vec{r}) \vec{j} = [\vec{r}' \times \vec{j}] \times \frac{\vec{r}}{2} + \frac{\vec{j}}{2}(\vec{r} \cdot \vec{r}') + \frac{\vec{r}'(\vec{j} \cdot \vec{r})}{2}.$$

Подставляя полученное преобразование в выражение для векторного потенциала, с учетом того, что вместо \vec{j} мы можем таким же образом подставить $\dot{\vec{j}}$, получим

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}, t) = & \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{2r^3} \int_V (\vec{r}' \cdot \vec{r}) \vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c}\right) + [\vec{r}' \times \vec{j}] \times \vec{r} + \vec{r}'(\vec{j} \cdot \vec{r}) + \\ & + \frac{r}{c} \left[(\vec{r}' \cdot \vec{r}) \dot{\vec{j}}\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c}\right) + [\vec{r}' \times \dot{\vec{j}}] \times \vec{r} + \vec{r}'(\dot{\vec{j}} \cdot \vec{r}) \right] dV'. \end{aligned}$$

Докажем, что в нашей задаче вектор $\vec{K} = \int_V \left\{ \vec{j}(\vec{r}' \cdot \vec{r}) + \vec{r}'(\vec{j} \cdot \vec{r}) \right\} dV' = 0$.

Домножим \vec{K} на произвольный вектор \vec{a}

$$\vec{a}\vec{K} = \int_V (\vec{a} \cdot \vec{j})(\vec{r}' \cdot \vec{r}) + (\vec{a} \cdot \vec{r}')(\vec{j} \cdot \vec{r}) dV' = \int_V \vec{j} \text{ grad}'((\vec{a} \cdot \vec{r}')(\vec{r} \cdot \vec{r}')) dV',$$

где градиент действует по штрихованным координатам. Данное равенство легко проверить, используя соотношение

$$\text{grad}'(\vec{a} \cdot \vec{r}') = \text{grad}'(a_{x'}x' + a_{y'}y' + a_{z'}z') = \vec{x}'a_{x'} \frac{\partial x'}{\partial x'} + \vec{y}'a_{y'} \frac{\partial y'}{\partial y'} + \vec{z}'a_{z'} \frac{\partial z'}{\partial z'} = \vec{a}$$

следующим образом:

$$\vec{j} \cdot \text{grad}'[(\vec{a} \cdot \vec{r}')(\vec{r}' \cdot \vec{r})] = \vec{j} \cdot \{\vec{a}(\vec{r}' \cdot \vec{r}) + (\vec{a} \cdot \vec{r}')\vec{r}\} = (\vec{j} \cdot \vec{a})(\vec{r}' \cdot \vec{r}) + (\vec{a} \cdot \vec{r}')(\vec{j} \cdot \vec{r}).$$

Заменяя подынтегральную функцию и используя тождество

получим

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\varphi \vec{A}) &= \varphi \text{div } \vec{A} + \vec{A} \text{grad } \varphi, \\ \vec{a} \vec{K} &= \int_V \left\{ \text{div}'(\vec{j}(\vec{a} \cdot \vec{r}')(\vec{r}' \cdot \vec{r})) - (\vec{a} \cdot \vec{r}')(\vec{r}' \cdot \vec{r}) \text{div}' \vec{j} \right\} dV'. \end{aligned}$$

Данное скалярное произведение тождественно равно нулю в силу того, что первое слагаемое может быть преобразовано по теореме Гаусса-Остроградского к интегралу по замкнутой поверхности, на которой токи равны нулю, а второе слагаемое тождественно равно нулю в силу того, что в нашей задаче $\text{div } \vec{j} = 0$. То есть, $\vec{a} \vec{K} \equiv 0$.

Так как вектор \vec{a} был произвольным, то $\vec{K} \equiv 0$, тогда

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{1}{2r^3} \left\{ [\vec{r}' \times \vec{j}] \times \vec{r} + \frac{r}{c} [\vec{r}' \times \dot{\vec{j}}] \times \vec{r} \right\} dV'.$$

Введём магнитный момент

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int_V [\vec{r}' \times \vec{j}] dV', \text{ тогда } \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \left\{ \vec{m} \times \vec{r} + \frac{r}{c} \dot{\vec{m}} \times \vec{r} \right\}.$$

Так как скалярный потенциал $\varphi = 0$, то

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \text{ или после подстановки}$$

$$\vec{E} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{1}{r^3} \dot{\vec{m}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{r} + \frac{1}{cr^2} \ddot{\vec{m}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{r} \right].$$

Если петля с током лежит в плоскости XOY, то магнитный момент \vec{m} направлен вдоль оси OZ. Спроецируем полученный вектор на орты сферической системы координат:

$$E_r = (\vec{E} \cdot \vec{r}_0) = 0;$$

$$\begin{aligned} E_\varphi &= (\vec{E} \cdot \vec{\varphi}_0) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{1}{r^3} \dot{\vec{m}} \times \vec{r} \cdot \vec{\varphi}_0 + \frac{1}{cr^2} \ddot{\vec{m}} \times \vec{r} \cdot \vec{\varphi}_0 \right] = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{1}{r^2} \dot{\vec{m}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \cdot \vec{\theta}_0 + \frac{1}{cr} \ddot{\vec{m}} \cdot \vec{\theta}_0 \right] = -\frac{\mu_0}{4\pi} \sin \theta \left[\frac{1}{r^2} \dot{m} \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{cr} \ddot{m} \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_\theta &= (\vec{E} \cdot \vec{\theta}_0) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{1}{r^3} \dot{\vec{m}} \times \vec{r}_0 \cdot \vec{\theta}_0 + \frac{1}{cr^2} \ddot{\vec{m}} \times \vec{r}_0 \cdot \vec{\theta}_0 \right] = \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{1}{r^2} \dot{\vec{m}} \cdot \vec{\varphi}_0 + \frac{1}{cr} \ddot{\vec{m}} \cdot \vec{\varphi}_0 \right] = 0; \end{aligned}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{A} = \frac{1}{\mu_0} \left\{ \vec{r}_0 \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial}{\partial \varphi} A_\theta \right) + \vec{\theta}_0 \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} \right) + \vec{\varphi}_0 \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \right\}.$$

В силу осевой симметрии задачи, пренебрегая местом запитки петли, имеем $\frac{\partial}{\partial \varphi} \equiv 0$, и, учитывая, что $A_r \equiv A_\theta \equiv 0$, в силу равенства нулю соответствующих компонент электрического поля, полученного выше, имеем

$$\begin{aligned} H_r \vec{r}_0 &= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \left(\frac{1}{r^3} \left\{ \vec{m} \times \vec{r} + \frac{r}{c} \dot{\vec{m}} \times \vec{r} \right\} \cdot \vec{\varphi}_0 \right) \sin \theta \right\} = \\ &= \frac{-1}{4\pi} \frac{1}{r^3 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \left(\left\{ \vec{m} \cdot \vec{\theta}_0 + \frac{r}{c} \dot{\vec{m}} \cdot \vec{\theta}_0 \right\} \right) \sin \theta \right\} = \\ &= \vec{r}_0 \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r^3 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \left(m + \frac{r}{c} \dot{m} \right) \sin^2 \theta \right\} = \vec{r}_0 \frac{\cos \theta}{2\pi} \frac{1}{r^3} \left\{ m \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{r}{c} \dot{m} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right\}; \\ H_\theta \vec{\theta}_0 &= \frac{-1}{4\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \left(\frac{r}{r^3} \left\{ \vec{m} \times \vec{r} + \frac{r}{c} \dot{\vec{m}} \times \vec{r} \right\} \cdot \vec{\varphi}_0 \right) \right\} = \\ &= \vec{\theta}_0 \frac{-1}{4\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \left(m \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{r}{c} \dot{m} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) \sin \theta \right\} = \\ &= \vec{\theta}_0 \frac{-\sin \theta}{4\pi} \frac{1}{r} \left\{ \frac{-1}{r^2} \left(m + \frac{r}{c} \dot{m} \right) + \frac{1}{r} \left(-\frac{1}{c} \dot{m} - \frac{r}{c^2} \ddot{m} + \frac{1}{c} \dot{m} \right) \right\} = \\ &= \vec{\theta}_0 \frac{\sin \theta}{4\pi} \frac{1}{r^3} \left\{ m \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{r}{c} \dot{m} \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{r^2}{c^2} \ddot{m} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим петлю с током и рассчитаем для нее магнитный момент

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int_V [\vec{r}' \times \vec{j}] dV' \text{ в двух системах координат.}$$

В цилиндрической системе координат:

$$\begin{aligned} \vec{j} &= \vec{\varphi}_0 \delta(z) \delta(\rho - R_0) I(t), \quad \vec{\rho}_0 \times \vec{\varphi}_0 = \vec{z}_0, \\ \vec{m} &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho \vec{z}_0 \rho \delta(z) \delta(\rho - R_0) I(t) = \frac{\vec{z}_0}{2} 2\pi R_0^2 I(t) = \vec{z}_0 S I(t) = I(t) \vec{S}. \end{aligned}$$

В сферической системе координат:

$$\begin{aligned} \text{т.к. } \int_{-\infty}^{\infty} dr \int_0^{\pi} r \sin \theta d\theta \delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \frac{\delta(r - R_0)}{r} I(t) &= I(t), \text{ то} \\ \vec{j} &= \vec{\varphi}_0 \delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \frac{\delta(r - R_0)}{r} I(t), \quad \vec{r}_0 \times \vec{\varphi}_0 = -\vec{\theta}_0, \end{aligned}$$

$$\vec{m} = \frac{-1}{2} \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi r \sin \theta d\theta \vec{\theta}_0 r \delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \frac{\delta(r - R_0)}{r} I(t) = \frac{\vec{z}_0}{2} 2\pi R_0^2 I(t) = \vec{z}_0 S I(t)$$

Подставляя полученный магнитный момент петли, имеем

$$E_\varphi = -\frac{\mu_0 S}{4\pi} \sin \theta \left[\frac{1}{r^2} \dot{I}\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{cr} \ddot{I}\left(t - \frac{r}{c}\right) \right];$$

$$E_\theta \equiv 0;$$

$$E_r \equiv 0;$$

$$H_r = \frac{S}{2\pi} \cos \theta \left\{ \frac{1}{r^3} I\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{cr^2} \dot{I}\left(t - \frac{r}{c}\right) \right\};$$

$$H_\theta = \frac{S}{4\pi} \sin \theta \left\{ \frac{1}{r^3} I\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{cr^2} \dot{I}\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{c^2 r} \ddot{I}\left(t - \frac{r}{c}\right) \right\}.$$

Видно, что волна с наименьшим убыванием в пространстве имеет временную зависимость в виде второй производной от возбуждающего тока. Квазистатическая составляющая убывает обратно пропорционально кубу расстояния, и ее временная зависимость совпадает с временной зависимостью тока. Как и в предыдущем случае, продольная компонента поля убывает быстрее поперечных.

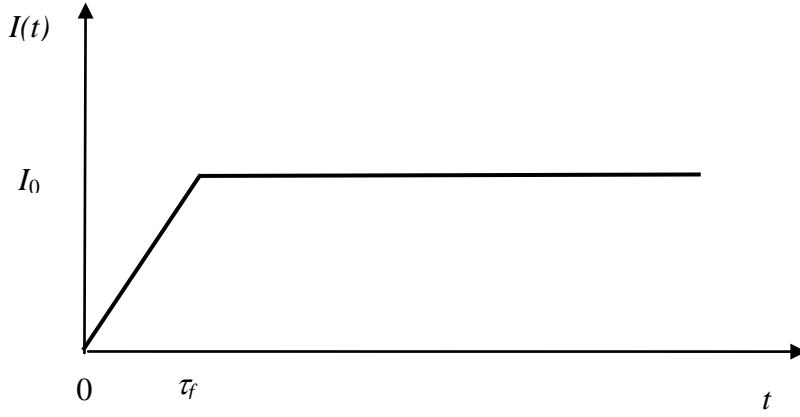
Задача

Рассмотрим область вокруг магнитного диполя, начиная со сферы с произвольным радиусом R_0 до сферы с радиусом $2R_0$. Проверим баланс энергии различных составляющих поля для этой области.

Найдем энергию квазистатической составляющей для импульса тока в виде скачка тока в момент времени, когда переходные процессы закончатся (постоянный ток):

$$\begin{aligned} W_{Hr^{-3}} &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_{R_0}^{2R_0} r^2 \mu_0 (H_r^2 + H_\theta^2) dr = \\ &= \frac{S^2}{32\pi^2} \mu_0 I_0^2 2\pi \int_0^\pi (4\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \sin \theta d\theta \int_{R_0}^{2R_0} \frac{1}{r^4} dr = \\ &= \frac{\mu_0 I_0^2 S^2}{16\pi} \frac{1}{-3r^3} \Big|_{R_0}^{2R_0} (-\cos \theta - \cos^3 \theta) \Big|_0^\pi = \frac{\mu_0 I_0^2 S^2}{48\pi} \left(\frac{1}{8R_0^3} - \frac{1}{R_0^3} \right) (-1 - 1 - 1 - 1) = \\ &= \frac{\mu_0 I_0^2 S^2}{12\pi} \left(\frac{7}{8R_0^3} \right). \end{aligned}$$

Пусть возбуждающий импульс имеет линейно нарастающий фронт длительности τ_f ,



но энергия квазистатической магнитной компоненты не зависит от характера нарастания, так как рассчитывалась при больших временах, когда ток можно считать практически постоянным

$$W_{Hr^{-3}} = \frac{7\mu_0 I_0^2 S^2}{96\pi R_0^3}.$$

Эта энергия порождается всеми комбинациями компонент электрического и магнитного поля в рассматриваемой области, пока фронт импульса растет. Входящую и выходящую энергию рассчитаем посредством вектора Пойнтинга. Напомним, что энергия есть нелинейная характеристика поля. Учитывая, что для выбранной временной зависимости $I(t)$,

$$I(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{I_0}{\tau_f} t & 0 \leq t \leq \tau_f \\ I_0 & t > \tau_f \end{cases}, \quad \dot{I}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ I_0 / \tau_f & 0 \leq t < \tau_f \\ 0 & t > \tau_f \end{cases},$$

$$\ddot{I}(t) = \frac{I_0}{\tau_f} (\delta(t) - \delta(t - \tau_f)).$$

Вычислим разность входящей и выходящей энергии

$$W_p = \int_0^\infty dt \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \left(r^2 E_\varphi H_\theta \right) \Big|_{2R_0}^{R_0} = \frac{\mu_0 S^2}{16\pi^2} \int_0^\infty dt \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi r^2 \sin^3 \theta d\theta$$

$$\left(\left(\frac{1}{r^2} \dot{I} \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{cr} \ddot{I} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) \left(\frac{1}{r^3} I \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{cr^2} \dot{I} \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{c^2 r} \ddot{I} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) \right) \Big|_{2R_0}^{R_0} =$$

$$= \frac{\mu_0 S^2}{16\pi^2} \int_0^\infty dt \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi r^2 \sin^3 \theta d\theta$$

$$\left(\frac{1}{r^2} \dot{I} \frac{1}{r^3} I + \frac{1}{r^2} \dot{I} \frac{1}{cr^2} \dot{I} + \frac{1}{r^2} \dot{I} \frac{1}{c^2 r} \ddot{I} + \frac{1}{cr} \ddot{I} \frac{1}{r^3} I + \frac{1}{cr} \ddot{I} \frac{1}{cr^2} \dot{I} + \frac{1}{cr} \ddot{I} \frac{1}{c^2 r} \ddot{I} \right) \Big|_{2R_0}^{R_0} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\mu_0 S^2}{16\pi^2} \int_0^\infty dt \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \left(\frac{1}{r^3} \ddot{I} + \frac{1}{cr^2} \ddot{I} + \frac{2}{c^2 r} \ddot{I} + \frac{1}{cr^2} \ddot{I} + \frac{1}{c^3} \ddot{I} \right) \Bigg|_{2R_0}^{R_0} = \\
 &= \frac{\mu_0 S^2}{16\pi^2} \int_0^\infty dt \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \left(\frac{1}{r^3} \ddot{I} + \frac{2}{cr^2} \ddot{I} + \frac{2}{c^2 r} \ddot{I} + \frac{1}{c^3} \ddot{I} \right) \Bigg|_{2R_0}^{R_0}.
 \end{aligned}$$

Так как последнее слагаемое не зависит от расстояния, то оно дает энергию на входе и на выходе одинаковую, это и есть энергия волны в дальней зоне. А у остальных слагаемых разность входящей и выходящей энергии будет не равна нулю, из них и будет составляться энергия постоянного магнитного поля вокруг излучателя. Рассчитаем вклад остальных слагаемых:

$$W_p = \frac{\mu_0 S^2 I_0^2}{8\pi} \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta \left(\frac{1}{r^3} \frac{1}{2} + \frac{1}{cr^2 \tau_f} + 0 - \frac{1}{cr^2 \tau_f} \right) \Bigg|_{2R_0}^{R_0},$$

интересно, что на этом этапе видно, что вклад в остаточную энергию дают наиболее быстро убывающие слагаемые в выражениях для поперечных компонент, из которых происхождение квазистатической магнитной компоненты понятно и следует из закона Ампера,

$$\begin{aligned}
 W_p &= \frac{\mu_0 S^2 I_0^2}{16\pi} \left[-\cos \theta + \frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^\pi \left(\frac{1}{R_0^3} - \frac{1}{8R_0^3} \right) = \\
 &= \frac{\mu_0 S^2 I_0^2}{16\pi} \left[1 + 1 + \frac{-2}{3} \right] \left(\frac{7}{8R_0^3} \right) = \frac{\mu_0 S^2 I_0^2}{16\pi} \frac{4}{3} \left(\frac{7}{8R_0^3} \right) = \frac{7\mu_0 S^2 I_0^2}{96\pi R_0^3}.
 \end{aligned}$$

Как видно, закон сохранения энергии выполняется, энергия постоянного магнитного поля равняется энергии, вносимой нестационарной волной, причем в данном случае вклад определяется только квазистатической компонентой поперечного магнитного поля и первым слагаемым поперечного электрического поля. Отсюда можно сделать вывод, что без быстро убывающих с расстоянием слагаемых нельзя описать процесс наполнения пространства электромагнитной энергией. По крайней мере, очевидно, что все компоненты полей с разным затуханием в пространстве и временной зависимостью важны и имеют между собой неразрывную связь, которую можно назвать энергетической, так как без нее невозможно выполнение закона сохранения энергии в сложном процессе излучения распространяющейся волны.

6.3. Излучатель Гюйгенса

Рассмотрим излучение элементарной площадки с размерами много меньше пространственной длины импульса. Если эта площадка располагается на металлической поверхности, то при расчете считают, что поверхностные заряды отсутствуют, т.е. скалярный потенциал равен нулю, а расчет проводится по формуле

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{I}(\vec{r}', t - R/c)}{R} dV',$$

где $r' \in V, R = |\vec{r} - \vec{r}'|$, в которой вместо объемного записывается поверхностный интеграл и в силу малости площадки имеет место,

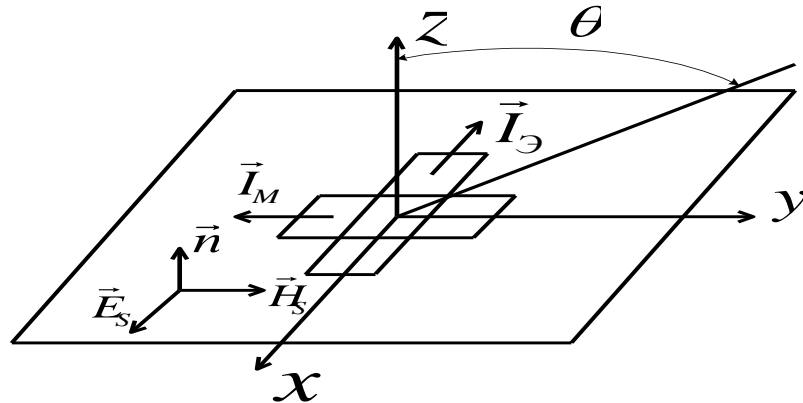
$$\vec{A}(\vec{R}, t) = \frac{\mu_0 S}{4\pi} \frac{\vec{I}(t - R/c)}{R},$$

где S – площадь площадки.

Если элементарная площадка, на которой задано распределение полей E и H , располагается в свободном пространстве, то такой излучатель называется излучателем Гюйгенса. Задача такого типа возникает при расчете рупорных и зеркальных антенн. Согласно принципу эквивалентных токов, на площадке S вводятся поверхностные электрические и магнитные токи

$$\vec{I}_E = \vec{n} \times \vec{H}, \quad \vec{I}_M = -\vec{n} \times \vec{E}.$$

Рассматривается суммарное поле, которое создается электрическим диполем с током \vec{I}_E и повернутым относительно его на 90° магнитным диполем с током \vec{I}_M . Угол поворота между диполями определяется углом между векторами E и H падающего поля. Геометрия задачи показана на рисунке.



Для величин электрических и магнитных токов получены выражения с учетом того, значения токов будут пропорциональны длинам излучающей площадки:

$$I_E = \frac{E_s}{Z_F} dy,$$

где z_F – волновое сопротивление фронта волны, соотношение между амплитудами электрической и магнитной компоненты поля в плоскости излучателя, в свободном пространстве $z_F = 120\pi$,

$$I_M = E_S dx.$$

суммарное поле диполей для упрощения находится в трех различных плоскостях XOZ, YOZ .

Расчет поля в плоскости XOZ (θ компонента) проводится следующим образом: на основе полученных ранее выражений в предыдущих системах координат для поперечной компоненты поля, излученного электрическим диполем Герца

$$E_\theta = \frac{l \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \dot{I} \left(t - \frac{r}{c} \right)$$

и магнитным

$$E_\varphi = -\frac{\mu_0 S \sin \theta}{4\pi cr} \ddot{I} \left(t - \frac{r}{c} \right),$$

с учетом только наиболее медленно убывающих слагаемых сложим вклады, вносимые этими диполями.

С учетом поворота на 90° относительно оси OY и пропорциональности поля длине участка тока dx электрическое поле электрического диполя приобретает вид

$$dE_E = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{dx}{r} \sin(90^\circ - \theta) \frac{d}{dt} I_E(t - r/c)$$

или, после упрощения, имеем

$$dE_E = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{dx}{r} \frac{dy}{z_F} \cos \theta \frac{d}{dt} E_S(t - r/c).$$

Составляющая электрического поля магнитного диполя, лежащая в плоскости XOZ , не зависит от θ в выбранной системе координат, поэтому

$$dE_M = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{dy}{cr} \frac{d^2}{dt^2} I_M(t - r/c),$$

а после упрощения

$$dE_M = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{dx dy}{cr} \frac{d^2}{dt^2} E_S(t - r/c).$$

Поля диполей dE_E и dE_M совпадают по направлению, поэтому могут быть просуммированы. Для суммарного поля двух диполей получаем

$$dE_\theta = dE_E + dE_M = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{dS}{r} \left[\frac{1}{c} \frac{d^2}{dt^2} E_S(t - r/c) + \frac{\cos \theta}{z_F} \frac{d}{dt} E_S(t - r/c) \right].$$

Поле E в плоскости YOZ (φ компонента в выбранной системе координат) определяются аналогично. В отличие от предыдущих соотношений, составляющие поля электрического и магнитного диполей меняются угловой зависимостью

$$dE_E = -\frac{\mu_o}{4\pi} \frac{dS}{rz_F} \frac{d}{dt} E_S(t - r/c);$$

$$dE_M = -\frac{\mu_o}{4\pi} \frac{dS}{r} \frac{\cos\theta}{c} \frac{d^2}{dt^2} E_S(t - r/c).$$

Суммарное поле имеет вид

$$dE_\varphi = dE_\vartheta + dE_M = -\frac{\mu_o}{4\pi} \frac{dS}{r} \left[\frac{\cos\theta}{c} \frac{d^2}{dt^2} E_S(t - r/c) + \frac{1}{z_F} \frac{d}{dt} E_S(t - r/c) \right]$$

Поле в любом направлении θ , φ определяется как сумма векторов

$$\vec{E} = \vec{\theta}_0 dE'_\theta + \vec{\varphi}_0 dE'_\varphi,$$

где $dE'_\theta = dE_\theta \cos\varphi$, $dE'_\varphi = dE_\varphi \sin\varphi$ – проекции полей в выбранных плоскостях. В итоге получим

$$\vec{E} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{dS}{r} \left\{ \vec{\theta}_0 \cos\varphi \left[\frac{1}{c} \frac{d^2}{dt^2} E_S(t - r/c) + \frac{\cos\theta}{z_F} \frac{d}{dt} E_S(t - r/c) \right] - \right.$$

$$\left. - \vec{\varphi}_0 \sin\varphi \left[\frac{\cos\theta}{c} \frac{d^2}{dt^2} E_S(t - r/c) + \frac{1}{z_F} \frac{d}{dt} E_S(t - r/c) \right] \right\}.$$

Учитывая, что рассчитывается излученное поле в дальней зоне, в которой магнитные компоненты связаны с электрическими посредством волнового сопротивления свободного пространства, можно записать магнитные компоненты следующим образом:

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi c} \frac{dS}{r} \left\{ \vec{\varphi}_0 \cos\varphi \left[\frac{1}{c} \frac{d^2}{dt^2} E_S(t - r/c) + \frac{\cos\theta}{z_F} \frac{d}{dt} E_S(t - r/c) \right] + \right.$$

$$\left. + \vec{\theta}_0 \sin\varphi \left[\frac{\cos\theta}{c} \frac{d^2}{dt^2} E_S(t - r/c) + \frac{1}{z_F} \frac{d}{dt} E_S(t - r/c) \right] \right\}.$$

В заключение следует отметить, что временная форма и пространственное распределение излученного поля в дальней зоне зависит от временной зависимости возбуждающего поля.

7. Метод эволюционных уравнений (метод модового базиса)

7.1. Постановка задачи

При помощи метода эволюционных уравнений можно свести исходную трехмерную нестационарную задачу излучения к одномерной нестационарной задаче, тем самым облегчив ее решение в силу уменьшения размерности, но не потеряв явную зависимость полей от времени. Это возможно благодаря тому, что в поперечной плоскости в цилиндрической системе координат будет построен базис, на который и будут спроектированы уравнения Максвелла. Тем самым мы избавимся от зависимостей уравнений от поперечных координат. Полученные одномерные уравнения называются эволюционными. В частном случае они сводятся к трем одномерным нестационарным уравнениям в частных производных.

Запишем систему уравнений Максвелла

$$\text{rot } \vec{\mathbf{H}} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{J}};$$

$$\text{rot } \vec{\mathbf{E}} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mu \vec{\mathbf{H}};$$

$$\text{div } \varepsilon \vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho;$$

$$\text{div } \mu \vec{\mathbf{H}} = 0,$$

в которой для удобства трехмерные векторы обозначены жирным шрифтом. Она дополняется материальными уравнениями

$$\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{\mathbf{E}} = \varepsilon_0 \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{P}};$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \mu \vec{\mathbf{H}} = \mu_0 \vec{\mathbf{H}} + \mu_0 \vec{\mathbf{M}}.$$

Следствием этих уравнений есть уравнение непрерывности

$$\text{div } \vec{\mathbf{J}} + \frac{\partial}{\partial t} \rho = 0.$$

Будем полагать, что параметры среды могут зависеть от продольной координаты и времени: $\varepsilon \equiv \varepsilon(z, t)$, $\mu \equiv \mu(z, t)$. Данная исходная задача дополняется начальными (граничными) условиями для полей и токов.

7.2. Представление трехмерных векторов

Представим трехмерные векторы в виде суммы двумерных и одномерных следующим образом:

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{E} + \vec{z}_0 E_z;$$

$$\vec{\mathbf{H}} = \vec{H} + \vec{z}_0 H_z;$$

$$\nabla = \nabla_t + \vec{z}_0 \frac{\partial}{\partial z};$$

$$\vec{J} = \vec{J} + \vec{z}_0 J_z.$$

Используя данные обозначения, представим дивергентные уравнения Максвелла в следующем виде:

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} (\mu H_z) = -\nabla_t \vec{H}; \quad (1)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon E_z) = -\nabla_t \vec{E} + \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \rho. \quad (2)$$

Так как ротор произвольного вектора в выбранных обозначениях представляется в виде

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{A} &= \left(\nabla_t + \vec{z}_0 \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \vec{A} = \left(\nabla_t + \vec{z}_0 \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (\vec{A} + \vec{z}_0 A_z) = \\ &= \nabla_t \times \vec{A} + \frac{\partial}{\partial z} [\vec{z}_0 \times \vec{A}] + [\nabla_t \times \vec{z}_0] A_z, \end{aligned}$$

причем первое слагаемое имеет только продольную составляющую, а второе и третье – поперечную, проекция роторных уравнений Максвелла на ось OZ представляется в виде

$$\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mu H_z) = \nabla_t [\vec{z}_0 \times \vec{E}]; \quad (3)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon E_z) = \nabla_t [\vec{H} \times \vec{z}_0] - J_z, \quad (4)$$

а на поперечную плоскость –

$$[\nabla_t \times \vec{z}_0] H_z = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon \vec{E}) + \frac{\partial}{\partial z} [\vec{H} \times \vec{z}_0] + \vec{J} \equiv \vec{a}; \quad (5)$$

$$[\vec{z}_0 \times \nabla_t] E_z = \frac{\partial}{\partial z} [\vec{z}_0 \times \vec{E}] + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mu \vec{H}) \equiv \vec{b}. \quad (6)$$

7.3. Исключение продольных компонент поля

Для построения базиса в поперечной плоскости исключим продольные компоненты поля из системы (1)-(6).

Исключим H_z из (5) при помощи (3) и (1), для чего подействуем на левую и правую части выражения (5) операцией $\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \mu$:

$$[\nabla_t \times \vec{z}_0] \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \mu H_z = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} (\mu \vec{a}),$$

и в полученное выражение подставим соотношение (1), после чего имеем

$$[\vec{z}_0 \times \nabla_t] \nabla_t \vec{H} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} (\mu \vec{a}). \quad (7)$$

Для использования выражения (3) необходимо соотношение (5) записать в форме $[\nabla_t H_Z \times \vec{z}_0] = \vec{a}$, умножить его векторно слева на \vec{z}_0 и применить известную формулу для двойного векторного произведения

$$[\vec{z}_0 \times [\nabla_t H_Z \times \vec{z}_0]] = (\vec{z}_0 \cdot \vec{z}_0) \nabla_t H_Z - \vec{z}_0 (\vec{z}_0 \cdot \nabla_t H_Z) = \nabla_t H_Z,$$

тогда (5) примет вид

$$\nabla_t H_Z = [\vec{z}_0 \times \vec{a}].$$

Поддействовав на последнее выражение операцией $\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mu$ слева, в

полученное выражение $\nabla_t \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mu H_Z) = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mu [\vec{z}_0 \times \vec{a}])$ можно подставить (3)

и получить

$$\nabla_t \nabla_t \cdot [\vec{z}_0 \times \vec{E}] = -\nabla_t [\vec{z}_0 \times \nabla_t] \cdot \vec{E} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mu [\vec{z}_0 \times \vec{a}]) \quad (8)$$

В результате (7) и (8) можно записать в виде

$$[\vec{z}_0 \times \nabla_t] \nabla_t \cdot \vec{H} = \vec{\alpha}, \quad (9)$$

$$\nabla_t [\vec{z}_0 \times \nabla_t] \cdot \vec{E} = \vec{\beta},$$

где

$$\alpha = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \mu_0 \left\{ \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon \vec{E}) + \frac{\partial}{\partial z} [\vec{H} \times \vec{z}_0] + \vec{J} \right\},$$

$$\beta = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mu \left\{ \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon [\vec{z}_0 \times \vec{E}] + \frac{\partial}{\partial z} \vec{H} \right\} - \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mu [\vec{z}_0 \times \vec{J}].$$

Исключим E_z из (6) при помощи (4) и (2), для чего подействуем на левую и

правую части выражения (6) операцией $\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon$:

$$[\vec{z}_0 \times \nabla_t] \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial z} \varepsilon E_z = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial z} \varepsilon \vec{b},$$

и в полученное выражение подставим соотношение (2), после чего имеем

$$\begin{aligned} -[\nabla_t \times \vec{E}] \left(\nabla_t \cdot \vec{E} - \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \rho \right) &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial z} \varepsilon \vec{b} \\ [\nabla_t \times \vec{z}_0] \nabla_t \cdot \vec{E} &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial z} \varepsilon \vec{b} - \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} [\vec{z}_0 \times \nabla_t \rho]. \end{aligned} \quad (10)$$

Для использования выражения (4) необходимо соотношение (6) записать в виде: $[\vec{z}_0 \times \nabla_t \vec{E}] = \vec{b}$, умножить его векторно слева на \vec{z}_0 и применить

известную формулу для двойного векторного произведения

$$[\vec{z}_0 \times [\vec{z}_0 \times \nabla_t E_Z]] = \vec{z}_0 (\vec{z}_0 \cdot \nabla_t E_Z) - \nabla_t E_Z (\vec{z}_0 \cdot \vec{z}_0) = -\nabla_t E_Z,$$

тогда (6) примет вид

$$\nabla_t E_z = -[\vec{z}_0 \times \vec{b}] \quad (6')$$

Подействовав на последнее выражение операцией $\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon$ слева, в полученное выражение $\nabla_t \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon E_z = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon [\vec{b} \times \vec{z}_0]$ можно подставить (4) и получить

$$\begin{aligned} \nabla_t \left(\nabla_t [\vec{H} \times \vec{z}_0] - J_z \right) &= \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon [\vec{b} \times \vec{z}_0] \\ \nabla_t [\vec{z}_0 \times \nabla_t] \cdot \vec{H} &= \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon [\vec{b} \times \vec{z}_0] + \nabla_t J_z \end{aligned} \quad (10')$$

Обобщим (10) и (11), записав в виде

$$\begin{aligned} [\nabla_t \times \vec{z}_0] \nabla_t \cdot \vec{E} &= \vec{\delta}, \\ \nabla_t [\nabla_t \times \vec{z}_0] \cdot \vec{H} &= \vec{\gamma}, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \vec{\delta} &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial z} \varepsilon \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [\vec{z}_0 \times \vec{E}] + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mu \vec{H}) \right\} - \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} [\vec{z}_0 \times \nabla_t \rho], \\ \vec{\gamma} &= -\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{E} + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mu [\vec{H} \times \vec{z}_0] \right) - \nabla_t J_z. \end{aligned}$$

7.4. Операторы W_H и W_E в пространстве $L_2^4(S)$

Применительно к (10) и (12) введем две матричные дифференциальные операции

$$\begin{aligned} \tilde{W}_H X &= \begin{pmatrix} 0 & [\vec{z}_0 \times \nabla_t] \nabla_t \\ \nabla_t [\vec{z}_0 \times \nabla_t] & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\vec{z}_0 \times \nabla_t] \nabla_t \cdot \vec{H} \\ \nabla_t [\vec{z}_0 \times \nabla_t] \cdot \vec{E} \end{pmatrix}, \\ \tilde{W}_E X &= \begin{pmatrix} 0 & \nabla_t [\nabla_t \times \vec{z}_0] \\ [\nabla_t \times \vec{z}_0] \nabla_t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_t [\nabla_t \times \vec{z}_0] \cdot \vec{H} \\ [\nabla_t \times \vec{z}_0] \nabla_t \cdot \vec{E} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Введем энергетическую метрику

$$\langle X_1, X_2 \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \rho d\rho (\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2^* + \vec{H}_1 \cdot \vec{H}_2^*)$$

Наши новые операторы включают и матричные операции, и условие убывания поля на бесконечности:

$$W_H = \left\{ \begin{matrix} \tilde{W}_H \\ \vec{E}, \vec{H} \sim \frac{1}{\sqrt{\rho}}, \rho \rightarrow \infty \end{matrix} \right\}; W_E = \left\{ \begin{matrix} \tilde{W}_E \\ \vec{E}, \vec{H} \sim \frac{1}{\sqrt{\rho}}, \rho \rightarrow \infty \end{matrix} \right\}.$$

7.5. Доказательство самосопряженности операторов

Операторы W_H и W_E есть самосопряженные, если:

$$\langle WX_1, X_2 \rangle - \langle X_1, WX_2 \rangle = 0$$

Для W_H :

$$\begin{aligned}
 \langle W_H X_1, X_2 \rangle - \langle X_1, W_H X_2 \rangle &= \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \rho d\rho \\
 &\left\{ [\vec{z}_0 \times \nabla_t] \nabla_t \cdot \vec{H}_1 \cdot \vec{E}_2^* + \nabla_t [\vec{z}_0 \times \nabla_t] \cdot \vec{E}_1 \cdot \vec{H}_2^* - \vec{E}_1 \cdot [\vec{z}_0 \times \nabla_t] \nabla_t \cdot \vec{H}_2^* - \vec{H}_1 \cdot \nabla_t [\vec{z}_0 \times \nabla_t] \cdot \vec{E}_2^* \right\} = \\
 &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \rho d\rho \\
 &\left\{ [\vec{z}_0 \times \vec{E}_2^*] \nabla_t \nabla_t \cdot \vec{H}_1 + \vec{H}_2^* \cdot \nabla_t \nabla_t [\vec{z}_0 \times \vec{E}_1] - [\vec{z}_0 \times \vec{E}_1] \nabla_t \nabla_t \cdot \vec{H}_2^* - \vec{H}_1 \cdot \nabla_t \nabla_t [\vec{z}_0 \times \vec{E}_2^*] \right\}
 \end{aligned}$$

Выразим \vec{E} и \vec{H} через производящую функцию Ψ следующим образом:

$$\begin{cases} \vec{E} = \nabla_t \Psi \times \vec{z}_0 \\ \vec{H} = \nabla_t \Psi \end{cases},$$

где

$$\Psi = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^\infty \chi d\chi \phi_m, \quad \phi_m = \frac{B}{\sqrt{\chi}} J_m(\chi \rho) e^{im\varphi}$$

Таким образом Ψ -произвольная функция поперечных координат (используется преобразование Фурье-Бесселя). Подставим:

$$\begin{aligned}
 \langle W_H X_1, X_2 \rangle - \langle X_1, W_H X_2 \rangle &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \rho d\rho \left\{ \nabla_t \Psi_2^* \cdot \nabla_t \nabla_t \cdot \nabla_t \Psi_1 + \nabla_t \Psi_2^* \cdot \nabla_t \nabla_t \cdot \nabla_t \Psi_1 - \right. \\
 &- \nabla_t \Psi_1 \cdot \nabla_t \nabla_t \cdot \nabla_t \Psi_2^* - \nabla_t \Psi_1 \cdot \nabla_t \nabla_t \cdot \nabla_t \Psi_2^* \left. \right\} = \\
 &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \rho d\rho \left\{ \nabla_t \Psi_2^* \cdot \nabla_t \nabla_t \cdot \nabla_t \Psi_1 - \nabla_t \Psi_1 \cdot \nabla_t \nabla_t \cdot \nabla_t \Psi_2^* \right\} = \\
 &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{m_1=0}^{\infty} \int_0^\infty \chi_1 d\chi_1 \sum_{m_2=0}^{\infty} \int_0^\infty \chi_2 d\chi_2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \rho d\rho.
 \end{aligned}$$

$$\nabla_t = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2}$$

$$[\vec{z}_0 [\nabla_t \Psi \times \vec{z}_0]] = \nabla_t \Psi (\vec{z}_0 \cdot \vec{z}_0) - \vec{z}_0 (\vec{z}_0 \cdot \nabla_t \Psi) = \nabla_t \Psi$$

$$\begin{aligned}
 \nabla_t \Psi &= \sum_{m_x=0}^{\infty} \int_0^\infty \chi d\chi \nabla_t \Psi_m = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^\infty \chi d\chi \frac{B_m(\chi)}{\sqrt{\chi}} \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} J_m(\chi \rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} J_m(\chi \rho) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \frac{d^2 J_m(z)}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dJ_m(z)}{dz} + \left(1 \mp \frac{m^2}{z^2} \right) J_m(z) \right\} = 0
 \end{aligned}$$

$\chi \rho \rightarrow z$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{\rho^2} (-m^2) J_m(\chi\rho) \Big) e^{im\varphi} - \chi^2 J_m(\chi\rho) \Big\} = \\
 & \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \chi d\chi \frac{B_m(\chi)}{\sqrt{\chi}} (-\chi^2 J_m(\chi\rho)) e^{im\varphi} = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \chi d\chi (-\chi^2) \Psi_m \\
 & \nabla_t \Psi_m = \vec{\rho}_0 \frac{\partial}{\partial \rho} \Psi_m + \vec{\varphi}_0 \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{B_m}{\chi} e^{im\varphi} \frac{d}{d\rho} J_m(\chi\rho) \vec{\rho}_0 + \frac{B_m}{\sqrt{\chi}} \frac{1}{\rho} J_m(\chi\rho) i m e^{im\varphi} \vec{\varphi}_0 \\
 & \nabla_t \Psi_{m_1} \cdot \nabla_t \Psi_{m_2}^* = \frac{B_{m_1}(\chi_1) B_{m_2}(\chi_2)}{\sqrt{\chi_1} \sqrt{\chi_2}} e^{i(m_1-m_2)\varphi} - \\
 & \left\{ \frac{d}{d\rho} J_{m_1}(\chi_1\rho) \cdot \frac{d}{d\rho} J_{m_2}(\chi_2\rho) + \frac{m_1 m_2}{\rho^2} J_{m_1}(\chi_1\rho) J_{m_2}(\chi_2\rho) \right\} \\
 & J_m(\chi\rho) = \frac{\chi\rho}{2m} (J_{m-1}(\chi\rho) + J_{m+1}(\chi\rho)) \\
 & \frac{d}{d\rho} J_m(\chi\rho) = \frac{\chi}{2} (J_{m-1}(\chi\rho) - J_{m+1}(\chi\rho)) \\
 & J_m(z) = \frac{z}{2m} (J_{m-1}(z) + J_{m+1}(z)) \\
 & \frac{d}{d\rho} J_m(z) = \frac{1}{2} (J_{m-1}(z) - J_{m+1}(z)) \\
 & \left\{ \nabla_t \Psi_{2m_2}^* \cdot \nabla_t (-\chi_1^2) \Psi_{1m_1} - \nabla_t \Psi_{1m_1} \cdot \nabla_t (-\chi_2^2) \Psi_{2m_2}^2 \right\} = \\
 & = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \chi_1 d\chi_1 \int_0^{\infty} \chi_2 d\chi_2 \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \frac{B_{m_1}(\chi_1) B_{m_2}(\chi_2)}{\sqrt{\chi_1} \sqrt{\chi_2}} (\chi_1^2 - \chi_2^2) \\
 & \int_0^{\infty} \rho d\rho \left\{ \frac{dJ_{m_1}}{d\rho}(\chi_1\rho) \frac{d}{d\rho} J_{m_2}(\chi_2\rho) + \frac{m_1 m_2}{\rho^2} J_{m_1}(\chi_1\rho) J_{m_2}(\chi_2\rho) \right\} \\
 & \int_0^{2\pi} e^{i(m_1-m_2)\varphi} d\varphi = \int_0^{\infty} \chi_1 d\chi_1 \int_0^{\infty} \chi_2 d\chi_2 \sum_{m_1=0}^{\infty} \frac{B_{m_1}(\chi_1) B_{m_2}(\chi_2)}{\sqrt{\chi_1} \sqrt{\chi_2}} (\chi_1^2 - \chi_2^2) \\
 & \left\{ \frac{d}{d\rho} J_{m_1}(\chi_1\rho) \frac{d}{d\rho} J_{m_2}(\chi_2\rho) + \frac{m_1 m_2}{\rho^2} J_{m_1}(\chi_1\rho) J_{m_2}(\chi_2\rho) \right\} = \frac{\chi_1 \chi_2}{4} (J_{m_1-1}(\chi_1\rho) - J_{m_1+1}(\chi_1\rho)) \cdot \\
 & \cdot (J_{m_1-1}(\chi_2\rho) - J_{m_1+1}(\chi_2\rho)) + \frac{m_1 m_1}{\rho^2} \frac{\chi_1 \chi_2 \rho^2}{4 m_1^2} \\
 & (J_{m_1+1}(\chi_1\rho) + J_{m_1+1}(\chi_1\rho)) (J_{m_1-1}(\chi_2\rho) + J_{m_1+1}(\chi_2\rho)) = \\
 & = \frac{\chi_1 \chi_2}{4} \left(2 (J_{m_1-1}(\chi_1\rho) J_{m_1-1}(\chi_2\rho) + J_{m_1+1}(\chi_1\rho) J_{m_1+1}(\chi_2\rho)) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta(\chi_1 - \chi_2) &= \sqrt{\chi_1 \chi_2} \int_0^\infty \rho d\rho J_{m_1}(\chi_1 \rho) J_{m_1}(\chi_2 \rho) \\
 &= \int_0^\infty \chi_1 d\chi_1 \int_0^\infty \chi_2 d\chi_2 \sum_{m_1=0}^\infty \frac{B_{m_1}(\chi_1) B_{m_2}(\chi_2)}{\sqrt{\chi_1 \chi_2}} (\chi_1^2 - \chi_2^2) \frac{1}{2} \sqrt{\chi_1 \chi_2} 2\delta(\chi_1 - \chi_2) = \\
 &= \sum_{m_1=0}^\infty \int_0^\infty \chi_1 d\chi_1 \int_0^\infty \chi_2 d\chi_2 B_{m_1}(\chi_1) B_{m_2}(\chi_2) (\chi_1 + \chi_2) (\chi_1 - \chi_2) \delta(\chi_1 - \chi_2) = \\
 &= \sum_{m_1=0}^\infty \int_0^\infty \chi_1 d\chi_1 B_{m_1}(\chi_1) B_{m_1}(\chi_1) 2\chi_1 \cdot 0 = 0
 \end{aligned}$$

Докажем то же самое для W_E :

$$\begin{aligned}
 \langle W_E X_1, X_2 \rangle - \langle X_1, W_E X_2 \rangle &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \rho d\rho \\
 &\left\{ \nabla_t [\nabla_t \times \vec{z}_0] \cdot \vec{H}_1 \cdot \vec{E}_2^* + [\nabla_t \times \vec{z}_0] \cdot \vec{H}_2^* \cdot [\nabla_t \times \vec{z}_0] \nabla_t \cdot \vec{E}_1 + \vec{H}^* \cdot [\nabla_t \times \vec{z}_0] \nabla_t \cdot \vec{E} - \right. \\
 &\left. - \vec{E} \cdot \nabla_t [\nabla_t \times \vec{z}_0] \cdot \vec{H}^* - \vec{H} \cdot [\nabla_t \times \vec{z}_0] \nabla_t \cdot \vec{E}^* \right\} =
 \end{aligned}$$

Докажем и для вектор-функций вида

$$\begin{aligned}
 Z &= \begin{pmatrix} \nabla_t \Phi_n \\ \vec{z}_0 \times \nabla_t \Phi \end{pmatrix}, \\
 \Phi &= \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty \xi d\xi \Phi_n; \Phi_n = \frac{A_n(\xi)}{\sqrt{\xi}} J_n(\xi \rho) e^{in\varphi} \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \rho d\rho \\
 &\left\{ \vec{E}^* \cdot \nabla_t \nabla_t \cdot [\vec{z}_0 \times \vec{H}] [\vec{H}^* \times \vec{z}_0] \cdot \nabla_t \nabla_t \cdot \vec{E} - \right. \\
 &\left. - \vec{E} \cdot \nabla_t \nabla_t \cdot [\vec{z}_0 \times \vec{H}^*] + [\vec{H} \times \vec{z}_0] \cdot \nabla_t \nabla_t \cdot \vec{E}^* \right\} = \\
 &= \frac{-1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \rho d\rho \\
 &\left\{ \nabla_t \tilde{\Phi}_2^* \cdot \nabla_t \nabla_t \cdot \nabla_t \Phi_1 + \nabla_t \tilde{\Phi}_2^* \cdot \nabla_t \nabla_t \cdot \nabla_t \Phi_1 - \right. \\
 &\left. - \nabla_t \Phi_2 \cdot \nabla_t \nabla_t \cdot \nabla_t \tilde{\Phi}_1^* - \nabla_t \Phi \cdot \nabla_t \nabla_t \cdot \nabla_t \tilde{\Phi}^* \right\} = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \rho d\rho
 \end{aligned}$$

$$\left\{ \nabla_t \Phi \cdot \nabla_t \nabla_t \cdot \nabla_t \tilde{\Phi}^* - \nabla_t \tilde{\Phi}^* \cdot \nabla_t \nabla_t \cdot \nabla_t \Phi \right\} = 0$$

Доказательство – аналогично ранее представленному.

Собственные векторы и собственные числа W_H и W_E

$$W_H Y_m = P_m Y_m \quad W_E Z_n = q_n Z_n$$

$$Y_m = \begin{pmatrix} \vec{E}_m' \\ \vec{H}_m' \end{pmatrix} \quad Z_n = \begin{pmatrix} \vec{E}_n'' \\ \vec{H}_n'' \end{pmatrix}$$

Подставим определения операторов W_H и W_E :

$$\begin{cases} [\vec{z}_0 \times \nabla_t] \nabla_t \cdot \vec{H}_m' = p \vec{E}_m' \\ [\vec{z}_0 \times \nabla_t] \nabla_t \cdot \vec{E}_m' = p \vec{H}_m' \end{cases} \quad \begin{cases} [\vec{z}_0 \times \nabla_t] \nabla_t \cdot \vec{H}_n'' = q \vec{E}_n'' \\ [\vec{z}_0 \times \nabla_t] \nabla_t \cdot \vec{E}_n'' = q \vec{H}_n'' \end{cases} \quad (13)$$

$$[\vec{z}_0 \times \nabla_t] \nabla_t \cdot \frac{1}{p} \nabla_t [\vec{z}_0 \times \nabla_t] \cdot \vec{E}_m'' = p \vec{E}_m'$$

$$[\vec{z}_0 \times \nabla_t] \underbrace{\nabla_t \cdot \nabla_t}_{\Delta_t} \cdot [\vec{E}_m' \times \vec{z}_0] = p^2 \vec{E}_m'$$

$$p_+ = -p_-, p_- = -p_+, \text{ а также}$$

$$Y_p^+ = \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} \quad Y_p^- = \begin{pmatrix} \vec{E} \\ -\vec{H} \end{pmatrix}$$

$$m > 0, \quad m < 0$$

Определим собственные векторы через производящие функции:

$$Y_{\pm m} = \begin{pmatrix} \nabla_t \Psi_m \times \vec{z}_0 \\ \pm \nabla_t \Psi_m \end{pmatrix}, \quad Z_{\pm n} = \begin{pmatrix} \nabla_t \Phi_n \\ \pm \vec{z}_0 \times \nabla_t \Phi_n \end{pmatrix} \quad (14)$$

Подставим в (13) эти определения и получим

$$\begin{aligned} 1) \quad & [\vec{z}_0 \times \nabla_t] \nabla_t \cdot (\pm \nabla_t \Psi_m) = p [\nabla_t \Psi_m \times \vec{z}_0] \\ & \pm [\vec{z}_0 \times \nabla_t] \nabla_t \Psi + p [\vec{z}_0 \times \nabla_t \Psi_m] = 0 \\ & \pm \nabla_t \Psi + p \Psi_m = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

2)

$$\begin{aligned} & \nabla_t [\vec{z}_0 \times \nabla_t] \cdot [\nabla_t \Psi_m \times \vec{z}_0] = \pm p \nabla_t \Psi_m \\ & \nabla_t (\vec{z}_0 \cdot [\vec{z}_0 \times \nabla_t] \times \nabla_t \Psi_m) = \pm p \nabla_t \Psi_m \\ & \nabla_t (\vec{z}_0 \cdot \{ \nabla_t (\vec{z}_0 \cdot \nabla_t \Psi_m) - \vec{z}_0 (\nabla_t \times \nabla_t \Psi_m) \}) = \pm p \nabla_t \Psi_m \\ & -\nabla_t \nabla_t \cdot \nabla_t \Psi_m \mp p \nabla_t \Psi_m = 0 \\ & \Delta_t \Psi_m + p \Psi_m = 0 \end{aligned}$$

3)

$$\nabla_t [\nabla_t \times \vec{z}_0] \cdot \pm [\vec{z}_0 \times \nabla_t \Phi_n] = q \nabla_t \Phi_n$$

$$\begin{aligned}\nabla_t(\mp(\vec{z}_0 \cdot \vec{z}_0 \times \nabla_t \Phi) - q\Phi_n) &= 0 \\ \pm \Delta t \Phi_n + q\Phi_n &= 0\end{aligned}\tag{16}$$

4)

$$[\nabla_t \times \vec{z}_0] \nabla_t \cdot \nabla_t \Phi_n = q \pm [\vec{z}_0 \times \nabla_t \Phi_n]$$

$$(\nabla_t \pm q)\Phi_n = 0$$

$$(\nabla_t + p)\Psi_m = 0 \quad (\nabla_t + q)\Phi_n = 0$$

$$\Psi_m = B_m \frac{J_m(\chi\rho)}{\sqrt{\chi}} e^{im\varphi} \quad \Phi_n = A_n \frac{J_n(\xi\rho)}{\sqrt{\xi}} e^{in\varphi}$$

$B_m(\chi)$ и $A_n(\xi)$ найдем из условий нормировки

$$\langle Y_m(\chi), Y_{m'}(\chi') \rangle = \delta_{mm'} \delta(\chi - \chi')$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \rho d\rho \left\{ [\nabla_t \Psi_m(\chi) \times \vec{z}_0] \cdot [\nabla_t \Psi_{m'}^*(\chi') \times \vec{z}_0] + \right.$$

$$\left. + \nabla_t \Psi_m(\chi) \cdot \nabla_t \Psi_{m'}^*(\chi') \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \rho d\rho \nabla_t \Psi_m(\chi) \cdot \nabla_t \Psi_{m'}(\chi') =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \rho d\rho \frac{B_m(\chi) B_{m'}(\chi')}{\sqrt{\chi \chi'}} e^{i(m-m')\varphi}$$

$$\nabla_t \Psi_m = \frac{B_m(\chi)}{\sqrt{\chi}} \left(e^{im\varphi} \frac{\chi}{2} (J_{m-1}(\chi\rho) - J_{m+1}(\chi\rho)) \vec{\rho}_0 + \right.$$

$$\left. + \vec{\varphi}_0 \frac{1}{\rho} J_m(\chi\rho) i m e^{im\varphi} \right) = \frac{B_m(\chi)}{\sqrt{\chi}} e^{im\varphi} \cdot \left(\frac{\chi}{2} (J_{m-1}(\chi\rho) - J_{m+1}(\chi\rho)) \vec{\rho}_0 + \frac{1}{\rho} J_m(\chi\rho) i m \vec{\varphi}_0 \right)$$

$$\nabla_t \Psi_1 = \frac{B_1(\chi)}{\sqrt{\chi}} \chi J_1(\chi\rho) \vec{\rho}_0$$

$$\left\{ \frac{\chi \chi'}{4} (J_{m-1}(\chi\rho) - J_{m+1}(\chi\rho)) (J_{m'-1}(\chi'\rho) - J_{m'+1}(\chi'\rho)) + \frac{1}{\rho^2} J_m(\chi\rho) J_{m'}(\chi'\rho) \right\}' =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{i(m-m')\varphi} \int_0^\infty \rho d\rho \frac{B_m(\chi) B_{m'}(\chi')}{\sqrt{\chi \chi'}}$$

$$\left\{ \frac{\chi \chi'}{2} (J_{m-1}(\chi\rho) - J_{m'-1}(\chi'\rho)) + (J_{m+1}(\chi\rho) - J_{m'+1}(\chi'\rho)) \right\} =$$

$$= \delta_{mm'} \cdot B_m(\chi) B_{m'}(\chi') \delta(\chi - \chi') = \delta_{mm'} \delta(\chi - \chi')$$

$$B_m(\chi) = 1$$

$$A_n(\xi) = 1$$

7.6. Докажем, что векторы $Y_{\pm m}$ и $Z_{\pm n}$ ортогональны:

$$\begin{aligned}
\langle Y_m, Z_n \rangle &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \rho d\rho \nabla_t \Phi_n^* \cdot [\nabla_t \Psi_m + \vec{z}_0] + [\vec{z}_0 \times \nabla_t \Phi_n^*] \cdot \nabla_t \Psi_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \rho d\rho \\
&\left\{ \vec{z}_0 \cdot [\nabla_t \Phi_n^* \times \nabla_t \Psi_m] \right\} = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \rho d\rho e^{i(m-n)\varphi} (\vec{z}_0 \cdot \vec{z}_0) \times \sqrt{\frac{\xi}{\chi}} \left(-\frac{n}{\xi\rho} J_n(\xi\rho) + J_{n-1}(\xi\rho) \right) \frac{1}{\rho} J_m(\chi\rho) im \\
\frac{dJ_m(\chi\rho)}{\chi d\rho} &= J_{m-1}(\chi\rho) - \frac{m}{\chi\rho} J_m(\chi\rho) \\
\frac{dJ_m(\chi\rho)}{\chi d\rho} &= \frac{m}{\chi\rho} J_m(\chi\rho) - J_{m+1}(\chi\rho) \\
&-(\vec{z}_0 \cdot \vec{z}_0) \times \sqrt{\frac{\chi}{\xi}} \left(\frac{1}{\rho} J_n(\xi\rho) (-in) \left(\frac{m}{\chi\rho} J_m(\chi\rho) - J_{m+1}(\chi\rho) \right) \right) = \\
&= \delta_{mn} \int_0^\infty \rho d\rho (im) \frac{1}{\rho} \left(\sqrt{\frac{\xi}{\chi}} J_n(\chi\rho) J_{n-1}(\xi\rho) \times \sqrt{\frac{\chi}{\xi}} - J_n(\xi\rho) J_{n+1}(\chi\rho) \right) = \\
&= im\delta_{mn} \left(\left\{ \begin{array}{cc} \frac{\xi^{n-1}}{\chi^n} & (\xi < \chi) \\ \frac{1}{2^\xi} & (\xi = \chi) \\ 0 & (\xi > \chi) \end{array} \right\} \sqrt{\frac{\xi}{\chi}} \left\{ \begin{array}{cc} \frac{\xi^n}{\chi^{n+1}} & (\xi < \chi) \\ \frac{1}{2^\xi} & (\xi = \chi) \\ 0 & (\xi > \chi) \end{array} \right\} \sqrt{\frac{\chi}{\xi}} \right) = 0
\end{aligned}$$

Прудников 1983 с.209 2.13.31

$$\int_0^\infty J_n(at) J_{n-1}(bt) dt = \begin{cases} \frac{b^{n-1}}{a^n} & b < a \\ \frac{1}{2b} & b = a \\ 0 & b > a \end{cases}$$

7.7. Разложение произвольного вектора ЭМП имеет вид

$$\begin{aligned}
X(\vec{r}, z, t) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty d\chi A_m(z, t, \chi) Y_m(\vec{r}, \chi) + \\
&+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty d\xi B_n(z, t, \xi) Z_n(\vec{r}, \xi)
\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi \left\{ A_m \begin{pmatrix} \nabla_t \Psi_m \times \vec{z}_0 \\ \nabla_t \Psi_m \end{pmatrix} + A_{-m} \begin{pmatrix} \nabla_t \Psi_m \times \vec{z}_0 \\ -\nabla_t \Psi_m \end{pmatrix} \right\} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} d\xi \left\{ B_n \begin{pmatrix} \nabla_t \Psi_n \\ \nabla_t \Phi_n \times \vec{z}_0 \end{pmatrix} + B_{-n} \begin{pmatrix} \nabla_t \Psi_n \\ -\nabla_t \Phi_n \times \vec{z}_0 \end{pmatrix} \right\}$$

Введём новые коэффициенты

$$\begin{aligned} A_m + A_{-m} &= e_m & B_n + B_{-n} &= a_n \\ A_m - A_{-m} &= h_m & B_n - B_{-n} &= b_n \end{aligned} \quad (18)$$

Разложения поперечных компонент поля

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi e_m [\nabla_t \Psi_m \times \vec{z}_0] + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} d\xi a_n \nabla_t \Phi_n; \\ \vec{H} &= \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi h_m \nabla_t \Psi_m + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} d\xi b_n [\vec{z}_0 \times \nabla_t \Phi_n]; \end{aligned} \quad (19)$$

$$\Psi_m = \frac{J_{m-1}(\chi\rho)}{\sqrt{\chi}} e^{i(m-1)\varphi}, \quad \Phi_n = \frac{J_{n-1}(\xi\rho)}{\sqrt{\xi}} e^{i(n-1)\varphi}$$

Подставим (19) в (3):

$$\begin{aligned} \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mu H_z) &= \nabla_t \cdot [\vec{z}_0 \times \vec{E}] = -\vec{z}_0 \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi e_m [\nabla_t \times [\nabla_t \Psi_m \times \vec{z}_0]] + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} d\xi a_n [\nabla_t \times \nabla_t \Phi_n] \right) = \\ &= +\vec{z}_0 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi e_m \vec{z}_0 (\nabla_t \cdot \nabla_t \Psi_m) = \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi e_m (-\chi^2) \Psi_m = -\sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi e_m \chi^2 \Psi_m. \end{aligned}$$

Значит

$$\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mu H_z) = -\sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi e_m \chi^2 \Psi_m \quad (20)$$

Подставим (19) в (1)

$$\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mu H_z) = -\nabla_t \cdot \vec{H} = +\sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi h_m \chi^2 \Psi_m \quad (21)$$

Подставим (10) в (4)

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon E_z) &= \nabla_t \cdot [\vec{H} \times \vec{z}_0] - J_z = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} d\xi b_n \nabla_t \cdot [[\vec{z}_0 \times \nabla_t \Phi_n] \times \vec{z}_0] - J_z = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} d\xi b_n \xi^2 \Phi_n - J_z. \end{aligned} \quad (22)$$

Подставим (19) в (2)

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon E_z) = -\nabla_t \vec{E} + \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \rho = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} d\xi a_n \xi^2 \Phi_n + \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \rho \quad (23)$$

7.8. Проектирование уравнений Максвелла на базис

По аналогии с Е- и Н- волнами в свободном пространстве, введем разложение предельных компонент поля:

$$\left. \begin{aligned} H_z &= -\sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi \chi^2 A_m^H(\chi, z, t) \Psi_m; \\ E_z &= -\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} d\xi \xi^2 A_n^E(\xi, z, t) \Phi_n \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Подставим (24) в (20-23)

$$\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mu A_m^H = e_m \quad (25)$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \mu A_m^H = -h_m \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} d\xi \xi^2 (-\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon A_n^E) + b_n) \Phi_n &= J_z; \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} d\xi \xi^2 \Phi_n \Phi_{n'}^*(\xi') (-\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon A_n^E) + b_n) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho J_z \Phi_{n'}^*(\xi'); \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho \frac{\xi^2}{\sqrt{\xi \xi'}} J_{n-1}(\varepsilon \rho) J_{n'-1}(\varepsilon' \rho) e^{i(n-n')\varphi} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho J_z \Phi_{n'}^*(\xi'); \\ -\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon A_n^E(\xi)) + b_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho J_{0z} \Phi_n^*(\xi); \\ \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} d\xi \xi^2 \Phi_n (-\frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon A_n^E) - a_n) &= \frac{\rho_e}{\varepsilon_0 \varepsilon}; \end{aligned} \quad (27)$$

по аналогии:

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 \varepsilon} \Phi_{n'}^*(\xi') &\rightarrow \delta(\xi - \xi') \delta_{nn'}; \\ -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon A_n^E) - a_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 \varepsilon} \Phi_n^*(\xi) \end{aligned} \quad (28)$$

Подставим разложения (19) и (24) в векторные уравнения (5) и (6):

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi (-\chi^2 A_m^H) [\nabla_t \Psi_m \times \vec{z}_0] &= \sum_{m=1}^{\infty} d\chi [\nabla_t \Psi_m \times \vec{z}_0] \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon e_m) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} d\xi \nabla_t \Phi_n \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon a_n) + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi [\nabla_t \Phi_m \times \vec{z}_0] \frac{\partial}{\partial z} h_m &+ \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} d\xi \nabla_t \Phi_n \frac{\partial}{\partial z} b_n + \vec{j}_0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} d\xi [\vec{z}_0 \times \nabla_t \Phi_n] (-\xi^2 A_n^E) &= \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi \nabla_t \Phi_m \frac{\partial}{\partial z} e_m + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} d\xi [\vec{z}_0 \times \nabla_t \Phi_n] \frac{\partial}{\partial z} a_n + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi \nabla_t \Psi_m \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mu h_m + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} d\xi [\vec{z}_0 \times \nabla_t \Phi_n] \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mu b_n. \end{aligned}$$

Отсюда, пользуясь ортогональностью мембранных функций, получим следующие уравнения:

$$-\chi^2 A_m^H = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon e_m) + \frac{\partial}{\partial z} h_m + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho [\nabla_t \Psi_m^* \chi \vec{z}_0];$$

$$(*) \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon a_n) + \frac{\partial}{\partial z} b_n + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho \nabla_t \Phi_n^* \vec{j}_0 = 0;$$

$$(**) \frac{\partial}{\partial z} e_m + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mu h_m = 0.$$

Подставим сюда (25-28):

$$-\chi^2 A_m^H = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mu A_m^H \right) \pm \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} (\mu A_m^H) + j_{0m};$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \mu - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \mu - \chi^2 \right\} A_m^H = j_{0m};$$

$$-\xi^2 A_n^E = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon A_n^E) - \frac{\rho_{0n}}{\varepsilon_0 \varepsilon} \right) + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mu \left(\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon A_n^E) - j_{0z} \right);$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial z} \varepsilon - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mu \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon \right\} A_n^E = -\frac{\partial}{\partial z} \frac{\rho_{0n}}{\varepsilon_0 \varepsilon} - \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mu j_{0z},$$

где

$$j_{0m} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho [\nabla_t \Psi_m^* \times \vec{z}_0] \vec{j}_0;$$

$$\rho_{0n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho \Phi_n^* \rho_0;$$

$$j_{0z} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho J_{0z} \Phi_n^*.$$

Докажем, что пара уравнений ((*), (**)) является следствием (25-28):

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon A_n^E) - \frac{\rho_{0n}}{\varepsilon_0 \varepsilon} \right\} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon A_n^E(\xi)) - j_{0z_n} \right\} + j_{0n} = 0; \\
 & -\frac{\partial}{\partial t} \rho_{0n} - \frac{\partial}{\partial z} j_{0z_n} + j_{0n} = 0; \\
 & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \rho d\rho \left\{ \Phi_n^* \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho_0 + \frac{\partial}{\partial z} J_{0z} \right) - \nabla_t \Phi_n^* \vec{J}_o \right\} = 0; \\
 & \nabla_t (\Phi_n^* \vec{J}_o) = \vec{J}_o \nabla_t \Phi_n^* + \Phi_n^* \nabla_t \vec{J}_o; \\
 & \int_0^{2\pi} d\varphi \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \rho d\rho \nabla_t (\Phi_n^* \vec{J}_o) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} R d\varphi \Phi_n^* \vec{J}_o = 0; \\
 & \vec{J}_o = J e^{in'\varphi} \quad n' \neq n, mo \quad \int = 0; \\
 & \frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial z} J_{0z} + \nabla_t \vec{J}_o = 0; \\
 2) \quad & \frac{\partial}{\partial z} \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mu A_m^H + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mu \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \mu (-A_m^H) = 0
 \end{aligned}$$

7.9. Система эволюционных уравнений

H-волны:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \mu - \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \mu + \chi^2 \right\} A_m^H = -j_{0m}; \\
 & \begin{cases} H_z = -\sum_{m=1}^\infty \int_0^\infty d\chi \chi^2 A_m^H \Psi_m; \\ \vec{E} = \sum_{m=1}^\infty \int_0^\infty d\chi [\nabla_t \Psi_m \times \vec{z}_0] \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mu A_m^H; \\ \vec{H} = \sum_{m=1}^\infty \int_0^\infty d\chi \nabla_t \Psi_m \left(-\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \mu A_m^H \right); \end{cases} \\
 & j_{0m} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \rho d\rho [\nabla_t \Psi_m^* \times \vec{z}_0] \vec{J}_0; \\
 & \Psi_m = \frac{J_{m-1}(\chi\rho)}{\sqrt{\chi}} e^{i(m-1)\varphi}.
 \end{aligned}$$

E-волны:

$$\left\{ \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \mu \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon - \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial z} \varepsilon + \xi^2 \right\} A_n^E = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\rho_{0n}}{\varepsilon_0 \varepsilon} + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mu j_{0z};$$

$$\begin{cases}
E_z = -\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} d\xi \xi^2 A_n^E \Phi_n; \\
\vec{E} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} d\xi \nabla_t \Phi_n \left(-\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon A_n^E) - \frac{\rho_{0n}}{\varepsilon_0 \varepsilon} \right); \\
\vec{H} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} d\xi [\vec{z}_0 \times \nabla_t \Phi_n] \left(\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon A_n^E) - j_{0z} \right); \\
\rho_{0n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho \Phi_n^* \rho_0; \\
j_{0z} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho J_{0z} \Phi_n^*; \\
\Phi_n = \frac{J_{n-1}(\xi \rho)}{\sqrt{\xi}} e^{i(n-1)\varphi}.
\end{cases}$$

7.10. Методы решения эволюционных уравнений

7.10.1. Метод функции Римана

Для неоднородного уравнения типа Клейна-Гордона

$$\left\{ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \chi^2 \right\} A = j,$$

описывающего эволюцию продольной составляющей компоненты поля соответствующей моды, возбужденной сторонним источником, вклад которого в данную моду задается функцией в правой части этого уравнения, существует решение, полученное методом функции Римана

$$A = \frac{c}{2} \int_0^{\infty} dz' \int_0^{\infty} dt' J_0 \left(\chi \sqrt{c^2 (t-t')^2 - (z-z')^2} \right) j,$$

в котором функция Бесселя есть решение для плоского источника тока или заряда с временной зависимостью в виде дельта-функции Дирака и с распределением в поперечной плоскости как у соответствующей моды.

Данный метод, отражающий принцип суперпозиции, можно применять, если нам известно пространственно-распределение стороннего источника.

7.10.2. Метод разделения переменных

Метод разделения переменных (метод Фурье) применяется для нахождения общего решения уравнения. При этом источники задаются в начальных (граничных) условиях для эволюционного коэффициента. Суть

этого метода состоит в том, чтобы в исходном уравнении отделить зависимости решения от одной и от другой переменной, что дает возможность представить решение в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одной переменной. После этого для каждой из этих функций записывается отдельное обыкновенное дифференциальное уравнение. Применение данного метода к уравнению Клейна-Гордона дает обычное решение, аналогичное применению преобразования Фурье по времени. Но можно предварительно произвести в данном уравнении замены переменных, получить новое уравнение в частных производных, которое также можно решать методом Фурье. Методы теории групп позволяют не только найти все возможные замены переменных, но и доказать, что других замен переменных, приводящих к уравнению с разделяющимися переменными, не существует. Такое исследование уравнения Клейна-Гордона было проведено в работе [Миллер У. мл. Симметрия и разделение переменных. – М.: Мир, 1981. – 342 с.]. Всего найдено десять вариантов подстановок, при которых переменные разделяются. В работе [Kalnins E.G. On the separation of variables for the Laplace equation $\Delta\psi + k^2\psi = 0$ in two – and three–dimensional Minkowski space // SIAM J. Math. Anal. – 1975. – V.6, N2. – P.340–374.] приводятся все варианты замен переменных одномерного уравнения Клейна-Гордона с подробным их анализом с точки зрения покрытия решениями конуса Минковского. Это вызвано тем, что не все подстановки приводят к решениям, существующим для всех необходимых z и t . Первый простейший вариант замены переменных приводит к решению в виде экспонент, эквивалентному применению преобразованию Фурье по временной переменной, что фактически для нас приводит к исчезновению причинно-следственных связей в решении нестационарной задачи. Наиболее интересна и перспективна с точки зрения возможности получения аналитических решений вторая замена переменных:

$$ct = \nu \operatorname{ch} \nu; \quad z = \nu \operatorname{sh} \nu,$$

или, наоборот,

$$\begin{aligned} \nu &= \sqrt{c^2 t^2 - z^2}; & 0 \leq \nu < \infty; \\ \nu &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{ct + z}{ct - z} \right); & -\infty < \nu < \infty, \end{aligned}$$

имея ввиду известную формулу $\operatorname{arch} \chi = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\chi}{1-\chi}$, при $|\chi| < 1$.

Производя данную замену переменных в однородном уравнении Клейна-Гордона $\left\{ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \chi^2 \right\} A = 0$, получим новое уравнение

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \nu^2} + \frac{1}{\nu} \frac{\partial A}{\partial \nu} + \chi^2 A - \frac{1}{\nu^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \nu^2} = 0$$

с разделяющимися переменными, что легко проверить при подстановке $A = U(\nu)V(\nu)$. В результате, получим новое уравнение

$$\frac{1}{U} \{ \nu^2 U'' + \nu U' + \chi^2 \nu^2 U \} - \frac{V''}{V} = 0,$$

состоящее из двух слагаемых, зависящих только от своей переменной, и, согласно основной идее нахождения решения методом разделения переменных, мы будем полагать, что каждое слагаемое равняется какому-то числу:

$$\frac{V''}{V} = \mathcal{G}^2; \quad \frac{\nu^2 U'' + \nu U' + \chi^2 \nu^2 U}{U} = \mathcal{G}^2,$$

где \mathcal{G} – любое число: натуральное, целое, действительное, комплексное; при этом, как легко видеть, исходное уравнение удовлетворяется всегда. Полученные соотношения приводят к замене одного уравнения второго порядка в частных производных на два обыкновенных дифференциальных уравнения второго порядка

$$\begin{cases} U'' + \frac{1}{\nu} U' + \left(\chi^2 - \frac{\mathcal{G}^2}{\nu^2} \right) U = 0; \\ V'' - \mathcal{G}^2 V = 0, \end{cases}$$

решения которых хорошо известны:

$$\begin{aligned} U_{\mathcal{G}}(\nu) &= B_{\mathcal{G}} J_{\mathcal{G}}(\chi \nu) + C_{\mathcal{G}} Y_{\mathcal{G}}(\chi \nu); \\ V_{\mathcal{G}}(\nu) &= \tilde{B}_{\mathcal{G}} e^{\mathcal{G} \nu} + \tilde{C}_{\mathcal{G}} e^{-\mathcal{G} \nu}, \end{aligned}$$

где B и C – константы, подлежащие нахождению в ходе решения соответствующих задач. Подстановка данных решений в исходное уравнение после возврата к старым переменным дает общее решение уравнения Клейна-Гордона

$$A_{\mathcal{G}}^{\pm}(z, t) = U_{\mathcal{G}} V_{\mathcal{G}} = \left(\frac{ct \mp z}{ct \pm z} \right)^{\frac{\mathcal{G}}{2}} \left\{ B_{\mathcal{G}}^{\pm} J_{\mathcal{G}} \left(\chi \sqrt{c^2 t^2 - z^2} \right) + C_{\mathcal{G}}^{\pm} Y_{\mathcal{G}} \left(\chi \sqrt{c^2 t^2 - z^2} \right) \right\},$$

удовлетворяющее его при любых знаках, «+» или «-», при любых константах B и C и при любых \mathcal{G} .

Сравнивая общее решение данного обобщенного волнового уравнения с хорошо известным решением обычного волнового уравнения в виде запаздывающих и опережающих функций – произвольных функций зависящих только от аргумента $ct - z$ и $ct + z$ и описывающих волны, движущиеся слева направо и справа налево соответственно, можно сделать вывод, что данное решение всегда состоит из волн, движущихся как в одном, так и в другом направлении. Выбор значений имеющих констант диктуется физическим смыслом и удобством задания начальных (граничных) условий. Используя разложение

$$1 = J_0(\chi \nu) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(\chi \nu)$$

для $A_g^\pm(0, t) = 1$

$t < 0$

$A_g = 0, B_0^+ = 1, B_{2,g}^+ = 2n \text{ при } g \geq 1, B_{2,g}^+ = 0 \text{ при } g < 1.$

Примеры решений задач

1. Излучение источника нестационарного тока с произвольным амплитудным распределением

Пусть в плоскости $z = 0$ находится источник стороннего тока или заряда с произвольным амплитудным распределением в поперечной плоскости. Функции, стоящие в правых частях уравнений Клейна-Гордона, определяются формулами

$$j_m(z, t; \chi) = \frac{\delta(z)}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty \rho d\rho \vec{j}_0(\rho, \phi, t) \cdot [\nabla \psi_m^* \times \vec{z}_0],$$

$$\rho_n(z, t; \xi) = \frac{\delta(z)}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty \rho d\rho \rho_0(\rho, \phi, t) \varphi_n^*(\rho, \phi; \xi),$$

где индексы m и n отражают угловую зависимость источника, а переменные χ и ξ – зависимость от ρ . Таким образом, находим вклад источников в возбуждение соответствующей моды электромагнитного поля в свободном пространстве. В случае синхронного возбуждения, когда

$$\vec{j}_0(\rho, \phi, t) \equiv \vec{j}_0(\rho, \phi) f_1(t); \quad \rho_0(\rho, \phi, t) \equiv \rho_0(\rho, \phi) f_2(t),$$

где $f_1(t)$ и $f_2(t)$ – произвольные функции. Видно, что временная зависимость источника совпадает с временной зависимостью коэффициентов в правых частях уравнений. Это несколько облегчает решение задачи, так как в этом случае необходимо только вычислить интегральную свертку, содержащую временную зависимость источника и переходную диаграмму – излученное поле для ступенчатой временной зависимости источника.

В случае несинфазного возбуждения получаем различные временные зависимости $j_m(z, t; \chi)$ и $\rho_n(z, t; \xi)$, не совпадающие с временными зависимостями $\vec{j}_0(\rho, \phi, t)$ и $\rho_0(\rho, \phi, t)$ соответственно. Поэтому для получения решения необходимо вычислить интегральную свертку, содержащую переходную диаграмму для случая синфазного возбуждения и временную зависимость коэффициента $j_m(z, t; \chi)$ или $\rho_n(z, t; \xi)$.

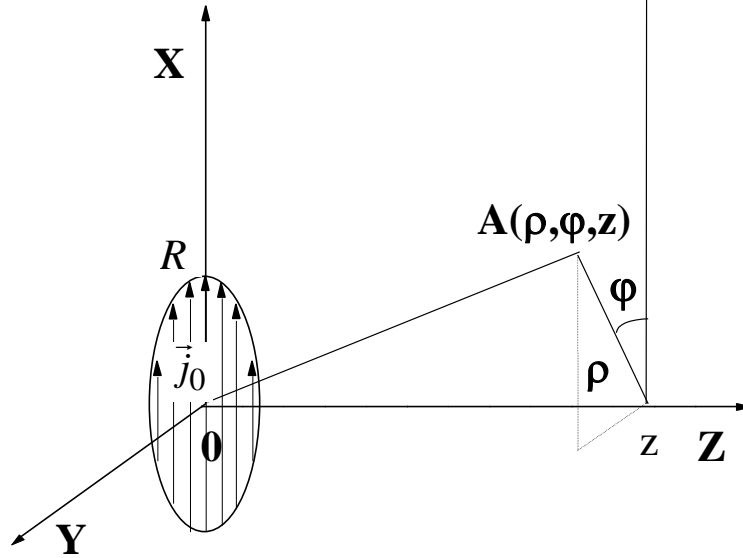
В качестве примера рассмотрим задачу излучения диска с равномерным амплитудным распределением и ступенчатой временной зависимостью плотности тока.

3.3.1. Постановка и решение задачи. Пусть начало цилиндрической системы координат совмещено с центром диска, на котором задана плотность

сторонних токов

$$\vec{j}_0(\rho, \phi, z, t) = \vec{x}_0 H(R - \rho) \delta(z) H(t),$$

где $\vec{x}_0 = \vec{\rho}_0 \cos \phi - \vec{\phi}_0 \sin \phi$ – единичный вектор декартовой системы координат, R – радиус диска.



Геометрия задачи.

Видно, что мы имеем дело с распространением Н-волны, так как источник находится в правой части уравнения и имеет вид

$$j_m(z, t; \chi) = -\frac{iR}{\sqrt{\chi}} \delta_{m,1} J_1(\chi R) \delta(z) H(t),$$

причем исчезновение зависимости от поперечных координат привело к появлению зависимости от m и χ как результат разложения \vec{j}_0 по модам.

Решение неоднородного уравнения, дополненного однородными начальными (граничными) условиями, после преобразования имеет вид

$$h_m(z, t; \chi) = -\frac{icR\delta_{m,1}J_1(\chi R)}{4\sqrt{\chi}} \int_0^{t-\frac{z}{c}} dt' J_0\left(\chi\sqrt{c^2(t-t')^2 - z^2}\right).$$

Используя известную формулу дифференцирования интеграла, зависящего от параметра, не прибегая к интегрированию, получаем амплитуду поперечной электрической компоненты поля

$$\frac{\partial}{\partial t} h_m(z, t; \chi) = -\frac{icR\delta_{m,1}J_1(\chi R)}{4\sqrt{\chi}} J_0\left(\chi\sqrt{c^2t^2 - z^2}\right).$$

Аналогичное же решение в частотной области получено только для амплитуды электрической компоненты, что можно объяснить простотой этой части решения как во временной области, так и в частотной. От интеграла избавляемся при помощи формулы

$$\int_{\zeta}^{\tau} ds e^{-i\gamma s} J_0\left(\sqrt{s^2 - \zeta^2}\right) = \frac{e^{-i\gamma\tau}}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \left[U_1(W_+, Z) + iU_2(W_+, Z) - U_1(W_-, Z) - iU_2(W_-, Z) \right],$$

где $U_n(W, Z)$ – функция Ломмеля двух переменных, $W_{\pm} = \sigma_{\pm}(\tau - \zeta)$, $Z = \sqrt{\tau^2 - \zeta^2}$, $\sigma_{\pm} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 1}$, $\tau - \zeta > 0$.

Функции Ломмеля двух переменных часто встречаются при решении таких нестационарных задач, как возбуждение акустических и электромагнитных волн в волноводах и длинных линиях источником с временной зависимостью в виде включения синусоиды или в виде функции Хевисайда. Используя тот факт, что в нашем случае

$$\begin{aligned} U_n(W_+, Z) &= U_n(W_-, Z), \text{ при четных } n, \\ U_n(W_+, Z) &= -U_n(W_-, Z), \text{ при нечетных } n, \end{aligned}$$

получаем

$$h_m(z, t; \chi) = -\frac{R\delta_{m,1}J_1(\chi R)}{2\chi^{3/2}} U_1\left(i\chi(ct - z), \chi\sqrt{c^2t^2 - z^2}\right).$$

Отсюда, при помощи формул дифференцирования

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial Z} U_n(W, Z) &= -\frac{Z}{W} U_{n+1}(W, Z); \\ 2\frac{\partial}{\partial W} U_n(W, Z) &= U_{n-1}(W, Z) + \left(\frac{Z}{W}\right)^2 U_{n+1}(W, Z), \end{aligned}$$

находим, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} h_m(z, t; \chi) &= -\frac{iR\delta_{m,1}J_1(\chi R)}{4\sqrt{\chi}} \left\{ U_0\left(i\chi(ct - z), \chi\sqrt{c^2t^2 - z^2}\right) - \right. \\ &\quad \left. - U_2\left(i\chi(ct - z), \chi\sqrt{c^2t^2 - z^2}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Проинтегрируем по χ выражения в правых частях. В силу налагаемых на интеграл условий, решение для $\vec{E}(\rho, \phi, z, t)$ сравнительно просто можно получить только на оси OZ и при $\rho > R$. В этих же областях можно найти $\vec{H}(\rho, \phi, z, t)$ и $H_z(\rho, \phi, z, t)$, вводя дополнительное ограничение: $ct - z \ll ct + z$, и используя только первое слагаемое в определении функции Ломмеля двух переменных:

$$U_n(W, Z) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{W}{Z}\right)^{n+2m} J_{n+2m}(Z).$$

Получим амплитуду продольной компоненты магнитного поля:

$$H_z = -\frac{ie^{i\phi}}{4\pi\rho(ct + z)} \sqrt{\left[\rho^2 - \left(\sqrt{c^2t^2 - z^2} - R\right)^2\right] \left[\left(\sqrt{c^2t^2 - z^2} + R\right)^2 - \rho^2\right]}.$$

Можно вывести следующую формулу:

$$\int_0^\infty J_0\left(\chi\sqrt{c^2t^2 - z^2}\right) J_1(\chi R) J_1(\chi\rho) \frac{d\chi}{\chi} =$$

$$= \frac{\rho^2 - R^2}{2\pi R\rho} \left[\arctg\left(\frac{R+\rho}{\rho-R} \operatorname{tg} \frac{\Psi}{2}\right) - \arctg\left(\frac{\rho+R}{\rho-R} \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\Psi}{2}}\right) \right] + \frac{R^2 + \rho^2}{4\pi R\rho} (\pi - 2\Psi),$$

при $\rho > R$, где

$$\Psi = 2\arcsin \sqrt{\left(c^2t^2 - z^2 - (\rho - R)^2\right)/4\rho R}, \quad \operatorname{tg} \frac{\Psi}{2} = \sqrt{\frac{c^2t^2 - z^2 - (\rho - R)^2}{(\rho + R)^2 - c^2t^2 + z^2}}.$$

Легко получить амплитуды поперечных компонент поля в области $\rho > R$:

$$\vec{E}(\rho, \phi, z, t) = \frac{ie^{i\phi}}{8\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \left\{ \vec{\phi}_0 (I_1 - 2I_2) + i\vec{\rho}_0 I_1 \right\};$$

$$\vec{H}(\rho, \phi, z, t) = \frac{ie^{i\phi}}{8\pi} \left\{ -\vec{\rho}_0 (I_1 - 2I_2) + i\vec{\phi}_0 I_1 \right\},$$

где

$$I_1 = \frac{\rho^2 - R^2}{\rho^2} \left[\arctg\left(\frac{R+\rho}{\rho-R} \operatorname{tg} \frac{\Psi}{2}\right) - \arctg\left(\frac{\rho+R}{\rho-R} \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\Psi}{2}}\right) \right] + \frac{R^2 + \rho^2}{2\rho^2} (\pi - 2\Psi),$$

$$I_2 = \arccos \frac{c^2t^2 - z^2 + \rho^2 - R^2}{2\rho\sqrt{c^2t^2 - z^2}}.$$

Поле на оси OZ имеет вид

$$\vec{E}(0, \phi, z, t) = \frac{ie^{i\phi}}{8} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \left\{ -\vec{\phi}_0 + i\vec{\rho}_0 \right\} H\left(R - \sqrt{c^2t^2 - z^2}\right),$$

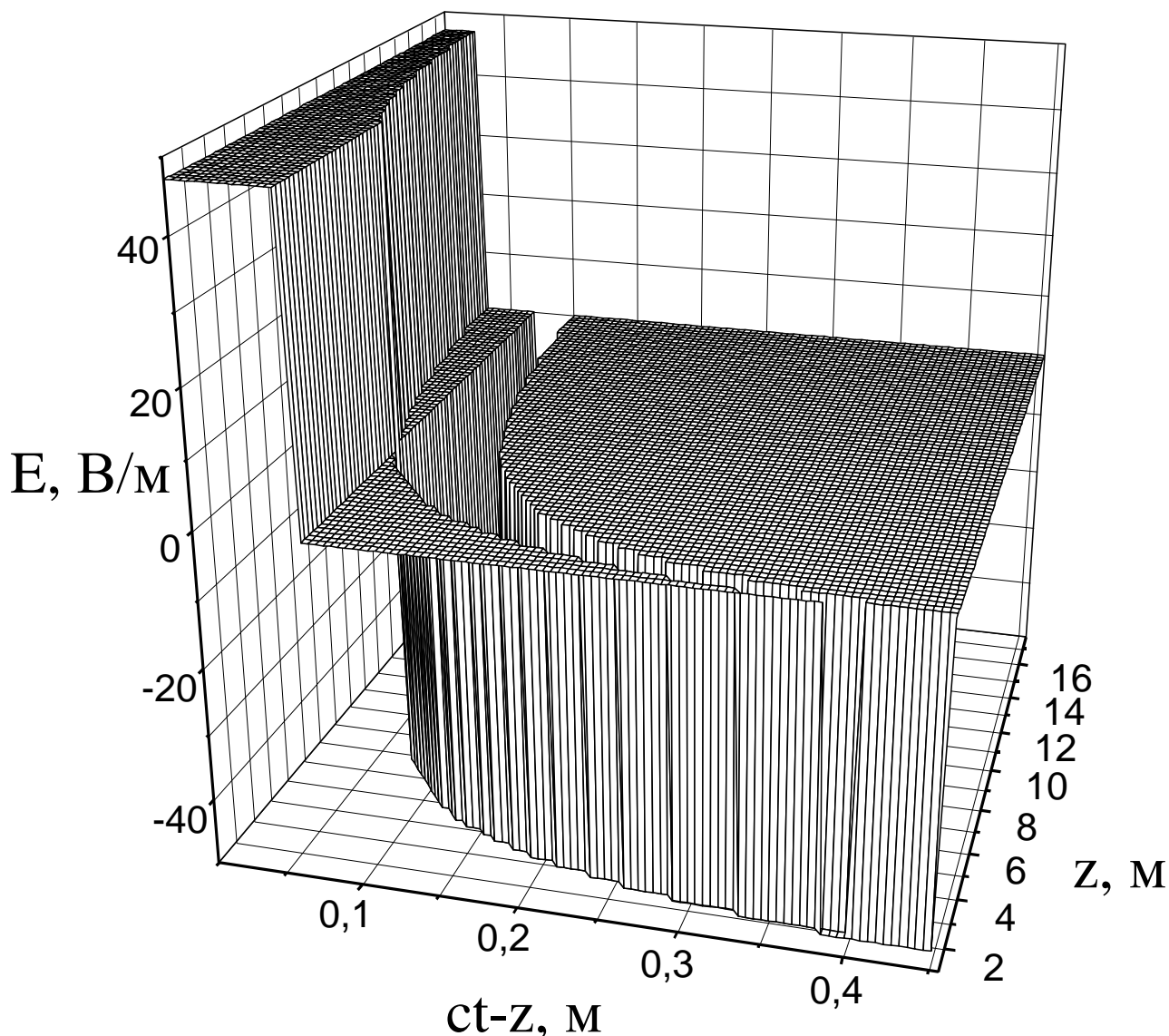
$$\vec{H}(0, \phi, z, t) = \frac{ie^{i\phi}}{8} \left\{ \vec{\rho}_0 + i\vec{\phi}_0 \right\} H\left(R - \sqrt{c^2t^2 - z^2}\right).$$

Сравнивая выражения для \vec{E} и \vec{H} , можно сделать вывод, что отношение их амплитуд вдали от диска такое же, как и в стационарном случае для дальней зоны излучателя. Второе совпадение с классическими результатами состоит в более быстром убывании амплитуды продольной компоненты поля по сравнению с поперечными, о чем свидетельствует

наличие множителя $\frac{1}{\rho(ct + z)}$ в выражении для H_z .

На рис. 3.2 изображена зависимость амплитуды поперечной

электрической компоненты поля от времени и продольной координаты при $\rho = 0$, $R = 1\text{ м}$ в случае возбуждения диска прямоугольным импульсом тока длительностью $\tau = 0,07R / c$. Данный график хорошо иллюстрирует такое явление как “электромагнитный снаряд”.



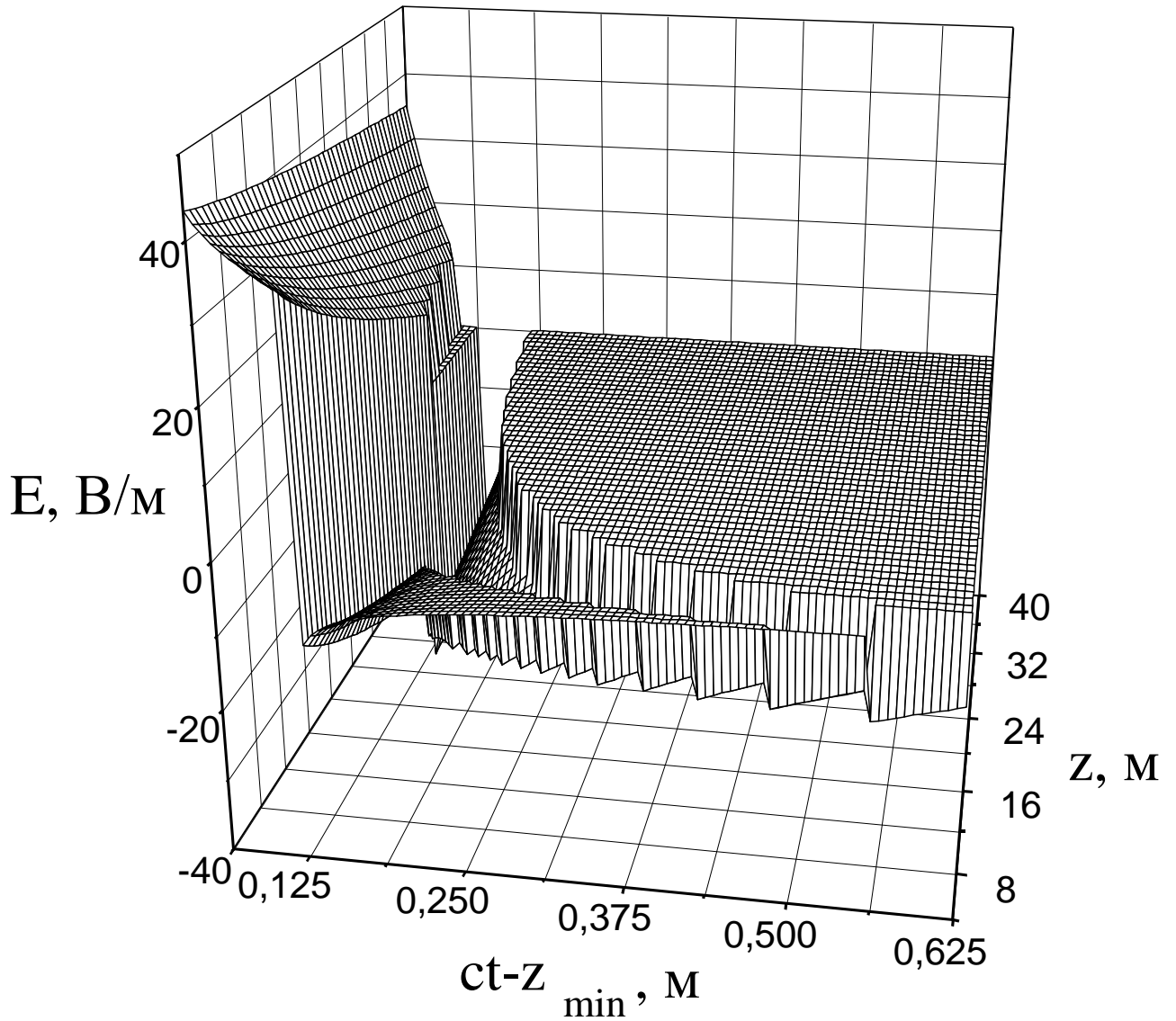
Зависимость амплитуды поперечной электрической компоненты поля от времени и продольной координаты при возбуждении диска прямоугольным импульсом тока длительностью $\tau = 0,07R / c$ ($\rho = 0$, $R = 1\text{ м}$).

Возбуждение диска прямоугольным импульсом приводит к излучению двух одинаковых прямоугольных импульсов противоположной полярности, сдвинутых относительно друг друга по времени на τ . Пока длительность этих прямоугольных импульсов больше τ , энергия сигнала остается постоянной, так как их суперпозиция представляет собой два сближающихся прямоугольных импульса. После их наложения энергия сигнала убывает пропорционально $\frac{1}{z}$. Из-за такого необычного поведения это явление было

названо “электромагнитным снарядом”. Видно, что в случае излучения прямоугольного импульса длительностью $\tau = 0,07R/c$, энергия сигнала начинает убывать только с расстояния $z \approx 7,1R$. Чем короче импульс, тем дальше отодвигается зона начала убывания энергии сигнала, а амплитуда, согласно, остается постоянной. Диск при возбуждении единичным скачком тока излучает прямоугольный импульс, начало которого соответствует приходу сигнала от ближайшей точки излучателя ($\rho = 0$), а конец – приходу сигнала от его наиболее удаленной точки ($\rho = R$). По мере удаления от диска длительность этого импульса и, следовательно, его энергия убывают обратно пропорционально z при $z \gg R$.

На следующем рисунке приведен график зависимости амплитуды электрического поля от времени и продольной координаты при $\rho = 1,001R$ для того же возбуждающего сигнала, что и в предыдущем случае. Время указано в относительных единицах: $ct - z_{\min}$, где z_{\min} – минимальное расстояние между точкой наблюдения и диском.

В отличие от предыдущего случая, амплитуда поля с расстоянием убывает, искажается форма импульса. При малых удалениях от диска большая часть энергии концентрируется вблизи переднего фронта импульса. В то же время общим является значительное убывание энергии сигнала после наложения двух ярко выраженных импульсов противоположной полярности. Сравнение рисунков иллюстрирует высокую направленность “электромагнитного снаряда”.



Зависимость амплитуды поперечной электрической компоненты поля от времени и продольной координаты при возбуждении диска прямоугольным импульсом тока длительностью $\tau = 0,07R / c$ ($\rho = 1,001R$, $R = 1$ м).

2. Излучение нестационарных полей раскрывом коаксиального волновода с бесконечным фланцем

Электромагнитное поле внутри коаксиального волновода представляется в виде

$$\vec{H}(\rho, \phi, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \nabla \psi_m(\rho, \phi) \frac{\partial}{\partial z} h_m(z, t) + \sum_{n=0}^{\infty} [\nabla \varphi_n(\rho, \phi) \times \vec{z}_0] \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} e_n(z, t) + [\nabla U(\rho, \phi) \times \vec{z}_0];$$

$$\vec{E}(\rho, \phi, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} [\vec{z}_0 \times \nabla \psi_m(\rho, \phi)] \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} h_m(z, t) + \sum_{n=0}^{\infty} \nabla \varphi_n(\rho, \phi) \frac{\partial}{\partial z} e_n(z, t) + \nabla U(\rho, \phi) \mu_0 \frac{\partial}{\partial t};$$

$$H_z(\rho, \phi, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \chi_m^2 \psi_m(\rho, \phi) h_m(z, t);$$

$$E_z(\rho, \phi, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n^2 \varphi_n(\rho, \phi) e_n(z, t),$$

где ρ, ϕ, z – цилиндрические координаты, \vec{z}_0 – орт оси волновода, ε_0 и μ_0 – электрическая и магнитная постоянные, $\psi_m(\rho, \phi)$ и $\varphi_n(\rho, \phi)$ – мембранные функции, определяющие распределение поля в сечении волновода.

Поле в свободном пространстве имеет вид

$$\vec{H}(\rho, \phi, z, t) = - \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi \nabla \psi_m^s(\rho, \phi; \chi) \frac{\partial}{\partial z} A_m(z, t; \chi) + \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} d\xi [\vec{z}_0 \times \nabla \varphi_n^s(\rho, \phi; \xi)] \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} B_n(z, t; \xi);$$

$$\vec{E}(\rho, \phi, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi [\nabla \psi_m^s(\rho, \phi; \chi) \times \vec{z}_0] \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} A_m(z, t; \chi) - \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} d\xi \nabla \varphi_n^s(\rho, \phi; \xi) \frac{\partial}{\partial z} B_n(z, t; \xi);$$

$$H_z(\rho, \phi, z, t) = - \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi \chi^2 \psi_m^s(\rho, \phi; \chi) A_m(z, t; \chi);$$

$$E_z(\rho, \phi, z, t) = - \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} d\xi \xi^2 \varphi_n^s(\rho, \phi; \xi) B_n(z, t; \xi),$$

где $\psi_m^s(\rho, \phi; \chi) = \frac{J_m(\chi\rho)}{\sqrt{\chi}} e^{im\phi}$; $\varphi_n^s(\rho, \phi; \xi) = \frac{J_n(\xi\rho)}{\sqrt{\xi}} e^{in\phi}$, $J_m(\cdot)$ – функция Бесселя,

$A_m(z, t; \chi)$ и $B_n(z, t; \xi)$ – эволюционные коэффициенты, описывающие распространение Н- и Е-волн соответственно и удовлетворяющие эволюционным уравнениям

$$\left\{ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \chi^2 \right\} A_m(z, t; \chi) = 0; \left\{ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \xi^2 \right\} B_n(z, t; \xi) = 0.$$

Исходя из этих представлений, поле ТЕМ-волны внутри коаксиального волновода имеет вид

$$\vec{E} = -\vec{\rho}_0 \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{2 \ln \frac{a}{b}}} \frac{1}{\rho} \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} f; \quad \vec{H} = \vec{\phi}_0 \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{2 \ln \frac{a}{b}}} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} f,$$

где $\vec{\rho}_0, \vec{\phi}_0$ – орты цилиндрической системы координат, $f(z, t) = f^i(z, t) + f^r(z, t)$, $f^i(z, t)$ и $f^r(z, t)$ – эволюционные коэффициенты, описывающие падающую и отраженную волны соответственно.

Будем искать решения в свободном пространстве и внутри волновода в виде рядов по цилиндрическим функциям целого индекса.

Е-волна в свободном пространстве

$$B(z, t; \xi) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m(\xi) \left(\frac{ct - z}{ct + z} \right)^{\frac{m}{2}} J_m\left(\xi \sqrt{c^2 t^2 - z^2}\right);$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} B(z, t; \xi) &= \frac{\xi z C_0(\xi)}{\sqrt{c^2 t^2 - z^2}} J_1\left(\xi \sqrt{c^2 t^2 - z^2}\right) - \\ &- \frac{\xi}{2} \sum_{m=1}^{\infty} C_m(\xi) \left(\frac{ct - z}{ct + z}\right)^{\frac{m-1}{2}} \left[J_{m-1}\left(\xi \sqrt{c^2 t^2 - z^2}\right) + \left(\frac{ct - z}{ct + z}\right) J_{m+1}\left(\xi \sqrt{c^2 t^2 - z^2}\right) \right]; \\ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} B(z, t; \xi) &= -\frac{\xi ct C_0(\xi)}{\sqrt{c^2 t^2 - z^2}} J_1\left(\xi \sqrt{c^2 t^2 - z^2}\right) + \\ &+ \frac{\xi}{2} \sum_{m=1}^{\infty} C_m(\xi) \left(\frac{ct - z}{ct + z}\right)^{\frac{m-1}{2}} \left[J_{m-1}\left(\xi \sqrt{c^2 t^2 - z^2}\right) - \left(\frac{ct - z}{ct + z}\right) J_{m+1}\left(\xi \sqrt{c^2 t^2 - z^2}\right) \right], \end{aligned}$$

где $C_m(\xi)$ – неизвестные функции, зависящие только от ξ .

Т-волна в волноводе

Падающая	Отраженная
$f^i(z, t) = (ct - z)H(ct - z);$	
$f^r(z, t) = A(ct + z)H(ct + z);$	
$\frac{\partial}{\partial z} f^i(z, t) = -H(ct - z);$	
$\frac{\partial}{\partial z} f^r(z, t) = A'(ct + z)H(ct + z);$	
$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} f^i(z, t) = H(ct - z);$	
$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} f^r(z, t) = A'(ct + z)H(ct + z).$	

Неизвестная функция $A(\cdot)$ и ее производная $A'(\cdot)$ определяют зависимость амплитуды отраженной волны от времени и продольной координаты. В начальный момент времени $t = 0$ в сечении $z = 0$ амплитуда падающей волны равна нулю, и, следовательно, отраженная волна отсутствует.

Е-волна в волноводе

$$\begin{aligned} e_n(z, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} D_m^n \left(\frac{ct + z}{ct - z}\right)^{\frac{m}{2}} J_m\left(\xi_n \sqrt{c^2 t^2 - z^2}\right) \\ \frac{\partial}{\partial z} e_n(z, t) &= \xi_n \left\{ D_0^n \frac{z}{\sqrt{c^2 t^2 - z^2}} J_1\left(\xi_n \sqrt{c^2 t^2 - z^2}\right) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} D_m^n \left(\frac{ct + z}{ct - z}\right)^{\frac{m-1}{2}} \left[J_{m-1}\left(\xi_n \sqrt{c^2 t^2 - z^2}\right) + \left(\frac{ct + z}{ct - z}\right) J_{m+1}\left(\xi_n \sqrt{c^2 t^2 - z^2}\right) \right] \right\}; \end{aligned}$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} e_n(z, t) = \xi_n \left\{ -D_0^n \frac{ct}{\sqrt{c^2 t^2 - z^2}} J_1 \left(\xi_n \sqrt{c^2 t^2 - z^2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} D_m^n \left(\frac{ct+z}{ct-z} \right)^{\frac{m-1}{2}} \left[J_{m-1} \left(\xi_n \sqrt{c^2 t^2 - z^2} \right) - \left(\frac{ct+z}{ct-z} \right) J_{m+1} \left(\xi_n \sqrt{c^2 t^2 - z^2} \right) \right] \right\},$$

где D_m^n – неизвестные константы.

Неизвестные коэффициенты в решениях можно найти путем подстановки этих выражений в соотношения, полученные при сопряжении полей в сечении $z = 0$. Для получения полей в свободном пространстве подставим выражения для полей в волноводе в выражения для полей в свободном пространстве и после преобразований получим два равенства

$$A'(ct) = -c\varepsilon_0 \frac{1}{\sqrt{2(a^2 - b^2)} \ln \frac{a}{b}} \int_0^{\infty} d\xi \frac{[J_0(\xi a) - J_0(\xi b)]}{\sqrt{\xi}} \xi \\ \left\{ C_0(\xi) J_1(\xi ct) + \sum_{m=1}^{\infty} C_m(\xi) J_{m+1}(\xi ct) \right\} \\ 1 = \frac{1}{c\mu_0} \frac{1}{\sqrt{2(a^2 - b^2)} \ln \frac{a}{b}} \int_0^{\infty} d\xi \frac{[J_0(\xi a) - J_0(\xi b)]}{\sqrt{\xi}} \xi \\ \left\{ C_0(\xi) J_1(\xi ct) - \sum_{m=1}^{\infty} C_m(\xi) J_{m-1}(\xi ct) \right\}.$$

Пользуясь известной формулой $1 = J_0(x) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_{2m}(x)$, а также формулой

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x} [J_0(cx) - J_0(dx)]^2 dx = \ln \frac{c}{d}, \quad c > d > 0,$$

можно показать, что коэффициенты вида $C_0(\xi) = C_2(\xi)$;

$$C_1(\xi) = c\mu_0 \frac{[J_0(\xi a) - J_0(\xi b)]}{\xi^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{2(a^2 - b^2)}{\ln \frac{a}{b}}}; \quad C_{2m+1} = 2C_1 \quad \text{при} \quad m = 1, 2, 3, \dots;$$

$C_{2m} = 0$ при $m = 2, 3, 4, \dots$ удовлетворяют уравнения. Коэффициенты $C_0(\xi)$ и $C_2(\xi)$ равны нулю, так как они не зависят от амплитуды падающего поля. Как видно, только в этом случае амплитуда продольной компоненты поля в свободном пространстве $B(z, t; \xi)$ убывает с ростом времени и продольной координаты. Учитывая это, запишем амплитуды всех компонент поля в свободном пространстве:

$$\begin{aligned}
 B(z, t; \xi) &= -D \frac{[J_0(\xi a) - J_0(\xi b)]}{\xi^{3/2}} \\
 &\quad \left\{ \left(\frac{ct - z}{ct + z} \right)^{1/2} J_1 \left(\xi \sqrt{c^2 t^2 - z^2} \right) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{ct - z}{ct + z} \right)^{m+1/2} J_{2m+1} \left(\xi \sqrt{c^2 t^2 - z^2} \right) \right\}; \\
 \frac{\partial}{\partial z} B(z, t; \xi) &= D \frac{[J_0(\xi a) - J_0(\xi b)]}{2\xi^{1/2}} \times \\
 &\quad \times \left\{ J_0 \left(\xi \sqrt{c^2 t^2 - z^2} \right) + 3 \left(\frac{ct - z}{ct + z} \right) J_2 \left(\xi \sqrt{c^2 t^2 - z^2} \right) + 4 \sum_{m=2}^{\infty} \left(\frac{ct - z}{ct + z} \right)^m J_{2m} \left(\xi \sqrt{c^2 t^2 - z^2} \right) \right\}; \\
 \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} B(z, t; \xi) &= -D \frac{[J_0(\xi a) - J_0(\xi b)]}{2\xi^{1/2}} \left\{ J_0 \left(\xi \sqrt{c^2 t^2 - z^2} \right) + \left(\frac{ct - z}{ct + z} \right) J_2 \left(\xi \sqrt{c^2 t^2 - z^2} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

где $D = c\mu_0 \sqrt{2(a^2 - b^2)} / \ln \frac{a}{b}$.

Временная зависимость поперечных компонент поля отраженной ТЕМ-волны определяется функцией

$$A'(ct) = \frac{1}{\ln \frac{a}{b}} \int_0^{\infty} d\xi \frac{[J_0(\xi a) - J_0(\xi b)]^2}{\xi} \{1 - J_0(\xi ct) - J_2(\xi ct)\}.$$

Легко видеть, что $A'(0) = 0$ и $A'(ct)|_{t \rightarrow \infty} = 1$. Первое равенство описывает случай, когда амплитуда падающей волны в начальный момент времени равна нулю – тогда нет и отраженной волны. Второе равенство показывает, что спустя длительное время сумма амплитуд магнитных компонент падающей и отраженной ТЕМ-волн в волноводе будет равна нулю при существовании статической электрической компоненты.

Преобразуем предыдущее выражение к следующему виду:

$$A'(ct) = 1 - \frac{2}{ct \ln \frac{a}{b}} I(ct),$$

где $I(\tau) = \int_0^{\infty} d\xi \frac{[J_0(\xi a) - J_0(\xi b)]^2}{\xi^2} J_1(\xi \tau)$, $\tau = ct$. Подынтегральная функция стремится к нулю при $\xi \rightarrow 0$ как ξ^3 , а при $\xi \rightarrow \infty$ как $\xi^{-7/2}$.

Использование приближения Кирхгофа наиболее справедливо при больших удалениях от источника сигнала. Эти два решения отличаются только коэффициентами, стоящими при слагаемых, которые быстро убывают с увеличением времени и продольной координаты. При фиксированном удалении от центра раскрытия коаксиального волновода, приближенное решение наилучшим образом совпадает с точным вблизи нормали к плоскости излучателя, что уже отмечалось при рассмотрении подобных

задач.

Приближенное решение удовлетворяет условиям сопряжения полей в волноводе и в свободном пространстве при $b < \rho < a$, а на остальной части плоскости $z = 0$ амплитуды и поперечных электрических, и магнитных компонент излученного поля равнялись нулю. На основе анализа выражения для эволюционного коэффициента можно сделать вывод, что точное решение не будет обладать тем же свойством из-за того, что мы не учитываем токов, наводимых на экране, которые, в свою очередь, также порождают поле в свободном полупространстве.

Рассмотрим поле отраженной ТЕМ-волны в коаксиальном волноводе. Временная зависимость ее амплитуды определяется функцией $A'(ct)$. В предыдущем пункте отмечалось, что в начальный момент времени отраженной волны нет: $A'(0) = 0$, но спустя некоторое время, а именно при $t \geq 2a/c$, $A'(ct) = 1$. Таким образом, в момент времени $t = 2a/c$ все переходные процессы заканчиваются, излучение из раскрыва и преобразование ТЕМ-волны в Е-волну прекращается. Из этого следует, что при стремлении внешнего радиуса коаксиального волновода к нулю, длительность переходных процессов также стремится к нулю и $A'(ct)$ приближается к функции Хевисайда. Ведь именно из-за излучения и преобразования мод происходит отклонение формы $A'(ct)$ от формы ступенчатой функции.

Приложение 1

(на экзамен не выносится)

Эволюционные уравнения для поперечно-неоднородной среды

Уравнение непрерывности

$$\operatorname{div} \vec{j}_0 + \frac{\partial}{\partial t} \rho_0 = 0;$$

материальные уравнения

$$\vec{D}(\vec{E}) = \varepsilon_0 \varepsilon(\vec{r}, z, t) \vec{E}; \quad \varepsilon = \varepsilon_{\perp}(\vec{r}) \varepsilon_{\parallel}(z, t)$$

$$\vec{B}(\vec{H}) = \mu_0 \mu(\vec{r}, z, t) \vec{H} \quad \text{где} \quad \mu = \mu_{\perp}(\vec{r}) \mu_{\parallel}(z, t)$$

система уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon \vec{E}) + \vec{j}_0; \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mu \vec{H}); \quad (2)$$

$$\operatorname{div} (\mu \vec{H}) = 0; \quad (3)$$

$$\operatorname{div} (\varepsilon \vec{E}) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}. \quad (4)$$

и условие ограниченности энергии

$$\left(|\vec{E}|^2 + |\vec{H}|^2 \right) < \infty. \quad (5)$$

К этому же добавляются начальные и (или) граничные условия для поля.

Нормально-тангенциальная форма уравнений Максвелла

Так как $\vec{\varepsilon} = \vec{E} + \vec{z}_0 E_z$ и т.д., то

из (3)

$$\frac{\partial}{\partial z} \mu H_z = -\nabla_t \cdot \mu \vec{H}; \quad (6)$$

из (4)

$$\frac{\partial}{\partial z} \varepsilon E_z = -\nabla_t \cdot \varepsilon \vec{E} + \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}; \quad (7)$$

из (2)

$$\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mu H_z = \nabla_t \cdot [\vec{z}_0 \times \vec{E}]; \quad (8)$$

из (1)

$$\varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon E_z = \nabla_t \cdot [\vec{H} \times \vec{z}_0] - j_{0z}; \quad (9)$$

$$[\nabla_t \times \vec{z}_0] H_z = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon \vec{E}) + \frac{\partial}{\partial z} [\vec{H} \times \vec{z}_0] + \vec{j}_{0z} \equiv \vec{a}; \quad (10)$$

$$[\vec{z}_0 \times \nabla_t] E_Z = \frac{\partial}{\partial z} [\vec{z}_0 \times \vec{E}] + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} [\mu \vec{H}] \equiv \vec{b}; \quad (11)$$

Исключение H_z из (10)

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \mu (10)$$

Сюда вместо $\frac{\partial}{\partial z} \mu H_z$ подставим (6)

$$[\nabla_t \times \vec{z}_0] \left(-\frac{1}{\mu} \nabla_t \cdot \mu \vec{H} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \mu \vec{a}; \quad (12)$$

Умножим (10) слева на \vec{z}_0

$$[\vec{z}_0 \times [\nabla_t H_z \times \vec{z}_0]] = \underbrace{(\vec{z}_0 \cdot \vec{z}_0)}_1 \nabla_t H_z - \vec{z}_0 \underbrace{(\vec{z}_0 \cdot \nabla_t H_z)}_0 = \nabla_t H_z \Rightarrow \nabla_t H_z = [\vec{z}_0 \times \vec{a}] \quad (13)$$

Подействуем на (10) оператором $\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \mu$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_{\parallel} \mu_{\perp}} \frac{\partial}{\partial z} \mu_{\parallel} \mu_{\perp} [\vec{z}_0 \times \nabla_t] H_z &= \frac{1}{\mu_{\parallel} \mu_{\perp}} \frac{\partial}{\partial z} \mu_{\perp} [\vec{z}_0 \times \nabla_t] H_z = \\ &= \frac{1}{\mu_{\parallel}} [\vec{z}_0 \times \nabla_t] \frac{\partial}{\partial z} \mu_{\parallel} H_z = \left[\vec{z}_0 \times \nabla_t \frac{1}{\mu_{\parallel}} \right] \frac{\partial}{\partial z} \mu_{\parallel} H_z = \\ &= \left[\vec{z}_0 \times \nabla_t \frac{1}{\mu} \right] \frac{\partial}{\partial z} (\mu H_z) \end{aligned}$$

Тогда из (10) получаем

$$0 = \left[\vec{z}_0 \times \nabla_t \frac{1}{\mu} \right] \frac{\partial}{\partial z} (\mu H_z) \mu \vec{a}.$$

Подставим сюда (6), получим

$$\left[\vec{z}_0 \times \nabla_t \frac{1}{\mu} \right] \frac{\partial}{\partial z} (\mu H_z) + \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \mu \vec{a} = 0 \quad (10a)$$

Отсюда

$$\nabla_t \frac{\partial}{\partial t} H_z = \frac{\partial}{\partial t} [\vec{z}_0 \times \vec{a}], \text{ подставим (8)}$$

$$\nabla_t \frac{1}{\mu_0 \mu} \nabla_t \cdot [\vec{z}_0 \times \vec{E}] = \frac{\partial}{\partial t} [\vec{z}_0 \times \vec{a}] \Rightarrow$$

$$\nabla_t \frac{1}{\mu_0 \mu} [\vec{z}_0 \times \nabla_t] \cdot \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} [\vec{z}_0 \times \vec{a}]. \quad (14)$$

Подставим в (12) и (14) \vec{a} и запишем результат

$$[\vec{z}_0 \times \nabla_t] \frac{1}{\mu} \nabla_t \cdot \mu \vec{H} = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon \vec{E}) + \frac{\partial}{\partial z} [\vec{H} \times \vec{z}_0] + \vec{j}_{0t} \right\} = \vec{\alpha}; \quad (15)$$

$$\nabla_t \frac{1}{\mu_0 \mu} [\vec{z}_0 \times \nabla_t] \cdot \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial z} \left(\varepsilon [\vec{z}_0 \times \vec{E}] \right) + \frac{\partial}{\partial z} \vec{H} + [\vec{z}_0 \times \vec{j}_{0z}] \right\} = \vec{\beta} \quad (16)$$

Подействуем на (8) $\mu \nabla_t \frac{1}{\mu} = \mu_{\perp} \nabla_t \frac{1}{\mu_{\perp}}$

$$\mu_{\perp} \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla_t \frac{1}{\mu_{\perp}} \mu H_z = \mu \nabla_t \frac{1}{\mu_{\perp}} \nabla_t \cdot [\vec{z}_0 \times \vec{E}];$$

$$\mu \nabla_t \frac{1}{\mu_{\perp}} [\vec{z}_0 \times \nabla_t] \cdot \vec{E} = -\mu_{\perp} \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla_t \frac{1}{\mu_{\perp}} \mu H_z =$$

$$= -\mu_{\perp} \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mu_{\parallel} \nabla_t H_z \text{ подставим (13)}$$

$$\mu \nabla_t \frac{1}{\mu_{\perp}} [\vec{z}_0 \times \nabla_t] \cdot \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mu_{\perp} \mu_{\parallel} [\vec{z}_0 \times \vec{a}];$$

$$\mu \nabla_t \frac{1}{\mu_{\perp}} [\vec{z}_0 \times \nabla_t] \cdot \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mu [\vec{z}_0 \times \vec{a}]. \quad (106)$$

Исключение E_z из (11)

$$[\vec{z}_0 \times \nabla_t] E_z = \vec{b} \text{ или } \nabla_t E_t = [\vec{b} \times \vec{z}_0] \quad (11)$$

Подействуем на (11) оператором $\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial z} \varepsilon$

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial z} \varepsilon [\vec{z}_0 \times \nabla_t] E_z = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial z} \varepsilon \vec{b};$$

подставим (7) и получим

$$\left[\nabla_t \frac{1}{\varepsilon} \times \vec{z}_0 \right] (\nabla_t \cdot \varepsilon \vec{E}) = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial z} \varepsilon \vec{b} + \left[\nabla_t \frac{1}{\varepsilon} \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \times \vec{z}_0 \right] \quad (17)$$

Подействуем на (9) оператором $\varepsilon \nabla_t \frac{1}{\varepsilon} = \varepsilon_{\perp} \nabla_t \frac{1}{\varepsilon_{\perp}}$

$$\varepsilon_0 \nabla_t \frac{1}{\varepsilon} [\nabla_t \times \vec{z}_0] = \varepsilon \nabla_t \frac{1}{\varepsilon} \nabla_t \cdot [\vec{H} \times \vec{z}_0] - \varepsilon \nabla_t \frac{1}{\varepsilon} j_{0z}; \quad (18)$$

Выпишем конечные результаты [(10а), (10в), (17), (18)].

$$\begin{cases} (19) \left[\vec{z}_0 \times \nabla_t \frac{1}{\mu_{\perp}} \right] (\nabla_t \cdot \mu_{\perp} \vec{H}) = \frac{1}{\mu_{\parallel}} \frac{\partial}{\partial z} \mu_{\parallel} \vec{a}; \\ (20) \mu \nabla_t \frac{1}{\mu_{\perp}} [\vec{z}_0 \times \nabla_t] \cdot \vec{E} = -\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mu [\vec{z}_0 \times \vec{a}]; \\ (21) \varepsilon \nabla_t \frac{1}{\varepsilon_{\perp}} [\nabla_t \times \vec{z}_0] \cdot \vec{H} = -\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon [\vec{b} \times \vec{z}_0] - \varepsilon \nabla_t \frac{1}{\varepsilon} j_{0z}; \\ (22) \left[\nabla_t \frac{1}{\varepsilon_{\perp}} \times \vec{z}_0 \right] (\nabla_t \cdot \varepsilon_{\perp} \vec{E}) = \frac{1}{\varepsilon_{\parallel}} \frac{\partial}{\partial z} \varepsilon_{\parallel} \vec{b} + \left[\nabla_t \frac{1}{\varepsilon} \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \times \vec{z}_0 \right]. \end{cases}$$

Исключили продольные компоненты

Функциональное пространство четырехмерных векторов ЭМП.

Пусть $\vec{X} = \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix}$.

Энергетическая метрика в $\alpha_2^4(S)$

$$\langle \vec{X}_1, \vec{X}_2 \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \rho d\rho \left(\varepsilon_\perp \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2^* + \mu_\perp \vec{H}_1 \cdot \vec{H}_2^* \right)$$

* – комплиментарное сопротивление

$$\langle \vec{E}_1, \vec{E}_2 \rangle_e = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \rho d\rho \varepsilon_\perp \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2^*,$$

$$\langle \vec{H}_1, \vec{H}_2 \rangle_h = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \rho d\rho \mu_\perp \vec{H}_1 \cdot \vec{H}_2^*$$

В $\alpha_2^4(S)$ рассмотрим две матричные операции

$$\begin{aligned} W_H \vec{X} &= \begin{pmatrix} 0 & \left[\vec{z}_0 \times \frac{1}{\varepsilon_\perp} \nabla_t \frac{1}{\mu_\perp} \right] \nabla_t \mu_\perp \\ \nabla_t \frac{1}{\mu_\perp [\vec{z}_0 \times \nabla_t]} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \left[\vec{z}_0 \times \frac{1}{\varepsilon_\perp} \nabla_t \frac{1}{\mu_\perp} \right] \nabla_t \cdot \mu_\perp \vec{H} \\ \nabla_t \frac{1}{\mu_\perp} [\vec{z}_0 \times \nabla_t] \cdot \vec{E} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} W_E \vec{X} &= \begin{pmatrix} 0 & \nabla_t \frac{1}{\varepsilon_\perp} [\nabla_t \times \vec{z}_0] \\ \left[\frac{1}{\mu_\perp} \nabla_t \frac{1}{\varepsilon_\perp} \times \vec{z}_0 \right] \nabla_t \cdot \varepsilon_\perp & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \nabla_t \frac{1}{\varepsilon_\perp} [\nabla_t \times \vec{z}_0] \cdot \vec{H} \\ \left[\frac{1}{\mu_\perp} \nabla_t \frac{1}{\varepsilon_\perp} \times \vec{z}_0 \right] \nabla_t \cdot \varepsilon_\perp \vec{E} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (24)$$

Тогда задачу (19)-(22) можно переписать в виде двух операторных уравнений.

$$\begin{aligned} W_H \vec{X} &= \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu_\parallel} \frac{\partial}{\partial z} \mu_\parallel \left\{ \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_\parallel \vec{E} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\varepsilon_\perp} [\vec{H} \times \vec{z}_0] \right\} + \frac{1}{\mu_\parallel} \frac{\partial}{\partial z} \mu_\parallel \frac{1}{\varepsilon_\perp} \vec{j}_0 \\ -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mu_\parallel \left\{ \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_\parallel \varepsilon_\perp [\vec{z}_0 \times \vec{E}] + \frac{\partial}{\partial z} \vec{H} \right\} - \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mu_\parallel [\vec{z}_0 \times \vec{j}_0] \end{pmatrix}; \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
W_E \vec{X} = & \left(-\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{\parallel} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \vec{E} + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mu_{\parallel} \mu_{\perp} [\vec{H} \times \vec{z}_0] \right\} - \nabla_t \frac{1}{\varepsilon_{\perp}} j_{0z} \right. \\
= & \left. \left(\frac{1}{\varepsilon_{\parallel}} \frac{\partial}{\partial z} \varepsilon_{\parallel} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\mu_{\perp}} [\vec{z}_0 \times \vec{E}] + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mu_{\parallel} \vec{H} \right\} + \frac{1}{\varepsilon_{\parallel}} \left[\frac{1}{\mu_{\perp}} \nabla_t \frac{1}{\varepsilon_{\perp} \varepsilon_0} \rho_0 \times \vec{z}_0 \right] \right) \right); \quad (26)
\end{aligned}$$

Разделили

Слева – дифференцирование по поперечным координатам, условия ограниченности энергии, справа – дифференцирование по продольной координате и времени, источники.

Самосопряженность

Докажем самосопряженность оператора W_H , т.е. что

$$\langle W_H \vec{X}_1, \vec{X}_2 \rangle - \langle \vec{X}_1, W_H \vec{X}_2 \rangle = 0$$

Из формулы (27):

$$\begin{aligned}
& \langle W_H \vec{X}_1, \vec{X}_2 \rangle - \langle \vec{X}_1, W_H \vec{X}_2 \rangle = \\
& = \frac{1}{4\pi} \int_S dS \left\{ [\vec{E}_2^* \times \vec{z}_0] \nabla_t \frac{1}{\mu_{\perp}} \nabla_t \cdot \mu_{\perp} \vec{H}_1 + \right. \\
& + \mu_{\perp} \vec{H}_2^* \cdot \nabla_t \frac{1}{\mu_{\perp}} \nabla_t \cdot [\vec{E}_1 \times \vec{z}_0] - \\
& - [\vec{E}_1 \times \vec{z}_0] \cdot \nabla_t \frac{1}{\mu_{\perp}} \nabla_t \cdot \mu_{\perp} \vec{H}_2^* + \\
& \left. + \mu_{\perp} \vec{H}_1 \cdot \nabla_t \frac{1}{\mu_{\perp}} \nabla_t \cdot [\vec{E}_2 \times \vec{z}_0] \right\} =
\end{aligned}$$

// Применим формулу со стр. 14

$$\begin{aligned}
& = \frac{1}{4\pi} \oint_L dl \left\{ \left(\vec{n} \cdot [\vec{E}_2^* \times \vec{z}_0] \right) \frac{1}{\mu_{\perp}} \nabla_t \cdot \mu_{\perp} \vec{H}_1 - \right. \\
& - \left(\vec{n} \cdot \mu_{\perp} \vec{H}_1 \right) \frac{1}{\mu_{\perp}} \nabla_t \cdot [\vec{E}_2^* \times \vec{z}_0] + \\
& + \left(\mu_{\perp} \vec{H}_2^* \cdot \vec{n} \right) \frac{1}{\mu_{\perp}} \nabla_t \cdot [\vec{E}_1 \times \vec{z}_0] - \\
& \left. - \left(\vec{n} \cdot [\vec{E}_1 \times \vec{z}_0] \right) \frac{1}{\mu_{\perp}} \nabla_t \cdot \mu_{\perp} \vec{H}_2^* \right\} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} R d\varphi \left\{ E_{2\varphi} \frac{1}{\mu_{\perp}} \left(\mu_{\perp} \nabla_t \cdot \vec{H}_1 + \vec{H}_1 \cdot \nabla_t \mu_{\perp} \right) - \right. \\
 &\quad - \mu_{\perp} \vec{H}_{1\rho} \frac{1}{\mu_{\perp}} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} E_{2\rho}^* + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_{2\varphi}^*) \right) + \\
 &\quad + \mu_{\perp} \vec{H}_{2\rho}^* \frac{1}{\mu_{\perp}} \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} E_{1\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_{1\varphi}) \right) - \\
 &\quad \left. - E_{1\varphi} \frac{1}{\mu_{\perp}} \left(\mu_{\perp} \nabla_t \cdot \vec{H}_2^* + \vec{H}_2^* \cdot \nabla_t \mu_{\perp} \right) \right\} = \\
 &= \frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ E_{2\varphi}^* \frac{\partial}{\partial \rho} \vec{H}_{1\rho} - \vec{H}_{1\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} E_{2\varphi}^* + \right. \\
 &\quad + \vec{H}_{2\rho}^* \frac{\partial}{\partial \rho} E_{1\varphi} - E_{1\varphi} \frac{\partial}{\partial \rho} \vec{H}_{2\rho}^* = \\
 &\quad \left\langle \int (\Psi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \Psi) dV = \oint_S \left(\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) dS \right\rangle \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_S dS \left(E_{2\varphi}^* \nabla_t \vec{H}_{1\rho} - \vec{H}_{1\rho} \nabla_t E_{2\varphi}^* + \vec{H}_{2\rho}^* \nabla_t E_{1\varphi} - E_{1\varphi} \nabla_t \vec{H}_{2\rho}^* \right) = \\
 &\quad \left\langle \begin{aligned} &\nabla_t \Psi = -x^2 \Psi \quad E, H \sim \int_0^{\infty} \sum_m A_m(x) \frac{I_m(x\rho) e^{im\varphi}}{\sqrt{x}} dx \\ &E_2^* \cdot H_1 = \int_0^{\infty} dx_2 \sum_{m_2=0}^{\infty} A_{m_2}(x_2, z, t) \frac{I_{m_2}(x_2\rho) e^{im_2\varphi}}{\sqrt{x_2}} \cdot \\ &\cdot \int_0^{\infty} dx_1 \sum_{m_1=0}^{\infty} B_{m_1}(x_1, z, t) \frac{I_{m_1}(x_1\rho) e^{im_1\varphi}}{\sqrt{x_1}} \end{aligned} \right\rangle \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_S dS \left\{ \int_0^{\infty} dx_2 \sum_{m_2=0}^{\infty} A_{m_2}(x_2, z, t) \frac{I_{m_2}(x_2\rho) e^{im_2\varphi}}{\sqrt{x_2}} \cdot \right. \\
 &\quad \left. \cdot \int_0^{\infty} dx_1 \sum_{m_1=0}^{\infty} b_{m_1}(x_1, z, t) (-x_1^2) \frac{I_{m_1}(x_1\rho) e^{im_1\varphi}}{\sqrt{x_1}} \right\}
 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что собственные векторы наших операторов ортогональны

$$w_H \vec{Y}_m = p_m \vec{Y}_m, \quad \vec{Y}_m = \begin{pmatrix} \vec{E}_m^h \\ \vec{H}_m^h \end{pmatrix}, \quad (31)$$

$$w_E \vec{Z}_n = q_n \vec{Z}_n, \quad \vec{Z}_n = \begin{pmatrix} \vec{E}_n^e \\ \vec{H}_n^e \end{pmatrix}; \quad \text{где} \quad (32)$$

p_m и q_n - собственные числа, \vec{Y}_m , \vec{Z}_n - собственные числа. Из (31) следует, что

$$\begin{cases} \left[\vec{z}_0 \times \frac{1}{\varepsilon_{\perp}} \nabla_t \frac{1}{\mu_{\perp}} \right] \nabla_t \cdot \mu_{\perp} \vec{H}_m^n = p_m E_n^h, \\ \nabla_t \frac{1}{\mu_{\perp}} \left[\vec{z}_0 \times \nabla_t \right] \cdot \vec{E}_m^h = p_m \vec{H}_m^h \end{cases} \quad (33)$$

А из (32):

$$\begin{cases} \nabla_t \frac{1}{\varepsilon_{\perp}} \left[\nabla_t \times \vec{z}_0 \right] \vec{H}_n^e = q_n \vec{E}_n^e; \\ \left[\frac{1}{\mu_{\perp}} \nabla_t \frac{1}{\varepsilon_{\perp}} \times \vec{z}_0 \right] \nabla_t \cdot \varepsilon_{\perp} \vec{E}_n^e = q_n \vec{H}_n^e. \end{cases} \quad (34)$$

p_m и q_n - лежат на вещественной оси и можно упорядочить

$p_m = -p_m \geq 0$, $q_n = -q_n \geq 0$, отсюда

$$\vec{Y}_m = \begin{pmatrix} E_m^h \\ H_m^h \end{pmatrix}, \quad Y_{-m} = \begin{pmatrix} \vec{E}_m^h \\ -\vec{H}_m^h \end{pmatrix}, \quad \vec{Z}_m = \begin{pmatrix} \vec{E}_n^e \\ \vec{H}_n^e \end{pmatrix}, \quad \vec{Z}_{-n} = \begin{pmatrix} \vec{E}_n^e \\ -\vec{H}_n^e \end{pmatrix}$$

$\vec{Y}_m \in$ аннулятору W_E , а $\vec{Z}_n \in$ аннулятору W_H :

Докажем

$$W_E \vec{Y}_{\pm m} = \begin{pmatrix} \nabla_t \frac{1}{\varepsilon_{\perp}} \left[\nabla_t \times \vec{z}_0 \right] \cdot \vec{H}_{\pm m}^h \\ \pm \left[\frac{1}{\mu_{\perp}} \nabla_t \frac{1}{\varepsilon_{\perp}} \times \vec{z}_0 \right] \nabla_t \cdot \varepsilon_{\perp} E_{\pm m}^h \end{pmatrix} =$$

подставим (33)

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{p_m} \nabla_t \frac{1}{\varepsilon_{\perp}} \nabla_t \cdot \left[\vec{z}_0 \times \nabla_t \frac{1}{\mu_{\perp}} \nabla_t \cdot \left[\vec{z}_0 \times E_n^h \right] \right] \\ \pm \frac{1}{p_m} \left[\frac{1}{\mu_{\perp}} \nabla_t \cdot \frac{1}{\varepsilon_{\perp}} \times \vec{z}_0 \right] \nabla_t \cdot \left[\vec{z}_0 \times \nabla_t \frac{1}{\mu_{\perp}} \nabla_t \cdot \mu_{\perp} \vec{H}_m^h \right] \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Для W_H :

$$\begin{aligned} W_H \vec{Z}_{\pm n} &= \begin{pmatrix} \left[\vec{z}_0 \times \frac{1}{\varepsilon_{\perp}} \nabla_t \frac{1}{\mu} \right] \nabla_t \cdot \mu_{\perp} \vec{H}_n^e \\ \pm \nabla_t \frac{1}{\mu_{\perp}} \left[\vec{z}_0 \times \nabla_t \right] \cdot \vec{E}_n^e \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{q_n} \left[\vec{z}_0 \times \frac{1}{\varepsilon_{\perp}} \nabla_t \frac{1}{\mu_{\perp}} \right] \underbrace{\nabla_t \cdot \left[\vec{z}_0 \times \nabla_t \frac{1}{\varepsilon_{\perp}} \nabla_t \cdot \varepsilon_{\perp} \vec{E}_n^e \right]}_0 \\ \mp \frac{1}{q} \nabla_t \frac{1}{\mu_{\perp}} \underbrace{\nabla_t \cdot \left[\vec{z}_0 \times \nabla_t \frac{1}{\varepsilon_{\perp}} \left[\nabla_t \times \vec{z}_0 \right] \cdot \vec{H}_n^e \right]}_0 \end{pmatrix} = \vec{0} \end{aligned}$$

$$\vec{T}_r = 0$$

Нормировка та же, кроме добавки ε_{\perp} и μ_{\perp} :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho \varepsilon_{\perp} \vec{E}_m^h \cdot \vec{E}_m^{h*} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho \mu_{\perp} \vec{H}_m^h \cdot \vec{H}_m^h = \pi$$

Искомое решение

$$\vec{X} = \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} A_m(z, t) \vec{Y}_m + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} B_n(z, t) \vec{Z}_n, \text{ или}$$

$$\vec{E} = \sum_{m=1}^{\infty} e_m \vec{E}_m^h + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \vec{E}_n^e, \quad e_m = A_m + A_{-m}, \quad a_n = B_n + B_{-n},$$

$$\vec{H} = \sum_{m=1}^{\infty} h_m \vec{H}_m^h + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \vec{H}_n^e, \quad h_m = A_m + A_{-m}, \quad b_n = b_n + b_{-n}$$

Эволюционные уравнения.

В уравнениях (27) и (27а) пусть \vec{X}_1 - искомое решение \vec{X} , а вместо $W_H \vec{X}$ и $W_E \vec{X}$ подставим правые части уравнений (25) и (26) с учетом (44). В качестве \vec{X}_2 будем подставлять собственные векторы \vec{Y}_m и \vec{Z}_m и пользоваться (31) и (32), будем пользоваться условиями ортонормированности

$$\begin{aligned} & \langle W_H \vec{X}, \vec{Y}_m - \vec{Y}_{-m} \rangle - \langle \vec{X}, W_H (\vec{Y}_m - \vec{Y}_{-m}) \rangle = 0 \\ & A_m + A_{-m} \cdot e_m \\ & \langle W_H \vec{X}^{(H)}, \vec{H}_m^h \rangle_h - \langle \vec{X}, p_m Y_m + p_m Y_{-m} \rangle = 0 \\ & \langle W_H \vec{X}^{(H)}, \vec{H}_m^h \rangle_h - p_m e_m = 0 \\ & \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mu_{\parallel} \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{\parallel} \langle \varepsilon_{\perp} [\vec{z}_0 \times \vec{E}], \vec{H}_m^h \rangle_h + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mu_{\parallel} \frac{\partial}{\partial z} \langle \vec{H}, \vec{H}_m^h \rangle_h + \\ & + p_m e_m = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mu_{\parallel} \left\langle [\vec{z}_0 \times \vec{j}_0], \vec{H}_m^h \right\rangle_h = \gamma_1 \\ & \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mu_{\parallel} \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{\parallel} \left(\sum_{m'=1}^{\infty} e_{m'} K_{m'm} + \sum_{n'=1}^{\infty} a_{n'} K_{n'm} \right) + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mu_{\parallel} \frac{\partial}{\partial z} h_m + p_m e_m = \gamma_1 \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} & K_{mm'} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho \varepsilon_{\perp} \mu_{\perp} \vec{z}_0 \cdot [\vec{E}_m \times \vec{H}_{m'}^*] \\ & \langle W_H \vec{X}, \vec{Y}_m - \vec{Y}_{-m} \rangle - \langle \vec{X}, W_H (\vec{Y}_m - \vec{Y}_{-m}) \rangle = 0 \\ & \langle W_H \vec{X}^{(E)}, \vec{E}_m^h \rangle_e - p_m h_m = 0; \\ & \frac{1}{\mu_{\parallel}} \frac{\partial}{\partial z} \mu_{\parallel} \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{\parallel} \langle \vec{E}, \vec{E}_m^h \rangle_e + \frac{1}{\mu_{\parallel}} \frac{\partial}{\partial z} \mu_{\parallel} \frac{\partial}{\partial z} \left\langle \frac{1}{\varepsilon_1} [\vec{H} \times \vec{z}_0], \vec{E}_m^h \right\rangle_e - p_m h_m = \\ & - \frac{1}{\mu_{\parallel}} \frac{\partial}{\partial z} \mu_{\parallel} \left\langle \frac{1}{\varepsilon_{\perp}} \vec{j}_0, \vec{E}_m^h \right\rangle_e = \frac{1}{\mu_{\parallel}} \gamma_2 \\ & \frac{\partial}{\partial z} \mu_{\parallel} \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{\parallel} e_m + \frac{\partial}{\partial z} \mu_{\parallel} \frac{\partial}{\partial z} \left(\sum_{m'=1}^{\infty} h_{m'} L_{m'm} + \sum_{n'=1}^{\infty} b_{n'} L_{n'm} \right) - \mu_{\parallel} p_m h_m = \gamma_2 \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned}
 L_{mm'} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \rho d\rho \vec{z}_0 \left[\vec{E}_m^* \times \vec{H}_{m'} \right] \\
 \langle W_E \vec{X}, \vec{Z}_m - \vec{Z}_{-m} \rangle - \langle \vec{X}, W_E (\vec{Z}_m - \vec{Z}_{-m}) \rangle &= 0 \\
 \langle W_E \vec{X}^{(E)}, \vec{E}_n^e \rangle_e - \langle \vec{X}, q_n \vec{Z}_n - q_n \vec{Z}_{-n} \rangle &= 0 \\
 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{\parallel} \frac{\partial}{\partial z} \langle \vec{E}, \vec{E}_n^e \rangle + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{\parallel} \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mu_{\parallel} \langle \mu_{\perp} [\vec{H} \times \vec{z}_0], \vec{E}_n^e \rangle_e + q_n b_n &= \\
 = - \left\langle \nabla_t \frac{1}{\varepsilon_{\perp}} j_{0z}, \vec{E}_n^e \right\rangle_e = \gamma_3 \\
 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{\parallel} \frac{\partial}{\partial z} a_n + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{\parallel} \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mu_{\parallel} \left(\sum_{m'=1}^{\infty} h_m \cdot \tilde{K}_{m'm} + \sum_{n'=1}^{\infty} b_n \cdot \tilde{K}_{n'n} \right) + q_n b_n &= \gamma_3 \quad (47) \\
 \tilde{K}_{n'n} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \rho d\rho \varepsilon_{\perp} \mu_{\perp} \left[\vec{E}_n \times \vec{H}_{n'} \right] \cdot \vec{z}_0 \\
 \langle W_E \vec{X}, \vec{Z}_n - \vec{Z}_{-n} \rangle - \langle \vec{X}, W_E (\vec{Z}_n - \vec{Z}_{-n}) \rangle &= 0; \\
 \langle W_H \vec{X}^{(H)}, \vec{H}_n^e \rangle_h - q_n a_n &= 0 \\
 \frac{1}{\varepsilon_{\parallel}} \frac{\partial}{\partial z} \varepsilon_{\parallel} \frac{\partial}{\partial z} \left\langle \frac{1}{\mu_{\perp}} [\vec{z}_0 \times \vec{E}], \vec{H}_n^e \right\rangle + \frac{1}{\varepsilon_{\parallel}} \frac{\partial}{\partial z} \varepsilon_{\parallel} \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mu_{\parallel} \langle \vec{H}, \vec{H}_n^e \rangle_n - \\
 - q_n a &= - \frac{1}{\varepsilon_{\parallel}} \left\langle \left[\frac{1}{\mu_{\perp}} \nabla_t \frac{1}{\varepsilon_{\perp} \varepsilon_0} \rho_0 \times \vec{z}_0 \right], \vec{H}_n^e \right\rangle_n = \frac{1}{\varepsilon_{\parallel}} \gamma_4 \\
 \frac{\partial}{\partial z} \varepsilon_{\parallel} \frac{\partial}{\partial z} \left(\sum_{m'=1}^{\infty} e_m \tilde{L}_{m'n} + \sum_{n'=1}^{\infty} a_n \cdot \tilde{L}_{n'n} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \varepsilon_{\parallel} \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mu_{\parallel} b_n - \\
 - \varepsilon_{\parallel} q_n a_n &= \gamma_4 \\
 \tilde{L}_{n'n} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \rho d\rho \cdot \vec{z}_0 \cdot [\vec{E}_{n'} \times \vec{H}_n]
 \end{aligned}$$

Выпишем полученную систему уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned}
 &\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mu_{\parallel} \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{\parallel} \left(\sum_{m'=1}^{\infty} e_m \tilde{K}_{m'm} + \sum_{n'=1}^{\infty} a_n \tilde{K}_{n'n} \right) + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mu_{\parallel} \frac{\partial}{\partial z} h_m + p_m e_m = \gamma_1; \\
 &\frac{\partial}{\partial z} \mu_{\parallel} \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{\parallel} e_m + \frac{\partial}{\partial z} \mu_{\parallel} \frac{\partial}{\partial z} \left(\sum_{m'=1}^{\infty} h_m \cdot L_{m'm} + \sum_{n'=1}^{\infty} b_n \cdot L_{n'm} \right) - \mu_{\parallel} p_m h_m = \gamma_2; \\
 &\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{\parallel} \frac{\partial}{\partial z} a_n + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{\parallel} \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mu_{\parallel} \left(\sum_{m'=1}^{\infty} h_m \cdot \tilde{K}_{m'm} + \sum_{n'=1}^{\infty} b_n \cdot \tilde{K}_{n'n} \right) + q_n b_n = \gamma_3; \\
 &\frac{\partial}{\partial z} \varepsilon_{\parallel} \frac{\partial}{\partial z} \left(\sum_{m'=1}^{\infty} e_m \tilde{L}_{m'n} + \sum_{n'=1}^{\infty} a_n \tilde{L}_{n'n} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \varepsilon_{\parallel} \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mu_{\parallel} b_n - \varepsilon_{\parallel} q_n a_n = \gamma_4,
 \end{aligned} \right.$$

где

$$\begin{aligned}
 \gamma_1 &= -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mu_{\parallel} \left\langle \left[\vec{Z} \times \vec{j}_0 \right], \vec{H}_m^h \right\rangle_h = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \mu_{\parallel} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho \mu_{\perp} \vec{j}_i \left[\vec{H}_m^h \times \vec{z}_0 \right] \\
 \gamma_2 &= -\frac{\partial}{\partial z} \mu_{\parallel} \left\langle \frac{1}{\varepsilon_{\perp}} \vec{j}_0, \vec{E}_m^h \right\rangle_e = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \mu_{\parallel} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho \vec{j}_0 \cdot \vec{E}_m^{h*}; \\
 \gamma_3 &= -\left\langle \nabla_t \frac{1}{\varepsilon_{\perp}} j_{0z}, \vec{E}_n^e \right\rangle_e = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho \varepsilon_{\perp} \left(\nabla_t \frac{1}{\varepsilon_{\perp}} j_{0z} \right) \cdot \vec{E}_n^{*e}; \\
 \gamma_4 &= -\left\langle \left[\frac{1}{\mu_{\perp}} \nabla_t \frac{1}{\varepsilon_{\perp} \varepsilon_0} \rho_0 \times \vec{z}_0 \right], \vec{H}_n^e \right\rangle_h = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho \vec{z}_0 \cdot \left[\vec{H}_n^{e*} \times \nabla_t \frac{1}{\varepsilon_{\perp} \varepsilon_0} \rho_0 \right]; \\
 \tilde{K}_{m'} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho \varepsilon_{\perp} \mu_{\perp} \vec{z}_0 \cdot \left[\vec{E}_m^{(*)} \times \vec{H}_{m'}^{0*} \right]; \\
 \tilde{L}_{m'm'} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho \vec{z}_0 \cdot \left[\vec{E}_m^{0*} \times \vec{H}_{m'}^{(*)} \right].
 \end{aligned}$$

Ненормальная часть конспекта

4. Теория линейных излучателей

(автор-Крымский В.)

Вначале отметим, что к понятию линейного излучателя отнесем излучатели, продольные размеры которых сравнимы с пространственной длительностью импульса, а поперечные гораздо меньше ее. В самом общем случае поле линейного излучателя произвольной формы может быть рассчитано по формулам

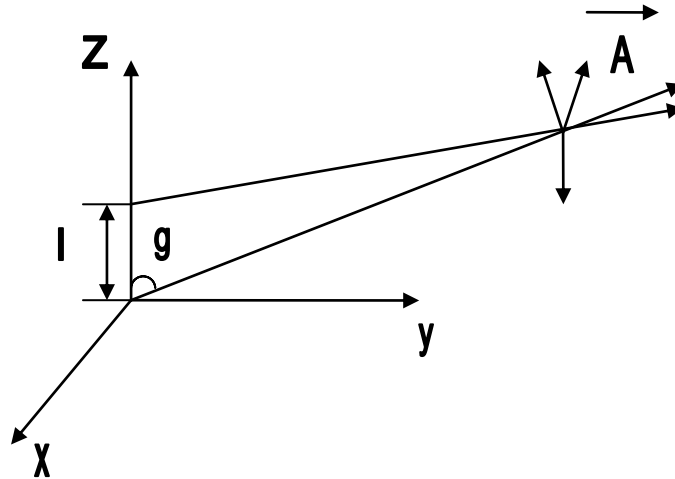
$$\left. \begin{aligned} A_x(p,t) &= \frac{\mu_o}{4\pi} \int_V \frac{I_x(t - R/c)}{R} dV \\ A_y(p,t) &= \frac{\mu_o}{4\pi} \int_V \frac{I_y(t - R/c)}{R} dV \\ A_z(p,t) &= \frac{\mu_o}{4\pi} \int_V \frac{I_z(t - R/c)}{R} dV \end{aligned} \right\}, \quad (4.1^*)$$

$$\left. \begin{aligned} H_x(p,t) &= \frac{1}{\mu_o} \left(\frac{\partial A_z(p,t)}{\partial y} - \frac{\partial A_y(p,t)}{\partial z} \right) \\ H_y(p,t) &= \frac{1}{\mu_o} \left(\frac{\partial A_x(p,t)}{\partial z} - \frac{\partial A_z(p,t)}{\partial x} \right) \\ H_z(p,t) &= \frac{1}{\mu_o} \left(\frac{\partial A_y(p,t)}{\partial x} - \frac{\partial A_x(p,t)}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\}, \quad (4.2^*)$$

$$\left. \begin{aligned} E_x(p,t) &= c^2 \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_x(p,t)}{\partial x} + \frac{\partial A_y(p,t)}{\partial y} + \frac{\partial A_z(p,t)}{\partial z} \right) dt - \frac{\partial A_x(p,t)}{\partial t} \\ E_y(p,t) &= c^2 \int_0^t \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_x(p,t)}{\partial x} + \frac{\partial A_y(p,t)}{\partial y} + \frac{\partial A_z(p,t)}{\partial z} \right) dt - \frac{\partial A_y(p,t)}{\partial t} \\ E_z(p,t) &= c^2 \int_0^t \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_x(p,t)}{\partial x} + \frac{\partial A_y(p,t)}{\partial y} + \frac{\partial A_z(p,t)}{\partial z} \right) dt - \frac{\partial A_z(p,t)}{\partial t} \end{aligned} \right\}. \quad (4.3^*)$$

Для проведения расчетов необходимо знать форму излучателя и закон распределения тока на нем. Задачу нахождения распределения тока на излучателе иногда называют внутренней [11], в отличие от внешней, когда рассчитывается поле излучения. Вначале, для упрощения, будет рассмотрен прямолинейный излучатель.

Прямолинейный излучатель



$$A_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_l \frac{I z \left(t - \frac{R}{c} \right)}{R} dZ$$

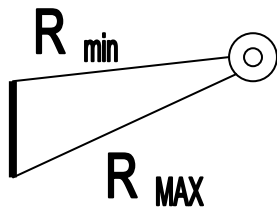
$$H_x = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_z}{\partial y} ; \quad H_y = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

$$E_x = c^2 \int_0^{\tau} \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial z} dt ; \quad E_y = c^2 \int_0^{\tau_N} \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial z} dt$$

$$E_z = c^2 \int_0^{\tau_N} \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} dt - \frac{\partial A_z}{\partial t}$$

$$\tau_n = \tau_{\diamond} + \frac{R_{\max} - R_{\min}}{c}$$

$-\text{grad} \varphi = 0$, т.к. $\rho_{\text{св}} = 0$ - неподвижные заряды.



4.1 Прямолинейный излучатель (автор-Крымский В.)

Большая часть конструкций излучателей реальных антенн имеет прямолинейную форму. В классической теории антенн эти излучатели анализируются следующим образом. Сам излучатель совмещают с одной из координатных осей. Это приводит к наличию одной составляющей тока и векторного потенциала. Рассматривается несколько простых вариантов распределения амплитуды и фазы тока вдоль излучателя. Далее вводятся упрощающие предположения и получаются соотношения для расчета поля на больших расстояниях. Поступим аналогичным образом. Геометрия задачи показана на рис. 4.1.

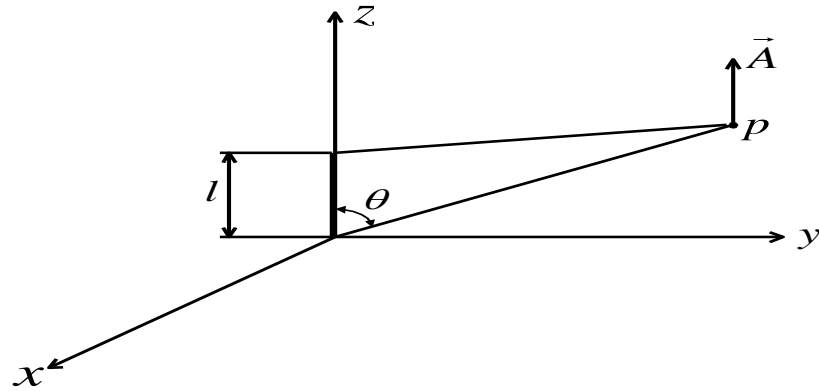


Рис. 4.1.

Излучатель длиной l с током I расположен вдоль оси z . Предположим, что закон распределения тока вдоль излучателя равномерный, т.е. величина тока не зависит от координаты z , а зависит только от времени. При сделанных предположениях вместо формул (4.1*) – (4.3*) будем иметь

$$A_x(p, t) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_V \frac{I_x(t - R/c)}{R} dV \quad (4.1)$$

$$\left. \begin{aligned} H_x(p, t) &= \frac{1}{\mu_o} \frac{\partial A_z(p, t)}{\partial y} \\ H_y(p, t) &= \frac{1}{\mu_o} \frac{\partial A_z(p, t)}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

$$\left. \begin{aligned} E_x(p, t) &= c^2 \int_0^{\tau_n} \frac{\partial^2 A_z(p, t)}{\partial x \partial z} dt \\ E_y(p, t) &= c^2 \int_0^{\tau_n} \frac{\partial^2 A_z(p, t)}{\partial y \partial z} dt \\ E_z(p, t) &= c^2 \int_0^{\tau_n} \frac{\partial^2 A_z(p, t)}{\partial z^2} dt - \frac{\partial A_z(p, t)}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

где через τ_n обозначена длительность импульса поля в точке наблюдения. Она будет отличаться от длительности импульса тока на величину

$$\Delta\tau = \frac{R_{\text{МАКС}} - R_{\text{МИН}}}{c},$$

где $R_{\text{МАКС}}$ и $R_{\text{МИН}}$ -- максимальное и минимальное расстояния от точки наблюдения до излучателя. Т.е. длительность импульса в точке наблюдения будет равна

$$\tau_n = \tau_H + \frac{R_{\text{МАКС}} - R_{\text{МИН}}}{c}. \quad (4.4)$$

В отношении интегрального слагаемого в формуле (4.3) заметим следующее. В книге [121] (стр.160) отмечено, что величина $\text{grad}\phi$ как составляющая поля E определяет поле неподвижных зарядов, которые изменяются во времени. При рассмотрении элементарного диполя анализируется именно такой тип излучателя. Ясно, что такой излучатель является гипотетическим. Поэтому в реальных излучателях интегральное слагаемое в выражении для поля E не учитывают.

Поля E и H будем рассматривать в сферических координатах. В этом случае для линейного излучателя имеем [1]

$$H_R = H_\theta = 0$$

$$H_\phi = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R \sin \theta \cdot A_z) - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta \cdot A_z). \quad (4.5)$$

Векторный потенциал A_z запишем в виде

$$A_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^l \frac{I(z', t - R_{pq} / c)}{R_{pq}} dz', \quad (4.6)$$

где $R_{pq} = \sqrt{R^2 - 2zz' + z'^2}$ -- текущее расстояние интегрирования, $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $q(0,0,z')$ -- точка интегрирования на излучателе. Подставляя значение A_z из формулы (4.6), выполняя дифференцирование и учитывая, что

$$\frac{\partial R_{pq}}{\partial R} = \frac{R - z' \cos \theta}{R_{pq}}; \quad \frac{\partial R_{pq}}{\partial \theta} = \frac{R + z' \sin \theta}{R_{pq}}$$

для компоненты поля H_ϕ , получаем

$$H_\phi = \frac{R \sin \theta}{4\pi} \int_0^l \frac{1}{R_{pq}^2} \left(\frac{\dot{I}(z', t - R_{pq} / c)}{c} - \frac{1}{R_{pq}} I(z', t - R_{pq} / c) \right) dz'. \quad (4.7)$$

Если теперь положить, что ток по облучателю распределен равномерно, т.е. не зависит от z' , а, следовательно, и от расстояния R_{pq} , то получим

$$H_\phi = \frac{R \sin \theta}{4\pi} \left(\frac{\dot{I}(z', t - R_{pq} / c)}{c} \int_0^l \frac{1}{R_{pq}^2} dz' + I(z', t - R_{pq} / c) \int_0^l \frac{1}{R_{pq}^3} dz' \right). \quad (4.8)$$

Сравним это выражение с (3.9) – полем H_φ элементарного излучателя. Видно, что с учетом того, что для диполя $I(t - R/c) = \vec{p}_o \cdot \dot{\vec{f}}(t - R/c)$ они совпадают по характеру зависимости от тока и расстояния. Если теперь рассмотреть поле при больших R , т.е. положить в знаменателе $R_{pq} \cong R$ и пренебречь слагаемым, пропорциональным $1/R^2$, то для поля H_φ получим

$$H_\varphi = \frac{\sin \theta \cdot l}{4\pi c R} \cdot \dot{I}(t - R/c). \quad (4.9)$$

Поле E проще вычислить из последнего уравнения в формуле (4.3), учитывая выше отмеченное замечание из работы [121] и связь между прямоугольными и сферическими координатами, имеем

$$\left. \begin{aligned} E_R &= -\frac{\mu_o}{4\pi} \cos \theta \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l \frac{I(z', t - R_{pq}/c)}{R_{pq}} dz' \\ E_\theta &= \frac{\mu_o}{4\pi} \sin \theta \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l \frac{I(z', t - R_{pq}/c)}{R_{pq}} dz' \\ E_\varphi &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (4.10)$$

При больших R для компонент поля E_R и E_θ получаем

$$\left. \begin{aligned} E_R &= -\frac{\mu_o}{4\pi} \frac{\cos \theta \cdot l}{R} \dot{I}(t - R/c) \\ E_\theta &= \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{\sin \theta \cdot l}{R} \dot{I}(t - R/c) \end{aligned} \right\}. \quad (4.11)$$

Сравнивая формулы (4.9) и (4.11), видно, что компоненты E_θ и H_φ связаны соотношением $E_\theta = z_o \cdot H_\varphi$.

Таким образом, характер поля линейного излучателя на больших расстояниях совпадает с характером поля электрического диполя. Диаграмма направленности в плоскости излучателя пропорциональна $\sin \theta$, а в перпендикулярной плоскости не зависит от угла φ , т.е. окружность.

Поле линейного излучателя с произвольной зависимостью распределения тока по длине на больших расстояниях может быть вычисленно по формуле (4.7) с учетом только одного первого слагаемого.

4.2. Расчет распределения тока по излучателю. (автор-Крымский В.)

Выше было отмечено, что данная задача считается внутренней задачей. Целью решения данной задачи является нахождение распределения тока на излучателе под действием сторонних источников тока или ЭДС. Методы ее решения, как и у внешней задачи, можно условно разделить на строгие и приближенные. К строгим относят такие методы, которые получены на основе уравнений Максвелла, удовлетворяют граничным условиям и условиям излучения. Приближенные методы чаще всего связывают с решением каких—либо модельных задач. Примером использования строгих методов может быть работа [68], в которой приводятся интегральные уравнения для нахождения тока на тонкой проволочной антенне. Вид этих уравнений достаточно сложен. Сравнительно простое решение получается только в случае прямолинейного проводника. Нахождение распределения токов на основе математических моделей обладает большей общностью, т.к. позволяет рассчитывать токи в разных антеннах. Суть предлагаемого метода заключается в том, что антенна представляется длинной линией [55]. Каждый элементарный участок антенны представляется в виде R , L , C , G ячейки рис.4.2.

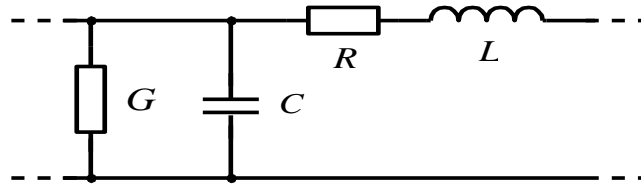


Рис.4.2.

В этой модели элемент G_i определяет излучаемую мощность, элементы C_i и L_i определяют эквивалентную емкость и индуктивность, элемент R_i определяет потери. От точки питания к концу линии распространяется электромагнитная волна. Волна отражается от конца линии и распространяется в сторону генератора. Затем отражается от генератора и т.д., т.е. происходит многократное прохождение волны и каждый проход дает свой импульс поля. Адекватность такой модели существенно зависит от того, каким образом определены параметры ячейки. Существует подход, когда элементы R , L , C , G определены для статических полей. Конечно, в этом случае соответствие модели и реального процесса будет плохим. Другой подход [58,59] основан на определении R , L , C , G на синусоидальном токе высокой частоты. Однако, и в этом случае имеет место несовпадение параметров модели и реального процесса, т.к. существенно отличаются временные зависимости несинусоидальной волны и процесса измерения или расчета параметров R , L , C , G . Поэтому в работе [55] предложен электродинамический способ определения параметров линии. Известно, что энергия, запасаемая магнитным полем в объеме V равна

$$W_M = \frac{\mu_0}{2} \int_V \vec{H} \cdot \vec{H} dV,$$

если приравнять ее к энергии поля, запасаемой в индуктивности

$$W_L = \frac{LI^2}{2},$$

то получим выражение для индуктивности

$$L = \frac{\mu_o}{I^2} \int_V \vec{H} \cdot \vec{H} dV \quad (4.12)$$

Полагая, что I_i -- ток на элементарном участке, а H_i -- напряженность магнитного поля, которое создается этим участком, получим для индуктивности элементарного участка

$$L_i = \frac{\mu_o}{I_i^2} \int_V \vec{H}_i \cdot \vec{H}_i dV .$$

Аналогичным образом для емкости

$$\begin{aligned} W_\varnothing &= \frac{\varepsilon_o}{2} \int_V \vec{E} \cdot \vec{E} dV \\ W_c &= \frac{CU^2}{2} \\ C_i &= \frac{\varepsilon_o}{U_i^2} \cdot \int_V \vec{E}_i \cdot \vec{E}_i dV . \end{aligned} \quad (4.14)$$

где величина $U_i = \int_l \vec{E}_i dl$ - напряжение на элементарном участке.

Для определения сопротивления потерь в литературе известна формула

$$R_i = \frac{1}{I_i^2} \int_V \sigma_\varnothing \cdot \vec{E}_i^2 dV , \quad (4.15)$$

которая получается из выражения для тепловых потерь.

Излучаемую мощность обычно определяют как поток вектора Пойтинга через некоторую поверхность

$$P_{изл} = \int_S \vec{E} \times \vec{H} d\vec{S} \quad (4.16)$$

Отношение мощности к квадрату тока дает проводимость излучения

$$\frac{1}{G_i} = \frac{1}{I^2} \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\vec{A} \cdot \vec{I}) dV \quad (4.17)$$

Заметим, что в формулах (4.12) – (4.17) параметры R , L , C , G являются функциями времени. Более точные их названия – мгновенные значения емкости, индуктивности, сопротивления потерь и проводимости излучения. Естественно, что их значение будет зависеть от формы излучающего тока. Могут быть введены также понятия средних значений R , L , C , G за время длительности импульса тока в виде

$$\vec{L} = \frac{1}{\tau_H} \int_0^{\tau_B} L(t) dt , \quad (4.18)$$

$$\vec{C} = \frac{1}{\tau_H} \int_0^{\tau_H} C(t) dt , \quad (4.19)$$

$$\vec{R} = \frac{1}{\tau_H} \int_0^{\tau_H} R(t) dt, \quad (4.20)$$

$$\vec{G} = \frac{1}{\tau_H} \int_0^{\tau_H} G(t) dt. \quad (4.21)$$

Очевидно, что именно эти параметры мы получаем в результате измерений. И, хотя вид формул (4.12) – (4.17) довольно простой, получение аналитических выражений для величин R , L , C , G возможно только для простейших форм излучателей. Для расчета параметров излучателей сложной формы можно воспользоваться методом сплайн-аппроксимации. Либо можно воспользоваться работами [58, 59], где имеются аналитические выражения для величин L и C на высокой частоте для проводников различной формы. Например, в случае тонкого линейного проводника радиусом a и длиной l получены формулы

$$C_i \cong 2\pi\epsilon_0 l \frac{1}{\ln(2l/a) - 1}, \quad (4.22)$$

$$L_i \cong \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left(\ln \frac{2l}{a} - 1 \right). \quad (4.23)$$

Величина G_i связана с излучаемой мощностью. В работе [12] получено выражение для сопротивления излучения элементарного диполя

$$R_{изл} = \frac{z_0 l^2}{6\pi c^2} \frac{\int \left(\frac{dI}{dt} \right)^2 dt}{\int I^2 dt}.$$

Для проводимости будем иметь

$$G_i = \frac{6\pi c^2}{z_0 l^2} \frac{\int I^2 dt}{\int \left(\frac{dI}{dt} \right)^2 dt}.$$

Если излучающий ток взять в виде

$$I(t) = \begin{cases} \frac{2A}{\tau}, 0 < t < \frac{\tau}{2} \\ \frac{2A}{\tau}(t - \tau), \frac{\tau}{2} < t < \tau \end{cases},$$

то величина G_i окажется равной

$$G_i = \frac{6\pi c^2}{z_0 l^2} \cdot \frac{\tau^2}{12} = \frac{\pi}{2z_0} \left(\frac{c\tau}{\Delta l} \right)^2. \quad (4.24)$$

Для сопротивления R_i необходимо взять его значение с учетом поверхностного эффекта

$$R_i = R_0 \cdot \frac{a}{2\delta},$$

где δ - глубина проникновения тока в проводник

$$\delta = \sqrt{\frac{\rho}{\pi f \mu_o \mu}},$$

а величина R_o - сопротивление постоянному току. Для цилиндрического проводника

$$R_o = \frac{\rho \cdot l}{\pi a^2},$$

а тогда для величины R_i имеем

$$R_i = \frac{\rho \cdot l}{2a} \sqrt{\frac{\pi f \mu_o \mu}{\rho}}. \quad (4.25)$$

Для расчета величины тока в каждой ячейке воспользуемся методом преобразования Лапласа для анализа переходных процессов в длинной линии [114]. Согласно этому методу, изображение величины тока вдоль излучателя определяется выражением

$$I(p, l) = \frac{U_\Gamma(p)}{z_C + z_\Gamma} \left[e^{-\gamma l} - \Gamma_2 e^{-\gamma(2l_o - l)} + \Gamma_2 \cdot \Gamma_1 e^{-\gamma(2l_o + l)} + \dots \right]. \quad (4.26)$$

где $U_\Gamma(p)$ - изображение напряжения генератора; z_Γ - внутреннее сопротивление генератора; z_C - волновое сопротивление линии, равное

$$z_C = \sqrt{\frac{R + pL}{G + pC}},$$

γ - коэффициент распространения волны, равный

$$\gamma = \sqrt{(R + pL)(G + pC)}, \quad (4.27)$$

Γ_1 и Γ_2 - коэффициенты отражения от начала и конца линии

$$\Gamma_1 = \frac{z_\Gamma - z_C}{z_\Gamma + z_C}, \quad (4.28)$$

$$\Gamma_2 = \frac{z_H - z_C}{z_H + z_C}. \quad (4.29)$$

В выражении (4.26) учтено три волны: прямая, отраженная от конца и отраженная от генератора. Конечно, можно использовать только одну прямую волну, если каким-либо образом погасить отраженную. Из соотношений (4.28) и (4.29) следует, что в случае щелевого излучателя $z_H = 0$, $\Gamma_2 = -1$. Обратная волна складывается с прямой, т.е. изменения полярности тока не происходит. Для вибраторных излучателей $z_H = \infty$, $\Gamma_2 = 1$ и обратная волна вычитается из прямой. Происходит изменение полярности излучающего тока.

На практике может быть поставлена задача излучения импульса тока с минимальными искажениями. Тогда, используя условие неискаженной передачи сигнала в длинной линии [114]

$$LG = RC, \quad (4.30)$$

можно определить величину R_i , т.к. параметры L_i , C_i , G_i связаны с излучательными характеристиками элементарной ячейки излучателя. Они задаются формой и длиной элементарного излучателя, формой тока в нем и не могут быть изменены. Величина R_i связана с электрическими потерями и может искусственно увеличиваться или уменьшаться. Если теперь взять величины L_i и C_i из (4.22) и (4.23), G_i - из (4.24), а величину R_i из (4.25), то, подставляя их в (4.30), получим величину удельного сопротивления проводника

$$\rho = \frac{z_o}{2\pi} \left(\frac{c\tau}{l} \right)^5 \cdot \frac{a^2}{l \cdot \mu}. \quad (4.31)$$

Данное значение обеспечивает неискаженную передачу импульса тока, а, следовательно, и излучение с минимальными искажениями. Переход от напряжения генератора как функции времени к изображению и нахождение временной зависимости тока по его изображению можно осуществить на основе дискретного преобразования Лапласа с использованием сплайн-функций.

Использование модели длинной линии позволяет рассчитать входное сопротивление однородной антенны, которое может быть найдено как сопротивление бесконечной линии [16] с последовательным сопротивлением

$$z_1$$

$$z_1 = R_i + pL_i$$

и параллельным сопротивлением z_2

$$\frac{1}{z_2} = G_i + pC_i$$

в виде

$$z_{BX} = \frac{z_1}{2} + \sqrt{\frac{z_1^2}{4} + z_1 z_2}. \quad (4.32)$$

Таким образом будет получено изображение функции сопротивления.

Для получения оригинала необходимо использовать обратное дискретное преобразование Лапласа.

4.3 Линейный излучатель с бегущей волной тока.

(автор-Крымский В.)

Из вышеприведенных рассуждений следует, что в самом общем случае ток на излучателе описывается бегущей волной. Скорость распространения волны определяется параметрами излучателя. Для круглого тонкого проводника $v \cong c$, для прямолинейной узкой щели то же самое. В любом случае время прохождения импульса тока по длине излучателя равно

$$T_H = \frac{l}{v}.$$

Учитывая длительность импульса и разность расстояний между точкой питания и концом излучателя, для длительности импульса поля будем иметь

$$\tau_{II} = \tau_{II} + \frac{R_{\text{МАКС}} - R_{\text{МИН}}}{c} + \frac{1}{v}. \quad (4.33)$$

В зависимости от соотношения пространственной длительности τ_{II} импульса и длиной излучателя возможны два случая. Если $l \leq \tau_{II}$, то в формуле для тока (4.26) следует одновременно учитывать, как минимум, две волны – прямую и обратную. При этом в формировании поля излучения участвует весь излучатель. Если $l \geq \tau_{II}$, излученное поле формируется вначале прямой волной тока. В конце излучателя на расстоянии $\Delta l = \tau_{II}$ от его конца присутствуют обе волны, далее по времени присутствует только обратная волна. В формировании поля излучения прямой и обратной волн участвует часть излучателя длиной τ_{II} .

Зависимость импульса тока от времени может быть задана в виде аналитического выражения. Наиболее часто используются два способа. Первый – задание в виде гауссовского импульса

$$I(t) = I_o \cdot \exp \left\{ -\frac{\alpha \left(t - \frac{\tau_{II}}{2} \right)^2}{(\tau_{II}/2)^2} \right\} \quad (4.34)$$

и виде суммы двух экспонент

$$I(t) = I_o \cdot [\exp\{-t/a\} - \exp\{-t/b\}]. \quad (4.35)$$

Величина α в формуле (4.34) определяет длительность импульса. А величины a и b в (4.35) связаны с техническими параметрами импульса [115].

Они определяют время нарастания импульса от 0,1 до 0,9 амплитуды

$$T_H = 2,2b, \quad (4.36)$$

длительность импульса по уровню 0,5 амплитуды

$$T_1 = 0,69a, \quad (4.37)$$

и длительность импульса по уровню 0,1 амплитуды

$$T_2 = 2,3a. \quad (4.38)$$

Аналитическое задание формы импульса тока в виде формулы (4.35) описывает большое число реально генерируемых импульсов.

4.4. Излучатель произвольной формы.

(автор-Крымский В.)

Наиболее часто встречаются криволинейные излучатели, которые имеют плоскую форму. Общепринятая методика расчета поля их излучения выглядит следующим образом [118]. Форма излучателя задается параметрически $x = r(\tau)$, $y = s(\tau)$. Элемент дуги, по которой происходит интегрирование, равен

$$dl = \sqrt{\left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + \left(\frac{ds}{d\tau} \right)^2}$$

Для векторного потенциала в этом случае имеем

$$\vec{A}(p, t) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_l \frac{\vec{I}(l, t - R/c)}{R} dl.$$

Имеются две составляющие тока I_x и I_y и две составляющие векторного потенциала A_x и A_y

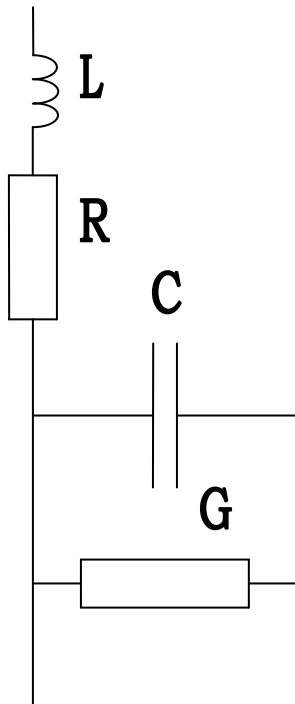
$$A_x(p, t) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{\tau} \frac{I_x(l, t - R/c)}{R} \dot{r}(\tau) d\tau, \quad (4.39)$$

$$A_y(p, t) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{\tau} \frac{I_y(l, t - R/c)}{R} \dot{s}(\tau) d\tau. \quad (4.40)$$

Поля E и H рассчитываются по формулам (4.2*) и (4.3*) с учетом того, что $A_z = 0$.

В таком виде способ расчета поля излучателей произвольной формы совместно с моделью бегущей волны тока может быть использован для расчета поля молниевых разрядов [55]. Величина сопротивления канала R определяется через число носителей заряда. Индуктивность и емкость канала берутся как для цилиндрического проводника по формулам (4.22) и (4.23). Потери на излучение рассчитываются по формулам (4.16) или (4.17). расчет некоторых моделей разрядов дал результаты, которые качественно совпадают с экспериментальными.

Расчет распределения тока по излучателю.



Надо найти R, L, C, G:

- 1) Взять для статических полей - плохо.
- 2) R, L, C – для СВЧ - синусоиды.
- 3) Электродинамический способ :

$$W_{\text{Магн. поля}} = \frac{\mu_0}{2} \int_V \vec{H} \vec{H} dV \quad ; \quad W_{L_i} = \frac{LI^2}{2}$$

⇓

$$\text{a) } L_i = \frac{\mu_0}{I^2} \int_{i \ V} \vec{H}_i \vec{H}_i dV$$

$$W_{\text{эл. поля}} = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V \vec{E} \vec{E} dV \quad ; \quad W_C = \frac{CU^2}{2}$$

⇓

$$\text{б) } C_i = \frac{\varepsilon_0}{U^2} \int_{i \ V} \vec{E}_i \vec{E}_i dV,$$

$$\text{где } U_i = \int_l \vec{E}_i dl$$

Сопротивление потерь:

$$в) \quad R_i = \frac{1}{I_i^2} \int_V G \vec{E}_i^2 dV$$

$$P_{изл} = \int_S \vec{E} \times \vec{H} dS$$

$$P_i = \frac{I_i^2}{G_i}$$

$$г) \quad \frac{1}{G_i} = \frac{1}{I_i^2} \int_V \vec{E} \times \vec{H} dV$$

Причём $G_i(t), R_i(t), L_i(t), C_i(t)$ - мгновенные значения.

При измерениях получаем средние их значения:

$$\bar{L} = \frac{1}{\tau_u} \int_0^{\tau_u} L(t) dt, \quad \bar{C} = \frac{1}{\tau_u} \int_0^{\tau_u} C(t) dt$$

$$\bar{R} = \frac{1}{\tau_u} \int_0^{\tau_u} R(t) dt, \quad \bar{G} = \frac{1}{\tau_u} \int_0^{\tau_u} G(t) dt$$

Для простейших излучателей можно получить аналитические выражения:

$$C_i = 2\pi\epsilon_0 l \frac{1}{\ln\left(\frac{2l}{a}\right) - 1},$$

a -радиус, l -длина;

$$L_i = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left(\ln \frac{2l}{a} - 1 \right);$$

$$G_i = \frac{6\pi e^2}{Z_0 l^2} \frac{\int I^2 dt}{\int \left(\frac{dI}{dt} \right)^2 dt};$$

$$R_i = R_0 \frac{a}{2\delta},$$

$\frac{a}{2\delta}$ -поверхностный эффект,

R_0 -сопротивление постоянному току,

$$\delta = \sqrt{\frac{\rho}{\pi f \mu_0 \mu}}, \quad R_0 = \frac{\rho l}{\pi a^2} \text{ -для цилиндра,}$$

$$R_i = \frac{\rho l}{2a} \sqrt{\frac{\pi f \mu_0 \mu}{\rho}}.$$

С учётом отражений:

$$I(p, l) = \frac{U_{\Gamma}(p)}{Z_c + Z_{\Gamma}} \left[e^{-\gamma l} - \Gamma_2 e^{-\gamma(2l_0 - l)} + \Gamma_2 \Gamma_1 e^{-\gamma(2l_0 + l)} + \dots \right]$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{R + pL}{G + pl}} \text{ -волновое сопротивление,}$$

Z_{Γ} -внутреннее сопротивление генератора,

$$\gamma = \sqrt{(R + pL)(G + pl)},$$

$$\Gamma_1 = \frac{Z_{\Gamma} - Z_c}{Z_{\Gamma} + Z_c}, \quad \Gamma_2 = \frac{Z_n - Z_c}{Z_n + Z_c}.$$

Для вибратора:

$$Z_n = \infty, \quad \Gamma_2 = 1,$$

Щель

$$Z_n = 0, \quad \Gamma_2 = -1.$$

Условие излучения без искажений:

$$LG = RC,$$

тогда

$$\rho = \frac{r_0}{2\pi} \left(\frac{c\tau}{l} \right)^5 \frac{Q^2}{l - \mu}.$$

Длительность импульса:

$$\tau_n = \tau_u + \frac{R_{\max} - R_{\min}}{C} + \frac{1}{V}.$$

3.2 Элементарный магнитный диполь.

Обычно при расчете поля магнитного диполя вводят понятие фиктивного магнитного тока \vec{I}_M [1] и расчеты проводятся по аналогии с электрическим диполем. Во многих работах [2,12] отмечается, что реальным физическим эквивалентом магнитного диполя является рамка с током. Размеры рамки берутся значительно меньше длины волны и рассчитывается ее поле излучения. Поступим аналогичным образом и рассмотрим поле излучения рамки, размеры которой значительно меньше пространственной длительности импульса. Согласно принятой классификации, рамка также относится к классу линейных излучателей. В работах Хармута [12] расчет поля излучения рамки производится с использованием соотношений для поля диполя. Вводятся обозначения для полей $\vec{E}' = z_o \vec{H}$ и $\vec{H}' = -\vec{E} / z_o$ и магнитного момента $\vec{m} = z_o \vec{P}$. Сам магнитный момент рамки определяют как

$$\vec{m} = \mu_o \cdot I(t) \cdot \vec{a} \quad (3.13)$$

Однако, такой подход не проясняет сути физических процессов. Поэтому воспользуемся методикой из работы [2]. Положим, что рамка расположена в плоскости xOy . Отмечается, что поскольку токи в рамке замкнуты, то

$$\text{div} \vec{I} = 0,$$

т.е. скалярный потенциал со временем не изменяется.

Для векторного потенциала получена формула

$$A(\vec{R}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m}(t - R/c) \cdot x\vec{R}}{R^3} + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{cR^2} \frac{\partial \vec{m}(t - R/c)}{\partial t} \cdot x\vec{R}, \quad (3.14)$$

где магнитный момент рамки определяется соотношением

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int \vec{R}_o \times \vec{I} dV$$

Отмечена одна важная особенность для величины векторного потенциала рамки диполя

$$A_p \cong \frac{v}{c} A_d, \quad (3.15)$$

где v – скорость движения зарядов. Поскольку при малых скоростях $v \ll c$, то из соотношения (3.15) следует $A_p \ll A_d$. Поскольку поле E

пропорционально $\partial A / \partial t$, следовательно,

$$E_p \ll E_d$$

т.е. излучением магнитного момента можно пренебречь по сравнению с излучением дипольного момента, если они присутствуют совместно.

Поле E для рамки вычисляется очень просто

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

и из соотношения (3.14) имеем

$$\vec{E}(\vec{R}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{1}{R^3} \frac{\partial}{\partial t} \vec{m}(t - R/c) \cdot x\vec{R} + \frac{1}{cR^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{m}(t - R/c) \cdot x\vec{R} \right], \quad (3.16)$$

т.е. всего две составляющие, пропорциональные $1/R$ и $1/R^2$. В сферической системе координат поле E имеет вид

$$\left. \begin{aligned} E_R &= 0 \\ E_\theta &= 0 \\ E_\varphi &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \sin \theta \left[\frac{1}{R^2} \vec{m}(t - R/c) + \frac{1}{cR} \frac{\partial \vec{m}(t - R/c)}{\partial t} \right] \end{aligned} \right\}. \quad (3.17)$$

Если взять магнитный момент рамки в виде

$$\vec{m} = I(t) \cdot \vec{S}, \quad (3.18)$$

где \vec{S} -- вектор, равный площади рамки и направленный по ее оси, то для поля E_φ имеем

$$E_{\varphi} = -\frac{\mu_o}{4\pi} S \cdot \sin \theta \left[\frac{1}{R^2} \frac{d}{dt} I(t - R / c) + \frac{1}{cR} \frac{d^2}{dt^2} I(t - R / c) \right]. \quad (3.19)$$

Поле Н определяется из соотношений

$$\vec{H}(p, t) = \frac{1}{\mu_o} \text{rot} \vec{A}(p, t)$$

и в сферической системе координат имеет вид

$$\left. \begin{aligned} H_R &= \frac{\cos \theta}{2\pi} \left[\frac{1}{R^3} \dot{m}(t - R / c) + \frac{1}{cR^2} \ddot{m}(t - R / c) \right] \\ H_{\theta} &= \frac{\sin \theta}{4\pi} \left[\frac{1}{R^3} \vec{m}(t - R / c) + \frac{1}{cR^2} \dot{\vec{m}}(t - R / c) + \frac{1}{c^2 R} \ddot{\vec{m}}(t - R / c) \right] \\ H_{\varphi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

Или с учетом обозначений вида (3.18)

$$\left. \begin{aligned} H_R &= \frac{S \cdot \cos \theta}{2\pi} \left[\frac{1}{R^3} \frac{d}{dt} I(t - R / c) + \frac{1}{cR^2} \frac{d^2}{dt^2} I(t - R / c) \right] \\ H_{\theta} &= \frac{S \cdot \sin \theta}{4\pi} \left[\frac{1}{R^3} I(t - R / c) + \frac{1}{cR^2} \frac{d}{dt} I(t - R / c) + \frac{1}{c^2 R} \frac{d^2}{dt^2} I(t - R / c) \right] \\ H_{\varphi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

Отметим еще одно важное отличие поля рамки от поля диполя. В выражениях (3.19) и (3.21) составляющие поля, пропорциональные $1 / R$, стоят со второй производной тока рамки, а не с первой как у диполя. Если учитывать только составляющие пропорциональные $1 / R$, то для полей Е и Н из соотношений (3.19) и (3.21) будем иметь

$$\left. \begin{aligned} E_R &= E_{\theta} = 0 \\ E_{\varphi} &= -\frac{\mu_o}{4\pi} \frac{S}{cR} \sin \theta \frac{d^2}{dt^2} I(t - R / c) \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

$$\left. \begin{aligned} H_R &= H_{\varphi} = 0 \\ H_{\theta} &= \frac{1}{4\pi} \frac{S}{c^2 R} \sin \theta \frac{d^2}{dt^2} I(t - R / c) \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

Сравнение с полем диполя показывает, что поля Е и Н как бы поменялись местами. Угловые зависимости полей рамки аналогичны угловым зависимостям поля диполя. Отличие, которое было отмечено, наблюдается в форме излучаемого импульса.

3.3 Элементарная площадка. (Крымский В.В.)

Элементарная площадка по принятой классификация относится к поверхностным антеннам с размерами много меньше пространственной длительности импульса. При рассмотрении вопроса о поле излучения элементарной площадки следует разделять два вида площадок. Если рассматривать часть металлической поверхности, то расчет полей ведется исходя из того, что поверхностные заряды отсутствуют, т.е. переменный скалярный потенциал равен нулю. Для векторного потенциала используется формула

$$\vec{A}(p, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{I}(p', t - R/c)}{R} dV$$

где $p' \in V$, $R = |\vec{p} - \vec{p}'|$, в которой вместо объемного записывается поверхностный интеграл и в силу малости площадки имеет место

$$\vec{A}(\vec{R}, t) = \frac{\mu_0 S}{4\pi} \frac{\vec{I}(t - R/c)}{R}, \quad (3.24)$$

где S – площадь площадки. Поля E и H находятся как ранее.

Второй вид элементарной площадки, который называют элементом Гюйгенса, связан с излучением малого участка поверхности типа свободного пространства с заданным на нем распределением полей E и H . Задача такого типа возникает при расчете поля апертурных антенн, например, рупорных или зеркальных. Поля E и H на площадке создаются каким-либо первичным излучателем. Общепринятая методика расчетов здесь такова [17]. Согласно принципу эквивалентных токов, на площадке S вводятся поверхностные электрические и магнитные токи

$$\vec{I}_\Sigma = \vec{n} \times \vec{H}, \quad \vec{I}_M = -\vec{n} \times \vec{E}.$$

Рассматривается суммарное поле, которое создается электрическим диполем с током \vec{I}_Σ и повернутым относительно его на 90° магнитным диполем с током \vec{I}_M . Угол поворота между диполями определяется углом между векторами E и H падающего поля. Геометрия задачи показана на рис 3.1.

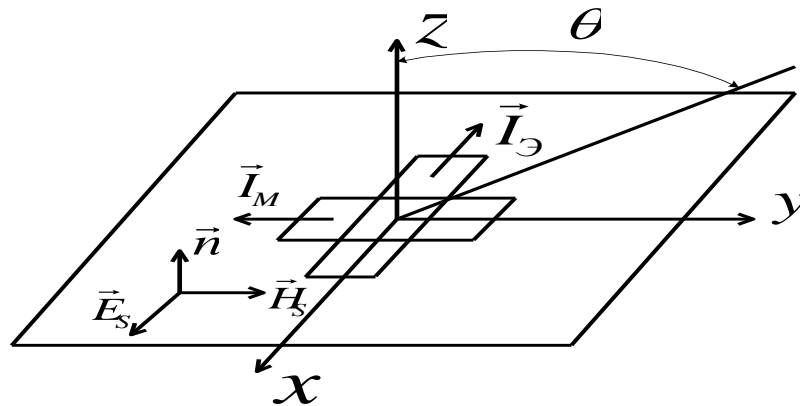


Рис.3.1

Для величин электрических и магнитных токов получено выражение

$$I_{\vartheta} = \frac{E_s}{z_{\phi}} \cdot dy, \quad (3.25)$$

где z_{ϕ} -- волновое сопротивление фронта волны,

$$I_M = E_s dx. \quad (3.26)$$

суммарное поле диполей для упрощения находится в трех различных плоскостях xOz, yOz, xOy.

Расчет поля в плоскости xOz проводится следующим образом. Электрическое поле электрического диполя с учетом поворота на 90° относительно оси z и с учетом (3.10) имеет вид

$$dE_{\vartheta} = \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{dx}{R} \sin(90^\circ - \theta) \frac{d}{dt} I_{\vartheta}(t - R/c)$$

или с учетом формулы (3.25) имеем

$$dE_{\vartheta} = \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{dx}{R} \frac{dy}{z_{\phi}} \cos \theta \frac{d}{dt} E_s(t - R/c). \quad (3.27)$$

Электрическое поле магнитного диполя не зависит от θ , поэтому

$$dE_M = \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{dy}{cR} \frac{d^2}{dt^2} I_M(t - R/c),$$

$$dE_M = \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{dx dy}{cR} \frac{d^2}{dt^2} E_s(t - R/c). \quad (3.28)$$

Поля диполей dE_{ϑ} и dE_M совпадают по направлению, поэтому могут быть просуммированы. Для суммарного поля двух диполей получаем

$$dE_{\theta} = dE_{\vartheta} + dE_M = \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{dS}{R} \left[\frac{1}{c} \frac{d^2}{dt^2} E_s(t - R/c) + \frac{\cos \theta}{z_{\phi}} \frac{d}{dt} E_s(t - R/c) \right]. \quad (3.29)$$

Это не такая простая формула, как для случая монохроматических колебаний, однако, некоторые выводы все же можно сделать. Несмотря на значительные отличия постоянных коэффициентов в первом и втором слагаемых соотношение между ними будет определяться зависимостью E_s от времени и изменяться во времени.

Поле E в плоскости yOz определяются аналогично. В отличие от соотношений (3.27) и (3.28) поля электрического и магнитного диполей меняются угловой зависимостью

$$dE_{\vartheta} = \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{dS}{R z_{\phi}} \frac{d}{dt} E_s(t - R/c), \quad (3.30)$$

$$dE_M = \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{dS}{R} \frac{\cos \theta}{c} \frac{d^2}{dt^2} E_s(t - R/c). \quad (3.31)$$

Суммарное поле имеет вид

$$dE_{\varphi} = dE_{\vartheta} + dE_M = \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{dS}{R} \left[\frac{\cos \theta}{c} \frac{d^2}{dt^2} E_S(t - R/c) + \frac{1}{z_{\varphi}} \frac{d}{dt} E_S(t - R/c) \right]. \quad (3.32)$$

Поле в любом направлении θ, φ определяется как сумма векторов

$$d\vec{E} = \vec{i}_{\theta} \cdot dE'_{\theta} + \vec{i}_{\varphi} \cdot dE'_{\varphi}, \quad (3.33)$$

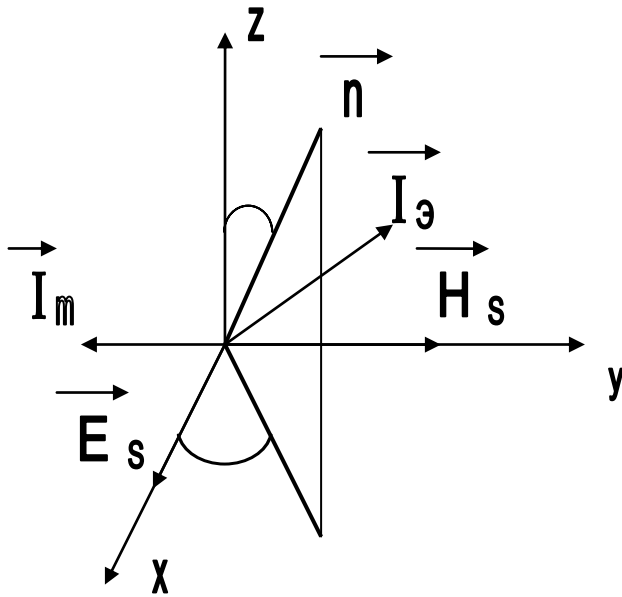
где $E'_{\theta} = E_{\theta} \cdot \cos \varphi$, $E'_{\varphi} = -E_{\varphi} \cdot \sin \varphi$.

В заключение отметим, что расчет полей больших поверхностей с использованием элемента Гюйгенса будет сложнее, чем при синусоидальной зависимости токов и полей.

Элементарная площадка (Элемент Гюйгенса).

Любое поле можно заменить на эквивалентные токи:

$$\vec{I}_e = \vec{n} \times \vec{H}_S, \quad \vec{I}_m = \vec{n} \times \vec{E}_S$$



Величина:

$$I_{\vartheta} = \frac{E_S}{Z_{\varphi}} dy \quad (1)$$

Z_{φ} - волновое сопротивление фронта волны.

$$I_M = E_S dx \quad (2)$$

Для электронного диполя получено:

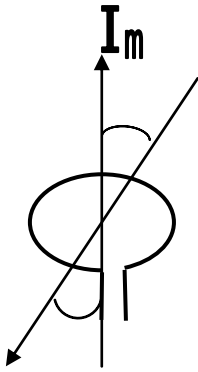
$$E_{\theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin\theta}{R} \frac{1}{C^2} I_{\vartheta} \left(t - \frac{R}{C} \right)$$

$$dE_{\theta} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \theta}{R} \dot{I}_{\vartheta} \left(t - \frac{R}{C} \right) dx$$

или с учетом (1):

$$dE_{\vartheta} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dx dy}{R Z_{\phi}} \cos\theta \dot{E}_{\vartheta} \left(t - \frac{R}{C} \right)$$

Эл. поле магнитного тока от θ не зависит.



$$E_{\phi} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \sin\theta \frac{1}{RC} \ddot{I} \left(t - \frac{R}{C} \right)$$

$$dE_M = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dy}{RC} \ddot{I}_M \left(t - \frac{R}{C} \right)$$

С учётом (2):

$$dE_M = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dx dy}{RC} \ddot{E}_S \left(t - \frac{R}{C} \right)$$

Поля Электрического и магнитного тока совпадают по направлению.

$$dE_{\theta} = dE_{\vartheta} + dE_M = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dS}{R} \times \left\{ \frac{1}{C} \ddot{E}_S \left(t - \frac{R}{C} \right) + \frac{\cos\theta}{Z_{\phi}} \dot{E}_S \left(t - \frac{R}{C} \right) \right\}$$

Для электрического диполя

$$dE_{\vartheta} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dx}{R} \dot{I}_{\vartheta} \left(t - \frac{R}{C} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dxdy}{RZ_{\varphi}} \dot{E}_s \left(t - \frac{R}{C} \right)$$

$$dE_M = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dy}{RC} \cos \theta \times \ddot{I}_M \left(t - \frac{R}{C} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dxdy}{RC} \cos \theta \times \ddot{E}_s \left(t - \frac{R}{C} \right)$$

$$dE_{\varphi} = dE_{\vartheta} + dE_M = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dS}{R} \times \left\{ \frac{\cos \theta}{C} \ddot{E}_s \left(t - \frac{R}{C} \right) + \frac{1}{Z_{\varphi}} \dot{E}_s \left(t - \frac{R}{C} \right) \right\}$$

$$d\vec{E} = \vec{\theta}_0 dE'_{\theta} + \vec{\varphi}_0 dE'_{\varphi}$$

$$E'_{\theta} = E_{\theta} \cos \varphi, \quad E'_{\varphi} = E_{\varphi} \sin \varphi$$

Если на металле

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \varphi = 0$$

Электрический диполь Герца.

По принятой классификации электрический диполь Герца является линейным излучателем с размерами, значительно меньшими пространственной длительности импульса. Диполь Герца является простейшим излучателем и чаще всего его представляют как совокупность двух электрических шариков, соединенных проводником. Расстояние между шариками значительно меньше τ_{np} . Расчет поля диполя проводится на основе соотношений для потенциалов

$$\vec{A}(p, t) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_V \frac{\vec{I}(p', t - R/c)}{R} dV$$

где $p' \in V, R = |\vec{p} - \vec{p}'|$

$$\varphi(p, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_V \frac{\rho(p', t - R/c)}{R} dV$$

и полей

$$\vec{H}(p, t) = \frac{1}{\mu_o} \text{rot} \vec{A}(p, t) \quad \text{и}$$

$$\vec{E}(p, t) = -\text{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}(p, t)}{\partial t}.$$

Используя разложение квадратного корня в выражении для расстояния R и разложения подынтегральной функции в ряд Тейлора для скалярного и векторного потенциалов, получено

$$\varphi(\vec{R}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{\vec{R}}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left\{ \frac{\vec{P}(t - R/c)}{R} \right\} \quad (3.1)$$

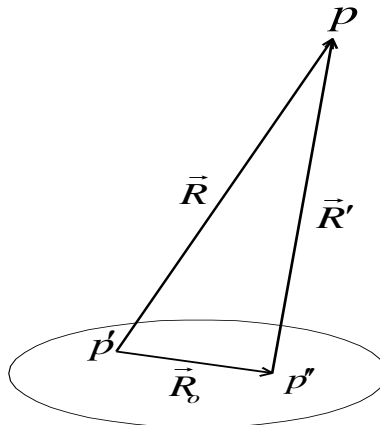


Рис. 1

p' - начало координат;

p - точка, в которой вычитается потенциал;

p'' - точка, в которой находится диполь.

Исходя из Рис.1 векторный $\vec{A}(p, t)$ и скалярный $\varphi(p, t)$ потенциалы можно переписать в виде

$$\vec{A}(p, t) = \vec{A}(\vec{R}, t) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_V \frac{\vec{I}(\vec{R}_o, t - R/c)}{R} dV$$

$$\varphi(p, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_V \frac{\rho(\vec{R}_o, t - R/c)}{R} dV$$

рассмотрим потенциал на больших расстояниях от заряженной системы $\frac{R_o}{R} \ll 1$.

Учитывая, что

$$\vec{R}' = \vec{R} - \vec{R}_o, \quad R' = \sqrt{R^2 - 2\vec{R}\vec{R}_o + R_o^2},$$

мы можем выражение для R' разложить в ряд по (R_o/R) и ограничиться линейным членом разложения:

$$R' = R \left(1 - 2 \frac{\vec{R}\vec{R}_o}{R^2} + \frac{R_o^2}{R^2} \right)^{1/2} = R - \frac{\vec{R}\vec{R}_o}{R} + \dots$$

Пользуясь данным разложением, можно подынтегральное выражение в

формуле $\varphi(\vec{R}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_V \frac{\rho(\vec{R}_o, t - \frac{R'}{c})}{R'} dV$ разложить в ряд Тейлора в точке R :

$$\frac{\rho\left(R_o, t - \frac{R'}{c}\right)}{R'} = \frac{\rho\left(\vec{R}_o, t - \frac{R}{c}\right)}{R} - \frac{\vec{R}\vec{R}_o}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left\{ \frac{\rho\left(R_o, t - \frac{R}{c}\right)}{R} \right\} + \dots = \frac{\rho}{R} - \frac{\vec{R}}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\vec{R}_o \rho}{R} \right) + \dots$$

. Конечно, ограничиться первым членом в разложении можно лишь тогда, когда все последующие члены разложения малы. Условие малости членов разложения будет использовано позднее для вывода критерия применимости получаемых формул. Подставляя полученное выражение в формулу для φ , получим

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_V \rho dV - \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \cdot \frac{\vec{R}}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{R} \int_V \vec{R}_o \rho dV.$$

Интеграл в первом члене правой части равен нулю ввиду нейтральности системы, а интеграл во втором члене есть момент диполя:

$$\int_V \vec{R}_o \rho \left(\vec{R}_o, t - \frac{R}{c} \right) dV = \vec{p} \left(t - \frac{R}{c} \right). \quad (3.1^*)$$

Следовательно, потенциал диполя принимает следующий вид:

$$\varphi(\vec{R}, t) = - \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{\vec{R}}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left\{ \frac{\vec{p} \left(t - \frac{R}{c} \right)}{R} \right\}.$$

Это выражение можно переписать также следующим образом:

$$\varphi(\vec{R}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \operatorname{div} \frac{\vec{p}\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R},$$

в чем легко убедиться, если записать дивергенцию в сферических координатах.

Исходя из формулы

$$\vec{A}(x, y, z, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\vec{j}\left(x', y', z', t - \frac{R}{c}\right)}{R} dV,$$

запишем

$$\vec{A}(\vec{R}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\vec{j}\left(\vec{R}_o, t - \frac{R}{c}\right)}{R'} dV.$$

Подынтегральное выражение разлагаем в ряд:

$$\frac{\vec{j}\left(\vec{R}_o, t - \frac{R'}{c}\right)}{R'} = \frac{\vec{j}\left(\vec{R}_o, t - \frac{R}{c}\right)}{R} - \frac{\vec{R}\vec{R}_o}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left\{ \frac{\vec{j}\left(\vec{R}_o, t - \frac{R}{c}\right)}{R} \right\} + \dots$$

В результате получаем:

$$\vec{A}(\vec{R}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi R} \int_V \vec{j}\left(\vec{R}_o, t - \frac{R}{c}\right) dV - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{R}\vec{R}_o}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\vec{j}}{R} \right) dV + \dots$$

В рассматриваемом случае токи не замкнуты и поэтому первый интеграл не равен нулю. Он дает главную часть потенциала. Для вычисления этого интеграла продифференцируем выражение (3.1*) по времени:

$$\frac{\partial \vec{p}\left(t - \frac{R}{c}\right)}{\partial t} = \int \vec{R}_o \frac{\partial \rho\left(\vec{R}_o, t - \frac{R}{c}\right)}{\partial t} dV$$

воспользуемся уравнением непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{j}, \text{ в котором } \operatorname{div} \vec{j} = \frac{\partial j_x}{\partial x_o} + \frac{\partial j_y}{\partial y_o} + \frac{\partial j_z}{\partial z_o},$$

где x_o, y_o, z_o - компоненты вектора \vec{R}_o .

Следовательно,

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = -\int_V \vec{R}_o \operatorname{div} \vec{j} dV.$$

Умножим обе части этого равенства на некоторый произвольный постоянный вектор \vec{a} :

$$\vec{a} \cdot \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = -\int_V (\vec{a} \vec{R}_o) \operatorname{div} \vec{j} dV$$

и преобразуем подынтегральное выражение по формуле векторного анализа, записанной в виде:

$$(\vec{a}\vec{R}_o) \operatorname{div} \vec{j} = \operatorname{div} \{ \vec{j}(\vec{a}\vec{R}_o) \} - \vec{j} \operatorname{grad}(\vec{a}\vec{R}_o) = \operatorname{div} \{ \vec{j}(\vec{a}\vec{R}_o) \} - \vec{a} \vec{j}.$$

Тогда получим:

$$\vec{a} \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = - \int_V \operatorname{div} \{ \vec{j}(\vec{a}\vec{R}_o) \} dV + \vec{a} \int_V \vec{j} dV.$$

Первый интеграл в правой части может быть преобразован по теореме Гаусса-Остроградского:

$$\int_V \operatorname{div} \{ \vec{j}(\vec{a}\vec{R}_o) \} dV = \oint_S \vec{j}(\vec{a}\vec{R}_o) d\vec{S} = 0,$$

где S – поверхность, ограничивающая рассматриваемый объем V . Интеграл по поверхности равен нулю, потому что все токи расположены внутри рассматриваемого объема и через поверхность S не текут т.е. \vec{j} в точках на поверхности S равен нулю. Следовательно, имеем равенство:

$$\vec{a} \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = \vec{a} \int_V \vec{j} dV.$$

В силу произвольности \vec{a} отсюда следует, что

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} \left(t - \frac{R}{c} \right) = \int_V \vec{j} \left(\vec{R}_o, t - \frac{R}{c} \right) dV.$$

Получим окончательно для векторного потенциала выражение:

$$\vec{A}(\vec{R}, t) = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\vec{p} \left(t - \frac{R}{c} \right)}{R} \right\} \quad (3.2)$$

где $\vec{P}(t - R/c) = \int \vec{R}_o \rho(\vec{R}_o, t - R/c) dV$, который называют моментом диполя.

Скалярный перепишем исходя из формулы (3.1):

$$\frac{\partial}{\partial R} \left\{ \frac{\vec{p} \left(t - \frac{R}{c} \right)}{R} \right\} = \frac{-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} \left(t - \frac{R}{c} \right) \vec{R} - \vec{p} \left(t - \frac{R}{c} \right)}{R^2} = -\frac{\vec{p} \left(t - \frac{R}{c} \right) + \frac{R}{c} \cdot \dot{\vec{p}} \left(t - \frac{R}{c} \right)}{R^2}.$$

Получаем:

$$\varphi(\vec{R}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\left[\vec{P}(t - R/c) + R/c \cdot \dot{\vec{P}}(t - R/c) \right] \cdot \vec{R}}{R^3}. \quad (3.3)$$

При выводе использовано соотношение (1.24) для тока, создаваемого сгустком заряда величиной q , движущегося со скоростью \vec{v} :

$$\varphi(p, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(p', t - R/c)}{R} dV.$$

Расстояние R сразу выносится за знак интеграла.

Исходя из (3.2) и учитывая, что $\dot{\vec{P}} = d\vec{P}/dt = \vec{I}(t) \cdot l$, а в точке вычисления

потенциала p , учитывая запаздывание $\frac{d\vec{P}\left(t - \frac{R}{c}\right)}{dt} = \vec{I}\left(t - \frac{R}{c}\right) \cdot l$ и $\vec{P} = q(t) \cdot \vec{l}$

преобразуем векторный потенциал \vec{A} следующим образом:

$$A(\vec{R}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\vec{P}\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R} \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\vec{P}\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R} \right\} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\vec{P}}_t\left(t - \frac{R}{c}\right) \cdot R - R'_t \cdot \vec{P}\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{\vec{I}\left(t - \frac{R}{c}\right) \cdot l}{R} - \frac{R'_t \cdot q\left(t - \frac{R}{c}\right) \cdot \vec{l}}{R} \right\}$$

При условии малости отношения длины диполя l к расстоянию до точки наблюдения R , векторный потенциал равен

$$A(\vec{R}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{R} \vec{I}(t - R/c) + O\left(\frac{1}{R}\right) \quad (3.4)$$

а скалярный находится отдельно для каждого заряда и равен

$$\varphi(\vec{R}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R^3} \int I(t - R/c) dt + \frac{1}{cR^2} I(t - R/c) \right] \cdot \vec{l} \cdot \vec{R} \quad (3.5)$$

Естественно, что выражения (3.1), (3.3) и (3.5) для скалярных потенциалов и выражения (3.2) и (3.4) для векторных потенциалов должны совпадать. Это происходит если иметь ввиду соотношения

$$\vec{P} = q(t) \cdot \vec{l}, \quad \dot{\vec{P}} = d\vec{P}/dt = \vec{I}(t) \cdot l = I(t) \cdot \vec{l}.$$

Найдем поля E и H в сферической системе координат через вектор Герца $\vec{\Pi}$, который связан с дипольным моментом соотношением

$$\vec{\Pi}(t, R) \equiv \vec{P}_0 \frac{f(t - R/c)}{R} \equiv \vec{P}_0 \Phi(t, R) \quad (3.6)$$

Он удовлетворяет уравнению

$$\Delta \vec{\Pi} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial t^2} = 0.$$

Исходя из выражений для $\varphi(\vec{R}, t)$ и для $\vec{A}(\vec{R}, t)$, получаем:

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \text{rot} \frac{\partial \vec{\Pi}}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi R} \frac{\partial}{\partial R} \text{rot} \vec{\Pi},$$

$$\text{graddiv}\vec{F} - \nabla^2 \vec{F} = \text{graddiv}\vec{F} - \Delta\vec{F} = \text{rotrot}\vec{F},$$

$$\mu_o \varepsilon_o = 1/c^2.$$

Получаем:

$$\text{rot}\vec{\Pi} = \text{rot}\vec{P}_o \Phi = [\text{grad}\Phi, \vec{P}_o] = \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial R} [\vec{R}, \vec{P}_o].$$

Дальнейшие вычисления удобнее провести в сферической системе координат. Направим полярную ось z сферической системы координат вдоль вектора \vec{P}_o , поместив начало координат в центре диполя. Полярный и азимутальный углы обозначим соответственно через θ и φ (рис. 2).

Очевидно имеем:

$$[\vec{R}, \vec{P}_o]_R = [\vec{R}, \vec{P}_o]_\theta = 0, [\vec{R}, \vec{P}_o]_\varphi = -R P_o \sin \theta.$$

Поэтому получаем:

$$\text{rot}_R \vec{\Pi} = \text{rot}_\theta \vec{\Pi} = 0, \text{rot}_\varphi \vec{\Pi} = -\sin \theta \frac{\partial \Pi}{\partial t}.$$

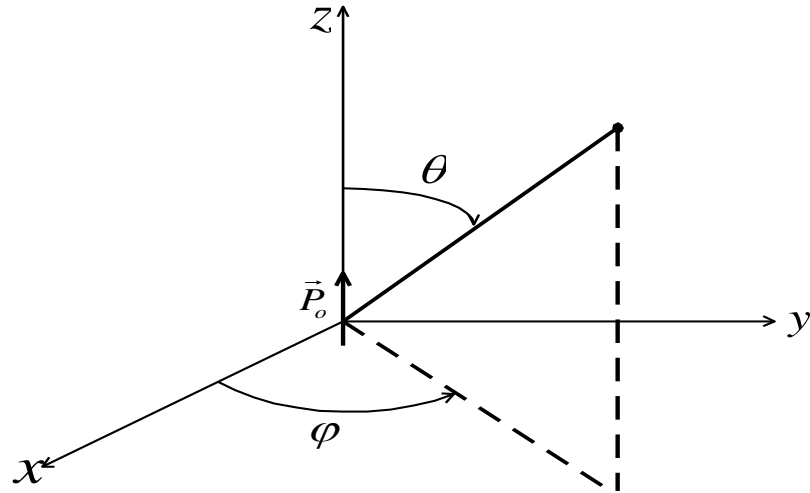


Рис. 2.

Отсюда на основании формулы для \vec{B} находим следующие выражения для компонент магнитного поля в сферической системе координат:

$$B_R = B_\theta = 0, B_\varphi = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot}_\varphi \vec{\Pi} = -\frac{\mu_o}{4\pi} \sin \theta \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t \cdot \partial R}.$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_o}.$$

Для составляющих поля E и H имеет место

$$\left. \begin{aligned} H_R &= H_\theta = 0 \\ H_\varphi &= -\frac{1}{4\pi} \sin \theta \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t \partial R} \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

$$\left. \begin{aligned} E_R &= -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\cos\theta}{R} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t \partial R} \\ E_\theta &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin\theta}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R \frac{\partial \Pi}{\partial R} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

Дифференцирование в (3.6) и подстановка в (3.7) и (3.8) формулы для компонент поля H дает следующее

$$\left. \begin{aligned} H_R &= H_\theta = 0 \\ H_\varphi &= \frac{\sin\theta}{4\pi} \left[\frac{\dot{f}(t - R/c)}{R^2} + \frac{1}{cR} \ddot{f}(t - R/c) \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

и для компонент поля E

$$\left. \begin{aligned} E_R &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\cos\theta}{R} \left[\frac{\dot{f}(t - R/c)}{R^2} + \frac{1}{cR} \ddot{f}(t - R/c) \right] \\ E_\theta &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin\theta}{R} \left[\frac{1}{R^2} f(t - R/c) + \frac{\dot{f}(t - R/c)}{cR} + \frac{1}{c^2} \ddot{f}(t - R/c) \right] \\ E_\varphi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

Если принять временную зависимость $f(t - R/c)$ в виде $e^{j\omega(t-R/c)}$, то из (3.9) и (3.10) получаются общеизвестные выражения для E и H элементарного диполя. При больших R в формулах (3.9) и (3.10) остается по одному слагаемому

$$\left. \begin{aligned} H_\varphi &= \frac{\sin\theta}{4\pi cR} \ddot{f}(t - R/c) \\ E_\theta &= \frac{\mu_0 \sin\theta}{4\pi R} \ddot{f}(t - R/c) \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

Зависимость полей от угла θ , как и для синусоидальных токов, имеет вид "восьмерки". От угла φ поля не зависят, т.е. на окружностях $R = R_0$ и $\theta = \theta_0$ значение полей в (3.11) видно, что $E_\theta = z_0 \cdot H_\varphi$, т.е. точно такое же как и для синусоидальных полей. Отметим, что точно такое же соотношение выполняется для составляющих поля, пропорциональных $1/R^2$. Нетрудно показать, что это выполняется и для составляющих, пропорциональных $1/R^3$. Это дает новый физический результат: "Поля E и H диполя на малых расстояниях, также как и на больших, связаны соотношением $E = z_0 \cdot H$ ". Это позволяет сделать предположение, что деление на дальнюю и ближнюю зоны носит чисто условный характер.

Для сравнения порядка величин в формуле для E перепишем ее в виде [12]

$$E_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \sin\theta \left[\frac{c}{R^3} \int I(t) dt + \frac{c}{R^2} I(t) + \frac{1}{R} \frac{dI(t)}{dt} \right] \quad (3.12)$$

где учтено, что $\dot{f}(t - R/c) = I(t - R/c)$.

$$H_{\varphi}(t) = \frac{I_m l \sin \theta}{4 \pi r^2} \left\{ f\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{r}{c} \cdot \frac{df\left(t - \frac{r}{c}\right)}{dt} \right\}$$

$$E_r(t) = \frac{I_m l \rho_0 \cos \theta}{2 \pi r^2} \left\{ f\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{c}{r} \cdot \int_0^{t-\frac{r}{c}} f(x) dx \right\}$$

$$E_{\theta}(t) = \frac{I_m l \rho_0 \sin \theta}{4 \pi r^2} \left\{ f\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{r}{c} \cdot \frac{df\left(t - \frac{r}{c}\right)}{dt} + \frac{c}{r} \cdot \int_0^{t-\frac{r}{c}} f(x) dx \right\}.$$

Положим, что зависимость тока от времени имеет вид

$$I(t) = e^{-at^2}.$$

Величина a определяет длительность импульса тока. При $\tau = 0.1$ нс величина a равна $2.77 \cdot 10^{20}$, при $\tau = 1$ нс - $a = 2.77 \cdot 10^{18}$, при $\tau = 10$ нс - $a = 2.77 \cdot 10^{16}$.

Сравним величины слагаемых в момент времени $t = \pm \sqrt{\frac{1}{2a}}$, когда производная тока достигает

максимума. Значение тока в это время равно 0.6. величины коэффициентов при разных составляющих по R для длительностей импульсов 0.1, 1 и 10 нс представлены в таблице 3.1.

Таблица 3.1

τ , нс	$1/R$	$1/R^2$	$1/R^3$
0.1	$1.4 \cdot 10^{10}$	$1.8 \cdot 10^8$	$1.5 \cdot 10^6$
1	$1.4 \cdot 10^9$	$1.8 \cdot 10^8$	$1.5 \cdot 10^7$
10	$1.4 \cdot 10^8$	$1.8 \cdot 10^8$	$1.5 \cdot 10^8$

Для другого момента времени значения величин в таблице будут другими, поэтому не следует делать вывод о преобладании одной из составляющих. Достаточно будет отметить, что значения коэффициентов зависят от формы импульса и изменяются во времени.

Дополнительные задания на 20 баллов

Билан наноантенны

Вусик подправить 7 раздел от ошибок

Горобец - численный расчет поля отраженной волны в коаксиальном волноводе

Данилейко Характеристики антенн из Шанса

Лебедев – проверить вывод поля излучателя Гюйгенса.

Селютин – уточнить расчет снаряда по центру

Трунов построить объемный график энергии от расстояний, обычный и умноженный на z и z в квадрате.

1) Анимация энергии на поле ρ_0 и z (цветом) в зависимости от величины Радиуса R (0,1 до 1)

2) Анимация энергии от ρ_0 для разных z для Радиуса $R = 1$

То же для Энергия * на корень квадратный от R квадрат + z квадрат

То же для Энергия * на Сумму от R квадрат + z квадрат

Чумак КПД нестационарных излучателей.

Чернушенко определение сверхширокополосности по DARPA

Юрченко использовать графики Салифа для иллюстрации наложения.

18.02.16

Лекция

Понятие сверхширокополосного сигнала.

Практика

Спектры модельных СШС

Лекция

Применение СШС.