td0_exo3

2025-02-27

TD 0

Exercice 3

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires gaussiennes d'espérence μ et de matrice variance-covariance Σ définies ci-dessous :

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad et \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Question 1

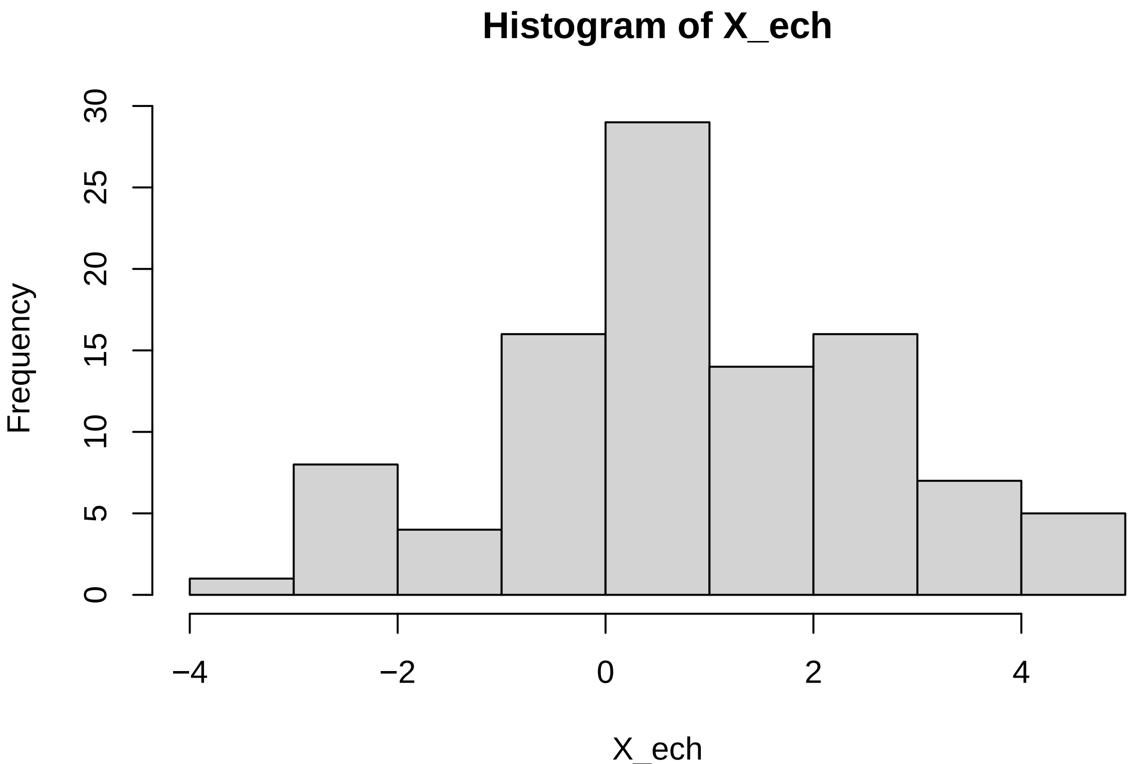
Générer un échantillon de $n = 100$ réalisations de X.

```
mu <- matrix(c(1, -1), nrow=2, ncol=1)
sigma <- cbind(c(3, 2), c(2, 4))

n <- 100

X_ech <- rnorm(n, mean = mu[1], sd = sigma[1,1]**0.5)
X_ech
```

```
##   [1] -0.037483021  2.196798217 -0.325500939 -2.098868980 -2.639149129
##   [6]  2.002289281 -1.119630772  2.751475341  3.965353602  2.084549437
##  [11]  0.523723296  2.372888218  1.225463147  2.473787220 -1.883392737
##  [16]  0.334915725 -2.290619896  0.629972360  1.280420844 -0.457964948
##  [21]  1.643146659  0.909104120  3.485423431  1.254708490  0.591262246
##  [26] -0.064464162  2.262710284  1.284718111  0.520385407  0.075744590
##  [31]  1.252269212  0.665463089  1.541218028  0.968091045  0.287711260
##  [36]  2.423094466  2.458250045 -0.439748662 -0.182149208 -0.397285295
##  [41]  0.164200514  0.006404556  0.253555319  1.136758566 -2.927841031
##  [46] -2.354817804  1.216288390  2.896246922  4.138996426  2.120586757
##  [51]  0.242224423  3.443104416 -0.506759789 -1.736465585 -0.509108893
##  [56] -1.729698038  0.511172246  0.242697065  3.990010016  0.332756562
##  [61] -0.106164275  4.266048005  0.150063539 -3.520129596  0.623281204
##  [66] -0.396963199  0.580012738  1.248167084  0.400347687 -0.787125692
##  [71]  1.105382258 -0.944288532  2.136790303 -2.841116655  4.262165163
##  [76] -2.646432317  3.577907638  0.510258317  2.442364913  1.901746216
##  [81]  0.923002983  0.322009902  3.111509516 -0.581107895 -0.851242973
##  [86]  4.314534896 -0.537706669  1.354912992  1.796976398  3.441447022
##  [91]  0.817871165  0.179897076  0.713214786  2.604303507 -2.698116486
##  [96]  2.074912206  4.562065558  0.873588486  0.712196773  2.024672446
```

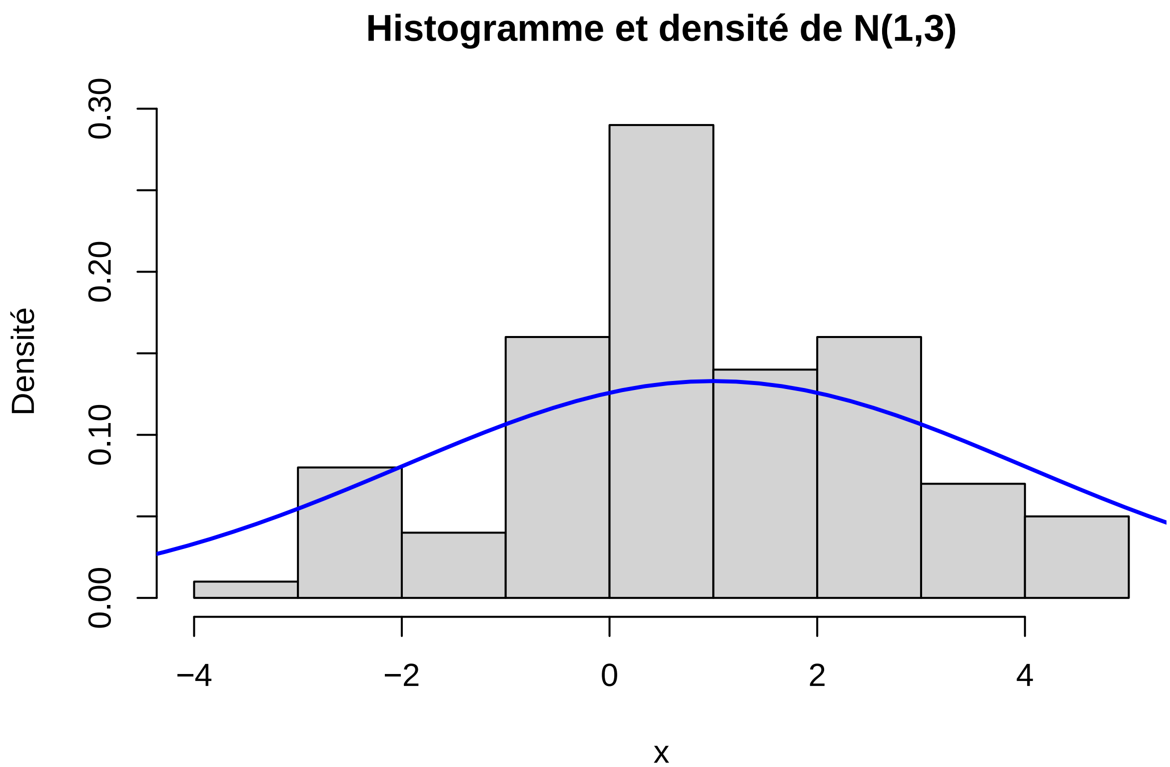
Représenter la densité empirique de l'échantillon.

```
hist(X_ech)
```



Superposer la densité de probabilité f_X.

```r
# Tracer l'histogramme avec option `probability = TRUE` pour avoir une échelle de densité
hist(X_ech, probability = TRUE,
     xlab = "x", ylab = "Densité", main = "Histogramme et densité de N(1,3)" )

# Ajouter la courbe de densité par-dessus l'histogramme
curve(dnorm(x, mean=mu[1], sd=sigma[1,1]), from=-10, to=12, col="blue", lwd=2, add=TRUE)
```



Répéter en faisant varier n.

```
n <-100
X_ech <- rnorm(n, mean = mu[1], sd = sigma[1,1]**0.5)
```

Question 2

Générer un échantillon de $n = 100$ réalisation de Y.

```
n <- 100
Y_ech <- rnorm(n, mean = mu[2], sd = sigma[2,2]**0.5)
Y_ech
```

```
##   [1] -3.69808032  0.11181822  2.12322734 -1.07555053  0.16212229 -0.56228213
##   [7]  2.01878134 -0.39594142  1.14965142  0.86219939  3.64290420 -1.28708776
##  [13] -5.00633061 -2.01370197  1.82849809 -0.87557785 -5.24880080  2.33782026
##  [19] -3.96434006  0.27258274 -0.43560581 -1.73737068  1.19293162 -1.08879915
##  [25]  1.62401078 -0.26998650 -1.77570470  1.41982613  1.05934823  0.97551163
##  [31] -0.06551668  0.54459671 -2.54417840 -0.67289896 -1.46921411 -2.53336749
##  [37] -1.03743435  1.53227529  0.45522943  0.43863024  0.63584575 -0.90419425
##  [43]  0.35153336 -2.22535063  1.67380812  0.37920525 -3.64067325 -1.47264237
##  [49] -1.66309766  2.52842473 -3.14590269 -0.25976704  0.17832221  1.10383187
##  [55]  1.69658107 -2.40529712 -2.64137717 -5.07017602 -3.35474748  0.77920447
##  [61] -0.83784690 -1.86450093 -2.30565784  1.71752582 -1.83806478  1.66555127
##  [67] -1.13505274 -2.91997149  2.24392165 -0.91829490  0.68469436 -1.65411760
##  [73] -1.29270333 -4.00169247 -0.96410254 -2.99924306 -3.77561733 -1.97189918
##  [79] -0.63808811  0.78270069  1.14084969 -1.57502772 -3.52746897 -1.57434663
##  [85]  3.10370965  1.03690593 -0.72954037 -0.12544137 -0.83794007 -4.60843745
##  [91] -2.27743487  1.35554699 -0.15554704 -2.22610430  0.76456090 -0.83107104
##  [97]  0.31716515  0.85836308 -1.32961580 -4.72471020
```

Question 3

A l'issue de la question 1 et 2, avez-vous généré un échantillondu couple (X, Y)?

Non

```r
cov(X_ech,Y_ech)
```

```
## [1] 0.003041003
```

Question 4

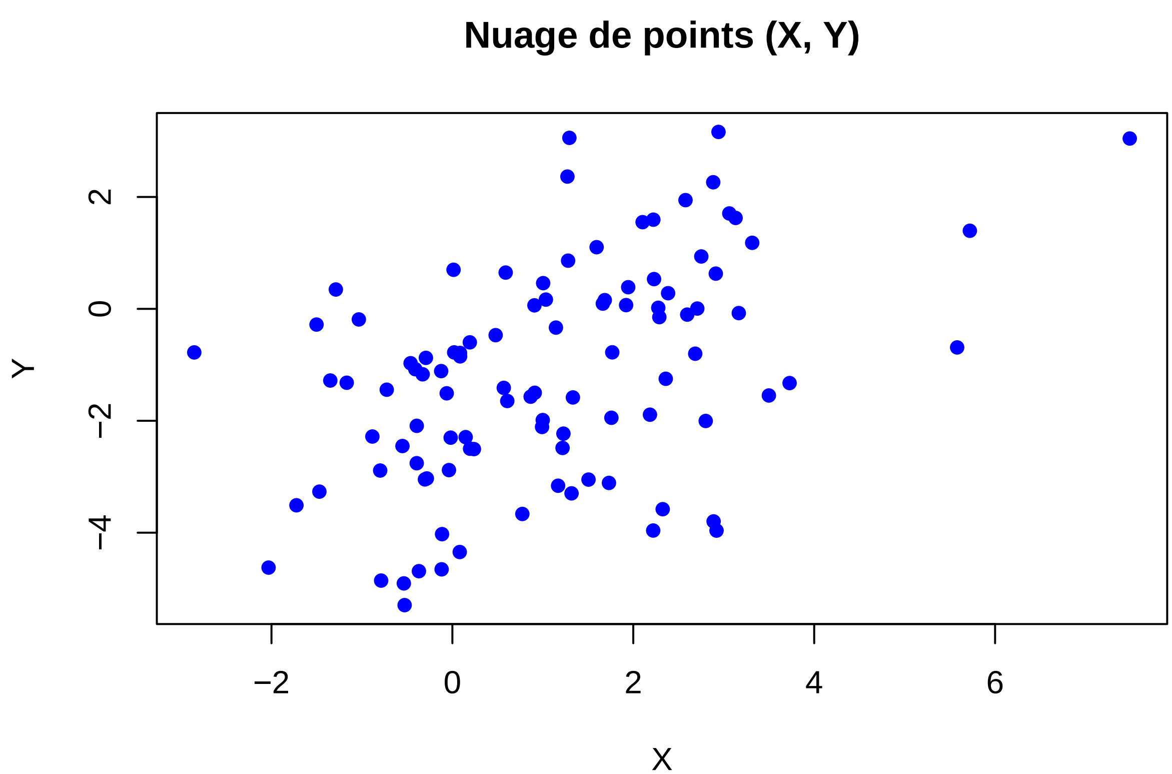
Générer un échantillon de $n = 100$ réalisations du couple (X, Y).

```r
library(mvtnorm) #utilisé pour travailler avec les lois normales multivariées
```

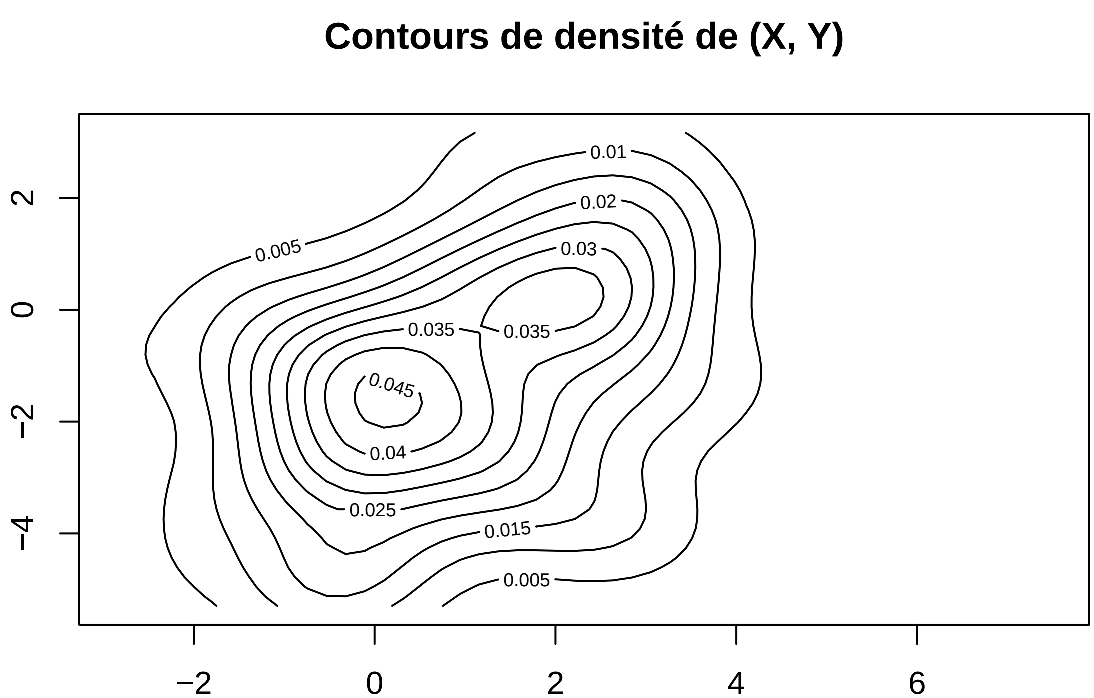
```r
n <- 100

#Générer des échantillons d'une loi normale multivariée. library(mvtnorm)
XY_ech <- rmvnorm(n, mu, sigma=sigma)
head(XY_ech)
```

```
##           [,1]       [,2]
## [1,] 2.5776431  1.9433049
## [2,] 1.7582816 -1.9459671
## [3,] 5.7210624  1.3958435
## [4,] 2.9424315  3.1617766
## [5,] 0.9916708 -2.1103882
## [6,] 2.9124520  0.6296714
```

```r
plot(XY_ech[,1], XY_ech[,2],
     xlab = "X", ylab = "Y",
     main = "Nuage de points (X, Y)",
     col = "blue", pch = 16)
```

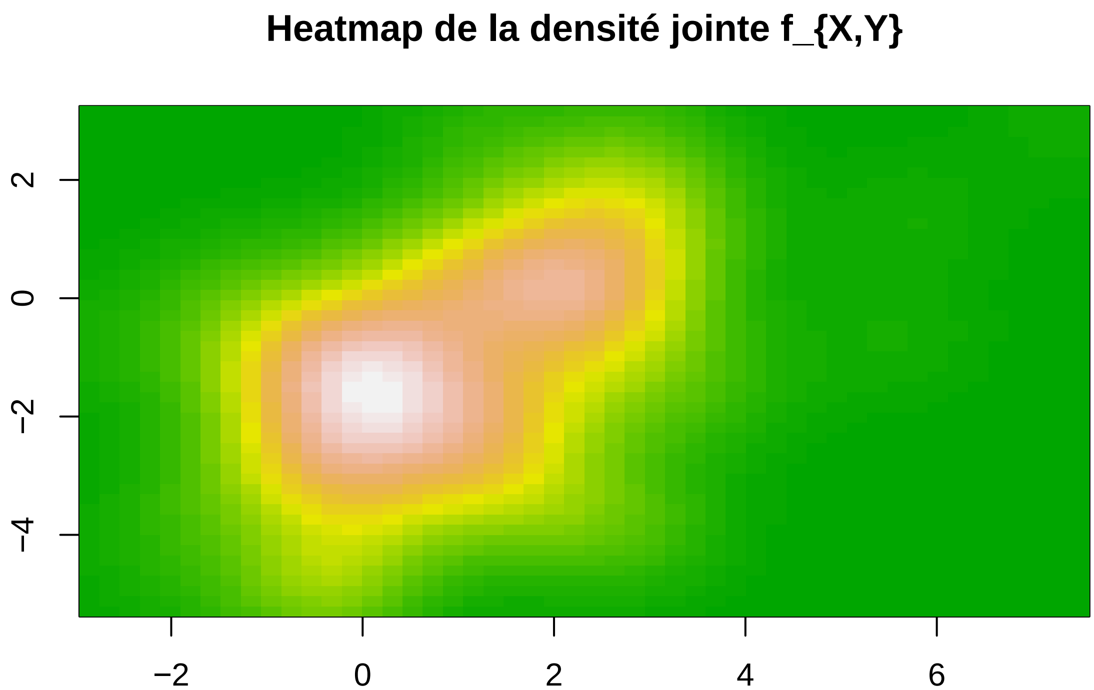



```r
library(MASS) # librairie data visu entre autre (mais surtout outil stat puissant)

densite <- kde2d(XY_ech[,1], XY_ech[,2], n=50)  # Estimation de densité

contour(densite, main="Contours de densité de (X, Y)") # courbes de niveau
```

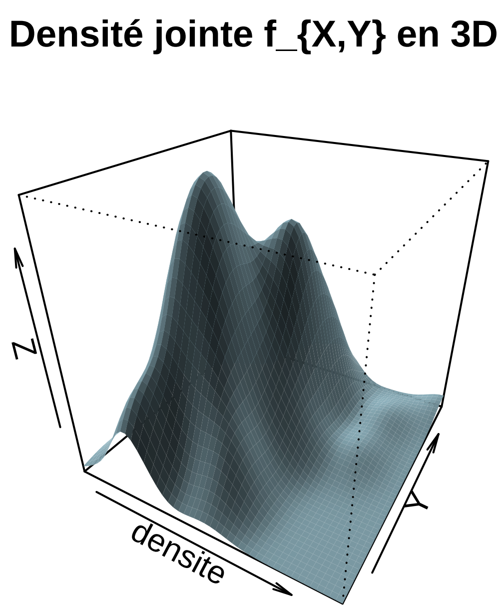



```r
image( # Heatmap (carte de chaleur)
  densite,
```

```
  col=terrain.colors(50),
  main="Heatmap de la densité jointe f_{X,Y}"
)
```



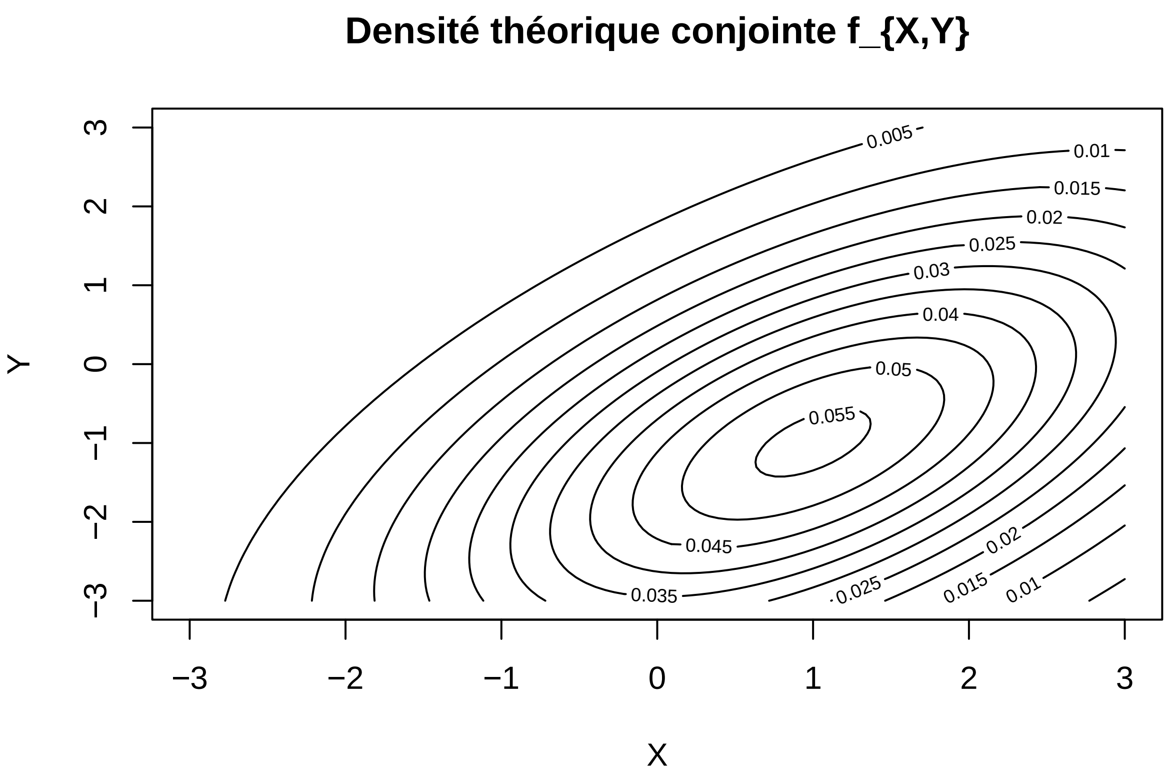

```
persp( # Surface 3D
  densite, theta=30, phi=30, col="lightblue", shade=0.5, border=NA,
      main="Densité jointe f_{X,Y} en 3D"
  )
```



Question 5

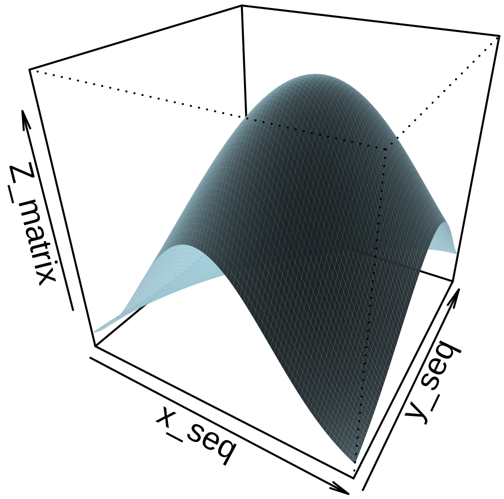
Représenter graphiquement la densité de probabilité jointe $f_{X,Y}$.

```r
# Créer une grille de valeurs pour X et Y
x_seq <- seq(-3, 3, length.out = 100)
y_seq <- seq(-3, 3, length.out = 100)
grid <- expand.grid(X = x_seq, Y = y_seq)  # Crée un tableau de toutes les combinaisons (X, Y)

# Calculer la densité théorique pour chaque couple (X, Y)
grid$Z <- dmvnorm(grid, mean = mu, sigma = sigma)

# Transformer en matrice pour affichage
Z_matrix <- matrix(grid$Z, nrow = 100, ncol = 100)

# Tracer les contours de densité théorique
contour(x_seq, y_seq, Z_matrix, main="Densité théorique conjointe f_{X,Y}",
        xlab="X", ylab="Y")
```




```r
persp(x_seq, y_seq, Z_matrix, theta=30, phi=30, col="lightblue", shade=0.5,
      border=NA, main="Densité théorique f_{X,Y} en 3D")
```

Densité théorique f_{X,Y} en 3D



Faire varier la valeur de la covariance σ^2_{12}.

```
sigma[1,2] <- -10
sigma[2, 1] <- sigma[1,2]
sigma
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    3  -10
## [2,]  -10    4
```

Qu'observez-vous ?

Cas $\sigma^2_{12} \neq \sigma^2_{21}$:

Les fonctions renvoient des erreurs indiquant qu'ils attendent une matrice sigma symétrique.

Cas $\sigma^2_{12} = \sigma^2_{21}$:

Au dessus de 3 la matric n'est plus semidefinie positive et donc les commandes me renvoie des erreurs.

- $\sigma^2_{12} > 0$ (covariance positive)
  $\rightarrow$ **Les points sont alignés dans une direction ascendante** :
  - **Plus σ^2_{12} est grand**, plus (X et Y augmentent ensemble.
  - Nuage **étiré en diagonale vers le haut**.
- $\sigma^2_{12} < 0$ (covariance négative)
  $\rightarrow$ **Les points sont alignés dans une direction descendante** :
  - Si X augmente, Y diminue.
  - Nuage **étiré en diagonale vers le bas**.
- $\sigma^2_{12} = 0$(covariance nulle)
  $\rightarrow$ **Les points sont répartis aléatoirement, sans structure apparente** :
  - X et Y **ne sont pas corrélés**.
  - **Nuage circulaire** si X et Y ont la même variance.