課題において,「日本のマクロ経済を簡単に表現できる異質的な個人を含むモデル」を,「異質的な個人の家計のモデルを定式化」するだけではなく，加えて,（代表的）企業や政府なども定式化するように要求していると解釈した．

課題 1

家計が代表的な個人ではなく，異質的な個人であるとしてモデル化する．また，各個人は，子孫が家計を継いでいくと想定して，一家計としては存続し続ける「王朝モデル」としてモデル化する．ただし，各個人は，確率分布を知悉する合理的な意思決定者であるとする．さらに，各家計は資本所得税率 τ_k のもとで資本所得税がとられて，集めた税金が全員のために等しく使われるとする．以下，こうした異質的な個人を想定するが，企業は一つの代表的企業を想定する，一国経済のマクロ経済をモデル化する．そして，そのモデル化したものの均衡の定義を記述する．

1.1 モデル化

家計，企業，政府，市場，経済のモデル化を順にする．

1.1.1 家計のモデル化

まず異質的な個人の家計をモデル化する．

次のように，家計の意思決定をモデル化する．各家計 i を，区間 $(0,1)$ の測度 1 の連続する点に，対応付ける．その根拠は無限にたくさん存在する個人と，区間 $(0,1)$ の各点と，二つの濃度が等しいことから 1 : 1 対応づけられるからである．そして，各家計 i は時刻 t に，c_{it} を消費し，a_{it+1} を資産にする．さらに，各家計は，次の期待効用を最大化するように時刻 $t =$ において意思決定する．

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_{it})$$

ただし，β は主観割引因子であり，$\beta \in (0,1)$ とし，効用は $u(c) = \frac{c^\sigma}{1-\sigma}$（ただし，$\sigma$ は定数）であり，凹関数である．

次のように，各家計 i は，前期に確率的に依存した今期の成果 h_{it} を出すとモデル化する．

$$h_{it} \in \mathscr{H} = \{h_1, \cdots, h_{N_H}\}$$

として，マルコフ過程 $\pi(h_{it+1} \mid h_{it})$（$\pi$ は確率分布）を通じて，各家計の今期の成果が決まるとする．また，成果の総量を $H = \sum_{j=} N_H h_j \pi^*(h_j)$（ただし，$\pi^*$ は π に依存して定まる不変な配分である.）とする．

次のように，各家計は予算制約を受けることをモデル化する．利子率 r，賃金 w，借り入れ $\underline{B}$ の下限を示す．また，$T = \tau w H$ を（すべての人口は測度 1 であると規格化されていたので）各家計のために政府が支出するとする．このとき，

$$\begin{aligned} c_{it} + a_{it+1} &= (1+r)a_{it} - \tau r a_{it} + w h_{it} + T \\ a_{it+1} &\geq -\underline{B}, c_{it} \geq 0, a_{i0} : \text{given} \end{aligned}$$

よって，家計のモデルは以下のようになる．

$$\max_{\{c_{it}\},\{a_{it+1}\}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_{it}) \text{ s.t.}$$

$$c_{it} + a_{it+1} = (1+r)a_{it} - \tau r a_{it} + w h_{it} + T$$
$$a_{it+1} \geq -\underline{B}, c_{it} \geq 0, a_{i0} : \text{given}$$

1.1.2　企業のモデル化

次に代表的企業をモデル化をする．

企業の生産関数を，総資本 K，各家計である労働者の成果の総量 H を用いて，$Y = F(K.H) = K^{\alpha}H^{1-\alpha}$（ただし，$\alpha$ は定数）とする．また，

$$r + \delta = F_K(K, H), w = F_H(K, H)$$

とする．企業は利潤を最大化し

$$\max_{K,H} F(K, H) - (r+\delta)K - wH.$$

1.1.3　政府のモデル化

次に政府をモデル化する．

政府は資本所得税率 τ_k のもとで資本所得税を各家計から集める．その集めた税金が全員のために等しく使われ，各家計に $T = \tau_k wH$ を使う．

1.1.4　市場のモデル化

次に市場をモデル化をする．

賃金は w，利子率は r とし，財の価格は 1 に normalized する．

1.1.5　経済のモデル化

次のように経済の状態をモデル化する．

経済の状態は，家計 $\mu(a, h)$ の配分で決まるとする．μ は時間を通じて発展し

$$\mu(a', h') = \sum_a \sum_h \mathbf{1}\{a : g_a(a, h) \in a'\}\pi(h' \mid h)\mu(a, h)$$

である．ただし，$\mathbf{1}$ は定義関数であり，$g_a(a, h)$ は政策関数である．

1.2　均衡の定義

定常的な競争的均衡 EQ は，次のような関数のリストである．すなわち，

$$EQ = (V(a, h), g_a(a, h), K, H, r, w, T\mu(a, h)) \text{ s.t. 条件 (1) から (5).}$$

(1)：Household optimization

r と w が与えられている下で，$V(a, h)$ は

$$V(a, h) = \max_{a'} u((1 + r - \tau_k r)a + wh + T - a') + \beta \sum_{h'} V(a'h')\pi(h' \mid h) \text{ s.t.}$$
$$-\underline{B} \leq a' \leq (1 + r - \tau_k r)a + wh + T,$$
$$g_a(a, h) \text{ は最適意思決定ルールである}$$

の解である．

(2)：Firm optimization

r と w が与えられている下で，K, H は

$$\max_{k,h} F(k,h) - (r+\delta)k - wh \text{ s.t. } k \geq 0, h \geq 0$$

の解である．

(3)：Govrnment

$$\tau_k wH = T$$

(4)：Market clearing

$$\begin{aligned}
\text{(Labor) } H &= \sum_h h\pi^*(h), \\
\text{(Assets) } K &= \sum_a \sum_h g_a(a,h)\mu(a,h), \\
\text{(Goods) } &\big((1+r-\tau_k r)a + wh + T - g_a(a,h)\big)\,\mu(a,h) + \delta K.
\end{aligned}$$

(5)：Aggreate law of motion

状態 μ に渡って行為者の配分は次のように定常的である．

$$\mu(a',h') = \sum_a \sum_h \mathbf{1}\{a : g_a(a,h) \in a'\}\pi(h' \mid h)\mu(a,h).$$

∎