

第2章 マクスウェル方程式と光子および状態密度について

この章では、マクスウェルの方程式を基に、それらが真空中での物質の伝播について明らかにしているものについて考察していく。その為に、光子の概念について説明した上で、それらの状態密度を導入する。状態密度は光子と同様、一般的にかなり重要な特性であるとされているので、一般的な方法を用いてこの量に対してアプローチしていく。後に、次元数を減らした系を含む他の（準）粒子についても状態密度を使用し、さらに、様々な粒子群についてこれらの状態の占有確率を紹介する。

2.1 マクスウェル方程式

マクスウェル方程式は、微視的や巨視的などといったいくつか異なる手法によって表すことができるが、ここでは、その中でも巨視的なマクスウェル方程式を用いることとする。尚、この本においては国際的に推奨されている SI 系を用いている。巨視的マクスウェル方程式は、一般的に以下の式 (2.1 a ~ f) で与えられる。ここで、太字はベクトル量を、通常の文字はスカラー量を表している。

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (2.1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.1b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} \quad (2.1c)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \dot{\mathbf{D}} \quad (2.1d)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (2.1e)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M} \quad (2.1f)$$

ここで、上式において用いられた文字は、以下の意味や単位を表している。

$$\mathbf{E} = \text{電場の強度} : 1[\text{V/m}] = 1[\text{m kg s}^{-3} \text{A}^{-1}]$$

$$\mathbf{D} = \text{電束密度} : 1[\text{A s/m}^2] = 1[\text{C/m}^2]$$

$$\mathbf{H} = \text{磁場の強度} : 1[\text{A/m}]$$

$$\mathbf{B} = \text{磁場密度} : 1[\text{V s/m}^2] = 1[\text{T}] = 1[\text{Wb/m}^2]$$

$$\rho = \text{電荷密度} : 1[\text{A s/m}^3] = 1[\text{C/m}^3]$$

$$\mathbf{j} = \text{電流密度} : 1[\text{A/m}^2]$$

$$\mathbf{P} = \text{媒質における分極密度}$$

$$\text{即ち単位体積当たりの電気双極子モーメント} : 1[\text{A s/m}^2]$$

$$\mathbf{M} = \text{媒質における磁化密度}$$

$$\text{即ち単位体積当たりの磁気双極子モーメント} : 1[\text{V s/m}^2]$$

$$\varepsilon_0 = \text{真空における誘電率} : 8.859 \times 10^{-12} [\text{A s/V m}]$$

μ_0 = 真空における透磁率 : $4\pi \times 10^{-7}$ [V s/A m]

∇ = ナブラ演算子。直交座標においては、

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial t}$$

である。

ここで、ナブラ演算子 ∇ をスカラー場やベクトル場に適用させたとき、通常

$$\nabla \cdot f(\mathbf{r}) = \text{grad } f$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{R}) = \text{div } \mathbf{A}$$

$$\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \text{curl } \mathbf{A}$$

と表せる。また、ラプラス演算子 Δ は以下のように定義される。

$$\Delta \equiv \nabla^2$$

この Δ をスカラー場である ρ に適用させると、直交座標においては、

$$\Delta \rho = \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} \quad (2.2)$$

となる一方で、ベクトル場である \mathbf{E} に適用させると、

$$\Delta \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

となる。

尚、古典的な電磁気学を完成させるには、電磁場上に存在し、速度 \mathbf{v} で移動している電荷 q によって生じるローレンツ力 \mathbf{F} による影響を考慮する必要がある。ここで、ローレンツ力 \mathbf{F} は、以下の (2.1g) 式で与えられる。

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (2.1g)$$

方程式 (2.1a) および (2.1b) は、自由電荷 ρ が電気変位の源である一方、磁気誘導の源は存在しないことを示している。方程式 (2.1c) および (2.1d) は、時間的に変化している磁場と電場がどのようにして互いに生み出しあっているかについて示している。また、電場は巨視的な電流密度 \mathbf{j} によって生成され得ることも表している。方程式 (2.1e) および (2.1f) は、物質方程式の一般形である。これらの式より、電気変位は電場と分極の和によって与えられ、磁束密度は磁場と磁化 (磁場により磁性体内部に生じた分極) によって与えられることが分かる。

ここで、(2.1d) に ∇ を用いることで電荷における連続方程式

$$\text{div } \mathbf{j} = -\frac{\partial}{\partial t} \rho \quad (2.4)$$

が得られる。これは、閉鎖系における電荷の保存則と対応しており、式より電荷密度と電流密度の関係が求まる。

式 (2.1) の積分形式は、ガウスの法則とストークスの法則より、

$$\int \rho(\mathbf{r}) dV = \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{f} \quad (2.5a)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (2.5b)$$

となる。この時、 $dV, d\mathbf{f}, d\mathbf{s}$ はそれぞれ、体積，表面積或いは面積，線分の無限小要素を表している。

2.2 真空中の電磁場放射

真空中においては、以下の条件を満たしている。

$$\mathbf{P} = 0, \mathbf{M} = 0, \mathbf{p} = 0, \mathbf{j} = 0 \quad (2.6)$$

(2.1e) および (2.1f) を用いて、(2.1c) および (2.1d) を単純化すると、

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \dot{\mathbf{H}} \quad (2.7a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}} \quad (2.7b)$$

となる。また、得られた (2.7a) に $\nabla \times$ を、(2.7b) に $\partial/\partial t$ を作用させることで、

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu_0 \nabla \times \dot{\mathbf{H}}, \quad \nabla \times \dot{\mathbf{H}} = \varepsilon_0 \ddot{\mathbf{E}} \quad (2.8)$$

が得られる。さらに (2.8) において、演算子 ∇ の性質より

$$-\mu_0 \varepsilon_0 \ddot{\mathbf{E}} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} \quad (2.9)$$

と変形できる。故、(2.6) および (2.1a) より、

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (2.10)$$

となるので、(2.9) は、電場に関する波動方程式

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \ddot{\mathbf{E}} = 0 \quad (2.11a)$$

となる。

後の (2.14) で表されるような単色の平面波では、基本波である (2.11a) は、ベクトルを用いたヘルムホルツ方程式 (2.11b) に単純化することができる。

$$(\nabla^2 + k^2) \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.11b)$$

尚、磁界強度についても同様に波動方程式が得られる。これらの波動方程式の解は、以下の形で表される波となる。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 f(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad (2.12)$$

このとき、 \mathbf{E}_0 は振幅であり、 f は二階微分が存在する任意の関数である。ここで、(2.11a) と (2.11b) のそれぞれに (2.12) を代入することで、波数ベクトル \mathbf{k} と角周波数 ω が以下の関係式に従うことが分かる。

$$\frac{\omega}{k} = \left(\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} = c, \quad k = |\mathbf{k}| = \frac{2\pi}{\lambda_V} \quad (2.13)$$

以下では、単純化のために「角周波数」の代わりに「周波数」という言葉のみを使用していく。このとき、 $\omega = 2\pi/T$ における T は、振動の時間的周期を表している。

(2.13)において、 c は真空中における光速、 λ_V は真空中における波長を表している。ここで、(2.12)における全ての存在しうる解のうち、以下では最も単純なもの、すなわち

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \quad (2.14)$$

によって表される平面調和波に焦点を当てる。

(真空に限らず、)全ての波において、位相速度 v_{ph} および、群速度 v_g は、

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k}, \quad v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \text{grad}_k \omega \quad (2.15)$$

である。位相速度とは、ある位相が伝搬している際の速度を、群速度は、中間周波数 ω を持ち、かつ小さい周波数間隔 $d\omega$ を持つ波束の重心の速度をそれぞれ表している。以下のFig. 2.1 (a), (b)に各々の模式図を示す。

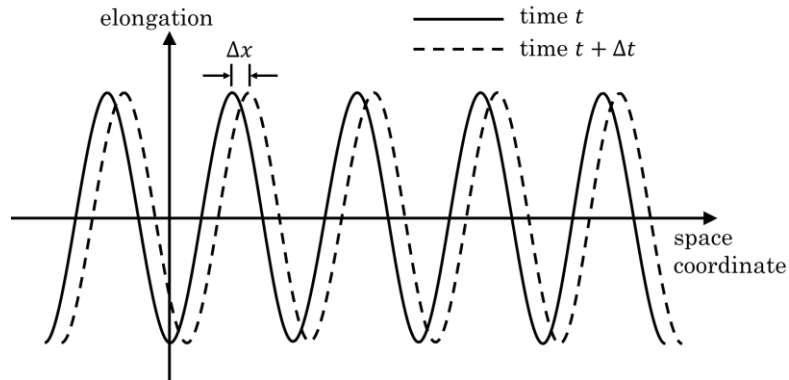


Fig. 2.1 (a) : 位相速度

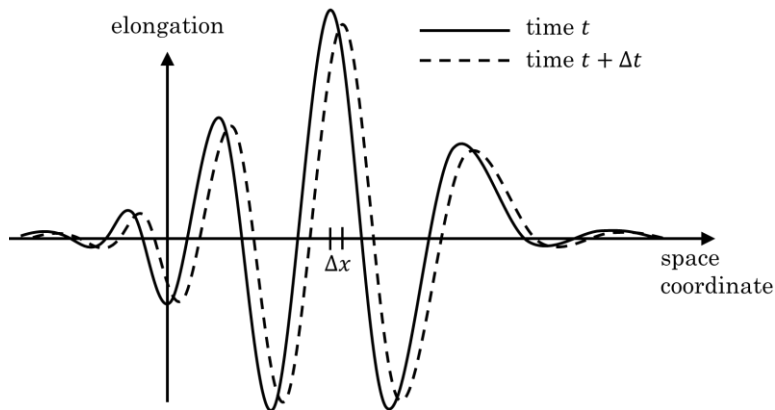


Fig. 2.1 (b) : 群速度

式 (2.15) における grad_k は、 \mathbf{k} に関する微分

$$\nabla_k = \left(\frac{\partial}{\partial k_x}, \frac{\partial}{\partial k_y}, \frac{\partial}{\partial k_z} \right)$$

を表しており、異方性媒質においては、 $\partial\omega/\partial k$ の代わりに grad_k を用いる必要がある。真空状態における電磁放射においては、ある特殊な場合のみ (2.13) および (2.11) より、

$$v_{\text{ph}} = v_g = c = (\mu_0 \varepsilon_0)^{-1/2} \quad (2.16)$$

となる。

ここで、 \mathbf{E}_0 や \mathbf{K} といった様々な物理量がマクスウェル方程式によってどのような制約を受けているかについて考察していく。(2.10) に (2.12) 或いは (2.14) を代入すると、

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = i \cdot \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{k} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] = 0 \quad (2.17)$$

となるので、

$$\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{k} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{E}_0 \perp \mathbf{k} \quad (2.18)$$

が得られる。つまり、電磁波は電場 \mathbf{E} に対して横波であることが言える。では、その他の場においては、マクスウェル方程式より何が分かるのであろうか。(2.7) より、平面波において、

$$\mathbf{H} = (\omega\mu_0)^{-1} \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \mathbf{H}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \quad (2.19a)$$

$$\mathbf{H}_0 = (\omega\mu_0)^{-1} \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 \quad (2.19b)$$

が成り立つ。さらに、(2.1e,f) と (2.6) より

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] = \varepsilon_0 \mathbf{E}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \quad (2.19c)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] = \omega^{-1} \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \quad (2.19d)$$

が得られる。(2.19b) より、電磁波は \mathbf{B} に対しても横波であり、かつ電場と磁場は互いに垂直であることが分かる。よって、

$$\mathbf{D} \perp \mathbf{k} \perp \mathbf{B} \perp \mathbf{D} \quad (2.19e)$$

が成り立つ。また、真空中や等方性を持つ媒質の場合は加えて

$$\mathbf{E} \parallel \mathbf{D}, \quad \mathbf{H} \parallel \mathbf{B}$$

も成り立つ。後に、(2.17), (2.43) そして (2.44) を関連付けて考えるが、電磁波は基本横波であり、(2.19e) の関係式に従う。しかし、ある特定の状況下においては縦波が存在することがある。

電磁波における運動量密度 Π は、

$$\Pi = \mathbf{D} \times \mathbf{B}, \quad \Pi \parallel \mathbf{k} \quad (2.20)$$

によって与えられ、さらに、ポインティングベクトル \mathbf{S} によって、エネルギー束密度が

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (2.21)$$

で与えられ、等方性を持つ物質でかつ真空状態であれば、 $\mathbf{S} \parallel \Pi$ となる。

\mathbf{S} は空間と時間に関する急速に振動する関数である。 \mathbf{S} の平均値 $\langle \mathbf{S} \rangle$ は通常、光強度 I 或いはエネルギー束密度と呼ばれる。また、光強度 I は、全ての調和波の振幅の自乗に比例する。ここで、平面単色波について考えると、

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2} |\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0| = \frac{1}{2} \frac{1}{c\mu_0} \mathbf{E}_0^2 = \frac{1}{2} \frac{c}{\mu_0} \mathbf{B}_0^2 = \frac{1}{2} c\mu_0 \mathbf{H}_0^2 \quad (2.22)$$

が得られる。尚、(2.20), (2.21) は物質中においても成り立つ。

2.3 物質内の電磁放射・線形光学

ここでは、物質中のマクスウェル方程式を考えていく。まず始めに、自由空間において巨視的な電荷が存在しない ($\rho = 0$) と仮定し、(2.7) ~ (2.11) を用いて (2.1) 式を近似すると、

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \ddot{\mathbf{E}} = \mu_0 \ddot{\mathbf{P}} + \mu_0 \mathbf{j} + \nabla \times \dot{\mathbf{M}} \quad (2.23)$$

となる。尚、実際には上式において、 $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{P})$ あるいは $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E})$ の項も生じているが、これは横波においては消滅する。よって、ここでは他に言及されない限り、前述の項は無視することとする。

この方程式より、電磁放射の場の発生源は、

- ・ 二階微分しても消滅することの無い双極子モーメント \mathbf{p} または分極 \mathbf{P}
- ・ 時間的に変化する電流密度
- ・ 時間的に変化する磁化の渦

であることが分かる。これと似た方程式は、磁場においても得ることができる。ここでは、さらに式を単純化するために非磁性の物質について考える。すると、(2.23) 式の右辺の第三項が消滅する。実際、全ての物質は反磁性を持っているが、これは 10^{-6} のオーダー程度の影響しか受けないので、ここでは無視することとする。また、常磁性および強磁性の寄与は、低周波数領域ではかなり大きくなることが考えられるが、高周波数領域では急激に減少する。結果として、非磁性の物質を考慮することは、強磁性の物質だとしても、IR で始まる広範囲の電磁スペクトルにわたる良好な近似をすることとなる。さらに、一般的な半導体は、強磁性、フェリ、または反強磁性ではなく反磁性である。また、光学特性においては無視できる程度の濃度の常磁性中心が電子常磁性共鳴 (EPR) に見られる。

ここで、(2.1d) における電流の項 \mathbf{j} についてももう少し考えていく。電流は電場によって動かされ、

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad (2.24)$$

と表される。このとき、 σ は伝導率である。真性半導体、或いはドーパさせた不純物の量が少ない半導体においては、キャリアの密度が小さくなるので、同様に伝導率 σ の値も小さくなる。よって、以下の不等式が得られる。

$$|\mathbf{j}| = |\sigma \mathbf{E}| \ll |\dot{\mathbf{D}}| \quad (2.25)$$

以下では、この場合を考慮し、(2.1d) における \mathbf{j} の項は無視して考える。(尚、ドーパさせた不純物の量が多い半導体においては、赤外線 IR による影響を受ける為、この考えは適用することができない。)

(2.1e) 式を (2.7) ~ (2.11) を用いて変形すると、

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \ddot{\mathbf{E}} = \mu_0 \ddot{\mathbf{P}} \quad (2.26)$$

が得られる。この式は、時間が経過しても消えない二次導関数を有するすべての双極子モーメント \mathbf{p} または偏光子 \mathbf{P} が電磁波を放射するという事実を述べている。

また、 \mathbf{P} と \mathbf{E} の間に線形関係があると仮定すると、

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{P} = \chi \mathbf{E} \quad (2.27a)$$

或いは、

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \mathbf{E} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad (2.27b)$$

$$\varepsilon = 1 + \chi \quad (2.27c)$$

が得られる。ここで、線形関係とは、より正確な情報が無い限りは、2つの物理量の間で値が決定されるような関係である。 ε と χ はそれぞれ、誘電関数と磁化率と呼ばれ、それらは線形応答関数と見なすことができる。

それぞれの量は、周波数 ω 波数ベクトル \mathbf{k} に依存し、 ε のように実部と虚部を持っている。

$$\varepsilon = \varepsilon(\omega, \mathbf{k}), \quad \chi = \chi(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon(\omega, \mathbf{k}) - 1 \quad (2.28)$$

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_1(\omega, \mathbf{k}) + i\varepsilon_2(\omega, \mathbf{k}) \quad (2.29)$$

また、誘電関数 $\varepsilon(\omega)$ において、 $\omega \cong 0$ のときを誘電率という。一般に、 ε と χ はテンソル量であるが、複屈折について考慮しない限りは、それらはスカラー量であると考ええる。

(2.27) の線形関係を用いて、(2.23) 式を変形すると

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon(\omega) \ddot{\mathbf{E}} = 0 \quad (2.30a)$$

となる。また、磁気特性を考慮する場合は、

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \mu(\omega) \varepsilon_0 \varepsilon(\omega) \ddot{\mathbf{E}} = 0 \quad (2.30b)$$

となる。このときの $\mu(\omega)$ を、透磁率という。

(2.30) の解は、(2.12) のような関数であり、

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 f(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad (2.31)$$

或いは、平面調和波を用いることで、

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \quad (2.32)$$

と表される。しかしながら、ここでの \mathbf{k} と ω の関係は、(2.13) 式のものとは大きく異なる。そこで、式 (2.30) に (2.31), (2.32) を代入すると、(2.13) とは異なり、

$$\varepsilon(\omega) = \frac{c^2 \mathbf{k}^2}{\omega^2} \quad (2.33)$$

の関係式が得られる。また、この式を変形することで、

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \varepsilon^{1/2}(\omega) = \frac{2\pi}{\lambda_V} \varepsilon^{1/2}(\omega) = \mathbf{k}_V \varepsilon^{1/2}(\omega) \quad (2.34)$$

が得られる。尚、 λ_V は真空中の波長を、 \mathbf{k}_V は真空中における波数ベクトルを表している。

ここで、 ε の平方根に対して、簡単のために複素数で表される屈折率 $\bar{n}(\omega)$ を導入する。

$$\bar{n}(\omega) = n(\omega) + i\kappa(\omega) = \varepsilon^{1/2}(\omega) \quad (2.35)$$

以下、(2.13) と (2.33) ~ (2.35) までの式について考える。真空中においては、電磁波は実数であり、かつ (2.13) より与えられる波数ベクトル \mathbf{k}_V に従って伝搬する。実際には、光は波数ベクトル \mathbf{k} で伝搬される。 \mathbf{k} は、式 (2.34) と (2.35) より、以下のように与えられる複素数であることが分かる。

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \bar{n}(\omega) = \frac{\omega}{c} n(\omega) + i \frac{\omega}{c} \kappa(\omega) = \frac{2\pi}{\lambda_V} \bar{n}(\omega) = k_V \bar{n} \quad (2.36)$$

よって、 \mathbf{k} は実数にも虚数にも複素数にもなりうることが分かる。また、(2.20) より、 \mathbf{k} の実部は波の振動部分を表しており、その向きは、 $\mathbf{D} \times \mathbf{B}$ と平行である。

平面波についてより詳細な式で表すと、

$$\mathbf{E}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] = \mathbf{E}_0 \exp\left[i\left\{\frac{\omega}{c} n(\omega) \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - \omega t\right\}\right] \exp\left[-\frac{\omega}{c} \kappa(\omega) \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}\right] \quad (2.37)$$

$[\hat{\mathbf{k}} : \mathbf{k}$ の方向、即ち伝搬方向における単位ベクトル]

$n(\omega)$ は物質中における光の振動伝搬を表している。これは、スネルの屈折の法則に関連して、屈折率と呼ばれることが多い。このことから、媒質中の波長 λ と真空中の波長 λ_V とは以下のような関係があることが分かる。

$$\lambda = \lambda_V n^{-1}(\omega) \quad (2.38)$$

(2.37) において、 κ は伝搬方向における波の減衰を表している。これは、吸収或いは消滅と呼ばれる。ここで、(2.37) を z 方向に伝搬する平行光線の光強度 I についての吸収則と比較すると、

$$I(z) = I(z=0)e^{-\alpha z} \quad (2.39a)$$

となる。また、(2.22) より I は、

$$I = \frac{1}{2} \frac{n(\omega)}{c \mu_0} \mathbf{E}_0^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c n(\omega) \mathbf{E}_0^2 \quad (2.39b)$$

となる。尚、このときの α は吸収係数と呼ばれる。

強度が振幅の自乗に比例することを考慮した上で、式 (2.37) と (2.39) を比較すると、

$$\alpha(\omega) = \frac{2\omega}{c} \kappa(\omega) = \frac{4\pi}{\lambda_V} \kappa(\omega) \quad (2.40)$$

よって (2.15) より、媒質中の光の位相速度は、

$$v_{ph} = \frac{\omega}{\text{Re}\{k\}} = c n^{-1}(\omega) \quad (2.41)$$

一方、群速度は、

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} \quad (2.42)$$

の関係式より、かなり複雑な関係を得ることができる(後で詳しく述べる。)