

課題において、「日本のマクロ経済を簡単に表現できる異質的な個人を含むモデル」を、「異質的な個人の家計のモデルを定式化」するだけでなく、加えて、(代表的)企業や政府なども定式化するように要求していると解釈した。

課題 1

家計が代表的な個人ではなく、異質的な個人であるとしてモデル化する。また、各個人は、子孫が家計を継いでいくと想定して、一家計としては存続し続ける「王朝モデル」としてモデル化する。ただし、各個人は、確率分布を知悉する合理的な意思決定者であるとする。さらに、各家計は資本所得税率 τ_k のもとで資本所得税がとられて、集めた税金が全員のために等しく使われるとする。以下、こうした異質的な個人を想定するが、企業は一つの代表的企業を想定する、一国経済のマクロ経済をモデル化する。そして、そのモデル化したものの均衡の定義を記述する。

1.1 モデル化

家計、企業、政府、市場、経済のモデル化を順にする。

1.1.1 家計のモデル化

まず異質的な個人の家計をモデル化する。

次のように、家計の意思決定をモデル化する。各家計 i を、区間 $(0, 1)$ の測度 1 の連続する点に、対応付ける。その根拠は無限にたくさん存在する個人と、区間 $(0, 1)$ の各点と、二つの濃度が等しいことから 1:1 対応づけられるからである。そして、各家計 i は時刻 t に、 c_{it} を消費し、 a_{it+1} を資産にする。さらに、各家計は、次の期待効用を最大化するように時刻 $t =$ において意思決定する。

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_{it})$$

ただし、 β は主観割引因子であり、 $\beta \in (0, 1)$ とし、効用は $u(c) = \frac{c^\sigma}{1-\sigma}$ (ただし、 σ は定数) であり、凹関数である。

次のように、各家計 i は、前期に確率的に依存した今期の成果 h_{it} を出すとモデル化する。

$$h_{it} \in \mathcal{H} = \{h_1, \dots, h_{N_H}\}$$

として、マルコフ過程 $\pi(h_{it+1} | h_{it})$ (π は確率分布) を通じて、各家計の今期の成果が決まるとする。また、成果の総量を $H = \sum_{j=1}^{N_H} h_j \pi^*(h_j)$ (ただし、 π^* は π に依存して定まる不変な配分である。) とする。

次のように、各家計は予算制約を受けることをモデル化する。利子率 r 、賃金 w 、借入れ \underline{B} の下限を示す。また、 $T = \tau_r K$ を (すべての人口は測度 1 であると規格化されていたので) 各家計のために政府が支出するとする。このとき、

$$\begin{aligned} c_{it} + a_{it+1} &= (1+r)a_{it} - \tau_r a_{it} + wh_{it} + T \\ a_{it+1} &\geq -\underline{B}, c_{it} \geq 0, a_{i0} : \text{given} \end{aligned}$$

よって、家計のモデルは以下になる。

$$\max_{\{c_{it}\}, \{a_{it+1}\}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_{it}) \text{ s.t.}$$

$$c_{it} + a_{it+1} = (1+r)a_{it} - \tau r a_{it} + w h_{it} + T$$

$$a_{it+1} \geq -\underline{B}, c_{it} \geq 0, a_{i0} : \text{given}$$

1.1.2 企業のモデル化

次に代表的企業をモデル化をする。

企業の生産関数を、総資本 K 、各家計である労働者の成果の総量 H を用いて、 $Y = F(K, H) = K^\alpha H^{1-\alpha}$ (ただし、 α は定数) とする。また、

$$r + \delta = F_K(K, H), w = F_H(K, H)$$

とする。企業は利潤を最大化し

$$\max_{K, H} F(K, H) - (r + \delta)K - wH.$$

1.1.3 政府のモデル化

次に政府をモデル化する。

政府は資本所得税率 τ_k のもとで資本所得税を各家計から集める。その集めた税金が全員のために等しく使われ、各家計に $T = \tau_k w H$ を使う。

1.1.4 市場のモデル化

次に市場をモデル化をする。

賃金は w 、利子率は r とし、財の価格は 1 に normalized する。

1.1.5 経済のモデル化

次のように経済の状態をモデル化する。

経済の状態は、家計 $\mu(a, h)$ の配分で決まるとする。 μ は時間を通じて発展し

$$\mu(a', h') = \sum_a \sum_h \mathbf{1}\{a : g_a(a, h) \in a'\} \pi(h' | h) \mu(a, h)$$

である。ただし、 $\mathbf{1}$ は定義関数であり、 $g_a(a, h)$ は政策関数である。

1.2 均衡の定義

定常的な競争的均衡 EQ は、次のような関数のリストである。すなわち、

$$EQ = (V(a, h), g_a(a, h), K, H, r, w, T, \mu(a, h)) \text{ s.t. 条件 (1) から (5).}$$

(1) : Household optimization

r と w が与えられている下で、 $V(a, h)$ は

$$V(a, h) = \max_{a'} u((1+r-\tau_k r)a + wh + T - a') + \beta \sum_{h'} V(a' h') \pi(h' | h) \text{ s.t.}$$

$$-\underline{B} \leq a' \leq (1+r-\tau_k r)a + wh + T,$$

$g_a(a, h)$ は最適意思決定ルールである

の解である。

(2) : Firm optimization

r と w が与えられている下で, K, H は

$$\max_{k,h} F(k, h) - (r + \delta)k - wh \text{ s.t. } k \geq 0, h \geq 0$$

の解である.

(3) : Govrnment

$$\tau_k r K = T$$

(4) : Market clearing

$$\text{(Labor)} \quad H = \sum_h h \pi^*(h),$$

$$\text{(Assets)} \quad K = \sum_a \sum_h g_a(a, h) \mu(a, h),$$

$$\text{(Goods)} \quad F(K, H) = \left((1 + r - \tau_k r) a + wh + T - g_a(a, h) \right) \mu(a, h) + \delta K.$$

(5) : Aggreate law of motion

状態 μ に渡って行為者の配分は次のように定常的である.

$$\mu(a', h') = \sum_a \sum_h \mathbf{1}\{a : g_a(a, h) \in a'\} \pi(h' | h) \mu(a, h).$$

■