

Хохлова Татьяна Наилевна

**Устойчивость моделей нейронных сетей
кольцевой и линейной конфигураций
с запаздывающими взаимодействиями**

05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы
программ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д. ф.-м. н., проф.

М. М. Кипнис

Содержание

Введение	3
--------------------	---

Введение

Актуальность работы. Всюду, где в математических моделях имеются узлы и связи между ними, есть основания рассматривать их как нейронные сети. В многочисленных теориях узлы (нейроны) представляют личности, организации, блоки компьютерных систем, природные объекты, и, наконец, собственно нейроны в живых организмах или искусственных нейронных сетях. Взаимодействие узлов в нейронной сети зависит от архитектуры и свойств ее связей. Важной характеристикой сети является запаздывание во взаимодействии нейронов. Первые исследователи нервных систем живых организмов были удивлены, узнав, как мала скорость движения электрохимических импульсов по нервным волокнам. Поэтому учет запаздываний в моделях нейронных сетей требует применения теории дифференциальных уравнений с запаздываниями (функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ)). Инструментарий ФДУ создали Н.В. Азбелев, В.П. Максимов и Л.Ф. Рахматуллина [?], Н.В. Азбелев и П.М. Симонов [?], Р. Беллман и К. Кук [?], А.В. Ким и В.Г. Пименов [?], Н.Н. Красовский [?], В.Б. Колмановский и В.Р. Носов [?], А. Д. Мышкис [?], Дж. Хейл [?], Л.Э. Эльсгольц и С.Б. Норкин [?].

Изучение моделей нейронных сетей посредством дифференциальных уравнений с запаздываниями проведено в монографиях L. O. Chua [?] (1998), L. O. Chua и T. Roska [?] (2004), K. Gu, V. Kharitonov и J. Chen [?] (2003), J. Wu [?] (2001). Особенно много работ посвящено кольцевым конфигурациям нейронных сетей: S. Guo и L. Huang [? ?] (2007), Y. Horikawa и H. Kitajima [?] (2009), C. Huang с соавторами [?] (2008), X. Lu и S. Guo [?] (2008), X. Xu [?] (2008). Кольцевые конфигурации нейронов обычны как в искусственных нейронных сетях [?], так и в биологических. Нейронные кольца обнаружены, например, у нематоды *C. elegans* [?].

Устойчивость нейронных сетей является их важной характеристикой. Глобальная устойчивость изучалась, например, в работах L. Idels и M. Kipnis [?] (2009), Kaslik и Balint [?] (2009), но глобальная устойчивость не всегда желательна в нейронных сетях (например, она неестественна в нейронных сетях, используемых в качестве памяти). В отличие от неё локальная устойчивость, по-видимому, всегда требуется. Локальная устойчивость моделей нейронных сетей изучалась в работах I. Gyori и F. Hartung [?] (2003), X. Lu и S. Guo [?] (2008), C.M. Marcus и R.M. Westervelt [?] (1989), J. Wei и S. Ruan [?] (1999), W. Yu и J. Cao [?] (2007), Y. Yuan and S.A. Campbell [?] (2004) .

В указанной группе работ нет ответа на естественные вопросы, возникающие при исследовании устойчивости моделей нейронных сетей вообще, а также кольцевых и линейных сетей в частности. Это следующие вопросы. Есть ли значения параметров нейронной сети, при которых сеть остается устойчивой при любом увеличении количества нейронов и сохранении общей архитектуры сети? Каковы эти значения? Каковы значения параметров нейронных сетей, гарантирующих устойчивость сети при любом запаздывании во взаимодействии нейронов (delay-independent stability)? Положительно ли влияет на устойчивость разрыв в кольцевой нейронной сети? Как строить области устойчивости в пространстве параметров? Эти вопросы рассматриваются в настоящей диссертации.

Цель диссертационной работы. Целью работы является изучение проблемы устойчивости математических моделей кольцевых и линейных нейронных сетей. Мы намерены:

- разработать метод построения областей устойчивости в пространстве параметров указанных моделей и выявить динамику областей устойчивости при изменении количества нейронов в сети и изменении запаздывания во взаимодействии нейронов;

- найти области устойчивости в пространстве параметров, гарантирующие устойчивость независимо от величины запаздывания;
выяснить асимптотику поведения областей устойчивости при запаздывании, стремящемся к нулю и бесконечности;
указать предельные области устойчивости, когда количество нейронов в кольцевой или линейной конфигурации неограничено;
- сравнить области устойчивости моделей кольцевой сети и линейной сети, полученной в результате ее разрыва;
- провести численное моделирование переходного процесса разрыва нейронного кольца и превращения его в линию с точки зрения устойчивости.

Методы исследования. Поставленные задачи решаются в диссертации методом конуса устойчивости, разработанным автором совместно с научным руководителем и В.В. Малыгиной. Конус устойчивости это поверхность в \mathbb{R}^3 , построенная для анализа устойчивости систем линейных матричных дифференциальных уравнений произвольного порядка с запаздыванием. На основе метода в диссертации построены алгоритмы для поиска значений запаздываний, гарантирующих устойчивость системы. В свою очередь, алгоритмы реализованы в виде программ для анализа устойчивости как для общих систем, так и для специальных систем, описывающих модели кольцевых и линейных нейронных сетей с запаздываниями во взаимодействии соседних нейронов.

Научная новизна. В диссертации разработан новый метод анализа устойчивости, применимый к классу матричных дифференциальных уравнений, более широкому в сравнении с классами, рассмотренными в работах В. Cahlon и D. Schmidt [?] (2000), а также Н. Matsunaga [?] (2007) и S. Sakata [?] (1998). На основе этого метода разработаны новые алгоритмы и ком-

плексы программ для построения области устойчивости в пространстве параметров указанного класса уравнений. Построены модификации алгоритмов и программ для анализа устойчивости математических моделей кольцевых и линейных нейронных сетей. Впервые указаны области в пространстве параметров указанных моделей, гарантирующие устойчивость независимо от величины запаздывания во взаимодействии нейронов. Получены новые данные об областях устойчивости в пространстве параметров математических моделей кольцевых и линейных нейронных сетей, включая класс сетей с неограниченным количеством нейронов. Поставлен и решен новый вопрос о влиянии разрыва на устойчивость кольцевой нейронной сети. Впервые изучена динамика области устойчивости в процессе разрыва кольцевой нейронной сети.

Практическая значимость. Созданные программные продукты и исследования областей устойчивости позволяют анализировать устойчивость нейронных сетей кольцевой и линейной конфигураций, выявлять диапазоны запаздываний, в которых они приобретают и теряют устойчивость, регулировать коэффициенты моделей нейронных сетей с целью стабилизации их работы.

Апробация работы. Основные результаты, изложенные в диссертации, докладывались на седьмой Всероссийской конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (Самара, 2010г.), второй и четвёртой научных конференциях аспирантов и докторантов (Челябинск, 2010г. и 2012г.), Всероссийской конференции «Статистика. Моделирование. Оптимизация» (Челябинск, 2011г.), II Международной научно-практической конференции студентов и аспирантов «Математика и её приложения в современной науке и практике» (Курск, 2012г.), на семинаре профессора М. М. Кипниса в Челябинском государственном педагогическом университете.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, списка литературы и четырех приложений. Общий объем работы 167 страниц. Работа содержит 36 рисунков, список литературы содержит 75 наименований.

Содержание диссертации

Во **введении** приводится постановка задачи, история исследуемого вопроса, ставятся цели диссертационного исследования, обосновывается актуальность и научная новизна работы. Кроме того, приводятся публикации по теме диссертации, описывается структура работы и ее краткое содержание.

Первая глава посвящена описанию и обоснованию метода конусов устойчивости для диагностирования устойчивости уравнения

$$\dot{x}(t) + Ax(t) + Bx(t - \tau) = 0, \quad (1)$$

с совместно триангулируемыми матрицами A, B . Метод разработан автором диссертации под руководством научного руководителя по замыслу В. Малыгиной. Как обычно, мы называем линейное уравнение устойчивым, если его нулевое решение устойчиво. В этой же главе излагается алгоритм исследования устойчивости уравнения (1) и описывается программа для его реализации.

В разделе ?? приведены актуальные на сегодняшний день модели, описывающие взаимодействие нейронов в нейронных сетях с помощью матричных дифференциальных уравнений, обосновано введение запаздывания и показано, что во многих случаях исследование устойчивости различных моделей нейронных сетей сводится к изучению поведения решений уравнения (1). Также в этом разделе приведены примеры нейронных сетей, описываемых уравнением (1), отмечены особенности входящих в уравнение матриц A, B , элемен-

тами которых служат интенсивности мгновенного взаимодействия нейронов в сети и взаимодействия, происходящего с запаздыванием, соответственно.

В этой главе конус устойчивости вводится постепенно. Вначале (раздел ??) дается определение устойчивости и вводятся овалы устойчивости для скалярного уравнения вида (1)

$$\dot{x}(t) + ax(t) + bx(t - \tau) = 0, \quad \tau > 0. \quad (2)$$

с действительным коэффициентом a и комплексным b . Здесь же формулируется и с помощью метода D -разбиений [?] доказывается теорема об устойчивости такого уравнения в терминах овала устойчивости.

Затем, в разделе ??, дается ключевое определение конуса устойчивости для скалярного уравнения (2) с комплексными коэффициентами a, b , которое будет использоваться также и для матричного уравнения (1).

Определение 0.1. *Конусом устойчивости для уравнений (2), (1) назовём множество точек $M = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$, таких, что*

$$\begin{cases} u_1 = -h \cos \omega + \omega \sin \omega, \\ u_2 = h \sin \omega + \omega \cos \omega, \\ u_3 = h, \end{cases} \quad (3)$$

где действительные параметры h, ω подчинены ограничениям

$$\begin{cases} h \geq -\frac{\omega}{\operatorname{tg} \omega}, \\ -\pi < \omega < \pi. \end{cases} \quad (4)$$

Овалами устойчивости в диссертации называются сечения конуса устойчивости плоскостью $u_3 = h$. В терминах конуса устойчивости формулируются и доказываются теоремы об устойчивости уравнения (2) с действительным коэффициентом a и комплексным b , а затем с двумя комплексными коэффициентами a, b .

В основном разделе ?? доказывается теорема о конусе устойчивости для матричного уравнения (1), которая будет теоретической основой для алгоритмов диагностирования устойчивости нейронных сетей и их программных реализаций.

Теорема 0.1. Пусть $A, B, S \in \mathbb{R}^{m \times m}$ и $S^{-1}AS = A_T$ и $S^{-1}BS = B_T$, где A_T и B_T — нижние треугольные матрицы с элементами соответственно λ_{js}, μ_{js} ($1 \leq j, s \leq m$). Построим систему точек $M_j = (u_{1j}, u_{2j}, u_{3j})$, ($1 \leq j \leq m$), так, что

$$\begin{aligned} u_{1j} &= \tau \operatorname{Re}(\mu_{jj} \exp(i\tau \operatorname{Im} \lambda_{jj})), \\ u_{2j} &= \tau \operatorname{Im}(\mu_{jj} \exp(i\tau \operatorname{Im} \lambda_{jj})), \\ u_{3j} &= \tau \operatorname{Re} \lambda_{jj}. \end{aligned} \tag{5}$$

Уравнение (1) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда все точки M_j ($1 \leq j \leq m$) находятся внутри конуса устойчивости. Если хотя бы одна точка M_j ($1 \leq j \leq m$) лежит вне конуса устойчивости, то уравнение (1) неустойчиво.

Эта теорема является главным результатом первой главы и дает возможность исследования устойчивости широкого класса уравнений вида (1) с совместно триангулируемыми матрицами произвольного порядка.

В этом же разделе получено необходимое и достаточное условие на собственные числа матриц A, B , обеспечивающее устойчивость основного уравнения (1) при всех значениях запаздывания:

Теорема 0.2. Пусть $A, B, S \in \mathbb{R}^{m \times m}$ и $S^{-1}AS = A_T$ и $S^{-1}BS = B_T$, где A_T и B_T — нижние треугольные матрицы с элементами соответственно λ_{js}, μ_{js} ($1 \leq j, s \leq m$). Для того, чтобы уравнение (1) было асимптотически устойчивым при любом запаздывании $\tau \geq 0$, необходимо и достаточ-

но выполнение условия $(1 \leq j \leq m)$

$$|\mu_{jj}| < \operatorname{Re} \lambda_{jj}. \quad (6)$$

В разделах ??, ?? также приведены примеры применения полученных критериев для анализа устойчивости уравнений (2), (1). Примеры снабжены графическим представлением конуса устойчивости и точек M_j , фигурирующих в формулировке основной теоремы 0.1.

Раздел ?? посвящен алгоритму определения значений запаздываний, гарантирующих устойчивость уравнения (1) при фиксированных матрицах A и B , и его программной реализации. Алгоритм основан на методе конусов устойчивости (теорема 0.1), но при этом он содержит только аналитические выкладки и позволяет избежать геометрических построений при анализе устойчивости рассматриваемого уравнения.

Пусть матрицы A и B приведены к треугольному виду A_T, B_T одним преобразованием. Пусть λ_{jj}, μ_{jj} , $1 \leq j \leq n$ собственные числа матриц A и B в том порядке, в котором они расположены на диагоналях матриц A_T, B_T . Для каждого j , $1 \leq j \leq n$ составим множество T_j по следующему алгоритму.

Если для некоторого j выполнено $\operatorname{Re} \lambda_{jj} > |\mu_{jj}|$, то $T_j = (0, +\infty)$. В противном случае находим числа

$$\tau_j^m = \frac{\arg(\pm iQ - \operatorname{Re} \lambda_{jj}) - \arg \mu_{jj} + 2\pi m}{\operatorname{Im} \lambda_{jj} \pm Q}, \quad m \in \mathbb{Z},$$

$$Q = \sqrt{|\mu_{jj}|^2 - (\operatorname{Re} \lambda_{jj})^2}. \quad (7)$$

Из чисел τ_j^m выбираем такие, для которых

$$0 < \tau_j^m \leq \pi/Q \quad \text{и} \quad \operatorname{Re} \lambda_{jj} \geq -\frac{Q}{\operatorname{tg}(Q \tau_j^m)}, \quad (8)$$

и сортируем по возрастанию, исключая повторения. Полученные числа обозначим $\tau_{1j}, \tau_{2j}, \dots, \tau_{sj}$.

Составим множество T_j следующим образом. Пусть $T_j = (0, \tau_{1j}) \cup (\tau_{2j}, \tau_{3j}) \cup \dots$ в следующих случаях:

1) $\operatorname{Re} \lambda_{jj} > 0$ и выполнено хотя бы одно условие

$$\text{а) } \arg \mu_{jj} \in (-\pi/2, \pi/2) \quad \text{или} \quad \text{б) } \frac{\operatorname{Re} \lambda_{jj}}{|\operatorname{Re} \mu_{jj}|} > 1. \quad (9)$$

$$\text{2) } \operatorname{Re} \lambda_{jj} < 0, \quad \left| \frac{\operatorname{Re} \lambda_{jj}}{\operatorname{Re} \mu_{jj}} \right| < 1 \quad \text{и} \quad \arg \mu_{jj} \in (-\pi/2, \pi/2). \quad (10)$$

В остальных случаях $T_j = (\tau_{1j}, \tau_{2j}) \cup (\tau_{3j}, \tau_{4j}) \cup \dots$

Последним интервалом в T_j может быть (τ_{s-1j}, τ_{sj}) или $(\tau_{sj}, +\infty)$. Если для некоторого j множество $(\tau_{1j}, \tau_{2j}, \dots, \tau_{sj})$ пусто и выполнено (??) или (??), то $T_j = (0, +\infty)$.

Теорема 0.3. Пусть множества $T_j, 1 \leq j \leq n$ составлены согласно описанному алгоритму. Тогда уравнение (1) асимптотически устойчиво если и только если $\tau \in T = \bigcap_j T_j$.

В разделе ?? описана программа «Анализ устойчивости», разработанная в программном пакете MATLAB 7.11.0 (R2010b). Программа реализует алгоритм, описанный в разделе ?. По заданным матрицам A, B программа возвращает объединение интервалов значений запаздывания T , обеспечивающих устойчивость уравнения (1), или пустое множество в случае неустойчивости уравнения при всех значениях запаздывания. Здесь же приводятся скриншоты интерфейса программы (Рис. 1), примеры двух способов введения исходных данных, необходимые пояснения к работе программы.

В разделе ?? результаты первой главы сравниваются с известными результатами. Указано, что идейным источником метода конуса устойчивости является давняя работа З. Рехлицкого [?] (1956). Упомянуты работы I. Levitskaya [?] (2006), E. Kaslik [?] (2009), M.M. Kipnis, V.V. Malygina [?] (2011),

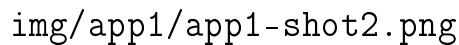
The image is a screenshot of a software application window titled «Анализ устойчивости» (Stability Analysis). The window contains a text input field where the user has entered the file path 'img/app1/app1-shot2.png'. The interface is simple, with a white background and a thin black border around the input area.

Рис. 1. Главное окно программы «Анализ устойчивости» при задании собственных чисел матриц вручную.

S.A. Ivanov, M.M.Kipnis, V.V. Malygina [?] (2011) и S.A. Ivanov, M.M.Kipnis [?] (2012), в которых овалы и конусы устойчивости изучены для разностных матричных уравнений, а также А.И. Кирьянена, К.В. Галуновой [?] (1989) об устойчивости скалярных дифференциальных уравнений с запаздываниями с комплексными коэффициентами.

Далее в разделе ?? результаты главы 1 сравниваются с работой В. Sahlon, D. Schmidt [?] (2000), в которой рассматривалась задача об устойчивости класса уравнений вида $\dot{x}(t) = \alpha Ax(t) + (1 - \alpha)Ax(t - \tau b)$, $0 \leq \alpha \leq 1$ с 2×2 матрицей A . Годом позднее те же авторы [?] (2001) усилили свой результат, рассматривая уравнение $\dot{x}(t) = \alpha Ax(t) + \beta Ax(t - \tau)$ с произвольными дей-

ствительными α, β , и снова для 2×2 матрицы A . Поскольку матрицы αA и βA с действительными α и β , очевидно, приводятся совместно к треугольному виду, делается заключение, что результаты главы ?? диссертации сильнее результатов этих статей как по размерности рассматриваемых задач, так и по охвату изучаемых уравнений, даже если ограничиться 2×2 матрицами. Обсуждены результаты Н. Matsunaga [?] (2007), давшего критерий устойчивости уравнения $\dot{x}(t) = Ax(t - \tau)$ с 2×2 матрицей A в терминах следа и детерминанта матрицы A . Показано, что эти результаты легко вытекают из результатов диссертации и даже из результатов Рехлицкого [?] 50-летней давности.

Констатируется, что метод конуса устойчивости применим к значительно более широкому классу уравнений, чем рассматриваемые в работе S. Sakata [?] (1998) уравнения вида $\dot{x}(t) = \alpha x(t) + Bx(t - \tau)$ с 2×2 матрицей B и действительным α .

В этом разделе обсуждены условия, данные в работе J. Chen, H. Latchman [?] (1995), гарантирующие устойчивость уравнения (1) независимо от запаздывания (delay-independent stability). Условие Чена-Латчмана в терминах теоремы 0.2 таково: для всех $j = 1, 2 \dots n$ верны неравенства $\operatorname{Re} \lambda_{jj} > 0$ и $\max_{s \in \mathbb{R}} |(is - \lambda_{jj})^{-1} \mu_{jj}| < 1$. Мы заключаем, что наше условие (6) по существу совпадает с условием Чена-Латчмана, но проще проверяется и имеет естественное геометрическое объяснение.

Далее констатируется, что алгоритм и программа разделов ??, ?? не имеют аналогов в литературе.

Во второй главе решается задача диагностирования устойчивости моделей кольцевых и линейных нейронных сетей с неограниченным количеством нейронов с помощью результатов первой главы диссертации.

В разделе ?? вводятся две модели кольцевых нейронных сетей, являющиеся основным объектом изучения второй главы.

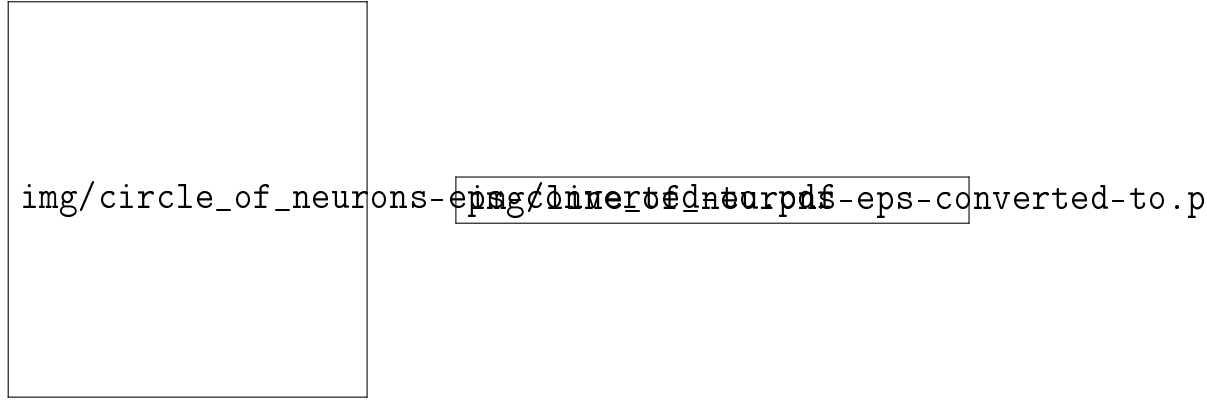


Рис. 2. Кольцевая и линейная система нейронов.

$$\dot{x}_j(t) + x_j(t) + a x_{j-1}(t) + b x_{j+1}(t - \tau) = 0 \quad (j \bmod n), \quad (11)$$

$$\dot{x}_j(t) + x_j(t) + a x_{j-1}(t - \tau) + b x_{j+1}(t - \tau) = 0 \quad (j \bmod n). \quad (12)$$

В уравнениях (11), (12) n количество нейронов в кольце, действительные коэффициенты a и b характеризуют интенсивности взаимодействия нейрона с правым и левым соседними нейронами соответственно, τ запаздывание во взаимодействии нейрона с соседними нейронами. Уравнения (11), (12) вместе с вышеуказанными интерпретациями параметров a, b, τ, n мы называем моделями кольцевой сети, имея в виду, что они получаются в результате линеаризации известных нелинейных моделей Хопфилда-Маркуса-Вестервельта [? ?] (1984, 1989) или Коэна-Гроссберга [?] (1983) или Чуа-Янга-Роска [? ?] (1988, 2004) вокруг некоторого решения. Уравнение (11) соответствует малым запаздываниям взаимодействия нейронов с правыми соседними нейронами (сети с односторонним запаздыванием), а (12) — близким запаздываниям взаимодействия нейронов с правыми и левыми соседями (сети с двусторонним запаздыванием). Данные уравнения принадлежат классу систем вида (1) и могут быть исследованы с помощью разработанных автором методов.

В этом же разделе описана модификация алгоритма диагностирования устойчивости уравнений вида (1) для случая специфических матриц, входя-

щих в модели кольцевых сетей, и неограниченного количества нейронов в сети. Суть изменений заключается в явном нахождении собственных чисел входящих в уравнение матриц и введении вместо дискретной системы точек M_j (5) непрерывной замкнутой кривой $M'(t) = (u_1'(t), u_2'(t), u_3'(t))$ для уравнения (11):

$$\begin{aligned} u_1'(t) + iu_2'(t) &= \tau b \exp(i(-t + a \tau \sin t)), \\ u_3'(t) &= \tau(1 + a \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \end{aligned} \quad (13)$$

и $M''(t) = (u_1''(t), u_2''(t), u_3''(t))$ для уравнения (12):

$$u_1''(t) + iu_2''(t) = \tau(a \exp(it) + b \exp(-it)), \quad u_3''(t) = \tau, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (14)$$

Для рассмотренных систем критерий устойчивости принимает следующий вид. Если все точки кривой (13) лежат внутри конуса устойчивости, то уравнение (11) устойчиво при любом n , а если хотя бы одна точка кривой (13) лежит вне конуса устойчивости, то уравнение (11) неустойчиво при всех достаточно больших значениях n . Аналогично изучается поведение системы (12). Идея критерия проиллюстрирована рисунком 3.

В разделе ?? описан программный продукт «Устойчивость нейронных сетей», предназначенный для исследования устойчивости систем (11), (12) с неограниченным количеством нейронов. Продукт разработан автором на основе модификации алгоритма, описанной в разделе ??, и позволяет быстро по введенным коэффициентам диагностировать устойчивость конкретной модели нейронной сети и получить геометрическую интерпретацию результатов. В этом разделе представлены скриншоты интерфейса программы с примерами ее работы, необходимые пояснения.

В разделе ?? изложены результаты теоретического и численного исследования границ областей устойчивости уравнений (11), (12) в плоскости параметров (a, b) в случае неограниченного количества нейронов.

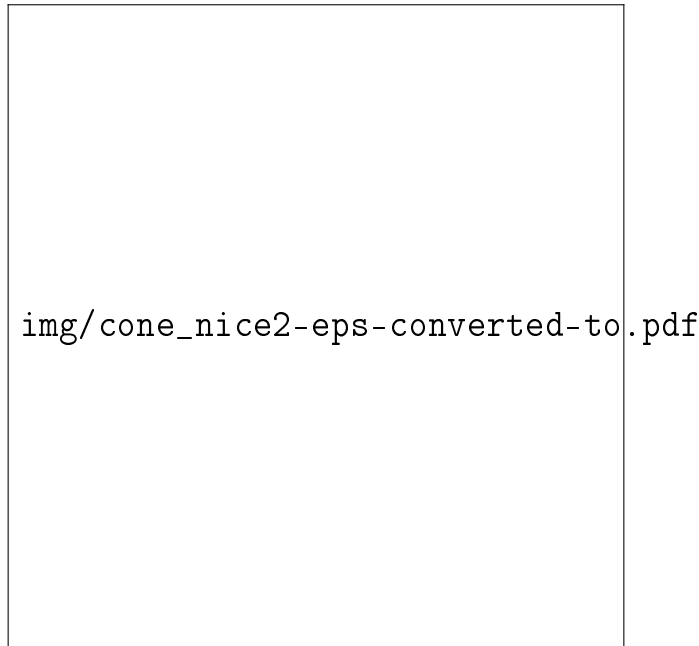
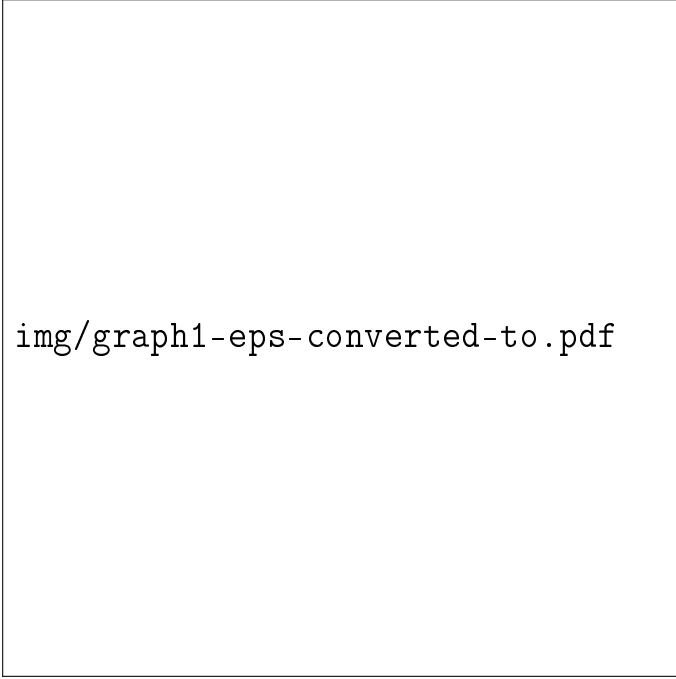


Рис. 3. Конус устойчивости и две кривые (13). Одна кривая для $\tau = 1.5$, $a = -1.4$, $b = 0.7$, находится частично вне конуса устойчивости, следовательно, система (11) неустойчива при достаточно больших n . Вторая кривая для $\tau = 2$, $a = 0.5$, $b = -0.2$, находится полностью внутри конуса устойчивости, следовательно, система (11) устойчива при любом n .

Теорема 0.4. *Если $|a + b| > 1$, то системы (11) и (12) неустойчивы при любом $\tau > 0$, если n достаточно велико.*

При помощи программы «Устойчивость нейронных сетей» для различных значений запаздывания построены границы областей устойчивости D_τ уравнений (11), (12) в тех частях плоскости (a, b) , которые не охватываются теоремой 0.4 и ранее известным фактом об устойчивости исследуемых моделей при $|a| + |b| < 1$ для любого n и любого $\tau \geq 0$. Полученные результаты для системы (11) отражены на рисунке 4. Аналогичные графические иллюстрации даны для системы (12).

Для обеих систем (11) и (12) важна прямая $a = -b$ в плоскости (a, b) , в окрестности которой сконцентрированы точки устойчивости систем. Поэто-



img/graph1-eps-converted-to.pdf

Рис. 4. Области устойчивости для системы (11) с неограниченным числом нейронов.

му естественно вводятся следующие две системы уравнений:

$$\dot{x}_j(t) + x_j(t) + a(x_{j-1}(t) - x_{j+1}(t - \tau)) = 0 \quad (j \bmod n), \quad (15)$$

$$\dot{x}_j(t) + x_j(t) + a(x_{j-1}(t - \tau) - x_{j+1}(t - \tau)) = 0 \quad (j \bmod n). \quad (16)$$

Определение 0.2. *Границей устойчивости системы (??) для больших n назовём такое число $a_1(\tau) \in \mathbb{R}$, что если $|a| < a_1(\tau)$, то (15) устойчива при любом n , а если $|a| > a_1(\tau)$, то (15) неустойчива при всех достаточно больших n . Аналогично определим $a_2(\tau)$ как границу устойчивости (16) для больших n .*

Очевидно, $\lim_{\tau \rightarrow \infty} a_1(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} a_2(\tau) = 1/2$. Не столь очевидно поведение систем (??), (??) при $\tau \rightarrow 0$, которое рассматривается в следующей теореме.

Теорема 0.5.

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} a_1(\tau)\sqrt{2\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} a_2(\tau)2\sqrt{\tau} = 1. \quad (17)$$

В разделе ?? рассматривается вопрос устойчивости моделей кольцевых нейронных сетей с неединичным коэффициентом демпфирования на примере аналога системы (11) с $\gamma \in \mathbb{R}$:

$$\dot{x}_j(t) + \gamma x_j(t) + a x_{j-1}(t) + b x_{j+1}(t - \tau) = 0 \quad (j \bmod n). \quad (18)$$

Указаны замена переменных, сводящая это уравнение к уравнению вида (11), и способы диагностирования устойчивости уравнения (18) при ограниченном и неограниченном количестве нейронов. Приведены границы областей устойчивости уравнений (18), (11) в плоскости параметров (a, b) , структура которых не содержит принципиальных различий. Данный раздел призван продемонстрировать целесообразность рассмотрения именно уравнения (11) с единичным коэффициентом при $x_j(t)$ и возможность применения полученных для него результатов к некоторым более общим уравнениям.

Раздел ?? посвящен устойчивости моделей нейронных сетей линейной конфигурации, взаимодействие в которых описывается уравнением (1) с матрицами специального вида.

Основным объектом изучения данного раздела является уравнение

$$\dot{x}(t) + I x(t) + D x(t - \tau) = 0, \quad (19)$$

где I есть единичная $n \times n$ матрица, а $n \times n$ матрица D имеет вид

$$D = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & 0 & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 0 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Уравнение (19),(20) моделирует линейную нейронную сеть с двусторонним запаздыванием, полученную из кольцевой (12) посредством разрыва од-

ной из связей между нейронами. Следующий результат дает возможность отвечать на вопрос об устойчивости системы (19), (20) при любых a, b , если число нейронов n достаточно велико. Пусть функция $F(\tau)$ от запаздывания $\tau \in (0, \infty)$ определяется следующим образом:

$$F(\tau) = \frac{1}{4 \sin^2 \omega(\tau)}, \quad (21)$$

где $\omega(\tau)$ есть наименьший положительный корень уравнения

$$\tau = \omega \operatorname{tg} \omega. \quad (22)$$

Тогда справедлива теорема.

- Теорема 0.6.** 1. Если $|ab| < \frac{1}{4}$, то система (19), (20) асимптотически устойчива при любом n и любом $\tau \geq 0$.
2. Если $ab > \frac{1}{4}$, то система (19), (20) неустойчива при любом $\tau \geq 0$, если n достаточно велико.
3. Если $ab < 0$ и $|ab| < F(\tau)$, то система (19), (20) асимптотически устойчива при любом n .
4. Если $ab < 0$ и $|ab| > F(\tau)$, то система (19), (20) неустойчива, если n достаточно велико.

В разделе имеется рисунок, на котором в плоскости (a, b) изображены границы областей устойчивости системы (19), (20), полученные с помощью теоремы (0.6) и численных экспериментов в программе «Устойчивость нейронных сетей». Вычисления потребовались для построения границ, зависящих от значения запаздывания τ . Следующая теорема сравнивает области устойчивости модели кольцевой сети нейронов (12) с достаточно большим количеством нейронов и образованной при ее разрыве нейронной сети линейной конфигурации (19), (20).

Теорема 0.7. *Фиксируем значения параметров a, b, τ для системы (12), для кольца нейронов и системы (19), (20) для сети с линейной конфигурацией нейронов. Если система (12) асимптотически устойчива при любом количестве нейронов n , то система (19), (20) также асимптотически устойчива при любом количестве нейронов n .*

Теорема 0.7 дает твердые основания к заключению, что разрыв кольца нейронов расширяет область устойчивости сети при большом количестве нейронов в сети.

Раздел ?? содержит доказательства теорем второй главы.

В разделе ?? приведено сравнение результатов данной главы с известными результатами. Отмечается, что, насколько известно автору, модели кольцевых нейронных сетей с неопределенно большим количеством нейронов не рассматривались в литературе до работы [?] автора диссертации совместно с научным руководителем. Показано, что из работ Y. Yuan, S. Campbell [?] (2004) и S. Campbell с соавторами [?] невозможно извлечь информацию об устойчивости кольцевых сетей при достаточно большом количестве нейронов в сети. Отмечается, что предпринятое во второй главе изучение устойчивости моделей нейронных сетей линейной конфигурации не встречается в литературе (кроме работ автора диссертации), хотя вообще публикации по линейным нейронным сетям имеются (например, [?]). Указано, что алгоритмы и программы для анализа устойчивости моделей кольцевых и линейных сетей с неограниченным количеством нейронов в известной автору литературе отсутствуют.

Третья глава посвящена построению границ областей устойчивости моделей кольцевых и линейных нейронных сетей с ограниченным количеством нейронов в плоскости параметров (a, b) .

Основными объектами изучения данной главы служат уравнения кольцевых нейронных сетей (11) и (12) и линейных нейронных сетей (??), (??).

Раздел ?? посвящен описанию алгоритма и программы построения границ областей устойчивости исследуемых уравнений. Подраздел ?? содержит общую схему построения замкнутой кривой, состоящей из равномерного массива точек и соответствующей границе области устойчивости круговых нейронных сетей (11) и (12). Для осуществления этой схемы требуется диагностировать большое количество точек плоскости (a, b) на устойчивость при фиксированном значении запаздывания. В подразделе ?? указан новый алгоритм, предназначенный для этой цели, а также подробно описана работа реализующей его функции *straightStabAnalyzer* (код функции помещен в приложение В). Алгоритм решает частную задачу определения устойчивости системы при данных a, b, τ в отличие от более общей задачи определения всех значений запаздывания, гарантирующих устойчивость исследуемого уравнения при фиксированных коэффициентах, решенной в разделах ?? и ??. В связи с этим данный алгоритм выигрывает во времени и хорошо подходит для многократного применения в общей схеме построения границы области устойчивости, изложенной в подразделе ??. В подразделе ?? указаны функциональное назначение и область применения программы «Построение областей устойчивости круговых нейронных сетей», реализующей алгоритмы подразделов ??, ??. Примеры использования программы, скриншоты ее работы приведены в подразделе ??.

В разделе ?? представлены результаты построения границ областей устойчивости модели кольцевой нейронной сети (11), полученные с помощью данной программы. Приведенные серии графиков соответствуют различным значениям запаздывания и различному количеству нейронов в сети. На графиках отмечена граница области устойчивости, гарантированной для любого n , что позволяет проследить асимптотику найденных кривых с увеличением

количества нейронов в сети. Одна из серий графиков представлена на рисунке 5.

В разделе ?? аналогичные построения проведены для модели (12).

В разделе ?? дается полное описание области устойчивости для модели (19), (20) линейной системы из n нейронов. Эти области, естественно, зависят от n , в то время как область устойчивости модели линейной сети с неограниченным количеством нейронов в разделе ?? не зависела от величины n . Определим функцию $F1(\tau, n)$ (ср. с формулой (21)) от запаздывания $\tau \in (0, \infty)$ и количества нейронов в сети $n \in \mathbb{N}$:

$$F1(\tau, n) = \frac{1}{4 \sin^2 \omega(\tau) \cos^2 \frac{\pi}{n+1}}, \quad (23)$$

где $\omega(\tau)$ есть наименьший положительный корень уравнения (22).

Следующая теорема (ср. с Теоремой 0.6) дает полное описание области устойчивости модели линейной конфигурации n нейронов.

Теорема 0.8. 1. Если $0 \leq ab < \frac{1}{4 \cos^2 \frac{\pi}{n+1}}$, то система (19), (20) асимптотически устойчива при любом $\tau \geq 0$.

2. Если $ab > \frac{1}{4 \cos^2 \frac{\pi}{n+1}}$, то система (19), (20) неустойчива при любом $\tau \geq 0$.

3. Если $ab < 0$ и $|ab| < F1(\tau, n)$, то система (19), (20) асимптотически устойчива.

4. Если $ab < 0$ и $|ab| > F1(\tau, n)$, то система (19), (20) неустойчива.

Теорему 0.8 иллюстрирует рисунок 6. В этом же разделе сравниваются области устойчивости моделей кольцевой и линейной нейронной сети с ограниченным количеством нейронов. В разделе ?? было показано, что разрыв кольцевой сети может только улучшить ее устойчивость, если количество нейронов в сети достаточно велико (Теорема 0.6). Наши численные исследования с помощью программ показывают, что это же явление, за некоторыми исключениями, имеет место и при небольшом количестве нейронов (рис. 7).

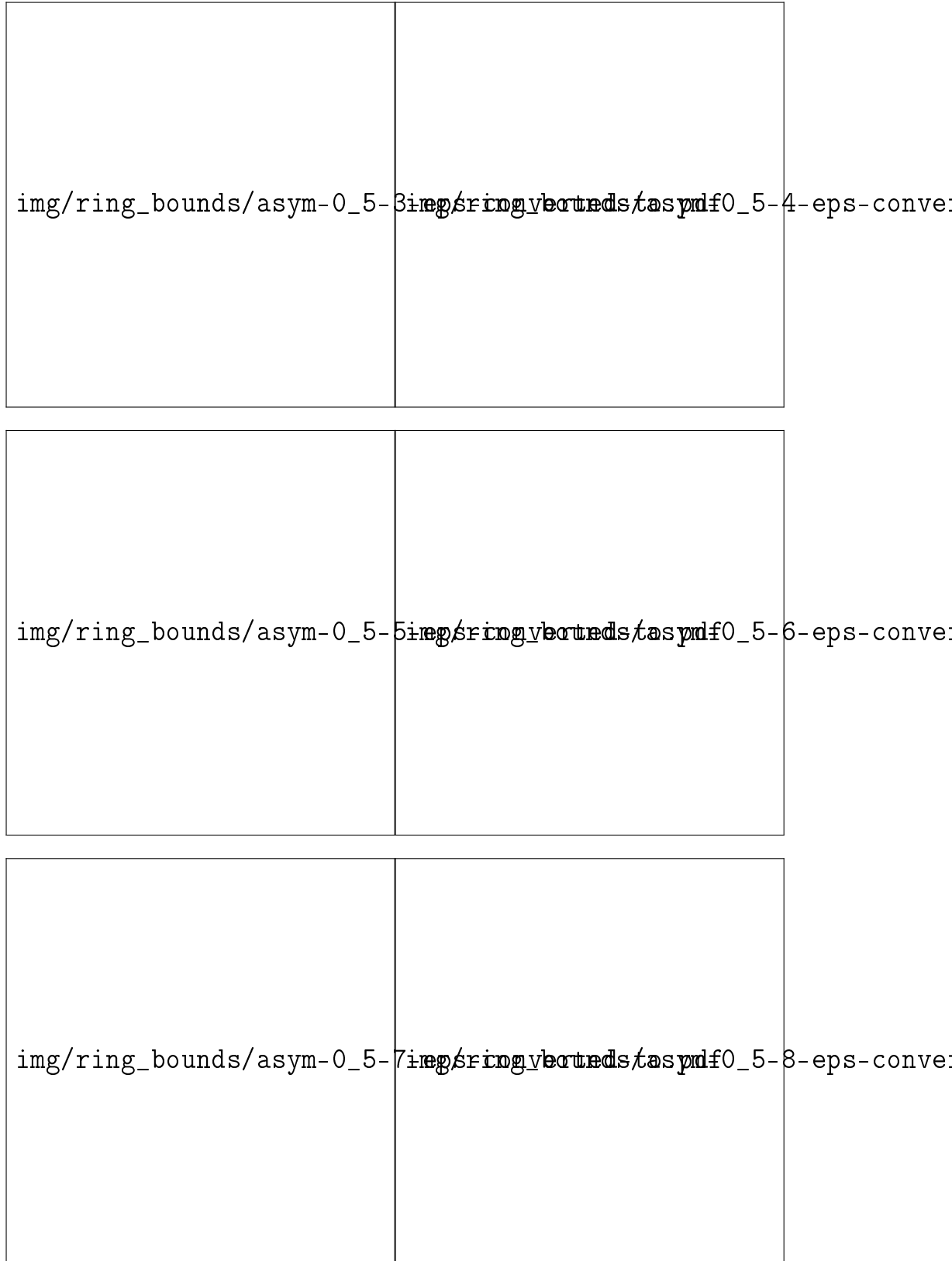


Рис. 5. Границы областей устойчивости для системы (11) для $\tau = 0.5$ и значений n от 3 до 8 показаны кружками. Сплошная линия — граница области устойчивости, гарантированной для любого n .

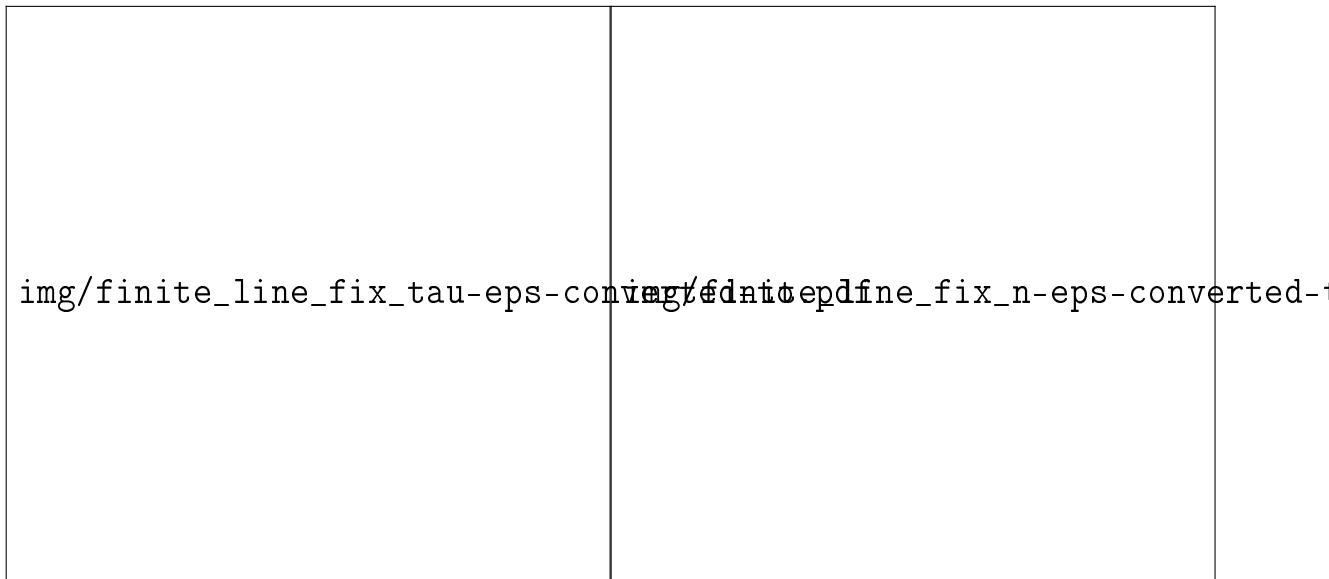


Рис. 6. Границы областей устойчивости для линейной конфигурации нейронов (система (19), (20)). На рисунке слева: запаздывание фиксировано, количество нейронов меняется. Справа: количество нейронов фиксировано, запаздывание меняется.

Область тех значений параметров, при которых кольцевая система нейронов устойчива, линейная с теми же параметрами неустойчива, мы называем парадоксальной областью. Таким образом, парадоксальная область это область значений параметров, в которых нарушается принцип «разрыв кольца благоприятен для устойчивости».

На рисунке 7 показано, что при $\tau = 0.5$ парадоксальная область заметна в модели сети с количеством нейронов $n = 3$, отсутствует при $n = 4, 6$ и весьма мала при $n = 5, 7$. В результате численных экспериментов выяснилось, что в моделях сетей с $n > 7$ парадоксальная область либо отсутствует, либо пренебрежимо мала.

В разделе ?? показана динамика области устойчивости модели кольцевой нейронной сети в процессе постепенного разрыва одной из связей в кольце и превращения сети в линейную.

Рассматривается модель кольцевой сети с двусторонним запаздыванием из шести нейронов. Интенсивности взаимодействия между всеми нейронами,

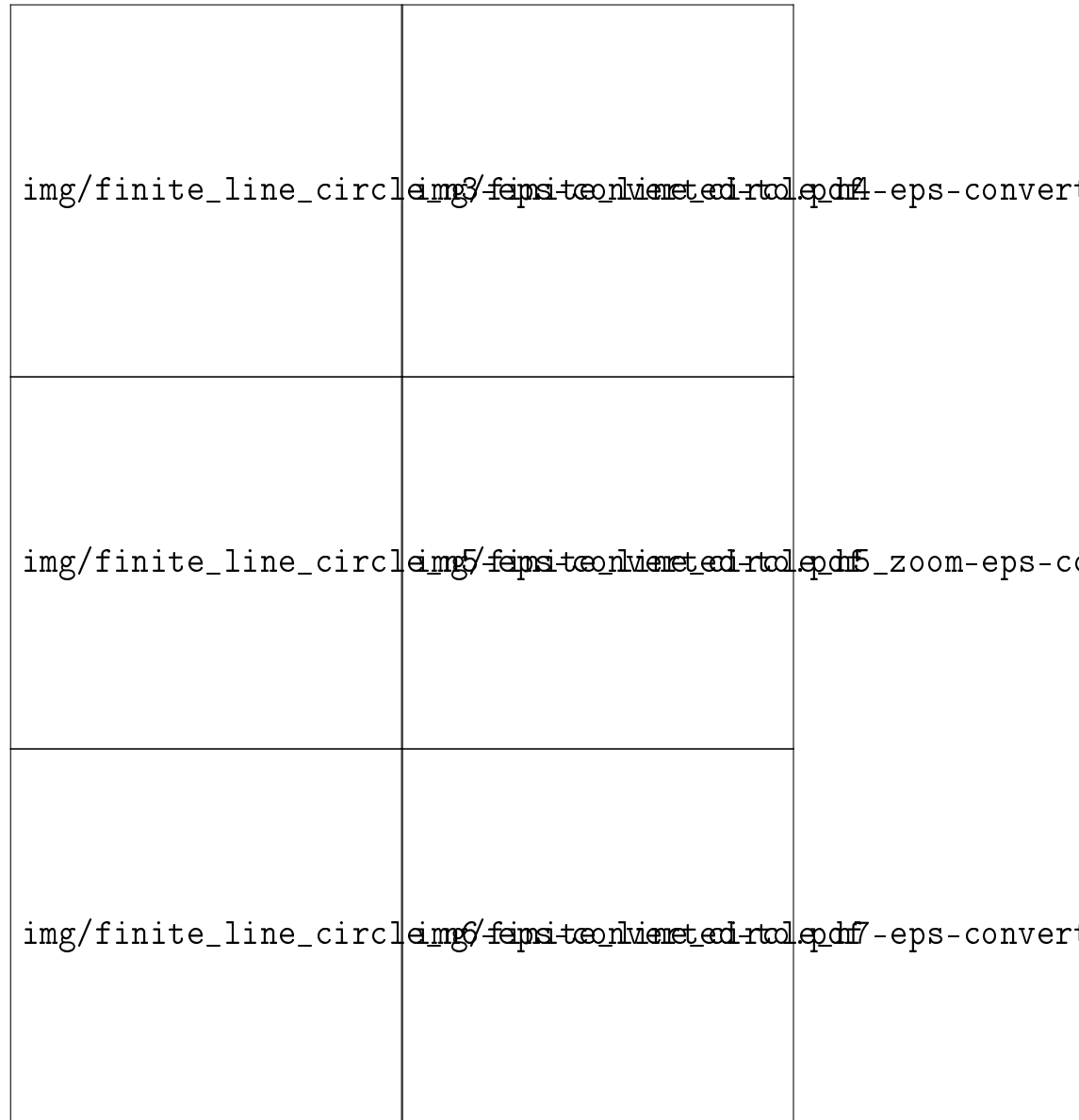


Рис. 7. Границы областей устойчивости для кольцевой (система (12), границы очерчены кружочками) и линейной (система (19), (20), сплошные линии) конфигураций нейронов, $\tau = 0.5$. Для $n = 5$ дополнительно парадоксальная область показана в увеличении.

кроме первого и шестого, равны a и b (как в модели (12)), а интенсивности воздействия шестого нейрона на первый и первого нейрона на шестой равны соответственно ac и bc , где c – некоторый неотрицательный параметр. Тогда взаимодействие нейронов в описанной модели задается уравнением (1)

с матрицами

$$A = I, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & 0 & 0 & ac \\ a & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & b \\ bc & 0 & 0 & 0 & a & 0 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

При $c = 1$ система (1), (24) описывает кольцевую сеть с двусторонним запаздыванием (12). С изменением c от единицы до нуля интенсивность взаимодействия между первым и шестым нейронами в системе (1), (24) постепенно ослабевает, и при $c = 0$ кольцо нейронов размыкается. На рисунке 8 построены области устойчивости и неустойчивости рассматриваемой сети при различных значениях параметра c . С уменьшением c границы областей устойчивости вытягиваются в четырех концах и при полном разрыве связи переходят в гиперболы с асимптотами $a = 0$ и $b = 0$ (см. последний график в серии рисунков 8). Как показывает рис. 8, ослабление одной связи между нейронами в кольцевой сети из 6 нейронов расширяет область устойчивости всей системы.

В разделе ?? результаты главы 3 сравниваются с известными в литературе. Констатируется, что в большинстве работ по устойчивости кольцевых нейронных сетей рассматривается задача об устойчивости сети из двух [?], трёх [?] или четырех [?], [?] нейронов. Указаны преимущества рассматриваемых в диссертации моделей кольца нейронов в сравнении с моделью работы [?] (2004), в которой рассматривались кольцевые системы с произвольным количеством нейронов.

Отмечено, что проблема устойчивости линейных конфигураций нейронов не была исследована никем. Предпринятое в главе 3 сравнение областей устойчивости кольцевой и линейной конфигураций с сопоставимыми параметрами в литературе отсутствует.

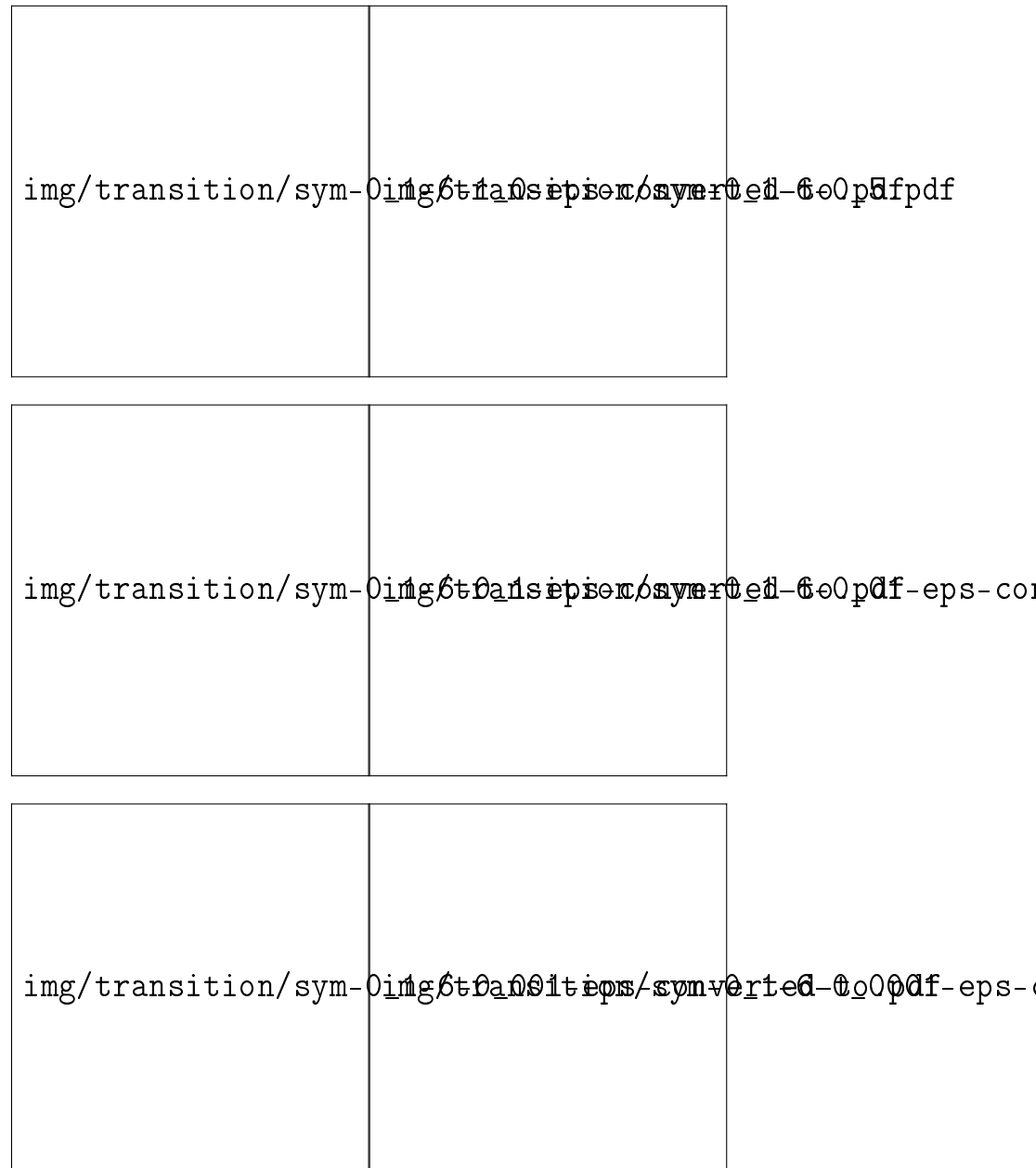


Рис. 8. Динамика области устойчивости в процессе разрыва нейронного кольца. Границы областей устойчивости для системы $(??)$, $(??)$ для $\tau = 0.1$ и $c = 1, c = 0.5, c = 0.1, c = 0.01, c = 0.001, c = 0$.

Указано, что алгоритмы и программы для построения области устойчивости нейронных сетей, описанные в главе 3, не имеют аналогов в известной автору литературе.

В **заключении** суммируются все полученные в диссертации результаты.

В **приложениях** приводятся исходные коды программных продуктов, разработанных в программном пакете MATLAB 7.11.0 (R2010b) и описанных в разделах ??, ?? и ?? диссертации. Код программы «Анализ устойчивости» находится в приложении А, код программы «Устойчивость нейронных сетей» — в приложении Б, код программы «Построение областей устойчивости круговых нейронных сетей» — в приложении В. Приложение Г содержит общие части исходных кодов всех трех программ: во избежание повторений те функции, которые используются в работе всех программ (функция построения конуса устойчивости, функция нахождения значений запаздывания, обеспечивающих устойчивость исследуемого уравнения при фиксированных коэффициентах, и др.), вынесены в отдельное приложение.

Основные результаты диссертационной работы

На защиту выносятся следующие новые научные результаты.

1. Разработан метод конуса устойчивости для анализа устойчивости широкого класса матричных дифференциальных уравнений с запаздываниями.
2. Построены алгоритмы и программы для анализа устойчивости математических моделей нейронных сетей кольцевой и линейной конфигурации с неограниченным количеством нейронов.
3. Постановлена и решена задача об области устойчивости математической модели линейной конфигурации нейронов с неограниченным количеством нейронов.
4. Доказано, что область устойчивости кольца с большим количеством нейронов расширяется в случае его разрыва.

5. Построены алгоритмы и программы для анализа устойчивости математических моделей нейронных сетей кольцевой и линейной конфигурации с ограниченным количеством нейронов.
6. Обнаружены «парадоксальные» области в пространстве параметров некоторых моделей кольцевых сетей с ограниченным количеством нейронов, в которых нарушается принцип «разрыв кольца увеличивает область устойчивости».
7. Численно промоделирована динамика областей устойчивости в процессе постепенного разрыва кольцевой нейронной сети.