

# 状態密度と占有確率

1. 状態密度

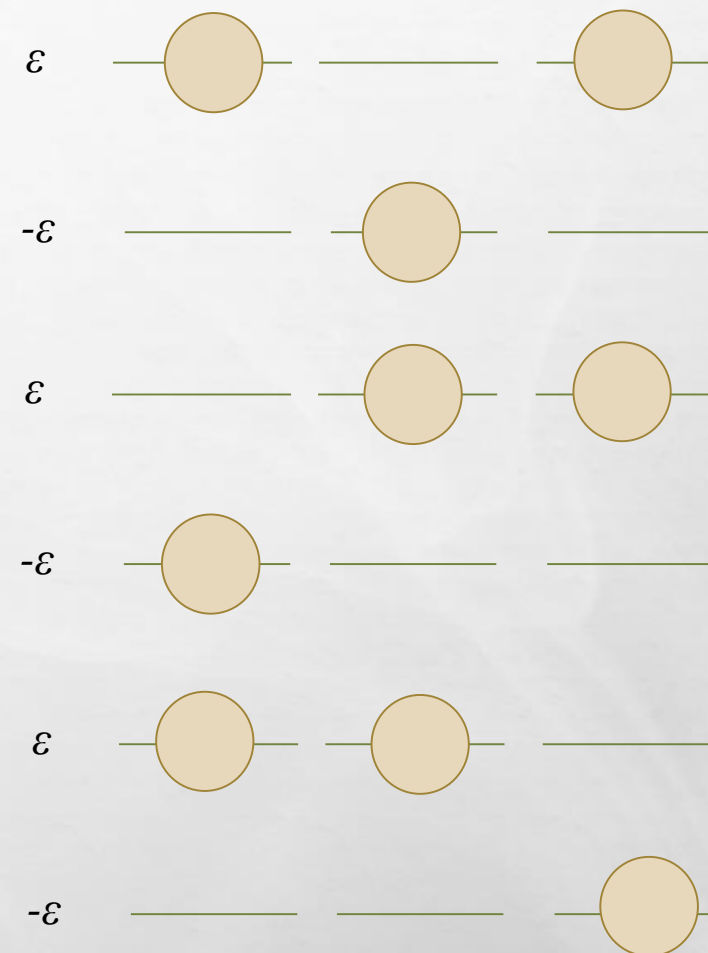
2. 占有確率(統計)

3. まとめ

- **状態密度**: 微小なエネルギーあたりの、系を占有しうる状態数。

⇒ 状態数: そのエネルギーの構成の仕方の数

- **占有確率**: あるエネルギー状態にある、粒子の平均数  
(その状態に粒子が入れる確率を規格化したもの)



# 1. 状態密度

その粒子を $d\tau = dxdydz$ の微小空間で見つけられる確率

$$w(\mathbf{r})d\tau = \varphi^*(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r})d\tau \quad (2.62A)$$



$$\int w(\mathbf{r})d\tau = \int \varphi^*(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r})d\tau = 1 \quad (2.62B)$$

$\varphi(\mathbf{r}) = \Omega^{-\frac{1}{2}} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$  (2.63)を式(2.62B)に代入

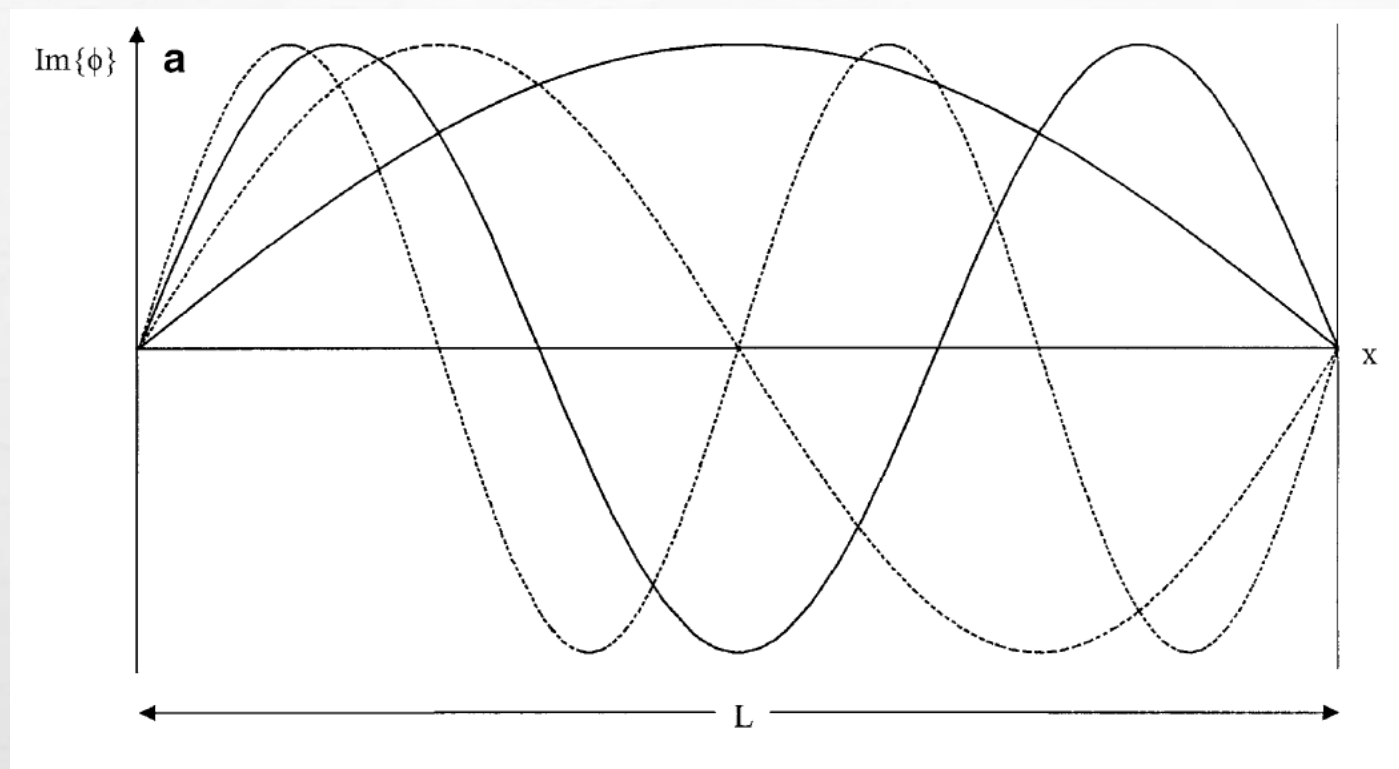
$$\Rightarrow \Omega^{-1} \int \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) d\tau = \Omega^{-1} \int d\tau = \Omega^{-1} V_{system} = 1 \quad (2.64)$$

$$\Omega = V_{system}$$



$$V_{system} = L^d \quad (d: \text{系の次元})$$

$$\Omega^{\frac{1}{2}} = L^{\frac{d}{2}}$$



$$k_i = n_i \frac{\pi}{L} \quad (2.67)$$

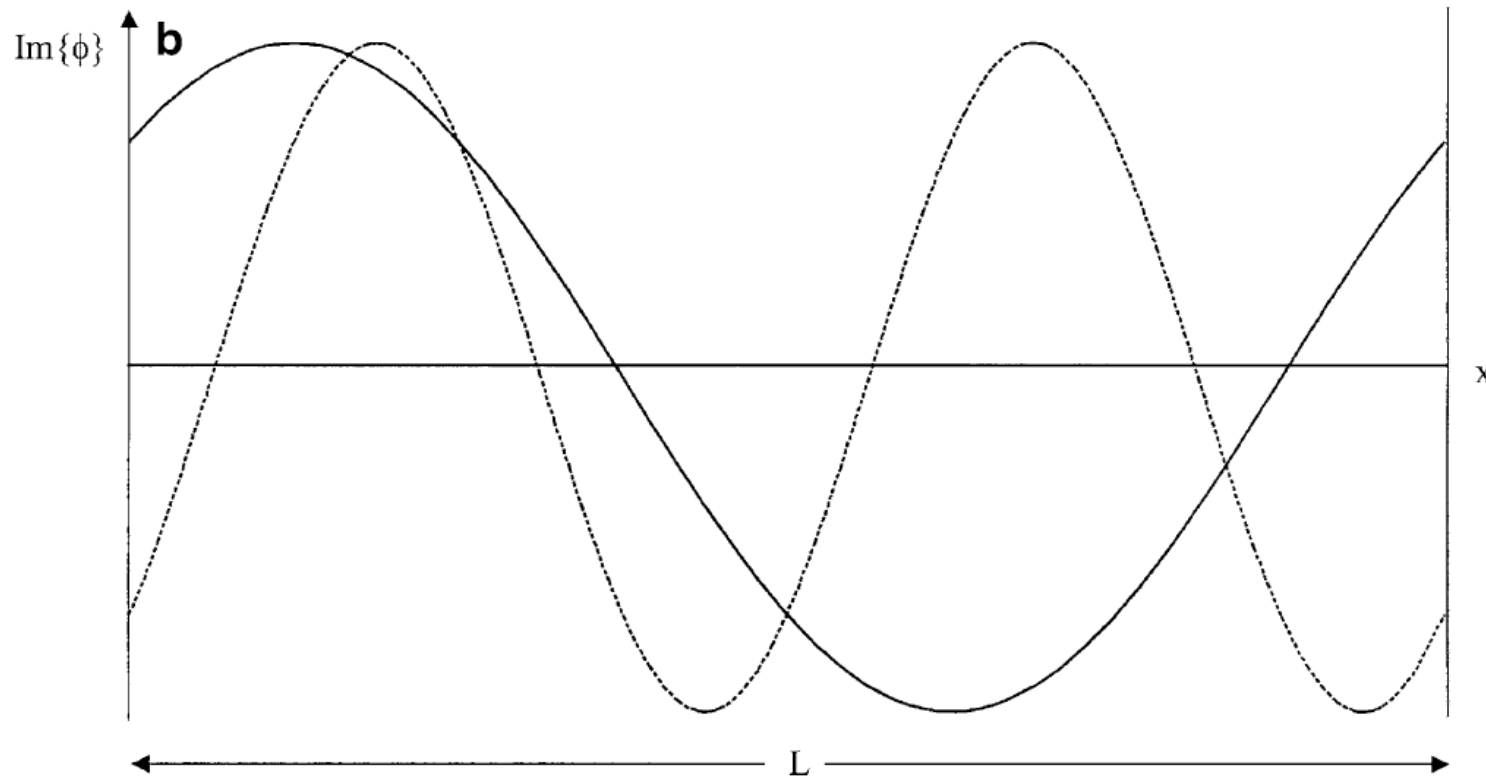
$n_i = 1, 2, 3 \dots$



$$\Delta k_i = \frac{\pi}{L} \quad (2.68)$$



$$V_k = \left(\frac{\pi}{L}\right)^d \quad (2.69)$$



**Fig. 2.3** Plane waves which have nodes at the boundaries **(a)** or which obey periodic boundary conditions **(b)**

$$k_i = n_i \frac{2\pi}{L} \quad (2.67)$$

$n_i = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$



$$\Delta k_i = \frac{2\pi}{L} \quad (2.68)$$



$$V_k = \left( \frac{2\pi}{L} \right)^d \quad (2.69)$$

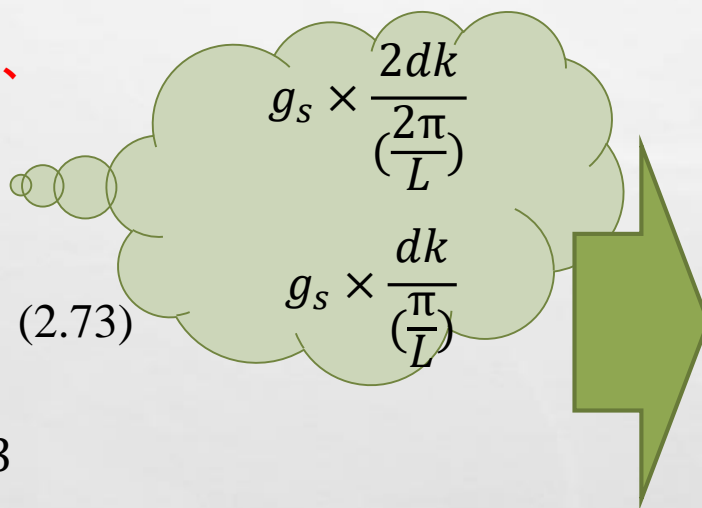


状態数を求めるにあたって

- $dV_k = 2dk$        $d = 1$
- $dV_k = 2\pi k dk$        $d = 2$     (2.72)
- $dV_k = 4\pi k^2 dk$        $d = 3$

$\hat{D}(k)dk = g_s \frac{dV_k}{V_k}$  で求められるので、

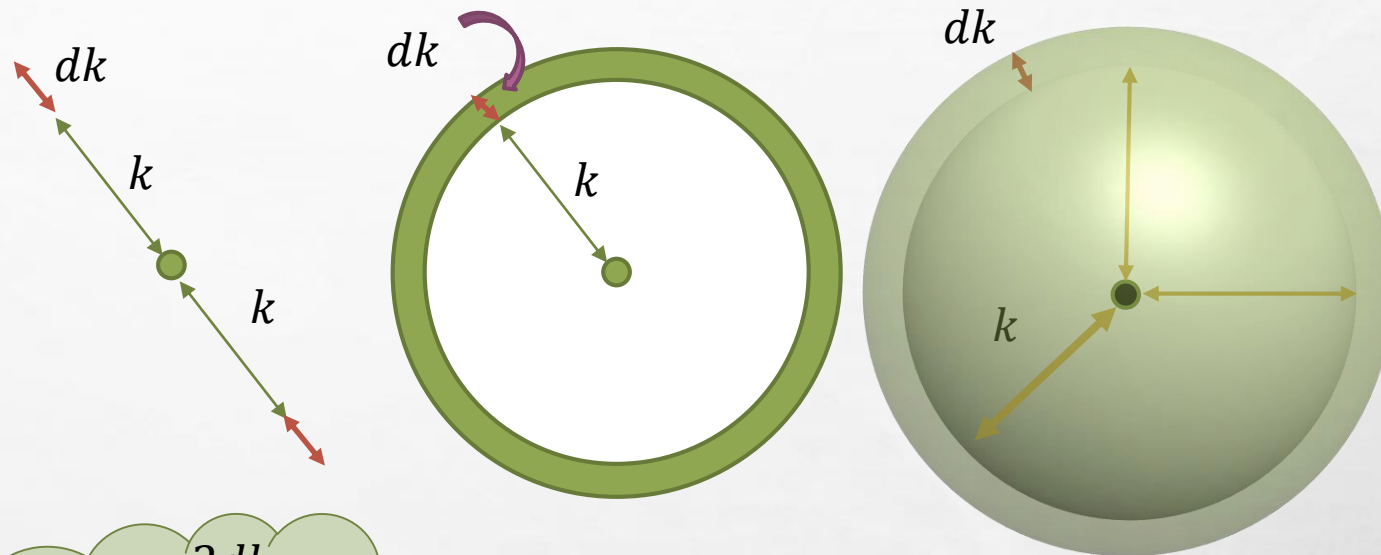
- $\hat{D}(k)dk = g_s \frac{L}{\pi} dk$        $d = 1$
- $\hat{D}(k)dk = g_s \frac{L^2}{2\pi} k dk$        $d = 2$     (2.73)
- $\hat{D}(k)dk = g_s \frac{L^3}{2\pi^2} k^2 dk$        $d = 3$



$$\hat{D}(k) \propto g_s L^d k^{d-1}$$


$$D(k) \propto g_s k^{d-1}$$

$$D(E) = \frac{\hat{D}(E)}{L^d}$$



- エネルギー軸上の状態数 $D(E)dE$ を求める

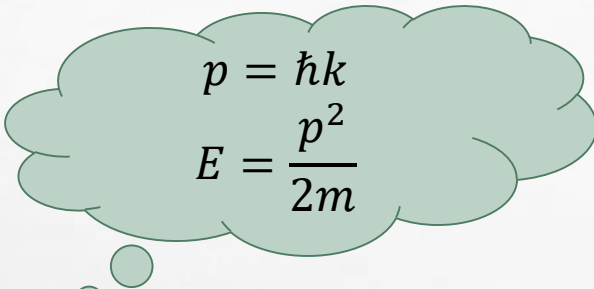
- $D(E) = D[k(E)] \frac{dk}{dE} \cdot dE = D[k(E)] \frac{1}{|grad_k E(k)|} dE \quad (2.77)$


$$k = \frac{E}{\hbar c} = \frac{\omega}{c} \quad \frac{dk}{dE} = \frac{1}{\hbar c} \quad d = 3 \quad (2.78)$$

$$D(E)dE = \frac{E^2}{\pi^2(\hbar c)^3} dE \quad (2.79a)$$

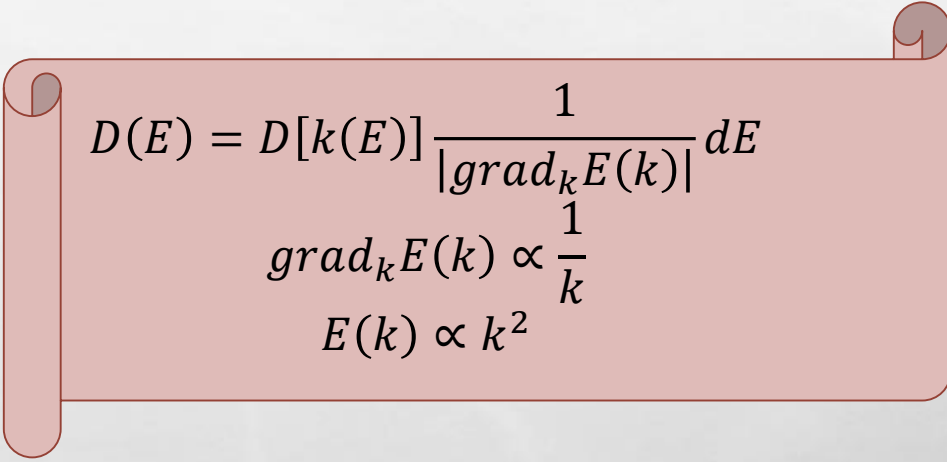
$$D(\omega) \propto \omega^2 d\omega$$




$$p = \hbar k$$
$$E = \frac{p^2}{2m}$$

- $E(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m}$  (2.79B)

- $D(E)dE \propto g_s E^{\frac{d}{2}-1} dE$  (2.79C)  $\longleftrightarrow$


$$D(E) = D[k(E)] \frac{1}{|\text{grad}_k E(k)|} dE$$
$$\text{grad}_k E(k) \propto \frac{1}{k}$$
$$E(k) \propto k^2$$

## 2. 占有確率(統計)

- ボルツマン統計 粒子を区別可能

$$f_B = \exp \left[ -\frac{(-E - \mu)}{k_B T} \right]$$

古典

- ボース・アインシュタイン統計 粒子を区別不可

$$f_{BE} = \left\{ \exp \left[ -\frac{(-E - \mu)}{k_B T} \right] - 1 \right\}^{-1}$$

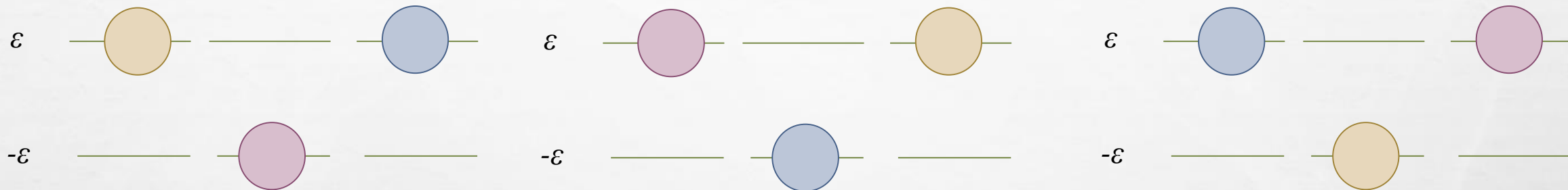
ボーズ粒子(光子等)  
整数スピン

- フェルミ・ディラックス統計 粒子を区別不可

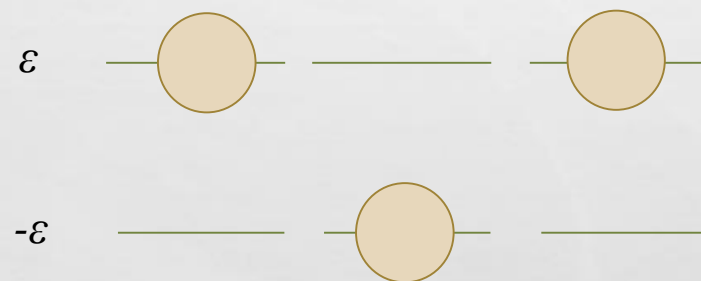
$$f_{FD} = \left\{ \exp \left[ -\frac{(-E - \mu)}{k_B T} \right] + 1 \right\}^{-1}$$

フェルミ粒子(電子等)  
半整数スピン

## 区别可能



## 区别不可能

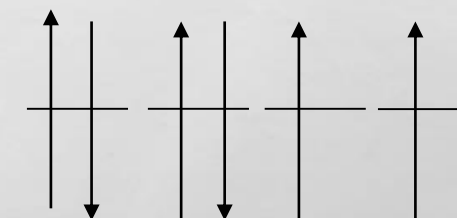
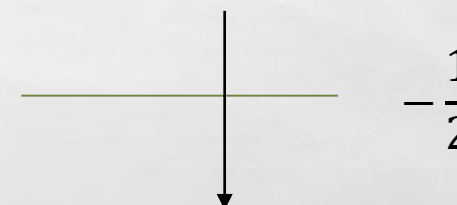
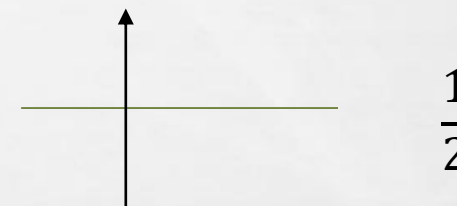
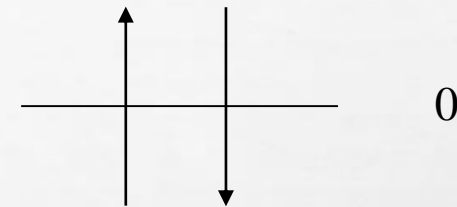


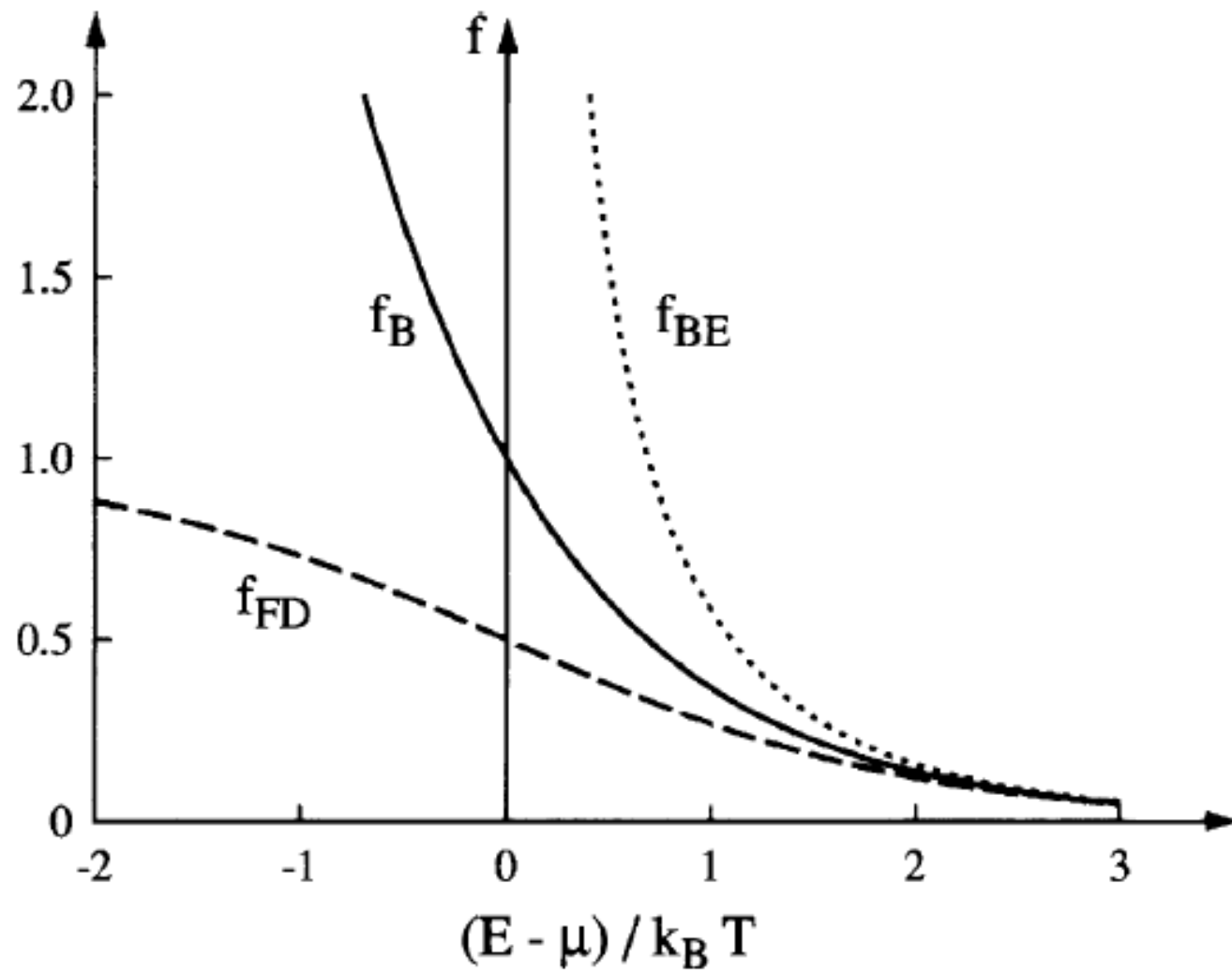
- 粒子1つのスピン角運動量

$$\pm \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2\pi} \right)$$

- 全体のスピン角運動量

$$\pm m_s \left( \frac{h}{2\pi} \right)$$





# 3. まとめ

- $E \sim E + dE$ 間における粒子数は

$$D(E)f(E, T, \mu)dE \quad (2.81)$$

- $\int D(E)f(E, T, \mu)dE = n \quad (2.82)$

系内の粒子の数 $N$ または密度 $n$ がわかっている場合、

粒子の密度は状態密度と占有する粒子の平均数の積に対する積分に等しい

$$D(E) = \frac{\hat{D}(E)}{L^d}$$



- 光子について考える。ボーズ・アインシュタイン統計に分散関係を代入すると  
プランクの黒体放射則が得られる。

$$N(\omega)d\omega = D(\omega)f_{BE}(\omega, T)d\omega \propto \omega^2 \left[ \exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1 \right]^{-1} d\omega \quad (2.83)$$

エネルギー $U(T)$ は

$$U(T) = \hbar \int_0^\infty \omega N(\omega) d\omega \propto \omega^3 \left[ \exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1 \right]^{-1} d\omega \quad (2.84)$$

シュテファンボルツマンの法則

$$U(T) \propto T^4 \int_0^\infty x^3 (\exp x - 1)^{-1} dx = T^4 A \quad (2.85)$$